הפקולטה
למדעי המחשב

ת.ז הסטודנט/ית: ______________________

מס' חדר: _________ מס' נבחן: ________

<u>דוגמת מבחן 1 בקורס</u>: אנליזה מתמטית

<u>קוד נושא</u>: 612120

<u>תאריך הבחינה</u>:

<u>שנה"ל</u> : תשפ"ד <u>סמסטר</u>: ב' <u>מועד</u>:

שם המרצה: פרופ' שמואל איציקוביץ

שם המתרגל: מר רענן שכטר

משך הבחינה: 80 דקות

<u>הוראות לנבחנים:</u>

א. לפניך 4 שאלות ברירה.
ב. בכל שאלה ישנם 5 היגדים כשאחד מהם מקנה את מירב הנקודות (25 נקודות) ושאר ההיגדים מקנים ניקוד חלקי, אם בכלל
ג. בכל שאלה עליך לסמן את התשובה המקנה את מירב הנקודות (25 נקודות) מבין 5 האפשרויות הרשומות.
ד. כל השאלות שוות במשקלן.
ה. יש למלא **בכתב יד ברור** במקומות המיועדים **בחציו הימני של דף הקידוד** את שם ביה"ס, חדר המבחן, מספר הנבחן, שם הקורס, תאריך הבחינה, שם המרצה, מספר תעודת הזהות (מספר בן תשע ספרות, כולל ספרת ביקורת ועם אפס מקדים באם נדרש) ואת מספר השאלון (המופיע בצדו השמאלי העליון של השאלון)
ו. ***** חשוב מאוד** :
בדף הקידוד יש לרשום ולקדד את מספר השאלון מימין לשמאל (להוסיף אפסים משמאל במידת הצורך).
ז. בכל שאלה יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר ולסמנה במקום המיועד בצידו השמאלי של דף הקידוד, **<u>בעט שחור או כחול בלבד ובאופן ברור ומודגש</u>**
ח. אין לסמן את התשובות על גבי דף הקידוד במַדְגֵּשׁ (מַרְקֵר) זוהר!
ט. רק דף הקידוד ייבדק!

- יש לענות על כל השאלות

- הבחינה עם חומר עזר–

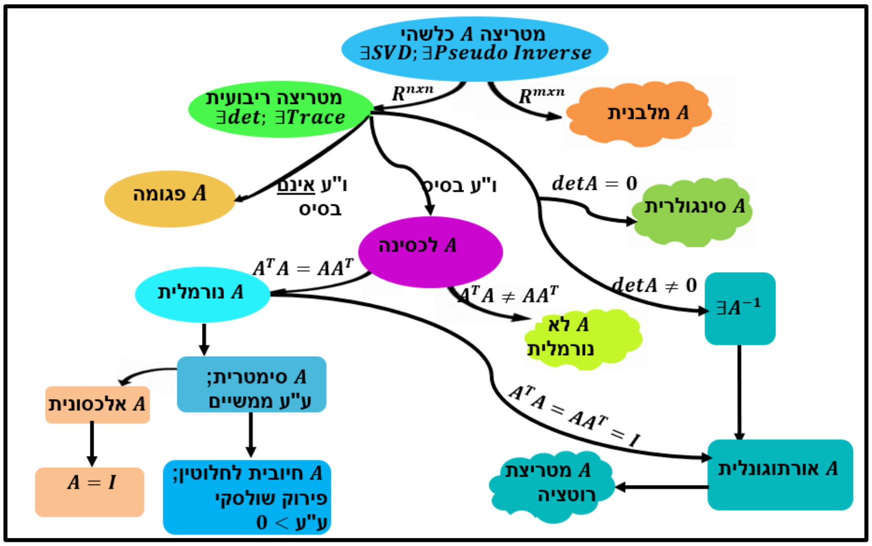
- מצורפים מטה דפי עזר.
- בנוסף **מותר שימוש בדף אישי אחד בלבד ובו סיכומים ונוסחאות שהנבחן/ת בחר/ה לרשום. הדף הוא לשימושו/ה של הנבחן/ת בלבד ואינו ניתן להעברה. על הדף יירשם מספר תעודת זהות של הנבחן/ת והדף יימסר למשגיחים בסיום המבחן.**

- שימוש במחשבון כיס : כן – **fx-82ES , fx-82MS וְ- fx82es plus בלבד!**

- בתום המבחן יש להחזיר את טופס המבחן ואת הדף האישי

בהצלחה !!!

