עידן פוגרבינסקי

עילי אבני

325069565

212778229

א(1

$$\frac{odds(D=1 \mid E=1)}{odds(D=1 \mid E=0)} = \frac{\frac{P_{11}}{P_{10}}}{\frac{P_{01}}{P_{00}}} = \frac{P_{11}P_{00}}{P_{01}P_{10}}$$

$$P(E=1 \mid D=1) = \frac{P_{11}}{P_{01}+P_{11}}$$

$$P(E=1 \mid D=0) = \frac{P_{10}}{P_{00}+P_{10}}$$

$$\frac{odds(E=1 \mid D=1)}{odds(E=1 \mid D=0)} = \frac{\frac{\frac{P_{11}}{P_{01}+P_{11}}}{1-\frac{P_{11}}{P_{01}+P_{11}}}}{\frac{\frac{P_{10}}{P_{00}+P_{10}}}{1-\frac{P_{10}}{P_{00}+P_{10}}}} =$$

$$= \frac{\frac{P_{11}}{P_{01}}}{\frac{P_{10}}{P_{00}}} = \frac{P_{11}P_{00}}{P_{01}P_{10}} =$$

לכן מתקיים שוויון.

1

ב)

$$RR = \frac{P_{11}(P_{00}+P_{01})}{(P_{10}+P_{11})P_{01}} =$$

$$OR = \frac{P_{11}P_{00}}{P_{01}P_{10}}$$

$$P(D=1) = P_{11}+P_{01} \Rightarrow 0 \le P_{01}, P_{11} \le P(D=1) \longrightarrow 0$$

$\Downarrow$ משפט הסנדוויץ'

$$P_{01}, P_{11} \longrightarrow 0$$

$$\frac{OR}{RR} = \frac{\frac{\cancel{P_{11}}P_{00}}{\cancel{P_{01}}P_{10}}}{\frac{\cancel{P_{11}}(P_{00}+P_{01})}{(P_{10}+P_{11})\cancel{P_{01}}}} = \frac{\frac{P_{00}}{P_{10}}}{\frac{P_{00}+P_{01}}{P_{10}+P_{11}}} = \frac{P_{00}(P_{10}+\overset{\to 0}{P_{11}})}{P_{10}(P_{00}+\underset{\to 0}{P_{01}})}$$

$$\lim_{P(D=1)\to 0} \frac{OR}{RR} = \frac{P_{00}P_{10}+0}{P_{10}\cdot P_{00}+0} = 1$$

מכאן ניתן להסיק כי כאשר ההסתברות לתחלואה קטנה ($P(D=1)$

אזי $OR \sim RR$, שזה קירוב די טוב.

נוסח מבחן, והנחה בשביל זה ②

$$\begin{cases} H_0 : \forall_{i,j} \quad P_{ij} = P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j} \\ H_1 \qquad \text{else} \end{cases}$$

$$L() = \prod_{i=1}^{\#00} P_{00} \cdot \prod_{i=1}^{\#10} P_{10} \cdot \prod^{\#01} P_{01} \cdot \prod^{\#11} P_{11} = P_{00}^{\#00} \cdot P_{10}^{\#10} \cdot P_{01}^{\#01} \cdot P_{11}^{\#11} =$$

תחת H_0

$$= P_{0\cdot}^{\#00+\#01} \cdot P_{\cdot 0}^{\#00+\#10} \cdot P_{1\cdot}^{\#10+\#11} \cdot P_{\cdot 1}^{\#01+\#11}$$

ולכן, כפי שראינו כבר מספר פעמים, האומדי נראות מרבית

$$\hat{P}_{1\cdot} = \frac{X_{1\cdot}}{n}, \quad \hat{P}_{0\cdot} = \frac{X_{0\cdot}}{n}, \quad \hat{P}_{\cdot 1} = \frac{X_{\cdot 1}}{n}, \quad \hat{P}_{\cdot 0} = \frac{X_{\cdot 0}}{n}$$

תחת H_0

$$\hat{P}_{ij} = \frac{X_{ij}}{n}$$

כללי

ה־P

ולכן פונקציית הנראות תחת H_0 תהיה

$$L(\hat{P}) = \left(\frac{X_{0\cdot}}{n}\right)^{X_{0\cdot}} \cdot \left(\frac{X_{\cdot 0}}{n}\right)^{X_{\cdot 0}} \cdot \left(\frac{X_{1\cdot}}{n}\right)^{X_{1\cdot}} \cdot \left(\frac{X_{\cdot 1}}{n}\right)^{X_{\cdot 1}}$$

