

Notas de Geometría Proyectiva

Índice general

1. Geometría Diferencial de las Curvas	1
1.1. Movimientos Rígidos	1
1.2. Curvas en Espacios Euclídeos	3
1.3. Invariantes	6
1.4. Curvas Planas	14
1.5. Curvas en el Espacio	17
1.6. Resultados Globales	21
2. Geometría Diferencial de las Superficies	31
2.1. Aspectos locales	31
2.2. Geometría Intrínseca y Coeficientes Métricos	39
2.3. Curvas sobre una Superficie	47
2.4. Resultados Globales	55

Capítulo 1

Geometría Diferencial de las Curvas

1.1. Movimientos Rígidos

Cuando estudiamos Geometría, buscamos entender las propiedades de ciertos objetos (geométricos) que permanecen invariantes bajo ciertos movimientos. En esta primera parte, nos interesará estudiar propiedades de las curvas bajo la acción de movimientos rígidos

Definición 1.1.1. Un **movimiento euclídeo** (también llamado rígido) es una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva las distancias. Es decir $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Al conjunto de movimientos euclídeos de \mathbb{R}^n lo denotaremos por $\text{Iso}(n)$.

Observación 1.1.2. Notar que, por definición, la distancia entre dos puntos es un invariante euclídeo.

Nuestro primer objetivo será caracterizar a los movimientos rígidos. Para eso, recordemos un par de hechos básicos de Álgebra Lineal. Una matriz $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ se dice **ortogonal** si satisface que $AA^t = I$. Se define el **grupo ortogonal** como

$$O(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$$

Es fácil probar que $O(n)$ es de hecho un grupo. Recordemos también que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in O(n)$ tenemos que $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Por lo tanto, $\|Ax\| = \|x\|$.

Notemos que si $A \in O(n)$ y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = Ax + b$ es un movimiento euclídeo. En efecto, esto se debe a que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|f(x) - f(y)\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\|$.

Lema 1.1.3. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Si $\|x - z\| = \|z - y\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$, entonces $z = \frac{x + y}{2}$. Esto es, la existencia y unicidad del punto medio entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Si $x = z$ o $y = z$, no hay nada que probar. Por otra parte, si $z \neq x, y$, tenemos que $\|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\|$. Es decir, se da la igualdad en la desigualdad triangular. Pero esto implica que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$x - z = \lambda(z - y)$. Tomando norma, se sigue que $|\lambda| = 1$ y así $x - z = z - y$. Por lo tanto, $z = \frac{x+y}{2}$. Como queríamos probar. \square

Teorema 1.1.4 (Mazur-Ulam). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, f es un movimiento euclídeo si y sólo si es de la forma $f(x) = Ax + b$ con $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Más aún, esta expresión es única. Es decir, si $f(x) = A'x + b'$ con $A' \in O(n)$ y $b' \in \mathbb{R}^n$, entonces $A = A'$ y $b = b'$.*

Demostración.

(\Leftarrow) Ya lo probamos.

(\Rightarrow) Probemos primero que f satisface la siguiente identidad:

$$f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Veamos que para $t = \frac{1}{2}$ se satisface 1.1. En efecto, como f es euclídea, se cumple que:

$$\left\| f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\| = \frac{1}{2} \|f(x) - f(y)\| = \left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y) \right\|$$

y por el Lema anterior 1.1.3 se sigue que $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ es el punto medio entre $f(x)$ y $f(y)$.

Veamos ahora que la identidad 1.1 se satisface para los racionales diádicos. Es decir, $t = \frac{\ell}{2^n}$ donde $\ell \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Para esto, procederemos por inducción en n . Si $n = 0$ es trivial. Supongamos entonces $n > 0$ y $\ell \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Si ℓ es par, entonces $t = \frac{(\ell/2)}{2^{n-1}}$ y por hipótesis inductiva ya estamos. Si no, podemos escribir $\ell = 2\ell' + 1$. En ese caso, tenemos que $\frac{\ell'}{2^{n-1}} < \frac{\ell}{2^n} < \frac{\ell'+1}{2^{n-1}}$ y $\frac{\ell}{2^n}$ es el promedio de los extremos. Por hipótesis inductiva, sabemos que se cumplen:

$$\begin{aligned} f\left(\left(1 - \frac{\ell'}{2^{n-1}}\right)x + \frac{\ell'}{2^{n-1}}y\right) &= \left(1 - \frac{\ell'}{2^n}\right)f(x) + \frac{\ell'}{2^{n-1}}f(y) \\ f\left(\left(1 - \frac{\ell'+1}{2^{n-1}}\right)x + \frac{\ell'+1}{2^{n-1}}y\right) &= \left(1 - \frac{\ell'+1}{2^n}\right)f(x) + \frac{\ell'+1}{2^{n-1}}f(y) \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones y usando que para $t = \frac{1}{2}$ el resultado vale, se sigue lo deseado.

Ahora bien, f es continua por ser una isometría. Por la continuidad y la densidad de los diádicos en el intervalo $[0, 1]$ se sigue que se satisface la identidad 1.1 para todo $t \in [0, 1]$. Si $t > 1$ se sigue que y está entre x y $z = (1-t)x + ty$ con $y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + \frac{1}{t}z$ y ahí vale el resultado pues $\frac{1}{t} \in [0, 1]$. Para $t < 0$ es análogo.

Consideremos entonces la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(x) - f(0)$. Veamos que g es una transformación lineal. Notemos que por la identidad 1.1 se

tiene que $f(tx) = f((1-t)0 + tx) = (1-t)f(0) + tf(x)$. Manipulando esa ecuación obtenemos $g(tx) = f(tx) - f(0) = t(f(x) - f(0)) = tg(x)$. Ahora bien, notemos que $\frac{g(x+y)}{2} = g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} - f(0) = \frac{g(x) + g(y)}{2}$. Como g es lineal, debe existir una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $g(x) = Ax$ y así tenemos que $f(x) = Ax + f(0)$. Por lo tanto, sabemos que $\|A(x-y)\| = \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. En particular A es inversible. Además, $\|A(x-y)\|^2 = \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 - 2\langle Ax, Ay \rangle$ y $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$. Se sigue entonces que $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. Esto implica que A es ortogonal, como queríamos.

Para concluir, si $f(x) = Ax + b = A'x + b'$, entonces $b = f(0) = b'$ y así $(A - A')x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, lo que implica que $A = A'$. \square

Corolario 1.1.5. El conjunto $\text{Iso}(n)$ es un subgrupo del grupo de las biyecciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demostración. Claramente la identidad es una isometría. Si $f, g \in \text{Iso}(n)$, entonces por el Teorema de Mazur-Ulam, $f(x) = A_f x + b_f$, $g(x) = A_g x + b_g$ y entonces la composición $(f \circ g)(x) = A_f(A_g x + b_g) + b_f = A_f A_g x + (A_f b_g + b_f)$ también es una isometría pues $A_f A_g \in O(n)$ por ser $O(n)$ un grupo. Por último, como la inversa de A_f es A_f^t es fácil verificar que si $g(x) = A_f^t x - A_f^t b_f$ tenemos que $f \circ g = g \circ f = 1$, y así $g \in \text{Iso}(n)$ es la inversa de f . \square

Por el Teorema de Mazur-Ulam, podemos escribir a cada $f \in \text{Iso}(n)$ de la forma $f(x) = A_f x + b_f$ con $A_f \in O(n)$ y $b_f \in \mathbb{R}^n$. Como $A_f \in O(n)$ tenemos que $A_f A_f^t = I$ y así debemos tener que $\det A_f = \pm 1$. Consideramos $\text{Iso}^+(n) = \{f \in \text{Iso}(n) : \det A_f = 1\}$ y $\text{Iso}^-(n) = \{f \in \text{Iso}(n) : \det A_f = -1\}$. Notemos que claramente $\text{Iso}^+(n) \subseteq \text{Iso}(n)$ es un subgrupo. Además, si recordamos que el **grupo especial ortogonal** se define como $\text{SO}(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ se tiene que $\text{Iso}^+(n)$ se corresponde con $\text{SO}(n)$. A las transformaciones de $\text{Iso}^+(n)$ se las denomina **movimientos directos**. Es claro que $\text{Iso}^+(n) \sqcup \text{Iso}^-(n) = \text{Iso}(n)$ y que $\text{Iso}^+(n)$ está en biyección con $\text{Iso}^-(n)$ simplemente tomando $M \in O(n)$ con $\det M = -1$ y considerando la aplicación $Ax + b \mapsto MBx + b$. Finalmente, es fácil ver que la aplicación $\pi : \text{Iso}(n) \rightarrow O(n)$ dada por $\pi(f) = A_f$ es un morfismo de grupos cuyo núcleo consiste en las traslaciones.

1.2. Curvas en Espacios Euclídeos

Para afrontar el aspecto diferencial del estudio de las curvas necesitaremos asumir alguna condición de regularidad con respecto a las derivadas. De ahora en más, fijemos $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ a gusto y cada vez que digamos *diferenciable* nos estaremos refiriendo a *de clase \mathcal{C}^k* . Además, cada vez que escribamos (a, b) nos referiremos a un intervalo abierto donde posiblemente los extremos son $\pm\infty$.

Definición 1.2.1. Una **curva paramétrica** en \mathbb{R}^n es un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ junto con una función diferenciable $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto) de modo tal que la imagen de σ es \mathcal{C} . Se dice que σ es una **parametrización** de la curva. La **traza** de una

curva es la imagen de una parametrización de la misma. Decimos que la parametrización es **regular** en $t \in I$ si $\sigma'(t) \neq 0$. En caso contrario, se dice que la curva es **singular** en t . Si la curva es regular en todo punto de I decimos que es una **curva regular**.

Observación 1.2.2. La condición de regularidad no es solamente una arbitrariedad técnica. Es la condición que necesitamos para poder decir que la curva es localmente el gráfico de una función continua. En efecto, consideremos por simplicidad el caso de una curva plana $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. Si $x'(t_0) \neq 0$, entonces por el Teorema de la Función Inversa, tenemos U entorno abierto de t_0 , V entorno abierto de $x(t_0)$, y una función $x^{-1} : V \rightarrow U$ diferenciable tal que $x(x^{-1}(s)) = s$. Luego, para cada $t \in U$ tenemos $s \in V$ con $t = x^{-1}(s)$, y así $\sigma(t) = (x(x^{-1}(s)), y(x^{-1}(s))) = (s, f(s))$ donde $f(s) = y(x^{-1}(s))$. Es decir, en U , la curva es el gráfico de f .

Ejemplo 1.2.3.

- Si $p \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la curva parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = p + tv$ es un segmento de recta que pasa por p y tiene dirección v . Es regular pues $\alpha'(t) = v$. Esta curva es de clase \mathcal{C}^∞ .
- Los gráficos de funciones son otro ejemplo clásico de curvas parametrizadas. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^k entonces el gráfico

$$\text{Graf}(f) = \{(t, f(t)) : t \in I\}$$

es una curva parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$. Trivialmente es regular pues $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$ y es de clase \mathcal{C}^k .

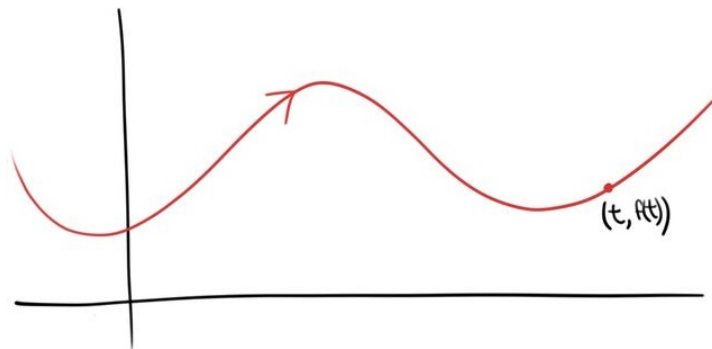


Figura 1.1: El gráfico de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Podemos dar curvas planas en términos de **coordenadas polares**. Es decir, parametrizamos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(\theta) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta))$, donde $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es una función de clase \mathcal{C}^k . Veamos que α parametriza a una curva regular. En efecto, $\alpha'(\theta) = \rho'(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \rho(\theta)(-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Como $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ y $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ son vectores unitarios ortogonales, por Pitágoras tenemos que $\|\alpha'(\theta)\|^2 = |\rho(\theta)|^2 + |\rho'(\theta)|^2$. Eso implica que α' sólo se anula si $\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$ y eso no puede pasar pues ρ siempre es positiva.

- La parametrización es muy importante. El conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ admite muchas parametrizaciones. Por ejemplo, $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, t)$ y $\beta(t) = (t^3, t^3)$. La primera es regular pues $\alpha'(t) = (1, 1)$ mientras que la segunda no, pues $\beta'(t) = (3t^2, 3t^2)$ es singular en $t = 0$.
- Consideremos la curva parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, t^3)$. Esta curva no es regular, pues $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ es singular en $t = 0$. Gráficamente, se puede ver que en el punto $t = 0$ la curva no admite una recta tangente.

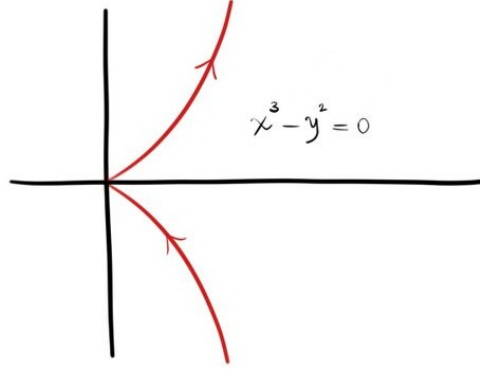


Figura 1.2: La imagen de la curva $x^3 - y^2 = 0$, con su singularidad en $(0, 0)$.

Lema 1.2.4. Sea $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Si $c \in (a, b)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ y $\sigma|_{(c - \varepsilon, c + \varepsilon)}$ es inyectiva. Es decir, toda curva es localmente inyectiva.

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso. Es decir, existe $c \in (a, b)$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, en cada intervalo $\left(c - \frac{1}{m}, c + \frac{1}{m}\right)$ existen $x_m < y_m$ de tal modo que $\sigma(x_m) = \sigma(y_m)$ y además $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = c = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$. Tomemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $\sigma_i(x_m) = \sigma_i(y_m)$, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi_m^{(i)} \in (x_m, y_m)$ tal que $\sigma'_i(\xi_m^{(i)}) = 0$. Claramente, $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m^{(i)} = c$. Por lo tanto (asumiendo una regularidad de clase \mathcal{C}^1 al menos) tendremos que $0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma'_i(\xi_m^{(i)}) = \sigma'_i(c)$. Por lo tanto, $\sigma'(c) = 0$, contradiciendo que σ es una curva regular. \square

Corolario 1.2.5. Si $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular, entonces todo punto de \mathbb{R}^n tiene un número finito de preimágenes en cada intervalo cerrado y acotado $[c, d] \subseteq (a, b)$.

Demostración. En virtud del lema anterior, para cada $x \in [c, d]$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\sigma|_{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)}$ es inyectiva. El conjunto $\{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) : x \in [c, d]\}$ es claramente un cubrimiento por abiertos de $[c, d]$, y por la compacidad, deben existir x_1, \dots, x_ℓ de modo tal que $[c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$. Por lo tanto, si $v \in \mathbb{R}^n$, se sigue que:

$$\sigma^{-1}(v) \cap [c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}) \cap \sigma^{-1}(v)$$

Como la restricción de σ a cada intervalo $(x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$ es inyectiva, esa unión tiene a lo sumo ℓ elementos. Y estamos. \square

Ejemplo 1.2.6. Por lo general es falso que la fibra sea finita si no nos restringimos a un compacto. Por ejemplo, $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ tiene fibra $\sigma^{-1}((x_0, y_0)) = \{t_0 + 2k\pi : (\cos(t_0), \sin(t_0)) = (x_0, y_0), k \in \mathbb{Z}\}$, que es infinita para cualquier punto (x_0, y_0) en la circunferencia unitaria. Esto nos muestra que una curva posee más información que solamente su traza. Además, tenemos varias parametrizaciones distintas que describen una misma traza, como por ejemplo $\sigma_1 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ o $\sigma_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma_2(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

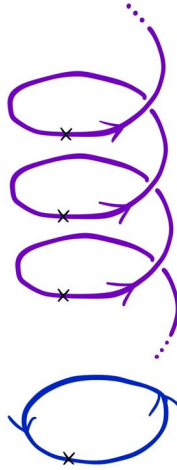


Figura 1.3: Una parametrización de S^1 cuya fibra no es finita.

Definición 1.2.7. Una **reparametrización** es una función $u : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

Definición 1.2.8. Si $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular y $u : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es una reparametrización, entonces $\sigma \circ u : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular y se dice que $\sigma \circ u$ es una **reparametrización** de σ . Decimos u que es una **reparametrización directa** si $u'(t) > 0 \forall t \in (c, d)$.

Como ya vimos, una curva posee más información que meramente su traza. Vamos a estudiar propiedades de las curvas que sean invariantes por movimientos rígidos y por reparametrización.

1.3. Invariantes

Definición 1.3.1. Sea $\mathcal{C}(n)$ el conjunto de pares (σ, s_0) con $\sigma_I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular y $s_0 \in I$. Un miembro del conjunto $\mathcal{C}(n)$ se llama un **elemento de curva**.

Definición 1.3.2. Un **invariante escalar** es una función $V : \mathcal{C}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ que permanece invariante bajo movimientos rígidos y reparametrizaciones directas. Es decir, tal que $V(f \circ \sigma, s_0) = V(\sigma, s_0)$ para todo $f \in \text{Iso}^+(n)$ y además $V(\sigma \circ u, u^{-1}(s_0)) = V(\sigma, s_0)$ para toda reparametrización directa $u : (a, b) \rightarrow \text{Dom}\sigma$.

Definición 1.3.3. Un **invariante vectorial** es una función $V : \mathcal{C}(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple que $V(f \circ \sigma, s_0) = A_f V(\sigma, s_0)$ para todo $f \in \text{Iso}^+(n)$ y $V(\sigma \circ u, u^{-1}(s_0)) = V(\sigma, s_0)$ para toda reparametrización directa $u : (a, b) \rightarrow \text{Dom}\sigma$.

Comentario 1.3.4. Dado un grupo G y dos conjuntos X, Y provistos de acciones $G \curvearrowright X$, $G \curvearrowright Y$, una función $f : X \rightarrow Y$ se dice **equivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todos $x \in X, g \in G$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cdot g} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\cdot g} & Y \end{array}$$

Si consideramos a $\text{Iso}^+(n)$ actuando en $\mathcal{C}(n)$ vía $f \cdot (\sigma, s_0) = (f \circ \sigma, s_0)$ y a $\text{Iso}^+(n)$ actuando en \mathbb{R}^n por $f \cdot x = A_f x$, entonces un invariante vectorial $V : \mathcal{C}(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es simplemente un morfismo equivariante respecto de estas acciones que es invariante bajo reparametrizaciones directas.

Definición 1.3.5. Dos elementos de curva $(\sigma, s_0), (\tau, t_0)$ definen el mismo **germen** si existe $I \subseteq \text{Dom}\sigma \cap \text{Dom}\tau$ tal que $s_0 = t_0 \in I$ y además $\sigma|_I = \tau|_I$. Lo notaremos $(\sigma, s_0) \sim (\tau, t_0)$. Claramente \sim es una relación de equivalencia y llamaremos al conjunto de clases de equivalencia (es decir, $\mathcal{C}(n)/\sim$) el conjunto de **gérmenes**. Si $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por \mathcal{O}_x al conjunto de gérmenes en x , es decir, las clases de equivalencia $[(\sigma, s_0)]$ tales que $\sigma(s_0) = x$ (notar que esto no depende del representante (σ, s_0)). Los gérmenes nos proveerán del contexto adecuado para estudiar propiedades locales.

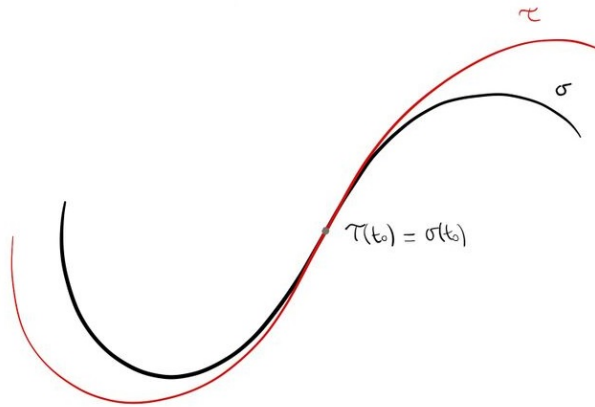


Figura 1.4: Dos curvas en un mismo germen.

Observación 1.3.6. Sean (σ, s_0) y (τ, t_0) dos elementos de un mismo germen. Entonces, $\sigma'(s_0) = \tau'(t_0)$. En efecto, notemos que como están en el mismo germen existe un intervalo I tal que $s_0 = t_0$ y $\sigma|_I = \tau|_I$, y así el cociente incremental coincide en un entorno de $s_0 = t_0$. Tomando límite se sigue lo deseado.

Definición 1.3.7. Un invariante V (escalar o vectorial) se dice **local** si para todo par de elementos de curva $(\sigma, s_0), (\tau, t_0) \in \mathcal{C}(n)$ vale que:

$$(\sigma, s_0) \sim (\tau, t_0) \implies V(\sigma, s_0) = V(\tau, t_0)$$

Es decir, es un invariante que es constante en los gérmenes.

Definición 1.3.8. Un invariante V (escalar o vectorial) se dice **diferencial** de orden menor o igual que d si existe una función $W : (\mathbb{R}^n)^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ó \mathbb{R}^n (según si V es escalar o vectorial respectivamente) tal que para todo elemento de curva $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$ se tiene que:

$$V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0), \sigma'(s_0), \dots, \sigma^{(d)}(s_0))$$

Decimos que un invariante diferencial es de orden d si es de orden menor o igual que d pero no de orden menor o igual que $d - 1$.

Observación 1.3.9. Por la Observación 1.3.6, es claro que todo invariante diferencial es local.

Nuestro objetivo ahora será tratar de caracterizar a los invariantes diferenciales. Empecemos con los invariantes de orden bajo.

Proposición 1.3.10. Sea V un invariante diferencial escalar de orden 0. Entonces V es constante.

Demostración. Sea $V : \mathcal{C}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ un invariante escalar diferencial de orden 0. Luego, existe $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0))$. Notemos que:

$$W(f(\sigma(s_0))) = V(f \circ \sigma, s_0) = V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0))$$

para todo $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$, $f \in \text{Iso}^+(n)$. Esto implica que $W(f(v)) = W(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $f \in \text{Iso}^+(n)$. Ahora, si $w \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, sea $f(x) = x + (w - v)$. Claramente se cumple que $f \in \text{Iso}^+(n)$, $f(v) = w$ y así $W(w) = W(f(v)) = W(v)$. Es decir, W es constante. Como queríamos. \square

Proposición 1.3.11. Sea V un invariante diferencial vectorial de orden 0. Entonces $V \equiv 0$.

