Лабораторная работа № 1 «Методы одномерной оптимизации»

<u>Задания практической части:</u>

1. Найти минимум функции из индивидуального задания методом половинного деления. Проиллюстрировать на графике функции переход от начального интервала L_0 к следующему интервалу L в соответствии с методом.

2. Построить блок-схему алгоритма поиска экстремума по методу «золотого» сечения.

3. Найти минимум функции из индивидуального задания методом «золотого» сечения. Проиллюстрировать на графике функции переход от начального интервала L_0 к следующему интервалу L в соответствии с методом.

4*. Построить блок-схему алгоритма поиска экстремума по методу чисел Фибоначчи.

5*. Найти минимум функции из индивидуального задания методом чисел Фибоначчи. Проиллюстрировать на графике функции переход от начального интервала L_0 к следующему интервалу L в соответствии с методом.

6*. Разработать программный модуль решения задачи индивидуального задания методом половинного деления.

7*. Разработать программный модуль решения задачи индивидуального задания методом «золотого» сечения.

8*. Разработать программный модуль решения задачи индивидуального задания методом чисел Фибоначчи.

9. Оформить отчет.

<u>Комментарии к выполнению заданий:</u>

При решении любых заданий практической части рекомендуется пользоваться доступным программным обеспечением.

В заданиях 1, 3, 5 помимо полного решения должны быть предоставлены ответы, содержащие искомый x^*, значение функции $f\left(x^*\right)$ и количество итераций, за которое достигнут результат.

Для геометрической иллюстрации методов в заданиях 1, 3, 5 можно использовать онлайн сервисы, подходящие для графической иллюстрации решения.

Программа (задания 6, 7, 8) может разрабатываться на любом языке программирования, для сдачи программы необходимо продемонстрировать результат её выполнения и код, ответить на вопросы преподавателя, изменить код для дополнительного тестирования. Результат должен содержать ответ на поставленную задачу (искомый x^*, значение функции $f\left(x^*\right)$ и количество итераций k) со всеми обозначениями. Вывод в результатах работы программы промежуточных значений приветствуется, но не является обязательным при наличии рукописного полного решения заданий 1, 3, 5.

* – задания практической части на оценку выше «удовлетворительно».

<u>Содержание отчета:</u>

1. Титульный лист.

2. Выполненные задания 1-3 практической части с постановкой задания, основными используемыми формулами, промежуточными вычислениями и необходимыми графическими иллюстрациями решения заданий 1 и 3. Данный раздел отчёта может быть представлен как в печатном, так и в рукописном виде на листах А4 без помарок и исправлений по тексту.

3. Выполненные задания 4-5 практической части с постановкой задания, основными используемыми формулами, промежуточными вычислениями и необходимыми графическими иллюстрациями решения задания 5. (при условии выполнения заданий 4-5).

4. Листинг программ и результаты выполнения заданий 6-8 практической части (при условии выполнения заданий 6-8).

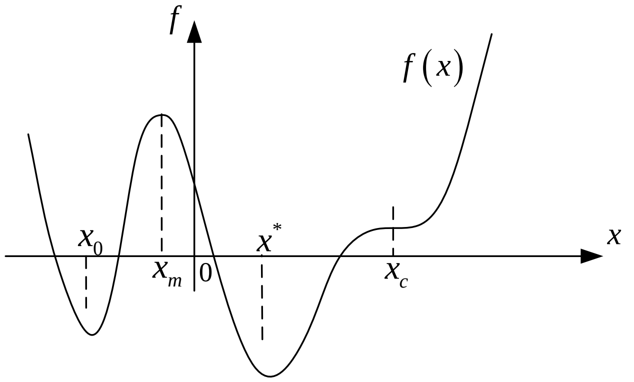
Основные теоретические сведения

Постановка задачи: $f(x) \to \min,\ x \in R^1$.

