А. Г. Мордкович
П. В. Семенов

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

В двух частях
Часть 1

Учебник
для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

6-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Москва 2009

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6
М79

**На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01–667/5/7д от 29.10.2007)**

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 6-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2009. — 424 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01201-6

Учебник представляет собой первую часть комплекта из двух книг, предназначенных для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10-м классе с профильной подготовкой по математике (вторая часть — задачник).

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, **Семенов** Павел Владимирович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений
(профильный уровень)

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.

Формат 60×90[1]/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,5. Тираж 30 000 экз. Заказ № 0901190.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (495) 783 8284, 783 8285, 783 8286.

Торговый дом «Мнемозина». Тел./факс: 8 (495) 665 6031. E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-346-01200-9 (общ.)
ISBN 978-5-346-01201-6 (ч. 1)

Предисловие для учителя

Издательство «Мнемозина» выпускает учебно-методический комплект для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10-м классе профильной школы, состоящий из следующих книг:

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. Часть 1. Учебник.

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. Часть 2. Задачник.

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. Методическое пособие для учителя.

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках первая книга комплекта. Данным учебником можно пользоваться независимо от того, на какие учебные пособия по алгебре вы делали ставку со своими учениками в 7—9-м классах, — он в определенном смысле самодостаточен. Но все же наиболее комфортно будут чувствовать себя, работая с этой книгой, те учителя, которые используют в основной школе учебные пособия, созданные коллективом авторов под руководством А. Г. Мордковича. Эти учителя привыкли к особенностям стиля изложения, приоритету функционально-графической линии и реализации в нашем курсе алгебры развивающей концепции математического моделирования и математического языка; для них предлагаемый учебник — естественное продолжение курса алгебры основной школы.

Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. Во многих случаях весь материал, который содержится в том или ином параграфе, вы не успеете рассмотреть на уроках, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками. Опираясь на учебник, учитель сам прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что порекомендовать им запомнить, а что просто прочитать дома (и, возможно, обсудить на следующем уроке в классе — в форме беседы).

В тексте приведено много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо знак ■. Часть текста дана петитом; изучать этот материал или нет — дело учителя.

Если сравнить этот учебник с нашим учебником для общеобразовательной школы (речь идет о книге А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа. 10—11 классы. Часть 1. Учебник для общеобразовательных учреждений»), то главы 3, 4, 5, 7 настоящего учебника во многом текстуально совпадают с главами 1—4 упомянутого учебника для общеобразовательной школы: главы 3—5 содержат изложение тригонометрического материала, а глава 7 посвящена производной. Разумеется, в этих четырех главах есть новый материал, которого не было в учебнике базового уровня.

Остальные четыре главы данного учебника являются новыми. Главы 1 и 2 носят характер повторения и расширения известного из курса алгебры основной школы материала о действительных числах и числовых функциях (дополнительный материал — вопросы делимости натуральных чисел, метод математической индукции, периодические и обратные функции), глава 6 посвящена комплексным числам, а глава 8 — элементам теории вероятностей.

В заключение обратим внимание учителя на то, что в конце книги приведено три варианта примерного тематического планирования (из расчета 4, 5 или 6 часов в неделю на изучение курса алгебры и начал анализа в 10-м классе).

Авторы

ГЛАВА 1 Действительные числа

Материал этой главы в значительной степени содержится в курсе алгебры 7—9 классов. Наша цель — повторение, углубление и расширение представлений учащихся о действительных числах.

§ 1. Натуральные и целые числа

Числа, используемые для счета предметов, т. е. числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., называют *натуральными числами*. Натуральные числа можно складывать и перемножать — в результате получится натуральное число. Операции же вычитания и деления на множестве натуральных чисел выполнимы не всегда: например, разность $3 - 5$ не является натуральным числом.

Более широкий класс чисел составляют *целые числа*. К ним относят натуральные числа, число 0 и числа $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$. Над целыми числами выполнимы операции сложения, умножения и вычитания.

Натуральные числа называют также *целыми положительными числами*, а если к множеству натуральных чисел добавить число 0, то получим *множество неотрицательных целых чисел*.

Множество натуральных чисел обозначают буквой N, множество целых чисел — буквой Z. Иногда для множества натуральных чисел более удобным оказывается обозначение Z_+, а для множества целых отрицательных чисел Z_-. Вместо фразы «n — натуральное число» используют запись $n \in N$, а вместо фразы «m — целое число» — запись $m \in Z$. Вообще в математике запись $x \in X$ читают так: *элемент x принадлежит множеству X*, т. е. является элементом множества X. Знак $\in$ называют *знаком принадлежности*.

Понятно, что множество натуральных чисел представляет собой часть множества целых чисел. Для описания этой ситуации также имеется специальное обозначение: $N \subset Z$. Вообще в математике запись $A \subset B$ означает, что множество A представляет собой часть множества B. Впрочем, в этом случае чаще говорят так: *множество A является подмножеством множества B*. Знак $\subset$ называют *знаком включения*.

Далее в этом параграфе мы будем говорить в основном о натуральных числах, не подчеркивая этого каждый раз. Особое внимание уделим операции деления, которая выполнима во множестве натуральных (и целых) чисел далеко не всегда.

Без этой операции мы не смогли бы сокращать дроби, находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных чисел, приводить дроби к общему знаменателю, выполнять различные упрощения алгебраических выражений. Именно поэтому вопросами делимости натуральных чисел математики занимаются очень давно и очень активно.

1. *Делимость натуральных чисел*

Определение 1. Пусть даны два натуральных числа — a и b. Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что **число a делится на число b**. При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, q — *частным*. Число a называют также *кратным числа* b.

Из записи $a = bq$ следует, что b — делитель a и что a кратно b. Впрочем, из той же записи следует, что q — делитель a и что a кратно q. Например, из записи $35 = 5 \cdot 7$ следует, что 35 делится на 5 и 35 делится на 7, что 35 кратно 5 и 35 кратно 7, что 5 — делитель числа 35 (и тогда 7 — частное) и что 7 — делитель числа 35 (и тогда 5 — частное).

Вместо фразы «a делится на b» часто используют запись $a \vdots b$.

Обратите внимание, что запись, например, $8 : 2$ означает требование выполнить деление числа 8 на число 2 (в результате этой операции получится число 4), в то время как запись $8 \vdots 2$ означает, что число 8 делится на 2 (делится *нацело*, делится *без остатка*); речь идет лишь о принципиальной возможности выполнить деление, а само деление не требуется выполнять. Примерно так же обстоит дело со знаком $>$. Если написано $8 > 2$, то это лишь констатация факта: число 8 больше числа 2; при этом не требуется отвечать на вопрос, *на сколько больше*.

Отношение «делится на» распространяется и на множество целых чисел. Например, справедливы утверждения: $(-12) \vdots 3$, $48 \vdots (-6)$, $0 \vdots n$, где n — любое натуральное число. Мы в основном будем говорить о делимости во множестве натуральных чисел.

Опираясь на сформулированное определение, можно получить ряд свойств отношения делимости на множестве натуральных чисел. Этих свойств довольно много, некоторые мы докажем, некоторые предложим доказать вам. Сначала рассмотрим блок простейших свойств (свойства 1—8).

<u>Свойство 1.</u> Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.

Например, из того, что $48 \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $48 \vdots 3$.

<u>Свойство 2.</u> Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a + c) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) \vdots 3$.

<u>Свойство 3.</u> Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $(a + c)$ не делится на b.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что $(12 + 22)$ не делится на 3. В то же время из того, что *каждое слагаемое* не делится *на b*, нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b. Например, 14 не делится на 3, 22 не делится на 3, но $(14 + 22) \vdots 3$.

Свойства 2 и 3 распространяются на сумму любого конечного числа слагаемых следующим образом: *если каждое слагаемое делится на число b, то и сумма делится на b; если каждое слагаемое, кроме одного, делится на b, то сумма не делится на b.*

<u>Свойство 4.</u> Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$ можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

<u>Свойство 5.</u> Если $a \vdots b_1$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1b_2$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $28 \vdots 7$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 28) \vdots (3 \cdot 7)$.

<u>Свойство 6.</u> Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots bc$; если $ac \vdots bc$, то *$a \vdots b$.*

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$ и обратно.

<u>Свойство 7.</u> Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots 3$.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что $ac \vdots b$, нельзя сделать вывод, что или a, или c делится на b. Например, $45 \vdots 15$ и $45 = 9 \cdot 5$, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

<u>Свойство 8.</u> Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(25 \cdot 12 + 271 \cdot 21) \vdots 3$.

Доказательства свойств 1—8.

1. Отношение $a \vdots c$ означает, что существует натуральное число q_1, такое, что выполняется равенство $a = cq_1$. Отношение $c \vdots b$ означает, что существует натуральное число q_2 такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Следовательно, $a = cq_1 = (bq_2)q_1 = b(q_2q_1)$. Обозначим натуральное число q_2q_1 буквой q. Тогда получим: $a = bq$, т. е. $a \vdots b$.

2. Так как $a \vdots b$, то существует число q_1 такое, что выполняется равенство $a = bq_1$. Так как $c \vdots b$, то существует число q_2 такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Тогда $a + c = bq_1 + bq_2 = b(q_1 + q_2)$. Обозначим число $q_1 + q_2$ буквой q. Тогда получим, что $a + c = bq$, т. е. $(a + c) \vdots b$.

3. Предположим противное, что $(a + c) \vdots b$. Тогда $a + c = bq_2$, а из $a \vdots b$ следует, что $a = bq_1$, при этом $q_2 > q_1$. Значит, $c = bq_2 - a = bq_2 - bq_1 = b(q_2 - q_1)$. Это означает, что $c \vdots b$. Но, по условию, c не делится на b. Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно, и $a + c$ не делится на b.

4. Предположим, что c не делится на b. Тогда, по свойству 3, $a + c$ не делится на b, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, и, следовательно, $c \vdots b$.

Свойства 5, 6 и 7 докажите самостоятельно.

8. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то, по свойству 7, $an \vdots b$ и $ck \vdots b$. Тогда, по свойству 2,

$$(an + ck) \vdots b.$$

Свойство 9. Среди n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.

В самом деле, если мы возьмем любые три подряд идущих натуральных числа, например, 8, 9, 10 или 106, 107, 108, то одно число из тройки делится на 3 (для первой тройки это число 9, для второй — число 108). Если мы возьмем любые 10 подряд идущих натуральных чисел, то одно обязательно делится на 10. Если же мы возьмем два подряд идущих четных числа, то одно обязательно делится на 4.

Доказательство свойства 9 будет дано ниже.

Есть ряд любопытных задач, решение которых основано на свойствах делимости натуральных чисел, их будет довольно много в этом параграфе. Пока приведем только один пример.

Пример 1. Доказать, что для любого натурального числа n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8.

Решение. Разложим многочлен $n^5 - 5n^3 + 4n$ на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) =$$
$$= n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$
$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

Рассмотрим полученное произведение. При $n = 1$, $n = 2$ оно обращается в 0, значит, делится на 2, 3, 4, 5, 8. При $n > 2$ имеем произведение пяти последовательных натуральных чисел $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$. Из этих пяти чисел, по свойству 9, одно обязательно делится на 5, хотя бы одно — на 3, хотя бы одно — на 4, и кроме того есть еще хотя бы одно четное число, т. е. число, делящееся на 2. Тогда, по свойствам 5 и 7, произведение этих пяти чисел делится на 2, 3, 4, 5 и на произведение чисел 2 и 4, т. е. делится на 8. ■

2. Признаки делимости

Здесь мы поговорим о конкретных признаках делимости — на 2, 3, 4, 5 и т. д. В формулировках признаков мы используем словесную конструкцию *необходимо и достаточно*. Обычно если из условия A следует условие B (прямая теорема), то математики говорят так: B является *необходимым условием* для A. Если же из условия B следует условие A (обратная теорема), то математики говорят так: B является *достаточным условием* для A. Если же и из A следует B, и из B следует A, математики используют словесную конструкцию *необходимо и достаточно* (или *тогда и только тогда*).

Признак делимости на 2. Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Доказательство. Пусть c — цифра единиц натурального числа p. Любое натуральное число p можно представить в виде $10a + c$, где c — целое неотрицательное число. Так как $10 \vdots 2$, то, по свойству 7, $10a \vdots 2$. Если $c \vdots 2$, то $(10a + c) \vdots 2$ — по свойству 2. Если, напротив, $(10a + c) \vdots 2$, то, по свойству 4, $c \vdots 2$.

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 5 и 10.

Признак делимости на 5. Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т. е. цифра единиц либо 0, либо 5).

Признак делимости на 10. Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

Прежде чем формулировать и доказывать признак делимости на 4, заметим, что любое число p, содержащее не менее трех цифр, можно представить в виде $100a + c$, где c — число, образованное последними двумя цифрами числа p. Например, $275 = 100 \cdot 2 + 75$, $14\,508 = 100 \cdot 145 + 8$.

