Chapter 6 實數向量空間（real vector space）

我們已經談過向量的基本性質與各種運算，本章將探討一般化的向量空間與結構。
假如在過程之中感覺太抽象，就趕快回到熟悉的 R^2 與 R^3 想像一下。

6.1 向量空間（vector space）

$\boxed{\text{定義}}$ V **是一個集合**，$\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 是 V 裡面的任意元素，c、d 是任意實數，
若 V 的所有元素在運算元 $\oplus$ 與 $\odot$ 之下滿足以下十個性質，則 V 是**向量空間**：

(α) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$

(a) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$

(c) 存在元素 $\mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) 對任意元素 $\mathbf{u}$，存在唯一的元素 $-\mathbf{u}$ 使得 $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(β) $c \odot \mathbf{u} \in V$

(e) $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (c \odot \mathbf{v})$

(f) $(c + d) \odot \mathbf{u} = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (d \odot \mathbf{u})$（注意實數相加使用 $+$ 號即可）

(g) $c \odot (d \odot \mathbf{u}) = (cd) \odot \mathbf{u}$（注意實數相乘符號可以省略）

(h) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

重要觀念 若 V 是向量空間，則裡面的元素都可以稱爲廣義的向量。
上述定義之中的 $\oplus$ 代表廣義的向量相加，$\odot$ 代表廣義的純量乘以向量。
一般式的定義的好處在於，有時候某個集合乍看之下不太像是「向量所成的集合」，
但是只要能滿足上述的十個性質，就可以使用我們熟悉的向量運算各項法則，
也可以用向量的觀念去理解這個集合的運作。

觀念 上述定義可以推廣至複數系統，假如 c、d 是複數，集合 C 的任意元素仍然能滿足這十項性質，則 C 稱爲**複數向量空間**。本課程只討論實數向量空間，以後簡稱向量空間。

例 1 由 4.2 節的定理可以直接推論得知，**對任意自然數 n，R^n 是向量空間**。

重要觀念 當 $n = 1$ 時 R^1 只是一條實數線，感覺不像向量，但是 R^1 是向量空間。
當 $n = 0$ 時 R^0 只有一個點，也就是原點，但是 R^0 是向量空間，
這是最特殊的一個向量空間，其它的向量空間一定都包含無限多的向量。
此外，由定義之中的 (c) 可知，**向量空間一定包含零向量**。

重要觀念 要證明某個集合是向量空間，必需寫出 3 個該集合的一般向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$，
然後逐項說明十個性質都能成立。假如有任一項不成立，該集合就不是向量空間。

例 2 若集合 V 是所有實數序列 $(x, y, 0)$ 所成的集合，且在集合之中 $\oplus$ 與 $\odot$ 定義爲
$(x, y, 0) \oplus (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$ 以及 $c \odot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$，
問 V 是不是向量空間？

例 3 若集合 V 是所有實數序列 (x, y, z) 所成的集合，且在集合之中 $\oplus$ 與 $\odot$ 定義爲
$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ 以及 $c \odot (x, y, z) = (cx, y, z)$，
問 V 是不是向量空間？

$\boxed{\text{例 4}}$ 由矩陣加法與純量乘法的定義得知，**對任意的正整數 m 與 n**，
所有 $m \times n$ 矩陣所成的集合是向量空間，該集合一般記為 M_{mn}。

$\boxed{\text{例 5}}$ 給定任意實數 a 與 b 且 $a < b$，在一般的加法與乘法定義之下，
所有定義在區間 $[a,b]$ 的實數函數所成的集合是向量空間，該集合一般記為 $F[a,b]$。

$\boxed{\text{例 8}}$ 在一般的加法與乘法的定義之下，**對任意自然數 n**，
所有次方 $\leq n$ 次的多項式所成的集合是向量空間，該集合一般記為 P_n。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 雖然證明都省略，但是同學要知道 R^n、M_{mn}、$F[a,b]$、P_n 都是向量空間，基本上這些集合的元素運算的所有代數性質都一樣。

$\boxed{\text{例 9}}$ 若 V 是所有實數所成的集合，定義 $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$，與 $c \odot \mathbf{u} = c\mathbf{u}$，
問 V 是不是向量空間？

$\boxed{\text{定理}}$ 若 V 是向量空間，則

1. 任意向量 $\mathbf{u} \in V$，$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. 任意係數 c，$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. 假如 $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$，則 $c = 0$ 或 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
4. 任意向量 $\mathbf{u}$，$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

$\boxed{\text{注意}}$ 若已經確定 V 是向量空間，就可以使用一般符號 $+$ 與 $\times$ 取代 $\oplus$ 與 $\odot$。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 使用向量空間概念的另一個好處，以後各位不用再考慮，
R^3 之中的一個點到底是 3×1 矩陣？還是三維向量？還是有向線段 $\overrightarrow{OP}$？還是點？
在向量空間概念之下，代數性質與運算性質完全一樣。

6.2 子空間（subspace）

定義 已知 V 是向量空間。若集合 W 是 V 的子集合並且滿足向量空間的十項性質，
則 W 稱爲 V 的**子空間**（subspace）（不滿足空間性質的只能稱爲**子集合**，subset）

重要觀念 子空間仍然是一種向量空間，而且因爲它是整個向量空間之中，
具有某些特性的元素拿出來所組成的集合，常常比「整個空間」更具有應用性。

例 1 若 V 是向量空間，則至少包含兩個子空間，一個是 V（自己是自己的子集合），
另一個是只有 V 之中的 $\mathbf{0}$ 向量所成的集合，稱爲**零子空間**（zero subspace）

重要觀念 要檢驗某個集合是不是子空間，引用以下定理，只要檢查兩項。

定理 已知 V 是向量空間，W 是 V 的子集合，則 W 是子空間若且唯若

(α) 若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in W$ 則 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

(β) 若 c 是純量，$\mathbf{u} \in W$，則 $c\mathbf{u} \in W$

例 2 請問集合 $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$ 是否為 R^3 的子空間？

例 3 請問集合 $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in R \right\}$ 是否為 M_{23} 的子空間？

例 4 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x \geq 0 \right\}$，$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x \geq 0, \; y \geq 0 \right\}$，$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x = 0 \right\}$，

請判斷是不是 R^2 的子空間。

例 5 請問集合 $W = \{(a, b, 1) \mid a, b \in R\}$ 是否爲 R^3 的子空間？

$\boxed{\textbf{例 9}}$ 若 A 是 $m \times n$ 矩陣，考慮齊次方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$。（注意 $\mathbf{x}$ 是 R^n 的向量）

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **所有的解所成的集合是** R^n **的子空間**。（稱爲 A **的零核空間**，null space）

$\boxed{\textbf{重要觀念}}$ 當 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 的時候，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集合不是子空間。