<u>Определение 1.</u> Функция $f(x)$ имеет ***локальный минимум*** на элементе x_0, если существует некоторая конечная ε-окрестность этого элемента, в которой выполняется $f(x) > f(x_0),\quad \|x - x_0\| \le \varepsilon$.

Функция может иметь много локальных минимумов.

<u>Определение 2.</u> Функция $f(x)$ достигает ***глобального минимума*** на множестве X в точке x^*, если $f(x^*) = \inf\limits_X f(x)$.



Естественно требовать, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной или, по крайней мере, кусочно-непрерывной. В отношении множества X – это вся числовая ось.

Необходимое условие локального экстремума. Пусть $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке $X \subset R^1$ и во внутренней точке x^* этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение, тогда $f'(x^*) = 0$.

Точки, удовлетворяющие этому условию, называются ***стационарными (критическими)***. Стационарные точки могут быть и точками локального минимума, и точками локального максимума, и точками перегиба. Например, на рисунке точка x_c

есть точка перегиба. Для определения характера стационарных точек используется достаточное условие локального экстремума.

Достаточное условие локального экстремума. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in R^1$ k раз, $k > 1$, причём $f'(x^*) = f''(x^*) = ... = f^{k-1}(x^*) = 0$, $f^k(x^*) \neq 0$. Тогда, если k – чётное число, то x^* – точка локального минимума при $f^k(x^*) > 0$ и максимума при $f^k(x^*) < 0$. Если k – нечётное число, то x^* – точка перегиба.

Отметим, что при прохождении точки минимума знак первой производной меняется с «-» на «+», при прохождении точки максимума знак первой производной меняется с «+» на «-», а при прохождении точки перегиба знак первой производной не меняется.

Используя необходимое и достаточное условия, находятся точки локальных экстремумов. Для определения абсолютного минимума есть только один способ: найти все локальные минимумы, сравнить их и выбрать наименьшее значения.

Классификация методов одномерной безусловной оптимизации. Все численные методы одномерной безусловной оптимизации условно можно сгруппировать следующим образом:

1. Методы исключения интервалов (линейный поиск):

1.1. Метод половинного деления;

1.2. Метод «золотого сечения»;

1.3. Метод Фибоначчи;

2. Метод полиномиальной аппроксимации:

2.1. Метод Пауэлла;

3. Методы с использованием производных:

3.1. Метод секущих;

3.2. Метод касательных.

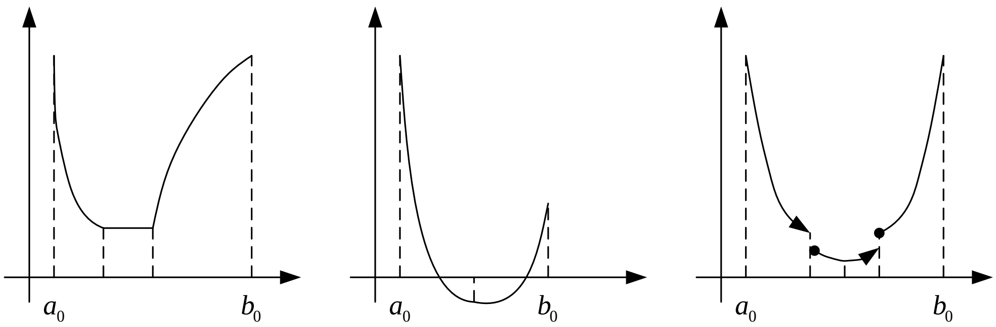
Первые две группы методов используют только значения функции и не требуют вычисления её производных и называются методами минимизации нулевого порядка.

