線性代數 Linear Algebra

教科書：Introductory Linear Algebra (8th edition) – B. Kolman & D.R. Hill.

參考書：線性代數導論（第八版），呂金河譯。

課程主要內容：

1. 求解聯立方程組。（第一章）
2. 矩陣與向量各種運算。（第一章、第四章）
3. 方陣的特性與行列式。（第一章、第三章）
4. 向量空間、線性獨立、基底、投影。（第六章）
5. 特徵值與特徵向量。（第八章）

這份文件是上課使用的教材，一切的說明以口語化與清晰為主要考量，
嚴謹的數學語言請參見教科書。**請勿隨意轉載**。

編著：翁偉泰　於 2008 年 1 月，修訂於 2011 年 1 月

Chapter 1 線性方程組與矩陣

1.1 線性方程組（linear systems）

在數學中，我們以「等式」來描述各個「變數之間的關係」，例如：

$$\begin{aligned}&3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6\\&y = \sin x\\&y = -x^2 + 1\end{aligned}$$

若變數之間的關係只有一次項，沒有三角、指數、高次方項等其他的關係式，
我們就說這些變數之間存在著「**線性**（linear）關係」。
若有好幾個線性關係必需同時滿足，就稱為線性的聯立方程組，
能**滿足所有等式的變數值**，稱為**聯立方程組的解**（solution）。

$\boxed{\text{例}}$ 以下的方程組只有一個解 $(2,2)$，我們說它是**唯一解**。

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 以下的方程組找不到可以同時滿足全部等式的解，稱為**無解**。

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 方程式 $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ 有許多解，
$(2,3,-4)$ 是它的解，$(3,1,-7)$ 也是，事實上有**無窮多解**。
但也不是隨便寫都是解，例如 $(0,0,0)$ 與 $(1,1,1)$ 就不是。

本課程的主要內容之一，就是學會使用固定的方法（高斯喬登消去法），來求解方程組。
而且學會在無窮多解時，如何最簡潔表示全部的解。

$\boxed{\text{註}}$ 在講義之中，課本的例題會有題號標示如 $\boxed{\textbf{例 3}}$，額外的例題就只有 $\boxed{\text{例}}$。

n 個**變數**（unknowns）的等式一般式如下：
其中 a 與 b 稱為**常數**或**係數**（constant），通常是已知的；未知的變數是 x。

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

n 個變數，m 個等式的聯立方程組一般式如下：

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad\quad \vdots \quad & \qquad\quad\ \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

一定要熟悉**足碼**（subscript）的使用方式，也稱為下標。
第一個足碼一般式是 i，第二個足碼一般式是 j。
看到 a_{ij} 要馬上知道它是第 i 式的第 j 項。

第一個足碼可以代表它是第幾個方程式，例如

$$\begin{array}{ll} \text{第 } 2 \text{ 式是} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{第 } i \text{ 式是} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \end{array}$$

它是橫的看，而且因為有 m 個等式，所以 $1 \leq i \leq m$。

第二個足碼可以代表第幾項，也就是**跟哪一個變數有關**，
例如跟第 2 個變數與第 j 個變數有關的，分別是

$$\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}$$

它是直的看，而且因為有 n 個變數，所以 $1 \leq j \leq n$。

求解方程組的過程，稱為**消去法**（method of elimination）。
在這一小節我們先復習以前學過的方法，將來我們會使用比較簡明的矩陣表達。

例 1 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x + y &= 1000 \\ 0.05x + 0.09y &= 78 \end{aligned}$$

由於變數超過 3 個的時候，x、y、z 就不夠用了，以後在方程組之中，我們將會習慣使用變數 x_i，這樣還有一個很大的好處，看到就知道是第幾個變數，也就是第幾項，例如看到 x_4 就知道是第 4 個變數，也知道它在方程式的第 4 項。

例 2 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 7 \end{aligned}$$

例 3 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \quad 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= \quad 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{例 4}}$ 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 一個式子一般來說最多只能解出一個變數的值，其他的變數值可以任意假設，通常設為 r、s、t 等等，這些變數可以稱為自由變數，此時無窮多解。

在無窮多解之下，假如實際上**只要一個解**，最方便的方法就是**設定自由變數為 0**。

例 求解 $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$

例 5 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \ \ 10 \\ 2x_1 - 2x_2 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 &= \ \ 26 \end{aligned}$$