例 10 給定向量空間 V 之中的 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$，如何建立包含這兩個向量的子空間？

這個方法可以推廣成下面的一般化狀況：

定義 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是向量空間 V 裡面的向量，$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意實數，

則**向量** $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$

稱爲 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的**線性組合**（linear combination），且向量 $\mathbf{v}$ 一定屬於空間 V。

重要觀念 **給定 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$，所有線性組合所成的集合是 V 的子空間**。

當然，給定的向量不同，組合出來的子空間可能就不一樣。

例 11 若 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$，$\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$，$\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$，

問向量 $\mathbf{v} = (2, 1, 5)$ 是不是 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 的線性組合？

定義 若集合 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 是向量空間 V 之中的一組向量，
則所有 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的線性組合所成的集合，
稱爲**生成集合**或**展開集合**（spanning set），記爲 span S 或 span $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$。

定理 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 是向量空間 V 之中的一組向量所成的集合，
則 span S 是 V 的子空間。

例 在 R^2 之中，若 $S_1=\{(1,0)\}$ 則 span S_1 是 x 軸；
若 $S_2=\{(1,0),(0,1)\}$ 則 span S_2 是整個 R^2；
若 $S_3=\{(1,0),(2,0)\}$ 則 span S_3 還是 x 軸。
（S_1 與 S_3 展開的結果一樣，但是 S_1 比較簡潔，後面小節會介紹它們的不同）

例 12 $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$，問 span S？

例 13 在多項式空間 P_2 之中，

若 $\mathbf{v}_1=2t^2+t+2$，$\mathbf{v}_2=t^2-2t$，$\mathbf{v}_3=5t^2-5t+2$，$\mathbf{v}_4=-t^2-3t-2$，

問向量 $\mathbf{u}=t^2+t+2$ 是否屬於 span $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ 之中？

6.3 線性獨立（linear independence）

前面兩個小節介紹「空間」這種集合的定義與性質，它的特殊性主要就是加法與純量乘法的封閉性。另外，子空間也是一種空間。除了只包含 $\mathbf{0}$ 這個特殊的子空間之外，我們所討論的空間與子空間都是包含無限多個元素的集合。

接下來兩個小節要介紹，如何用有限個元素來描述擁有無限個元素的空間，再更進一步，如何用最精簡的有限元素來描述空間。

定義 V 是向量空間，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是空間 V 裡面的向量，
假如空間 V 之中的每一個向量都可以寫成 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的線性組合，
則稱 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ **生成** V（span V）。

由上一小節的最後，可以令集合 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$，則我們說 S 生成 V，
記成 S span V，或 span $S = V$，或者說 V 可以由 S 生成。

要檢查 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是否可以生成空間或者子空間 V，首先寫出 V 裡面向量的一般式，再看這個一般式能不能寫成 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的線性組合，聯立方程組有解才可以生成。

例 1 若 V 是 R^3。$\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$，$\mathbf{v}_2 = (1,0,2)$，$\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$，
問 $\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$、$\mathbf{v}_3$ 能不能生成空間 V？

例 2 若 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$，問 S 能不能生成 M_{22} 的對稱子空間？

$\boxed{\textbf{例 3}}$ 若 V 是二次多項式空間 P_2，集合 $S=\{p_1(t),p_2(t)\}$，
其中 $p_1(t)=t^2+2t+1$，$p_2(t)=t^2+2$，問 S 能不能生成空間 V？

$\boxed{\textbf{例 4}}$ 若 $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}=\{(1,0),(0,1)\}$。由第 4 章知道任意的二維向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$
可以寫成 $\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2$，因此 S 可以生成 R^2。
同理可以推論 R^n 可由 $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 生成。

$\boxed{\textbf{例 5}}$ 因爲 n 次多項式的一般式可以寫成 $a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t^1+a_0$，
所以 $S=\{t^n,t^{n-1},\ldots,t,1\}$ 是 n 次多項式空間 P_n 的生成集合。
（注意 S 集合裡面共有 $n+1$ 個向量）

例 6 求 A 的零核空間的生成集合（$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合是 R^n 的子空間）。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

從上面這些例題可以看出，空間 V 的有限元素表示法，就是使用生成集合表示。
但是生成集合有許多可能，爲了說明什麼是最精簡的表示法，先介紹線性獨立的概念。

定義 V 是向量空間，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是空間 V 裡面的一組非零向量。
若可以找到不全爲零的係數 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$，
則稱 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是**線性相依**（linearly dependent）；
反之，若只有 c_i 全部是零之下，才能使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$，
則稱 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是**線性獨立**（linearly independent）。

重要觀念 若一組向量是線性相依，可以想成這些向量之間存在著某種「線性關係」，
第一章一開始我們就談過，「關係」在數學上的表達就是某個等式可以成立。
首先舉一個線性相依的例子，例如 $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$，$\mathbf{v}_2 = (2, -4)$，很顯然 $2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$，
也就是 $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$，因此我們找到係數 $c_1 = 2$，$c_2 = -1$ 使得向量相加爲零向量。
又例如 $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$，$\mathbf{v}_2 = (0, 1)$，很顯然要使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$，
只有一種可能，就是 $c_1 = c_2 = 0$，我們就說這組向量是線性獨立。

重要觀念 要判斷向量之間是線性獨立或相依，必需使用定義的式子求解齊次方程組。只有明顯解也就是唯一解時線性獨立，有非明顯解的時候線性相依。

例 7 在 **例 6** 之中解出來的 $(-1, 1, 0, 0)$ 與 $(-2, 0, 1, 1)$ 是不是線性獨立？

例 8 $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$，$\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$，$\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 3)$，它們線性獨立還是相依？

$\boxed{\textbf{例 9}}$ $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$，$\mathbf{v}_2 = (1, -2, 1)$，$\mathbf{v}_3 = (-3, 2, -1)$，$\mathbf{v}_4 = (2, 0, 0)$ 獨立還是相依？

$\boxed{\textbf{例 10}}$ 在 R^2 之中，$c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$ 必然 $c_1 = c_2 = 0$，因此 $\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ 線性獨立。

同理可以推論在 R^n 之中，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是線性獨立。

$\boxed{\textbf{例 11}}$ $p_1(t) = t^2 + t + 2$，$p_2(t) = 2t^2 + t$，$p_3(t) = 3t^2 + 2t + 2$ 線性相依還是獨立？

$\boxed{\text{推理}}$ 若集合 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 之中包含零向量，則 S 線性相依。