Признак делимости на 4. *Для того чтобы натуральное число р, содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа р.*

Доказательство. Пусть c — число, образованное двумя последними цифрами числа p. Тогда число p можно представить в виде $100a + c$. Так как $100a \vdots 4$, то, по свойствам 2 и 4, $(100a + c) \vdots 4$ тогда и только тогда, когда $c \vdots 4$.

Например, 12 456 делится на 4, поскольку делится на 4 число 56. А число 7906 не делится на 4, поскольку не делится на 4 число 06, т. е. число 6.

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 25, 8 и 125.

Признак делимости на 25. *Для того чтобы натуральное число р, содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа р.*

Признак делимости на 8. *Для того чтобы натуральное число р, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа р.*

Признак делимости на 125. *Для того чтобы натуральное число р, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа р.*

Признак делимости на 3. *Для того чтобы натуральное число р делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.*

Доказательство. Количество цифр в числе p, как мы увидим, значения не имеет, поэтому будем считать, что в числе p, например, пять цифр: $p = \overline{abcde}$ (черта наверху — условное обозначение того, что $abcde$ рассматривается не как произведение чисел a, b, c, d, e, а как число с соответствующими цифрами).

Имеем:

$$\begin{aligned} p = \overline{abcde} &= 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e = \\ &= (9999 + 1)a + (999 + 1)b + (99 + 1)c + (9 + 1)d + e = \\ &= (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e). \end{aligned}$$

Сумма четырех слагаемых в первых скобках делится на 3 (по свойству 8, поскольку 9, 99, 999, 9999 делятся на 3). Значит, по свойствам 2 и 4, для делимости числа p на 3 необходимо и достаточно, чтобы делилась на 3 сумма пяти слагаемых во вторых скобках — а это как раз сумма цифр числа p.

Аналогично получается признак делимости на 9.

Признак делимости на 9. Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Рассмотрим, например, число 2742. Сумма его цифр равна 15. Число 15 делится на 3 и не делится на 9. Следовательно, число 2742 делится на 3 и не делится на 9.

Пример 2. Найти пятизначное число, кратное 45, если известно, что каждая из трех его средних цифр на 1 больше предыдущей.

Решение. Пусть $\overline{abcde}$ — искомое число. По условию каждая из цифр b, c, d на 1 больше предыдущей. Это означает, что $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$. Далее, по условию, искомое число делится на 45. Это значит (по свойству 1), что оно делится на 5 и на 9. Поскольку число делится на 5, для его последней цифры есть лишь две возможности: либо $e = 0$, либо $e = 5$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Пусть $e = 0$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 0$, т. е. $4a + 6$. По условию искомое число делится на 9. Согласно признаку делимости на 9 это означает, что сумма цифр искомого числа делится на 9.

Итак, $(4a + 6) \vdots 9$. При каких значениях a это возможно? Будем рассуждать так. Поскольку $(4a + 6) \vdots 9$, то, по свойству 1, $(4a + 6) \vdots 3$ или, что то же самое, $((3a + 6) + a) \vdots 3$. Но $(3a + 6) \vdots 3$, значит, и $a \vdots 3$ (по свойству 4). Итак, для первой цифры искомого числа есть следующие возможности: $a = 3$, $a = 6$, $a = 9$. Впрочем, сразу заметим, что $a = 9$ нас не устраивает, так как в этом случае $b = a + 1 = 10$ — не цифра.

Если $a = 3$, то $4a + 6 = 18$, а 18 делится на 9. Значение $a = 3$ нас устраивает.

Если $a = 6$, то $4a + 6 = 30$, а 30 не делится на 9. Значение $a = 6$ нас не устраивает.

Итак, осталась единственная возможность: $a = 3$. Тогда следующие три цифры искомого числа — 4, 5, 6, а само искомое число — 34 560.

2) Пусть $e = 5$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 5$, т. е. $4a + 11$. По условию искомое число делится на 9. Следовательно, $(4a + 11) \vdots 9$. Придавая переменной a последовательные

значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 ($a = 7$ нас уже не устраивает, поскольку в этом случае $d = a + 3 = 10$ — не цифра; тем более нас не устраивают значения $a = 8$, $a = 9$), убеждаемся, что соотношение $(4a + 11) \vdots 9$ выполняется лишь при $a = 4$; в этом случае выражение $4a + 11$ принимает значение 27, т. е. делится на 9.

Если $a = 4$, то следующие три цифры искомого числа — 5, 6, 7, а само искомое число — 45 675.

Ответ: 34 560 или 45 675.

Завершая разговор о делимости натуральных чисел, рассмотрим более сложные признаки делимости на 11, на 7 и на 13.

Проведем вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признак делимости на 11.

Рассмотрим числа 99, 9999, 999 999, 99 999 999 и т. д.; в каждом из этих чисел — четное число девяток. Все эти числа, во-первых, делятся на 11, а во-вторых, представимы в виде, соответственно, $10^2 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, $10^8 - 1$ и т. д.

Рассмотрим теперь числа 11, 1001, 100 001, 10 000 001 и т. д.; в каждом из этих чисел — четное число нулей между единицами. Все эти числа, во-первых, делятся на 11 (поскольку $1001 = 990 + 11$, $100\,001 = 99\,990 + 11$, $10\,000\,001 = 9\,999\,990 + 11$; в записанных суммах первые слагаемые делятся на 11), а во-вторых, представимы в виде, соответственно, $10^1 + 1$, $10^3 + 1$, $10^5 + 1$, $10^7 + 1$ и т. д.

Признак делимости на 11. *Для того чтобы натуральное число делилось на* 11, *необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечетных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на четных местах, делилась на* 11.

Например, для числа 24 569 алгебраическая сумма, о которой идет речь в формулировке признака, имеет вид $9 - 6 + 5 - 4 + 2$, она равна 6; поскольку число 6 не делится на 11, то и число 24 569 не делится на 11.

Для иллюстрации идеи доказательства признака возьмем 8-значное число $\overline{abcdefkm}$.

Имеем:

$$\overline{abcdefkm} = a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 +$$
$$+ f \cdot 10^2 + k \cdot 10 + m = (a \cdot (10^7 + 1) - a) + (b \cdot (10^6 - 1) + b) +$$
$$+ (c \cdot (10^5 + 1) - c) + (d \cdot (10^4 - 1) + d) + (e \cdot (10^3 + 1) - e) +$$
$$+ (f \cdot (10^2 - 1) + f) + (k \cdot (10^1 + 1) - k) + m =$$
$$= a \cdot (10^7 + 1) + b \cdot (10^6 - 1) + c \cdot (10^5 + 1) + d \cdot (10^4 - 1) + e \cdot (10^3 + 1) +$$
$$+ f \cdot (10^2 - 1) + k \cdot (10 + 1) + (m - k + f - e + d - c + b - a).$$

Поскольку, как мы уже ранее установили, числа $10^7 + 1$, $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, $10^2 - 1$, $10^1 + 1$ делятся на 11, делимость числа

$\overline{abcdefkm}$ на 11 целиком и полностью зависит от делимости на 11 алгебраической суммы цифр

$$(m - k + f - e + d - c + b - a).$$

Пример 3. Не выполняя деления, доказать, что число 86 849 796 делится на 11.

Решение. Составим алгебраическую сумму цифр данного числа, начиная с цифры единиц и чередуя знаки «+» и «−»: $6 - 9 + 7 - 9 + 4 - 8 + 6 - 8 = -11$. Число -11 делится на 11, значит, и заданное число делится на 11. ■

Проведем вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признаки делимости на 7 и на 13.

Рассмотрим число $10^3 + 1$, т. е. 1001. Имеем: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Следовательно, $(10^3 + 1) \vdots 7$ и $(10^3 + 1) \vdots 13$.

Рассмотрим число $10^6 - 1$. Имеем: $10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$. Значит, $(10^6 - 1) \vdots 7$ и $(10^6 - 1) \vdots 13$.

Аналогично можно установить, что $10^9 + 1$, $10^{12} - 1$ и т. д. кратны 1001, а поэтому делятся на 7 и на 13. Например,

$$10^9 + 1 = (10^3 + 1)(10^6 - 10^3 + 1),$$

$$10^{12} - 1 = (10^6 - 1)(10^6 + 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)(10^6 + 1).$$

Покажем, как используются проведенные рассуждения для получения признака делимости на 7 (на 13). Возьмем, например, 8-значное число $\overline{abcdefkm}$ и разобьем его на грани, по 3 цифры в каждой грани, начиная с цифры единиц: $\overline{ab}\ \overline{cde}\ \overline{fkm}$. Введем обозначения: $\overline{ab} = x$, $\overline{cde} = y$, $\overline{fkm} = p$. Тогда заданное число $\overline{abcdefkm}$ можно представить в виде

$$\overline{abcdefkm} = x \cdot 10^6 + y \cdot 10^3 + p =$$
$$= (x \cdot (10^6 - 1) + x) + (y \cdot (10^3 + 1) - y) + p =$$
$$= x \cdot (10^6 - 1) + y \cdot (10^3 + 1) + (p - y + x).$$

Поскольку, как мы установили выше, числа $10^6 - 1$ и $10^3 + 1$ делятся на 7 (на 13), делимость числа $\overline{abcdefkm}$ на 7 (на 13) целиком и полностью зависит от делимости на 7 (на 13) алгебраической суммы чисел $(p - y + x)$.

Теперь сформулируем признак делимости натурального числа на 7 и на 13.

Признак делимости на 7 (на 13). ***Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для четных граней, делилась на 7 (на 13).***

Пример 4. Не выполняя деления, доказать, что число 254 390 815 делится на 7 и не делится на 13.

Решение. Разобьем число на грани 254, 390, 815. Составим алгебраическую сумму граней, начиная с последней грани и чередуя знаки «+» и «−»: $815 - 390 + 254 = 679$. Число 679 делится на 7 и не делится на 13, значит, и заданное число делится на 7 и не делится на 13. ■

3. Простые и составные числа

<u>*Определение 2.*</u> Если натуральное число имеет только два делителя — само себя и 1, то его называют **простым числом**; если оно имеет более двух делителей, то его называют **составным числом**. Число 1, имеющее лишь один делитель — 1, не относят ни к простым, ни к составным.

Например, числа 2, 3, 5, 7, 19, 101 — простые, а числа 4, 6, 8, 35, 121 — составные.

Отметим очередное (десятое) свойство делимости чисел.

Теорема 1. ***Любое натуральное число $a > 1$ имеет хотя бы один простой делитель.***

Доказательство. Если a — простое число, то $a = a \cdot 1$, откуда следует, что у заданного числа есть простой делитель a. Пусть теперь a — составное число. Тогда его можно представить в виде $a = a_1c_1$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано. Если оба множителя — составные числа, то рассмотрим число a_1 и представим его в виде $a_1 = a_2c_2$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a_1. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано, если нет, то представим a_2 в виде произведения чисел, меньших, чем a_2, и т. д. Тогда либо на каком-то шаге обнаружится простой множитель, либо придется предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, поскольку все указанные числа меньше a, а потому их — конечное множество. Значит, на каком-то шаге обнаружится простой делитель числа a.

Простые числа обладают многими интересными свойствами. Остановимся на двух из них.

Теорема 2. ***Множество простых чисел бесконечно.***

Доказательство. Предположим противное, что множество простых чисел конечно. Выпишем *все* простые числа: p_1, p_2, p_3, ... , p_k. Составим теперь число a следующим образом: $a = p_1p_2p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. По теореме 1 у числа a есть хотя бы один простой делитель, т. е. число a делится на одно из чисел p_1, p_2, p_3, ... , p_k. Но p_1p_2 ... , p_k делится на каждое из чисел p_1, p_2, ... , p_k, а 1 не делится ни на одно из этих чисел, значит, по свойству 3, число a не делится ни на одно из этих чисел. Получили противоречие, следовательно, сделанное предположение неверно, т. е. на самом деле множество простых чисел бесконечно.

Исследователей всегда интересовал вопрос о распределении простых чисел среди натуральных чисел. Выпишем подряд простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Назовем *расстоянием* между соседними простыми числами их разность. Обратите внимание, что в выписанной последовательности эти расстояния равны, соответственно, 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6. А между соседними простыми числами 119 и 127 расстояние равно 8. Вообще имеет место следующая теорема.

Теорема 3. ***Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперед заданного натурального числа.***

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное число a и докажем, что найдутся два соседних простых числа, расстояние между которыми больше a. Составим натуральное число $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a \cdot (a + 1)$. Оно делится на 2, 3, 4, 5, ..., a, $a + 1$. Тогда число $c + 2$ делится на 2, число $c + 3$ делится на 3, число $c + 4$ — на 4 и т. д., число $c + a$ — на a, число $c + a + 1$ — на $a + 1$ (см. свойство 2 в пункте 1). Это значит, что a подряд идущих чисел $c + 2$, $c + 3$, $c + 4$, ..., $c + a$, $c + a + 1$ — составные, т. е. расстояние между ближайшим к $c + 2$ простым числом (слева) и ближайшим к $c + a + 1$ простым числом (справа) больше a.

4. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится на натуральное число b, то рассматривают *деление с остатком*. Например, при делении числа 37 на число 15 в частном получается 2 (*неполное частное*) и в остатке 7. При этом имеет место соотношение $37 = 15 \cdot 2 + 7$. Вообще справедлива следующая теорема.

Теорема 4. ***Если натуральное число a больше натурального числа b и a не делится на b, то существует, и только одна, пара натуральных чисел q и r, причем $r < b$, такая, что выполняется равенство***

$$a = bq + r. \tag{1}$$

Например, для $a = 37$, $b = 15$ такая пара чисел найдена выше: $q = 2$, $r = 7$ — при этом остаток r меньше делителя b.

Доказательство. По условию $b < a$. Рассмотрим числа b, $2b$, $3b$, $4b$, ... Начиная с некоторого места все они будут больше числа a. Первое из чисел такого вида, которое станет больше числа a, обозначим $(q + 1)b$, т. е. $qb + b$. Следовательно,

$$qb < a < qb + b.$$

Но тогда $a = bq + r$, где $r < b$.

Итак, *существование* интересующей нас пары чисел q, r доказано. Докажем теперь, что такая пара *единственна*.

Предположим, что существуют две различные пары натуральных чисел $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ такие, что

$$a = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b;$$
$$a = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b.$$

Сразу заметим, что если $r_1 = r_2 = r$, то из равенства $bq_1 + r = bq_2 + r$ получим $q_1 = q_2$, т. е. пары $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ одинаковы; если $q_1 = q_2 = q$, то из равенства $bq + r_1 = bq + r_2$ получим $r_1 = r_2$, значит, опять пары одинаковы. Таким образом, если пары различны, то $r_1 \neq r_2$ и $q_1 \neq q_2$.

Будем считать для определенности, что $r_1 > r_2$. Так как $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, то $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$. Это значит, что $r_1 - r_2$ делится на b. Но это невозможно, поскольку натуральное число $r_1 - r_2$ меньше b. Следовательно, сделанное предположение о существовании двух пар натуральных чисел неверно и единственность доказана.

Замечание 2. Если $a \vdots b$, то можно считать, что для чисел a и b выполняется равенство (1), где $r = 0$.

Замечание 3. Иногда удобнее формулу деления с остатком записывать несколько в ином виде. Имеем:

$$a = bq + r = b(q + 1) - (b - r).$$

Поэтому можно записать так:

$$a = bq_1 - r_1, \qquad (2)$$

где $0 < r_1 < b$.

Пример 5. Составить формулу:

а) четного числа;

б) нечетного числа;

в) натурального числа, которое при делении на 3 дает в остатке 2.

Решение. а) Четное число n — это число, которое делится на 2. Значит, $n = 2k$ — хорошо известная вам формула четного числа.

б) Нечетное число n — это число, которое при делении на 2 дает в остатке 1. Воспользовавшись соотношениями (1) или (2), получим формулу нечетного числа: $n = 2k + 1$ или $n = 2k - 1$.

в) Согласно соотношению (1), формула натурального числа n, которое при делении на 3 дает в остатке 2, имеет вид $n = 3k + 2$. То же самое, по формуле (2), можно записать так: $n = 3k - 1$. ■

Пример 6. Доказать, что если натуральное число n при делении на 3 дает в остатке 2, то оно не может быть точным квадратом.

Решение. По условию $n = 3q + 2$. Предположим, что это число является точным квадратом, т. е. существует такое натуральное число a, что $n = a^2$. Для самого числа a есть три возможности: a делится на 3, т. е. имеет вид $a = 3k$; a при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. имеет вид $a = 3k + 1$; a при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. имеет вид $a = 3k + 2$.

Если $a = 3k$, то $n = a^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Это число делится на 3, что противоречит условию.

Если $a = 3k + 1$, то $n = a^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + + 2k) + 1$. Это число при делении на 3 дает в остатке 1, что противоречит условию.

Если, наконец, $a = 3k + 2$, то $n = a^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Это число при делении на 3 дает в остатке 1, что опять-таки противоречит условию.

Итак, в любом возможном случае приходим к противоречию. Таким образом, наше предположение неверно, т. е. заданное число $n = 3q + 2$ не является точным квадратом. ■

Теперь мы можем доказать свойство 9.

Даны n подряд идущих натуральных чисел: $k, k + 1, k + 2, ..., k + + (n - 1)$. Требуется доказать, что среди них имеется число, которое делится на n, причем такое число единственно.

Если $k \vdots n$, то утверждение доказано: само число k уже делится на n, тогда как числа $k + 1, k + 2, ..., k + (n - 1)$ на n не делятся (см. свойство 3 на с. 7).

Если k не делится на n и $k < n$, то среди чисел $k, k + 1, k + 2, ..., k + (n - 1)$ встретится само число n: это будет $k + (n - k)$; только оно и делится на n.

Если k не делится на n и $k > n$, то, по теореме, существует, и только одна, пара натуральных чисел q и r, причем $r < n$, такая, что выполняется равенство $k = nq + r$. Тогда среди чисел $k, k + 1, k + 2, ..., k + (n - 1)$ опять-таки встретится только одно число, делящееся на n, им будет число $nq + r + (n - r)$. В самом деле,

$$nq + r + (n - r) = nq + n = n(q + 1).$$

5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел

Рассмотрим два числа: 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 —$$

их называют *общими делителями чисел* 72 *и* 96, а наибольшее из них называют *наибольшим общим делителем* (*НОД*) *чисел* 72 *и* 96. Итак, НОД(72, 96) = 24.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОД. Например, НОД(45, 75, 120) = 15, НОД(27, 81) = 27.

Определение 3. Два натуральных числа — a и b — называют **взаимно простыми числами**, если у них нет общих делителей, отличных от 1; иными словами, если НОД(a, b) = 1.

Например, взаимно простыми являются числа 35 и 36, хотя каждое из них — составное число. В самом деле, у числа 35 четыре делителя: 1, 5, 7, 35, а у числа 36 девять делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Общих делителей, отличных от 1, у чисел 35 и 36 нет.

Теорема 5. *Если даны натуральные числа a и p, причем p — простое число, то либо a делится на p, либо a и p — взаимно простые числа.*

Рассмотрим два числа — 12 и 18. Выпишем кратные числа 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, ...

Выпишем кратные числа 18:

18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, ...

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

36, 72, 108, 144, ...

их называют *общими кратными чисел* 12 *и* 18, а наименьшее из них называют *наименьшим общим кратным* (*НОК*) *чисел* 12 *и* 18. Итак, НОК(12, 18) = 36.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОК. Например, НОК(20, 30, 40) = 120, НОК(27, 81) = 81.

С понятиями НОД и НОК связаны некоторые свойства делимости.

Свойство 10. Если K — общее кратное чисел a и b, то $K \,\vdots\,$ НОК(a, b).

Доказательство. По условию $K \,\vdots\, a$, $K \,\vdots\, b$. Обозначим НОК(a, b) буквой m. Заметим, что $m \,\vdots\, a$, $m \,\vdots\, b$.

Предположим противное, что K не делится на m. По теореме 4 о делении с остатком число K можно представить в виде $K = mq + r$, где $0 < r < m$. Так как $K \,\vdots\, a$, $m \,\vdots\, a$, то и $r \,\vdots\, a$. Так как, далее, $K \,\vdots\, b$, $m \,\vdots\, b$, то и $r \,\vdots\, b$. Итак, $r \,\vdots\, a$, $r \,\vdots\, b$, следовательно, r — общее кратное чисел a и b, поэтому $r \geqslant m$, вопреки условию $0 < r < m$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Значит, $K \,\vdots\,$ НОК(a, b).

Следующие два свойства делимости являются фактически переформулировками свойства 10.

<u>Свойство 11.</u> Если $a \vdots b_1$ и $a \vdots b_2$, то $a \vdots$ НОК(b_1, b_2).

<u>Свойство 12.</u> Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $\frac{ab}{c}$ — общее кратное чисел a и b.

Доказательство. Так как $a \vdots c$, то $a = cm$, $ab = bcm$, $\frac{ab}{c} = bm$, т. е. $\frac{ab}{c} \vdots b$. Аналогично доказывается, что $\frac{ab}{c} \vdots a$.

Пример 7. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо соотношение $(n^5 - 5n^3 + 4n) \vdots 120$.

Решение. Выше, в примере 1, было доказано, что многочлен $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8. Тогда, по свойству 11, он делится и на НОК чисел 2, 3, 4, 5, 8, т. е. на 120. ■

Теорема 6. ***Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство***

$$\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab. \tag{3}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\text{НОК}(a, b) = k, \quad \text{НОД}(a, b) = d.$$

Так как ab — общее кратное чисел a и b, то, по свойству 10, $ab \vdots k$, поэтому $ab = kc$. Поскольку $k \vdots a$, то $k = am$. Подставив выражение am вместо k в равенство $ab = kc$, получим $ab = amc$, т. е. $b = mc$. Это значит, что $b \vdots c$. Аналогично можно доказать, что $a \vdots c$. Таким образом, c — общий делитель чисел a и b, поэтому c не больше их НОД: $c \leqslant d$. Но тогда $k = \frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}$.

Итак, $\frac{ab}{d} \leqslant k$.

С другой стороны, по свойству 12, $\frac{ab}{d}$ — общее кратное чисел a и b, поэтому оно не меньше их НОК: $\frac{ab}{d} \geqslant k$.

Итак, $\frac{ab}{d} \geqslant k$ и в то же время $\frac{ab}{d} \leqslant k$. Следовательно, $\frac{ab}{d} = k$, т. е. $ab = dk$, что и требовалось доказать.

<u>Следствие.</u> Если числа a и b взаимно простые, то НОК(a, b) = ab.

Отметим очередное свойство делимости.

<u>Свойство 13.</u> Если $a \vdots b_1$, $a \vdots b_2$ и числа b_1, b_2 — взаимно простые, то $a \vdots b_1 b_2$.

Доказательство. По свойству 11 если $a \vdots b_1$ и $a \vdots b_2$, то $a \vdots$ НОК (b_1, b_2). Но по условию b_1, b_2 — взаимно простые числа, значит, НОК$(b_1, b_2) = b_1b_2$ по следствию из теоремы 6. Таким образом, $a \vdots b_1b_2$.

Равенство (3) иногда используют для отыскания наименьшего общего кратного двух чисел.

Пример 8. Найти НОК(276, 282).

Решение. Числа 276 и 282 — четные и делятся на 3, значит, делятся и на 6. Поскольку $282 - 276 = 6$, у заданных чисел не может быть общего делителя, большего, чем 6. Итак, НОД(276, 282) = 6. По формуле (3) получаем:

$$\text{НОК}(276,\ 282) = \frac{276 \cdot 282}{\text{НОД}(276,\ 282)} = \frac{276 \cdot 282}{6} =$$

$$= (276 : 6) \cdot 282 = 12\,972. \qquad \blacksquare$$

Отметим еще два свойства делимости, из которых второе является следствием первого.

<u>Свойство 14.</u> Если числа a и p взаимно простые и $ac \vdots p$, то $c \vdots p$.

Доказательство. Так как a и p — взаимно простые числа, то НОК$(a, p) = ap$. По условию $ac \vdots p$; кроме того, $ac \vdots a$. Следовательно, ac — общее кратное чисел a и p и, по свойству 10, оно делится на НОК(a, p). Таким образом, $ac \vdots ap$, откуда, по свойству 6, следует, что $c \vdots p$.

<u>Свойство 15.</u> Если p — простое число и $ac \vdots p$, то хотя бы одно из чисел a, c делится на p.

6. Основная теорема арифметики натуральных чисел

Основной теоремой арифметики называют совокупность двух утверждений, одно из которых (теорему 7) мы докажем, а другое (теорему 8) приведем без доказательства.

Теорема 7. ***Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.***

Например, $35 = 5 \cdot 7$, $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $169 = 13 \cdot 13$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Доказательство. Пусть a — составное число. По теореме 1 оно имеет простой делитель, т. е. число a можно представить в виде $a = a_1p_1$, где p_1 — простое число. Если при этом и a_1 — простое число, то теорема доказана. Если a_1 — составное число, то, по тому же свойству, число a_1 можно представить в виде $a_1 = a_2p_2$, где p_2 —

простое число. Если при этом и a_2 — простое число, то теорема доказана. Если a_2 — составное число, то продолжим указанный процесс. Тогда либо на каком-то шаге получится разложение числа a на простые множители, либо придется предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, так как все указанные числа меньше a, поэтому их — конечное множество. Следовательно, на каком-то конечном шаге получится разложение числа a на простые множители.