Demostración. Sea $V : \mathcal{C}(n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un invariante vectorial diferencial de orden 0. Luego, existe $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0))$. Notemos que:

$$W(f(\sigma(s_0))) = V(f \circ \sigma, s_0) = A_f V(\sigma, s_0) = A_f W(\sigma, s_0)$$

para todo $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$, $f \in \text{Iso}^+(n)$. Esto implica que $W(f(v)) = A_f W(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $f \in \text{Iso}^+(n)$. Ahora, sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación $h(x) = x - v$. Claramente $A_h = I$ y así $W(v) = W(0)$. Es decir, W es constante. Pero más aún, sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación $g(x) = Ax$ con $A \in \text{SO}(n)$. Por lo tanto, $AW(0) = W(0)$ para toda $A \in \text{SO}(n)$. Esto implica que $W(0) = 0$ pues si $W(0) \neq 0$, completando a una base ortogonal y tomando A como la reflexión en $W(0)$ y algún otro vector de la base (para que el determinante sea 1), obtenemos que $-W(0) = AW(0) = W(0)$. Y estamos. \square

Proposición 1.3.12. *Sea V un invariante diferencial escalar de orden 1. Entonces V es constante.*

Demostración. Sea $W : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0), \sigma'(s_0))$. Sea $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$ y consideremos $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_1(x) = x - \sigma(s_0)$. Notemos que por regla de la cadena $(f \circ \sigma)'(s_0) = \sigma'(s_0)$ y así $V(\sigma, s_0) = V(f \circ \sigma, s_0) = W(0, \sigma'(s_0))$. Entonces, si defino $W_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $W_1(v) = W(0, v)$, la función V queda determinada totalmente por W_1 . Supongamos sin pérdida de la generalidad que $\sigma(s_0) = 0$, y sea $A \in \text{SO}(n)$. Consideremos $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la isometría dada por $f_2(x) = Ax$. Entonces, es claro que:

$$W_1(A\sigma'(s_0)) = W(0, A\sigma'(s_0)) = V(f_2 \circ \sigma, s_0) = V(\sigma, s_0) = W(0, \sigma'(s_0)) = W_1(\sigma'(s_0))$$

Es decir, para todos $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$ tal que $\sigma(s_0) = 0$ y $A \in \text{SO}(n)$, tenemos que $W_1(A\sigma'(s_0)) = W_1(\sigma'(s_0))$. Esto implica que para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $A \in \text{SO}(n)$, tenemos que $W_1(v) = W_1(Av)$. Ahora bien, el conjunto $\{Av : A \in \text{SO}(n)\}$ es simplemente la esfera de centro 0 y radio $\|v\|$. Esto quiere decir que W_1 es una función radial. O sea, existe $W_2 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $W_1(v) = W_2(\|v\|)$. Por lo tanto, $V(\sigma, s_0) = W_2(\|\sigma'(s_0)\|)$. Consideremos ahora una reparametrización directa $u : (c, d) \rightarrow \text{Dom}\sigma$. Entonces:

$$W_2(\|\sigma'(s_0)\|) = V(\sigma, s_0) = V(\sigma \circ u, u^{-1}(s_0)) = W_2\left(\left|u'(u^{-1}(s_0))\right| \|\sigma'(s_0)\|\right)$$

Luego, para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $u : (c, d) \rightarrow \text{Dom}\sigma$ reparametrización directa, tenemos que $W_2(\|v\|) = W_2(|u'(u^{-1}(s_0))| \|v\|)$. Tomando la reparametrización $u(t) = \lambda t$, se sigue que $W_2(\|v\|) = W_2(\lambda \|v\|)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$. Tomando v de norma 1 y $\lambda > 0$ arbitrario, resulta que W_2 es constante y así V debe serlo. Como queríamos probar. \square

Hasta ahora todos los invariantes son triviales. Los invariantes vectoriales de orden 1 son los primeros que son interesantes, pero para aliviar la notación, primero consideremos la siguiente definición:

Definición 1.3.13. Sea $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$ un elemento de curva. Se define el **vector tangente** a σ en s_0 como $\mathbf{T}(\sigma, s_0) = \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|}$. Cuando $n = 2$, podemos definir el **vector normal** a σ en s_0 como $\mathbf{N}(\sigma, s_0) = (-\mathbf{T}(\sigma, s_0)_2, \mathbf{T}(\sigma, s_0)_1)$ es el único vector unitario que completa a una base a $\mathbf{T}(\sigma, s_0)$ de manera tal que «preserve la orientación» (es decir, que el determinante de la matriz cuyas columnas son $\mathbf{T}(\sigma, s_0)$ y $\mathbf{N}(\sigma, s_0)$ sea 1).

Proposición 1.3.14. *Sea V un invariante diferencial vectorial de orden 1. Entonces, si $n \geq 3$, $V(\sigma, s_0) = \lambda \mathbf{T}(s_0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, mientras que si $n = 2$, $V(\sigma, s_0) = a \mathbf{T}(\sigma, s_0) + b \mathbf{N}(\sigma, s_0)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $W : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0), \sigma'(s_0))$. Consideremos $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = A(x - \sigma(s_0))$ donde $A \in \text{SO}(n)$. Por lo tanto, se tiene que $AV(\sigma, s_0) = V(g \circ \sigma, s_0) = W(0, A\sigma'(s_0))$. Consideremos A una rotación que lleva $\sigma'(s_0)$ a $\|\sigma'(s_0)\| e_1$ (equivalentemente, $\mathbf{T}(\sigma, s_0)$ a e_1). Esta rotación en $n = 2$ queda unívocamente determinada como la matriz cuya inversa tiene por columnas a $\mathbf{T}(\sigma, s_0)$ y $\mathbf{N}(\sigma, s_0)$, mientras que en $n \geq 3$ tenemos mayor libertad y no queda unívocamente determinada.

Por lo tanto, se sigue que $V(\sigma, s_0) = A^{-1}W(0, \|\sigma'(s_0)\| e_1)$. Sea $u : \text{Dom}\sigma \rightarrow \text{Dom}\sigma$ la reparametrización directa dada por $u(t) = s_0 + \frac{t}{\|\sigma'(s_0)\|}$. Como V es un invariante:

$$V(\sigma, s_0) = V(\sigma \circ u, 0) = W(0, \sigma'(s_0)u'(0)) = W(0, \mathbf{T}(\sigma, s_0))$$

Si tengo entonces (σ, s_0) un elemento de curva tal que $\sigma(s_0) = 0$ y $\sigma'(s_0) = e_1$, entonces $V(\sigma, s_0) = W(0, \mathbf{T}(\sigma, s_0)) = W(0, e_1)$.

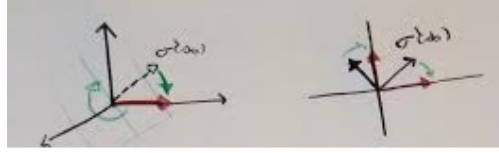


Figura 1.5: Una rotación que lleva a $\sigma'(s_0)$ al eje e_1 . En el caso plano queda determinada.

Supongamos que $n \geq 3$, y $M \in \text{SO}(n)$ es alguna rotación que deja fijo a e_1 . Entonces:

$$W(0, e_1) = W(0, Me_1) = V(M \circ \sigma, s_0) = MV(\sigma, s_0) = MW(0, e_1)$$

Esto quiere decir que $W(0, e_1)$ queda fijo por cualquier rotación que deja fijo a e_1 . Eso implica que $W(0, e_1) = \lambda e_1$, pues en el complemento ortogonal de e_1 podemos definir la transformación como querramos (siempre y cuando $Me_i \in \langle e_1 \rangle^\perp$). Por lo tanto, si $n \geq 3$ tendremos que $V(\sigma, s_0) = A^{-1}W(0, e_1) = \lambda A^{-1}e_1 = \lambda \mathbf{T}(\sigma, s_0)$.

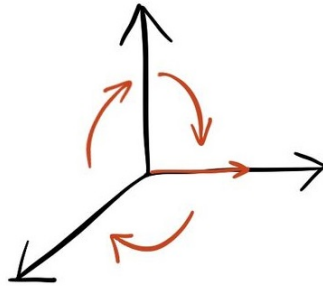


Figura 1.6: Una rotación en \mathbb{R}^3 que deja fijo al eje e_1 .

Para $n = 2$, sabemos que A^{-1} queda unívocamente determinada como la matriz cuyas columnas son $\mathbf{T}(\sigma, s_0)$ y $\mathbf{N}(\sigma, s_0)$ y si $W(0, e_1) = ae_1 + be_2$, obtenemos que:

$$V(\sigma, s_0) = A^{-1}W(0, e_1) = a \mathbf{T}(\sigma, s_0) + b \mathbf{N}(\sigma, s_0)$$

que es fácil comprobar que es un invariante (pues el par $\{\mathbf{T}(\sigma, s_0), \mathbf{N}(\sigma, s_0)\}$ forma siempre una base ortonormal con determinante 1). Y estamos. \square

Por último, vamos a caracterizar los invariantes diferenciales escalares de orden 2. Para ello, antes consideremos la siguiente definición:

Definición 1.3.15. Sea $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(n)$. Se define la **curvatura** de σ en s_0 como:

$$\kappa(\sigma, s_0) = \frac{\sqrt{\|\sigma'(s_0)\|^2 \|\sigma''(s_0)\|^2 - \langle \sigma'(s_0), \sigma''(s_0) \rangle^2}}{\|\sigma'(s_0)\|^3}$$

Notemos que la curvatura $\kappa(\sigma, s_0)$ es un invariante diferencial escalar de orden 2. En efecto, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \text{Iso}^+(n)$, entonces tenemos que $(f \circ \sigma)'(s_0) = A_f \sigma'(s_0)$ y $(f \circ \sigma)''(s_0) = A_f \sigma''(s_0)$, y reemplazando en la fórmula de la curvatura (y notando que $A_f \in \text{SO}(n)$ y así preserva ángulos y distancias), es claro que $\kappa(f \circ \sigma, s_0) = \kappa(\sigma, s_0)$. Por otra parte, si $u : (c, d) \rightarrow \text{Dom} \sigma$ es una reparametrización directa, por la regla de la cadena es fácil ver que se tiene $(\sigma \circ u)'(u^{-1}(s_0)) = \sigma'(s_0) u'(u^{-1}(s_0))$ y también tenemos $(\sigma \circ u)''(u^{-1}(s_0)) = \sigma''(s_0) u'(u^{-1}(s_0))^2 + \sigma'(s_0) u''(u^{-1}(s_0))$. Es fácil comprobar, usando esto, que $\kappa(\sigma \circ u, u^{-1}(s_0)) = \kappa(\sigma, s_0)$. Notemos también que si $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cualquiera, entonces $\varphi(\kappa(\sigma, s_0))$ también es un invariante diferencial escalar de orden 2. Veamos que vale la recíproca:

Proposición 1.3.16. Sea V un invariante diferencial escalar de orden 2. Entonces, existe una función $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(\sigma, s_0) = \varphi(\kappa(\sigma, s_0))$.

Demostración. Consideremos $A \in \text{SO}(n)$ tal que $A\sigma'(s_0) = \|\sigma'(s_0)\| e_1$, la traslación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = A(x - \sigma(s_0))$ y la reparametrización $u(s) = s_0 + \frac{s - s_0}{\|\sigma'(s_0)\|}$.

Es claro que $u^{-1}(s_0) = s_0$. Considero entonces $\gamma = f \circ \sigma \circ u$. Como V es un invariante, tenemos que $V(\gamma, s_0) = V(f \circ \sigma \circ u, s_0) = V(\sigma \circ u, s_0) = V(\sigma, s_0)$. Pero tenemos que $\gamma(s_0) = 0$, $\gamma'(s_0) = e_1$ y así $V(\gamma, s_0) = W(0, e_1, \gamma''(s_0))$, donde $W : (\mathbb{R}^n)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0), \sigma'(s_0), \sigma''(s_0))$.

Sea $M \in \text{SO}(n)$ una rotación con eje e_1 (es decir, $Me_1 = e_1$). Entonces, si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) = Mx$, se cumple que $W(0, e_1, M\gamma''(s_0)) = V(g \circ \gamma, s_0) = V(\gamma, s_0) = W(0, e_1, \gamma''(s_0))$. Por otra parte, supongamos que $u : (a, b) \rightarrow \text{Dom} \sigma$ es una reparametrización directa tal que $s_0 \in (a, b)$, $u(s_0) = s_0$ y $u'(s_0) = 1$. Entonces, por la regla de la cadena, tenemos que $W(0, e_1, u''(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma''(s_0)) = V(\gamma \circ u, s_0) = V(\gamma, s_0) = W(0, e_1, \gamma''(s_0))$. En resumen, si definimos $\Phi(v) = W(0, e_1, v)$, tendremos que $\Phi(A\gamma''(s_0)) = \Phi(\gamma''(s_0))$ para toda $M \in \text{SO}(n)$ tal que $Me_1 = e_1$, y tendremos que $\Phi(u''(s_0)e_1 + \gamma''(s_0)) = \Phi(\gamma''(s_0))$ para toda reparametrización u tal que $u(s_0) = s_0$ y $u'(s_0) = 1$.

Si consideramos la curva $\gamma(s) = (s - s_0)e_1 + \frac{(s - s_0)^2}{2}v$, con $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\gamma'(s_0) = e_1 \neq 0$ y así define una curva regular en un entorno de s_0 . Como los invariantes están definidos a menos del germen, podemos mirar $V(\gamma, s_0)$. Esta curva γ cumple que $\gamma(s_0) = 0$, $\gamma'(s_0) = e_1$ y $\gamma''(s_0) = v$. Por lo tanto, $\Phi(v) = \Phi(Mv)$ para toda $M \in \text{SO}(n)$ tal que $Me_1 = e_1$. Ahora, consideremos la reparametrización $u_\lambda(s) = s_0 + \lambda \frac{(s - s_0)^2}{2}$,

definida en un entorno de s_0 . Luego, tenemos que $\Phi(\lambda e_1 + v) = \Phi(v)$. Es decir, Φ es constante sobre cilindros con eje e_1 . Por lo tanto, para definir $\Phi(v)$ sólo nos importa la norma de su proyección ortogonal sobre $\langle e_1 \rangle^\perp$. Esto implica que existe $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi(v) = \varphi(\|v - \langle v, e_1 \rangle e_1\|)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Ahora bien, juntando todo lo que hicimos, tenemos la siguiente fórmula:

$$V(\sigma, s_0) = W(0, e_1, \gamma''(s_0)) = \Phi(\gamma''(s_0)) = \varphi(\|\gamma''(s_0) + \langle \gamma''(s_0), e_1 \rangle e_1\|)$$

donde $\gamma(s) = f \circ \sigma \circ u(s)$ como en el primer párrafo. Es fácil comprobar, por la regla de la cadena, que $\gamma''(s_0) = A \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2}$. Además, notemos que como $A\sigma'(s_0) = \|\sigma'(s_0)\| e_1$, se tiene que $A \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} = e_1$. Estamos en condiciones de calcular la norma de la proyección ortogonal de $\gamma''(s_0)$. Simplemente es escribir todo y usar que $A \in \text{SO}(n)$ preserva ángulos y distancias. En efecto:

$$\begin{aligned} \|\gamma''(s_0) + \langle \gamma''(s_0), e_1 \rangle e_1\| &= \left\| A \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2} - \left\langle A \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2}, A \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right\rangle A \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right\| \\ &= \left\| A \left(\frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2} - \left\langle A \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2}, A \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right\rangle \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2} - \left\langle \frac{\sigma''(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|^2}, \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right\rangle \frac{\sigma'(s_0)}{\|\sigma'(s_0)\|} \right\| \\ &= \frac{\left\| \sigma''(s_0) \|\sigma'(s_0)\|^2 - \langle \sigma'(s_0), \sigma''(s_0) \rangle \sigma'(s_0) \right\|}{\|\sigma'(s_0)\|^4} \\ &= \frac{\sqrt{\|\sigma''(s_0)\|^2 \|\sigma'(s_0)\|^4 - \|\sigma'(s_0)\|^2 \langle \sigma'(s_0), \sigma''(s_0) \rangle^2}}{\|\sigma'(s_0)\|^4} \\ &= \frac{\sqrt{\|\sigma'(s_0)\|^2 \|\sigma''(s_0)\|^2 - \langle \sigma'(s_0), \sigma''(s_0) \rangle^2}}{\|\sigma'(s_0)\|^3} \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que $\|\gamma''(s_0) + \langle \gamma''(s_0), e_1 \rangle e_1\| = \kappa(\sigma, s_0)$. Como ya habíamos visto que $V(\sigma, s_0) = \varphi(\|\gamma''(s_0) + \langle \gamma''(s_0), e_1 \rangle e_1\|)$, esto nos dice que $V(\sigma, s_0) = \varphi(\kappa(\sigma, s_0))$. Esto concluye la demostración. \square

Consideremos por un momento invariantes escalares de curvas planas. Es decir, invariantes $V : \mathcal{C}(2) \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(2)$, con $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Podemos considerar $V_\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V_\sigma(s) = V(\sigma, s)$. Decimos que V es un invariante **diferenciable** si existe la derivada $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} V_\sigma(s)$. Claramente, la derivada está bien definida en el germen (pues si $(\sigma, s_0) \sim (\tau, t_0)$ entonces σ y τ coincidirán en un entorno de $s_0 = t_0$ y así V_σ y V_τ también). Consideremos entonces la asignación

$U : \mathcal{C}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $U(\sigma, s_0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} V_\sigma(s)$. Usando que V es invariante, es fácil ver que $U(f \circ \sigma, s_0) = U(\sigma, s_0)$ para $f \in \text{Iso}^+(n)$. Ahora, si $u : (c, d) \rightarrow \text{Dom} \sigma$ es una reparametrización, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(\sigma \circ u, u^{-1}(s_0)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=u^{-1}(s_0)} V(\sigma \circ u, t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=u^{-1}(s_0)} V(\sigma, u(t)) \\ &= u'(u^{-1}(s_0)) \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} V(\sigma, s) \\ &= U(\sigma, s_0) u'(u^{-1}(s_0)) \end{aligned}$$

Es decir, U **no** es un invariante, pero casi. Simplemente consideremos:

$$DV(\sigma, s_0) = \frac{1}{\|\sigma'(s_0)\|^2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} V_\sigma(s)$$

Esto es un invariante pues $\|\sigma'(s_0)\|$ permanece invariante bajo movimientos euclídeos y con reparametrizaciones también aparece un factor $u'(u^{-1}(s_0))$ que se cancela con el de U . Es decir, construimos un invariante DV a partir de V . Si V es un invariante diferencial de orden a lo sumo d , entonces DV debería ser de orden $a + 1$ (pues escribimos $V(\sigma, s_0) = W(\sigma(s_0), \dots, \sigma^{(d)}(s_0))$ y derivamos usando la regla de la cadena, si asumimos alguna condición de regularidad en W).

Ahora bien, en $\mathcal{C}(2)$ nosotros conocemos dos invariantes: la tangente \mathbf{T} y la normal \mathbf{N} . Notemos que como $\|\mathbf{T}(\sigma, s)\|^2 = 1$ para todo s , derivando el producto interno se sigue que

$$2 \left\langle \mathbf{T}(\sigma, s_0), \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \mathbf{T}(\sigma, s) \right\rangle = 0 \text{ para todo } s_0. \text{ Esto implica que para cualquier } s_0 \text{ tenemos}$$

que $\mathbf{N}(\sigma, s_0)$ es paralelo a $D\mathbf{T}(\sigma, s_0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \mathbf{T}(\sigma, s)$. Por lo tanto, debemos tener que

$D\mathbf{T}(\sigma, s_0) = \langle D\mathbf{T}(\sigma, s_0), \mathbf{N}(\sigma, s_0) \rangle \mathbf{N}(\sigma, s_0)$. Pero notemos que $\langle D\mathbf{T}(\sigma, s_0), \mathbf{N}(\sigma, s_0) \rangle$ es un invariante diferencial escalar de orden menor o igual que 2, y por ende debe ser de la forma $\varphi(\kappa(\sigma, s_0))$ para alguna $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, para todo $(\sigma, s_0) \in \mathcal{C}(2)$ se tiene que $D\mathbf{T}(\sigma, s_0) = \varphi(\kappa(\sigma, s_0)) \mathbf{N}(\sigma, s_0)$. Entonces, si consideramos las circunferencias

$\sigma_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$ para $r > 0$, es fácil ver que $\kappa(\sigma_r, s) = \frac{1}{r}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Además, como $\mathbf{T}(\sigma_r, s) = (-\sin s, \cos s)$, $\mathbf{N}(\sigma_r, s) = -(\cos s, \sin s)$, se sigue

que $D\mathbf{T}(\sigma, s) = \frac{1}{\|\sigma''(s_0)\|} (-\cos s, \sin s) = \frac{1}{r} (-\cos s, \sin s) = \frac{1}{r} \mathbf{N}(\sigma, s)$. Por lo tanto,

tenemos que $\varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$ para todo $r > 0$, que implica $\varphi(x) = x$.

Hemos probado que $D\mathbf{T}(\sigma, s_0) = \kappa(\sigma, s_0) \mathbf{N}(\sigma, s_0)$. De manera análoga, podemos probar la relación $D\mathbf{N}(\sigma, s_0) = -\kappa(\sigma, s_0) \mathbf{T}(\sigma, s_0)$. Ahora bien, la primera relación se

puede escribir como $\mathbf{T}' = \|\sigma'\| \kappa \mathbf{N}$, y como $\mathbf{T} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|}$, derivando podemos expresar a σ'' en términos de σ' , \mathbf{T} , κ y \mathbf{N} . Procediendo así sucesivamente, podemos expresar a todas las

derivadas de orden superior en términos de estos elementos, y así los únicos invariantes diferenciales relevantes en el plano son \mathbf{T} , \mathbf{N} y κ .

Queremos eliminar ahora un poco de la arbitrariedad de la elección de la parametrización de la curva. Si pensamos en la parametrización como la manera de recorrer la curva, inmediatamente tenemos una forma natural de recorrerla: a rapidez constante. Esta manera de recorrerla será la denominada **reparametrización por longitud de arco**. ¿Cómo podemos definir la longitud de una curva? Lo que sí sabemos medir son segmentos, entonces la idea intuitiva es aproximar la curva con muchos segmentos y sumar las longitudes de estos. Es decir, si tenemos una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y nos quedamos con un segmento de curva $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tomamos una partición $P = \{c = p_0 < p_1 < \dots < p_n = d\}$ del intervalo $[c, d]$ y miramos la suma de los segmentos entre $\sigma(p_{i-1})$ y $\sigma(p_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Es decir, $S_P(\sigma) = \sum_{i=1}^n \|\sigma(p_i) - \sigma(p_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \|\sigma'(\xi_i)\| \|p_i - p_{i-1}\|$ donde $\xi_i \in [p_{i-1}, p_i] = \{t \in [0, 1] : tp_{i-1} + (1-t)p_i\}$, por el Teorema del Valor Medio. Pero esto es una suma de Riemann para la integral $\int_c^d \|\sigma'(\xi)\| d\xi$. Esto motiva entonces la siguiente definición:

Definición 1.3.17. Sea $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular y $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un segmento de curva ($[c, d] \subseteq (a, b)$). La longitud de σ entre c y d se define por:

$$\text{Long}(\sigma_{[c,d]}) = \int_c^d \|\sigma'(\xi)\| d\xi$$

Notemos que, simplemente por el Teorema de Cambio de Variables, es claro que la longitud de un segmento de curva es invariante por reparametrizaciones y movimientos rígidos. Si tenemos una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a, b)$ fijo, definimos la función $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ por $v(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(\xi)\| d\xi$. Esta función v claramente es diferenciable (es más, tiene la misma regularidad que σ) y tenemos que $v'(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$. Por lo tanto, existe una función inversa $u : (c, d) \rightarrow (a, b)$ y la curva $\gamma = \sigma \circ u : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que $\|\sigma'(s)\| = 1$ para todo $s \in (c, d)$. Es decir, γ es una reparametrización de σ a velocidad constante, la **reparametrización por longitud de arco** que buscábamos.

Como herramienta teórica, la reparametrización por longitud de arco es muy útil, pero veremos que calcularla rápidamente se convierte en un problema difícil. En efecto, consideremos una elipse parametrizada por $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (a \cos(\omega t), b \sin(\omega t))$. Entonces, $\sigma'(t) = (-a\omega \sin(\omega t), b\omega \cos(\omega t))$ y así $\|\sigma'(t)\| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t)}$. Sin embargo, la integral $\int_0^t \omega \sqrt{a^2 \sin^2(\omega \xi) + b^2 \cos^2(\omega \xi)} d\xi$ es una **integral elíptica de primera especie**, a la que no podemos encontrarle una primitiva en términos de funciones elementales.

1.4. Curvas Planas

Si $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco, su tangente en s es simplemente $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s)$. Por lo tanto, podemos expresar a la tangente

como $\mathbf{T}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ donde $\theta(s)$ representa el ángulo que forma $\mathbf{T}(s)$ con la horizontal. El cambio instantáneo del ángulo nos debería dar una noción de cómo se esta *curvando* la curva. Pero notemos que $\mathbf{T}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$, y así se sigue que $\|\mathbf{T}'(s)\| = |\theta'(s)|$. Tiene sentido considerar entonces la siguiente definición:

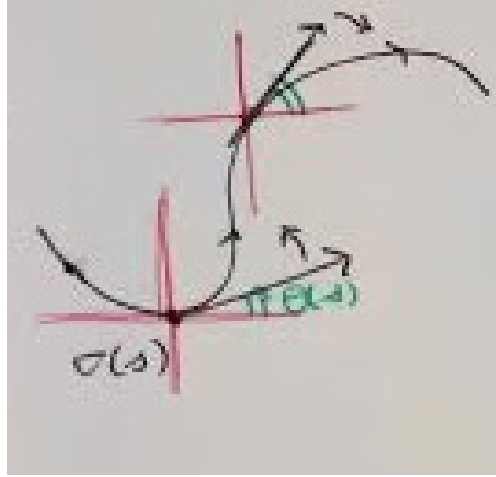


Figura 1.7: La curvatura como el cambio angular.

Definición 1.4.1. Sea $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Se define la **curvatura** de σ en s por $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$.