Методы исключения интервалов накладывают единственное требование на исследуемую функцию: она должна быть унимодальной. Следовательно, указанные методы можно использовать для анализа как непрерывных, так и разрывных функций, а также в случаях, когда переменные принимают значения из дискретного множества. Логическая структура поиска с помощью методов исключения интервалов основана на простом сравнении значений функции в двух пробных точках. Кроме того, при таком сравнении в расчёт принимается только отношение порядка на множестве значений функции и не учитывается величина разности между значениями функции. Большим достоинством этих методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы методов нулевого порядка, это возможность определения значений $f(x)$ в заданных точках, а также, что исследуемая целевая функция в допустимой области, по крайней мере, обладает свойством унимодальности.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***унимодальной***, если существует такая точка x^*, что из $x^* < x_1 < x_2$ следует $f(x^*) < f(x_1) < f(x_2)$, а из $x^* > x_1 > x_2$ следует $f(x^*) > f(x_1) > f(x_2)$.

Другими словами, слева от x^* функция $f(x)$ монотонно убывает, а справа – монотонно возрастает.

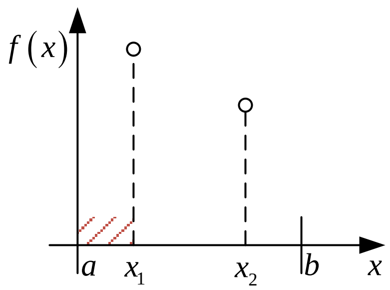
Отметим, что в данном определении не предполагается ни гладкость, ни непрерывность функции.



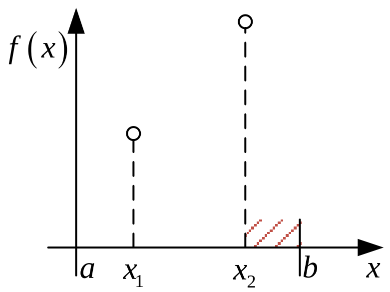
Это важное свойство унимодальных функций. Если мы знаем значения f в точках x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ $x_1 < x_2$, то мы можем определённо, сказать на каком из отрезков $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, b]$ лежит минимум x^* функции f.

Действительно, возможны три различных результата:

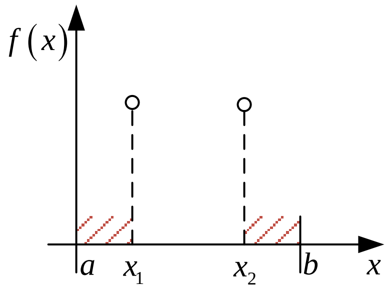
а) $f(x_1) > f(x_2)$, в этом случае интервал $[a, x_1]$ может быть отброшен.



б) $f(x_1) < f(x_2)$, в этом случае интервал $[x_2, b]$ может быть отброшен.



в) $f(x_1) = f(x_2)$, в этом случае интервалы $[a, x_1]$ и $[x_2, b]$ могут быть отброшены.



Методы поиска на основе исключения интервалов указывают на отрезок, на котором гарантированно лежит точка x^*. Этот отрезок называют ***отрезком неопределённости***. Если в качестве приближенного значения x^* взять центр этого отрезка, то погрешность метода есть половина длины отрезка неопределённости.

В отличие от методов исключения интервалов и полиномиальной аппроксимации, методы с использованием производных позволяют построить гораздо более быстрые методы, основанные на решении уравнения $f'(x)=0$.

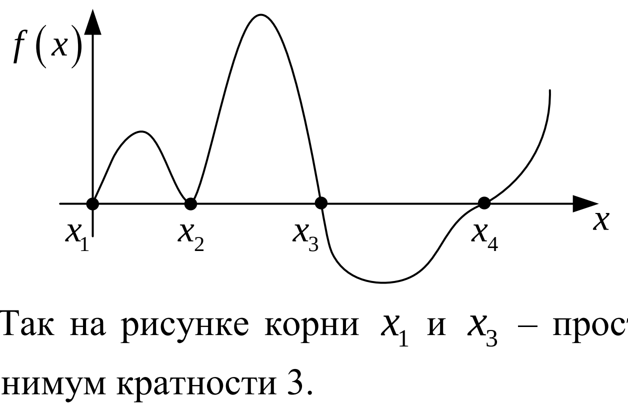
Если целевая функция содержит члены, включающие x в третьей и более высоких степенях, то получение аналитического решения уравнения $f'(x)=0$ затруднительно. В этих случаях целесообразно использовать численные методы нахождения корней нелинейных уравнений.