Теорема 8. ***Если натуральное число разложено на простые множители, то такое разложение единственно; иными словами, любые два разложения числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.***

При разложении числа на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример 9. Разложить на простые множители число:
а) 3780; б) 7056.

Решение. а) Имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
3780 & 2 \\
1890 & 2 \\
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Итак, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

б) Имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
7056 & 2 \\
3528 & 2 \\
1764 & 2 \\
882 & 2 \\
441 & 3 \\
147 & 3 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Итак, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. ■

В обоих случаях мы составили так называемые *канонические разложения*, когда простые множители располагаются в порядке возрастания.

Знание канонических разложений позволяет без особого труда находить наибольший общий делитель или наименьшее общее кратное заданных чисел.

Пример 10. Вычислить НОД(3780, 7056) и НОК(3780, 7056).

Решение. В примере 7 мы видели, что $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, а $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Значит, НОД(3780, 7056) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$, а НОК(3780, 7056) $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840$. ■

Используя каноническое разложение натурального числа a на простые множители можно выяснить вид любого делителя числа a и подсчитать общее число всех его делителей.

Пусть, например, $a = 504$. Тогда $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Следовательно, каноническое разложение любого делителя d числа a на простые множители может содержать не более трех множителей, равных 2, не более двух множителей, равных 3, и не более одного множителя, равного 7. Значит, каноническое разложение любого делителя d числа a на простые множители имеет вид $d = 2^s \cdot 3^r \cdot 7^t$, где s, r, t — целые неотрицательные числа, причем $0 \leqslant s \leqslant 3$, $0 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если, например, взять $s = r = t = 0$, то получим: $d = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^0 = 1$; если взять $s = 1$, $r = 0$, $t = 1$, то получим: $d = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^1 = 14$; если взять $s = 2$, $r = 2$, $t = 1$, то получим: $d = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$. Числа 1, 14, 252 — делители числа 504.

Понятно, что, перебирая все возможные значения показателей s, r, t, мы получим все без исключения делители данного числа a. Поскольку число s может принимать четыре различных значения (0, 1, 2, 3), число r — три различных значения (0, 1, 2) и число t — два различных значения, то общее число всех делителей числа 504 равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

В общем случае, если составлено каноническое разложение на простые множители натурального числа a: $a = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, — то любой делитель d числа a имеет вид $d = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, где $r_1, r_2, r_3, \ldots r_k$ — целые неотрицательные числа, причем $0 \leqslant r_1 \leqslant s_1$, $0 \leqslant r_2 \leqslant s_2$, $0 \leqslant r_3 \leqslant s_3$, ..., $0 \leqslant r_k \leqslant s_k$.

При этом общее число всех делителей натурального числа a равно произведению $(s_1 + 1)(s_2 + 1)(s_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (s_k + 1)$.

§ 2. Рациональные числа

Рациональные числа — это числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число. Множество рациональных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{Q}$. Выполняется соотношение $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, поскольку любое целое число m можно представить в виде $\frac{m}{1}$. Итак, можно сказать, что рациональные числа — это все целые числа, а также положительные и отрицательные обыкновенные дроби. Естественно, что любая десятичная дробь как частный случай обыкновенной дроби тоже является рациональным числом.

Для рациональных чисел кроме указанной выше записи $\frac{m}{n}$ можно использовать другой вид записи, который мы обсудим ниже.

Рассмотрим, например, целое число 5, обыкновенную дробь $\frac{7}{22}$ и десятичную дробь 8,377. Целое число 5 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби 5,0000... . Десятичную дробь 8,377 также можно записать в виде бесконечной десятичной дроби 8,377000... . Для числа $\frac{7}{22}$ воспользуемся методом «деления углом»:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,7{,}000000\ldots & \underline{22\qquad\quad} \\
\;\;\underline{66} & 0{,}31818\ldots \\
\;\;-\,40 & \\
\;\;\;\;\underline{22} & \\
\;\;-\,180 & \\
\;\;\;\;\underline{176} & \\
\;\;\;\;-\,40 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{22} & \\
\;\;\;\;\;\;180 & \\
\;\;\;\;\;\;\ldots &
\end{array}
$$

Как видите, начиная со второй цифры после запятой происходит повторение одной и той же группы цифр: 18, 18, 18, ... Таким образом, $\frac{7}{22} = 0{,}3181818\ldots$. Короче это записывают так: 0,3(18). Повторяющуюся группу цифр после запятой называют *периодом*, а саму десятичную дробь — *бесконечной десятичной периодической дробью.*

Между прочим, и число 5 можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Для этого надо в периоде записать число 0:

$$5 = 5{,}00000\ldots = 5{,}(0).$$

Так же обстоит дело и с числом 8,377:

$$8{,}377 = 8{,}377000\ldots = 8{,}377(0).$$

Чтобы все было аккуратно, говорят так: 8,377 — конечная десятичная дробь, а 8,377000... — бесконечная десятичная дробь.

Вообще *любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*

Докажем это утверждение. Но сначала поясним идею доказательства на конкретном примере. Рассмотрим дробь $\frac{5}{28}$. Начнем делить 5 на 28 «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
-\,5{,}0000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}1 \\
22 &
\end{array}$$

22 — это первый остаток. Продолжим деление:

$$\begin{array}{l|l}
-\,5{,}0000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}17 \\
-\,220 & \\
\underline{196} & \\
24 &
\end{array}$$

24 — это второй остаток. Точно так же будут получаться третий, четвертый и т. д. остатки:

$$\begin{array}{l|l}
-\,5{,}00000000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}17857142\ldots \\
-\,220 & \\
\underline{196} & \\
-\,240 & \\
\underline{224} & \\
-\,160 & \\
\underline{140} & \\
-\,200 & \\
\underline{196} & \\
-\,40 & \\
\underline{28} & \\
-\,120 & \\
\underline{112} & \\
-\,80 & \\
\underline{56} & \\
24 & \\
\ldots &
\end{array}$$

Выпишем последовательно получавшиеся остатки:

22, 24, 16, 20, 4, 12, 8, 24, ...

Все они меньше делителя 28, значит, рано или поздно какой-то остаток повторится и, начиная с этого места, в частном начнет повторяться одна и та же группа цифр. В нашем примере этим остатком является число 24, а повторяющаяся группа состоит из шести цифр: $\frac{5}{28} = 0,17(857142)$.

Теперь нетрудно провести доказательство в общем виде. Пусть дана дробь $\frac{m}{n}$. Деля m на n, будем последовательно получать остатки, каждый из которых меньше числа n. Значит, с какого-то места встретится остаток, который уже был ранее. После этого остатки начнут повторяться, соответственно в частном начнет повторяться одна и та же группа цифр.

Верно и обратное: *любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.*

Пример. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:

а) 1,(23); б) 1,5(23).

Решение. а) Пусть $x = 1,(23)$, т. е. $x = 1,232323\ldots$. Умножим x на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержатся две цифры, надо, чтобы запятая передвинулась вправо на две цифры, а для этого число x нужно умножить на 100. Получим:

$$100x = 123,232323\ldots.$$

Следовательно,

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 100x = 123,232323\ldots \\ x = 1,232323\ldots \end{array} \\ \hline 100x - x = 123,232323\ldots - 1,232323\ldots, \end{array}$$

т. е. $99x = 122$, откуда находим: $x = \frac{122}{99}$.

Итак, $1,(23) = \frac{122}{99} = 1\frac{23}{99}$.

б) Пусть $x = 1,5(23) = 1,5232323\ldots$. Сначала умножим x на 10, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой: $10x = 15,23232323\ldots$. Теперь число $10x$ умножим на 100 — тогда запятая сместится ровно на один период вправо: $1000x = 1523,23232323\ldots$. Имеем:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1000x = 1523,232323\ldots \\ 10x = 15,232323\ldots \end{array} \\ \hline 990x = 1508; \end{array}$$

$$x = \frac{1508}{990} = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}.$$

Итак, $1{,}5(23) = 1\frac{259}{495}$.

Ответ: а) $1{,}(23) = 1\frac{23}{99}$; б) $1{,}5(23) = 1\frac{259}{495}$.

Замечание. Фактически, говоря в этом примере об обращении бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную, мы пользовались не очень строгими правдоподобными рассуждениями. Например, полагаясь на интуицию, мы распространили правило умножения числа 10^n на конечную десятичную дробь на случай бесконечной десятичной дроби. Строгие рассуждения связаны с понятием суммы бесконечной геометрической прогрессии, о чем пойдет речь в главе 7.

Завершим параграф дополнительными сведениями о периодических дробях.

1. Если период дроби начинается сразу после запятой, то дробь называют ***чисто-периодической***, если не сразу после запятой, — ***смешанно-периодической***. Например, 1,(23) — чисто-периодическая дробь, а 1,5(23) — смешанно-периодическая дробь.

2. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ такова, что в разложении ее знаменателя на простые множители содержатся лишь числа 2 и 5, то запись числа $\frac{m}{n}$ в виде десятичной дроби представляет собой конечную десятичную дробь; если в указанном разложении есть другие простые множители, то получится бесконечная десятичная дробь.

3. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ такова, что в разложении ее знаменателя на простые множители не содержатся числа 2 и 5, то запись числа $\frac{m}{n}$ в виде десятичной дроби представляет собой чисто-периодическую десятичную дробь; если в указанном разложении, наряду с другими простыми множителями, есть 2 или 5, то получится смешанно-периодическая десятичная дробь.

4. У периодической десятичной дроби период может быть любой длины, т. е. может содержать любое количество цифр. Например, $\frac{7}{9} = 0{,}(7)$ — в периоде одна цифра; $\frac{53}{99} = 0{,}(53)$ — в периоде две цифры; $\frac{14\,772}{99\,999} = 0{,}(14772)$ — в периоде 5 цифр. Вообще

справедливо утверждение: правильная дробь вида $\frac{m}{999...9}$, где в знаменателе содержится n девяток, представляется в виде чисто-периодической дроби

$$0,\underbrace{(00...0m)}_{n\ \text{цифр}}.$$

Например, $\frac{1}{999} = 0,(001)$, $\frac{17}{999} = 0,(017)$, $\frac{254}{999} = 0,(254)$, $0,(25) = \frac{25}{99}$, $2,(0134) = 2\frac{134}{9999}$.

5. Если смешанно-периодическая дробь имеет вид

$$0,\underbrace{00...0}_{k\ \text{нулей}}\ \underbrace{(m)}_{n\ \text{цифр в периоде}},$$

то ее представление в виде обыкновенной дроби таково:

$$\frac{m}{\underbrace{99...900...0}_{n\ \text{девяток},\ k\ \text{нулей}}}.$$

Например, $0,0(23) = \frac{23}{990}$, $2,00(0013) = 2\frac{13}{999\,900}$.

6. Периодическую дробь с девяткой в периоде можно заменить конечной десятичной дробью (иными словами, бесконечной дробью с нулем в периоде). Например,

$$0,(9) = \frac{9}{9} = 1;\ 0,00(9) = \frac{9}{900} = \frac{1}{100} = 0,01;$$

$$0,72(9) = 0,72 + 0,00(9) = 0,72 + 0,01 = 0,73;\ 1,274(9) = 1,275.$$

К дробям с девяткой в периоде мы вернемся еще раз в § 4.

7. Используя указанные факты, можно предложить другой способ обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь. Рассмотрим его на примере, который был ранее решен:

$$1,5(23) = 1,5 + 0,0(23) = 1\frac{1}{2} + \frac{23}{990} = 1\frac{259}{495}.$$

§ 3. *Иррациональные числа*

Из курса алгебры основной школы вам известно, что не все числа, с которыми приходится встречаться в математике, являются рациональными. Известно вам и то, что в математике не принято говорить «нерациональное число», обычно используют термин *«иррациональное число»*. Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* — разум (буквальный перевод: «рациональное число — разумное число», «иррациональное число — неразумное число»; впрочем, так говорят и в реальной жизни: «он поступил рационально» — это значит, что он поступил разумно; «так действовать нерационально» — это значит, что так действовать неразумно).

Пример. Доказать, что:
а) $\sqrt{5}$ — иррациональное число;
б) $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число.

Решение. а) Предположим, что $\sqrt{5}$ — рациональное число. Ясно, что это не натуральное число, а потому $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, где $n > 1$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь; значит, числа m и n взаимно простые. Так как $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, то $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$, т. е. $m^2 = 5n^2$. Последнее равенство означает, что $m^2 \vdots n^2$, и, следовательно, по свойству 1 § 1, $m^2 \vdots n$, т. е. $m \cdot m \vdots n$. Теперь воспользуемся свойством 15. Согласно этому свойству, если произведение двух чисел делится на n и один из множителей взаимно прост с n, то второй множитель делится на n. Получается, что $m \vdots n$. Но ведь мы предполагали, что дробь $\frac{m}{n}$ несократимая. Получили противоречие, значит, неверным было предположение, будто бы есть несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой верно равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Вывод: такой дроби нет, поэтому $\sqrt{5}$ иррациональное число.