Observación 1.4.2. Veamos que los dos conceptos de curvatura que tenemos coinciden. Sabemos que $\kappa(\sigma, s_0)$ es invariante por reparametrización, así que si reparametrizamos a σ por longitud de arco como $\gamma = \sigma \circ u$, tendremos que $\kappa(\sigma, s_0) = \kappa(\gamma, u^{-1}(s_0))$. Notando que $\|\gamma'(t)\| = 1$ y derivando el producto interno $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ obtenemos que $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0$ para todo t . Por lo tanto, reemplazando $t_0 = u^{-1}(s_0)$, se tiene:

$$\kappa(\sigma, s_0) = \kappa(\gamma, t_0) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t_0)\|^2 \|\gamma''(t_0)\|^2 - \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle^2}}{\|\gamma'(t_0)\|^3} = \|\gamma''(t_0)\| = \kappa(t_0)$$

Tenemos así que $\kappa(\sigma, s_0) = \kappa(t_0)$. Es decir, el valor de ambas curvaturas en el punto $\sigma(s_0) = \gamma(t_0)$ de la curva es el mismo. Por lo tanto, tenemos una expresión para la curvatura que **no** depende de la reparametrización por longitud de arco, que en la práctica es difícil de calcular.

Ejemplo 1.4.3. Si $\sigma(s) = vs + w$ con $v, w \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$ parametriza una recta por longitud de arco, entonces $\mathbf{T}(s) = v$ y así $\mathbf{T}'(s) = 0$, lo que implica que $\kappa(s) = 0$. Es decir, una recta no está curvada. Por otra parte, si $\sigma(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}\right)$ parametriza a una circunferencia de centro 0 y radio r por longitud de arco, entonces $\mathbf{T}(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}\right)$ y $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r}\right)$. Esto implica que $\|\mathbf{T}'(s)\| = \frac{1}{r}$. Es decir, una circunferencia tiene curvatura constante.

En el caso de las curvas planas, tenemos más información que la curvatura $\|\mathbf{T}'(s)\|$. Como sabemos que $\mathbf{N}(s) = (-\mathbf{T}_2(s), \mathbf{T}_1(s))$ es el único vector que completa a $\mathbf{T}(s)$ a una base ortonormal orientada y $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle = 0$, tenemos que $\mathbf{T}'(s)$ debe ser paralelo a $\mathbf{N}(s)$. Esto implica que, en el caso de curvas planas, tenemos que $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \operatorname{sg}_\alpha(s) \mathbf{N}(s)$ donde $\operatorname{sg}_\alpha(s)$ es el signo determinante de la matriz cuyas columnas son $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{T}'_\alpha(s)\}$. A la magnitud *signada* $k(s) = \kappa(s) \operatorname{sg}_\alpha(s)$ la llamamos la **curvatura plana o signada**. Es decir, por la rigidez del plano, la curvatura de una curva plana posee además un signo, que nos dice si la curva se está doblando en la dirección de la normal o en la dirección opuesta. Veamos que en el caso de una curva plana, su curvatura plana la determina completamente.

Teorema 1.4.4. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos curvas parametrizadas por longitud de arco. Si ambas curvas tienen la misma curvatura plana, entonces difieren únicamente de un movimiento rígido.

Demostración. Sea $s_0 \in I$ un punto cualquiera. Tenemos un movimiento rígido f que lleva $\alpha(s_0)$ a $\beta(s_0)$ y la base orientada $\{\mathbf{T}_\alpha(s_0), \mathbf{N}_\alpha(s_0)\}$ a $\{\mathbf{T}_\beta(s_0), \mathbf{N}_\beta(s_0)\}$ preservando la orientación. Notemos que $f \circ \alpha$ también define una curva. Por la regla de la cadena $(f \circ \alpha)'(s) = A_f \alpha'(s)$ y así $\|(f \circ \alpha)'(s)\| = \|A_f \alpha'(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$. Esto quiere decir que $f \circ \alpha$ también está parametrizada por longitud de arco, su tangente está dada por $\mathbf{T}_{f \circ \alpha}(s) = A_f \mathbf{T}_\alpha(s)$ y su curvatura es $\|(f \circ \alpha)''(s)\| = \|\alpha''(s)\| = \kappa(s)$. Además, como A_f preserva distancias y orientación, la curvatura signada de $f \circ \alpha$ coincide con la de α , $\{A_f \mathbf{T}_\alpha(s), A_f \mathbf{N}_\alpha(s)\}$ es una base ortonormal orientada y como $\mathbf{T}_{f \circ \alpha}(s) = A_f \mathbf{T}_\alpha(s)$, se sigue que $\mathbf{N}_{f \circ \alpha}(s) = A_f \mathbf{N}_\alpha(s)$.



Figura 1.8: Un movimiento rígido que lleva un marco al otro.

Consideremos la siguiente función:

$$\Phi(s) = \|A_f \mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{T}_\beta(s)\|^2 + \|A_f \mathbf{N}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\beta(s)\|^2$$

Derivando el producto interno, obtenemos que:

$$\Phi'(s) = 2 \langle A_f \mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{T}_\beta(s), A_f \mathbf{T}'_\alpha(s) - \mathbf{T}'_\beta(s) \rangle + 2 \langle A_f \mathbf{N}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\beta(s), A_f \mathbf{N}'_\alpha(s) - \mathbf{N}'_\beta(s) \rangle$$

Notemos que $\mathbf{T}'_\alpha(s) = k(s) \mathbf{N}_\alpha(s)$ y $\mathbf{N}'_\alpha(s) = -k(s) \mathbf{T}_\alpha(s)$. En efecto, la primera es por definición de la curvatura plana. Por otra parte, como $\langle \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{N}'_\alpha(s) \rangle = 0$, tenemos que $\mathbf{N}'_\alpha(s)$ es paralelo a $\mathbf{T}_\alpha(s)$ y además derivando $\langle \mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle = 0$ obtenemos que $\langle \mathbf{T}'_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle + \langle \mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}'_\alpha(s) \rangle = 0$. Sabemos que el primer sumando es $k(s)$, y así se obtiene lo deseado. Distribuyendo las restas de los productos internos que aparecen en $\Phi'(s)$ y usando estas identidades, es fácil ver que $\Phi'(s) = 0$. Es decir, Φ es constante.

Ahora bien, por cómo definimos el movimiento rígido, tenemos que $\Phi(s_0) = 0$ (pues simplemente movimos el marco de una curva a la otra), y como Φ es constante, debe ser $\Phi(s) = 0$. Como es una suma de cuadrados, ambos deben ser constantemente 0 y así $0 = A_f \mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{T}_\beta(s) = (f \circ \alpha(s) - \beta(s))'$. Por lo tanto, $f \circ \alpha(s) - \beta(s)$ debe ser constante, y como $f \circ \alpha(s_0) = \beta(s_0)$, se sigue que $f \circ \alpha(s) = \beta(s)$ para todo $s \in I$. Es decir, construimos un movimiento rígido que lleva α a β . Y estamos. \square

1.5. Curvas en el Espacio

Ahora nos interesará estudiar curvas en el espacio $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Supongamos σ parametrizada por longitud de arco. Ya no tenemos una forma canónica de completar al vector tangente $\mathbf{T}(s)$ a una base ortonormal como antes (pues necesitamos de dos vectores). Sin embargo, como $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$, seguimos teniendo (al derivar el producto interno) que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle = 0$. En los puntos de curvatura no nula, podemos definir $\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}$ al **vector normal principal**. Geométricamente, se puede ver como la dirección en la que avanza la curva dentro del plano ortogonal a $\mathbf{T}(s)$. Ahora sí tenemos una forma canónica de completar a los vectores $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ a una base ortonormal orientada de \mathbb{R}^3 . Simplemente es el producto vectorial $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$. El vector $\mathbf{B}(s)$ se denomina el **vector binormal**. De esta manera, nos construimos un marco $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ ortonormal orientado positivamente, que denominaremos el **triedro de Frenet-Serret**.

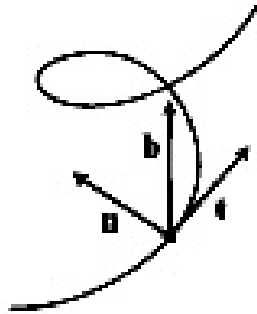


Figura 1.9: El marco de Frenet-Serret.

Definición 1.5.1. Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. La **torsión** de la curva se define como $\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$.

Antes de entender el por qué de la definición de la torsión y qué es lo que mide, veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.5.2. Consideremos la hélice circular de radio r y velocidad vertical b , parametrizada por $\sigma(t) = (r \cos(\omega s), r \sin(\omega s), b\omega s)$ con $\omega = \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}}$, para que esté parametrizada por longitud de arco. Entonces $\mathbf{T}(s) = (-r\omega \sin(\omega s), r\omega \cos(\omega s), b\omega)$ y así tenemos que $\mathbf{T}'(s) = (-r\omega^2 \cos(\omega s), -r\omega^2 \sin(\omega s), 0)$. Por lo tanto, la curvatura de la hélice es $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = r\omega^2 = \frac{r}{r^2 + b^2}$. Luego, el vector normal principal es $\mathbf{N}(s) = (-\cos(\omega s), \sin(\omega s), 0)$. Calculando el producto vectorial, obtenemos que $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = (b\omega \sin(\omega s), -b\omega \cos(\omega s), r\omega)$, y de esto se desprende que su derivada es $\mathbf{B}'(s) = (b\omega^2 \cos(\omega s), b\omega^2 \sin(\omega s), 0)$. Finalmente, la torsión debe ser $\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = b\omega^2 = \frac{b}{r^2 + b^2}$.

Estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 1.5.3 (Frenet-Serret). *Valen las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau \mathbf{N} \end{aligned}$$

Demostración. Queremos expresar a $\{\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}'\}$ en términos de la base ortonormal $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$. La primera fórmula es obvia por la definición de \mathbf{N} .

Notemos que como $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0$, derivando el producto interno tenemos que $\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle + \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = 0$. Como $\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \langle \kappa(s) \mathbf{N}(s), \mathbf{N}(s) \rangle = \kappa(s)$, se sigue que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = -\kappa(s)$. Por otra parte, como $\|\mathbf{N}(s)\|^2 = 1$, derivando el producto interno tenemos $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = 0$. Para calcular $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ simplemente notemos que $\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = 0$ y derivándolo tenemos $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle + \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}'(s) \rangle = 0$. Es decir, $\langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle = -\langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}'(s) \rangle$. Como sabemos que $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es una base ortonormal, $\mathbf{N}'(s) = \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle \mathbf{T}(s) + \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \mathbf{N}(s) + \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle \mathbf{B}(s)$, y por lo que acabamos de calcular esto es $\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s)$.

Como tenemos $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$, derivando el producto vectorial tenemos que $\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}'(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}'(s)$. Ahora bien, $\mathbf{T}'(s)$ es paralelo a $\mathbf{N}(s)$ y así el producto vectorial entre ellos se anula $\mathbf{T}'(s) \wedge \mathbf{N}(s) = 0$. Por otra parte, ya probamos la identidad $\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s)$ y así, distribuyendo el producto vectorial, obtenemos que $\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{B}(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s)$. Esto concluye la demostración. \square

La tercera fórmula de Frenet-Serret nos dice que la torsión mide precisamente cuánto la curva se está escapando del plano generado por $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$, pues esto se puede ver como el cambio instantáneo en la dirección de la recta perpendicular al plano. Las fórmulas de Frenet-Serret nos dicen que $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ cumplen el siguiente sistema de

ecuaciones diferenciales, que rigen el movimiento del marco a lo largo de la curva:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, si le damos que el dato inicial sea el marco $(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)) = (e_1, e_2, e_3)$ (pues cualquier marco es lo mismo ya que simplemente llevamos uno en otro con un movimiento rígido), obtenemos que hay una única solución al problema para κ, τ dadas. Es decir, la curvatura y la torsión nos van a determinar completamente a una curva en el espacio. Hagamos esto con mayor precisión:

Teorema 1.5.4 (Teorema Fundamental de las Curvas). *Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto no vacío y $\kappa, \tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\kappa \in \mathcal{C}^{k-2}(I)$, $\tau \in \mathcal{C}^{k-3}(I)$ y $\kappa > 0$. Entonces, existe una curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular de clase \mathcal{C}^k parametrizada por longitud de arco tal que κ es la curvatura y τ la torsión de σ . Más aún, es única a menos de movimientos rígidos y reparametrizaciones.*

Demostración. Consideremos el Problema de Valores Iniciales dado por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

con dato inicial $(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)) = (e_1, e_2, e_3)$ para algún $s_0 \in I$ fijo. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que hay una única solución $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) : I \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$. Veamos que para cada $s \in I$ se tiene que $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ forma una base ortonormal. En efecto, para esto simplemente veamos que el producto interno de cada par de vectores del Triedro $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es constante. Como el dato inicial nos dice que forman una base ortonormal, al ser constantes, formarán en cada tiempo s una base ortonormal. Para ello, consideremos la función $F : I \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada por $F(s) = (\|\mathbf{T}(s)\|^2, \|\mathbf{N}(s)\|^2, \|\mathbf{B}(s)\|^2, \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle, \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s) \rangle, \langle \mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s) \rangle)$ y notemos que cumple el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} x'_1(s) \\ x'_2(s) \\ x'_3(s) \\ x'_4(s) \\ x'_5(s) \\ x'_6(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\kappa(s) & 2\tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\tau(s) \\ -\kappa(s) & \kappa(s) & 0 & 0 & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & \tau(s) & 0 & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \\ x_5(s) \\ x_6(s) \end{pmatrix}$$

Con dato inicial $F(s_0) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ (simplemente es derivar los productos internos y usar que $\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}'$ cumplen el sistema de ecuaciones diferenciales de Frenet-Serret). Ahora bien, notemos que la función $G(s) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ es una solución a ese Problema de Valores Iniciales. Eso implica que las normas deben ser constantemente 1 y los productos

internos constantemente 0. Es decir, $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es una base ortonormal para todo $s \in I$. Más aún, está orientada positivamente, pues el signo de la orientación nos da el signo del determinante de la matriz cuyas columnas son $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, que al ser una base ortonormal, es 1 ó -1. Como el determinante depende continuamente de las entradas de la matriz, debe ser constantemente 1 (pues $\{\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)\}$ está orientado positivamente), y así siempre tenemos la orientación correcta.

Consideremos la curva definida por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(s) = \int_0^s \mathbf{T}(\xi) d\xi$. Entonces σ es de clase \mathcal{C}^k y se cumple que $\sigma'(s) = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$. Por lo tanto, σ está parametrizada por longitud de arco. Como $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ cumplen las ecuaciones de Frenet-Serret, es fácil ver que σ tiene curvatura κ y torsión τ , pues es fácil ver que $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ es el marco de Frenet-Serret asociado a σ .

Finalmente, supongamos que $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por longitud de arco con curvatura κ y torsión τ . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido tal que $f(\sigma(s_0)) = \mu(s_0)$ y lleva el triedro de μ en s_0 , $\{\mathbf{T}_\mu(s_0), \mathbf{N}_\mu(s_0), \mathbf{B}_\mu(s_0)\}$ a la base ortonormal $\{\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)\}$ preservando la orientación. Ahora bien, como A_f es una isometría directa y $\{\mathbf{T}_\mu(s), \mathbf{N}_\mu(s), \mathbf{B}_\mu(s)\}$ cumplen las ecuaciones de Frenet-Serret, debemos tener que $\{A_f \mathbf{T}_\mu(s), A_f \mathbf{N}_\mu(s), A_f \mathbf{B}_\mu(s)\}$ también las cumple y además tiene por dato inicial $(A_f \mathbf{T}_\mu(s_0), A_f \mathbf{N}_\mu(s_0), A_f \mathbf{B}_\mu(s_0)) = (\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0))$. Por la unicidad de la solución, tenemos que $A_f \mathbf{T}_\mu(s) = \mathbf{T}(s)$ para todo $s \in I$. Por lo tanto, concluimos que $(f \circ \mu(s) - \sigma(s))' = A_f \mathbf{T}_\mu(s) - \mathbf{T}(s) = 0$ y así $f \circ \mu(s) - \sigma(s)$ es constante. Como $f \circ \mu(s_0) = \sigma(s_0)$, se sigue que $f \circ \mu = \sigma$. Esto concluye la demostración. \square

Notemos que el triedro de Frenet-Serret nos determina, en cada punto de la curva, tres planos: el **plano osculador** es el plano ortogonal a $\mathbf{B}(s)$, el **plano normal** es el plano ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ y el **plano rectificante** es el plano ortogonal a $\mathbf{N}(s)$. Tratemos de entender como son las proyecciones de la curva a cada uno de estos planos. Para esto, supongamos sin pérdida de la generalidad que $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por longitud de arco y $0 \in (a, b)$, y estudiemos las proyecciones al triedro en $\sigma(0)$.

Por el desarrollo en serie de Taylor, $\sigma(t) = \sigma(0) + \sigma'(0)t + \frac{\sigma''(0)}{2}t^2 + \frac{\sigma'''(0)}{6}t^3 + o(t^3)$ (donde usamos la notación o -chica, es decir $f(t)$ es $o(t^3)$ si $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/t^3 = 0$). Por las ecuaciones de Frenet-Serret, sabemos que $\sigma'(0) = \mathbf{T}(0)$, $\sigma''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa(0) \mathbf{N}(0)$ y finalmente $\sigma'''(0) = -\kappa^2(0) \mathbf{T}(0) + \kappa'(0) \mathbf{N}(0) + \kappa(0)\tau(0) \mathbf{B}(0)$. Como a menos de un movimiento rígido la curva es la misma, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $\sigma(0) = 0$. Si escribimos todo en términos de la base $\{\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)\}$, obtenemos una aproximación de orden 3 en un entorno del origen:

$$\sigma(t) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa(0) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -\kappa(0)^2 \\ \kappa'(0) \\ \kappa(0)\tau(0) \end{pmatrix} \frac{t^3}{6}$$

La proyección en el plano osculador, mirando los términos de orden 2 solamente, es una parábola parametrizada por $x(t) = t$, $z(t) = \frac{\kappa(0)}{2}t^2$. La proyección en el plano rectificante, mirando los términos de orden 3 solamente, es aproximadamente una cúbica

parametrizada por $x(t) = t - \kappa(0)^2 t^3 \approx t$, $y(t) = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3$. Finalmente, la proyección en el plano normal, mirando los términos de orden 3 solamente, es aproximadamente $y(t) \approx \frac{\kappa(0)}{2} t^2$, $z(t) = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3$.

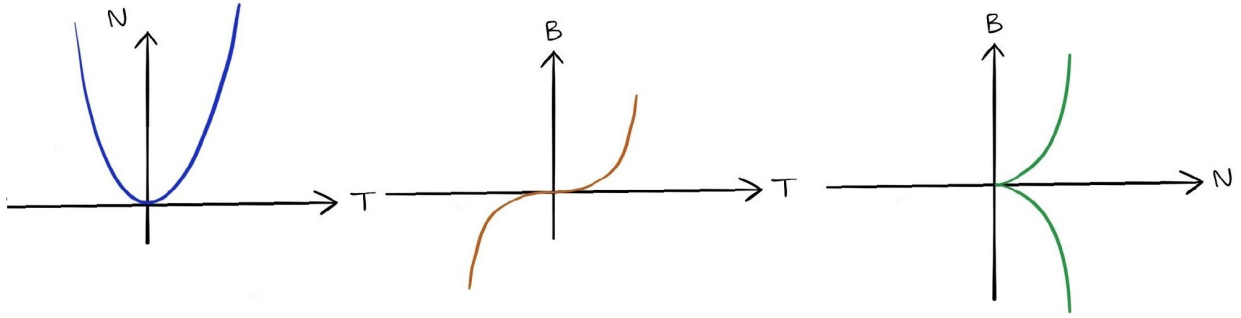


Figura 1.10: Las proyecciones a los planos que determina el Triedro de Frenet-Serret.

1.6. Resultados Globales

Hemos probado que las curvas en el espacio están totalmente determinadas por su curvatura y torsión. Pero estos dos datos son locales. En un sentido más preciso, esto se debe a que se obtienen simplemente calculando derivadas en el punto y por la Observación 1.3.6 ya sabemos que las derivadas son información local. En esta sección vamos a ver cómo obtener resultados globales a partir de información local. Veamos primero dos ejemplos sencillos.

Proposición 1.6.1. *Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva tal que todas las rectas normales pasan por un punto $P \in \mathbb{R}^3$ fijo. Entonces la imagen de σ está contenida en una esfera.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de la generalidad que σ está parametrizada por longitud de arco. La recta normal a la curva en $\sigma(s)$ es la recta parametrizada por $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(\lambda) = \sigma(s) + \lambda \mathbf{N}(s)$. Por lo tanto, para todo $s \in (a, b)$ existe un $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $P = \sigma(s) + \lambda(s) \mathbf{N}(s)$. Luego, tenemos que $\lambda(s) = \langle P - \sigma(s), \mathbf{N}(s) \rangle$, y así λ es una función diferenciable. Derivando el producto interno, obtenemos que:

$$\lambda'(s) = \langle -\sigma'(s), \mathbf{N}(s) \rangle + \langle P - \sigma(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s) \rangle + \langle \lambda(s) \mathbf{N}(s), \mathbf{N}'(s) \rangle = 0$$

Es decir, λ es constante. Pero ahora, como $\lambda \mathbf{N}(s) = P - \sigma(s)$, tomando norma resulta que $|\lambda| = \|P - \sigma(s)\|$. Es decir, σ está contenida en la circunferencia de centro $P \in \mathbb{R}^3$ y radio $|\lambda|$. Como queríamos probar. \square

Proposición 1.6.2. *Una curva en el espacio está contenida en un plano si y sólo si $\tau \equiv 0$.*

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco y $s_0 \in I$. Por las ecuaciones de Frenet-Serret, $\mathbf{B}'(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s) = 0$. Es decir, \mathbf{B} es constante. Consideremos

Π el plano de ecuación $\langle x - \sigma(s_0), \mathbf{B} \rangle$. Veamos que $\sigma(s) \in \Pi$ para todo $s \in I$. En efecto, sabemos que $\sigma(s_0) \in \Pi$. Derivando el producto interno:

$$\frac{d}{ds} \langle \sigma(s) - \sigma(s_0), \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B} \rangle + \langle \sigma(s) - \sigma(s_0), \mathbf{B}' \rangle = 0$$

Por lo tanto, $\langle \sigma(s) - \sigma(s_0), \mathbf{B} \rangle$ debe ser constante y en s_0 es 0. Como queríamos.

(\implies) Tenemos un movimiento rígido que lleva el plano que contiene a la curva al plano xy . Como la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos, podemos asumir entonces que $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco es de la forma $\sigma(s) = (x(s), y(s), 0)$. Por lo tanto, $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s) = (x'(s), y'(s), 0)$, de donde obtenemos que la normal principal es $\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{x''(s)}{\kappa(s)}, \frac{y''(s)}{\kappa(s)}, 0 \right)$, que es un vector unitario contenido en el plano xy . Es claro entonces que $\mathbf{B}(s) = (0, 0, 1)$ constantemente, pues es el producto vectorial entre dos vectores unitarios ortogonales contenidos en el plano xy . Esto implica que $\mathbf{B}'(s) = (0, 0, 0)$ y así la torsión debe ser nula. Y estamos. \square

Definición 1.6.3. Una curva $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regular se dice **cerrada** si existe $\rho > 0$ tal que $\sigma(t + \rho) = \sigma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Al menor $\rho > 0$ que cumple eso se lo denomina el **período**.

Observación 1.6.4. Notar que el período existe. En efecto, si consideramos el conjunto:

$$\mathcal{P} = \{\rho > 0 : \sigma(t + \rho) = \sigma(t) \forall t \in \mathbb{R}\}$$

tomamos $\rho_0 = \inf \mathcal{P}$, y $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ una sucesión que tiende a ρ_0 . Si tuviéramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, entonces $\sigma'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\rho_n) - \sigma(0)}{\rho_n} = 0$, que contradice la regularidad de σ . Por lo tanto $\rho_0 > 0$. Además, por la continuidad de σ , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t + \rho_n) = \sigma(t + \rho_0)$, y así obtenemos $\sigma(t + \rho_0) = \sigma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Es decir, $\rho_0 \in \mathcal{P}$ y así es un mínimo. Otra manera de verlo es notar que el conjunto

$$\mathcal{S} = \{\rho \in \mathbb{R} : \sigma(t + \rho) = \sigma(t) \forall t \in \mathbb{R}\}$$

es un subgrupo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ y eso implica que es cíclico con un generador (sin pérdida de la generalidad positivo) que será el período, o que es denso, pero esto implicaría que σ es constante.

Notemos que la noción de longitud de una curva que tenemos, en el caso de una curva cerrada no refleja la situación geométrica. En efecto, la integral $\int_{\mathbb{R}} \|\sigma'(\xi)\| d\xi$ no será convergente nunca. Pero en realidad la información que nos importa está contenida en un período, y esto es lo que dice la siguiente definición:

Definición 1.6.5. Si $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva cerrada, entonces se define la **longitud** de σ como:

$$\text{Long}(\sigma) = \text{Long}(\sigma|_{[t, t+\rho]}) = \text{Long}(\sigma|_{[0, \rho]})$$

Una curva cerrada σ de período ρ se dice **simple** si $\sigma(t) = \sigma(s)$ implica $t - s \in \rho\mathbb{Z}$.

