Chapter 4 R^n 之中的向量（n 維向量）

4.1 二維平面上的向量

首先回顧實數線，也就是只有一個變數 x 的一維座標。（只有點稱爲零維）
實數線也是有方向性的，正與負。座標 0 的位置稱爲**原點**（origin）。

定義 **實數 x 與原點 O 的距離**，也就是**絕對值**，定義爲

$$x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

兩點 P 與 Q 之間的距離定義爲 $|P - Q| = |Q - P|$。

例 3 到 -5 之間的距離是

將上述的概念推廣到整個平面，就需要兩條實數線來描述，
最常用的就是**直角座標系**，又稱爲**笛卡兒座標系**（Cartesian coordinate system）。
平面上所有的點所成的集合，稱爲**二維空間**或者**二維平面**，記爲 R^2。

將 2×1 的向量配合直角座標來描述與理解，就是二維向量。

給定向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，可以在二維平面上描出座標 (x, y)，

而兩個座標數值（例如 $(4,5)$）分別稱爲 x 方向與 y 方向的**分量**（component）。
假設描繪出來的點是點 P，則從原點 O 到點 P 的有向線段可以用 $\overrightarrow{OP}$ 表示，
其中 O 稱爲**末端**（tail），點 P 稱爲**頂端**（head）。

同理，先給定座標，例如 $(4,5)$，描出點 P 之後，也可以說向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$。

$\boxed{\textbf{定義}}$ 給定兩個點座標 $P(x_1, y_1)$ 與 $Q(x_2, y_2)$，

則**以 P 為末端 Q 為頂端的向量 $\overrightarrow{PQ}$** 定義為 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$，即 $\begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$。

$\boxed{\textbf{例}}$ $P(3, 2)$，$Q(5, 5)$。

$\boxed{\textbf{例}}$ $P(-3, 1)$，$Q(-1, 4)$。

由這兩個例子畫圖可知，方向相同且長度一樣的向量經過平移，其實就是同樣的向量。

定義 若向量 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，則 $\mathbf{u}$ 的**長度**（length）定義爲 $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

定義 若 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，則**向量長度** $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

上述兩個最常用的 length 都由畢氏定理就可以得證。

注意 在數學之中，直角座標系並不是唯一的座標定義方式，例如極座標。
向量長度也可以有不同的定義，上述的定義是最常用的。
向量長度一般式英文稱爲 norm，還是翻譯爲長度。上述的定義稱爲 2-norm。

例 6 計算 $\mathbf{u}=(2,5)$ 的長度。

例 7 $P(-3,1)$，$Q(-1,4)$，計算 $\overrightarrow{PQ}$ 的長度。

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$、$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ 非零，若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 有倍數關係，稱 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ **平行**（parallel）。

$\boxed{\text{定義}}$ 兩個有向線段假如斜率相同（斜率定義是 x 座標增加一單位時，y 座標的增量），或者都是垂直線（此時斜率是無限大），則稱它們是**平行**。

應用 在二維平面上給定任意三點座標 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$，圍出的三角形面積是

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right| \qquad \text{（二分之一行列式的絕對值）}$$

例 8 計算 $(-1, 4)$，$(3, 1)$，$(2, 6)$ 圍起來的三角形面積。

這種題目建議畫圖之後使用梯形與三角形面積相加減，可以少背一個公式。

$\boxed{\text{觀念}}$ 這個題目若是問平行四邊行面積，則是 $\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|$，

假如是給定四個點，真的圍成平行四邊形的話，任意選三個點座標就可以計算。

重要觀念 向量就是矩陣，因此運算的方式與矩陣相同。

本小節後半部份要注意的是**在圖形上面多理解**，將來推廣到不能畫圖的 n 維向量。

例 9 $\mathbf{u}=(1,2)$，$\mathbf{v}=(3,-4)$，求 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$、$\mathbf{u}-\mathbf{v}$、$3\mathbf{u}$、 $-\frac{1}{2}\mathbf{u}$，畫圖。

例 12 與 13 合成向量在物理上的意義，參閱教科書。

重要觀念 給定兩個非零向量 $\mathbf{u}=(x_1,y_1)$ 與 $\mathbf{v}=(x_2,y_2)$，夾角多大？怎麼算？
從代數定義：

從幾何描述：

定理 **向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 的夾角是**

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

例 14 求 $\mathbf{u}=(2,4)$ 與 $\mathbf{v}=(-1,2)$ 的夾角

$\boxed{\text{定理}}$ 兩個非零向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 互相**垂直**或**正交**（orthogonal）若且唯若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$。