注意 由前述的觀念，一個式子解一個變數，因此一般而言方程式比變數還要多的時候，常常會無解。但是由這個例子可以看出，還是要求解之後才知道真正的結果。

$\boxed{\textbf{例 6}}$ 求解以下的方程組：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 10 \\
2x_1 - 2x_2 &= -4 \\
3x_1 + 5x_2 &= 20
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{注意}}$ 思考一下，本題與 $\boxed{\textbf{例 2}}$ 都是無解，有沒有什麼不一樣的地方？

重要觀念 消去法的過程只用到三種步驟：

1. 兩個方程式互相交換。
2. 某方程式乘以一個不是 0 的常數。
3. 某方程式乘以一個不是 0 的常數之後，整個式子加到另一個方程式。

不論進行過多少次的消去法步驟，方程式的解仍然是解，也就是說真正的解代入第一式、第二式直到最後一個式子，等式都會成立。

定理 求解任何的聯立方程組都只有三種可能的結果：

1. 無解
2. 唯一解
3. 無窮多解

以下在二維與三維能畫圖的情況，藉由幾何（圖形）幫助理解

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

1.2 矩陣（matrix）（複數是 matrices）

矩陣可以讓我們更簡明表達方程組，不用一直寫每一個變數 x，因為第幾個變數是人為的設定，而且前面談過，看足碼就知道是第幾個變數。當然，矩陣與向量的用途非常多，不限於方程組而以，通常只要是有順序性以及方向性的，都可以應用向量與矩陣。

$\boxed{\text{定義}}$ 一個 $m \times n$ 維（dimension）的**矩陣** A 共有 $m \times n$ 個**元素**（element），是由 m 個**列**（row）與 n 個**行**（column）組成的長方形列陣，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中 A 的第 i 列（ith row of A）是

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq m$$

A 的第 j 行（jth column of A）是

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, 1 \leq j \leq n$$

$\boxed{\text{注意}}$ 列是橫的看，行是直的看，

一定要趕快學會並且要熟悉矩陣之中元素的位置在哪，如何表達。

例如 a_{32} 在哪？a_{51} 在哪？第 3 列是？第 2 行是？

$\boxed{\textbf{定義}}$ 若 $m = n$，此時行跟列的數目一樣，稱為**方陣**（square matrix）。

方陣之中的 a_{11}、a_{22} $\cdots$ a_{nn} 稱為**主對角線**（main diagonal）。

$\boxed{\textbf{定義}}$ 只有一行或者只有一列的矩陣，稱為 **向量**（vector）。

橫的稱為**列向量**（row vector），直的稱為**行向量**（column vector）。

（因此矩陣的許多性質，向量可以直接引用，因為向量就是矩陣）

$\boxed{\text{註}}$ 講義之中，矩陣用大寫英文字母的數學字表示，例如 A、B、C 等，

向量用小寫的英文字母的黑體數學字表示，例如 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 等。

$\boxed{\textbf{例 1}}$ 練習矩陣與向量的維數、元素位置、方陣的主對角線。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{例 2}}$ 列向量與行向量。

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是 4 維列向量，也是 1×4 矩陣

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是 3 維行向量，也是 3×1 矩陣

例 3 四個城市的距離以矩陣表示（注意這個方陣有對稱的特性）

	London	Madrid	New York	Tokyo
London	0	785	3469	5959
Madrid	785	0	3593	6706
New York	3469	3593	0	6757
Tokyo	5959	6706	6757	0

例 4 每週每個工廠各項產品的產量以矩陣表示

	產品 1	產品 2	產品 3
工廠 1	560	340	280
工廠 2	360	450	270
工廠 3	380	420	210
工廠 4	0	80	380

定義 在方陣之中，若只有主對角線上不是零，稱為**對角線矩陣**（diagonal matrix）。

例 7 下列兩個矩陣都是對角線矩陣：

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

定義 對角線矩陣之中，若主對角線上的數值都相同，稱為**純量矩陣**（scalar matrix）。

例 8 下列兩個矩陣都是純量矩陣：

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

定義 所有元素都是 0 的矩陣，稱為**零矩陣**（zero matrix）。

例 下列的矩陣都是零矩陣，但是維數不同。

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 主對角線上元素都是 1 的方陣，稱為**單位矩陣**（identity matrix）。

