

תרגיל בית 2

שאלה 1

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim Geo(p)$ מצאו אומד נראות מירבית עבור p וחשבו לו רווח סמך ברמת סמך $1 - \alpha$.

שאלה 2

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ויהי τ השברון ה-0.95 של ההתפלגות $P(X \leq \tau) = 0.95$.

- מצאו ביטוי ל- τ כפונקציה של הפרמטרים של ההתפלגות μ ו- σ^2 .
- בעת נניח ש- σ אינו ידוע, ואילו μ ידוע. מצאו אומד נראות מרבית ל- σ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.
- תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל- τ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.
- תחת התנאים מסעיף ב', מצאו אומד נראות מירבית ל- $\psi = \log(\sigma)$ ובנו רווח סמך ברמת סמך 0.95 עבורו.

שאלה 3

יהי מבחן מגודל α בו דוחים את H_0 אם ורק אם $T(X^n) \geq c_\alpha$. הוכיחו כי מתקיים

$$p\text{-value} = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(X^n) \geq T(x^n))$$

כאשר x^n הוא הערך הנצפה עבור המשתנים המקריים X^n .

שאלה 4

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim Uni(0, \theta)$ ונרצה לבחון את ההשערות $\begin{cases} H_0: 0 < \theta \leq 0.5 \\ H_1: \theta > 0.5 \end{cases}$ בעזרת מבחן בעל אזור דחייה מהצורה $R = \{X_{(n)} > c\}$.

- חשבו את עוצמת המבחן
- חשבו את גודל המבחן
- עבור איזו בחירה של c מתקבל מבחן בעל רמה $\alpha = 0.05$? (שימו לב לכך ששואלים על רמה ולא על גודל)
- מה יהיה $p\text{-value}$ המתקבל עבור מדגם בגודל $n = 20$ עם $X_{(20)} = 0.48$? מה המסקנה לגבי H_0 ?

שאלה 5

א. הוכיחו כי כאשר השערת האפס אינה נכונה, כלומר כאשר $\theta_* \neq \theta_0$, עוצמת מבחן וולד נתונה בקירוב על ידי

$$\beta(\theta_*) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} + z_{\alpha/2}\right) + \phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} - z_{\alpha/2}\right)$$

ב. הראו כי $\beta(\theta_*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

שאלה 6

יהיו $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

א. בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

ב. בנו מבחן וולד עבור בדיקת ההשערות

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$