$\boxed{\text{推理}}$ 若 S_1 與 S_2 都是向量集合，且 S_1 是 S_2 的子集合（記為 $S_1 \subset S_2$），

(a) 假如 S_1 線性相依，則 S_2 一定線性相依。

(b) 假如 S_2 線性獨立，則 S_1 一定線性獨立。

在 R^2 與 R^3 可以畫圖的情況，理解向量之間的線性獨立與線性相依：

定理 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 都是非零向量，則 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是線性相依若且唯若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 其中某個向量可以寫成其它向量的線性組合。

推理 把 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 順序調整一下，係數 c_k 是 0 的放在後面，我們可以說 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 線性相依若且唯若 $\mathbf{v}_j$ 是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$ 的線性組合。

例 13 續 **例 9**，因爲 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$，所以可以寫成 $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$。

下面的定理是爲了下一小節作準備，要談如何表達最精簡，其中 $\mathbf{v}_j$ 想成是多餘的向量。

定理 假設 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 可以生成向量空間（或子空間）V，且 S 線性相依。
不失一般性，假設其中 $\mathbf{v}_j$ 是其它向量的線性組合，則可以令
$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_k\}$（即 S 刪除 $\mathbf{v}_j$），
此時 S_1 一樣可以生成向量空間 V，即 $\operatorname{span} S = \operatorname{span} S_1 = V$。

例 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 可以生成 R^2，但 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$，因此刪除 $\mathbf{v}_3$，

$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 也可以生成 R^2。

例 14 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

6.4 空間的基底（basis）與維數（dimension）

定義 若 (a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 生成向量空間 V，且 (b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是線性獨立，則稱 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是向量空間 V 的**基底**（basis）。

觀念 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是基底，則每個 $\mathbf{v}_j$ 都不同，且裡面不可能有零向量。

重要觀念 **基底就是向量空間最精簡的描述方式**。

要驗證某一組向量是基底，定義之中的 (a) 與 (b) 都要成立才行。

這兩個問題在第 6.3 節都介紹過要怎麼驗證。

例 2 驗證 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ 是空間 R^4 的基底，其中

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$，$\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 2)$，$\mathbf{v}_3 = (0, 2, 2, 1)$，$\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$。

重要觀念 從求解過程發現，其實是同樣的方程組，一個是齊次方程組，一個不是，因此引用第一章的觀念，可以擴增成為 $\left[\begin{array}{c|c|c} A & \mathbf{b} & \mathbf{0} \end{array}\right]$，求解一次就行了。

例 1 $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ 與 $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ 是線性獨立，且可以生成 R^2，因此是 R^2 的基底。

同理可以推論，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是 R^n 的基底。

這種基底稱爲 R^n 空間的**標準基底**（standard basis）或**自然基底**（natural basis）。

定義 若向量空間 V 的基底是有限個向量所成的集合，（本課程討論都是有限個）

稱 V 是**有限維**（finite dimension）的空間；

若基底的向量有無限多個，稱 V 是**無限維**（infinite dimension）的空間。

例 3 驗證 $S = \{t^2+1,\, t-1,\, 2t+2\}$ 是向量空間 P_2 的基底。

重要觀念 集合 $S = \{t^n,\, t^{n-1}, \ldots, t,\, 1\}$ 是向量空間 P_n 的自然基底。

例 4 若 V 是 P_2 的子空間，V 的元素 $a_2t^2+a_1t+a_0$ 符合 $a_0=a_2-a_1$，試求 V 的基底。

定理 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 是向量空間 V 的基底，則空間 V 之中的任意向量都可以表示為 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合，且**表示法是唯一的**。

例 $\mathbf{e}_1=(1,0)$ 與 $\mathbf{e}_2=(0,1)$ 是 R^2 的基底，則 R^2 中的任意向量，例如 $(3,-5)$，可以表示成基底的線性組合：$(3,-5)=3\mathbf{e}_1+(-5)\mathbf{e}_2$，而且沒有其他的表示法。

定理 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 是向量空間 V 的非零向量集合，且 S 生成子空間 W，即 S span W。則 S 的某個子集合是子空間 W 的基底。

假如 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是線性獨立，則 S 就是 W 的基底；
假如相依，應用 6.3 節的想法，可以把 S 之中「多餘」的向量一個一個刪掉，
直到剩下的都是線性獨立爲止，但是這樣做很沒有效率。

重要觀念 「整個向量空間」的基底容易找，例如 R^n 與 P_n 用自然基底就可以，但是子空間的基底就不是那麼明顯可以知道。
我們將會介紹兩種方法找基底，應用的地方不同，同學們兩種都要學會。

演算法（**求子空間基底的第一種方法**）若 S 生成子空間 W，求 W 的基底：
給定 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$，求解 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$，把擴增矩陣轉成化約列階梯式，則有首項的「行」的原始向量（注意！！）是 W 的基底。

例 5 若 S 包含 5 個向量：$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -2, 1)$，$\mathbf{v}_2 = (-3, 0, -4, 3)$，$\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, -1)$，$\mathbf{v}_4 = (-3, 3, -9, 6)$，$\mathbf{v}_5 = (9, 3, 7, -6)$，$W = \text{span } S$。求 S 的子集合成爲 W 的基底

注意 使用這種方法，一開始向量的順序不同，求出來的答案是不同的。
例如把 **例 5** 的向量排成 $S = \{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_5\}$ 會求出不同的答案，請同學們自己試。
重要的是，雖然答案不同，但是生成的子空間 W 是相同的。

定理 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是向量空間 V 的基底，
且 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ 是 V 裡面的獨立向量集合，則 $r \le n$。

注意 這個定理告訴我們，向量空間 V 裡面可以找出的獨立向量的個數是有上限的。

定理 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 與 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 是同一空間的基底，則 $n = m$。

定義 非零向量空間 V 的**維數**（dimension）是基底的向量數目，記爲 $\dim(V)$。
向量空間 $\{\mathbf{0}\}$ 的維數是 0。

重要觀念 假如向量空間的維數是 n，則基底共有 n 個獨立向量；
且若有 n 個獨立向量就可成爲基底。所以非零向量空間的基底可以有無限多種。

例 6 $\dim(R^2) = 2$，$\dim(R^3) = 3$，一般化的 $\dim(R^n) = n$。

例 7 $\dim(P_2) = 3$，$\dim(P_3) = 4$，一般化的 $\dim(P_n) = n + 1$。

例 8 在 例 5 之中，$W = \text{span } S$ 是 R^4 的子空間，且 $\dim(W) = 2$。

觀念 若 W 是 V 的子空間，則 $\dim(W) \le \dim(V)$。

圖形理解 R^2 有那些可能的子空間？R^3 有那些可能的子空間？

$\boxed{\text{觀念}}$ 維數相同的空間，例如 R^2、P_1 與 $\boxed{\textbf{例 5}}$ 的 W 維數都是 2，雖然向量看起來不同，但是以代數的觀點來看，性質幾乎完全相同。（這是數學觀念，比較抽象）