（單位矩陣一定是方陣，因此只要一個足碼個就可以矩陣大小）

例 下列的矩陣都是單位矩陣：

$$I_{2\times 2} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 所有元素都是 0 的向量，稱為**零向量**（zero vector）。

例 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是零向量。

定義 所有元素都是 1 的向量，記為 **向量 e**。

例 $\mathbf{e}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

定義 兩個**矩陣相等**若且唯若（if and only if）所有的元素都相等。

例 9 若 $A = B$，求未知數 w、x、y、z。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

定義 **矩陣相加**是相同位置的元素加好之後放回原位。**矩陣相減**也是。

例 10 求 $A+B$、$A-B$、$B-A$。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 **純量乘矩陣**是矩陣中的每個元素都乘以給定的係數。

例 續 **例 10**，求 $3A - 2B$。

例 13 若向量 $p = \begin{bmatrix} 18.95 & 14.75 & 8.60 \end{bmatrix}$ 代表三種商品的售價，打八折時售價？

重要觀念 矩陣的相等、相加、相減都是在同樣維數的矩陣與向量之中才有定義，維數大小不同的矩陣，不論相加或相減，標準答案是**無定義**。

定義 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 維數相同，給定任意 n 個實數 $c_1, c_2, \ldots, c_n$，

$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$ 稱為 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的**線性組合**（linear combination）。

例 14(b) 給定 $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$，$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$，$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$，

以及 $c_1 = 2$、$c_2 = -3$、$c_3 = 4$，求線性組合。（14(a) 與 14(c) 請**務必自行練習**）

重要觀念 向量的線性組合定義相同，例如同學的期末成績是平時各項成績的線性組合。

線性組合是本課程的重要觀念，學期結束之前將會再應用許多次。

定義 **矩陣轉置**（transpose）是行與列互換，記為 A^T。

例 15 求以下矩陣的轉置矩陣：（矩陣 C 與 E 請自行練習）

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

注意 若 A 是 $m \times n$ 矩陣，則 A^T 是 $n \times m$。

定理 $(A^T)^T = A$（也就是說轉置之後再轉置，會是自己）

例 續 **例 15**，求 $(A^T)^T$。

1.3 向量內積（inner product）與矩陣乘法

定義 **總和符號** $\sum$（summation）以及慣用足碼 i、j、k。

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{（即第 1 項加到第 } n \text{ 項）}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{（同樣加到第 } n \text{ 項，足碼不影響結果）}$$

但是假如 $m \neq n$，一般而言 $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_j$，加到第 m 項與加到第 n 項結果不同。

例 $a_1 = 3$，$a_2 = 4$，$a_3 = 5$，$a_4 = 8$，求 $a_1 + \cdots + a_4$。

例 若 r_i 是係數，$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i =$

定理 $\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$

定理 $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i)$

假如有需要的話，總合符號可以接連好幾個。例如 A 是 2×3 矩陣如下：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

則 A 的所有元素相加可以表達為

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}=$$

定理（由上述計算可知，總合符號順序不影響加總的最後結果）

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

定義 若向量 **a** 與 **b** 維數相同（假設都是 n 維），則 **a** 與 **b** 的**內積**（inner product）是

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

例 1 求內積：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 2 若 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -4$，求 x。

注意 本課程之中列向量與行向量都會用到，以前慣用列向量的同學請多加熟悉。

注意 為了學習矩陣乘法，請同學**務必學會** **例 2** 的相乘方式，
也就是兩個行向量內積，學會使用相乘，例如 **例 1** 之中，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T \times \mathbf{v}$

例 3 四次考試比重佔 $\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$，考試成績 $\begin{bmatrix} 78 \\ 84 \\ 62 \\ 85 \end{bmatrix}$，問學期成績。

定義 **若 A 是 $m \times p$ 矩陣**，**B 是 $p \times n$ 矩陣**，**A 與 B 相乘才有定義**。

令矩陣 $C = A \times B$，**此時 C 一定是 $m \times n$ 矩陣**（乘號可以省略，即 $C = AB$），
且 C 的第 ij 個元素 c_{ij} 是 A 的第 i 列與 B 的第 j 行的內積。

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

重要觀念 矩陣要能相乘，前面矩陣的第 2 足碼與後面矩陣的第 1 足碼一定要相等，
即**前面矩陣列的元素**要跟**後面矩陣行的元素**一樣多個（也就是定義中的 p）。
假如不滿足這樣的條件，大家可以看出來兩個向量無法內積，此時 $A \times B$ **無定義**。