б) Предположим, что $\sqrt[3]{6}$ — рациональное число. Ясно, что это не натуральное число, а потому $\sqrt[3]{6} = \frac{m}{n}$, где $n > 1$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 6$, $m^3 = 6n^3$, поэтому $m^3 \vdots n^3$. Рассуждая далее, как в пункте а), заключаем, что $\frac{m}{n}$ — сократимая дробь, вопреки сделанному предположению. Таким образом, наше предположение неверно, поэтому $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число. ■

Рассмотрим иррациональное число $\sqrt{5}$. Оно заключено между числами 2 и 3, поскольку $2^2 = 4$, что меньше 5, а $3^2 = 9$, что больше 5. Можно уточнить: $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$; в самом деле, $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$, а $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$. Можно еще уточнить: $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$; в самом деле, $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$, а $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$. Можно продолжить уточнения оценок числа $\sqrt{5}$ и определить границы для третьего десятичного знака после запятой. Имеем: $2{,}236^2 = 4{,}999696$, это меньше 5; $2{,}237^2 = 5{,}004167$, это больше 5. Итак, $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.

Точно так же можно определить границы для четвертого знака после запятой, для пятого знака и т. д. Выполняется приближенное равенство $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ (или $\sqrt{5} \approx 2{,}237$ — в зависимости от следующего десятичного знака). Если же предположить, что для числа $\sqrt{5}$ выписаны все последующие десятичные знаки, то можно использовать запись $\sqrt{5} = 2{,}236...$ (при этом каждый следующий знак в десятичной записи числа записывается тогда, когда он стабилизируется в десятичных приближениях числа по недостатку и по избытку; например, верно двойное неравенство $2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$, поэтому мы и записали выше: $\sqrt{5} = 2{,}236...$). Это бесконечная десятичная дробь. В предыдущем параграфе мы уже встречались с бесконечными десятичными дробями, но все они были периодическими и выражали рациональные числа. Иррациональное число выражается *бесконечной десятичной непериодической дробью*.

Вообще **иррациональным числом** называют бесконечную десятичную непериодическую дробь. Например,

$$0{,}123...9101112...192021...$$

(здесь после запятой выписаны подряд идущие натуральные числа) — иррациональное число, причем оно так устроено, что сравнительно несложно назвать любой десятичный знак. Скажем, на 47-м месте после запятой находится цифра 8 (проверьте!).

Иррациональные числа встречаются не только при извлечении квадратного или кубического корня (как это было в рассмотренном примере), но и во многих других случаях, в чем вы не раз убедитесь в дальнейшем. А пока приведем только один пример. Если длину любой окружности разделить на ее диаметр, то в частном получится иррациональное число 3,141592... . Для этого числа в математике введено специальное обозначение — π (буква греческого алфавита «пи»; версия происхождения этого обозначения такова: с буквы π начинается греческое слово *периферия* —

окружность). Иррациональность числа π была доказана в 1766 г. немецким математиком И. Ламбертом.

Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме, разумеется, деления на 0) в результате приводит к рациональному числу. Это и понятно, ведь сумма (разность, произведение, частное) обыкновенных дробей есть обыкновенная дробь (все логично, ведь рациональные числа — «разумные» числа). А как обстоит дело с иррациональными числами? Оказывается, ничего определенного сказать нельзя (что тоже логично, ведь иррациональные числа — «неразумные» числа). Смотрите: $\sqrt{5}$ — иррациональное число, а $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ — рациональное число, т. е. произведение двух иррациональных чисел оказалось рациональным числом; $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$ — иррациональные числа, и их произведение, т. е. $\sqrt{15}$ — иррациональное число. То же относится к сложению, вычитанию, делению иррациональных чисел.

А что будет, если в операции участвуют одно рациональное и одно иррациональное число, какое «пересилит»? Оказывается, «пересилит» иррациональное число. Рассмотрим такой пример: дано рациональное число 3 и иррациональное число $\sqrt{2}$; составим их сумму $3 + \sqrt{2}$. Предположим, что это — рациональное число r, т. е. $3 + \sqrt{2} = r$. Тогда $\sqrt{2} = r - 3$, а $r - 3$ — рациональное число (как разность двух рациональных чисел). Получается, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно, это число иррациональное. Получили противоречие, таким образом, наше предположение неверно, т. е. $3 + \sqrt{2}$ — иррациональное число. Аналогично можно доказать, что $3 - \sqrt{2}$ — иррациональное число. Если эти иррациональные числа сложить, то получим: $\left(3 + \sqrt{2}\right) + \left(3 - \sqrt{2}\right) = 6$ — рациональное число; если их перемножить, то получим: $\left(3 + \sqrt{2}\right)\left(3 - \sqrt{2}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 - 2 = 7$ — также рациональное число.

Поскольку извлечение корня из положительного числа чаще всего приводит к иррациональному числу, условились алгебраическое выражение, в котором присутствует операция извлечения корня, называть *иррациональным*.

§ 4. Множество действительных чисел

1. Действительные числа и числовая прямая

Если множество рациональных чисел объединить с множеством иррациональных чисел, то получится *множество действительных чисел*. Множество действительных чисел обычно обозначают буквой $\boldsymbol{R}$; используют также символическую запись

$(-\infty; +\infty)$. Множество действительных чисел можно описать так: *это множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей*; конечные десятичные дроби и бесконечные десятичные периодические дроби — рациональные числа, а бесконечные десятичные непериодические дроби — иррациональные числа.

Каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Верно и обратное: каждая точка M координатной прямой имеет действительную координату. Покажем (схематически), как определяют координату точки.

Пусть на отрезке $[0; 1]$ координатной прямой находится интересующая нас точка $M(x)$. Разделим отрезок на 10 равных частей, назовем их *сегментами первого ранга* (рис. 1). Пересчет этих сегментов слева направо начинаем с нуля: Δ_0, Δ_1, ... , Δ_9, (Δ — прописная буква греческого алфавита *дельта*). Предположим, что $M \in \Delta_4$. Это значит, что $x = 0{,}4...$. Разделим отрезок Δ_4 на 10 равных частей — это *сегменты второго ранга*, обозначим их Δ_{40}, Δ_{41}, ... , Δ_{49}, Предположим, что $M \in \Delta_{40}$. Это значит, что $x = 0{,}40...$. Так постепенно находят последовательные знаки бесконечной десятичной дроби, служащей координатой точки M.

А как будет обстоять дело с координатой точки, служащей концом какого-либо сегмента? Пусть $\bar{x} = 0{,}73$. Это — координата общего конца сегментов второго ранга Δ_{72} и Δ_{73} (см. рис. 1), сегментов третьего ранга Δ_{729} и Δ_{730}, сегментов четвертого ранга Δ_{7299} и Δ_{7300} и т. д. Следовательно, можно записать: $\bar{x} = 0{,}72(9)$ или $\bar{x} = 0{,}73(0)$. Таким образом, $0{,}72(9) = 0{,}73(0)$, что мы уже установили другим способом в конце § 2.

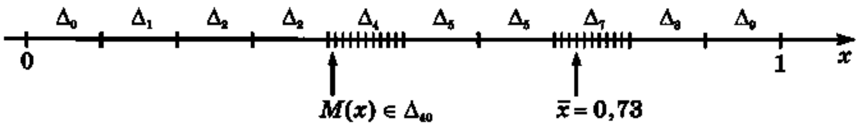


Рис. 1

Обычно говорят так: между множеством R действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Координатная прямая есть геометрическая модель множества действительных чисел; по этой причине для координатной прямой часто используют термин *числовая прямая*.

Для действительных чисел a, b, c выполняются привычные законы: $a + b = b + a$; $ab = ba$; $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a(bc) = (ab)c$; $(a + b)c = ac + bc$ и т. д.

Выполняются и привычные правила:

— произведение (частное) двух положительных чисел — положительное число;

— произведение (частное) двух отрицательных чисел — положительное число;

— произведение (частное) положительного и отрицательного числа — отрицательное число.

2. Числовые неравенства

Действительные числа можно сравнивать друг с другом, используя следующее определение.

Определение. Говорят, что действительное число a **больше** (**меньше**) действительного числа b, если их разность $a - b$ — положительное (отрицательное) число. Пишут: $a > b (a < b)$.

Из этого определения следует, что всякое положительное число a больше нуля (поскольку разность $a - 0 = a$ — положительное число), а всякое отрицательное число b меньше нуля (поскольку разность $b - 0 = b$ — отрицательное число).

Итак, $a > 0$ означает, что a — положительное число;

$a < 0$ означает, что a — отрицательное число;

$a > b$ означает, что $a - b$ — положительное число, т. е. $a - b > 0$;

$a < b$ означает, что $a - b$ — отрицательное число, т. е. $a - b < 0$.

Наряду со знаками строгих неравенств ($<$, $>$), используют знаки *нестрогих* неравенств:

$a \geqslant 0$ означает, что a *больше или равно* 0, т. е. a — *неотрицательное число* (положительное или 0), или что a *не меньше* 0;

$a \leqslant 0$ означает, что a *меньше или равно* 0, т. е. a — *неположительное число* (отрицательное или 0), или что a *не больше* 0;

$a \geqslant b$ означает, что a больше или равно b, т. е. $a - b$ — неотрицательное число, или что a не меньше b; $a - b \geqslant 0$;

$a \leqslant b$ означает, что a меньше или равно b, т. е. $a - b$ — неположительное число, или что a не больше b; $a - b \leqslant 0$.

Например, для любого числа a верно неравенство $a^2 \geqslant 0$; для любых чисел a и b верно неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Впрочем, для сравнения действительных чисел необязательно каждый раз составлять их разность и выяснять, положительна она или отрицательна. Можно сделать соответствующий вывод, сравнивая записи чисел в виде десятичных дробей или используя геометрическую модель — числовую прямую.

Пример 1. Сравнить числа:

а) $\frac{22}{5}$ и 4; в) $-3,7$ и $\sqrt{2}$;

б) $2 + \sqrt{5}$ и 5; г) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{7}$.

Решение. а) Имеем: $\frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5} > 0$; значит, $\frac{22}{5} > 4$.

б) Имеем: $2 + \sqrt{5} = 2 + 2{,}236... = 4{,}236... < 5$; таким образом, $2 + \sqrt{5} < 5$.

в) $-3{,}7$ — отрицательное число, $\sqrt{2}$ — положительное число. Любое отрицательное число меньше любого положительного числа, значит, $-3{,}7 < \sqrt{2}$.

г) $-\sqrt{5} = -2{,}23...$; $-\sqrt{7} = -2{,}64...$ Точка $-2{,}64...$ располагается на координатной прямой левее точки $-2{,}23...$, значит, $-\sqrt{5} > -\sqrt{7}$. ■

Пример 2. Расположить в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{2};\ -\sqrt{3};\ -2;\ -\frac{\pi}{2};\ \sqrt{17};\ \pi.$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, а $\sqrt{17} \approx 4{,}12$. Теперь ясно, что заданные числа расположатся в порядке возрастания следующим образом: -2, $-\sqrt{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{17}$. ■

Числовые неравенства обладают рядом свойств.

<u>Свойство 1.</u> Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство. По условию $a > b$, т. е. $a - b$ — положительное число. Аналогично, так как $b > c$, делаем вывод, что $b - c$ — положительное число.

Сложив положительные числа $a - b$ и $b - c$, получим положительное число. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, $a - c$ — положительное число, т. е. $a > c$, что и требовалось доказать.

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел — числовую прямую. Неравенство $a > b$ означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b, а неравенство $b > c$ — что точка b расположена правее точки c (рис. 2). Но тогда точка a расположена на прямой правее точки c, т. е. $a > c$.

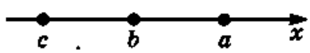


Рис. 2

Свойство 1 обычно называют *свойством транзитивности* (образно говоря, от пункта a мы добираемся до пункта c как бы транзитом, с промежуточной остановкой в пункте b).

Свойство 2. *Если* $a > b$, то $a + c > b + c$.

Свойство 3. *Если* $a > b$ *и* $m > 0$, *то* $am > mb$;
если $a > b$ *и* $m < 0$, *то* $am < mb$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем:

если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить;

если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить ($<$ ***на*** $>$, $>$ ***на*** $<$).

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число m, так как деление на m — это умножение на $\frac{1}{m}$.

