Chapter 3 行列式（determinants）

本章討論限於方陣。爲了定義行列式，先介紹排列、反演、奇排列與偶排列等名詞。

定義 令 $S=\{1,2,\ldots,n\}$ 是正整數 1 到 n 所成的集合。

將 S 的元素任意排成 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 稱爲 S 的**排列**（permutation）。

定理 集合 S 的排列總數共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 種可能的方式。

定義 給定正整數 n，定義 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 爲 n **階乘**（factorial），記爲 $n!$。

且定義 $0!=1$。

例 1 當 $S_1=\{1\}$，共有 $1!=1$ 種排列方式。

當 $S_2=\{1,2\}$，共有 $2!=2\cdot 1=2$ 種排列方式。

當 $S_3=\{1,2,3\}$，共有 $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ 種排列方式。

定義 假設 $S=\{1,2,\ldots,n\}$，且 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 是 S 的排列之一。若在此排列之中，有一個較大的整數排在一個較小的整數前面，則稱有一個**反演**或**反序**（inversion）。

定義 一個排列的反演總數假如是偶數，稱爲**偶排列**（even permutation），假如反演總數是奇數，稱爲**奇排列**（odd permutation）。

定理 當 $n\geq 2$，則 S_n 有 $n!$ 種排列的方式，其中奇偶排列各半，也就是奇排列有 $n!/2$ 種，偶排列也有 $n!/2$ 種。

例 2 以 S_2 驗證上述定理。

例 3 以 S_3 驗證上述定理。

3.1 行列式的定義和性質

定義 若 A 是 $n \times n$ 方陣，則 A 的**行列式**（記爲 $\det(A)$ 或 $|A|$）定義爲

$\det(A) = |A| = \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，偶排列爲 $+$，奇排列爲 $-$，

或者 $\det(A) = |A| = \sum(-1)^i a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 i 是反演總數。

例 4 若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$，則 $\det(A) = a_{11}$。

例 5 若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

例 6 若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

例 7 計算 $\det(A)$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

重要觀念 當方陣 A 比 3×3 還大時，**不能用這種方式計算行列式**，
例如 $n = 4$ 時，依據定義行列式共有 $4! = 24$ 項互相加減，而 $n = 5$ 時有 $5! = 120$ 項。
要使用定義計算才能得到正確數值。本章將介紹兩大類求解大型行列式的方法。

定理 **任一個排列，若其中兩個數字交換，則反演總數變動奇數次，**
即奇排列會變成偶排列，而偶排列會變成奇排列。

例 8 驗證上述定理，排列本來是 54321，把 2 與 4 交換。

超過 4 維的方陣要計算行列式，假如依據定義就會很困難，很複雜。
本節的後半段這些定理與性質，都是爲了幫助我們化簡與計算較大型的行列式，
但本節還是大多先以 3×3 的問題舉例。另外別忘記，0 **很多的就很好算**。

定理 $\det(A) = \det(A^T)$

例 9 以 **例 7** 的矩陣 A 驗證上述定理。

以下三個定理，同學們可以配合第一章的三種列運算來記憶。此外，
行列式更好的性質是可以「行運算」（不熟的同學反而會混淆），因爲 $|A| = |A^T|$。

定理 若 B 是由 A 兩列（兩行）交換，則 $\det(B) = -\det(A)$。

例 10 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$

推理 若 A 之中有兩列（兩行）完全相同，則 $\det(A) = 0$。

（由上述定理，將兩列交換之後行列式乘負號，但仍是同一矩陣，因此值必爲 0）

例 11 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

定理 若 B 是 A 的某一列（行）乘以係數 c，則 $\det(B) = c\det(A)$。

例 13 依據上述定理，練習「把係數提出來」，計算 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} =$

例 14 如同上例練習，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} =$

定理 若 B 是 A 的某一列（行）乘以 c 之後加到另一列（行），則 $\det(B) = \det(A)$。

例 15 練習上述定理，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

定理 若 A 之中有某一列（行）全為 0，則 $\det(A) = 0$。

例 12 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

定理 若 A 是上三角矩陣，或下三角矩陣，或對角線矩陣，

則 $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} =$ 對角線元素相乘。

例 16 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & -4 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} =$

重要觀念 這些定理互相搭配使用，可以將矩陣化簡成上三角矩陣，再求行列式。
這是大型行列式的第一種算法，我們還是先以 3×3 矩陣為例。

例 17 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$

定理 $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

注意 矩陣相乘不能互換，但行列式可以，雖然 $AB \neq BA$ 但是 AB 與 BA 行列式相等。

例 18 驗證上述定理， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。

推理 若 A 是非奇異矩陣，則 $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$。（因爲 $A \times A^{-1} = I$）

例 19 驗證上述推理，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。

3.2 餘因子展開

本小節介紹計算大型行列式的第二種方法，利用餘因子展開的方法來降階。
這種方法手算比較好算，配合上一小節的各個定理，速度更快。

定義 A 是 n 維方陣。刪掉第 i 列與第 j 行可以得出一個 $n-1$ 維的子矩陣，記爲 M_{ij}。
則 $\det(M_{ij})$ 稱爲 a_{ij} 的**子行列式**或**子式**（the minor of a_{ij}），
且 a_{ij} 的**餘因子**（cofactor）定義爲 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$。

例 1 計算 $\det(M_{12})$、$\det(M_{23})$、$\det(M_{31})$、與 A_{12}、A_{23}、A_{31}，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 手算時不用去管 $(-1)^{i+j}$ 到底正還是負，直接看位置，方法如下：

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \quad \text{其餘類推}$$

$\boxed{\text{定理}}$ 若 A 是 n 維方陣，則 A 的行列式可以對任意一列展開計算如下：

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

也可以對任意一行展開計算如下：

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$\boxed{\text{觀念}}$ 餘因子比原本的矩陣少一維，因此稱為餘因子展開與降階。

$\boxed{\textbf{例 2}}$ 分別練習由第 3 列展開與第 1 行展開，計算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\textbf{例 3}}$ 配合 3.1 節的定理，重算 $\boxed{\textbf{例 2}}$。

$\boxed{\text{定理}}$ A 為非奇異矩陣若且唯若 $\det(A) \neq 0$。

$\boxed{\text{推理}}$ 若 A 是方陣，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非明顯解若且唯若 $\det(A) = 0$。

$\boxed{\text{例 8}}$ 若 A 是 4×4 矩陣且 $\det(A) = 4$。

1. 找出 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 全部的解。
2. A 的化約列階梯式？
3. 請描述 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解，其中 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$。
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解有可能不止一個嗎？請說明原因。
5. A^{-1} 是否存在？