Ya sabemos que la curvatura representa en alguna medida el cambio del ángulo de la curva en un sentido intuitivo, pero hasta ahora no formalizamos esta noción. Hagamos esto con la siguiente proposición:

Proposición 1.6.6. *Sea $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular plana y $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ su curvatura plana. Entonces existe una función $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que*

$$\mathbf{T}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

para todo $s \in (a, b)$. Se dice que θ es un **ángulo global**. Por otra parte, si $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es otro ángulo global, existe algún $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta - \varphi \equiv 2\pi\ell$.

Demostración. Supongamos primero que σ está parametrizada por longitud de arco y sea $s_0 \in (a, b)$. Como $\|\mathbf{T}(s_0)\| = 1$, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{T}(s_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$. Definamos una función $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ vía $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t k(\xi) d\xi$, y consideremos entonces

$v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $v(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$. Si $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces es fácil verificar que $v'(t) = k(t)Rv(t)$. Pero por otra parte, $\mathbf{T}'(t) = k(t)R\mathbf{T}(t)$, y como $\mathbf{T}(t_0) = v(t_0)$, debemos tener que $\mathbf{T} \equiv v$ por la unicidad de la solución de este Problema de Valores Iniciales.

Ahora bien, si σ no está parametrizada por longitud de arco, sea $u : (c, d) \rightarrow (a, b)$ la reparametrización tal que $\sigma \circ u$ sí esté parametrizada por longitud de arco. Entonces, existe un ángulo global $\theta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\sigma \circ u)'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Por lo tanto, $\mathbf{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \sigma'(t)u'(u^{-1}(t)) = (\cos(\theta(u^{-1}(t))), \sin(\theta(u^{-1}(t))))$.

Por otra parte, si φ es otro ángulo global, entonces tendremos que:

$$(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) = \mathbf{T}(t) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))$$

y así $\theta(t) - \varphi(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Como $\theta - \varphi$ es continua y $2\pi\mathbb{Z}$ es discreto, debe ser constante. Como queríamos probar. \square

Una demostración topológica. Sabemos que $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$ es el revestimiento universal de S^1 . Sea $s_0 \in (a, b)$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\theta_0) = \mathbf{T}(s_0)$. Como (a, b) es simplemente conexo y $\mathbf{T} : (a, b) \rightarrow S^1$ continua, por la propiedad del levantamiento, existe una única función continua $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ \theta = \mathbf{T}$ y $\theta(s_0) = \theta_0$. Es decir, el siguiente diagrama (de espacios topológicos punteados) conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}, \theta_0) \\ & \nearrow \exists! \theta & \downarrow p \\ ((a, b), s_0) & \xrightarrow{\mathbf{T}} & (S^1, \mathbf{T}(s_0)) \end{array}$$

Ahora bien, como $p'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, por el Teorema de la Función Inversa existe en un entorno de cada punto una inversa infinitamente diferenciable p^{-1} y así $\theta = p^{-1} \circ \mathbf{T}$ localmente. Por lo tanto, θ es tan diferenciable como \mathbf{T} , y listo. \square

Definición 1.6.7. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada de período ρ , y sea $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ un ángulo global para σ . Se define el **índice de rotación** de σ como:

$$\text{Ind}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(\rho) - \theta(0))$$

Observación 1.6.8. Notar que $\text{Ind}(\sigma)$ no depende de la elección del ángulo global θ (pues si φ es otro ángulo global, $\varphi(t) = \theta(t) + 2\pi\ell$ y así $\varphi(\rho) - \varphi(0) = \theta(\rho) - \theta(0)$). Por otra parte, como $\sigma(\rho) = \sigma(0)$ por la periodicidad, obtenemos que $\theta(\rho) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ y así $\text{Ind}(\sigma) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.6.9 (Hopf). *El índice de rotación de una curva cerrada y simple es siempre ± 1 (dependiendo de la dirección en la que se la parametriza).*

Demostración. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por longitud de arco con período ρ . Consideremos la región $\Delta = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s < t \leq \rho\}$, como en la Figura 1.11

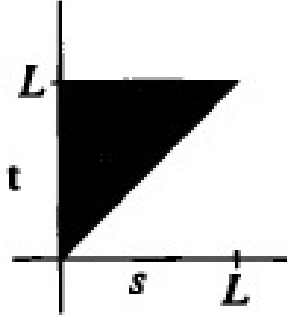


Figura 1.11: La región Δ .

Consideremos ahora la función $\varphi : \Delta \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} \frac{\sigma(t) - \sigma(s)}{\|\sigma(t) - \sigma(s)\|} & \text{si } 0 \leq s < t \leq \rho \text{ y } (s, t) \neq (0, \rho) \\ \mathbf{T}(s) = \sigma'(s) & \text{si } 0 \leq s = t \leq \rho \\ -\mathbf{T}(0) = -\sigma'(0) & \text{si } (s, t) = (0, \rho) \end{cases}$$

Es claro que esta función, asumiendo suficiente regularidad de σ , es al menos de clase \mathcal{C}^2 en Δ (es decir, hay un abierto que contiene a Δ y una función que extiende a φ que es de clase \mathcal{C}^2). Como en la demostración topológica de 1.6.6, podemos conseguir una función $\theta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\varphi(s, t) = (\cos(\theta(s, t)), \sin(\theta(s, t)))$. Notemos que $\varphi(s, s) = \mathbf{T}(s)$ y así $\theta(s, s)$ es un ángulo global para σ .

Como el índice de rotación claramente es invariante bajo movimientos rígidos y reparametrizaciones directas, podemos asumir que toda la imagen de σ está contenida en el semiplano superior, de modo tal que $\sigma(0) = 0$ y la tangente a σ allí es paralela al eje x . Es decir, trasladamos la curva hasta que toque en su punto más bajo al eje x . Si su tangente tuviera alguna componente en la dirección del eje y , desarrollando en

serie de Taylor en un entorno de ese punto, o bien vendría un punto desde abajo (si la componente fuera positiva) o bien iría hacia abajo (si la componente fuera negativa). Ambas alternativas serían contradictorias a que el punto sea el más bajo. Esto se puede observar en la Figura 1.12

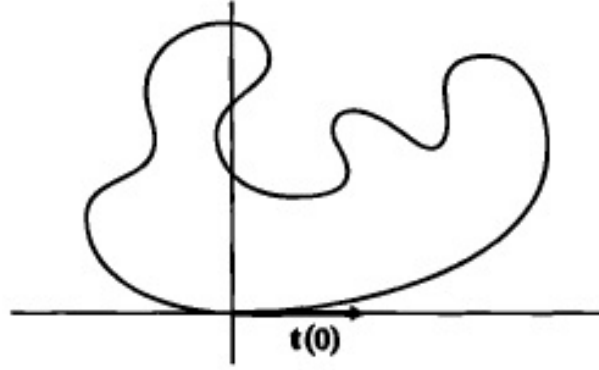


Figura 1.12: Posicionando correctamente a la curva.

Supongamos que σ se atraviesa de modo tal que $\mathbf{T}(0) = (1, 0)$. Podemos parametrizar a los lados del triángulo \triangle según $\gamma_1 : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2 : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t, \rho)$ y $\gamma : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t)$. Como $\theta(s, s)$ es un ángulo global, se tiene claramente que:

$$\text{Ind}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(\rho, \rho) - \theta(0, 0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \frac{d}{du}(\theta(u, u)) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \theta_s(u, u) + \theta_t(u, u) du$$

Pero esta última integral simplemente es la integral de línea del campo (θ_s, θ_t) sobre γ . Al ser θ de clase al menos \mathcal{C}^2 , las derivadas cruzadas conmutan y esto implica que el campo es conservativo. Por lo tanto, la integral de línea depende solamente de los extremos y no del camino. Es decir, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\gamma (\theta_s, \theta_t) \cdot ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} (\theta_s, \theta_t) \cdot ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} (\theta_s, \theta_t) \cdot ds$$

COMPLETAR EL ARGUMENTO!

□

Corolario 1.6.10. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple. Entonces la función $\mathbf{T} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es sobreyectiva.

Demostración. Sea θ un ángulo global y ρ el período de σ . Sin pérdida de la generalidad, por el Teorema anterior 1.6.9, tenemos $\theta(\rho) - \theta(0) = 2\pi$. Por conexión, tenemos que θ debe tomar todos los valores en $[\theta(0), \theta(0) + 2\pi]$. Esto implica que \mathbf{T} es sobreyectiva, pues $\mathbf{T}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ y θ recorre todo un período. □

Definición 1.6.11. Una curva se dice **convexa** si está contenida a un lado de cada una de las rectas tangentes.

Teorema 1.6.12. *Una curva cerrada simple es convexa si y sólo si su curvatura no cambia de signo.*

Demostración.

(\Leftarrow) Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco con período ρ , y sea $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un ángulo global para σ . Entonces, sabemos que $\theta' = k$, y como la curvatura no cambia de signo, debemos tener que θ es monótona. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $k \geq 0$ y así θ monótona creciente. Supongamos que σ no es convexa. Es decir, existe un punto $p = \sigma(t_0)$ y puntos $q_1 = \sigma(t_1), q_2 = \sigma(t_2)$ en cada uno de los semiplanos que determina la tangente L a σ por p . Tomamos a q_1 y q_2 como los puntos más alejados de L . Claramente las rectas tangentes a σ por q_1 y q_2 deben ser paralelas a L pues si $\mathbf{T}(t_1), \mathbf{T}(t_2)$ tuvieran alguna componente en la dirección ortogonal a L , mirando el desarrollo de Taylor en un entorno de s_1, s_2 tendríamos puntos más alejados de L (alternativamente, esto se puede probar por Multiplicadores de Lagrange).

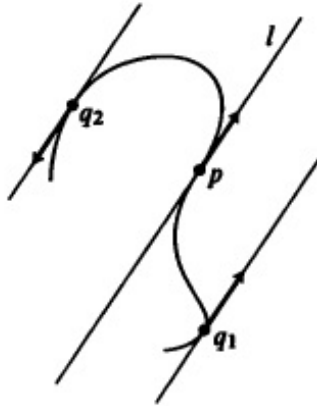


Figura 1.13: Los puntos más alejados a ambos lados de la tangente.

Como tenemos tres vectores unitarios con la misma dirección, debe haber al menos dos que tengan el mismo sentido (y así deben ser idénticos). Es decir, tenemos $0 \leq s_1 < s_2 \leq \rho$ tales que $\mathbf{T}(s_1) = \mathbf{T}(s_2)$ con $(s_1, s_2) \neq (0, \rho)$. Por lo tanto, $\theta(s_2) - \theta(s_1) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora bien, como θ es monótona, el incremento $\theta(s_2) - \theta(s_1)$ debe ser menor que $\theta(\rho) - \theta(0)$. Pero por el Teorema de Hopf 1.6.9 debemos tener que $\theta(\rho) - \theta(0) = 2\pi$. Entonces, $\theta(s_1) = \theta(s_2)$ ó $\theta(s_2) = \theta(s_1) + 2\pi$. En el primer caso, θ debe ser constante en $[s_1, s_2]$ y así σ debe ser una recta en $[s_1, s_2]$. Esto contradice el hecho de que ninguno de los puntos p, q_1, q_2 yacen sobre una misma recta. En el segundo caso, como $\theta(s_2) - \theta(s_1) = \theta(\rho) - \theta(0)$, debemos tener que θ es constante en $[0, s_1]$ y $[s_2, \rho]$. De esta forma, σ es un segmento de recta entre $\sigma(s_1)$ y $\sigma(s_2)$, y esto es absurdo como en el caso anterior.

(\Rightarrow) Supongamos ahora que σ es convexa. Si θ no es monótona, entonces existen $t_1 < t_0 < t_2$ tales que $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ pero $\theta(t_1) \neq \theta(t_0)$. **Agregar una justificación decente para esto.** En particular tenemos que $\mathbf{T}(t_1) = \mathbf{T}(t_2)$.

Como \mathbf{T} es sobreyectiva, existe t_3 tal que $\mathbf{T}(t_3) = -\mathbf{T}(t_1)$. Si miro las rectas tangentes a σ en tiempos t_1, t_2, t_3 , tengo tres rectas paralelas con puntos de la curva. Si tomo la que

está en el medio, tiene puntos a ambos lados y eso niega la convexidad de la curva. Por lo tanto, al menos dos de esas rectas tangentes deben coincidir. Supongamos que $\sigma(s_1)$ y $\sigma(s_2)$ tienen la misma recta tangente L . Sea L' una recta perpendicular a L que corta a L entre $\sigma(s_1)$ y $\sigma(s_2)$. Entonces, L' debe cortar a la curva en dos puntos p, q , pues hay dos arcos de la curva entre $\sigma(s_1)$ y $\sigma(s_2)$. Supongamos que p es el punto más cercano a L y q el más lejano de los dos. Si p no está sobre L , entonces tenemos un triángulo con vértices $\sigma(s_1), \sigma(s_2)$ y q con un punto p en su interior. Ahora, cualquier recta que pase por p no puede tener a $\sigma(s_1), \sigma(s_2)$ y q en un mismo semiplano. En efecto, esto se debe a que los semiplanos son convexos y si tuviera a los tres vértices debería tener a todo el triángulo. En particular, p estaría en el interior del semiplano y no en el borde. En particular, la tangente por p nos dejaría puntos a ambos lados, lo que contradice la convexidad de σ . Esto implica que la curva tiene un segmento de recta entre $\sigma(s_1)$ y $\sigma(s_2)$.

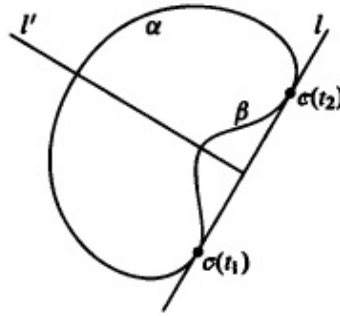


Figura 1.14: Dos puntos en la curva con la misma recta tangente.

Esto es absurdo, pues la tangente en s_1 y s_2 tienen la misma dirección pero signo opuesto, y en todo ese segmento la tangente preserva la dirección, pero por continuidad no puede cambiar su signo. Este absurdo viene de suponer que θ no es monótona. Esto concluye la demostración. \square

Corolario 1.6.13. Si $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada, simple y convexa y $\theta(s_1) = \theta(s_2)$ ($s_1 < s_2$) para algún ángulo global θ , entonces θ es constante en $[s_1, s_2]$.

Demostración. Se desprende de la demostración anterior. \square

Corolario 1.6.14. Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada convexa. Si una recta interseca a σ tres veces, entonces la interseca en todo el segmento entre esos dos puntos.

Demostración. Supongamos que la recta L corta a σ en puntos A, B, C con B entre A y C en L . Notemos que L debe ser tangente a σ en B pues si no A y C estarían en dos semiplanos distintos respecto de la tangente, lo que contradiría la convexidad de la curva. Pero entonces L también debe ser tangente a la curva en A y C , pues si la tangente a σ en esos puntos tuviera alguna componente en la dirección ortogonal a L , habría puntos de la curva a ambos lados de L (razonando como ya lo hicimos antes, por Taylor). Pero por el Corolario anterior, la curva debe ser una recta entre A y B y entre B y C . Esto concluye la demostración. \square

Definición 1.6.15. Un **vértice** de una curva regular $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un punto s_0 tal que $k'(s_0) = 0$, donde k es la curvatura plana de σ .

Teorema 1.6.16 (de los Cuatro Vértices). Sea $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva simple, cerrada y estrictamente convexa. Entonces σ tiene al menos cuatro vértices.

Demostración. Si k fuera constante en algún intervalo, todos esos puntos serían vértices y el Teorema se seguiría trivialmente. Si ρ es el período de σ , como $k : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre un compacto, alcanza un máximo y un mínimo en puntos s_1, s_2 respectivamente. Sean $p = \sigma(s_1)$ y $q = \sigma(s_2)$, y sea L la recta que pasa por p y q . Estos puntos p y q son claramente vértices por cómo los elegimos. Además, en virtud del Corolario 1.6.14, L sólo puede cortar a la curva en p y q . Sean $a, c \in \mathbb{R}^2$ tales que la recta L tiene ecuación $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - a, c \rangle = 0\}$. Entonces, la asignación $t \mapsto \langle \sigma(t) - a, c \rangle$ tiene exactamente dos ceros, que son s_1 y s_2 . Veamos que en cada uno de los dos arcos de la curva que determinan p y q hay algún vértice. Esto nos dará los cuatro vértices que buscamos.

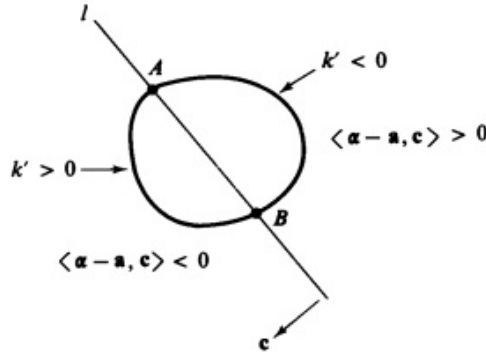


Figura 1.15: El máximo y el mínimo de la curvatura de σ .

Integrando por partes, resulta que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\rho k'(t) \langle \sigma(t) - a, c \rangle dt &= - \int_0^\rho k(t) \langle \mathbf{T}(t), c \rangle dt + (k(t) \langle \sigma(t) - a, c \rangle) \Big|_0^\rho \\
 &= \int_0^\rho \langle -k(t) \mathbf{T}(t), c \rangle dt \\
 &= \int_0^\rho \langle \mathbf{N}'(t), c \rangle dt \\
 &= \int_0^\rho \langle \mathbf{N}(t), c \rangle' dt = \langle \mathbf{N}(t), c \rangle \Big|_0^\rho = 0
 \end{aligned}$$

Ahora bien, en cada uno de los arcos de la curva que determinan p y q , la derivada de la curvatura no se anula. Como p es un mínimo y q un máximo, en un arco la derivada de la curvatura debe ser positiva y en el otro negativa. Como la curva es convexa y estamos asumiendo que no hay un segmento contenida, hay un arco contenido en cada semiplano que determina L . En el semiplano que está por debajo de L tendremos que $\langle \sigma(t) - a, c \rangle < 0$ y en el que está por arriba tendremos que $\langle \sigma(t) - a, c \rangle > 0$. Por lo tanto,

$k'(t) \langle \sigma(t) - a, c \rangle$ siempre tiene el mismo signo en toda la curva. Pero probamos que $\int_0^p k'(t) \langle \sigma(t) - a, c \rangle dt = 0$, y eso implica que $k'(t) \langle \sigma(t) - a, c \rangle \equiv 0$. Pero esto es absurdo, pues $\langle \sigma(t) - a, c \rangle$ se anula únicamente en s_1 y s_2 , y estamos suponiendo que k' se anula sólo en s_1 y s_2 . Y estamos. \square

Capítulo 2

Geometría Diferencial de las Superficies

2.1. Aspectos locales

Definición 2.1.1. Una **carta** es una función $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ que es inyectiva, diferenciable y tal que para todo $u \in U$ tenemos que $\partial_1 \mathbf{x}(u) \wedge \partial_2 \mathbf{x}(u) \neq 0$, donde $\partial_1 \mathbf{x}, \partial_2 \mathbf{x}$ son las derivadas parciales de \mathbf{x} respecto de la primera y segunda coordenada respectivamente. Esto es equivalente a que los vectores $\{\partial_1 \mathbf{x}(u), \partial_2 \mathbf{x}(u)\}$ sean linealmente independientes. La imagen de \mathbf{x} se denomina la **traza** de la carta.

Definición 2.1.2. Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta. Las funciones $\mathbf{x}_1 = \partial_1 \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{x}_2 = \partial_2 \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ se denominan **campos coordenados** y la función $\mathbf{n} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{n}(u) = \frac{\mathbf{x}_1(u) \wedge \mathbf{x}_2(u)}{\|\mathbf{x}_1(u) \wedge \mathbf{x}_2(u)\|}$ es el denominado **campo normal unitario**.

Definición 2.1.3. Un **cambio de coordenadas** es una función $\varphi : V \rightarrow U$ entre abiertos del plano $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ que es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

Supongamos que $\varphi : V \rightarrow U$ es un cambio de coordenadas. La función φ está determinada por sus componentes $\varphi^1, \varphi^2 : V \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, $\varphi(v) = (\varphi^1(v), \varphi^2(v))$ para cada $v \in V$. Recordemos que se define la **diferencial** de una función φ como la asignación $D_\varphi : V \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$D_\varphi(v) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^1(v) & \partial_2 \varphi^1(v) \\ \partial_1 \varphi^2(v) & \partial_2 \varphi^2(v) \end{pmatrix}$$

Recordemos también que el determinante de la matrix $J_\varphi(v) = \det D_\varphi(v)$ se denomina el **jacobiano** de φ . Si $\psi : U \rightarrow V$ es la inversa diferenciable de $\varphi : V \rightarrow U$, entonces $\psi \circ \varphi(v) = v$ para cada $v \in V$ y por la regla de la cadena tenemos que $D_\psi(\varphi(v)) D_\varphi(v) = I$ donde $I \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es la matriz identidad. Más concretamente, se

tiene que $\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi^i}{\partial u^k}(\varphi(v)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial v^j}(v) = \delta_j^i$ para cada $i, j \in \{1, 2\}$ (donde δ_j^i es la delta de Kronecker). En particular, tenemos que $D_\varphi(v) \in GL_2(\mathbb{R})$ y así $J_\varphi(v)$ nunca se anula. Por lo tanto, la asignación $J_\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (pues tomar determinante es una función en

términos de las coordenadas de la matriz y así es claramente continuo y D_φ es continua asumiendo regularidad al menos \mathcal{C}^1 de φ). Si V es conexo y como J_φ nunca se anula, debe ser que J_φ tiene signo constante. En el caso que $J_\varphi > 0$ se dice que φ **preserva la orientación**, mientras que si $J_\varphi < 0$ decimos que φ **invierte la orientación**.

Proposición 2.1.4. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una carta y $\varphi : V \rightarrow U$ es un cambio de coordenadas, entonces $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ también es una carta y tiene la misma traza que \mathbf{x} . Más aún, tenemos que $\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_i \varphi^j \mathbf{x}_j$, y el campo normal a \mathbf{y} es \mathbf{n} o $-\mathbf{n}$ dependiendo de si φ preserva o revierte la orientación respectivamente.

Demostración. Claramente \mathbf{y} es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables, e inyectiva por la razón análoga. Ahora, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\mathbf{y}_i(v) = \partial_i \mathbf{y}(v) = \partial_i (\mathbf{x} \circ \varphi)(v) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j}(\varphi(v)) \frac{\partial \varphi^j}{\partial v^i}(v) = \sum_{j=1}^2 \partial_i \varphi^j(v) \mathbf{x}_j(\varphi(v))$$

Entonces, para ver que es una carta, sólo falta ver que $\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \neq 0$. Calculemos este producto vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 &= \left(\sum_{j=1}^2 \partial_1 \varphi^j \mathbf{x}_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^2 \partial_2 \varphi^k \mathbf{x}_k \right) \\ &= \left(\partial_1 \varphi^1 \mathbf{x}_1 \wedge \partial_2 \varphi^2 \mathbf{x}_2 \right) + \left(\partial_1 \varphi^2 \mathbf{x}_2 \wedge \partial_2 \varphi^1 \mathbf{x}_1 \right) \\ &= \left(\partial_1 \varphi^1 \partial_2 \varphi^2 - \partial_1 \varphi^2 \partial_2 \varphi^1 \right) \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \\ &= J_\varphi \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Esto es no nulo por ser $J_\varphi(v) \neq 0$ para todo $v \in V$ y $\mathbf{x}_1(v) \wedge \mathbf{x}_2(v) \neq 0$ por ser \mathbf{x} una carta.

Finalmente, el campo normal de \mathbf{y} es simplemente $\frac{\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2\|} = \frac{J_\varphi}{|J_\varphi|} \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} = \text{sg}(J_\varphi) \mathbf{n}$.

Esto concluye la demostración. \square

Definición 2.1.5. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una carta y $X \in \mathbb{R}^3$ un vector, decimos que X es **tangente** a \mathbf{x} en $u \in U$ si existe $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ diferenciable tal que $\alpha(0) = u$ y $X = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)$.



Figura 2.1: Un vector tangente a una carta \mathbf{x} visto como la velocidad de una curva.

Proposición 2.1.6. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta y $u \in U$. El conjunto $T_u \mathbf{x}$ de todos los vectores tangentes a \mathbf{x} en $u \in U$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión 2 que tiene al conjunto $\{\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u)\}$ como base y que es ortogonal a $\mathbf{n}(u)$.