觀念 $A_{m\times \underline{p}} \times B_{\underline{p}\times n} = C_{m\times n}$，可以想成 p 被消掉。

觀念 向量就是矩陣，因此向量內積其實就是矩陣相乘的一種，因此 n 維向量內積

$$\mathbf{u}_{n\times 1}\cdot\mathbf{v}_{n\times 1} = \mathbf{u}^T_{1\times n} \times \mathbf{v}_{n\times 1} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \text{純量}_{1\times 1}$$

$\boxed{\textbf{例 4}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$\boxed{\textbf{例 5}}$ 求 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的第 $(3,2)$ 元素。

$\boxed{\textbf{例 7}}$ 若 $A=\begin{bmatrix}1 & x & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ y\end{bmatrix}$，且 $AB=\begin{bmatrix}12\\ 6\end{bmatrix}$，求 x 與 y。

$\boxed{\textbf{例 6}}$ 以矩陣表達方程組：

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-\ \ x_3&=2\\ 3x_1 \qquad\quad +4x_3&=5\end{aligned}$$

重要觀念 兩個數字相乘可以互換，例如 $2 \times 5 = 10 = 5 \times 2$，但是矩陣與向量有順序性，因此**兩個矩陣相乘不能任意互換**。互換之後可能的結果如下：

1. 雖然 AB 可以乘，但是 BA 無定義。
   例如 $A_{m \times p}$ 與 $B_{p \times n}$，則 AB 是 $m \times n$ 矩陣，但是 $B_{p \times n} \times A_{m \times p}$ 不能乘。
2. AB 可以乘，BA 也可以乘，但是乘出來的矩陣維數不一樣，不可能相等。
   例如 $A_{m \times n}$ 與 $B_{n \times m}$，則 AB 是 $m \times m$ 矩陣，但是 BA 是 $n \times n$。
3. AB 與 BA 都可以乘，乘出來維數也一樣（這時候 A 與 B 是維數一樣的方陣），但是請**注意**，一般狀況之下，**乘出來結果不同**，$AB \neq BA$。
4. 只有**極少數的情況**，$AB = BA$。

例 8 $A_{2\times 3} \times B_{3\times 4} = (AB)_{2\times 4}$，但是 $B \times A$ 無定義。

例 9 若 $A_{2\times 3}$，$B_{3\times 2}$，則 AB 是 2×2，但是 BA 是 3×3。

例 10 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 AB 與 BA。

例 11 請看教科書，瞭解矩陣乘法是有自然用途的，並不是隨便定義。

例 12 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 $A\times B$ 的第 2 行。

例 13 若 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 $\mathbf{uv}$、$\mathbf{u}^T\mathbf{v}$、$\mathbf{v}^T\mathbf{u}$、$\mathbf{uv}^T$、$\mathbf{vu}^T$。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ **矩陣乘以向量，可以看成矩陣的行的線性組合**。

例如，假設 A 是 $m \times n$ 矩陣，$\mathbf{c}$ 是 $n \times 1$ 向量，則

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$\boxed{\text{例 } 14}$ 練習上述觀念，$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$。

上述觀念可以推廣到兩個矩陣相乘：$A \times B$ 的第 j 行是 A 的行向量的線性組合，線性組合的係數就是 B 的第 j 行的元素。（也就是把 B 看成好幾個像 $\mathbf{c}$ 的行）

例 15 練習上述觀念， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$， $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$。

$\boxed{\textbf{重要觀念}}$ 給定任意 m 等式 n 變數的線性方程組：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

我們都可以用下列的方式，使用矩陣來表達，比較簡潔：

令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，因為

$$
A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}
$$

$\boxed{\textbf{定義}}$ 若方程組使用上述的矩陣方式描述，則 A 稱為**係數矩陣**（coefficient matrix），且方程組可以用以下更簡單的方式描述，稱為**擴增矩陣**（augmented matrix）：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

（**看到擴增矩陣，要知道它讀起來就是方程組**）

例 16 將方程組寫成矩陣表達，以及擴增矩陣。

$$
\begin{aligned}
-2x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 &= 5 \\
2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 7 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

例 17 將擴增矩陣寫成聯立方程組：

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & -1 & 3 & 4 \\
3 & 0 & 2 & 5
\end{array}\right]
$$

