סטטיסטיקה 2

מטלה 2

עידן פוגרבינסקי – 325069565

עילי אבני 212778229

שאלה 3

על פי ההגדרה $p - value = \inf\{\alpha: T(x^n) \in R_\alpha\}$, ניזכר בכך שאזור דחייה הוא מקיים $R_\alpha = (C_n, \infty)$

כך מתקיים $p - value = \inf\{\mathrm{a}: \mathrm{T}(\mathrm{x}^\mathrm{n}) \geq C_n\}$

בשילוב עם הטענה הקודמת עם ההגדרה לגודל המבחן, נראה כי גודל המבחן הוא $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq C_p\right)$,

כלומר הסופרימום על ההסתברות שהמבחן חורג לאזור הדחייה תחת משפחת $\theta \in \Theta_0$.

כעת ניזכר כי אנו דוחים את השארת האפס אממ $T(x^n) \geq C_p$, **אזי** $\boldsymbol{\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right) \leq p}$

כאשר p גודל המבחן.

נניח בשלילה כי $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right) \neq p$ מאחר שהראנו את הטענה הקודמת, יתכן רק

ש$p < \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right)$.

נגדיר מבחן בו דוחים אממ $T(X^n) \geq T(x^n)$, **מאחר ש**$p < \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right)$, מצאנו מבחן בו

נדחה את H_0 ברמה $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right)$ קטנה מ p, בסתירה לכך שרמת המבחן היא p

ולכן $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(T(X^n) \geq T(x^n)\right) = p = p - value$

שאלה 5

נתחיל לרשום את הביטויים ולפתח אותם, עד שנגיע לתוצאה המבוקשת

$$\beta(\theta_*) = P\left(|W| > z_{\frac{\alpha}{2}} \middle| \theta_*\right) = P\left(\left|\frac{\hat{\theta}-\theta_o}{\widehat{se}}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}} | \theta_*\right) = P\left(\left|\frac{\hat{\theta}-\theta_* + \theta_* - \theta_0}{\widehat{se}}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}} | \theta_*\right) =$$
$$= P\left(\frac{\hat{\theta}-\theta_*}{\widehat{se}} + \frac{\theta_*-\theta_0}{\widehat{se}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) + P\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{\widehat{se}} + \frac{\theta_*-\theta_0}{\widehat{se}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$
$$= P\left(\frac{\hat{\theta}-\theta_*}{\widehat{se}} > Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) + P\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{\widehat{se}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) + \Phi\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right)$$

נימוק למעבר השלישי $\frac{\hat{\theta}-\theta_*}{\widehat{se}}$ מתפלג נורמלי

סעיף ב

נציין כי תחת הנחת האפס מתקיים: $\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta_*$ וגם $\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\widehat{se}}$ אסימפטוטית נורמאלי בשילוב הטענות הללו מתקיים $\widehat{se} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ולכן $\left|\frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$ כאשר $\theta_0 \neq \theta_*$.

נפצל למקרים:

$$\theta_0 < \theta_*$$

$$\frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = \Phi(-\infty) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(\theta_*) = \lim_{n\to\infty} 1 - \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) + \Phi\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\theta_0 > \theta_*$$

- $\frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = \Phi(\infty) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(\theta_*) = \lim_{n\to\infty} 1 - \Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) + \Phi\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\theta_0-\theta_*}{\widehat{se}}\right) = 1 - 1 + 1 = 1$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \beta(\theta_*) = 1$ כאשר $\theta_0 \neq \theta_*$.