דפי עזר



מכפלות

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = A = \vec{u}\vec{v}^T$$

$$(A \odot B)_{ij} = A_{i,j} B_{ij}$$

מטריצת ההטלה

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

המשוואה הנורמלית

$$\boldsymbol{A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}}$$

תהליך GS

$$\vec{u}_1 = \vec{b}_1;$$

$$\vec{u}_k = \vec{b}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{u}_j \vec{u}_j^{\,T}}{\|\vec{u}_j\|^2} \overrightarrow{b_k}\,;\ k = 2,3,\cdots,n$$

פירוק SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\|A\|_2 = Max_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = Max_{\|\vec{x}\|_2=1} \|A\vec{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_{Max}(A^T A)} = \sigma_1$$

$$\|A\|_F = \sqrt{Trace(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

$$\|A\|_N = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_r$$

נוסחאות גרדיינט ביחס לווקטור

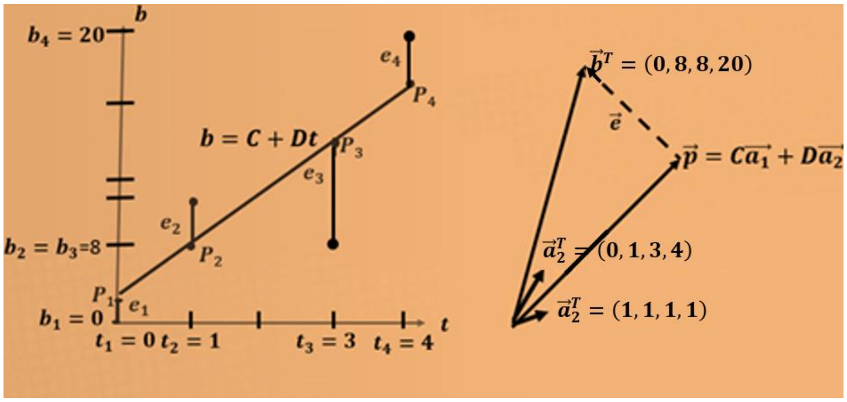
$f: R^n \to R$	$\nabla_{\vec{x}} f$
$f = \vec{u}^T \cdot \vec{x}$	$\nabla_{\vec{x}} \vec{f} = \vec{u}^T$
$f = \vec{u}^T \cdot \vec{x}$	$\nabla_{\vec{u}} f = \vec{x}^T$
$f = \vec{x}^T A \vec{x}\ ; \quad A \varepsilon R^{nxn}$	$\nabla_{\vec{x}} f = \vec{x}^T (A^T + A)$
$f = \vec{y}^T A \vec{x}\ ;\ A \varepsilon R^{mxn}$	$\nabla_{\vec{x}} f = \vec{y}^T A$
$f = \vec{y}^T A \vec{x}\ ;\ A \varepsilon R^{mxn}$	$\nabla_{\vec{y}} f = \vec{x}^T A^T$
$\vec{f} = \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^T \cdot \vec{x}}$	$\nabla_{\vec{x}} f = \dfrac{\vec{x}^T}{\|\vec{x}\|_2} ; \vec{x} \neq \vec{0}$
$f = \|\vec{x}\|_2^2 = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$	$\nabla_{\vec{x}} \vec{f} = 2\vec{x}^T$

נוסחאות גרדיינט ביחס למטריצה (A, B הן מטריצות, $\vec{v}$, $\vec{u}$ הם וקטורים)

$\boldsymbol{\nabla_A \big(Tr(AB) \big)} = B^T$
$\nabla_B \big(Tr(AB) \big) = A^T$
$\nabla_A \big(Tr(A^T BA) \big) = B^T A + BA$
$\nabla_A (\vec{u}^T A \vec{v}) = \vec{u} \vec{v}^T$
$\nabla_A \big(det(A) \big) = Cofactor\ Matrix$

שאלה 1:

נתונים הגרפיים הבאים :