定義 將矩陣 A 的某些行與某些列刪掉，剩下的稱為 A 的**子矩陣**（submatrix）。

例 18 將矩陣 A 的第 2 列與第 3 行刪除

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

定義 將矩陣 A 用垂直線與水平線（可以不止一條線）分開成好幾個矩陣，
稱為將矩陣 A **分割**（partitioned），
且這些小矩陣稱為 A 的**分割矩陣**（partitioned matrices）。

定理 **若分割之後維數適當，則分割矩陣的運算結果與不分割運算結果相同。**

例 21 計算 $C = A \times B$ 印證上述定理。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意 擴增矩陣是一種分割矩陣 $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$，滿足上述性質。

1.4 矩陣運算的性質

本小節的學習技巧是只要特別記**與數字運算不同的性質**。

$\boxed{\text{定理}}$（加法性質）若矩陣 A、B、C、D、O 維數相同（O 是零矩陣），則

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. $A+O=A$
4. 若 $A+D=O$ 則 $D=-A$

$\boxed{\text{定理}}$（乘法性質）若矩陣 A、B、C 的維數適當可以相乘，則

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $A(B+C)=AB+AC$
3. $(A+B)C=AC+BC$

定理（單位矩陣性質）若 A 是 $m \times n$ 矩陣，則 $A \times I_n = I_m \times A = A$。

由上述性質可知，零矩陣在加法之中作用像數字 0，單位矩陣在乘法之中作用像數字 1。此外，零矩陣在乘法也有數字 0 的性質，$A \times O = O \times A$，但要注意維數是否能相乘。

定義 若 A 是 n 維方陣，則定義 **A 的 p 次方**是 $A^p = A \times A \times \cdots \times A$（連乘 p 次），且定義零次方是單位矩陣 $A^0 = I_n$（數字也有這個性質 $a^0 = 1$）。

重要觀念 $A^pA^q = A^{p+q}$，且 $(A^p)^q = A^{pq}$，這兩個與數字次方相同的性質成立，但是一般而言 $(AB)^p = (AB)(AB)\cdots(AB) \neq A^pB^p$，除非是 $AB = BA$ 的特例。

重要觀念 數字運算時，若 $ab=0$ 則 a 與 b 其中至少 1 個是 0。但是**矩陣沒有這個性質**。

例 7 驗證上述觀念，$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -2 & 3\end{bmatrix}$，$A\times B=$

重要觀念 數字運算時，若 $ab=ac$ 且 $a\neq 0$，則 $b=c$。但是**矩陣沒有這個性質**。

例 8 驗證上述觀念，$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$， $C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 5 & -1\end{bmatrix}$。

例 9 馬可夫鏈的應用，請參閱教科書。

定理（純量乘矩陣性質）若 r 與 s 是純量，A 與 B 是維數適當可以相乘的矩陣，則

1. $r(sA) = (rs)A$
2. $(r+s)A = rA + sA$
3. $r(A+B) = rA + rB$
4. $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

定理 若矩陣 A 與 B 維數適當可以相乘，則

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(rA)^T = rA^T$

例 11 驗證上述定理之中的性質 3，利用 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$。

定義 若 $A^T = A$，則稱 A 是**對稱矩陣**（symmetric matrix）。

例 12 驗證是否為對稱矩陣，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

注意 只有方陣才有資格討論是不是對稱。

觀念 對稱矩陣可以看成由主對角線照鏡子反射過去。
因此對角線矩陣與單位矩陣一定是對稱矩陣。

1.5 矩陣轉換（matrix transformation）

重要觀念 本節的學習技巧是把「矩陣乘以向量」當作函數來理解。

若變數是 x。假如給定 x 的值，就能得知另一個與 x 相關的值，這樣就是函數的觀念。
過去我們經常使用符號 $f(x)$ 表示 x 的函數，有時也使用 $y=f(x)$ 表示。
變數 x 的所有可能數值所成的集合稱為**定義域**（domain）。
給定 x 值之後，求出來的 $f(x)$ 值稱為給定 x 的**映像**（image），
而函數 $f(x)$ 的所有可能數值所成的集合稱為**值域**（range）。例如：

變數	定義域	函數	值域
x	所有實數 R	$f(x)=3x+1$	所有實數 R
x	所有實數 R	$f(x)=x^2$	正的實數 R^+
x	本班所有同學	$f(x)=$ 學號	本班同學的全部學號