Итак, рассмотрим задачу нахождения единственного корня на отрезке $[a,b]$ нелинейного уравнения $f(x)=0$ в предположении непрерывности функции $f(x)$.

Геометрически корень x^* соответствует точке пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox.

Определение 4. Число x^* – есть корень уравнения кратности k, если при $x=x^*$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в нуль её производные до $(k-1)$ порядка включительно, т.е.: $f(x^*)=f'(x^*)=f''(x^*)=...=f^{k-1}(x^*)=0$.

Корень кратности $k=1$ называется простым.



Так на рисунке корни x_1 и x_3 – простые, x_2 – как минимум кратности 2, x_4 – как минимум кратности 3.

Если уравнения $f(x)=0$ имеет на $[a,b]$ несколько корней, то выполняется операция отделения (локализации) корней, т.е. нахождения достаточно малых окрестностей рассматриваемой области, в которых содержится одно значение корня данного уравнения. Для выявления отрезка, содержащего корень уравнения, следует построить график этой функции.

Для нахождения корней уравнения $f(x)=0$ используются различные итерационные методы.

Метод половинного деления

Постановка задачи: Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Метод относится к последовательным стратегиям и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации ровно половину текущего интервала неопределённости. Задаётся начальный интервал неопределённости и требуемая точность.

Алгоритм основан на анализе значений функции в трёх точках, равномерно распределённых на текущем интервале (делящих его на четыре равные части). Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределённости оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределённости $L_0 = [a_0, b_0]$ и требуемую точность $\varepsilon > 0$.

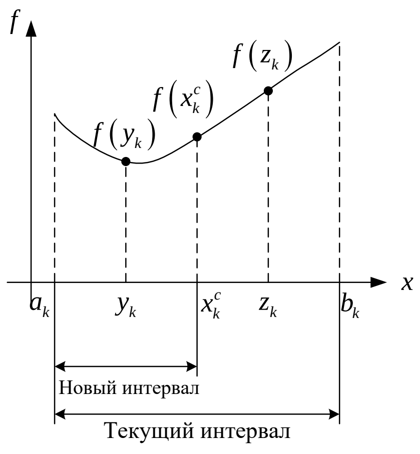
Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить среднюю точку $x_k^c = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, длину интервала $|L_{2k}| = b_k - a_k$ и значение функции в средней точке $f(x_k^c)$.

Шаг 4. Вычислить точки: $y_k = a_k + \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \dfrac{|L_{2k}|}{4}$, а также значения функции в этих точках: $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(x_k^c)$:

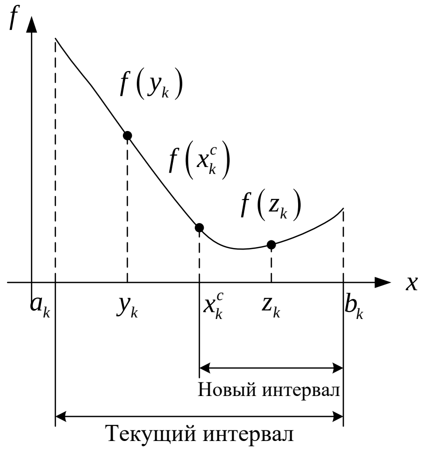
а) если $f(y_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $(x_k^c, b_k]$, положить $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k+1} = a_k$. Средней точкой нового интервала становится точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$. Перейти к шагу 7.



