ד

(א

$$E[\hat{F}_n(x)] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i \le x\}}\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i \le x\}}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[I_{\{x_i \le x\}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(x) = F(x)$$

(ב

$$Var[\hat{F}_n(x)] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_i 1_{\{x_i \le x\}}\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_i 1_{\{x_i \le x\}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}Var\left[1_{\{x_i \le x\}}\right] = \frac{1}{n}\cdot\left(F(x)(1-F(x))\right) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

שונות של ברנולי

(ג

על מנת שהאומד יהיה עקיב, נדרוש כי יתקיים $MSE \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$$MSE_{F(x)}(\hat{F}_n(x)) = Var[F_n(x)] + bias[F_n(x)]^2 =$$

קבוע

$$= \frac{F(x)(1-F(x))}{n} + 0 = \frac{1}{n}\cdot F(x)(1-F(x)) = \frac{1}{n}\cdot C =$$

$$\frac{1}{n}\cdot C \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן האומד עקיב.

2)

א)

נזכיר כי $I\{X_i \le x\} \sim ber(F(x))$ לכל i

מכאן נובע כי $\hat{F}_n(x)$ הינו ממוצע של מ״מ ש.ה ב.ת

בעלי שונות $F(x)(1-F(x))$, ותוחלת $F(x)$ ולכן

ע״פ משפט הגבול המרכזי

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{F}_n(x)-F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

לאחר ליפה הכפלה והעברת אגפים נגיע ל

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow{D} N\left(F(x), \frac{F(x)(1-F(x))}{n}\right)$$

ב)

$$T(F) = P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a) =$$

$$\int_a^b f(x) = \int_{dom(x)} I\{a < x \le b\} f(x)\,dx = \int_{dom(x)} I\{a < x \le b\}\, dF(x)$$

ולכן לינארי לפי הגדרה.

המשך בעמוד הבא

המשך שאלה 2 סעיף ב'

אומד ה plugin ל-θ יהיה $\hat{\Theta} = T(\hat{F}_n) = \frac{1}{n}\sum_i 1\{a < x_i \le b\}$

$$T(\hat{F}_n) = \frac{1}{n}\sum_i P(x_i \le b) - P(x_i < a) = \hat{F}_n(b) - \hat{F}_n(a)$$

ולכן לפי סעיף הקודם מתקיים

$$\hat{F}_n(b) - \hat{F}_n(a) \xrightarrow{D} N\left(F(b)-F(a), \frac{F(b)(1-F(b))}{n} + \frac{F(a)(1-F(a))}{n}\right)$$

ומכאן, רווח הסמך הוא:

$$T(\hat{F}_n) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{F(b)(1-F(b)) + F(a)(1-F(a))}{n}}$$

שאלה 3

$$\operatorname{cov}\left(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)\right) = E\left(\hat{F}_n(x)\cdot \hat{F}_n(y)\right) - E\left[\hat{F}_n(x)\right]\cdot E\left[\hat{F}_n(y)\right] =$$

$$= E\left(\left(\frac{1}{n}\sum 1\{x_i \le x\}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum 1\{x_i \le y\}\right)\right) - F(x)\cdot F(y) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum 1\{x_i \le \min\{x,y\}\}\right) + \sum_{i\neq j} E\, 1\{x_i \le x\}1\{x_j \le y\}\right) - F(x)F(y) =$$

$$\frac{1}{n}\cdot F(\min\{x,y\}) + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} F(x)F(y) - F(x)F(y) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot F(\min\{x,y\}) + \left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)F(x)F(y) =$$

$$= \frac{1}{n}F(\min\{x,y\}) - \frac{n+1}{2n}F(x)F(y)$$

$$\left(\frac{n-1}{2n} - 1\right) = \frac{n-1-2n}{2n} = -\frac{n+1}{2n}$$