Demostración. Notemos primero que $\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u) \in T_u \mathbf{x}$. En efecto, considero $\xi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\xi_1(t) = (u^1 + t, u^2)$. Como $\xi_1(0) = (u^1, u^2) = u$ y U es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que ξ_1 se restringe a $\tilde{\xi}_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. Es fácil comprobar que $(\mathbf{x} \circ \tilde{\xi}_1)'(0) = \mathbf{x}_1(u)$. De manera análoga, considerando $\xi_2(t) = (u^1, u^2 + t)$ y restringiéndola a un entorno adecuado se sigue que $(\mathbf{x} \circ \tilde{\xi}_2)'(0) = \mathbf{x}_2(u)$. Esto implica que $\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u) \in T_u \mathbf{x}$.

Sean $X, Y \in T_u \mathbf{x}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, existen $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ funciones tales que $\alpha(0) = \beta(0) = u$ y $X = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)$, $Y = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0)$. Por la regla de la cadena, podemos escribir esto de forma más concisa como $X = (\alpha^1)'(0) \mathbf{x}_1(u) + (\alpha^2)'(0) \mathbf{x}_2(u)$ e $Y = (\beta^1)'(0) \mathbf{x}_1(u) + (\beta^2)'(0) \mathbf{x}_2(u)$. Veamos que $X + \lambda Y \in T_u \mathbf{x}$. Para ello, consideremos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta(\lambda t) - u$. Como $\gamma(0) = u \in U$ y U es abierto, podemos considerar la restricción $\gamma : (-\varepsilon', \varepsilon') \rightarrow U$ para algún $\varepsilon' > 0$. Ahora bien, por la regla de la cadena sabemos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) &= (\gamma^1)'(0) \mathbf{x}_1(u) + (\gamma^2)'(0) \mathbf{x}_2(u) \\ &= \left((\alpha^1)'(0) + \lambda (\beta^1)'(0) \right) \mathbf{x}_1(u) + \left((\alpha^2)'(0) + \lambda (\beta^2)'(0) \right) \mathbf{x}_2(u) = X + \lambda Y \end{aligned}$$

Y así $T_u \mathbf{x}$ forma un espacio vectorial. Por otra parte, a cualquier elemento de $T_u \mathbf{x}$ lo pudimos expresar como combinación lineal de $\{\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u)\}$, que son linealmente independientes por la definición de carta. Esto concluye la demostración. \square

Definición 2.1.7. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una carta, decimos que el espacio vectorial $T_u \mathbf{x}$ de dimensión 2 es el **plano tangente** a \mathbf{x} en u .

Proposición 2.1.8. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta y sea $\varphi : V \rightarrow U$ un cambio de coordenadas y sea $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si $v \in V$, entonces los espacios $T_v \mathbf{y} = T_{\varphi(v)} \mathbf{x}$ coinciden. Más aún, si $X \in T_v \mathbf{y}$ y escribimos $X = X^1 \mathbf{x}_1(\varphi(v)) + X^2 \mathbf{x}_2(\varphi(v)) = Y^1 \mathbf{y}_1(\varphi(v)) + Y^2 \mathbf{y}_2(\varphi(v))$.

Entonces, $X^i = \sum_{j=1}^2 \partial_j \varphi^i Y^j$, o dicho de otra forma:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = D_{\varphi(v)} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $X \in T_v \mathbf{y}$. Luego, existen $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ tales que $\alpha(0) = v$ y $X = (\mathbf{y} \circ \alpha)'(0)$. Pero como $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi$, se tiene que $(\mathbf{x} \circ (\varphi \circ \alpha))'(0)$ y $\varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es una curva con $\varphi \circ \alpha(0) = \varphi(v)$, tenemos que $X \in T_{\varphi(v)} \mathbf{x}$. Por lo tanto, $T_v \mathbf{y} \subseteq T_{\varphi(v)} \mathbf{x}$. Como son espacios vectoriales de dimensión 2, deben ser iguales.

Ahora bien, para ver la otra parte de la proposición, utilizamos el cambio de coordenadas que nos da la Proposición 2.1.4:

$$\sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{x}_i(\varphi(v)) = \sum_{j=1}^2 Y^j \mathbf{y}_j(v) = \sum_{j=1}^2 Y^j \left(\sum_{i=1}^2 \partial_j \varphi^i \mathbf{x}_i(\varphi(v)) \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \partial_j \varphi^i Y^j \right) \mathbf{x}_i(\varphi(v))$$

Como queríamos probar. \square

Proposición 2.1.9. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta y $u \in U$ y fijemos $X \in T_u \mathbf{x}$. Entonces:

1. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Si $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ son tales que $\alpha(0) = u$ y $(\mathbf{x} \circ \alpha)'(0) = X$, entonces el elemento $(f \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n$ sólo depende de X y de f y **no** de la elección de α y ε . Denotamos luego $Xf = (f \circ \alpha)'(0)$.
2. Si $X^1, X^2 \in \mathbb{R}$ son tales que $X = \sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{x}_i(u)$, entonces $Xf = \sum_{i=1}^2 X^i \partial_i f(u)$.
3. La función $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f \mapsto Xf$ es \mathbb{R} -lineal.
4. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, entonces $X(fg) = Xf g(u) + f(u)Xg$.

Demostración.

1. Sean $\varepsilon > 0$, $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tales que se cumple que $\alpha(0) = \beta(0) = u$ y $(\mathbf{x} \circ \alpha)'(0) = X = (\mathbf{x} \circ \beta)'(0)$. Más concretamente, esto se puede escribir como $\sum_{i=1}^2 (\alpha^i)'(0) \mathbf{x}_i(u) = \sum_{i=1}^2 (\beta^i)'(0) \mathbf{x}_i(u)$. Usando que $\{\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u)\}$ es una base, tenemos que $(\alpha^i)'(0) = (\beta^i)'(0)$. Sea $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$. Veamos que $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$, esto implicará la buena definición Xf . Pero esto es:

$$(f \circ \alpha)'(0) = \sum_{i=1}^2 (\alpha^i)'(0) \partial_i f(u) = \sum_{i=1}^2 (\beta^i)'(0) \partial_i f(u) = (f \circ \beta)'(0)$$

2. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = u + t(X^1, X^2)$. Como $\gamma(0) = u \in U$ y U es abierto, podemos restringirnos a $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. Además, tenemos que:

$$(\mathbf{x} \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^2 (\gamma^i)'(0) \mathbf{x}_i(u) = \sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{x}_i(u) = X$$

Por lo tanto, por el ítem 1, $Xf = (f \circ \gamma)'(0)$ y es fácil corroborar, por la regla de la

cadena, que $(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^2 (\gamma^i)'(0) \partial_i f(u) = \sum_{i=1}^2 X^i \partial_i f(u)$.

3. Por el ítem 2. tenemos que:

$$\begin{aligned} X(f + \lambda g) &= \sum_{i=1}^2 X^i \partial_i (f + \lambda g)(u) \\ &= \sum_{i=1}^2 X^i (\partial_i f(u) + \lambda \partial_i g(u)) = \sum_{i=1}^2 X^i \partial_i f(u) + \lambda \sum_{i=1}^2 X^i \partial_i g(u) = Xf + \lambda Xg \end{aligned}$$

4. Es inmediato con el ítem 2.

□

Definición 2.1.10. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si para todo $p \in S$ existe una carta $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

- $p \in \mathbf{x}(U) \subseteq S$.
- $\mathbf{x}(U)$ es un abierto de S .
- La correstricción $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$ tiene inversa continua.

Una tal carta \mathbf{x} se denomina una carta de S .

Proposición 2.1.11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $V \subseteq S$ un abierto de S . Entonces V es una superficie.

Demostración. Sea $p \in V$. Como S es una superficie, existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta de S tal que $p \in \mathbf{x}(U)$. Como V es abierto en S y $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es continua, entonces $\mathbf{x}^{-1}(V)$ es abierto. Consideremos $\mathbf{y} = \mathbf{x}|_{\mathbf{x}^{-1}(V)} : \mathbf{x}^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Claramente \mathbf{y} es una carta, pues $\mathbf{x}^{-1}(V)$ es abierto, \mathbf{x} es inyectiva y así su restricción lo es y $\partial_i \mathbf{y}(u) = \partial_i \mathbf{x}(u)$ para cada $u \in \mathbf{x}^{-1}(V)$, lo que implica que $\{\partial_1 \mathbf{y}(u), \partial_2 \mathbf{y}(u)\}$ son linealmente independientes por ser \mathbf{x} una carta.

Notemos que $p \in \mathbf{y}(\mathbf{x}^{-1}(V))$ pues $p \in V \cap \mathbf{x}(U)$. Además, $\mathbf{y}(\mathbf{x}^{-1}(V)) = V \cap \mathbf{x}(U)$, que es un abierto de V , por ser $\mathbf{x}(U)$ un abierto de S . Finalmente, \mathbf{y} tiene inversa continua, pues simplemente es retringir la inversa de \mathbf{x} a $V \cap \mathbf{x}^{-1}(V)$. Esto concluye la demostración. \square

Proposición 2.1.12. Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^∞ . Entonces el conjunto $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 0\}$ es una superficie para todo $p \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$.

Demostración. El principal ingrediente de la demostración será el Teorema de la Función Inversa. Sea $p \in S$. Por hipótesis, $\nabla f(p) \neq 0$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $\partial_3 f(p) \neq 0$. Sea $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función dada por $F(q^1, q^2) = (q^1, q^2, f(q^1, q^2))$. La diferencial de F en p está dada por la matriz

$$DF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_1 f(p) & \partial_2 f(p) & \partial_3 f(p) \end{pmatrix}$$

Esta matriz resulta inversible por ser $\partial_3 f(p) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Inversa, existen abiertos $A \subseteq W$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tales que $p \in A$, $F(A) = B$ y $F : A \rightarrow B$ es biyectiva, de clase \mathcal{C}^∞ y con inversa de clase \mathcal{C}^∞ . Además, $DF^{-1}(F(p))$ tiene por inversa a $DF(p)$.

Consideremos el abierto $U = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^1, u^2, 0) \in B\}$, y sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u^1, u^2) = F^{-1}(u^1, u^2, 0)$. Esta función es de clase \mathcal{C}^∞ por ser composición de funciones \mathcal{C}^∞ y toma valores en A . Si $u, v \in U$ son tales que $\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}(v)$, entonces $F^{-1}(u, 0) = F^{-1}(v, 0)$ y así $u = v$ por ser F^{-1} inyectiva. Esto implica que \mathbf{x} es inyectiva. Además, notemos que $\partial_i \mathbf{x}(q) = DF^{-1}(q, 0)e_i$ para cada $q \in U$. por lo tanto, $\partial_1 \mathbf{x}(q)$ y $\partial_2 \mathbf{x}(q)$ deben ser linealmente independientes por ser esa matriz inversible. Esto implica que \mathbf{x} es una carta.

Ahora bien, si $u \in U$, por definición tenemos que $F(\mathbf{x}(u)) = (\mathbf{x}(u), f(\mathbf{x}(u)))$. Pero por otra parte, $F(\mathbf{x}(u)) = F(F^{-1}(u^1, u^2, 0)) = (u^1, u^2, 0)$. Por lo tanto, $f(\mathbf{x}(u)) = 0$ para

cada $u \in U$. Es decir, $\mathbf{x}(U) \subseteq S$. Como \mathbf{x} toma valores en A , tenemos que $\mathbf{x}(U) \subseteq A \cap S$. Recíprocamente, si $p \in A \cap S$, entonces $f(p) = 0$ y así $F(p) = (p^1, p^2, 0)$. Luego, esto implica que $\mathbf{x}(p) = F^{-1}(p^1, p^2, 0) = F^{-1}(F(p)) = p$. Es decir, $\mathbf{x}(U) = A \cap S$, y en particular es un abierto de S . Por último, consideremos la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x) = (x^1, x^2)$. Claramente es continua y $\pi(F(A \cap S)) = U$. Si miro la restricción $\pi \circ F|_{A \cap S} : A \cap S = \mathbf{x}(U) \rightarrow U$, entonces es fácil ver que $\pi \circ F$ es la inversa de \mathbf{x} . La proposición sigue. \square

Ejemplo 2.1.13. La Proposición 2.1.12 nos permite probar que la mayoría de las superficies que conocemos son de hecho superficies bajo nuestra definición. Por ejemplo, una esfera, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ simplemente la podemos pensar como $f^{-1}(0)$ donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ pues $\nabla f(p) = (2p^1, 2p^2, 2p^3)$ sólo se anula si $p = 0 \notin S$. De manera similar podemos probar que un paraboloide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ es una superficie. En ambos casos, no tuvimos que exhibir un conjunto de cartas, y por eso la utilidad de esta Proposición. **Agregar cuentitas con cartas antes de la proposición**

Corolario 2.1.14. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El gráfico de f , $S = \{(u, f(u)) : u \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie.

Demostración. Sea $W = U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y sea $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u, t) = (u, t, f(u) - t)$. Es claro que $F^{-1}(0) = S$. Por otra parte, $\nabla F(u, t) = (\partial_1 f(u), \partial_2 f(u), -1) \neq 0$. Aplicando la Proposición 2.1.12 ya estamos. \square

Corolario 2.1.15. Toda superficie es localmente el gráfico de una función.

Demostración. **HACER!** \square

El siguiente resultado técnico nos será muy útil. En esencia, nos permitirá extender funciones continuas sobre una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ a funciones diferenciables en un entorno de un punto $p \in S \subseteq \mathbb{R}^3$. **Escribir esto mejor...**

Proposición 2.1.16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una carta tal que $\mathbf{x}(U) \subseteq S$, entonces \mathbf{x} es una carta de S . Más aún, para cada $u \in U$ existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ y una función diferenciable $r : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{x}(u) \in W \cap S \subseteq \mathbf{x}(U)$ y $\mathbf{x}^{-1}(q) = r(q)$ para todo $q \in W \cap S$.

Demostración. Sea $u_0 \in U$ y $p = \mathbf{x}(u_0)$. Como S es una superficie, hay una carta de S , $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ tal que $\mathbf{y}(v_0) = p$ para algún $v_0 \in V$. También, existe $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto tal que $\mathbf{y}(V) = \Omega \cap S$. Sea $\mathbf{n} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo normal a \mathbf{y} , y consideremos la función $\tilde{\mathbf{y}} : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\tilde{\mathbf{y}}(v, t) = \mathbf{y}(v) + t\mathbf{n}(v)$. Claramente se tiene que $\tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0) = p$. También es fácil ver que $\partial_1 \tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0) = \partial_1 \mathbf{y}(v_0)$, $\partial_2 \tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0) = \partial_2 \mathbf{y}(v_0)$ y $\partial_3 \tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0) = \mathbf{n}(v_0)$. Estos tres vectores resultan ser linealmente independientes por ser \mathbf{y} una carta. Por lo tanto, la matriz $D\tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0)$ es inversible.

Por lo tanto, existen abiertos $A \subseteq V \times \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tales que $(v_0, 0) \in A$, $\tilde{\mathbf{y}}(v_0, 0) \in B$ y además $\tilde{\mathbf{y}} : A \rightarrow B$ es biyectiva, de clase \mathcal{C}^∞ y su inversa también. Más aún, podemos suponer (por la demostración del Teorema de la Función Inversa) que $B \subseteq \Omega$. Es fácil ver que $\tilde{\mathbf{y}}(V \times \{0\}) \subseteq S$ y $\tilde{\mathbf{y}}^{-1}(B \cap S) \subseteq V \times \{0\}$. Como \mathbf{x} es continua y $\mathbf{x}(u_0) \in B$, se tiene que $\mathbf{x}^{-1}(B) \subseteq U$ es un abierto de U y $u_0 \in \mathbf{x}^{-1}(B)$. Consideremos entonces

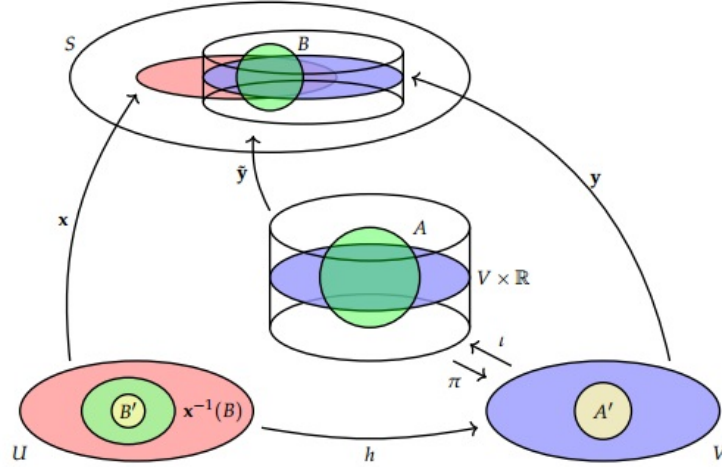


Figura 2.2: Un dibujo que ilustra la demostración de la Proposición 2.1.16

$h : \mathbf{x}^{-1}(B) \rightarrow V$ dada por $h = \pi \circ \tilde{\mathbf{y}}^{-1} \circ \mathbf{x}$, donde $\pi : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ es la proyección en la primera coordenada. Sea $\iota : V \rightarrow V \times \{0\}$ la inclusión canónica. Notemos que $\iota \circ h = \tilde{\mathbf{y}}^{-1} \circ \mathbf{x}$ sobre $\mathbf{x}^{-1}(B)$ por ser $\tilde{\mathbf{y}}^{-1}(B \cap S) = V \times \{0\}$. Ahora bien, por regla de la cadena tenemos que $D(\iota \circ h)(u_0) = D\iota(h(u_0)) Dh(u_0)$. Por otra parte, tenemos que $D(\tilde{\mathbf{y}}^{-1} \circ \mathbf{x})(u_0) = D\tilde{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{x}(u_0)) D\mathbf{x}(u_0) = D\tilde{\mathbf{y}}^{-1}(p) D\mathbf{x}(u_0)$. Como $D\tilde{\mathbf{y}}^{-1}(p)$ y $D\mathbf{x}(u_0)$ son inyectivas, su producto (ie. composición) lo es y así $D(\iota \circ h)(u_0)$ debe serlo. Esto implica que $Dh(u_0)$ es inyectivo. Pero como $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Dh(u_0)$ es una transformación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión. Es decir, $Dh(u_0)$ debe ser inversible. Aplicamos el Teorema de la Función Inversa nuevamente. Existen abiertos $B' \subseteq \mathbf{x}^{-1}(B)$, $A' \subseteq V$ con $u_0 \in B'$, $h(B') = A'$ y $h : B' \rightarrow A'$ biyectiva de clase \mathcal{C}^∞ con inversa de clase \mathcal{C}^∞ .

Como $\mathbf{y} \circ \pi \circ \tilde{\mathbf{y}}^{-1}$ es la identidad, tenemos que:

$$\mathbf{x}(B') = (\mathbf{y} \circ \pi \circ \tilde{\mathbf{y}}^{-1} \circ \mathbf{x})(B') = \mathbf{y}(h(B')) = \mathbf{y}(A')$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}(B')$ es un abierto de S por serlo $\mathbf{y}(A')$ ya que \mathbf{y} es una carta de S . Notemos además que $p \in \mathbf{x}(B')$ pues $p \in \mathbf{y}(A')$. Como $p \in \mathbf{x}(B') \subseteq \mathbf{x}(U)$, tenemos que todo punto de $\mathbf{x}(U)$ es un punto interior por ser $\mathbf{x}(B')$ abierto en S . Es decir, $\mathbf{x}(U)$ es abierto en S .

Sólo resta ver que existen $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto tal que $\mathbf{x}(u) \in W \cap S \subseteq \mathbf{x}(U)$ y una función $r : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{x}^{-1}(q) = r(q)$ para todo $q \in W \cap S$. Para ello consideramos $W = \tilde{\mathbf{y}}(A \cap \pi^{-1}(A')) \subseteq B$ abierto (por la continuidad de π y $\tilde{\mathbf{y}}$), y la función dada por $r = h^{-1} \circ \pi \circ \tilde{\mathbf{y}}^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^2$. Entonces, tendremos que $r \circ \mathbf{x}(u) = u$. En efecto, esto se debe a que $r \circ \mathbf{x} = h^{-1} \circ \pi \circ \tilde{\mathbf{y}}^{-1} \circ \mathbf{x} = h^{-1} \circ h = 1$. Esto implica que r es la inversa de \mathbf{x} en $W \cap S$. Y estamos. \square

Proposición 2.1.17. Sea S es una superficie y $\mathbf{x} : U \rightarrow S$, $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ dos cartas. Sea $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$. Entonces la función $\varphi : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ dada por $\varphi = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ es un cambio de coordenadas.

Demostración. Notemos que φ es claramente biyectiva pues tiene por inversa a la función $\psi : \mathbf{x}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{y}^{-1}(W)$ dada por $\psi = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$. Ahora bien, por la Proposición anterior 2.1.16, existe una función r diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a W tal que $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} = r \circ \mathbf{y}$. Como r , \mathbf{y} son diferenciables, la composición lo es. Esto concluye la demostración. \square

Notemos que en la demostración tuvimos que conseguir una función en un entorno de W para poder hablar de la diferenciabilidad. Definamos una noción de diferenciabilidad para funciones cuyo dominio es una superficie.

Definición 2.1.18. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **diferenciable** si es continua y para cada carta $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ la función $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Proposición 2.1.19. Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, entonces f es diferenciable si y sólo si para cada $p \in S$ existe una carta $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ tal que $p \in \mathbf{x}(U)$ y la composición $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Demostración.

(\implies) No hay nada que probar.

(\impliedby) Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una carta con $\mathbf{x}(U) \subseteq S$. Para ver que $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, basta con probarlo para cada punto $u \in U$. Fijemos $u \in U$ y sea $p = \mathbf{x}(u)$. Sabemos que existe una carta $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ tal que $p \in \mathbf{y}(V)$ y $f \circ \mathbf{y}$ es diferenciable. Sabemos que $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ es un abierto de S , $\mathbf{x}^{-1}(W)$, $\mathbf{y}^{-1}(W)$ son abiertos de \mathbb{R}^2 y el cambio de coordenadas $\varphi = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbf{x}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{y}^{-1}(W)$ es diferenciable. Como la restricción de $f \circ \mathbf{x}$ a $\mathbf{x}^{-1}(W)$ coincide con $f \circ \mathbf{y} \circ \varphi$, que es diferenciable y $u \in \mathbf{x}^{-1}(W)$, resulta que $f \circ \mathbf{x}$ es diferenciable en u . La proposición sigue. \square

Observación 2.1.20. Notemos que la composición de funciones diferenciables es diferenciable. Esto es fácil de ver usando la Proposición 2.1.16.

Definición 2.1.21. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$ un punto. Un vector $X \in \mathbb{R}^3$ es tangente a S en p si existe $\varepsilon > 0$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$. Definimos por $T_p(S)$ al conjunto de los vectores tangentes a S en p .

Ahora demos una descripción del espacio tangente que sea intrínseca de la superficie. Es decir, que no dependa de la carta que tomemos.

Proposición 2.1.22. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$ un punto. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta. Si $u \in U$ es tal que $\mathbf{x}(u) = p$, entonces $T_p(S) = D_{\mathbf{x}}(u)(\mathbb{R}^2)$. En particular, $T_p(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial de dimensión 2. Más aún, $\{\partial_1 \mathbf{x}(u), \partial_2 \mathbf{x}(u)\}$ es una base de $T_p(S)$.

Demostración. Notemos que si $X \in T_{\mathbf{x}(u)} = D_{\mathbf{x}}(u)(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = u$, $X = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)$. Si tomamos $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ dada por $\beta = \mathbf{x} \circ \alpha$, entonces $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0) = X$. Es decir, $X \in T_p(S)$. Recíprocamente, si $X \in T_p(S)$, entonces existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$. Por la Proposición 2.1.16 existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $p \in W$ y una función diferenciable $r : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $r(\mathbf{x}(q)) = q$ para todo $q \in W \cap S$. Por la regla de la cadena

obtenemos que $D_r(p) = D_r(\mathbf{x}(u)) = D_{\mathbf{x}}(u)^{-1}$. Ahora bien, consideremos $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por $\beta = r \circ \alpha$. Notemos que $\beta(0) = r(\alpha(0)) = r(p) = \mathbf{x}^{-1}(p) = u$. Además, $(\mathbf{x} \circ \beta)'(0) = (\mathbf{x} \circ r \circ \alpha)'(0) = D_{\mathbf{x}}(u) D_r(p) \alpha'(0) = \alpha'(0) = X$. Esto prueba que $X \in T_{\mathbf{x}}(u)$. Por lo tanto, $T_p(S) = T_{\mathbf{x}}(u)$ y como ya vimos que $T_{\mathbf{x}}(u)$ es un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{\partial_1 \mathbf{x}(u), \partial_2 \mathbf{x}(u)\}$, la proposición sigue. \square

Proposición 2.1.23. Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable y $X \in T_p(S)$, definimos $Xf = (f \circ \alpha)'(0)$ con $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = X$. La función $d_p f : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $X \mapsto Xf$ es una función lineal que denominaremos la **diferencial** de f en p .