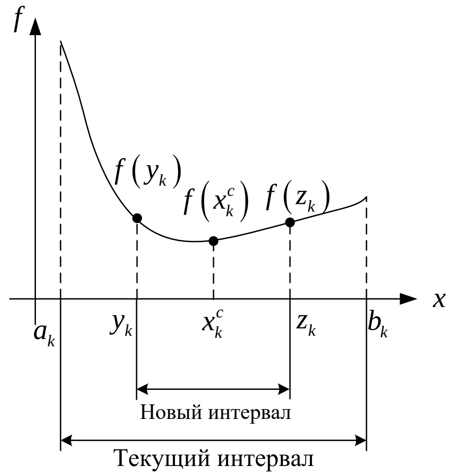
б) если $f(y_k) > f(x_k^c)$, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения $f(z_k)$ и $f(x_k^c)$:

а) если $f(z_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $[a_k, x_k^c)$, положить $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k+1} = b_k$. Средней точкой нового интервала становится точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$. Перейти к шагу 7.



б) если $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, исключить интервалы: $[a_k, y_k), (z_k, b_k]$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала останется точка x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$. Перейти к шагу 7.



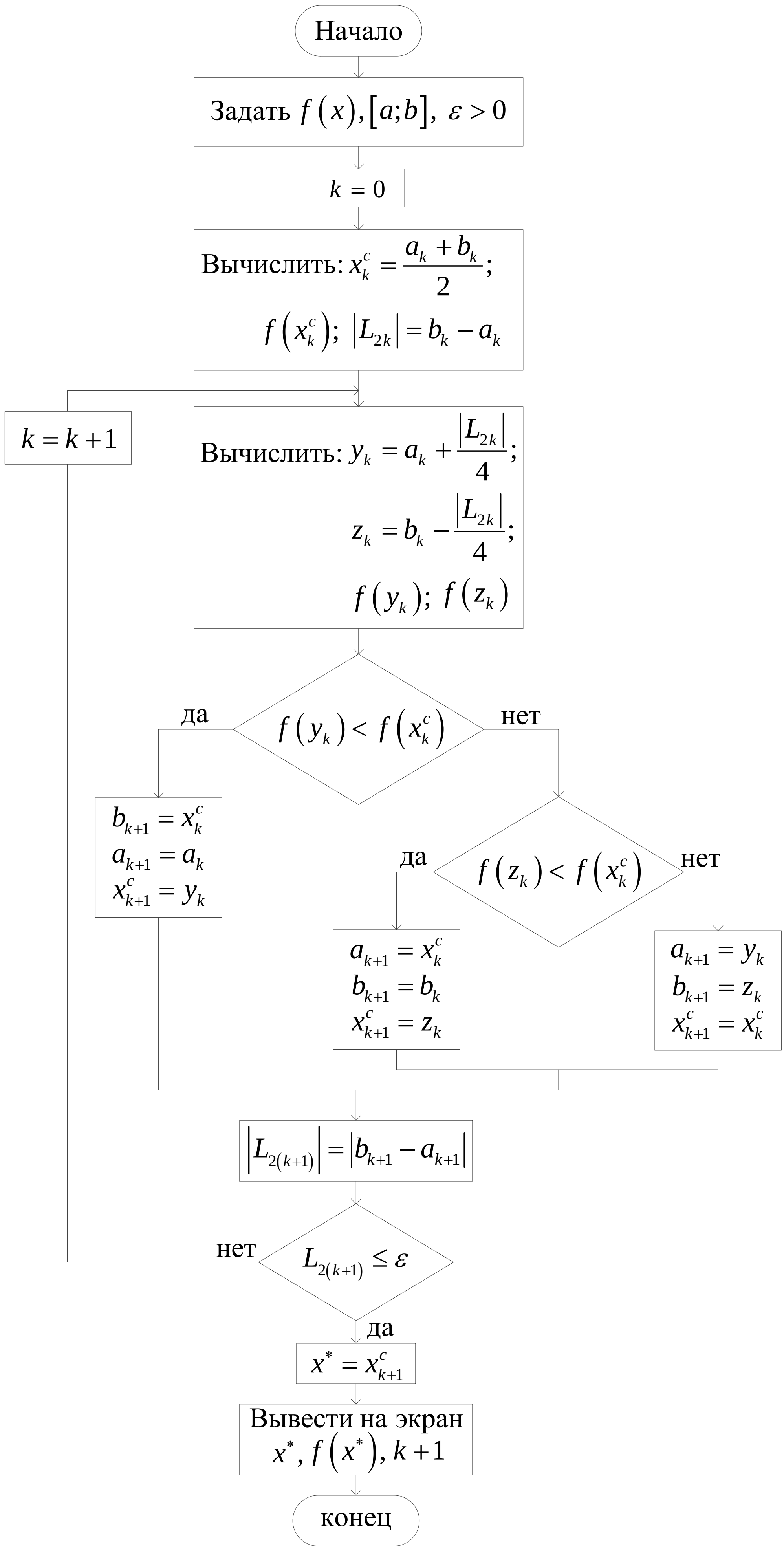
Шаг 7. $\left|L_{2(\mathrm{k}+1)}\right| = \left|b_{k+1} - a_{k+1}\right|$ и проверить условие окончания:

а) если $\left|L_{2(\mathrm{k}+1)}\right| \leq \varepsilon$, процесс поиска заканчивается и $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближения можно взять середину этого интервала $x^* = x_{k+1}^c$.

б) если $\left|L_{2(\mathrm{k}+1)}\right| > \varepsilon$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Сходимость. Для метода деления пополам характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределённости находится по формуле $R(N) = \dfrac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$, где N – количество вычислений функции.

Блок-схема алгоритма



Пример выполнения программы в MathCad

```
function_bisection(f,a0,b0,L) := | k ← 0
                                 | ak ← a0
                                 | bk ← b0
                                 | center ← (ak + bk)/2
                                 | while |bk − ak| > L
                                 |   | yk ← ak + |bk − ak|/4
                                 |   | zk ← bk − |bk − ak|/4
                                 |   | if f(yk) < f(center)
                                 |   |   | bk ← center
                                 |   |   | center ← yk
                                 |   | if f(yk) ≥ f(center)
                                 |   |   | if f(zk) < f(center)
                                 |   |   |   | ak ← center
                                 |   |   |   | center ← zk
                                 |   |   | if f(zk) ≥ f(center)
                                 |   |   |   | ak ← yk
                                 |   |   |   | bk ← zk
                                 |   | k ← k + 1
                                 | xMin ← (ak + bk)/2
                                 | fMin ← f(xMin)
                                 | return (xMin, fMin, k)
```

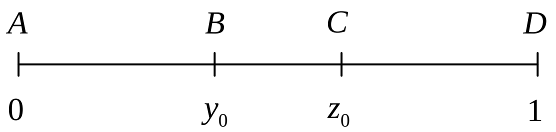
Метод «золотого» сечения

Постановка задачи: Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

При построении конкретного метода одномерной оптимизации, работающего по принципу сокращения интервала неопределённости, следует определиться с правилом выбора на каждой итерации двух внутренних точек, при этом желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве внутренней для следующего интервала. В этом случае число вычислений функции сократится вдвое, и новая итерация потребует расчёта только одного нового значения функции. В методе золотого сечения в качестве внутренних точек выбираются точки «золотого сечения».

Определение 5. Точка производит ***«золотое сечение» отрезка***, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей.

Рассмотрим для простоты отрезок $[0, 1]$ единичной длины.



Ясно, что на отрезке имеются две таких точки y_0 и z_0, они симметричны относительно концов. Точка y_0 производит золотое сечение отрезка AC, а точка z_0 производит золотое сечение отрезка BD. Положим $|AB| = x$, тогда $|BD| = 1 - x$. В соответствии с определением точки «золотого сечения» имеем: $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x}$. Решив эту пропорцию, получим $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cong 0,382$.