$\boxed{\textbf{推理}}$ 若 $\dim(V) = n$，則超過 n 個向量的集合一定線性相依，

此外，向量的數目小於 n 的集合 S 不可能生成向量空間 V。

在 n 維空間之中，給一組數目少於 n 個線性獨立的向量，可以發展出基底，
定理與方法請見以下（方法是前面的演算法的推廣而以）。

定理 若 S 是向量空間 V 的線性獨立向量集合，則必然存在基底 $T \supset S$。

例 9 找一組 R^4 的基底，要包含 $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$ 與 $\mathbf{v}_2 = (-1,1,-1,0)$。

定理 V 是向量空間且 $\dim(V) = n$，S 是空間 V 的向量集合，$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$，

(a) 若 S 是線性獨立，則 S 是 V 的基底。

(b) 若 S 可以生成 V，則 S 是 V 的基底。

（本定理只是在基底定義裡，(a) 或 (b) 若一個條件滿足，驗證另一個就可以）

6.5 齊次方程組（homogeneous systems）

前面已經解釋，給定 $A_{m\times n}$ 則 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 必然有解，且它的解集合是 R^n 的子空間。
假如只有明顯解，則子空間就是 $\{\mathbf{0}\}$；假如無窮多解，子空間就用解集合的基底表達。
齊次方程組的應用很多，爲了判斷線性獨立，以及找基底，都必需求解齊次方程組。
未來還有更多的應用。以下的定義前面已經講過，現在給正式的定義。

定義 若 A 是 $m\times n$ 矩陣則 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合是 R^n 的子空間，
稱爲 A 的**零核空間**（the null space of A），
零核空間的維數稱爲 A 的**核維數**（the nullity of A）。

例 1 求方程組的解空間基底以及解空間的維數

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

重要觀念 求解齊次方程組，假設最後矩陣有 r 個首項，則零核空間的維數是 $n-r$。

以下兩個例題在第七章會不斷地出現.

例 2 求 $(\lambda I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解空間基底，其中 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

例 3 求所有使得 $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非明顯解的 λ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{重要觀念}}$ **$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集合不是子空間**，但是與 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解有密切的關係，在第一章就講過，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解可以寫成 $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$，即特別解加上齊次方程組的解。

$\boxed{\textbf{例 4}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$，分別求解 $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 與 $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{例 5}}$ 續第 1.6 節的 $\boxed{\textbf{例 10}}$，將解寫成 $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$。

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 + \ \ x_5 \qquad\quad &= 2 \\
x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 + \ \ x_5 + 2x_6 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 + 2x_5 + \ \ x_6 &= 4 \\
3x_1 + 6x_2 + \ \ x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9
\end{aligned}$$

6.6 矩陣的秩（rank）及應用

定義 若 A 是 $m \times n$ 矩陣， $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

則 A 的每一列看成列向量一共有 m 列

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{v}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

因為 $\mathbf{v}_i$ 都是 n 維向量，因此 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 可以生成一個 R^n 的子空間，稱為 A 的**列空間**（the row space of A）；

同理，A 的每一行看成向量，一共有 n 行

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

因爲 $\mathbf{w}_j$ 都是 m 維向量，因此 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ 可以生成一個 R^m 的子空間，稱爲 A 的**行空間**（the column space of A）。

$\boxed{\textbf{定理}}$ **若 A 與 B 是列等價，則 A 與 B 的列空間相同。**（不要跟第一章混淆，第一章有一個定理是說，若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 經過列運算得到 $B\mathbf{x} = \mathbf{d}$，則方程組的解相同 ）

在 6.4 節有談過給定一組向量 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$，求子空間 $W=\operatorname{span} S$ 的基底，
當時的第一種演算法是求解 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$，
寫成方程組的時候感覺上就是變成擴增矩陣的行向量。
這種方法的特點是**找到的基底是 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 之中的某些向量所組成**。

演算法（**求子空間基底的第二種方法**）
給定 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$，將 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 當作列向量寫成矩陣 A，
用基本列運算得出化約列階梯式 B。依據上述定理，A 與 B 的列空間相同，
因此 B 之中的非零列就是所求的基底，也可以說是 A 的列空間基底。

第二種方法找到的基底不再是從 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 之中選出來的向量，它的特點是
找到的像是自然基底，給定子空間之中的任意向量，很容易找出基底線性組合的表達

一般來說，假如沒有指定基底必需由原始向量組成，通常使用第二種方法，比較方便。

$\boxed{\textbf{例 1}}$ 若 $S=\{(1,-2,0,3,-4),\ (3,2,8,1,4),\ (2,3,7,2,3),\ (-1,2,0,4,-3)\}$，
且 $V=\text{span }S$，求 V 的基底。

$\boxed{\textbf{例 2}}$ 若 V 是 $\boxed{\textbf{例 1}}$ 的基底，且向量 $(5,4,14,6,3)\in V$，將它寫成基底的線性組合。

$\boxed{\textbf{重要觀念}}$ 若向量無法表達成基底的線性組合，則它不屬於 $V=\text{span }S$。
例如同學們可以嘗試能不能將 $(5,4,14,6,2)$ 寫成 $\boxed{\textbf{例 1}}$ 基底的線性組合。

$\boxed{\textbf{定義}}$ A 的列空間的維數稱爲**列秩**（the row rank of A）；
A 的行空間維數稱爲**行秩**（the column rank of A）。

例 3 續 **例 1**，再求 A 的列空間基底，但基底由 A 的列組成。

例 4(a) 續 **例 1**，求 A 的行空間基底。

例 4(b) 續 **例 1**，再求 A 的行空間基底，但基底由 A 的行組成。

由上述幾個例題可以看出，不管把 A 當作 n 個行向量，或者是 m 個列向量所組成，線性獨立的向量個數都是一樣的，因此有以下的定理與定義。

定理 **任意 $m \times n$ 矩陣 A 的列秩與行秩一定相等。**

定義 矩陣 A 之中線性獨立的向量數目，稱爲 A 的**秩**（the rank of A），記爲 $\text{rank}(A)$。

觀念 問矩陣的秩，只要將 A 化簡成爲化約列階梯式，看有幾個非零列就知道。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 各位應該可以發現，求解 A 的列空間基底與求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 過程完全相同，化簡成化約列階梯式之後，有首項的是 A 的列空間基底；
至於零核空間部份，沒有首項的 x_j 經過移項得出零核空間基底，因此

$\boxed{\text{定理}}$ 若 A 是 $m\times n$ 矩陣，則 $\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n$。

$\boxed{\text{例 5}}$ 使用 $\boxed{\text{例 1}}$ 的矩陣 A 驗證上述定理。

$\boxed{\textbf{例 6}}$ 驗證上述定理，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$。