Demostración. Debemos notar que a cualquier $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$ la podemos escribir como $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ donde $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es una carta, $\mathbf{x}(u) = p$ y $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ es tal que $\beta(0) = u$. Esto lo podemos hacer ensanchando un poco el abierto y tomando la inversa diferenciable en virtud de la Proposición 2.1.16. Ahora simplemente recordamos la Proposición 2.1.9 que nos daba la buena definición del espacio tangente cuando lo definimos con cartas. Y estamos. \square

2.2. Geometría Intrínseca y Coeficientes Métricos

El objetivo de esta sección será poder calcular distancias, ángulos, aspectos métricos en general, con información propia de la superficie y no del espacio ambiente en el que estamos. Notemos que \mathbb{R}^3 es un espacio provisto de un producto interno, y si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie, entonces para cada punto $p \in S$ el espacio tangente $T_p(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ es un subespacio y así hereda el producto interno de \mathbb{R}^3 . Es decir, tenemos un producto interno $\langle -, - \rangle_p : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$. La **Primera Forma Fundamental** se define por $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$. Recordemos que por las identidades de polarización tenemos que $\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{2} (I_p(v + w) - I_p(v) - I_p(w))$, por lo tanto conocer a la Primera Forma Fundamental o conocer al producto interno serán lo mismo. La Primera Forma Fundamental será nuestro principal objeto, pues será lo que nos permitirá medir dentro de la superficie.

Si $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es una carta, tenemos las derivadas direccionales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}(U) \rightarrow T_p(S)$ dadas por $\mathbf{x}_i(p) = \partial_i \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(p))$. Sabemos que el espacio tangente $T_p(S)$ tiene por base a $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$. Por lo tanto, si conocemos los productos internos $\langle \mathbf{x}_i(p), \mathbf{x}_j(p) \rangle_p$ para cada $1 \leq i, j \leq 2$, entonces conoceremos perfectamente a la Primera Forma Fundamental. Definimos entonces $g_{ij} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_{ij}(p) = \langle \mathbf{x}_i(p), \mathbf{x}_j(p) \rangle_p$ los **coeficientes métricos** (del tensor métrico si queremos ser específicos). Estas funciones g_{ij} son claramente diferenciables. Si $X, Y \in T_p(S)$, entonces escribiendo en coordenadas, $X = X^1 \mathbf{x}_1(p) + X^2 \mathbf{x}_2(p)$, $Y = Y^1 \mathbf{x}_1(p) + Y^2 \mathbf{x}_2(p)$. Por lo tanto, distribuyendo el producto interno, $\langle X, Y \rangle_p = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} X^i Y^j g_{ij}(p)$. Consideramos la matriz $G(p) = \begin{pmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix}$.

Como es la matriz de un producto interno, debe resultar definida positiva y así su determinante $\det G(p) = g(p) > 0$. Ahora bien, nuestra definición depende *fuertemente*

de la elección de la carta, así que nos gustaría saber cómo se modifica al tomar otra carta. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow S$, $\mathbf{y} : V \rightarrow S$ son dos cartas, sea $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$. Sabemos que el cambio de coordenadas $\varphi : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ dado por $\varphi = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ es diferenciable. Si $v \in \mathbf{y}^{-1}(W)$, como $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi$, resulta que:

$$\mathbf{y}_i(\mathbf{y}(v)) = (\partial_i \mathbf{y})(v) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \mathbf{x}(\varphi(v)) \partial_i \varphi^j(v) = \sum_{j=1}^2 \partial_i \varphi^j(v) \mathbf{x}_j(\varphi(v))$$

Por lo tanto, si g_{ij} son los coeficientes métricos para la carta \mathbf{x} y \bar{g}_{ij} son los coeficientes métricos para la carta \mathbf{y} , tenemos:

$$\bar{g}_{ij} = \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^2 \partial_i \varphi^k \mathbf{x}_k, \sum_{\ell=1}^2 \partial_j \varphi^\ell \mathbf{x}_\ell \right\rangle = \sum_{1 \leq k, \ell \leq 2} \partial_i \varphi^k \partial_j \varphi^\ell g_{k\ell}$$

Interpretando esto matricialmente, simplemente es $\bar{G} = D_\varphi G D_\varphi^t$. Por lo tanto, calculando el determinante se tiene que $\bar{g} = g J_\varphi^2$. Notaremos además por $G^{-1} = (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ a la matriz inversa de $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$.

Definición 2.2.1. Sea S una superficie arcoconexa. Sea $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$d_S(p, q) = \inf\{\text{Long}(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \rightarrow S, \sigma(a) = p, \sigma(b) = q, \sigma \text{ es } \mathcal{C}^\infty \text{ a trozos}\}$$

Es fácil ver que d_S es una métrica y la denominaremos la **distancia intrínseca** de S .

Definición 2.2.2. Sean S, S' superficies. Una función $f : S \rightarrow S'$ se dice un **difeomorfismo** si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

Definición 2.2.3. Un difeomorfismo $f : S \rightarrow S'$ es una **isometría** si para todo $p \in S$ tenemos que $d_p f : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$ es una isometría de espacios euclídeos.

Observación 2.2.4. Con esta definición nueva de isometría, no toda isometría viene de un movimiento rígido. Consideremos las superficies $S = \{(x, y, z) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, z = 0\}$ y $S' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$ (son superficies por ser abiertos en superficies dadas como en la Proposición 2.1.12). Notemos que $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow S$ dada por $\varphi(\theta, t) = (\theta, t, 0)$ es una carta de S . Es fácil ver que $\varphi_\theta(\theta, t) = (1, 0, 0)$ y $\varphi_t(\theta, t) = (0, 1, 0)$. Entonces, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es una base (ortonormal) del espacio tangente a S en el punto $p = (\theta, t, 0)$. Consideremos la función $f : S \rightarrow S'$ dada por $f(\theta, t, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$. Es decir, estamos enrollando la franja del plano S en un pedazo de cilindro S' . Es fácil ver que $d_p f(\varphi_\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ y $d_p f(\varphi_t) = (0, 0, 1)$. Como $d_p f$ nos mandó una base ortonormal en otra, debe ser una isometría de espacios euclídeos. Claramente f es un difeomorfismo. En efecto, es la restricción de una función diferenciable de \mathbb{R}^3 , así que componiendo con una carta diferenciable obtenemos una función diferenciable. Es fácil ver también que la inversa es diferenciable. Esto nos da una isometría entre una franja del plano y una franja del cilindro. Pero esta isometría f no viene dada por un movimiento rígido, pues la imagen de la recta $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$, $\sigma(t) = (t, 0, 0)$ es $f \circ \sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, que no preserva la curvatura.

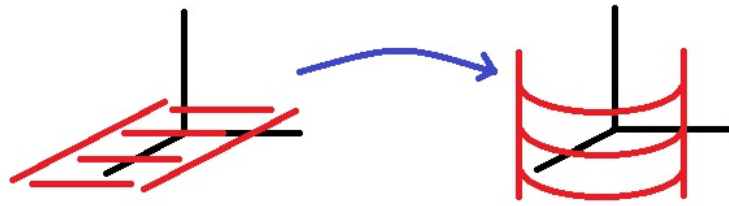


Figura 2.3: Enrollar una franja del plano en un cilindro es una isometría que no viene de un movimiento rígido.

Ahora que tenemos un poco más de idea de cómo es la geometría de una superficie, tratemos de precisar un poco la noción de geometría intrínseca. Una construcción que a cada superficie S le asigna una función $\varphi_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ es un **invariante intrínseco** (con valores en \mathbb{R}) si sólo depende de la clase de isometría de S . Esto es, cada vez que $f : S \rightarrow S'$ es una isometría, vale que $\varphi_{S'} \circ f = \varphi_S$. Esta versión de invariantes intrínsecos depende únicamente de S , es decir, está libre de las coordenadas que podamos elegir sobre S . Para dar una versión en coordenadas, consideramos una construcción que a cada par (S, \mathbf{x}) le asigna una función $\varphi_{S, \mathbf{x}} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, donde S es una superficie y $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta. Decimos en ese caso que una tal asignación es un **invariante intrínseco** si para cada isometría $f : S \rightarrow S'$ tenemos que $\varphi_{S', f \circ \mathbf{x}} \circ f = \varphi_{S, \mathbf{x}}$.

Observación 2.2.5. Las asignaciones $(S, \mathbf{x}) \mapsto \varphi_{S, \mathbf{x}} (g_{ij} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R})$ dadas por los coeficientes métricos son invariantes intrínsecos. En efecto, notemos primero que $f \circ \mathbf{x}$ es una carta de S' (esto es simplemente usar que la composición de funciones diferenciables en el sentido de superficies es diferenciable, y eso es una fácil consecuencia de la Proposición 2.1.16). Ahora bien, queremos mirar los campos coordenados $(f \circ \mathbf{x})_i$. Calculemos $(f \circ \mathbf{x})_1$ la derivada respecto de la primera coordenada. Si tomamos $\alpha(t) = \mathbf{x}(u^1 + t, u^2)$ definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $(u^1 + t, u^2) \in U$, entonces la derivada respecto de la primera coordenada de $f \circ \mathbf{x}$ en $u = (u^1, u^2)$ simplemente es $(f \circ \alpha)'(0)$. Si $p = \mathbf{x}(u)$, entonces $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{x}_1(p)$. Por lo tanto, por definición $(f \circ \alpha)'(0) = d_p f(\mathbf{x}_1(p))$. Hemos calculado entonces los campos coordenados de la carta $f \circ \mathbf{x}$ como $(f \circ \mathbf{x})_i = d_p f(\mathbf{x}_i(p))$ (en particular, esto nos dice que los campos coordenados son intrínsecos). Entonces, sus coeficientes métricos están dados por $\varphi_{S', f \circ \mathbf{x}} \circ f(p) = \langle d_p f(\mathbf{x}_i(p)), d_p f(\mathbf{x}_j(p)) \rangle$. Pero como f es una isometría, $d_p f$ lo es, y así $\langle d_p f(\mathbf{x}_i(p)), d_p f(\mathbf{x}_j(p)) \rangle = \langle \mathbf{x}_i(p), \mathbf{x}_j(p) \rangle$. Es decir, $\varphi_{S', f \circ \mathbf{x}} \circ f = \varphi_{S, \mathbf{x}}$. Esto prueba que los coeficientes métricos son intrínsecos.

Observación 2.2.6. La métrica intrínseca $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ es un invariante intrínseco. En efecto, esto se sigue de que si $f : S \rightarrow S'$ es una isometría y $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ es una curva, entonces $f \circ \sigma : (a, b) \rightarrow S'$ es una curva que tiene igual longitud que σ . Para ver esto notemos que podemos escribir a la longitud de σ en términos de I_p y como los coeficientes métricos son invariantes, la Primera Forma Fundamental debe serlo. Por lo tanto, la longitud se preserva por isometrías y así la distancia intrínseca es un invariante intrínseco como queríamos ver.

Definición 2.2.7. Sea S una superficie. Decimos que $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un **campo normal** (o función de Gauss) si es diferenciable, $\|\mathbf{n}(p)\| = 1 \ \forall p \in S$ y $\mathbf{n}(p)$ es ortogonal a $T_p(S)$ para cada $p \in S$.

Proposición 2.2.8. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$. Entonces, existe un abierto $V \subseteq S$ tal que $p \in V$ y V posee un campo normal. Es decir, para cualquier superficie existen localmente campos normales.

Demostración. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta con $\mathbf{x}(u) = p$. Tomemos la función $\mathbf{n} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\mathbf{n}(q) = \frac{\partial_1 \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(q)) \wedge \partial_2 \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(q))}{\|\partial_1 \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(q)) \wedge \partial_2 \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(q))\|}$$

Notemos que \mathbf{n} es diferenciable pues al componerla con la carta \mathbf{x} obtenemos una función diferenciable (pues miramos $\partial_1 \mathbf{x}$, $\partial_2 \mathbf{x}$ son diferenciables y así su producto vectorial, y tomar norma también). Como cubrimos a $\mathbf{x}(U)$ sólo con la carta \mathbf{x} y $\mathbf{n} \circ \mathbf{x}$ es diferenciable, en virtud de la Proposición 2.1.19 se sigue que \mathbf{n} es diferenciable. Esto concluye la demostración. \square

Proposición 2.2.9. Supongamos que $W \subseteq \mathbb{R}^3$ es un abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^∞ , $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = 0\}$. Si $\nabla f(p) \neq 0$ para cada $p \in S$, entonces la superficie S tiene un campo normal dado por $\mathbf{n}(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$.

Demostración. El campo claramente es diferenciable, por ser f de clase C^∞ y $\nabla f \neq 0$. Sea $X \in T_p(S)$. Entonces, existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$. Ahora bien, como $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq S$, tenemos que $f \circ \alpha \equiv 0$. Por lo tanto, por la regla de la cadena:

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla f(p), X \rangle$$

Es decir, $\nabla f(p)$ es ortogonal a $T_p(S)$. Normalizándolo, se sigue lo deseado. \square

Proposición 2.2.10. Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie conexa y existe $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo normal, entonces hay exactamente dos campos: \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$.

Demostración. Sea $\mathbf{m} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal. Como $\mathbf{m}(p), \mathbf{n}(p) \in (T_p(S))^\perp$ y $\dim(T_p(S))^\perp = 1$, debe existir $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{m}(p) = \lambda(p) \mathbf{n}(p)$. Tomando norma, se sigue que $|\lambda(p)| = 1$ y así $\lambda : S \rightarrow \{-1, 1\}$. Como $\lambda(p) = \langle \mathbf{m}(p), \mathbf{n}(p) \rangle$, λ es continua y como S es conexo, debe ser que λ es constante. Esto nos dice que $\mathbf{m}(p) = \mathbf{n}(p)$ o $\mathbf{m}(p) = -\mathbf{n}(p)$. Como queríamos probar. \square

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo normal. Si $p \in S$, y tenemos un vector tangente $X \in T_p(S)$, entonces $X\mathbf{n} = (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0)$ donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X$. Como $\|\mathbf{n} \circ \alpha\| = 1$, tenemos que $\langle (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0), (\mathbf{n} \circ \alpha)(0) \rangle = 0$. Es decir, $\langle X\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Esto implica que $X\mathbf{n}(p) \in \langle \mathbf{n}(p) \rangle^\perp = T_p(S)$. Es decir, tenemos una asignación $d_p \mathbf{n} : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ dada por $d_p \mathbf{n}(X) = X\mathbf{n}(p)$.

Definición 2.2.11. Sea S una superficie y $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal. Si $p \in S$, entonces $L_p = -d_p \mathbf{n} : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$, $L_p(X) = -d_p \mathbf{n}(X) = -X\mathbf{n}(p)$ se denomina el **operador de forma** de S en p .

El operador de forma nos está midiendo la geometría de todas las curvas sobre S que pasan por p juntas. El problema de no tener una base distinguida para $T_p(S)$ lo resolveremos mirando los autovectores del operador de forma L . En particular, forman una base ortonormal en virtud de la siguiente proposición:

Proposición 2.2.12. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Su operador de forma L_p es autoadjunto para cada $p \in S$. En particular, L_p es diagonalizable, con autovalores reales y una base ortonormal de autovectores.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta con $\mathbf{x}(u) = p$. Notemos que $\langle \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_i(p) \rangle = 0$ por ser $\mathbf{n}(p)$ ortogonal al tangente $T_p(S)$ y $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$ una base del espacio tangente. Derivando la función $f(q) = \langle \mathbf{n}(q), \mathbf{x}_i(q) \rangle$ respecto de $\mathbf{x}_j(p)$ tenemos que:

$$0 = \mathbf{x}_j(p) \langle \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_i(p) \rangle = \langle \mathbf{x}_j(p) \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_i(p) \rangle + \langle \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_j(p) \mathbf{x}_i(p) \rangle$$

Ahora bien, $\mathbf{x}_j \mathbf{x}_i = \partial_j \mathbf{x}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{x}$. Como \mathbf{x} es de clase \mathcal{C}^∞ , las derivadas cruzadas conmutan, y así $\partial_j \partial_i \mathbf{x} = \partial_i \partial_j \mathbf{x}$. Por lo tanto, $\langle \mathbf{x}_j(p) \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_i(p) \rangle = \langle \mathbf{x}_i(p) \mathbf{n}(p), \mathbf{x}_j(p) \rangle$. Es decir, $\langle d_p(\mathbf{x}_j), \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{x}_j, d_p(\mathbf{x}_i) \rangle$. Como $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$ es una base de $T_p(S)$, esto concluye la demostración. \square

Notemos que la demostración anterior funciona principalmente por el hecho de que las derivadas cruzadas conmutan. Es decir, que para los campos coordenados $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ tenemos que $d\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j) - d\mathbf{x}_j(\mathbf{x}_i) = 0$. Ahora bien, un **campo tangente** a una superficie S es una función $\mathbf{X} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$ se tiene $\mathbf{X}(p) \in T_p(S)$. Denotamos por $\mathfrak{X}(S)$ al conjunto de todos los campos tangentes a S que son diferenciables. Si tenemos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, por lo general no es cierto que las derivadas cruzadas conmuten. Es decir, derivando a Y respecto de $X(p)$ y a X respecto de $Y(p)$ obtenemos resultados distintos. El **corchete de Lie** mide precisamente esto: $[X, Y]_p = X(p)Y - Y(p)X$.

Definición 2.2.13. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$. La **curvatura Gaussiana** de S en p se define por $\kappa(p) = \det L_p$ y la **curvatura media** de S en p se define por $H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr } L_p$. Las **curvaturas principales** de S en p son los autovalores de L_p y las direcciones correspondientes a los autovectores son las **direcciones principales**. Por último, decimos que $p \in S$ es un punto **plano** si $\kappa(p) = 0$, es **umbílico** si las dos curvaturas principales son iguales, es **elíptico** si $\kappa(p) > 0$ y es **hiperbólico** si $\kappa(p) < 0$.
Agregar dibujo

Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta y sea $p \in \mathbf{x}(U)$. Como $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$ es una base del espacio tangente $T_p(S)$, existen escalares $L_j^i(p)$ tales que $L_p(\mathbf{x}_j(p)) = \sum_{i=1}^2 L_j^i(p) \mathbf{x}_i(p)$. Esto define funciones $L_j^i : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Como $\mathbf{x}_\ell \in T_p(S)$, la función $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_\ell \rangle$ es idénticamente nula. Derivándola respecto de $\mathbf{x}_j(p)$ para cada p y usando la regla del producto, obtenemos $\langle d_p \mathbf{n}(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle + \langle \mathbf{n}(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle = 0$. Por lo tanto, se sigue que:

$$\langle L_p(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle = \langle \mathbf{n}(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle$$

Esto implica que $\sum_{k=1}^2 L_j^k(p) \langle \mathbf{x}_k(p), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle = \langle \mathbf{n}(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle$. Pero en término de los coeficientes métricos, esto es $\sum_{k=1}^2 L_j^k(p) g_{k\ell}(p) = \langle \mathbf{n}(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle$. Si multiplicamos a ambos lados por $g^{\ell i}(p)$ y sumamos respecto de ℓ , obtenemos que:

$$\sum_{\ell=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_j^k(p) g_{k\ell}(p) g^{\ell i}(p) = \sum_{k=1}^2 L_j^k(p) \left(\sum_{\ell=1}^2 g_{k\ell}(p) g^{\ell i}(p) \right) = \sum_{k=1}^2 L_j^k(p) \delta_i^k = L_j^i(p)$$

Es decir, pudimos obtener el despeje:

$$L_j^i(p) = \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathbf{n}(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle g^{\ell i}(p) \quad (2.1)$$

En particular, las funciones L_j^i son diferenciables por ser sumas y productos de funciones diferenciables. Ahora bien, si miramos al operador de forma L_p en la base $\mathcal{B}(p) = \{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$, su matriz asociada es $[L_p]_{\mathcal{B}(p)} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix}$. Como la curvatura Gaussiana de S en p es $\kappa(p) = \det L_p = \det[L_p]_{\mathcal{B}(p)} = L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2$, que resulta diferenciable por serlo las funciones L_j^i . De manera análoga, la curvatura media de S en p es $H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr } L_p = \frac{1}{2} \text{Tr}[L_p]_{\mathcal{B}(p)} = \frac{1}{2} (L_1^1 + L_2^2)$, que también resulta diferenciable.

Supongamos que las curvaturas principales de S en p son $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$. Sabemos que son las raíces del polinomio característico $x^2 - \text{Tr } L_p x + \det L_p = x^2 - 2H(p)x + \kappa(p)$. Es decir, $\kappa_1 = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - \kappa(p)}$ y $\kappa_2(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - \kappa(p)}$. Notemos que κ_1 y κ_2 son diferenciables siempre y cuando esa raíz sea no nula (pues sería suma y composición de funciones diferenciables). Pero esto implica que son diferenciables siempre y cuando las raíces sean distintas, y en nuestro lenguaje geométrico eso es que el punto p no sea umbilical. Por otra parte, si p no es umbilical, hay un entorno $\mathbf{x}(U)$ de p tal que ningún punto es umbilical (esto es por la continuidad de $\kappa_1 - \kappa_2$ que no se anula en p). Podemos probar entonces el siguiente resultado.

Proposición 2.2.14. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$. Si p no es un punto umbilical, existe un entorno de p donde podemos definir un campo tangente unitario con la dirección principal de cada autovector.*

Demostración. **Ejercicio!** (Usar Implícita?) □

Fijemos una carta $\mathbf{x} : U \rightarrow S$. Todo lo que hagamos ahora dependerá de esta carta, pero veremos que podemos pasar bien de una carta a la otra. Sabemos que $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p), \mathbf{n}(p)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 . Además, podemos escribir:

$$\begin{cases} d_p \mathbf{n}(\mathbf{x}_j(p)) = -L_p(\mathbf{x}_j(p)) = -\sum_{i=1}^2 L_j^i(p) \mathbf{x}_i(p) \\ d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) \mathbf{x}_k(p) + L_{ij}(p) \mathbf{n}(p) \end{cases}$$

Estas son las denominadas **ecuaciones de estructura**. Ahora bien, como las derivadas cruzadas conmutan $d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)) = d_p \mathbf{x}_j(\mathbf{x}_i(p))$, tenemos que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y $L_{ij} = L_{ji}$. Esta relación de (anti)simetría que aparece entre los coeficientes y las ecuaciones de estructura vendría a generalizar en algún sentido a la antisimetría de las ecuaciones de Frenet-Serret en curvas. Ahora bien, como $\mathbf{n}(p)$ es ortogonal a $\mathbf{x}_1(p)$ y $\mathbf{x}_2(p)$, es claro que tenemos $L_{ij} = \langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{n}(p) \rangle$. Por lo tanto, la ecuación 2.1 se puede reescribir como $L_j^i(p) = \sum_{\ell=1}^2 L_{\ell j}(p) g^{\ell i}$. De manera similar a lo que venimos haciendo

tenemos que $\langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) \langle \mathbf{x}_k(p), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) g_{k\ell}(p)$. Por lo tanto, multiplicando por $g^{\ell r}(p)$ y sumando sobre ℓ , obtenemos que:

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle g^{\ell r} = \sum_{\ell=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) g_{k\ell}(p) g^{\ell r}(p) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) \delta_r^k = \Gamma_{ij}^r(p)$$

A los coeficientes Γ_{ij}^k se los denomina **símbolos de Christoffel**. Veamos que son de naturaleza intrínseca. Es decir, podemos escribirlos sólo en términos de los coeficientes métricos y la carta.

Proposición 2.2.15. *Para todos i, j, k , podemos expresar a los símbolos de Christoffel de manera intrínseca:*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 g^{\ell k}(p) (\mathbf{x}_j(p) g_{i\ell}(p) - \mathbf{x}_\ell(p) g_{ij}(p) + \mathbf{x}_i(p) g_{j\ell}(p))$$

Demostración. Simplemente es usar la regla del producto para derivar al producto interno:

$$\mathbf{x}_j(p) g_{i\ell}(p) = \mathbf{x}_j(p) \langle \mathbf{x}_i(p), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle = \langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle + \langle \mathbf{x}_i(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_j(p)) \rangle$$

Procediendo de manera análoga, obtenemos:

$$\mathbf{x}_\ell(p) g_{ij}(p) = \langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_\ell(p)), \mathbf{x}_j(p) \rangle + \langle \mathbf{x}_i(p), d_p \mathbf{x}_j(\mathbf{x}_\ell(p)) \rangle$$

$$\mathbf{x}_i(p) g_{j\ell}(p) = \langle d_p \mathbf{x}_j(\mathbf{x}_i(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle + \langle \mathbf{x}_j(p), d_p \mathbf{x}_\ell(\mathbf{x}_i(p)) \rangle$$

Sumando alternadamente estas tres identidades, se tiene:

$$\mathbf{x}_j(p) g_{i\ell}(p) - \mathbf{x}_\ell(p) g_{ij}(p) + \mathbf{x}_i(p) g_{j\ell}(p) = 2 \langle d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)), \mathbf{x}_\ell(p) \rangle$$

Multiplicando por $g^{\ell k}(p)$ y sumando sobre ℓ se sigue lo deseado. \square

Para concluir esta sección, vamos a probar que la curvatura gaussiana de una superficie es intrínseca. Esto se seguirá fácilmente de las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi. En esta parte usaremos la convención de suma de Einstein. De acuerdo a esta convención, cuando un índice aparece arriba y abajo entonces se lleva a cabo una suma respecto de ese índice. Por ejemplo, en vez de escribir $X = X^1 \mathbf{x}_1(p) + X^2 \mathbf{x}_2(p)$, con esta convención

escribiremos $X = X^i \mathbf{x}_i(p)$. Otro ejemplo sería la ecuación intrínseca de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2}g^{\ell k}(p)(\mathbf{x}_j(p)g_{i\ell}(p) - \mathbf{x}_\ell(p)g_{ij}(p) + \mathbf{x}_i(p)g_{j\ell}(p))$. Como se ve, ya usamos esta convención colocando los índices en los lugares correctos, sólo que escribíamos la suma.