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $a > b$ на -1, получим: $-a < -b$. Это значит, что ***если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства.***

Свойство 4. *Если* $a > b$ *и* $c > d$, *то* $a + c > b + d$.

Доказательство. Так как $a > b$, то, согласно свойству 2, $a + c > b + c$. Аналогично, так как $c > d$, то $c + b > d + b$.

Итак, $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Тогда, в силу свойства транзитивности, получаем, что $a + c > b + d$.

Свойство 5. *Если* a, b, c, d *— положительные числа и* $a > b$, $c > d$, *то* $ac > bd$.

Доказательство. Так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Аналогично, так как $c > d$ и $b > 0$, то $cb > db$.

Итак, $ac > bc$, $bc > bd$. Тогда, согласно свойству транзитивности, получаем, что $ac > bd$.

Обычно неравенства вида $a > b$, $c > d$ (или $a < c$, $c < d$) называют **неравенствами одинакового смысла**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ — **неравенствами противоположного смысла**. Свойство 5 означает, что ***при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.***

Свойство 6. *Если* a *и* b *— неотрицательные числа и* $a > b$, *то* $a^n > b^n$, *где* n *— любое натуральное число.*

Смысл свойства 6 заключается в следующем: ***если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести***

в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.

<u>Дополнение к свойству 6.</u> Если n — нечетное число, то для любых чисел a и b из неравенства $a > b$ следует неравенство того же смысла $a^n > b^n$.

Вы обратили внимание на то, что в приведенных доказательствах мы, по сути дела, пользовались всего двумя идеями? Первая идея — составить разность левой и правой частей неравенства и выяснить, какое число получится: положительное или отрицательное. Вторая идея — для доказательства нового свойства использовать уже известные свойства. Так поступают и в других случаях доказательств числовых неравенств: например, так можно доказать те из перечисленных выше свойств, которые мы здесь привели без доказательства (советуем вам в качестве упражнения попробовать восполнить этот пробел).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Пусть a и b — положительные числа и $a > b$. Доказать, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Решение. Рассмотрим разность $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Имеем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

По условию a, b, $a - b$ — положительные числа. Следовательно, $\frac{b-a}{ab}$ — отрицательное число, т. е. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$, откуда следует, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

Пример 4. Пусть a — положительное число. Доказать, что $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Решение. Рассмотрим разность $\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$. Имеем:

$$\frac{a^2+1}{a} - 2 = \frac{a^2-2a+1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Заметим, что $a + \frac{1}{a} = 2$ тогда и только тогда, когда $a = 1$; если же $a \neq 1$, то

$$a + \frac{1}{a} > 2. \qquad \blacksquare$$

Пример 5. Пусть a и b — неотрицательные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Решение. Составим разность левой и правой частей неравенства:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Заметим, что $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ тогда и только тогда, когда $a = b$; если же $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. $\blacksquare$

Число $\frac{a+b}{2}$ называют **средним арифметическим** чисел a и b; число $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b. Таким образом, неравенство, доказанное в примере 5, означает, что ***среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.*** Это неравенство иногда называют **неравенством Коши** в честь французского математика XIX в. Огюста Коши.

Замечание. Неравенство Коши имеет любопытное геометрическое истолкование. Пусть дан прямоугольный треугольник и пусть высота h, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a и b (рис. 3). В геометрии доказано, что

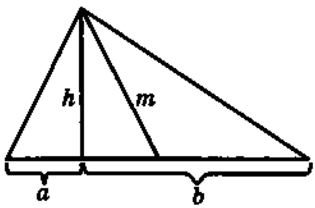


Рис. 3

$h = \sqrt{ab}$. А что такое $\frac{a+b}{2}$? Это длина половины гипотенузы. Но из геометрии известно, что медиана m прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, как раз равна половине гипотенузы. Таким образом, неравенство Коши означает, что длина медианы, проведенной к гипотенузе (т. е. $\frac{a+b}{2}$), не меньше длины высоты, проведенной к гипотенузе (т. е. $\sqrt{ab}$).

Свойства числовых неравенств позволяют сравнивать действительные числа по величине, оценивать результат.

Пример 6. Сравнить числа:

а) $\pi + \sqrt{10}$ и $4 + \sqrt{11}$; б) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ и $2 + \sqrt{5}$.

Решение. а) Применим к двум верным неравенствам одинакового смысла: $\pi < 4$ и $\sqrt{10} < \sqrt{11}$ — свойство 4 о почленном сложении; получим:

$$\pi + \sqrt{10} < 4 + \sqrt{11}.$$

б) Здесь $\sqrt{3} < 2$, $\sqrt{6} > \sqrt{5}$, так что воспользоваться свойством 4 не удастся. Поступим по-другому. Введем обозначения: $a = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $b = 2 + \sqrt{5}$; предположим (наугад), что $a > b$, т. е. что $\sqrt{3} + \sqrt{6} > 2 + \sqrt{5}$. Числа a и b положительны, поэтому, по свойству 6, из $a > b$ следует $a^2 > b^2$, т. е.

$$(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 > (2 + \sqrt{5})^2;$$
$$3 + 2\sqrt{18} + 6 > 4 + 4\sqrt{5} + 5;$$
$$9 + 2\sqrt{18} > 9 + 4\sqrt{5}.$$

По свойству 2 к обеим частям последнего неравенства можно прибавить число -9, затем, по свойству 3, разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 2 и, наконец, снова возвести в квадрат обе части неравенства:

$$9 + 2\sqrt{18} - 9 > 9 + 4\sqrt{5} - 9;$$
$$2\sqrt{18} > 4\sqrt{5};$$
$$\sqrt{18} > 2\sqrt{5};$$
$$18 > 20.$$

Но на самом деле $18 < 20$. Выполняя сделанные преобразования в обратном порядке, получаем:

$$18 < 20;$$
$$\sqrt{18} < 2\sqrt{5};$$
$$9 + 2\sqrt{18} < 9 + 4\sqrt{5};$$
$$(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 < (2 + \sqrt{5})^2;$$
$$\sqrt{3} + \sqrt{6} < 2 + \sqrt{5}.$$

■

П р и м е р 7. Известно, что $2{,}1 < a < 2{,}2$; $3{,}7 < b < 3{,}8$. Найти оценки для числа:

а) $2a$; в) $a + b$; д) a^2;

б) $-3b$; г) $a - b$; е) $\frac{1}{a}$.

Р е ш е н и е. а) Умножив все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ на одно и то же положительное число 2, получим:

$$2 \cdot 2{,}1 < 2a < 2 \cdot 2{,}2, \text{ т. е. } 4{,}2 < 2a < 4{,}4.$$

б) Умножив все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -3, получим неравенство противоположного смысла:

$$-3 \cdot 3{,}7 > -3b > -3 \cdot 3{,}8, \text{ т. е. } -11{,}4 < -3b < -11{,}1$$

(вместо записи вида $a > b > c$ мы перешли к более употребительной записи $c < b < a$).

в) Сложив почленно заданные двойные неравенства одинакового смысла, получим:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 2{,}1 < a < 2{,}2 \\ 3{,}7 < b < 3{,}8 \end{array} \\ \hline 5{,}8 < a + b < 6{,}0. \end{array}$$

г) Сначала умножим все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -1, получим неравенство противоположного смысла:

$$-3{,}7 > -b > -3{,}8, \text{ т. е. } -3{,}8 < -b < -3{,}7.$$

Далее имеем:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 2{,}1 < a < 2{,}2 \\ -3{,}8 < -b < -3{,}7 \end{array} \\ \hline -1{,}7 < a - b < -1{,}5. \end{array}$$

д) Поскольку все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ положительны, то, возведя их в квадрат, получим:

$$2{,}1^2 < a^2 < 2{,}2^2,$$

т. е.

$$4{,}41 < a^2 < 4{,}84.$$

е) В примере 1 мы установили, что если a и b — положительные числа, то из неравенства $a < b$ следует неравенство противоположного смысла: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Поэтому из двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ следует, что

$$\frac{1}{2{,}1} > \frac{1}{a} > \frac{1}{2{,}2},$$

т. е.

$$\frac{5}{11} < \frac{1}{a} < \frac{10}{21}. \qquad \blacksquare$$

3. Числовые промежутки

Всякое множество, состоящее из действительных чисел, называют *числовым множеством*. Среди числовых множеств выделяют числовые промежутки. Возьмем два числа — a и b (пусть $a < b$) — и отметим их точками на координатной прямой (рис. 4, *а*). Возьмем произвольную точку x прямой, лежащую между a и b; тогда $x > a$ и $x < b$, т. е. $a < x < b$.

Множество всех действительных чисел x, каждое из которых удовлетворяет двойному неравенству $a < x < b$, обозначают $(a;\ b)$ и называют *интервалом*. На рисунке 4, *а* дано геометрическое изображение интервала.

Рассмотрим теперь множество таких чисел x, что $a \leqslant x \leqslant b$. Его обозначают $[a;\ b]$ и называют *отрезком*. На рисунке 4, *б* дано геометрическое изображение отрезка.

Обратите внимание на то, что концы отрезка изображены закрашенными кружками, тогда как концы интервала — светлыми кружками (рис. 4, *а* и 4, *б*). На рисунках 4, *в*, *г* изображены *полуинтервалы* $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$, т. е. множества таких чисел x, которые удовлетворяют соответственно неравенствам: $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$.

Множество всех таких чисел x, что $x > a$, обозначают $(a;\ +\infty)$ и называют *открытым лучом*. Геометрическое изображение от-

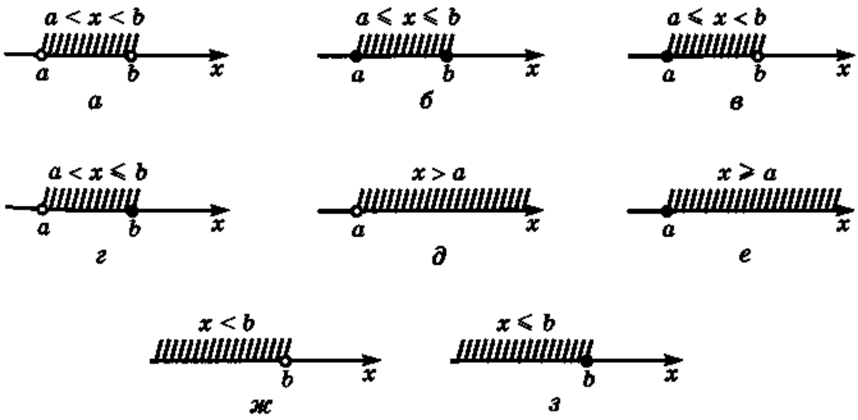


Рис. 4

крытого луча дано на рисунке 4, *д*. Множество всех таких чисел x, что $x \geqslant a$, обозначают $[a; +\infty)$ и называют *лучом*; геометрическое изображение луча дано на рисунке 4, *е*. Открытый луч может также иметь вид $(-\infty; b)$, а луч — вид $(-\infty; b]$ (рис. 4, *ж* и *з*).

4. Аксиоматика действительных чисел

Формирование понятия действительного числа шло в течение долгого времени. Строгие теории действительных чисел были созданы лишь во второй половине XIX в. В этих теориях строились конкретные реализации таких чисел в виде бесконечных десятичных дробей или другими способами.

Однако для математики существенную роль играет не способ введения действительных чисел, а свойства множества R действительных чисел. Можно перечислить основные свойства, из которых вытекают все остальные свойства этих чисел. Эти основные свойства определяют множество R действительных чисел аксиоматически, являются **аксиомами**, определяющими это множество.

Основными операциями на множестве R являются сложение и умножение: любым двум действительным числам a и b ставятся в соответствие числа $a + b$ (сумма a и b) и ab (произведение a и b). Кроме того, на множестве действительных чисел вводится отношение порядка «a меньше b ($a < b$)» или, что то же самое, «b больше a ($b > a$)». Особую роль играют числа 0 и 1.

Числа, большие нуля, называют *положительными*, а числа, меньшие нуля, — *отрицательными*.

Аксиомы сложения. Для любых a, b, c справедливы следующие свойства:

I. $a + b = b + a$.

II. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

III. $a + 0 = a$.

IV. *Для любого числа a существует число b, такое, что $a + b = 0$.* Это число b называют *противоположным* числу a и обозначают $-a$.

Аксиома IV позволяет ввести операцию **вычитания** на множестве действительных чисел: под разностью $a - b$ понимается сумма $a + (-b)$.

Аксиомы умножения. Для любых a, b, c справедливы следующие свойства:

V. $ab = ba$.

VI. $(ab)c = a(bc)$.

VII. $a \cdot 1 = a$.

VIII. *Для любого отличного от нуля числа a существует число b, такое, что $ab = 1$.* Это число b называют *обратным* числу a и обозначают $\frac{1}{a}$.