在函數之中，每一個 x 要對應一個特定的 $f(x)$ 值，不能超過一個，也不能沒有對應。
函數最有用也最常用的就是數學函數，主要原因是它們可以作運算。

反過來假如先給定函數值，也能推論得知 x 的值是多少，這樣的函數稱為**一對一函數**。
例如 $f(x)=3x+1$，假如已知 $f(x)=10$，則 x 必然是 3，它是一對一函數；
但是若 $f(x)=x^2$，假如已知 $f(x)=4$，我們無法確定 x 是 2 還是 -2。

給定矩陣 $A_{m\times n}$，依矩陣乘法的定義，若 $\mathbf{u}$ 是 $n\times 1$ 向量，
則 $A\times\mathbf{u}$ 可以定義與計算，且 $A\mathbf{u}$ 會是一個 $m\times 1$ 向量，
因此得知矩陣乘以向量可以看成是一種函數，專有名詞就稱為**矩陣轉換**，
在這個函數之下，給定任意的 n 維向量，都可以得出一個 m 維向量。

例 2(a) $f(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$，給定 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ 或 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

例 2(b) $f(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{u}$，給定 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$

例 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$，函數 $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$，問 $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是否在值域之中？

例 4 與 8 書本的生產成本，使用函數的概念，請參閱教科書。

以下幾個例題在二維平面 R^2 與三維空間 R^3 說明幾個特殊的矩陣轉換，
R^2 與 R^3 可以作圖比較容易理解（參閱教科書）。要注意的是這些概念可以推廣至 R^n。

例 5 $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$，效果是對 x 軸的反射或稱鏡射。

例 6 $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$，效果是投影到 xy 平面。

$\boxed{\textbf{例 7}}$ $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u}$，效果是拉長（$r > 1$ 時）或縮短（$r < 1$ 時）。

$\boxed{\textbf{例 9}}$ $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \mathbf{u}$，效果是逆時鐘旋轉 ϕ 度。

1.6 求線性方程組的解

前面已經談過，方程組可以用擴增矩陣 $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$ 來表達，比較簡潔。
觀察下列幾個方程組，它們的特點？

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

發現了嗎，這些方程組都已經求解完畢，也就是化簡到最後了。
本節要談的就是如何讓方程組化簡到這樣的形式，然後讀出答案。

定義 滿足以下 4 項特性的矩陣，稱為**化約列階梯式**（reduced row echelon form）
（**注意**，化約列階梯式只看 A 部份，$\mathbf{b}$ 是擴增的，是讓我們最後讀出答案而已）

1. 假如有全部為 0 的列，則都在矩陣的最底部。
2. 不全為 0 的列，從左往右看，第 1 個非 0 的值必定是 1，稱為該列的**首項**。
3. 越往底部的列，首項越往右靠。
4. **有首項的行，同一行其他位置都是 0**。

注意 只滿足特性 1、2、3 的矩陣稱為**列階梯式**（row echelon form），在本課程中，為了避免同學困擾，只談化約列階梯式。

例 1 下列矩陣哪些是化約列階梯式？哪些不是？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 假如 A 是方陣而且是化約列階梯式。若它不等於 I_n 則一定有全部為 0 的列。

定義 矩陣的**基本列運算**（elementary row operation）只有三種：

（基本列運算與前述的消去法三種手法完全相同）

1. 兩列互換。
2. 第 r 列乘以不是 0 的係數 c。
3. 第 r 列乘以不是 0 的係數 c 之後，整列加到第 s 列。

例 3 分別練習第 1、3 列交換，第 3 列乘以 $\frac{1}{3}$，與第 2 列乘以 -2 之後加到第 3 列。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

注意 做第 3 種列運算時，原來的列是不變的，如上例中的第 2 列。

定義 若矩陣 B 是由 A 經過有限次的基本列運算而得到的，
則稱矩陣 A 與 B 是**列等價**（row equivalent）的矩陣。

例 4 連續運算第 3 列乘以 2 加到第 2 列，第 2、3 列交換，第 1 列乘以 2。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