$\boxed{\textbf{重要觀念}}$ 若向量 $\mathbf{x}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解，代表 **A 的每一列與 $\mathbf{x}$ 內積是 0**，而內積等於 0 代表兩個向量互相垂直或者正交，因此 $\mathbf{x}$ 與 A 的每一列都垂直，也就是說 $\mathbf{x}$ 與 A 的列空間垂直。因此 **A 的列空間與 A 的零核空間正交**。

假如 A 是方陣，矩陣的秩還有以下的一些性質，注意這一頁的這些性質都是方陣。

定理 $n \times n$ 方陣 A 是非奇異矩陣若且唯若 $\mathrm{rank}(A) = n$。

推理 若 A 是 $n \times n$ 方陣，則 $\mathrm{rank}(A) = n$ 若且唯若 $\det(A) \neq 0$。

推理 若 A 是 $n \times n$ 方陣，則給定任意的 $n \times 1$ 向量 $\mathbf{b}$，
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解若且唯若 $\mathrm{rank}(A) = n$。

推理 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是 n 個 R^n 向量（n 維向量）的集合，
令矩陣 A 的列（或者行）是由向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 組成，
則 S 是線性獨立若且唯若 $\det(A) \neq 0$。

推理 n 等式 n 變數的齊次方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非明顯解若且唯若 $\mathrm{rank}(A) < n$；
且它只有明顯解（唯一解）若且唯若 $\mathrm{rank}(A) = n$。

例 7 驗證上面幾個推理，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$。

例 8 驗證上面幾個推理，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$。

本小節最後一個性質在討論求解方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，**此性質不限定方陣**。

定理 **方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解（包含唯一解與無窮多解）若且唯若**
$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]\right)$。（也就是擴增之後秩相同才有解）

證明：（忘記此性質的話請見第 1.3 節）

令 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，則 $A\mathbf{x}$ 可以寫成 A 的行的線性組合，因此

$$A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

由上式可知，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，代表找得到係數 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 使得上式成立，因此 $\mathbf{b}$ 是矩陣 A 的行的線性組合，得證擴增之後 rank 相同。 $\square$

注意 給定方程組，只知道有解或沒有解好像沒什麼作用，通常找出解比較重要。這個證明裡面介紹的概念才是重點。

$\boxed{\textbf{例 9}}$ 驗證上述定理，$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{例 9}}$ 驗證上述定理，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

6.7 座標（coordinates）與基底轉換（change of basis）

首先請瞭解，**座標就是線性組合的係數**。例如自然基底之下，$(3,-1) = 3\mathbf{e}_1 + (-1)\mathbf{e}_2$。

矩陣與向量有順序性，因此將基底的順序固定之後，稱爲**有序基底**（ordered basis）。
因此 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 與 $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ 都可以當成 R^2 的基底，剛才的向量 $(3,-1)$
在有序基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 之下座標是 $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，但是在有序基底 $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ 之下座標是 $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$。

定義 若 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是 n 維向量空間 V 的有序基底，
給定 V 之中的任意向量 $\mathbf{v}$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的線性組合
$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$，則我們稱

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ 是**向量 $\mathbf{v}$ 在有序基底 S 之下的座標**（coordinates），記爲 $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

例 1 $S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0),\ \mathbf{v}_2 = (2,0,1,0),\ \mathbf{v}_3 = (0,1,2,-1),\ \mathbf{v}_4 = (0,1,-1,0)\}$
是 R^4 的基底，若 $\mathbf{v} = (1,2,-6,2)$，求 $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_S$。

$\boxed{\textbf{例 2}}$ $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 是 R^3 的基底，若 $\mathbf{v}=(2,-1,3)$，求 $\left[\mathbf{v}\right]_S$。

$\boxed{\textbf{例 3}}$ 若向量空間 $V=P_1$，已知 $S=\{\mathbf{v}_1=t,\ \mathbf{v}_2=1\}$ 與 $T=\{\mathbf{w}_1=t+1,\ \mathbf{w}_2=t-1\}$ 都是 P_1 的基底，若向量 $\mathbf{v}=5t-2$，分別求 $\left[\mathbf{v}\right]_S$ 與 $\left[\mathbf{v}\right]_T$。

重要觀念 前面已經說明，維數相同的空間，代數性質是相同的，
因此就算 S 不是自然基底，只要所有的向量都表示成 S 的座標，
同樣可以證明向量在這樣的座標之下可以滿足加法與純量乘法的封閉性，即

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}+\mathbf{w}\end{bmatrix}_S=\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S+\begin{bmatrix}\mathbf{w}\end{bmatrix}_S \quad \text{以及} \quad \begin{bmatrix}c\mathbf{v}\end{bmatrix}_S=c\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S$$

而且也可以推廣至 $\begin{bmatrix}c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}_S=c_1\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\end{bmatrix}_S+c_2\begin{bmatrix}\mathbf{v}_2\end{bmatrix}_S+\cdots+c_n\begin{bmatrix}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}_S$。

本小節後半段要講的是座標轉換，我們先用二維的例題配合圖形說明。

例 $S=\{\mathbf{e}_1=(1,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1)\}$ 與 $T=\{\mathbf{v}_1=(1,0),\ \mathbf{v}_2=(1,1)\}$ 都是 R^2 的基底，
問向量 $\mathbf{v}=(4,2)$ 的 $\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S$ 與 $\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_T$。

從自然基底轉換其它基底座標的方法如上例，以下說明任意兩組基底座標的轉換方法。

假設 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 與 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ 都是向量空間 V 的基底。
給定向量 $\mathbf{v}$，假如已知 $\mathbf{v}$ 在基底 T 的座標是 $[c_1,c_2,\ldots,c_n]^T$，即

$$\mathbf{v}=c_1\mathbf{w}_1+c_2\mathbf{w}_2+\cdots+c_n\mathbf{w}_n \text{，也就是 } \left[\mathbf{v}\right]_T=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

現在想轉換成 S 的座標。由前一個 **重要觀念** 得知

$$\left[\mathbf{v}\right]_S=\left[c_1\mathbf{w}_1+c_2\mathbf{w}_2+\cdots+c_n\mathbf{w}_n\right]_S=c_1\left[\mathbf{w}_1\right]_S+c_2\left[\mathbf{w}_2\right]_S+\cdots+c_n\left[\mathbf{w}_n\right]_S$$

注意到，$\left[\mathbf{w}_1\right]_S$ 就是 $\mathbf{w}_1$ 在基底 S 之下的座標。由 **例 1** 知道求解方程組可得到係數值，

爲了符號方便，假設求出來的解寫成行向量 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\end{bmatrix}^T$；

同理可推論，$\mathbf{w}_j$ 在基底 S 之下可由聯立方程組求出座標是 $\begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \end{bmatrix}^T$，