IX. $(a + b)c = ac + bc$.

Аксиома VIII позволяет ввести операцию деления на множестве действительных чисел: под $\frac{a}{b}$ понимается произведение $a \cdot \frac{1}{b}$ (где $b \neq 0$).

Аксиомы порядка. Для любых a, b, c справедливы следующие свойства:

X. *$a < a$ — ложное высказывание.*

XI. *Если $a \neq b$, то или $a < b$, или $b < a$.*

XII. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$* (транзитивность).

XIII. *Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.*

XIV. *Если $a > b$, то $a + c > b + c$.*

XV. *Если $a > 0$ и $b > 0$, то существует такое натуральное число n, что $na > b$* (аксиома Архимеда).

Перечисленные 15 аксиом выполняются и в множестве Q рациональных чисел. Основное отличие множеств Q и R друг от друга состоит в том, что в множестве Q есть «дыры» (например, «дыра» для числа $\sqrt{2}$, «дыра» для числа π; иными словами, промежуток от рационального числа a до рационального числа b ($a < b$) не заполнен сплошь рациональными числами), тогда как множество R таких «дыр» не имеет, оно сплошное, или, как говорят, непрерывное. Эта непрерывность множества R выражается в виде специальной аксиомы. Прежде чем сформулировать эту аксиому непрерывности, введем несколько новых понятий.

Числовое множество M назовем *ограниченным сверху*, если существует такое число p, что для любого $x \in M$ справедливо неравенство $x \leqslant p$. Число p называют *верхней границей* множества M. Числовое множество M назовем *ограниченным снизу*, если существует такое число m, что для любого $x \in M$ справедливо неравенство $x \geqslant m$. Число m называют *нижней границей* множества M.

Например, множество всех отрицательных чисел ограничено сверху; в качестве верхней границы может выступать любое положительное число и число 0. Множество всех положительных чисел ограничено снизу; в качестве нижней границы может выступать любое отрицательное число и число 0.

Сформулируем теперь аксиому непрерывности множества действительных чисел.

XVI. *Если числовое множество ограничено сверху, то среди его верхних границ есть наименьшая.*

Поясним смысл этой аксиомы. Если бы мы выбросили из множества R какое-нибудь число a, то все множество R распалось бы на две части: множество A, состоящее из чисел, меньших a, и множество B, состоящее из чисел, бóльших a. Множество A ограничено сверху, но среди его верхних границ (эти границы образуют множество B) нет наименьшей (этой наименьшей границей должно служить как раз «выкинутое» число a). Таким образом, в «проколотом» множестве R аксиома непрерывности не выполняется. Иными словами, аксиома непрерывности означает, что в множестве R нет «проколов», нет «дыр».

Перечисленные аксиомы, как и аксиомы геометрии, не доказывают. Они являются обобщением многовекового опыта практической деятельности человека. Роль указанных аксиом в алгебре аналогична роли аксиом в геометрии: как в геометрии теоремы выводятся из аксиом геометрии, так и алгебраические утверждения выводятся из аксиом действительных чисел.

В качестве примера покажем, как из аксиом выводится правило раскрытия скобок при умножении:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Обозначим $c + d$ через m, тогда $(a + b)(c + d) = (a + b)m$. Согласно аксиоме IX, $(a + b)m = am + bm$, а по аксиоме V, $am = ma$, $bm = mb$. Значит,

$$(a + b)(c + d) = ma + mb = (c + d)a + (c + d)b.$$

Применив к числам $(c + d)a$ и $(c + d)b$ аксиому IX, получим соответственно: $ca + da$ и $cb + db$ или, что то же самое (по аксиоме V), $ac + ad$ и $bc + bd$. Итак, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Покажем еще, что если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.

Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем: $ac - bc = (a - b)c$ (по аксиоме IX). По условию c — положительное число и $a - b$ — положительное число. Согласно аксиоме XIII, произведение двух положительных чисел есть положительное число, и, значит, $(a - b)c > 0$. Таким образом, $ac - bc > 0$. Но тогда, по аксиоме XIV, $(ac - bc) + bc > 0 + bc$, т. е. $ac > bc$.

Пусть A и B — два непустых числовых множества, причем для любого a из A и любого b из B справедливо неравенство $a \leqslant b$. В таком случае будем говорить, что *множество A лежит слева от множества B.*

Например, множество $\mathbf{R}_-$ отрицательных действительных чисел лежит слева от множества $\mathbf{R}_+$ положительных действительных чисел. Множество $X = (3; 5)$ находится слева от множества $Y = [6; 9]$.

Пусть множество A расположено слева от множества B. Тогда множество A ограничено сверху (любой элемент множества B является верхней границей для A), а значит, по аксиоме непрерывности, для него имеется наименьшая верхняя граница c. Это число c обладает следующим свойством: если $a \in A$ и $b \in B$, то $a \leqslant c \leqslant b$. Значит, число c лежит как бы между множествами A и B, разделяет эти множества. Поэтому его называют *разделяющим числом.*

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Если множество A лежит слева от множества B, то существует число, разделяющее эти множества (принцип разделяющего числа).

Так, в рассмотренных выше примерах имеем: множества $\mathbf{R}_-$ и $\mathbf{R}_+$ разделяются числом 0; множества X и Y разделяются любым числом, заключенным между 5 и 6. Уже эти примеры показывают, что разделяющее число может быть единственным, но могут существовать и бесконечно много разделяющих чисел. Это зависит от того, насколько близки друг к другу рассматриваемые множества: если в них есть сколь угодно близкие элементы, то разделяющее число единственно. Точнее этот результат формулируется следующим образом.

Критерий единственности разделяющего числа. *Если множество A лежит слева от множества B, то для единственности разделяющего числа необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любого заданного положительного числа* ε («эпсилон» — буква греческого алфавита) *найдутся такие a из A и b из B, что* $b - a < \varepsilon$.

Доказательство этого утверждения мы здесь не приводим.

§ 5. Модуль действительного числа

<u>*Определение.*</u> **Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $|x| = x$; модулем отрицательного действительного числа x называют противоположное число: $|x| = -x$.**

Короче записывают так:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Например,

$$|5| = 5; \ |-5| = -(-5) = 5; \ |-3{,}7| = 3{,}7;$$

$$\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2 \text{ (так как } \sqrt{5} - 2 > 0);$$

$$\left|\sqrt{5} - 3\right| = -\left(\sqrt{5} - 3\right) = 3 - \sqrt{5} \text{ (так как } \sqrt{5} - 3 < 0).$$

Свойства модулей:

1. $|a| \geqslant 0$.
2. $|ab| = |a|\,|b|$.
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
4. $|a|^2 = a^2$.
5. $|a| = |-a|$.
6. $|a| \geqslant a$.
7. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Докажем последние два свойства.

Доказательство свойства 6. Если $a \geqslant 0$, то, по определению, $|a| = a$. Если $a < 0$, то, по определению, $|a| = -a$.

Но при $a < 0$ выполняется неравенство $-a > a$, т. е. $|a| > a$. Итак, в любом случае выполняется неравенство $|a| \geqslant a$.

Доказательство свойства 7. По свойству 6 $|ab| \geqslant ab$, а по свойству 2 $|ab| = |a||b|$. Значит, $|a||b| \geqslant ab$, откуда получаем, что $2|a||b| \geqslant 2ab$, $a^2 + 2|a||b| + b^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2$. Поскольку $a^2 = |a|^2$, $b^2 = |b|^2$ (по свойству 4), последнее неравенство можно переписать так: $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \geqslant a^2 + 2ab + b^2$, т. е. $(|a| + |b|)^2 \geqslant (a + b)^2$. Но $(a + b)^2 = |a + b|^2$, значит, $(|a| + |b|)^2 \geqslant |a + b|^2$, откуда и получаем требуемое неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$.

Вернемся к множеству $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и его геометрической модели — числовой прямой. Отметим на прямой точки a и b (два действительных числа a и b), обозначим через $\rho(a; b)$ расстояние между точками a и b (ρ — буква греческого алфавита «ро»). Это расстояние равно $b - a$, если $b > a$ (рис. 5, *а*), оно равно $a - b$, если $a > b$ (рис. 5, *б*), наконец, оно равно нулю, если $a = b$.

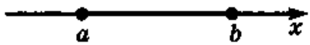


Рис. 5, *а*

Рис. 5, *б*

Все три случая охватываются одной формулой:

$$\boxed{\rho(a; b) = |a - b|.}$$

Пример. Решить неравенства:

а) $|x - 2| < 3$;

б) $|5 - 3x| \geqslant 6$.

Решение. а) Переведем неравенство $|x - 2| < 3$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) < 3$, т. е. удалены от точки 2 на расстояние меньшее, чем 3. На расстояние, равное 3, удалены от точки 2 точки -1 и 5 (см. рис. 6). Следовательно, решениями интересующего нас неравенства являются все числа из интервала $(-1; 5)$ (рис. 6).

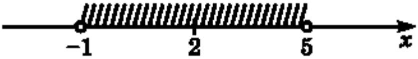


Рис. 6

б) Преобразуем неравенство $|5 - 3x| \geqslant 6$ к виду $\left|x - \frac{5}{3}\right| \geqslant 2$.

Нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\left(x; \frac{5}{3}\right) \geqslant 2$, т. е. удалены от точки $1\frac{2}{3}$ на расстояние, большее или равное 2. На расстоянии, равном 2 от указанной точки, находятся точки $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$ (см. рис. 7). Значит, решения заданного неравенства таковы: $x \leqslant -\frac{1}{3}$; $x \geqslant 3\frac{2}{3}$ (рис. 8). ■

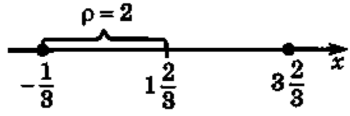


Рис. 7

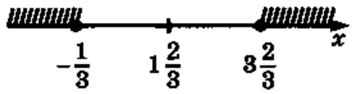


Рис. 8

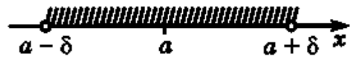


Рис. 9

Пусть δ («дельта» — буква греческого алфавита) — положительное число и a — произвольное действительное число. Интервал $(a - \delta; a + \delta)$ (рис. 9) называют *окрестностью точки a*, а число δ — *радиусом окрестности*. Для всех точек x δ-окрестности точки a выполняется двойное неравенство $a - \delta < x < a + \delta$ или, что то же самое, $|x - a| < \delta$. Например, на рисунке 6 изображена окрестность точки 2 радиуса 3. Записывается эта окрестность так: $|x - 2| < 3$.

§ 6. Метод математической индукции

В основе всякого математического исследования лежит дедуктивный и индуктивный методы обоснования того или иного утверждения. *Дедуктивный метод* — это рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным моментом — частный результат. Если же, опираясь на ряд частных результатов, делается некий общий вывод, то говорят, что использован *индуктивный метод рассуждений*. Итак, индукция — это переход от частного к общему, а дедукция — это переход от общего к частному.

Приведем пример рассуждения по индукции. Требуется установить, что каждое четное натуральное число в пределах от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Для этого переберем все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

$$4 = 2 + 2;\ \ 6 = 3 + 3;\ \ 8 = 3 + 5;\ \ 10 = 5 + 5;$$
$$12 = 5 + 7;\ \ 14 = 7 + 7;\ \ 16 = 3 + 13;\ \ \ldots;$$
$$90 = 7 + 83;\ \ 92 = 3 + 89;\ \ 94 = 5 + 89;\ \ 96 = 7 + 89;$$
$$98 = 19 + 79;\ \ 100 = 3 + 97.$$

Эти 49 равенств (мы выписали только 13 из них, недостающие 36 равенств вы при желании можете составить сами, например $50 = 7 + 43$; $62 = 3 + 59$ и т. д.) показывают, что сформулированное общее утверждение (про *любое* четное число в пределах от 4 до 100) верно, оно было доказано перебором *всех* возможных частных случаев. Это так называемая *полная индукция*, когда общее утверждение доказывается *для конечного множества элементов* рассмотрением каждого элемента множества по отдельности.

Но ведь чаще общее утверждение относится не к конечному, а к бесконечному множеству, когда рассмотреть по отдельности каждый элемент множества невозможно. В таких случаях общее утверждение может быть лишь *угаданным*, полученным *неполной индукцией*. Естественно, оно может быть верным, но может быть и неверным. Приведем примеры.

1) Рассматриваются суммы первых n нечетных натуральных чисел:

$$1 = 1^2;\ \ 1 + 3 = 4 = 2^2;\ \ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2;\ \ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

Выдвинем гипотезу, что всегда сумма первых n нечетных чисел равна n^2. Проверим ее для шести и семи слагаемых:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2.$$

Гипотеза подтвердилась. Но все равно утверждение остается гипотезой, пока оно не доказано. Впрочем, доказать его нетрудно: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ — это сумма n членов арифметической прогрессии; значит,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2.$$

2) Рассматриваются суммы кубов первых n натуральных чисел:

$$1^3 = 1 = 1^2;$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Естественно предположить, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2.$$

Проверим эту гипотезу для пяти и шести слагаемых:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2.$$

Гипотеза подтвердилась. На самом деле сформулированное утверждение верно, мы докажем его позднее.