$\boxed{\text{例 } 15}$ 畫圖並計算，驗證上述定理，$\mathbf{u} = (2, -4)$，$\mathbf{v} = (4, 2)$。

$\boxed{\text{定理}}$ 兩個非零向量是**平行**（parallel）若且唯若 $\cos\theta = \pm 1$。

$\boxed{\text{定理}}$（內積性質）若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 是向量，c 是純量，

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$（因為 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$，長度一定正值）；$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ 若且唯若 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
4. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

定義 長度是 1 的向量稱爲**單位向量**（unit vector）。任意向量 $\mathbf{x}$ 方向上面的單位向量是

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$$

例 16 $\mathbf{x} = (-3, 4)$，求 $\mathbf{x}$ 方向上面的單位向量。

重要觀念 在 R^2 之中最常用的單位向量是 $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，
$\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ 垂直，且給定 R^2 任意向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 都可以表示成 $\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ 的線性組合：
$\mathbf{u} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。（教科書之中 $\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ 是使用符號 $\mathbf{i}$ 與 $\mathbf{j}$）

例 17 將 $\mathbf{u} = (4, -5)$ 表達成 $\mathbf{e}_1$ 與 $\mathbf{e}_2$ 的線性組合。

4.2 n 維向量

從第 1.2 節的定義，n **維向量就是** $n \times 1$ **矩陣**，一般式是 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$。

所有的 n 維向量所成的集合，稱 n **維空間**，記爲 R^n。
在數學中，不是隨便的集合都能叫做空間，空間必需符合嚴格的規則，詳見第 6 章。

n 維向量的基本運算都與 1.2 節的矩陣運算以及 4.1 節的二維向量運算相同，包括
相等、相加、相減、內積、乘法、長度、夾角、平行、垂直、單位向量等，不再贅述。

n 維空間之中的向量加法與純量乘法必需以下十個性質都要成立：
（這個定理在第 6 章將會以更一般化的形式再出現一次，到時候要請同學記起來）

定理 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 是 R^n 的任意向量，c、d 是任意實數，則

(α) $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in R^n$（$R^n$ 具備加法封閉性）

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(c) 存在向量 $\mathbf{0}$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(d) 對任意向量 $\mathbf{u}$，存在唯一的向量 $-\mathbf{u}$ 使得 $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(β) $c\mathbf{u}\in R^n$（R^n 具備純量乘法封閉性）

(e) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

(f) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

(g) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

三維空間也可以圖形表示，教科書所有三維的圖形都是右手座標圖

$\boxed{\text{定理}}$（**柯西–舒瓦茲不等式**，Cauchy–Schwarz Inequality）

若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in R^n$，則 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 可以使用以下的方式來理解：（但是要提醒各位，這不是一個正式的證明）

因爲 $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \cos\theta$，且 $|\cos\theta| \leq 1$，所以分母一定比分子的絕對值還要大

$\boxed{\text{定理}}$（**三角不等式**，Triangle Inequality）（三角形兩邊長的和大於第三邊）

若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in R^n$，則 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

$\boxed{\text{定理}}$ 若 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in R^n$ 且不是零向量，

則 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 垂直若且唯若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$，此時 $\cos\theta = 0$，

且 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行若且唯若 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$，此時 $\cos\theta = \pm 1$。

（當 $\cos\theta = 1$ 平行向量可稱爲**同方向**，當 $\cos\theta = -1$ 平行向量可稱爲**反方向**）

$\boxed{\text{重要觀念}}$ 柯西不等式與三角不等式都是在 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行的時候，等號成立。

$\boxed{\text{重要觀念}}$ R^n 之中最常見的單位向量是 $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

每個 $\mathbf{e}_i$ 互相垂直，且任意 R^n 向量都可以寫成 $\mathbf{e}_i$ 的線性組合：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + u_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

$\boxed{\text{例}}$ $\mathbf{u} = (2, 3, 2, -1)$，$\mathbf{v} = (4, 2, 1, 3)$，求 $\mathbf{u} + \mathbf{u}$、$-3\mathbf{u}$、$\mathbf{u} - \mathbf{v}$、 $\|\mathbf{u}\|$、$\|\mathbf{v}\|$、$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$、$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$、夾角、印證柯西不等式、印證三角不等式、將 $\mathbf{u}$ 寫成 $\mathbf{e}_i$ 的線性組合。