Definición 2.2.16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta. Los coeficientes del **tensor de curvatura** se definen por

$$R_{ijk}^\ell = \mathbf{x}_j \Gamma_{ij}^\ell - \mathbf{x}_k \Gamma_{ik}^\ell + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^\ell - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^\ell$$

donde en esa ecuación usamos la convención de suma. Notar que los coeficientes del tensor de curvatura son intrínsecos por serlo los símbolos de Christoffel.

Proposición 2.2.17. Sobre una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$R_{ijk}^\ell = L_{ik}L_j^\ell - L_{ij}L_k^\ell \quad (\text{Gauss})$$

$$\partial_k L_{ij} - \partial_j L_{ik} = \Gamma_{ik}^\ell L_{\ell j} - \Gamma_{ij}^\ell L_{\ell k} \quad (\text{Codazzi-Mainardi})$$

Demostración. Recordemos que $\partial_j \mathbf{x}_i = L_{ij} \mathbf{n} + \Gamma_{ij}^\ell \mathbf{x}_\ell$ y $\partial_k \mathbf{n} = L_k^\ell \mathbf{x}_\ell$. Por lo tanto, mirando la derivada parcial respecto de la k -ésima dirección, se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_j \mathbf{x}_i &= \partial_k L_{ij} \mathbf{n} + L_{ij} \partial_k \mathbf{n} + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell \mathbf{x}_\ell + \Gamma_{ij}^\ell \partial_k \mathbf{x}_\ell \\ &= \partial_k L_{ij} \mathbf{n} + L_{ij} L_k^\ell \mathbf{x}_\ell + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell \mathbf{x}_\ell + \Gamma_{ij}^\ell (L_{\ell k} \mathbf{n} + \Gamma_{\ell k}^m \mathbf{x}_m) \\ &= (\partial_k L_{ij} + \Gamma_{ij}^\ell L_{\ell k}) \mathbf{n} + (L_{ij} L_k^\ell + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell) \mathbf{x}_\ell + \Gamma_{ij}^\ell \Gamma_{\ell k}^m \mathbf{x}_m \\ &= (\partial_k L_{ij} + \Gamma_{ij}^\ell L_{\ell k}) \mathbf{n} + (L_{ij} L_k^\ell + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell) \mathbf{x}_\ell + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell \mathbf{x}_\ell \\ &= (\partial_k L_{ij} + \Gamma_{ij}^\ell L_{\ell k}) \mathbf{n} + (L_{ij} L_k^\ell + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell) \mathbf{x}_\ell \end{aligned}$$

Ahora bien, como las derivadas cruzadas $\partial_k \partial_j \mathbf{x}_i = \partial_j \partial_k \mathbf{x}_i$ conmutan, igualando las componentes obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \partial_k L_{ij} + \Gamma_{ij}^\ell L_{\ell k} = \partial_j L_{ik} + \Gamma_{ik}^\ell L_{\ell j} \\ L_{ij} L_k^\ell + \partial_k \Gamma_{ij}^\ell + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell = L_{ik} L_j^\ell + \partial_j \Gamma_{ik}^\ell + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^\ell \end{cases}$$

Si pasamos restando los términos obvios en cada ecuación, de la primera obtenemos la ecuación de Gauss y en la segunda la de Codazzi-Mainardi. Y estamos. \square

Estamos en condiciones de probar:

Teorema 2.2.18 (Egregium). *La curvatura gaussiana κ es intrínseca a la superficie.*

Demostración. Por la ecuación de Gauss, $R_{ijk}^\ell = L_{ik}L_j^\ell - L_{ij}L_k^\ell$. Notemos que

$$R_{ijk}^\ell g_{\ell m} = L_{ik}L_j^\ell g_{\ell m} - L_{ij}L_k^\ell g_{\ell m} = L_{ik}L_{mj} - L_{ij}L_{mk}$$

Para $i = k = 1, j = m = 2$ resulta que $R_{121}^\ell g_{\ell 2} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = \det(L_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$. Pero $(L_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} = (L_j^i)_{1 \leq i, j \leq 2} \cdot (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ y así $\kappa = \frac{1}{g} R_{121}^\ell g_{\ell 2}$. Esto concluye la demostración. \square

2.3. Curvas sobre una Superficie

El objetivo será tratar de usar las cosas que sabemos sobre las curvas para caracterizar a la superficie. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\sigma(s) \in S$ para todo $s \in (a, b)$. En el caso de las curvas planas sabíamos que la curvatura tenía más información: el signo. Moralmente, una superficie no es más que un plano deformado, así que si tenemos una curva dentro de una superficie la situación debería ser análoga a una curva plana. En este caso, las curvas planas tienen un signo porque dada la tangente $\mathbf{T}(s)$ hay una manera natural de completarlo a una base de \mathbb{R}^2 . Para una curva contenida en una superficie, tenemos la tangente $\mathbf{T}(s)$ y el campo normal $\mathbf{n}(\sigma(s))$. Estas dos direcciones son ortogonales, pues $\mathbf{T}(s)$ es la velocidad de una curva y así $\mathbf{T}(s) \in T_{\sigma(s)}S$. Ahora sí tenemos una elección canónica para un vector $\mathbf{M}(s)$ para completar a una base ortonormal orientada. Sólo debemos tomar $\mathbf{M}(s) = \mathbf{n}(\sigma(s)) \wedge \mathbf{T}(s)$. A esta elección de normal a la curva la denominamos la **norma intrínseca** de σ en S .

Ahora bien, como $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{M}(s), \mathbf{n}(\sigma(s))\}$ forma una base ortonormal orientada, podemos escribir a $\mathbf{T}'(s)$ en esa base. Como $\|\mathbf{T}(s)\|^2 = 1$ para todo s , derivando el producto interno $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle$ se obtiene que $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s) \rangle = 0$. Entonces, tenemos que $\mathbf{T}'(s) = \kappa_g(s) \mathbf{M}(s) + \kappa_n(s) \mathbf{n}(\sigma(s))$. A κ_g la llamamos la **curvatura geodésica** mientras que a κ_n la llamamos la **curvatura normal**. Notemos que, por el Teorema de Pitágoras, $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}$.

Supongamos que $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es una carta y que la traza de σ está contenida en la traza de la carta. Es decir, $\sigma((a, b)) \subseteq \mathbf{x}(U)$. Sean $\sigma^1, \sigma^2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\mathbf{x}^{-1}(\sigma(s)) = (\sigma^1(s), \sigma^2(s))$ (esto podemos hacerlo por el clásico argumento de ensanchar con la Proposición 2.1.16). Las funciones σ^1, σ^2 resultan diferenciables y se denominan las **funciones coordenadas** de la curva. Es decir, $\sigma(s) = \mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$. Derivando y usando

la regla de la cadena, $\sigma'(s) = \sum_{i=1}^2 \partial_i \mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s)) (\sigma^i)'(s) = \sum_{i=1}^2 (\sigma^i)'(s) \mathbf{x}_i(\sigma(s))$. Notemos que $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=s_0} \mathbf{x}_i(\sigma(s)) = d_{\sigma(s_0)} \mathbf{x}_i(\sigma'(s_0))$. Usando esto y la regla de la cadena, podemos

volver a derivar y así $\sigma''(s) = \sum_{i=1}^2 (\sigma^i)''(s) \mathbf{x}_i(\sigma(s)) + \sum_{i,j=1}^2 (\sigma^j)'(s) (\sigma^i)'(s) d_{\sigma(s)} \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(\sigma(s)))$.

Recordando que $d_p \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j(p)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) \mathbf{x}_k(p) + L_{ij}(p) \mathbf{n}(p)$ y manipulando la suma, obtenemos que:

$$\sigma'' = \left(\sum_{i,j=1}^2 (\sigma^i)'(\sigma^j)' L_{ij} \right) \mathbf{n} + \sum_{k=1}^2 \left((\sigma^k)'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma^i)'(\sigma^j)' \right) \mathbf{x}_k$$

donde cada función está evaluada en el único lugar que podría estarlo. Esto implica que:

$$\kappa_n = \sum_{i,j=1}^2 (\sigma^i)'(\sigma^j)' L_{ij} = \sum_{i,j,\ell=1}^2 (\sigma^i)'(\sigma^j)' L_{ij}^\ell g_{\ell i} = \langle L\sigma', \sigma' \rangle$$

Esto nos motiva a considerar la forma cuadrática $\Pi_p(X, Y) = \langle LX, Y \rangle$, que llamaremos la **Segunda Forma Fundamental**. Notemos que la curvatura normal κ_n sólo depende de la velocidad en el punto. Es decir, la curvatura normal no ve la aceleración y por lo tanto toda esa información está contenida en la curvatura geodésica.

Proposición 2.3.1. *La curvatura geodésica de una curva en una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es intrínseca.*

Demostración. Ya vimos que si σ es una curva sobre S parametrizada por longitud de arco entonces podemos escribir a $\mathbf{T}'(s) = \sigma''(s)$ en términos de la base $\{\mathbf{x}_1(s), \mathbf{x}_2(s), \mathbf{n}(\sigma(s))\}$ como:

$$\sigma'' = \left(\sum_{i,j=1}^2 (\sigma^i)'(\sigma^j)' L_{ij} \right) \mathbf{n} + \sum_{k=1}^2 \left((\sigma^k)'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma^i)'(\sigma^j)' \right) \mathbf{x}_k$$

Como las direcciones $\mathbf{x}_1(s), \mathbf{x}_2(s)$ son ortogonales a $\mathbf{n}(s)$, debemos tener que:

$$\kappa_g(s) \mathbf{M}(s) = \sum_{k=1}^2 \left((\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma(s)) (\sigma^i)'(s) (\sigma^j)'(s) \right) \mathbf{x}_k(s)$$

Ahora bien, tenemos que $\kappa_g(s) = \langle \kappa_g(s) \mathbf{M}(s), \mathbf{M}(s) \rangle = \langle \kappa_g(s) \mathbf{M}(s), \mathbf{n}(\sigma(s)) \wedge \mathbf{T}(s) \rangle$.

Recordando que $\langle u, v \wedge w \rangle = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix} := [u|v|w]$, obtenemos la fórmula

$$\kappa_g(s) = \sum_{k=1}^2 \left((\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma(s)) (\sigma^i)'(s) (\sigma^j)'(s) \right) [\mathbf{x}_k(s) | \mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{T}(s)]$$

Por otra parte, si $\varepsilon_{ij}(s) = \det[\mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{x}_i(s) | \mathbf{x}_j(s)]$, entonces $\varepsilon_{12}(s) = -\varepsilon_{21}(s) = g(s)$, donde g es el determinante de la matriz asociada a la Primera Forma Fundamental, y $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Esto nos dice que ε es intrínseco, pues los coeficientes métricos lo son.

Como podemos escribir $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s) = \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell)'(s) \mathbf{x}_\ell(\sigma(s))$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) &= \sum_{\ell=1}^2 \left((\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma(s)) (\sigma^i)'(s) (\sigma^j)'(s) \right) (\sigma^\ell)'(s) [\mathbf{x}_k(s), \mathbf{n}(\sigma(s), \mathbf{x}_\ell(s))] \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \left((\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma(s)) (\sigma^i)'(s) (\sigma^j)'(s) \right) (\sigma^\ell)'(s) \varepsilon_{\ell k}(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, expresamos a $\kappa_g(s)$ en términos de cosas intrínsecas, debe ser intrínseco. Como queríamos probar. \square

Si bien la curvatura geodésica es intrínseca, en general las expresiones intrínsecas son complicadas. Veamos una fórmula extrínseca para la curvatura geodésica que, en términos calculatorios, es mucho más simple y útil.

Proposición 2.3.2. Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ es una curva sobre S , entonces

$$\kappa_g(s) = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(\sigma(s)), \mathbf{B}(s) \rangle$$

donde κ es la curvatura de σ y \mathbf{B} su vector binormal.

Demostración. Como $\mathbf{T}'(s) = \kappa_g(s) \mathbf{M}(s) + \kappa_n(s) \mathbf{n}(\sigma)$ y $\langle \mathbf{n}(\sigma(s)), \mathbf{M}(s) \rangle = 0$, tenemos que $\kappa_g(s) = \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{M}(s) \rangle$. Ahora bien, notemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{M}(s) \rangle &= \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{n}(\sigma(s)) \wedge \mathbf{T}(s) \rangle \\ &= [\mathbf{T}'(s) | \mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{T}(s)] \\ &= [\mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{T}(s) | \mathbf{T}'(s)] \\ &= \langle \mathbf{n}(\sigma(s)), \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{T}'(s) \rangle \\ &= \kappa(s) \langle \mathbf{n}(\sigma(s)), \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) \rangle \\ &= \kappa(s) \langle \mathbf{n}(\sigma(s)), \mathbf{B}(s) \rangle \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Ya dijimos que moralmente la situación de una superficie debería ser como la del plano. Queremos definir el análogo a una recta dentro de una superficie. Para esto, queremos que no esté curvada *intrínsecamente*. Como la parte intrínseca de la curvatura es la geodésica, podríamos pensar que una curva es recta dentro de la superficie si su curvatura geodésica es 0. Es decir, si solo se deforma como la superficie, en la dirección de la normal. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.3.3. Una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ parametrizada por longitud de arco en una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **geodésica** si su curvatura geodésica es nula.

Proposición 2.3.4. Una curva σ en S es una geodésica si y sólo si $[\mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{T}(s) | \mathbf{T}'(s)] = 0$.

Demostración. Esto es claro, pues siguiendo la demostración de la Proposición 2.3.2 tenemos que $\kappa_g(s) = [\mathbf{n}(\sigma(s)) | \mathbf{T}(s) | \mathbf{T}'(s)]$. □

Observación 2.3.5. Lo que nos dice la Proposición anterior es que una curva es geodésica si y sólo si la normal a la curva \mathbf{N} es paralela a la normal a la superficie \mathbf{n} . Es decir, la superficie **no** ve la forma en la que cambia la tangente, que en parte fue lo que nos motivó a definir las geodésicas así.

Ejemplo 2.3.6. Dibujar esto y demostrarlo! En la esfera S^2 los **círculos máximos** (intersecciones de planos que pasan por el origen con S^2) son geodésicas.

Si una superficie S tiene un plano de simetría Π , entonces la curva $\Pi \cap S$ es una geodésica.

Si S es una **superficie de revolución**, entonces los círculos de los puntos críticos son geodésicas.

Si $R \subseteq S$ es una recta contenida en S , entonces R es una geodésica. Por ejemplo, en un hiperboloide de una hoja.

Proposición 2.3.7. *Ser geodésica es una propiedad intrínseca de la curva.*

Demostración. Sea $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ una geodésica y $f : S \rightarrow S'$ una isometría. Veamos que $f \circ \sigma$ es una geodésica. En efecto, $f \circ \sigma$ está parametrizada por longitud de arco, pues la longitud de las curvas se preserva por isometrías (ya que depende de la Primera Forma Fundamental que es intrínseca). Por otra parte, su curvatura geodésica es la misma que la de σ por ser la curvatura geodésica intrínseca. Por lo tanto, $f \circ \sigma$ es una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura geodésica nula. Esto implica que $f \circ \sigma$ es una geodésica. \square

Proposición 2.3.8. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, y sean $p \in S$ un punto, $X \in T_p S$ un vector tangente unitario. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X$ y σ es una geodésica. Más aún, si $\sigma : (a, b) \rightarrow S$, $\tau : (c, d) \rightarrow S$ son dos geodésicas con $0 \in (a, b) \cap (c, d)$ y $\sigma(0) = \tau(0) = p$, $\sigma'(0) = \tau'(0) = X$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq (a, b) \cap (c, d)$ y $\sigma|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = \tau|_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta tal que $p \in \mathbf{x}(U)$ y sea $u_0 \in U$ tal que $\mathbf{x}(u_0) = p$.

Escribamos $X = \sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{x}_i(p)$. Sabemos que dada una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbf{x}(U)$, existen

funciones $\sigma^1, \sigma^2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\sigma(s) = \mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$. Es decir, toda curva contenida en la imagen de una carta viene de la imagen de una curva en U . Consideremos el siguiente Problema de Valores Iniciales:

$$\begin{cases} (\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s))) (\sigma^i)'(s) (\sigma^j)'(s) = 0 & \text{si } k = 1, 2 \\ \sigma^i(0) = u_0^i & \text{si } i = 1, 2 \\ (\sigma^i)'(0) = X^i & \text{si } i = 1, 2 \end{cases}$$

La primera condición está dada para que κ_g sea idénticamente nula, la segunda condición

para que $\sigma(0) = \mathbf{x}(\sigma^1(0), \sigma^2(0)) = p$ y la tercera para que $\sigma'(0) = \sum_{i=1}^2 X^i \mathbf{x}_i(p) = X$. Por

el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, existen funciones $\sigma^1, \sigma^2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que resuelven el Problema de Valores Iniciales. Podemos tomar ε suficientemente chico como para que $(\sigma^1(t), \sigma^2(t)) \in U$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ por ser σ^1, σ^2 continuas y U abierto. Consideremos entonces $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ dada por $\sigma(s) = \mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s))$. Veamos que σ es una geodésica. Para ello, debemos probar que σ está parametrizada por longitud de arco. Es decir, $\|\sigma'(s)\| = 1$ para todo s . Recordemos que, derivando y usando la regla de la cadena y un par de identidades, se tiene que:

$$\sigma'' = \left(\sum_{i,j=1}^2 (\sigma^i)'(\sigma^j)' L_{ij} \right) \mathbf{n} + \sum_{k=1}^2 \left((\sigma^k)'' + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k (\sigma^i)'(\sigma^j)' \right) \mathbf{x}_k$$

Como σ^1, σ^2 resuelven el Problema de Valores Iniciales, los términos que acompañan a \mathbf{x}_k

se desvanecen, y así en nuestro caso tenemos que:

$$\sigma''(s) = \left(\sum_{i,j=1}^2 (\sigma^i)'(s)(\sigma^j)'(s)L_{ij}(\sigma(s)) \right) \mathbf{n}(\sigma(s))$$

Ahora bien, como $\mathbf{n}(\sigma(s)) \in (T_{\sigma(s)}S)^\perp$ y para cada s tenemos $\sigma'(s) \in T_{\sigma(s)}S$, se sigue que $\langle \sigma'(s), \sigma''(s) \rangle = 0$ para cada s . Pero la derivada de $\|\sigma'(s)\|^2$ es $2\langle \sigma'(s), \sigma''(s) \rangle = 0$ y así $\|\sigma'(s)\|$ es constante. Como $\sigma'(0) = X$ tiene norma 1, tenemos que $\|\sigma'(s)\| = 1$ para todo s . Es decir, σ está parametrizada por longitud de arco. Entonces, su curvatura geodésica debe ser nula precisamente por la condición del Problema de Valores Iniciales. Para concluir con la demostración, notemos que si σ, τ son geodésicas, entonces sus funciones coordenadas $(\sigma^1, \sigma^2), (\tau^1, \tau^2)$ deben ser soluciones del Problema de Valores Iniciales, y así por la unicidad de solución. Y estamos. \square

Ahora sabemos que por cada punto p de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ hay esencialmente una única geodésica σ_X que pasa por ese punto con cierta velocidad inicial. Por cada vector X en el plano tangente T_pS podemos avanzar en la geodésica con esa dirección. Gráficamente, sería como desdoblar la recta por p con dirección X sobre la superficie. Es decir, quiero recorrer distancia $\|X\|$ sobre la geodésica que pasa por p con dirección $X/\|X\|$.

Agregar dibujo

Sabemos que una geodésica que pasa por $p \in S$ con velocidad $X \in T_pS$ la podemos pensar como una solución al Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} (\sigma^k)''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}(\sigma^1(s), \sigma^2(s)))(\sigma^i)'(s)(\sigma^j)'(s) &= 0 \text{ si } k = 1, 2 \\ \sigma^i(0) &= u_0^i \text{ si } i = 1, 2 \\ (\sigma^i)'(0) &= X^i \text{ si } i = 1, 2 \end{cases}$$

Consideremos el flujo de este problema. Es decir, para cada $X \in T_pS$ su solución maximal $\varphi_t(X) = (\sigma_X^1(t), \sigma_X^2(t))$ a tiempo t . Esto define una asignación $(X, t) \mapsto \varphi_t(X)$. Como para $X = 0$ tenemos una solución global $(\sigma_0^1(t), \sigma_0^2(t)) = p$, por la dependencia continua de los datos iniciales existen $\rho > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\varphi : B_\rho(0) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $\varphi(X, t) = \varphi_t(X)$ resulta una función continua. Notemos además que por la unicidad tenemos la condición de homogeneidad $\varphi(\lambda X, t) = \varphi(X, \lambda t)$. Como queremos desdoblar a X sobre la superficie, buscamos $\sigma_{X/\|X\|}(\|X\|) = \mathbf{x} \circ \varphi(X/\|X\|, \|X\|)$, por la homogeneidad esto es $\mathbf{x} \circ \varphi(X, 1)$. Definimos entonces la **aplicación exponencial** $\exp_p : B_\rho(0) \subseteq T_pS \rightarrow S$ dada por $X \mapsto \mathbf{x}(\varphi(X, 1))$. Notemos que la diferencial en 0, $d_0 \exp_p : T_pS \rightarrow T_pS$ es la identidad id_{T_pS} . **Hacer esta cuenta**. En particular, es inversible y así por el Teorema de la Función Inversa, la aplicación exponencial debe ser un difeomorfismo local. Por cómo definimos la exponencial, la imagen por \exp_p de toda recta en T_pS que pasa por el origen resulta ser una geodésica. Esto implica, como \exp_p es un difeomorfismo local, que todo punto en un entorno de p se puede unir a p con una geodésica.

Proposición 2.3.9. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$ un punto, $X \in T_p S$ un vector tangente unitario. Entonces existe un abierto (a, b) tal que $0 \in (a, b)$ y una geodésica $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ tal que $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X$ y para toda geodésica $\tau : (c, d) \rightarrow S$ con $\tau(0) = p$, $\tau'(0) = X$ tenemos que $(c, d) \subseteq (a, b)$ y $\tau = \sigma|_{(c, d)}$. Llamamos a σ la **geodésica maximal** por p con velocidad inicial X .

Demostración. Sea $\Omega = (\tau_i : (a_i, b_i) \rightarrow S)_{i \in I}$ la familia de todas las geodésicas con $0 \in (a_i, b_i)$, $\tau_i(0) = p$ y $\tau_i'(0) = X$. Consideremos $(a, b) = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$. En efecto, esa unión es

un intervalo pues es abierto por ser unión de abiertos y es conexo por ser unión de conexos con $0 \in \bigcap_{i \in I} (a_i, b_i)$. Ahora bien, definamos $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ como $\sigma(t) = \tau_i(t)$ si $t \in (a_i, b_i)$.

Veamos que esto está bien definido. En efecto, si $\mu : (c_1, d_1) \rightarrow S$, $\nu : (c_2, d_2) \rightarrow S$ con $\mu, \nu \in \Omega$, veamos que $\mu|_{(c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)} = \nu|_{(c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)}$. Esto probará la buena definición. Para eso, consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{J} = \{t \in (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2) : \mu(t) = \nu(t), \mu'(t) = \nu'(t)\}$$

Notemos que $\mathcal{J} \neq \emptyset$ pues $\mu(0) = p = \nu(0)$ y $\mu'(0) = X = \nu'(0)$ por ser $\mu, \nu \in \Omega$. Ahora bien, como $(c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)$ es conexo, bastará ver que \mathcal{J} es abierto y cerrado allí. Claramente es cerrado pues μ, ν, μ', ν' son continuas. Si $t \in \mathcal{J}$, entonces las curvas $s \mapsto \mu(s+t)$ y $s \mapsto \nu(s+t)$ son geodésicas con posición inicial $\mu(t) = \nu(t)$ y velocidad inicial $\mu'(t) = \nu'(t)$. Por lo tanto, por la Proposición anterior, existe algún intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ donde ambas geodésicas coinciden. Esto implica que μ y ν coinciden en todo $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Es decir, $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq \mathcal{J}$. Esto prueba que $\mathcal{J} = (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)$. Por lo tanto σ está bien definida. Claramente σ es diferenciable, pues para cada t existe $i \in I$ tal que $t \in (a_i, b_i)$ y allí en ese entorno de t , σ coincide con τ_i que es diferenciable. Además, la curvatura geodésica de σ debe ser nula en cada punto, pues para calcularla necesitamos información local en un entorno de cada punto, y las τ_i tienen curvatura geodésica nula por ser geodésicas. Esto concluye la demostración. \square

Definición 2.3.10. Decimos que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es **completa** si toda geodésica maximal tiene a \mathbb{R} por dominio.