所以 $$\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

也就是 $$\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ ，記為 $\begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_S = P_{S\leftarrow T} \begin{bmatrix}\mathbf{v}\end{bmatrix}_T$

可用下圖幫助記憶

定義 矩陣 $P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 稱爲**由基底 T 至基底 S 的轉換矩陣**（transition matrix from T-basis to S-basis）

演算法 求轉換矩陣 $P_{S\leftarrow T}$ 的方法：
求解 $\mathbf{w}_1$、$\mathbf{w}_2$、$\cdots$、$\mathbf{w}_n$ 在基底 S 的座標，一一寫成行向量就是 $P_{S\leftarrow T}$。

注意 在 1.6 節講過，n 個方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$、$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$、$\cdots$、$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$
不用分別求解，只要擴增爲 $\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{array}\right]$，可以一次全部求解完成。

例 4 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，$T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$，已知 S 與 T 都是 R^3 的基底，求 $P_{S\leftarrow T}$，並以 $\mathbf{v}$ 驗證轉換是正確的。

定理 若 S 與 T 都是基底，則 $P_{S\leftarrow T} = P_{T\leftarrow S}^{-1}$，兩個轉換矩陣互為反矩陣。

例 5 續 **例 4**，先直接求解 $P_{T\leftarrow S}$，再求反矩陣驗證上述定理。

6.8 正規化正交基底（orthonormal basis）

在討論 R^n 整個空間時，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ 是最直接又好用的基底，座標也容易找，
可是在討論子空間的時候，絕大部份的應用都沒有如此直觀的基底，
本小節要介紹如何在子空間找一組比較容易應用的基底。

定義 令 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是 R^n 的非零向量集合，
假如每一個 $\mathbf{u}_i$ 都跟其它的向量互相垂直（即 $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \forall i \neq j$），
則稱 S 是**正交**（orthogonal）集合，或是垂直集合。
更進一步，除了互相垂直之外，假如每個 $\mathbf{u}_i$ 的長度都是 1（即 $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1, \forall i$），
則稱 S 是**正規化正交**（orthonormal）集合。

例 1 驗證 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ 是正交集合，更進一步找出正規化正交集合，
其中 $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2)$、$\mathbf{x}_2 = (-2, 0, 1)$、$\mathbf{x}_3 = (0, 1, 0)$。

例 2 自然基底 $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ 是正規化正交集合。

定理 若 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是 R^n 的正交集合，則 S 是線性獨立。

證明：考慮求解 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$，

將等式兩邊都內積 $\mathbf{u}_1$，得出 $c_1\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$，

因爲各向量互相正交，所以剩下 $c_1\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$，因此 c_1 必定爲 0。

對每一個 $\mathbf{u}_i$ 重覆上述步驟可知，每一個 $c_i = 0$，得證 S 線性獨立。 □

重要觀念 這個證明過程對於瞭解本小節內容非常重要。

推理 若 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是 R^n 的正規化正交集合，則 S 是線性獨立。

定義 若 S 是正交集合而且是基底，稱爲**正交基底**（orthogonal basis），

若是正規化正交集合而且是基底，稱爲**正規化正交基底**（orthonormal basis）。

回憶 6.7 節的 $\boxed{\text{例 1}}$，在一般的基底之下，給定任意向量要找出座標時，
必需求解方程組 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$，相當麻煩。
但是假如是正規化正交基底，就非常好用，要找座標就會簡單很多，請見以下定理。

$\boxed{\text{定理}}$ **若 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 是 R^n 的正規化正交基底，給定任意向量 $\mathbf{v}$，想要求出座標，也就是線性組合的係數使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\mathbf{u}_n$，只要計算 $c_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i$，$\forall 1\le i\le n$。（只要算內積不需要求解方程組）**

證明：方程組之中，等式兩邊都內積 $\mathbf{u}_1$ 得出 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1=c_1\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1=c_1$，
同理可以對每一個 $\mathbf{u}_i$ 內積，得證 $c_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i$。 $\square$

$\boxed{\text{定理}}$ **若 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 是 R^n 的正交基底，給定任意向量 $\mathbf{v}$，**

座標是 $c_i=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i},\forall 1\le i\le n$

證明：等式內積 $\mathbf{u}_i$ 得 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i=c_i\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i$，移項就可得證。 $\square$

$\boxed{\textbf{例 3}}$ $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 是正規化正交基底，將 $\mathbf{v} = (3, 4, 5)$ 表示成 S 的線性組合，

其中 $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

給定任意基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$，想要找出同一個空間的
正規化正交基底 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 的方法說明如下：

演算法（**Gram–Schmidt 正交化過程**）：給定基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$，

步驟 0 令 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

步驟 1 以下面的式子每次求出一個 $\mathbf{v}_i$，依序得出 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_m$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots \text{（前面 } i-1 \text{ 項都要減）}$$

步驟 2 將每個 $\mathbf{v}_i$ 正規化得到單位向量 $\mathbf{w}_i$，

得出 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 就是正規化正交基底。

重要觀念 手算時的技巧，在算出每個 $\mathbf{v}_i$ 之時，可以先乘除得到整數元素的向量，全部的 $\mathbf{v}_i$ 都算出來之後，再一起正規化得 $\mathbf{w}_i$，比較好算。

此外不要忘記，找正規化正交基底的目的是，任意向量找基底座標時，算內積就可以。

$\boxed{\text{例 4}}$ 給定 R^3 的基底 $\{\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,0,-1),\ \mathbf{u}_3 = (-1,2,3)\}$，使用 Gram-Schmidt 過程找出正規化正交基底。

$\boxed{\text{例 5}}$ W 是 R^4 的子空間，基底是 $\{\mathbf{u}_1 = (1,-2,0,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,0,0,-1),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,0,0)\}$ 使用 Gram-Schmidt 過程找出正規化正交基底。

6.9 正交補集（orthogonal complements）

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 在 R^n 之中，若已知有一個子空間 W 的維數是 k，則我們可以說 R^n 被切成兩個互補的子空間，另一個的維數是 $n-k$，且兩個子空間互相垂直。