4.3 線性轉換（linear transformation）

從 1.5 節，矩陣乘向量是一種線性轉換，若 A 是 $m \times n$ 矩陣，給定任意 n 維向量 $\mathbf{u}$，經過相乘會得出一個 m 維向量 $\mathbf{w}$，即 $A_{m\times n} \times \mathbf{u}_{n\times 1} = \mathbf{w}_{m\times 1}$。
本小節是將線性轉換稍微一般化，從另一個觀點來解釋這個概念。

$\boxed{\text{定義}}$ **線性轉換** L 是一個函數，它把 R^n 之中的每一個向量 $\mathbf{u}$ 映射成為 R^m 向量，並且滿足以下兩個性質：

(a) 對任意 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in R^n$，$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$

(b) 對任意 $\mathbf{u} \in R^n$，$L(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u})$

（這個定義在第 6 章將會以更一般化的形式再出現一次）

假如函數 $T : R^n \longrightarrow R^m$ 不滿足上述性質，則稱 T 是**非線性函數**。

給定 $\mathbf{u}$，則 $L(\mathbf{u})$ 稱為 $\mathbf{u}$ 的**映像**（image），
假設 $L(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$，則所有可能的 $\mathbf{w}$ 所成的集合，稱為**值域**。

定理 給定 $A_{m\times n}$，對於任意 n 維向量 $\mathbf{u}$，$A\mathbf{u}$ 都有定義，而且它必然是 m 維向量。

又由矩陣乘法的性質可知，$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$，且 $A(k\mathbf{u}) = kA(\mathbf{u})$，

確實滿足線性轉換的兩項定義，因此矩陣轉換一定是線性轉換（線性函數）。

例 1 若 L 的定義是 $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1+1 \\ u_2-u_3 \end{bmatrix}$，請判斷 L 是否爲線性轉換。

$\boxed{\text{定理}}$（先線性組合之後再線性轉換 = 先線性轉換之後再線性組合）

若 $L : R^n \longrightarrow R^m$ 是線性轉換，對任意 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in R^n$，任意純量 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，

$$L(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k) = c_1L(\mathbf{u}_1) + c_2L(\mathbf{u}_2) + \cdots + c_kL(\mathbf{u}_k)$$

$\boxed{\text{定理}}$ 若函數 $L : R^n \longrightarrow R^m$ 是線性轉換，則

(a) $L(\mathbf{0}_{R^n}) = \mathbf{0}_{R^m}$（零向量一定映到零向量）

(b) $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v})$

$\boxed{\text{注意}}$ 雖然 $\boxed{\text{例 1}}$ 引用這個定理可以很快知道答案，但本課程還是以定義求解為原則。

推理 任意 R^n 向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ 都可以用 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 線性組合來表示，配合上面線性組合線性轉換定理，若 $L(\mathbf{e}_1)$、$L(\mathbf{e}_2)$、$\cdots$、$L(\mathbf{e}_n)$ 是已知，則 $L(\mathbf{u})=u_1L(\mathbf{e}_1)+u_2L(\mathbf{e}_2)+\cdots+u_nL(\mathbf{e}_n)$

例 2 若函數 $L:R^3\longrightarrow R^2$ 是線性轉換，且已知

$L(1,0,0)=(2,-1)$、$L(0,1,0)=(3,1)$、$L(0,0,1)=(-1,2)$，求 $L(-3,4,2)$

例 3 若 $L:R^2\longrightarrow R^3$ 定義是 $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，問 L 是不是線性轉換？

又 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\3\\-7\end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ 是否在值域之中？

由前面的討論知道，矩陣乘向量一定是線性轉換。但是假如我們先知道線性轉換呢？
以下的定理是描述，每一個線性轉換都可以用矩陣表示，而且是唯一的矩陣。

定理 若 $L: R^n \longrightarrow R^m$ 是線性轉換，則存在唯一的矩陣 A 使得 $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$。

求出 A 的方法，是將 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\cdots$、$\mathbf{e}_n$ 一一代入 L，可以依序求出 A 的每一行。
所找到的矩陣 A，稱爲函數 L 的**標準矩陣表示**（standard matrix representation）。

例 5 若函數 $L: R^3 \longrightarrow R^3$ 是線性轉換，定義是 $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \\ x+z \end{bmatrix}$，

求 L 的標準矩陣表示，並驗證 $L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$。

重要觀念 以後假如談的是向量，不論使用 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$，或者 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$，

或者說它是 R^n 之中的一個點都沒關係，代數性質都完全一樣。