יש למצוא את הישר $b = C + Dt$ כך שסכום ריבועי המרחקים

$E = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$ הוא מינימלי, את מערכת המשוואות הרלבנטית ואת המשוואה הנורמלית. כמו כן נתון שֶ-

$$f(x, y) = y^4 + x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 5y + 8 : R^2 \to R$$

להלן 5 טענות :

1. מערכת המשוואות המתקבלת היא : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$
2. מערכת המשוואות המתקבלת היא : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$
3. המשוואה הנורמלית היא :
$$\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$
4. הישר המבוקש הוא : $b = 1 + 4t$
5. $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 6 & -4 \\ -4 & 12y^2 + 8 \end{pmatrix}$

בחר/י בתשובה הנכונה:

א. רק טענות 1,4,5
ב. רק טענות 4,5
ג. רק טענה 5 נכונה
ד. רק טענה 1 נכונה
ה. רק טענות 1,4 נכונות

שאלה 2

יש לחשב את SVD של $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

להלן 5 טענות:

1. הע״ע של A^TA הם: $\lambda = 18,2$, $E_{18} = Span\left\{\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}$

$$E_2 = Span\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\};\ \Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{18} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. הע״ע של A^TA הם: $\lambda = 8,2$, $E_8 = Span\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\end{bmatrix}\right\}$

$$E_2 = Span\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\};\ \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{8}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

3. הע״ע של A^TA הם: $\lambda = 8,2$, $E_8 = Span\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\end{bmatrix}\right\}$

$$E_2 = Span\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}$$

4. $\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{18} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$
5. $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

בחר/י בתשובה הנכונה:

א. רק טענות 1,4,5 נכונות
ב. רק טענה 4 נכונה
ג. רק טענה 5 נכונה
ד. רק טענות 2,3 נכונות
ה. רק טענות 1,4 נכונות

<u>שאלה 3</u>

יהיו $\vec{x}, \vec{y} \varepsilon R^n; A \varepsilon R^{nxn}; c \varepsilon R$.

להלן 5 טענות:

1. $\nabla_{\vec{x}} \|A\vec{x} - \vec{y}\|^2 = -2(A\vec{x} - \vec{y})^T$
2. $\nabla_{\vec{y}} \|A\vec{x} - \vec{y}\|^2 = -2(A\vec{x} - \vec{y})^T A$
3. $\nabla_{\vec{y}} (exp(\vec{y})^T \vec{x}) = exp(\vec{y})^T \odot \vec{x}^T$
4. $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y}^T \sin(A) \vec{x}) = \vec{y}^T cos(A)$
5. $\nabla_A Tr(BA^T C) = CB$ (8 נקודות)

בחר/י בתשובה הנכונה:

א. רק טענות 2,3,5 נכונות
ב. רק טענות 3,5 נכונות
ג. רק טענה 2 נכונה
ד. רק טענות 2,3 נכונות
ה. רק טענות 1,3,4 נכונות

<u>שאלה 4</u> נתון פירוק SVD הבא:

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{11} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{3\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{22}}{11}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{3\sqrt{11}}{11}\end{pmatrix}$$

הבסיס האורתונורמלי של R^n הבא: $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\cdots,\vec{w}_n\}$, וְ- $B=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\vec{w}_j\vec{w}_j^T$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\varepsilon R$.

להלן 5 טענות:

1. $A\varepsilon R^{2x3}$ וְ- $rank(A)=2$
2. $\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11}\\ -\frac{\sqrt{11}}{11}\\ \frac{3\sqrt{11}}{11}\end{bmatrix}\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי לְ- $Null(A)$
3. B מטריצה חיובית לחלוטין
4. $\vec{w}_i$ הוא וקטור עצמי של B המתאים לע״ע λ_i עבור $i=1,2,\cdots,n$
5. אם A מטריצה סימטרית וְ- $\vec{u},\vec{v}$ הם כך שְ- $A\vec{u}=5\vec{u}; A\vec{v}=7\vec{v}$ אזי במכפלת דוֹט $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$

בחר/י בתשובה הנכונה:

א. רק טענות 1,3,4 נכונות

ב. רק טענות 1, 2,4,5 נכונות

ג. רק טענות 4 נכונה

ד. רק טענה 2 נכונה

ה. רק טענות 1,2 נכונה