$\boxed{\text{定義}}$ 假設 W 是 R^n 的子空間。若 R^n 向量 $\mathbf{u}$ 與 W 之中每個向量都垂直，

則稱 **$\mathbf{u}$ 與 W 正交**（$\mathbf{u}$ is orthogonal to W）。

R^n 之中所有跟子空間 W 正交的向量所成的集合，

稱爲 W 的**正交補集**（orthogonal complement），記爲 $W^{\perp}$。

$\boxed{\text{例 1}}$ 若 W 是 R^3 的子空間，它是向量 $\mathbf{w}=(2,-3,4)$ 的所有純量乘積所成的集合，

因此 $W=\text{span}\,\{\mathbf{w}\}$，顯然 W 的維數是 1。

與子空間 W 垂直的向量 $\mathbf{u}=(x,y,z)$，必然滿足與 $\mathbf{w}$ 內積爲零，

所以 W 的正交補集是滿足 $2x-3y+4z=0$ 的所有向量所成的集合。

（這就是超平面與法向量）

$\boxed{\text{觀念}}$ 整個空間 R^n 自己的正交補集只有零向量，因此是零子空間。

定理 若 W 是 R^n 的子空間，則

(a) $W^{\perp}$ 也是 R^n 的子空間。

(b) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$。（兩個正交補集之間只有一個共同元素，零向量）

例 2 若 W 是 R^4 的子空間，已知基底是 $\{\mathbf{w}_1 = (1,1,0,1),\ \mathbf{w}_2 = (0,-1,1,1)\}$，求子空間 $W^{\perp}$ 的基底。

$\boxed{\text{定理}}$ 若 W 是 R^n 的子空間，則 $R^n = W \oplus W^\perp$。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 這個定理要理解爲，W 的基底與 $W^\perp$ 的基底合起來會是 R^n 的基底；
此外，R^n 的向量也可以分解成兩個向量相加，一個向量屬於 W 另一個屬於 $W^\perp$。

$\boxed{\text{例 3}}$ 續 $\boxed{\text{例 2}}$，已知子空間 W 的基底是 $\{\mathbf{w}_1 = (1,1,0,1),\ \mathbf{w}_2 = (0,-1,1,1)\}$，
子空間 $W^\perp$ 的基底是 $\{\mathbf{w}_3 = (-1,1,1,0),\ \mathbf{w}_4 = (-2,1,0,1)\}$。給定 $\mathbf{v} = (-1,1,4,3)$，
求向量 $\mathbf{w} \in W$ 與 $\mathbf{u} \in W^\perp$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$。

$\boxed{\text{定理}}$ 若 W 是 R^n 的子空間，則 $(W^\perp)^\perp = W$。

接下來我們把矩陣與向量空間結合，有以下非常重要的結論，
稱爲**線性代數基本定理**（fundamental theorem of Linear Algebra）：

定理 給定 $m \times n$ 矩陣 A，若 $\text{rank}(A) = r$，則

1. A 的列空間（row space）與 A 的零核空間（null space）都是 R^n 的子空間，
   且互為正交補集，列空間的維數是 r，零核空間的維數是 $n - r$。
2. A 的行空間（column space）與 A^T 的零核空間都是 R^m 的子空間，
   （可稱為 A 的 left null space，或者是 A^T 的 null space）
   且互為正交補集，行空間的維數是 r，A^T 的零核空間維數是 $m - r$。

重要觀念 線性代數基本定理告訴我們，給定 $m \times n$ 矩陣 A，
以 A 的列向量的角度分析，可以把 R^n 切成兩個互爲正交補集的子空間，
以 A 的行向量的角度分析，可以把 R^m 切成兩個互爲正交補集的子空間。

例 4 求 A 的列空間、零核空間、行空間、A^T 的零核空間，這四個子空間基底，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{例 5}}$ W 是 R^5 的子空間，且 $W = \text{span}\,\{\mathbf{w}_1 = (2,-1,0,1,2)$、$\mathbf{w}_2 = (1,3,1,-2,-4)$、$\mathbf{w}_3 = (3,2,1,-1,-2)$、$\mathbf{w}_4 = (7,7,3,-4,-8)$、$\mathbf{w}_5 = (1,-4,-1,-1,-2)\}$，求 $W^\perp$ 的基底。

$\boxed{\textbf{例 6}}$ 求 A 的列空間、零核空間、行空間、A^T 的零核空間，這四個子空間基底，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$（這個矩陣在第 6.6 節 $\boxed{\textbf{例 6}}$ 計算過）

$\boxed{\text{應用}}$ **向量投影到子空間的投影向量，以及向量到子空間的距離**

（這個應用其實只是 Gram–Schmidt 過程從另外一個角度來解釋）

先用兩個向量 $\mathbf{u}_1$ 與 $\mathbf{u}_2$ 的狀況來舉例，比較容易理解。

從 Gram–Schmidt 過程知道，首先令 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$，

則與 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ 垂直的向量 $\mathbf{v}_2$ 計算如下

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1\text{，也就是 }\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$$

因此 $\mathbf{u}_2$ 由兩個向量相加，一個是 $\mathbf{v}_2$，它與 $\mathbf{u}_1$ 垂直，

另一個是與 $\left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$，它與 $\mathbf{u}_1$ 平行，

這個向量就是 $\mathbf{u}_2$ 投影到 $\mathbf{u}_1$ 的向量， 也可以說是 $\mathbf{u}_1$ 方向之中與 $\mathbf{u}_2$ 最接近的向量。

與 Gram–Schmidt 完全相同的過程可以推論得知，

給定子空間 W 的正交基底 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$，

則**向量 $\mathbf{v}$ 在子空間 W 的投影向量 $\mathbf{w}$**，記爲 $\text{proj}_W\mathbf{v}$，

$$\mathbf{w} = \text{proj}_W\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\right)\mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_m}{\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_m}\right)\mathbf{w}_m$$

而且**向量 $\mathbf{v}$ 與子空間 W 垂直的分量是 $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$**。

此外，**$\mathbf{v}$ 與子空間 W 的距離就是向量 $\mathbf{u}$ 的長度 $\|\mathbf{u}\|$**。

注意 假如給定的 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 是子空間 W 的正規化正交基底，

則因爲每個向量長度是 1，因此 $\text{proj}_W\mathbf{v}$ 式子之中分母都是 1，更容易算。

重要觀念 也可以配合定理 $R^n = W \oplus W^\perp$ 來理解，$\mathbf{v}$ 可以分解成兩個向量 $\mathbf{w}$ 與 $\mathbf{u}$，

其中 $\mathbf{w}$ 屬於子空間 W，且 $\mathbf{u}$ 與子空間 W 垂直。

重要觀念 假如給定的 $\mathbf{v}$ 就在子空間 W 之中，則 $\text{proj}_W\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 且垂直分量 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$。

$\boxed{\text{例}}$ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 可以生成 R^2，因此任意二維向量一定屬於這個空間，

以 $\mathbf{v} = (3, 1)$ 驗證上述的重要觀念。

$\boxed{\text{例 7 與 8}}$ 若 W 是 R^3 的子空間，且已知 W 的正規化正交基底是 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$，其中

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),\ \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

給定 $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$，求 $\mathbf{v}$ 在子空間 W 的投影向量？$\mathbf{v}$ 到子空間 W 的距離？