定理 列等價有遞移性質：

1. A 與 A 列等價。
2. 若 A 與 B 列等價，則 B 與 A 也是列等價。
3. 若 A 與 B 列等價，且 B 與 C 列等價，則 A 與 C 也是列等價。

由上述定理知道，**例 3** 之中的矩陣都互相列等價，**例 4** 也是。

$\boxed{\textbf{定理}}$ 給定任意矩陣 A，都有**唯一的化約列階梯式矩陣**與它是列等價。

$\boxed{\text{注意}}$ 上述定理告訴我們，在化簡矩陣時，不用擔心運算過程跟別人不同。

$\boxed{\textbf{定理}}$ 若有兩個方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 與 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$，它們的擴增矩陣
$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$ 與 $\left[\begin{array}{c|c} C & \mathbf{d} \end{array}\right]$ 是列等價，則這兩個方程組的解完全相同。

$\boxed{\textbf{推理}}$ 若 A 與 C 是列等價，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 與 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解完全相同。

從小學到現在，求解聯立方程組的方法，理論的基礎就是依據這個定理。
這定理告訴我們，做消去法的任何步驟，不管多少步，矩陣都是列等價，解也完全一樣，
因此以前我們就是利用消去法把方程組化簡，直到 $x = 2$，$y = -1$ 等等。
現在我們學了矩陣以及擴增矩陣表達方程組，至於化簡的方法請見下面的演算法。

演算法 **高斯–喬登消去法**（Gauss–Jordon reduction procedure）

步驟 0 將 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$寫成擴增矩陣 $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$（求 A 的化約列階梯式就不用擴增），令計數器 $k=1$，進入步驟 1。

步驟 1 利用三種基本列運算，使第 k 列的首項是 1，同一行其它為 0。注意到依據化約列階梯式的規定，各列的首項一定是往右下方排列。

步驟 2 重設 $k=k+1$，回步驟 1，直到下方的列無法再運算或者化簡則停止演算。

重要觀念 要特別注意，列交換只能找下方的列，否則會影響到首項往右下方的規定。

例 5 求化約列階梯式：

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

例 8 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \qquad\quad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

例 9 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

例 12 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 11 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 - 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

例 10 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + x_5 \qquad &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned}$$

定義 有解的方程組（包括唯一解與無窮多解）稱為**一致**（consistent）的方程組，
無解的方程組稱為**不一致**（inconsistent）的方程組。

重要觀念 在計算過程中，若發現某一列讀起來是「$0 =$ 某個非零數值」，
就不用再往下計算，這個方程組一定無解。

在工程的應用上，有時候需要在不同的右手邊參數之下，求解同一個方程組，
即同時要求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$，$\cdots$，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$，
此時可以依據列等價定理與分割矩陣性質，將矩陣擴增，一起求解：

$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cccc} C & \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \cdots & \mathbf{d}_k \end{array}\right]$$

這樣就同時求出這些方程組的答案分別為 $\mathbf{d}_1$，$\mathbf{d}_2$，$\cdots$，$\mathbf{d}_k$。

定義 若方程組右手邊 **b** 全部為 0，稱為**齊次方程組**（homogeneous system）。

重要觀念 齊次方程組一定有解，因為所有的 x_j 都代 0 進去時，等式必然全部成立。因此齊次方程組我們關心的是除了 x_j 都是 0 的解之外，有沒有其它的解。

定義 齊次方程組 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 必定是解，稱為**明顯解**（trivial solution），若有其它的解（此時一定無窮多解），稱為**非明顯解**（nontrivial solution）。

例 13 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

例 14 求解以下的方程組：

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 0\\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 0
\end{aligned}$$

定理 在 m 個等式 n 個變數的齊次方程組之中，

當 $m < n$，一定有非明顯解。假如只有明顯解，則一定 $m \geq n$。

定理 假如已知方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 有解，則解的形式可以寫成 $\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_h$，其中 $\mathbf{x}_p$ 是特別解，$\mathbf{x}_h$ 是齊次方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解。

例 15 續 **例 9**，求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 並驗證上述定理。

例 續 **例 8**，求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 並驗證上述定理。

$\boxed{\textbf{推理}}$ 若已知 $\mathbf{x}_p$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解，且某個 $\mathbf{x}_h$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解，
則 $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ 也是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解。

證明：$A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$，得證 $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解。 $\square$

$\boxed{\text{注意}}$ 雖然同學可能會覺得奇怪，為什麼要求解右手邊都是 0 的方程組，
但是齊次方程組在本課程後半段扮演非常重要的角色，請不要因為容易求解就調以輕心。