ומכאן נקבל כי

$$\lambda = 2\log \frac{\prod \left(\frac{X_{ij}}{n}\right)^{X_{ij}}}{\left(\frac{X_{0\cdot}}{n}\right)^{X_{0\cdot}} \cdot \left(\frac{X_{\cdot 0}}{n}\right)^{X_{\cdot 0}} \cdot \left(\frac{X_{1\cdot}}{n}\right)^{X_{1\cdot}} \cdot \left(\frac{X_{\cdot 1}}{n}\right)^{X_{\cdot 1}}}$$

$$\lambda \sim \chi^2_1 \qquad R.R \to \lambda > \chi^2_{1,\alpha}$$

וכפי שלמדנו בכיתה,

תחת H_0 יש 2 דרגות חופש

תחת H_1 יש 3 דרגות חופש

③ 1) בתחילה נסמן כמה קיצורים כדי לשמור על הכתיבה קומפקטית ואסתטית.

$$\pi_x = \pi\left(B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_{1,2} x_1 x_2\right)$$

$$\pi_1 = \pi\left(B_0 + B_1(x_1+1) + B_2 x_2 + B_{1,2}(x_1+1) x_2\right)$$

$$\pi_2 = \pi\left(B_0 + B_1 x_1 + B_2(1+x_2) + B_{1,2} x_1 (1+x_2)\right)$$

$$\log \frac{\frac{\pi_1}{1-\pi_1}}{\frac{\pi_x}{1-\pi_x}} = \log\left(\frac{\pi_1}{1-\pi_1}\right) - \log\left(\frac{\pi_x}{1-\pi_x}\right) =$$

$$= \eta(\pi_1) - \eta(\pi_x) =$$

$$= B_0 + B_1(x_1+1) + B_2 x_2 + B_{1,2}(x_1+1)x_2 - \left(B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_{1,2} x_1 x_2\right) =$$

$$= B_1 + B_{1,2} x_2 \Rightarrow OR = e^{B_1 + B_{12} x_2}$$

באופן דומה, קל לראות כי עבור שינוי יחידה אחת ב x_2 נקבל

$$OR = e^{B_2 + B_{12} x_1}$$

$$\log \frac{\frac{\pi_2}{1-\pi_2}}{\frac{\pi_x}{1-\pi_x}} = \cdots = B_2 + B_{12} x_1$$

שוב נגדיר π_x, π_1, π_2

4

נשים לב כי ההבדל בין שני המודלים הוא

אם B_{12} שווה לאפס או לא. ולכן ננסח את

ההשערות שלנו בצורה הבאה $\quad H_0 \quad B_{12}=0$

$H_1 \quad B_{12}\neq 0$

פונקציית הנראות תחת H_0. נסמן $\pi(\hat{B}_0^0+\hat{B}_1^0x_{i1}+B_2^0x_{i2}) =: \pi_{\hat{B}_0}$

$$L(\hat{B}_0^0,\hat{B}_1^0,\hat{B}_2^0)=\prod_{i=1}^{n} Y_i\cdot\pi_{\hat{B}_0}+(1-Y_i)(1-\pi_{\hat{B}_0})$$

$$l(\hat{B}^0)=\sum_{i=1}^{n}\log\left(Y_i\cdot\pi_{\hat{B}_0}+(1-Y_i)(1-\pi_{\hat{B}_0})\right)$$

פונקציית הנראות תחת H_1 נסמן $\pi(\hat{B}_0^1+\hat{B}_1^1x_{i1}+\hat{B}_2^1x_{i2}+\hat{B}_{12}^1x_{i1}\cdot x_{i2}) =: \pi_{\hat{B}_1}$

$$L(\hat{B}_0^0,\hat{B}_1^0,\hat{B}_2^0,\hat{B}_{12}^0)=\prod_{i=1}^{n} Y_i\cdot\pi_{\hat{B}_0}+(1-Y_i)(1-\pi_{\hat{B}_0})$$

$$l(\hat{B}^1)=\sum_{i=1}^{n}\log\left(Y_i\cdot\pi_{\hat{B}_1}+(1-Y_i)(1-\pi_{\hat{B}_1})\right)$$

מספר דרגות החופש של H_0 הוא 3, מכיוון ש $B_{12}=0$

לעומת H_1 שיש בו 4 דרגות חופש.