$\boxed{\text{定理}}$ **若 W 是 R^n 的子空間，給定任意 R^n 的向量 $\mathbf{v}$，**

則子空間 W 之中與 $\mathbf{v}$ 距離最近的向量是 $\text{proj}_W\mathbf{v}$，且距離是 $\|\mathbf{v} - \text{proj}_W\mathbf{v}\|$。

$\boxed{\text{觀念}}$ 上述定理也可以理解爲，子空間 W 的所有向量之中，當 $\mathbf{w} = \text{proj}_W\mathbf{v}$ 時，

$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ 有最小值。

補充：最小平方解（least squares solution）

給定方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，A 是 $m\times n$ 矩陣。不管是唯一解或是無窮多解，我們都能夠表達，而且前面已經談過，方程組可以看成 A 的行的線性組合：

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

假如方程組無解，代表向量 $\mathbf{b}$ 不屬於 A 的行空間，不能用 A 的行來線性組合。
此時我們想探討的是，有沒有可能找一個解 $\hat{\mathbf{x}}$，使得
$A\hat{\mathbf{x}}$ 雖然沒辦法等於 $\mathbf{b}$，但是 $A\hat{\mathbf{x}}$ 與 $\mathbf{b}$ 的誤差最小？

令 A 的行空間爲子空間 W。由 6.9 節的最後，子空間 W 之中，
與向量 $\mathbf{b}$ 距離最近的向量，就是 $\mathbf{b}$ 在子空間 W 的投影向量，
記爲 $\mathbf{w} = \text{proj}_W \mathbf{b}$，而且 $\text{proj}_W \mathbf{b}$ 一定屬於子空間 W，
因此向量 $\text{proj}_W \mathbf{b}$ 可以用 A 的行來線性組合，
所以剛剛問題的解答，就是要找 $A\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_W \mathbf{b}$，
且最小的誤差就是最短距離，即 $\|\mathbf{b} - \text{proj}_W \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$。

注意到向量 $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ 與子空間 W（也就是 A 的行空間）垂直，
因此與 A 的每一個行向量的內積爲 0。改寫成矩陣相乘的形式，得出

$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$，移項得出**方程組** $(A^TA)\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$

在最後結論之前，我們還需要一個條件來保證我們一定找得到向量 $\hat{\mathbf{x}}$：
（前面也提過，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 無解通常會發生在等式比變數還要多，即 $m > n$ 時）

定理 若 A 是 $m \times n$ 矩陣且 $\text{rank}(A) = n$，則 $(A^T A)$ 是非奇異矩陣，且 rank 也是 n。

重要觀念 我們想要的知道的答案就是方程組 $(A^T A)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ 的解，
若 A 是 $m \times n$ 矩陣且 $\text{rank}(A) = n$，則矩陣 $(A^T A)$ 的反矩陣存在，
因此方程組必然有唯一解，將它記爲向量 $\hat{\mathbf{x}}$，因此 $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$，
也就是給定 $\mathbf{b}$ 之下，$\text{proj}_W\mathbf{b} = \left[A(A^T A)^{-1} A^T\right]\mathbf{b}$。

定義 $(A^T A)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ 稱爲 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的 normal equation。

$\boxed{例}$（簡單的直線預測模式）

新款的手機上市，假設某家店面第 1 週賣出 0 支這個款式的手機，
第 2 週賣 10 支，第 3 週賣 30 支，請用誤差最小的直線預測第 4 週銷售量。

補充：投影矩陣（projection matrix）

在最小平方解的敘述中講到，若 A 是 $m \times n$ 矩陣且 $\operatorname{rank}(A) = n$（此時 $m \geq n$），
對任意 $m \times 1$ 維向量 $\mathbf{b}$，在 A 的行空間裡面與 $\mathbf{b}$ 距離最短的是向量是 $\left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]\mathbf{b}$，
因此我們稱矩陣 $P_1 = \left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]$ 為**投影矩陣**（projection matrix），
矩陣 P_1 可以把 $m \times 1$ 向量投影到 A 的行空間之中。

此外，觀察到向量 $\mathbf{b} - P_1\mathbf{b}$ 必然與 A 的行空間垂直，
寫成矩陣相乘的形式就是，給定任意 $m \times 1$ 向量 $\mathbf{b}$，
則 $\mathbf{b} - \left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]\mathbf{b} = \left[I - A(A^TA)^{-1}A^T\right]\mathbf{b}$ 與 A 的行空間垂直，
我們說矩陣 $\left[I - A(A^TA)^{-1}A^T\right]$ 會把 $m \times 1$ 向量 $\mathbf{b}$
投影到與 A 的行空間正交的子空間，即 left null space of A，
因此矩陣 $P_2 = \left[I - A(A^TA)^{-1}A^T\right]$ 也是一個投影矩陣，
P_2 稱為**矩陣 A 的 orthogonal projection matrix**。

$\boxed{\text{注意}}$ 若給定的向量 $\mathbf{b}$ 屬於 A 的行空間，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，
此時 $P_1\mathbf{b} = \mathbf{b}$ 且 $P_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$。

由完全相同的推導過程，只是改成 $m \leq n$ 的情況，看 A 的列空間。
若 A 是 $m \times n$ 矩陣且 $\text{rank}(A) = m$，則 (AA^T) 爲非奇異矩陣，rank 也是 m。
給定任意 $n \times 1$ 向量 $\mathbf{c}$，在 A 的列空間裡面與 $\mathbf{c}$ 距離最短的向量是 $\left[A(A^TA)^{-1}A^T\right]\mathbf{c}$，
因此 $P_3 = \left[A^T(AA^T)^{-1}A\right]$ 是投影矩陣，它把 $n \times 1$ 向量投影到 A 的列空間之中。

同理，向量 $\mathbf{c} - P_3\mathbf{c}$ 一定與 A 的列空間垂直，
因此 $P_4\mathbf{c} = \left[I - A^T(AA^T)^{-1}A\right]\mathbf{c}$ 與 A 的列空間垂直，
即矩陣 $P_4 = \left[I - A^T(AA^T)^{-1}A\right]$ 把 $n \times 1$ 向量投影到 A 的零核空間，
P_4 稱爲**矩陣 A 的 null space projection matrix**。很重要的是，$A(P_4\mathbf{c}) = \mathbf{0}$。

注意 若 $\mathbf{c}$ 屬於 A 的列空間，則 $P_3\mathbf{c} = \mathbf{c}$ 且 $P_4\mathbf{c} = \mathbf{0}$。

定理 任意的投影矩陣（上述的四個都是），$P^2 = P$ 且 $P^T = P$；
而且任何滿足上面兩個條件的矩陣，一定是投影矩陣。

$\boxed{\text{例}}$ 用 A^T 求投影矩陣 P_1 與 P_2，用 A 求投影矩陣 P_3 與 P_4，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$