Метод относится к последовательным стратегиям. Задаётся начальный интервал неопределённости и требуемая точность. Алгоритм основан на анализе величин функции в двух точках. В качестве точек вычисления функции выбираются точки золотого сечения. Тогда учётом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределённости оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределённости $L_0 = [a_0, b_0]$ и требуемую точность $\varepsilon > 0$.

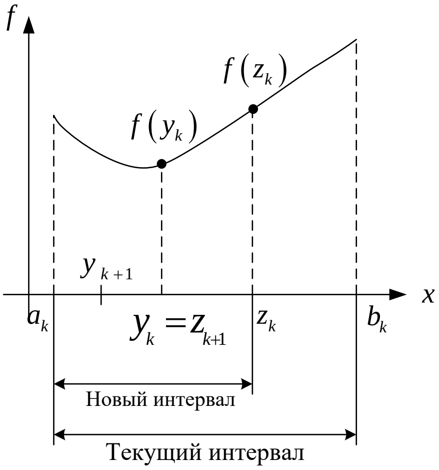
Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить точки $y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (\mathrm{b}_0 - \mathrm{a}_0)$, $z_0 = a_0 + b_0 - y_0$.

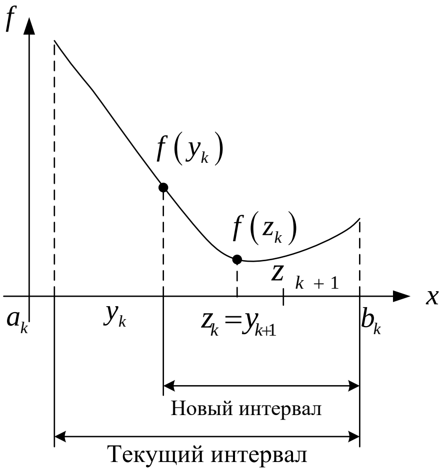
Шаг 4. Вычислить значения: $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, исключить интервал $(z_k, b_k]$, положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$, $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k$, $z_{k+1} = y_k$.Перейти к шагу 6.



б) если $f(y_k) > f(z_k)$, то исключить интервал $[a_k, y_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$, $y_{k+1} = z_k$, $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$. Перейти к шагу 6.



Шаг 6. Вычислить $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$

а) если $\Delta \le \varepsilon$, то поиск завершён $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближения можно взять середину этого интервала $x^* = \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

б) если $\Delta > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

Сходимость. Для метода золотого сечения характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределённости находится по формуле $R(N) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{N-1}$, где N – количество вычислений функции.

Метод чисел Фибоначчи

Постановка задачи. Требуется найти безусловный минимум функции f(x) одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f\left(x^*\right) = \min_{x \in R} f(x)$.

В методе Фибоначчи реализована стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращение интервала неопределённости при заданном количестве вычислений функции. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи.

Определение. Числа Фибоначчи определяются следующим образом: $F_0 = F_1 = 1;\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2};\ k = 2, 3, \ldots$

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,… .

Стратегия поиска. Метод относится к последовательным стратегиям. Задаётся начальный интервал неопределённости и количество N вычислений функции. Алгоритм основан на анализе величин функции в двух точках. Точки вычисления функции находятся с использованием последовательности из $N+1$ чисел Фибоначчи. Как и в методе золотого сечения, на первой итерации требуется два вычисления функции, а на каждой последующей итерации, требуется только одно новое вычисление функции. Поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределённости оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный ***интервал неопределённости*** $L_0 = \left[a_0, b_0\right]$, допустимую длину конечного интервала $l > 0$ и константу различимости $\varepsilon > 0$.