$$\lambda=2\left(l(\hat{B}^0)-l(\hat{B}^1)\right)$$

$$R.R \qquad \lambda > \chi^2_{4-3}=\chi^2_1$$

5) א) נשים לב כי $S(X,B)\in\mathbb{R}^p$ ולכן $S_n(X,B)\in\mathbb{R}^n$

ולכן ע"פ מה שנאמר בנוסחה מתקיים $\mathbb{R}^{p\times p}\ni I(B)$

ב)

$$S(X,B)=\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(f(X,B)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\frac{\partial f(X,B)}{\partial B_0}}{f(X,B)}\\ \vdots\\ \frac{\frac{\partial f(X,B)}{\partial B_p}}{f(X,B)}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{f(X,B)}\begin{pmatrix}\frac{\partial f(X,B)}{\partial B_0}\\ \vdots\\ \frac{\partial f(X,B)}{\partial B_p}\end{pmatrix}=\frac{1}{\pi(B^TX)}\begin{pmatrix}\frac{\partial\pi(B^TX)}{\partial B_0}\\ \vdots\\ \frac{\partial\pi(B^TX)}{\partial B_p}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi(B^TX)}\cdot\begin{pmatrix}X_0\,\pi(B^TX)(1-\pi(B^TX))\\ \vdots\\ X_p\,\pi(B^TX)(1-\pi(B^TX))\end{pmatrix}=\frac{\pi(B^TX)}{\pi(B^TX)}\cdot X\left(1-\pi(B^TX)\right)=$$

$$X\left(1-\pi(B^TX)\right)=S(X,B)$$

$$I(\theta)_{i,j} = E\left[\frac{\partial}{\partial B_j}\left(1-\pi(B^T x)\right)x_i\right]$$

קבוע

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial B_j}\left(x_i - \pi(B^T x)x_i\right)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial B_j}x_i - \frac{\partial}{\partial B_j}\pi(B^T x)x_i\right] =$$

$$= E\left[x_i \cdot \frac{\partial}{\partial B_j}\pi(B^T x_j)\right] = E\left[x_i x_j \cdot \pi(B^T x)(1-\pi(B^T x))\right]$$

מכיוון שאנו כברסט, בפר״מים של X כב׳לא יותר מקריים

$$E\left[x_i x_j \cdot \pi(B^T x)(1-\pi(B^T x))\right] = x_i x_j \cdot \pi(B^T x)(1-\pi(B^T x))$$

ומכאן $I(\theta) = (X\pi(1-\pi)X^T) \Rightarrow \hat{var} = (X\pi(1-\pi)X^T)^{-1}$

ב) נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n} I_i(B) = I_n(B)$

אזי מצ״ר $I_n(B) = \sum_{i=1}^{n} X_i \pi_i(1-\pi_i)X_i^T = X^T\hat{V}X$

$$\Downarrow$$

$$\hat{var} = (X^T\hat{V}X)^{-1}$$

```
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import norm
```

A.

$$\pi_i = \pi(\beta X_i) = \pi(\beta_0 + \beta_{alcohol_i} * X_{alcohol_i} + \beta_{BMI_i} X_{BMI_i} + \beta_{age_i} X_{age_i}$$

B.

```
#load the data
df = pd.read_csv("/data/workspace_files/ex4.csv")
X = df[["alcohol", "BMI", "age"]]
X.insert(0, 'one', 1, True)
y = df["chd"]
```

```
reg = LogisticRegression(penalty="none", fit_intercept=False).fit(X, y)
beta_star_hat = reg.coef_[0]
a= [print(f"the beta_{x[0]} is {x[1]}") for x in zip(["zero", "alcohol", "BMI"
```

```
the beta_zero is -9.906057116302838
the beta_alcohol is 0.019612208107966704
```

```
the beta_BMI is -0.021686645217299128
the beta_age is 0.20531261330705375
```

C.

```
all_log_probs = reg.predict_log_proba(X)
sum_log_probs = sum([all_log_probs[i][yi] for i, yi in enumerate(y)])
print(f"the log likelyhood is {sum_log_probs}")
```

```
the log likelyhood is -6.827115831144858
```

D.

```
all_probs = reg.predict_proba(X)
thing = []
for p_1, p_2 in all_probs:
    thing.append(p_1*p_2)
V = np.diag(thing)
var = np.linalg.inv(X.T@V@X)

print(f"The variance is {var}")
```

```
The variance is [[ 5.87559147e+01 -2.59985608e-02 -1.17187406e+00 -5.2853908
 [-2.59985608e-02  7.44952162e-04  7.03496142e-04 -1.78907336e-04]
 [-1.17187406e+00  7.03496142e-04  5.35554305e-02 -5.50322653e-03]
 [-5.28539086e-01 -1.78907336e-04 -5.50322653e-03  1.35966443e-02]]
```

E.

```
X_sample = np.array([1, 8, 27,50])

logit = X_sample@np.array(beta_star_hat).T
p = np.exp(logit)/(1+np.exp(logit))
```

```
0.48273980924207194
```

```
se = (X_sample @ var @ X_sample)**0.5
z_alpha = norm.ppf(0.975)
almost_ci = [p-se*z_alpha, p+se*z_alpha]
ci = [1/(1+np.exp(-x)) for x in almost_ci]
print(se)
print(f"the confindence interval is {ci}")
```

```
0.7668761040764567
the confindence interval is [0.26496707223277977, 0.8792969588274144]
```