Definición 2.3.11. Decimos que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es **extendible** si existe otra superficie $S' \subseteq \mathbb{R}^3$ conexa con $S \subset S'$. Si no es extendible decimos que es **inextendible**.

Observación 2.3.12. Si $S \subseteq S'$, entonces S es un abierto de S' . En efecto, si $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es una carta de S , resulta ser que visto $S \subseteq S'$ tenemos $\mathbf{x} : U \rightarrow S'$ y así debe ser una carta de S' . Luego, $\mathbf{x}(U)$ es abierto en S' . Para cada $p \in S$ tomo $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta con $p \in \mathbf{x}(U)$ y por lo tanto p debe ser un punto interior por ser $p \in \mathbf{x}(U) \subseteq S'$ y $\mathbf{x}(U)$ abierto en S' . Es decir, todo punto de S es interior, y así es abierto en S' .

Proposición 2.3.13. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie completa. Entonces es inextendible.

Demostración. Supongamos que existen S' tal que $S \subseteq S'$. Luego, existe p en la frontera de S relativa a S' . Tenemos entonces algún entorno abierto V de p tal que todo punto

$q \in V$ podemos unir a p y q con una geodésica. Como p está en la frontera, hay algún punto $q \in S \cap V$ y lo uno a p con una geodésica σ , que tomamos maximal. Como S es completa, debe ser maximal. **Completar a una demostración y agregar un dibujo** \square

Podemos caracterizar a la completitud de las superficies como una propiedad intrínseca. Aunque la demostración del siguiente Teorema es complicada pues es un ejemplo de inferir información global a partir de información local, vale la pena tener presente el enunciado.

Teorema 2.3.14 (Hopf-Rinow). *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. S es completa si y sólo si es métricamente completa para la métrica intrínseca d_S . En ese caso, si S es conexa, para cada par de puntos la distancia se realiza sobre una geodésica.*

Es fácil ver que el siguiente resultado es un Corolario del Teorema de Hopf-Rinow, aunque daremos una demostración alternativa.

Proposición 2.3.15. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada. Entonces S es completa.*

Demostración. **La idea es mirar el teo de existencia y unicidad y suponer que la geodésica no tiene dominio \mathbb{R} y extenderla un poquito** \square

Probemos ahora, para finalizar esta sección, un resultado notable: si una curva minimiza la distancia entre dos puntos sobre la superficie, entonces esa curva debe ser una geodésica.

Proposición 2.3.16. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $\sigma : (a, b) \rightarrow S$ parametrizada por longitud de arco, y sean $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 < t_2$. Supongamos además que la curva minimiza la distancia entre $\sigma(t_1)$ y $\sigma(t_2)$. Es decir, $\text{Long}(\sigma|_{[t_1, t_2]}) = d_S(\sigma(t_1), \sigma(t_2))$. Entonces la curva $\sigma|_{[t_1, t_2]}$ es una geodésica.*

Demostración. Supongamos que no es una geodésica. Luego, existe $s_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $\kappa_g(s_0) \neq 0$ y así, por continuidad, existe un intervalo $(c, d) \subseteq (t_1, t_2)$ en donde la curvatura geodésica no se anula $\kappa_g(t) \neq 0 \forall t \in (c, d)$. Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta tal que $\sigma(s_0) \in \mathbf{x}(U)$. Podemos suponer que $\sigma([c, d]) \subseteq \mathbf{x}(U)$ (pues podemos tomar (c, d) tan chico como queramos). Primero, afirmamos que $\text{Long}(\sigma|_{[c, d]}) = d_S(\sigma(c), \sigma(d))$. En efecto, si esto no fuera así, existe $\eta : (c', d') \rightarrow S$ parametrizada por longitud de arco tal que $\eta(c') = \sigma(c)$, $\eta(d') = \sigma(d)$ y $\text{Long}(\eta) < \text{Long}(\sigma|_{[c, d]})$. En ese caso, tendremos que

$$\begin{aligned} d_S(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) &\leq \text{Long}(\sigma|_{[t_1, c]}) + \text{Long}(\eta) + \text{Long}(\sigma|_{[d, t_2]}) \\ &< \text{Long}(\sigma|_{[t_1, c]}) + \text{Long}(\sigma|_{[c, d]}) + \text{Long}(\sigma|_{[d, t_2]}) = d_S(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \end{aligned}$$

que es absurdo. Consideremos entonces $\lambda : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\lambda(t) = (t - c)(d - t)\kappa_g(t)$. Notemos que $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$ y $\lambda(t)\kappa_g(t) > 0$ para todo $t \in (c, d)$.

Sea $\mathbf{n} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normal y $\mathbf{M}(t) = \mathbf{n}(\sigma(t)) \wedge \mathbf{T}(t)$ la normal intrínseca. Sean $v^1, v^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $\lambda(t)\mathbf{M}(t) = \sum_{i=1}^2 v^i(t)\mathbf{x}_i(\sigma(t))$ y sean $\sigma^1, \sigma^2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $\sigma(t) = \mathbf{x}(\sigma^1(t), \sigma^2(t))$. Consideremos entonces

$F : \mathbb{R} \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(h, t) = (\sigma^1(t) + hv^1(t), \sigma^2(t) + hv^2(t))$. Ahora bien, F es diferenciable y $F(0, t) = (\sigma^1(t), \sigma^2(t))$, $F(h, c) \equiv (\sigma^1(c), \sigma^2(c))$ y $F(h, d) = (\sigma^1(d), \sigma^2(d))$ (pues $v^1(c) = v^1(d) = v^2(c) = v^2(d) = 0$). Por compacidad (lema del tubo) existe $\varepsilon > 0$ tal que la función $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [c, d] \rightarrow U$ caiga adentro del abierto U . Consideremos entonces $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [c, d] \rightarrow S$ dada por $\tau = \mathbf{x} \circ F$. Luego, lo que hace τ es deformar a la curva σ entre $\sigma(c)$ y $\sigma(d)$ en la dirección de la normal intrínseca y fijando esos puntos.

Agregar dibujo de lo que hace τ

Consideremos entonces la familia de curvas $\tau_h = \tau(h, \cdot) : [c, d] \rightarrow S$. Claramente $\tau_0 = \sigma|_{[c, d]}$. Como ya vimos que $\sigma|_{[c, d]}$ minimiza la distancia entre $\sigma(c)$ y $\sigma(d)$, tenemos que $\text{Long}(\tau_h) \geq \text{Long}(\tau_0)$ para todo $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Tomemos la función $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(h) = \text{Long}(\tau_h) = \int_c^d \|\tau'_h(s)\| ds$. Como $\tau'_h(t) = \partial_2 \tau(h, t)$ es continua (por ser τ diferenciable), resulta que $\|\tau'_h(t)\|$ es continua y así f diferenciable. Más aún, $\|\tau'_h(t)\|$ es diferenciable pues $\tau'_h(t)$ no se anula en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (ya que como τ'_0 no se anula puedo tomar un entorno de h chico por continuidad y lema del tubo). Por lo tanto, como f alcanza un mínimo en $t = 0$, resulta que la derivada de f debe anularse allí. Ahora bien, derivando bajo el signo integral, tenemos que

$$f(h) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial h} \langle \partial_2 \tau(h, t), \partial_2 \tau(h, t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_c^d \frac{\langle \partial_1 \partial_2 \tau(h, t), \partial_2 \tau(h, t) \rangle}{\langle \partial_2 \tau(h, t), \partial_2 \tau(h, t) \rangle^{\frac{1}{2}}} dt$$

Como $\partial_2 \tau(0, t) = \sigma'(t)$ tenemos que $\langle \partial_2 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle^{\frac{1}{2}} = 1$ pues σ está parametrizada por longitud de arco. Esto implica que:

$$\begin{aligned} 0 = f'(0) &= \int_c^d \frac{\langle \partial_1 \partial_2 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle}{\langle \partial_2 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \int_c^d \langle \partial_1 \partial_2 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle dt \\ &= \int_c^d \langle \partial_2 \partial_1 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle dt \\ &= \int_c^d \frac{d}{dt} \langle \partial_1 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle - \langle \partial_1 \tau(0, t), \partial_2^2 \tau(0, t) \rangle dt \\ &= \langle \partial_1 \tau(0, t), \partial_2 \tau(0, t) \rangle \Big|_c^d - \int_c^d \langle \partial_1 \tau(0, t), \partial_2^2 \tau(0, t) \rangle dt \end{aligned}$$

Como $\tau(h, c)$ es constante, $\partial_1 \tau(0, c) = 0$ y análogamente $\partial_1 \tau(0, d) = 0$. Ahora bien, como $\tau(h, t) = \mathbf{x}(\sigma^1(t) + hv^1(t), \sigma^2(t) + hv^2(t))$ es fácil ver por la regla de la cadena que $\partial_1 \tau(h, t) = \sum_{i=1}^2 v^i(t) \mathbf{x}_i(\sigma(t)) = \lambda(t) \mathbf{M}(t)$. Por otra parte, $\partial_2^2 \tau(0, t) = \sigma''(t) = \mathbf{T}'(t)$. Como sabemos que $\mathbf{T}'(t) = \kappa_g \mathbf{M}(t) + \kappa_n \mathbf{n}(\sigma(t))$, se sigue que

$$\langle \lambda(t) \mathbf{M}(t), \mathbf{T}'(t) \rangle = \langle \lambda(t) \mathbf{M}(t), \kappa_g(t) \mathbf{M}(t) \rangle = \lambda(t) \kappa_g(t)$$

Luego, debemos tener $\int_c^d \lambda(t) \kappa_g(t) dt = 0$. Pero esta función es estrictamente positiva.

Absurdo, que viene de suponer que existe algún punto con curvatura geodésica no nula. \square

Observación 2.3.17. Notar que como es un mínimo local para la longitud, la derivada segunda debe ser positiva. Queda como ejercicio calcular la derivada segunda de f .

2.4. Resultados Globales

De manera análoga a lo que pasó con curvas, todo lo que hicimos hasta ahora es de naturaleza local. Desde el uso de las cartas hasta las construcciones que hicimos con el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias tienen una fuerte naturaleza local. Veamos como inferir a partir de datos locales resultados de naturaleza global. Un ejemplo de una condición global es la compacidad de una superficie.

Proposición 2.4.1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta. Entonces S posee un punto elíptico. Es decir, existe $p \in S$ tal que $\kappa(p) > 0$.

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $0 \notin S$ (en efecto, podemos hacer eso porque al ser compacta en \mathbb{R}^3 debe ser acotada y la trasladamos lejos del origen). Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p\|$. Esta función f es diferenciable pues p nunca es 0 y así se restringe a una función $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. En particular, es continua y como S es compacto debe alcanzar un máximo en algún punto $p \in S$. Es decir, $\|p\| \geq \|q\|$ para todo $q \in S$. **Agregar dibujo!**

Sea $X \in T_p S$ un vector unitario y sea $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = X$. Consideremos entonces $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \frac{1}{2} \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle$. Por cómo definimos p , la función g debe alcanzar un máximo en $t = 0$ y por lo tanto $g'(0) = 0$ y $g''(0) \leq 0$. La igualdad $g'(0) = 0$ nos dice $\langle \sigma(0), \sigma'(0) \rangle = \langle p, X \rangle = 0$. Es decir, p es la normal al plano tangente $T_p S$. Ahora bien, sea $\mathbf{n} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo normal unitario sobre un abierto $U \subseteq S$ tal que $p \in U$ y orientado por $\mathbf{n}(p) = p / \|p\|$. La condición $g''(0) \leq 0$ nos dice que $\langle \sigma''(0), \sigma(0) \rangle + \langle \sigma'(0), \sigma'(0) \rangle \leq 0$. Como tenemos $\sigma'' = \mathbf{T}' = \kappa_g \mathbf{M} + \kappa_n \mathbf{n}$, se sigue que esa desigualdad es equivalente a $\|p\| \langle \kappa_g(p) \mathbf{M}(p) + \kappa_n(p) \mathbf{n}(p), \mathbf{n}(p) \rangle \leq -1$. Es decir, $\kappa_n(p) \leq -\frac{1}{\|p\|}$. En particular, si tomamos a X_i como una dirección principal y notando que

$$\kappa_n(p) = \langle L_p X_i, X_i \rangle = \kappa_i(p) \langle X_i, X_i \rangle = \kappa_i(p)$$

resulta que $\kappa(p) = \kappa_1(p) \kappa_2(p) \geq \frac{1}{\|p\|^2} > 0$. Esto concluye la demostración. \square

Ahora que ya probamos nuestro primer resultado global, veamos un primer resultado que nos caracteriza completamente a la superficie a partir de información local. Intuitivamente, lo que nos dice es que si las curvaturas media H y gaussiana κ de la superficie están relacionadas por alguna ecuación, la superficie deberá ser muy rígida. Por ejemplo,

todos los puntos son umbílicos si y sólo si $\kappa = H^2$, y el siguiente resultado nos prueba que S deberá estar contenida en una esfera.

Teorema 2.4.2. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta, conexa. Si todos los puntos de S son umbílicos, entonces S está contenido en una esfera.*

Demostración. Trabajamos localmente. Sea $p \in S$ y sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta con $p \in \mathbf{x}(U)$. Podemos tomar a U como un entorno suficientemente chico de $u_0 = \mathbf{x}^{-1}(p)$ tal que $\mathbf{x}(U)$ sea conexo (en efecto, tomo una bola abierta $B_\varepsilon(u_0) \subseteq U$ y miro la carta restringida allí, como la bola es conexa, $\mathbf{x}(B_\varepsilon(u_0))$ resultará conexo y llamo a la bola U). Como todo $p \in S$ es umbílico, el operador de forma es un múltiplo de la identidad $L_p = H(p) \text{id}_{T_p S}$. Es decir, si escribimos esto en coordenadas tenemos que
$$\begin{pmatrix} L_1^1(p) & L_1^2(p) \\ L_2^1(p) & L_2^2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H(p) & 0 \\ 0 & H(p) \end{pmatrix}.$$

Por definición, $d_p \mathbf{n}(\mathbf{x}_i(p)) = -\sum_{j=1}^2 L_i^j(p) \mathbf{x}_j(p) = -H(p) \mathbf{x}_i(p)$. Equivalentemente, esto lo podemos escribir como $\mathbf{x}_i(p) \mathbf{n}(p) = d_p \mathbf{n}(\mathbf{x}_i(p)) = -H(p) \mathbf{x}_i(p)$. En particular, tenemos que $\mathbf{x}_2(p) \mathbf{n}(p) = -H(p) \mathbf{x}_2(p)$ y esto nos dice que H es un campo de clase \mathcal{C}^∞ . Derivándolo en la dirección de $\mathbf{x}_1(p)$ con la regla del producto, obtenemos que

$$\mathbf{x}_1(p)(\mathbf{x}_2(p) \mathbf{n}(p)) = -(\mathbf{x}_1(p)H(p)) \mathbf{x}_2(p) - H(p)(\mathbf{x}_1(p) \mathbf{x}_2(p))$$

De forma análoga, obtenemos que

$$\mathbf{x}_2(p)(\mathbf{x}_1(p) \mathbf{n}(p)) = -(\mathbf{x}_2(p)H(p)) \mathbf{x}_1(p) - H(p)(\mathbf{x}_2(p) \mathbf{x}_1(p))$$

Ahora bien, como las derivadas cruzadas conmutan, $\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1$ y por las dos identidades anteriores, debemos tener que $(\mathbf{x}_1(p)H(p)) \mathbf{x}_2(p) = (\mathbf{x}_2(p)H(p)) \mathbf{x}_1(p)$. Como $\{\mathbf{x}_1(p), \mathbf{x}_2(p)\}$ es una base del espacio tangente $T_p S$ y tenemos

$$(\mathbf{x}_2(p)H(p)) \mathbf{x}_1(p) - (\mathbf{x}_1(p)H(p)) \mathbf{x}_2(p) = 0$$

resulta que $\mathbf{x}_1(p)H(p) = \mathbf{x}_2(p)H(p) = 0$. Es decir, las derivadas $d_p H(\mathbf{x}_i(p))$ del campo H en las curvas coordenadas son nulas. Por lo tanto, $d_p H(X) = 0$ para todo $X \in T_p S$. Esto implica que H debe ser constante. En efecto, sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ alguna curva dada y consideremos para cada t la curva $\beta(s) = \alpha(s+t)$. Tenemos que $\beta(0) = \alpha(t)$ y $\beta'(0) = \alpha'(t)$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$0 = (H \circ \beta)'(0) = \frac{d}{ds}(H \circ \beta)(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(H \circ \alpha)(s+t) \Big|_{s=0} = (H \circ \alpha)'(t)$$

Esto implica que $H \circ \alpha$ es constante para cualquier curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, y así H debe ser constante en $\mathbf{x}(U)$ (pues al ser un abierto y conexo de \mathbb{R}^3 , es arconconexo y así cualquier par de puntos está unido por una curva y allí H es constante). Como la curvatura gaussiana es $\kappa(p) = H(p)^2$, debe ser constante. Ahora bien, por la Proposición anterior, podemos extraer información local: debe haber algún punto de curvatura gaussiana positiva y como κ es constante, resulta entonces que $\kappa > 0$. En particular, $H \neq 0$.

Notemos que si escribimos $p = \mathbf{x}(u^1, u^2)$, entonces

$$\partial_i \mathbf{n}(\mathbf{x}(u^1, u^2)) = d_p \mathbf{n}(\mathbf{x}_i(p)) = -H \mathbf{x}_i(p) = -H \partial_i(\mathbf{x}(u^1, u^2))$$

En particular $\partial_i(\mathbf{n}(\mathbf{x}(u^1, u^2)) + H \mathbf{x}(u^1, u^2)) = 0$ y así $\mathbf{n}(\mathbf{x}(u^1, u^2)) + H \mathbf{x}(u^1, u^2)$ debe ser constante, que depende de la carta. Si $\mathbf{n}(\mathbf{x}(u^1, u^2)) + H \mathbf{x}(u^1, u^2) = c(\mathbf{x})$, entonces

$$1 = \|\mathbf{n}(\mathbf{x}(u^1, u^2))\| = \|c(\mathbf{x}) - H \mathbf{x}(u^1, u^2)\| = |H| \left\| \frac{c(\mathbf{x})}{H} - \mathbf{x}(u^1, u^2) \right\|$$

Es decir, en la carta $\mathbf{x}(U)$ tenemos que $\left\| p - \frac{c(\mathbf{x})}{H} \right\| = \frac{1}{|H|}$ para todo $p \in \mathbf{x}(U)$. Esto quiere decir que $\mathbf{x}(U)$ está contenida en la esfera de centro $\frac{c(\mathbf{x})}{|H|}$ y radio $\frac{1}{|H|}$, y así la normal apunta hacia el centro de la esfera. Esto nos prueba que $c(\mathbf{x})$ en realidad no depende de la carta. En efecto, si tuvieramos un punto en la intersección de dos cartas, el centro para cada carta estaría en la intersección de las normales y como en la intersección de las cartas comparten la normal, deberíamos tener el mismo centro. Ahora bien, si consideramos el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ p \in S : \left\| p - \frac{c}{|H|} \right\| = \frac{1}{|H|} \right\}$$

es claramente cerrado (por ser $p \mapsto \left\| p - \frac{c}{|H|} \right\|$ una función continua) y es abierto pues para cada $p \in S$, en todo punto q de la carta $\mathbf{x}(U)$ (que es abierta en S) tenemos $\left\| q - \frac{c}{|H|} \right\| = \frac{1}{|H|}$. Como S es conexo y \mathcal{S} es no vacío, debe ser todo S . Esto implica que S está contenido en la esfera de centro $\frac{c}{|H|}$ y radio $\frac{1}{|H|}$. Y estamos. \square

Para poder relacionar la geometría local de la superficie con sus propiedades globales, en el próximo teorema usaremos fuertemente herramientas topológicas.

Teorema 2.4.3 (Hadamard). *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta, conexa y orientable con curvatura gaussiana positiva $\kappa > 0$. Entonces S es difeomorfa a la esfera S^2 .*

Demostración. Como S es orientable, el campo $\mathbf{n} : S \rightarrow S^2$ es diferenciable. Notemos que si $p \in S$, entonces la diferencial $d_p \mathbf{n} : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{n}(p)} S$ es un isomorfismo (pues es fácil ver que el determinante de la matriz asociada tomando bases de κ que es no nulo). Por el Teorema de la Función Inversa, para todo $p \in S$ existe A abierto con $p \in A$ y tal que $\mathbf{n} : A \rightarrow \mathbf{n}(A)$ es un difeomorfismo.

Si probamos que \mathbf{n} es un revestimiento, al ser S^2 simplemente conexo (y así su propio revestimiento universal) resultará que \mathbf{n} es un homeomorfismo. Pero como sabemos que \mathbf{n} es localmente un difeomorfismo, su inversa local coincide con la inversa por ser homeomorfismo y así es diferenciable (pues es diferenciable en cada punto). Probemos entonces que \mathbf{n} es un revestimiento. Para eso, debemos ver que \mathbf{n} es continua, sobreyectiva, y para cada punto $q \in S^2$ existe un entorno abierto $q \in B_q \subseteq S^2$ tal que $\mathbf{n}^{-1}(B_q) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$

y $\mathbf{n}|_{U_i} : U_i \rightarrow B_q$ es un homeomorfismo. La continuidad ya la tenemos. Para ver que \mathbf{n} es sobreyectiva, notemos que como \mathbf{n} es un difeomorfismo local, en particular es un homeomorfismo local y así \mathbf{n} es abierta. Por lo tanto, la imagen $\mathbf{n}(S)$ es abierta en S^2 y es no vacía. Veamos que $\mathbf{n}(S)$ es cerrada. Esto se debe a que \mathbf{n} es continua, S compacto y así la imagen $\mathbf{n}(S)$ es compacta en S^2 , lo que implica que es cerrada. Esto prueba que $\mathbf{n}(S)$ es abierto, cerrado y no vacío en S^2 que es conexo, y por lo tanto debe ser que \mathbf{n} es sobreyectiva.

Notemos que $\mathbf{n}^{-1}(q)$ es finito, pues si no, al ser S compacto debería tener un punto de acumulación $q' \in \mathbf{n}^{-1}(q)$ y por la continuidad de \mathbf{n} tendríamos que $\mathbf{n}(q') = q$. Pero sabemos que en un entorno de q' , la función \mathbf{n} es un difeomorfismo, y en particular inyectiva. Esto contradice que sea un punto de acumulación. Luego, podemos escribir $\mathbf{n}^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Sea A_i un entorno de p_i donde $\mathbf{n}|_{A_i} : A_i \rightarrow \mathbf{n}(A_i)$ es un difeomorfismo. Ahora, nos gustaría tomar $B_q = \bigcap_{i=1}^n \mathbf{n}(A_i)$, pero podría pasar que $\mathbf{n}^{-1}(B_q)$ no

esté totalmente contenido en $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Por este motivo, tomemos $W_q \subseteq B_q$ abierto tal que

$q \in W_q$, su clausura $\overline{W_q}$ sea compacta y $\overline{W_q} \subseteq B_q$, y sea $U_q = W_q \setminus \mathbf{n} \left(\mathbf{n}^{-1}(\overline{W_q}) \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right)$.

Es decir, a W_q le sacamos los puntos cuya preimagen podría llegar a caer por fuera de $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Este U_q será el entorno abierto de q cubierto parejamente por \mathbf{n} . En efecto, U_q

es abierto pues $\mathbf{n} \left(\mathbf{n}^{-1}(\overline{W_q}) \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right)$ es cerrado pues es la preimagen de un cerrado

por una función continua. Además, $q \in U_q$ pues $\bigcup_{i=1}^n A_i$ contiene a todas las preimágenes

de q por \mathbf{n} . Claramente restringiéndonos a cada parte de la preimagen de U_q en $\bigcup_{i=1}^n A_i$ obtenemos lo deseado. \square

Observación 2.4.4. La condición $\kappa > 0$ es equivalente (bajo las condiciones del teorema anterior) a pedir $\kappa \neq 0$ pues si hubiera algún punto de curvatura negativa, como es compacta existe algún punto con curvatura positiva y por conexión, la curvatura debe anularse en algún punto. De hecho, en la demostración sólo usamos que $\kappa \neq 0$.