Шаг 2. Найти количество N вычислений функции как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условие $F_N \geq \frac{\left|L_0\right|}{l}$, и ***числа Фибоначчи*** $F_0, F_1, \ldots, F_N$.

Шаг 3. Положить $k = 0$.

Шаг 4. Вычислить значения:

$$y_0 = a_0 + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0);$$

$$z_0 = a_0 + \frac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0)$$

Шаг 5. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 6. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$

а) если $f(y_k) \leq f(z_k)$, положить

$a_{k+1} = a_k$;

$b_{k+1} = z_k$;

$z_{k+1} = y_k$;

$$y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить

$a_{k+1} = y_k$;

$b_{k+1} = b_k$;

$y_{k+1} = z_k$;

$$z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Шаг 7. Проверить условие окончания и в случае необходимости сделать заключительное N -е вычисление функции для получения решения:

а) если $k \neq N-3$, положить $k = k+1$ и перейти к шагу 5;

б) если $k = N-3$, то всегда $y_{N-2} = z_{N-2} = \dfrac{(a_{N-2} + b_{N-2})}{2}$, т.е. отсутствует точка нового вычисления функции. В этом случае полагают: $y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}$; $z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$. В точках y_{N-1} и z_{N-1} вычисляют значения функции и находят границы конечного ***интервала неопределённости***:

- Если $f(y_{N-1}) \le f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = a_{N-2}, b_{N-1} = z_{N-1}$;
- Если $f(y_{N-1}) > f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = y_{N-1}, b_{N-1} = b_{N-2}$.

Поиск завершён и $x^* \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближения можно взять середину этого интервала $x^* \cong \dfrac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}$.

Сходимость. Для метода Фибоначчи характеристика относительного уменьшения начального ***интервала неопределённости*** находится по формуле $R(N) = \dfrac{1}{F_N}$, где N – количество вычислений функции.

Индивидуальные задания:

Вариант 1. $f(x)=2x^3-3x^2-12x-5$, $L_0=[0;6]$, $\varepsilon=0,4$

Вариант 2. $f(x)=x^3-3x^2-24x-3$, $L_0=[2;6]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 3. $f(x)=x^3-3x^2+3$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 4. $f(x)=x^3-12x+6$, $L_0=[0;4]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 5. $f(x)=x^3+3x^2-24x-10$, $L_0=[0;4]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 6. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 7. $f(x)=2x^3+9x^2-21$, $L_0=[-1;3]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 8. $f(x)=x^3-3x^2+2,5$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 9. $f(x)=x^3+3x^2-2$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 10. $f(x)=x^3+3x^2-3,5$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 11. $f(x)=x^3+3x^2-24x+10$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 12. $f(x)=x^3-3x^2-24x-8$, $L_0=[2;6]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 13. $f(x)=2x^3+9x^2-10$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 14. $f(x)=x^3-12x+10$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 15. $f(x)=x^3+3x^2-3$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 16. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 17. $f(x)=x^3-3x^2-24x-5$, $L_0=[2;6]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 18. $f(x)=x^3-4x^2+2$, $L_0=[2;4]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 19. $f(x)=x^3-12x-5$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 20. $f(x)=x^3+3x^2-24x+1$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 21. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+12$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 22. $f(x)=2x^3+9x^2-6$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 23. $f(x)=x^3-3x^2+1,5$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 24. $f(x)=x^3-3x^2-24x+10$, $L_0=[3;5]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 25. $f(x)=x^3+3x^2-24x-3$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 26. $f(x)=x^3-12x-10$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 27. $f(x)=2x^3+9x^2-4$, $L_0=[-1;1]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 28. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$, $L_0=[2;4]$, $\varepsilon=0,2$

Вариант 29. $f(x)=x^3+3x^2-1$, $L_0=[-1;3]$, $\varepsilon=0,3$

Вариант 30. $f(x)=x^3-3x^2+3,5$, $L_0=[1;3]$, $\varepsilon=0,3$