應用 在二維平面求通過 n 個點的多項式（polynomial interpolation）

在平面的二維座標之中，給定 n 個點的座標 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n)，
必然可以找到一個**唯一**的 $n-1$ 次多項式（**注意**：$n-1$ 次多項式有 n 項）

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x^1 + a_o$$

這個多項式的圖形可以通過這 n 個點。求 a_{n-1}，a_{n-2}，$\cdots$，a_0 的方法直接見例題。

例 16 求通過 $(1, 3)$，$(2, 4)$，$(3, 7)$ 的多項式。

1.7 反矩陣（the inverse of a matrix）（或稱逆矩陣）

矩陣沒有除法的定義，但是方陣之中有一類存在「倒數」的概念。
回憶在數字之中，倒數與自己相乘等於 1，即 $a \times \frac{1}{a} = a \times a^{-1} = 1$。
本小節的討論僅限於方陣。

定義 給定 $n \times n$ 的方陣 A，若存在 $n \times n$ 方陣 B 使得 $A \times B = B \times A = I_n$，
則稱 A 為**非奇異**（nonsigular）或者是**可逆**（invertible）矩陣，
且 B 稱為 A 的反矩陣（inverse of A）。A 的反矩陣記為 A^{-1}，因此 $B = A^{-1}$。
假如使得 $AB = I$ 的矩陣 B 不存在，
則稱 A 為**奇異**（sigular）或者**不可逆**（noninvertible）矩陣。

注意 若 $AB = I$，則 A 與 B 互相為反矩陣。

例 1 計算 $A \times B$ 與 $B \times A$。（注意到這是矩陣相乘可以互換的少數特例之一）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

定理 若 A 有反矩陣，則 A^{-1} 是唯一的。

定理 (反矩陣性質) 若 A、B 都是 n 維的非奇異矩陣，即 A^{-1} 與 B^{-1} 都存在，則

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

推理 若 A_1、A_2、$\cdots$、A_r 都是 n 維的非奇異矩陣，則

$$(A_1A_2\cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

定理 假設 A、B 都是 n 維的非奇異矩陣，

1. 若 $AB = I_n$，則 $BA = I_n$
2. 若 $BA = I_n$，則 $AB = I_n$

$\boxed{\textbf{演算法}}$ 給定方陣 A，求解 A^{-1} 的實際方法：

步驟 0 將 A 擴增一個維數相同的單位矩陣，成為 $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$。

步驟 1 高斯喬登消去法，將擴增矩陣 A 部份轉成化約列階梯式 $\left[\begin{array}{c|c} C & D \end{array}\right]$。

步驟 2 若 C 是單位矩陣，則 $D = A^{-1}$；若 C 不是單位矩陣則 A^{-1} 不存在。

$\boxed{\textbf{例 5}}$ 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 的反矩陣。

例 6 求 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$ 的反矩陣。

定理 A 是非奇異矩陣若且唯若 A 列等價於 I。

前面說方程組一般式是 m 等式 n 變數。若等式與變數一樣多，我們有以下的性質。

定理 **當求解 n 等式 n 變數的方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 時，A 是方陣。**

此時方程組有唯一解若且唯若 A 是非奇異矩陣，且它的解是 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$。

證明：假設 A 是非奇異矩陣，則 A^{-1} 存在。

此時 $A^{-1}(A\mathbf{x})=A^{-1}\mathbf{b}$，即 $(A^{-1}A)\mathbf{x}=\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$，

故得證此時有唯一解 $A^{-1}\mathbf{b}$。（反方向的證明省略） $\square$

這個定理在工程的應用上，若每次求解 $\mathbf{b}_k$ 不同的方程組，只需計算 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}_k$。

例 7 續 **例 5** 求解方程組 $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix}$

定理 若 A 是方陣，則 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非明顯解若且唯若 A 是奇異矩陣。

證明：假如 A 非奇異，A^{-1} 存在，則 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$ 是唯一解，故得證。 $\square$

例 8 續 **例 5**，求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$。

例 9 續 **例 6**，求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$。

觀念 當 A 是方陣時，求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 與求解 A^{-1} 可以同時進行，
只要擴增成為 $\left[\begin{array}{c|c|c} A & \mathbf{b} & I \end{array}\right]$，化簡得 $\left[\begin{array}{c|c|c} C & \mathbf{d} & D \end{array}\right]$，若 C 是單位矩陣，
此時 $\mathbf{d}$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解，且 D 是 A 的反矩陣。