נתחיל ממציאת אנ"מ.

$$\mathcal{L}(x,p) = \prod_{i=0}^{n} f(x_i) = \prod (1-p)^{x_i} p$$

$$\log(\mathcal{L}(x,p)) = \sum_{i=0}^{n} \log\left((1-p)^{x_i-1}\right) + \sum_{i=0}^{n} \log(p) = \log(1-p)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) + n\log(p)$$

$$\frac{\partial \log(\mathcal{L}(x,p))}{\partial p} = \frac{-1}{1-p} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$$

$$n - np = p\sum_{i=1}^{n} x_i - np \iff \frac{n}{p} = \frac{1}{1-p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \hat{p} \Leftarrow$$ אנ"מ

מאחר שהאנ"מ מתפלג אסימפטוטית נורמלית

ניתן לחשב את רווח הסמך $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{se}$.

נחשב את $\hat{se}$ באמצעות

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(p)}}$$

נחפש את $I_n(p)$ ובשביל זה נמצא קודם

את $E_x[S'(p,x)]$ שמופיע הבא

זומי שלגזירה
ממוצע

$$S(x,p)=\frac{d}{dp}\log\left((1-p)^{x}p\right)\overset{\Downarrow}{=}\frac{1}{p}+\frac{1-x}{1-p}$$

$$S'(x,p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{1-x}{(1-p)^2}\Rightarrow E_x\left[-S'(x,p)\right]=E_x\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1-x}{(1-p)^2}\right]$$

לפי לינאריות של
תוחלת

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1-E_x[x]}{(1-p)^2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1-\frac{1}{p}}{(1-p)^2}=$$

$$\Downarrow$$

$$I_n(p)=n\cdot I(\hat{p})=n\cdot\frac{1}{\hat{p}^2}-n\frac{1-\frac{1}{\hat{p}}}{(1-\hat{p})^2}=n\frac{1}{\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}-n\frac{1-\frac{\sum x_i}{n}}{\left(1-\frac{n}{\sum x_i}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}-n\frac{1-\frac{\sum x_i}{n}}{\left(1-\frac{n}{\sum x_i}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{p}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{I_n(p)}}$$

נציב

רווח הסמך:

$$\boxed{\frac{n}{\sum x_i}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\frac{\left(\sum^{n} x_i\right)^2}{n}-\frac{n-\sum x_i}{\left(1-\frac{n}{\sum x_i}\right)^2}}}}$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} - \frac{(J-\mu)}{\sigma}\right) \Rightarrow T = \sigma Z_{0.95} + \mu$$ א) 2

ב) ג׳ גכר

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)$$

$$l(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$-n\log(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2$$

$$l'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2 = 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2 = n$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{n}}$$

כפי שסמנו רווח סמך אסימ׳ הוא $\hat{\sigma} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{se}$, נחשב את $\hat{se}$

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\sigma)}}$$

$$S(x,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(-\log(\sigma) - \log(\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}$$

$$-S'(x,\sigma) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2 \cdot 3\sigma^2}{\sigma^6} = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4}$$

$$I(\sigma) = -\mathbb{E}[S'(x,\sigma)] = \mathbb{E}\left[-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right] = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^2}\mathbb{E}[Z^2] =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^2}\left[\mathrm{var}(Z) + \overset{0}{\mathbb{E}}(Z)^2\right) = \frac{2}{\sigma^2} = I(\hat{\sigma})$$

רווח הסמך הוא

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\hat{\sigma})}} = \sqrt{\frac{1}{n\frac{2}{\hat{\sigma}^2}}} \Rightarrow \hat{\sigma} \pm Z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}$$

שאלה 2

ג)

$z_{0.95} \approx 2$

בסעיף ש' אמרנו כי $\tau \approx 2\sigma + \mu$

ולכן האנ"מ יהיה $\hat{\tau} = 2\hat{\sigma} + \hat{\mu} = 2\sqrt{\Sigma_i (x_i - \bar{x}_n)^2} + \bar{x}_n$

מאחר שמתקיים $\frac{\hat{\sigma}_n - \sigma}{se(\sigma)} \approx N(0,1)$, $\hat{\tau} = g(\hat{\sigma}_n)$

מתוך שיטת הדלתא מתקבל

$$N(0,1) \approx \frac{\hat{\tau} - \tau}{2\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{2n}}} = \frac{\hat{\tau} - \tau}{|g'(\sigma)| \cdot \hat{se}(\sigma)}$$

ומכאן רווח הסמך הוא $\hat{\tau} \pm 4\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{2n}}$

כלומר

$$2\hat{\sigma}_n + \hat{\mu} \pm 4\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{2n}}$$

ד) שוב ניתן להעזר בשיטת הדלתא, מתקיים $\psi' = \frac{1}{\sigma}$

אני ניתן לטעון שהאנ"מ הוא $\hat{\psi}_n = \log(\hat{\sigma}_n)$ ומכאן גם

נמצא את רווח הסמך $\hat{\psi} \pm 2\frac{1}{\hat{\sigma}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{2n}}$

שאלה 4

א)

$$B(\theta)=P_\theta(X_{(n)}>c)=1-P(X_n\le c)=1-\prod_{i}^{n}p(X_i\le c)$$

$$\begin{cases} 0 & c>\theta \\ 1 & c<0 \\ 1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n & else \end{cases}$$

ב)

$$\alpha:=\sup_{\theta\in\Theta_0} B(\theta)\overset{\substack{\text{מתקבל מקסימום} \\ \text{עבור } \theta=\frac{1}{2}}}{=} B\left(\tfrac{1}{2}\right)=\begin{cases} 1-(2c)^n, & \theta\ge c \\ 0, & \theta<c \end{cases}$$

ג) נחפש c כך שגודל המבחן יהא שווה ל 0.05

$$1-(2c)^n\le 0.05$$

$$\Updownarrow$$

$$0.95\le(2c)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{0.95}}{2}\le c} \Longrightarrow$$

נבחר $\frac{\sqrt[n]{0.95}}{2}=c$

3) $n=20 \Leftarrow c=\frac{\sqrt[20]{0.95}}{2}=0.498$

לפי שאלה 3.

$$p\text{-value}=P_{0.5}(X_{(20)}\ge 0.48)=1-\left(\frac{0.48}{0.5}\right)^{20}=0.558>c$$

ולכן לא נדחה את השערת האפס ברמת מובהקות 0.05.

שאלה 6

א) אנו יודעים כי הנא"מ הוא אסימפטוטי נורמלי $\hat{\mu}=\bar{X}_n$

$$-\log f(x,\mu) = -\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) = \log(\sigma)+\frac{1}{2}\log(2\pi)+\left(\frac{x-\mu}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma^2}$$

$$-(\log f(x,\mu))' = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \qquad -(\log f(x,\mu))'' = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\Downarrow$$

$$I(\hat{\mu}) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial^2\mu}\log f(x,\mu)\right] \Rightarrow W = \frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

נדחה אמ"מ $Z_{\frac{\alpha}{2}} < |W|$

ב) שוב מאחר ושהנא"מ הוא נורמלי אסימפטוטי, כפי שראינו בשיעור:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

לפי שיטת הדלתא, $\hat{se}(\hat{\sigma}^2)=2\hat{\sigma}_n\cdot\hat{se}(\hat{\sigma}_n)=$

$$=2\hat{\sigma}_n^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}} = \hat{\sigma}_n^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}$$

ולאחר הצבה נקבל כי $W = \frac{\hat{\sigma}^2-\sigma_0^2}{\hat{\sigma}^2\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}}$

כאשר $W > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ נדחה את המבחן.