3) Рассматривается последовательность $y_n = n^2 + n + 17$. Выпишем первые семь ее членов:

$$y_1 = 19;\ y_2 = 23;\ y_3 = 29;\ y_4 = 37;$$
$$y_5 = 47;\ y_6 = 59;\ y_7 = 73.$$

Все полученные числа простые. Возникает предположение: вся последовательность состоит из простых чисел. Проверим это для следующих четырех членов последовательности: $y_8 = 89$; $y_9 = 107$; $y_{10} = 127$; $y_{11} = 149$. Числа 89, 107, 127, 149 — простые, гипотеза подтвердилась. И тем не менее она неверна: есть в последовательности члены, не являющиеся простыми числами, например,

$y_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16(16 + 1) + 17 = 17(16 + 1) = 17 \cdot 17$ — составное число.

Итак, утверждение, полученное неполной индукцией, остается лишь гипотезой, пока оно не доказано точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция не считается в математике методом строгого доказательства, она может привести к ошибке. Однако замечательно то, что она иногда приводит к истине. Можно охарактеризовать неполную индукцию как эвристический (от греческого *heurisko* — «отыскиваю») метод открытия новых истин.

Метод полной индукции имеет в математике ограниченные применения, поскольку охватывает лишь ситуации с конечным числом частных случаев. Чаще всего математическое утверждение охватывает бесконечное множество частных случаев, когда сделать проверку для всех случаев невозможно. Опираться при этом на неполную индукцию опасно, можно сделать неправильный вывод. Во многих случаях выход заключается в обращении к особому методу рассуждений, который называют *методом математической индукции*. Суть его разъясним на примере.

Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. По определению арифметической прогрессии, $a_{n+1} = a_n + d$, значит,

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \text{ и т. д.}$$

Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \qquad (1)$$

«Нетрудно догадаться», «можно сообразить» и т. д. — это стилистические обороты из области интуиции. Разумеется, математики ими пользуются, но в основном для открытия каких-то новых фактов, а не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но не обосновали. Приведем обоснование.

Если $n = 1$, то $a_1 = a_1 + (1 - 1)d$ — верное равенство, т. е. формула (1) для $n = 1$ верна.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предноложим, что верно равенство $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $a_{k+1} = a_1 + kd$.

В самом деле, по определению арифметической прогрессии, $a_{k+1} = a_k + d$, значит,

$$a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k - 1)d) + d = a_1 + kd.$$

А теперь смотрите: для $n = 1$ формула (1) верна (это мы проверили). Далее мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Но формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Итак, метод математической индукции состоит в следующем. Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения $A(n)$ для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2). Сначала проверяют справедливость утверждения для $n = 1$ (*базис математической индукции*). Затем доказывают, что для любого натурального числа k верно следующее утверждение: если справедливо $A(k)$, то справедливо и $A(k + 1)$ (*индукционный шаг*). Тогда утверждение $A(n)$ считается доказанным для любого n. В самом деле, утверждение справедливо для $n = 1$ (это проверялось отдельно). Но если верно $A(1)$, то верно и $A(2)$; поскольку верно $A(2)$, то верно и $A(3)$; из справедливости $A(3)$ следует, что утверждение верно и для $n = 4$ и т. д., т. е. утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип, который обычно считают одной из аксиом множества натуральных чисел.

Принцип математической индукции

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

а) утверждение верно для $n = 1$;

б) из справедливости утверждения для $n = k$, где k — любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n = k + 1$.

Пример 1. Доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

Решение. 1) Проверим справедливость этого утверждения для $n = 1$, т. е. проверим справедливость равенства $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6}$.

Это очевидно: $1 = 1$.

2) Предположим, что равенство (2) выполняется при $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \qquad (3)$$

Докажем, что тогда проверяемое равенство (2) верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что верно равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad (4)$$

(оно получается, если в обе части равенства (2) вместо n подставить $k + 1$). Подчеркнем еще раз, что равенство (4) интересует нас не само по себе, нас интересует только один вопрос: вытекает ли оно из равенства (3).

Рассмотрим левую часть интересующего нас равенства (4) и воспользуемся в процессе преобразований равенством (3):

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k(k+2) + 3(k+2))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Итак, из равенства (3) вытекает равенство (4).

Оба условия принципа математической индукции выполняются, значит, равенство (2) справедливо для любого натурального числа n. ■

Пример 2. Доказать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2. \qquad (5)$$

Решение. 1) Справедливость равенства (5) для $n = 1$ (даже для $n = 2, 3, 4, 5, 6$) уже проверена выше.

2) Предположим, что равенство (5) выполняется при $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)^2. \qquad (6)$$

Докажем, что тогда равенство (5) верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 =$$
$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2$$

или, что то же самое,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2 -$$
$$- (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3) = (k + 1)^3. \qquad (7)$$

Заменив сумму кубов в левой части равенства (7) правой частью равенства (6), получим:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2 - (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)^2 =$$
$$= ((1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1)) - (1 + 2 + 3 + \ldots + k))((1 + 2 +$$
$$+ 3 + \ldots + k + (k + 1)) + (1 + 2 + 3 + \ldots + k)) = (k + 1)(2(1 + 2 +$$
$$+ 3 + \ldots + k) + (k + 1)) = (k + 1)(2 \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot k + (k + 1)) =$$
$$= (k + 1)(k(k + 1) + (k + 1)) = (k + 1)(k^2 + 2k + 1) =$$
$$= (k + 1)(k + 1)^2 = (k + 1)^3.$$

Итак, из равенства (6) вытекает равенство (7).

Оба условия принципа математической индукции выполняются, значит, равенство (5) справедливо для любого натурального числа n. ■

Пример 3. Найти сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Решение. Обозначим заданную сумму символом S_n и найдем ее значения при $n = 1, 2, 3, 4$:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}; \quad S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Получили конечную последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Есть резон предположить, что $S_n = \frac{n}{n+1}$. Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула справедлива. Предположим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$, и докажем, что тогда $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

В самом деле,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что заданная сумма равна $\frac{n}{n+1}$.

Заметим, справедливости ради, что в этом примере можно было обойтись без метода математической индукции:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$ ■

Иногда требуется доказать некоторое утверждение не для всех натуральных чисел n, как было до сих пор, а для $n \geqslant p$. Тогда на первом шаге проверяют справедливость утверждения не для $n = 1$, а для $n = p$, а в остальном схема применения метода математической индукции та же.

Пример 4. Доказать, что для $n \geqslant 2$ и $x > 0$ справедливо неравенство

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

(его называют *неравенством Бернулли* в честь швейцарского математика Якоба Бернулли (1654—1705)).

Решение. 1) При $n = 2$ получим верное неравенство:

$(1 + x)^2 > 1 + 2x$ (поскольку $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$).

2) Предположим, что неравенство Бернулли верно для $n = k$ ($k \geqslant 2$):

$$(1 + x)^k > 1 + kx. \qquad (8)$$

Докажем, что тогда неравенство Бернулли верно и для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x.$$

В самом деле, умножив обе части неравенства (8) на одно и то же положительное число $1 + x$, получим:

$$(1 + x)^{k+1} > (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x.$$

Значит, мы доказали, что $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$.

По принципу математической индукции делаем вывод, что неравенство Бернулли справедливо для любого $n \geqslant 2$. ■

Пример 5. Доказать, что при $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Решение. 1) При $n = 2$ проверяемое неравенство принимает вид

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}.$$

Это верное неравенство, поскольку его левая часть явно меньше, чем 2, а правая — больше, чем 2.

2) Предположим, что при $n = k$ ($k \geqslant 2$) выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}. \qquad (9)$$

Докажем, что тогда выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}. \qquad (10)$$

Прибавив к обеим частям неравенства (9) одно и то же число $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, получим:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Если мы докажем, что

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}, \qquad (11)$$

то, по свойству транзитивности числовых неравенств, будет доказано неравенство (10).

Рассмотрим разность правой и левой частей неравенства (11) и выполним некоторые преобразования:

$$2\sqrt{k+1} - \left(2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{2k + 2 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{k + 1 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k} + k}{\sqrt{k+1}} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^2}{\sqrt{k+1}}.$$

Полученное выражение положительно, значит, неравенство (11) верно, а потому верно и неравенство (10).

Итак, оба условия принципа математической индукции выполнены. Значит, требуемое неравенство доказано. ■

Пример 6. Доказать, что $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) ⋮ 133$ для любого натурального числа n.

Решение. а) При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$(11^3 + 12^3) ⋮ 133.$$

Это верно, поскольку $11^3 + 12^3 = (11 + 12)(11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) = 23 \cdot 133$, а $(23 \cdot 133) ⋮ 133$.

б) Предположим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. предположим, что

$$(11^{k+2} + 12^{2k+1}) ⋮ 133.$$

Докажем, что тогда утверждение верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$(11^{k+3} + 12^{2k+3}) ⋮ 133.$$

В самом деле,

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} =$$

$$= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}.$$

Второе слагаемое — $133 \cdot 12^{2k+1}$ — явно делится на 133, а первое слагаемое — $11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1})$ — делится на 133 по предположению. Но тогда, по свойствам делимости,

$$(11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}) \vdots 133,$$
$$\text{т. е. } (11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133.$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что требуемое утверждение доказано. ■

ГЛАВА 2 Числовые функции

§ 7. Определение числовой функции и способы ее задания

Напомним общие сведения о функциях, известные вам из курса алгебры основной школы.

Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция $y = f(x)$ с областью определения X**. Пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. Для области определения функции используют обозначение $D(f)$. Переменную x называют **независимой переменной или аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**. Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и область X определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения этого выражения (такую область определения называют *естественной*), то вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$ используют более короткую запись: $y = f(x)$.

Определение 2. Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$ и на координатной плоскости xOy отмечены все точки вида $(x; y)$, где $x \in X$, а $y = f(x)$, то множество этих точек называют **графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$.

Если известен график функции $y = f(x)$, $x \in X$, то область (множество) значений функции можно найти, спроецировав график на ось ординат. То числовое множество, которое получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.

Из курса алгебры основной школы вам известно, как выглядят графики некоторых функций: $y = kx + m$ — прямая, $y = ax^2 + bx + c$ — парабола (при $a \neq 0$), $y = \frac{k}{x}$ — гипербола (при $k \neq 0$); известны вам также графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$. Ниже в примерах мы поработаем со всеми этими графиками.

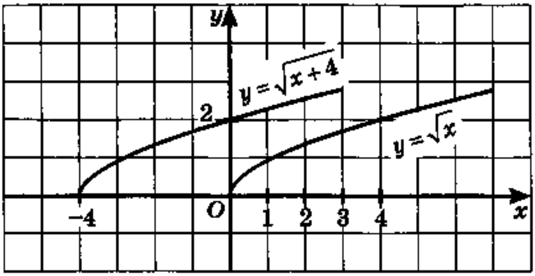


Рис. 10

Зная график функции $y = f(x)$, можно с помощью геометрических преобразований построить некоторые другие графики. Например, график функции $y = f(x + a) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $(-a; b)$, т. е. на $|a|$ вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$, на $|b|$ вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$. Например, на рисунке 10 изображены графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x + 4}$, а на рисунке 11 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$.

Иногда говорят так: чтобы, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, нужно перейти к новой системе координат, выбрав началом новой системы точку $(-a; b)$, и к новой системе «привязать» график функции $y = f(x)$. Например, на рисунке 12 изображен график функции $y = |x - 2| + 3$. Началом новой системы координат выбрана точка (2; 3), и к новой системе «привязан» график функции $y = |x|$.

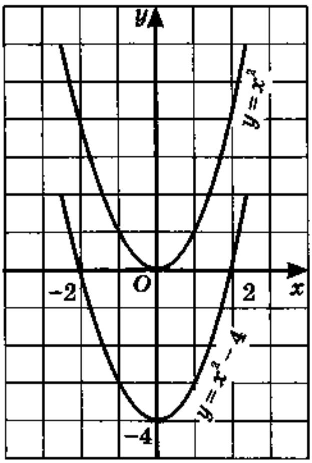


Рис. 11

Нетрудно, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x)$. Для этого достаточно осуществить симметрию графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс. Например, на рисунке 13 изображены графики функций $y = 2x + 6$ и $y = -(2x + 6)$.

Покажем еще, как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = |f(x)|$. Пусть график функции $y = f(x)$, $x \in R$ изображен на рисунке 14, a. Замечаем, что $f(x) \geqslant 0$ на промежутках $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$. Но если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$, значит, на указанных промежутках графики функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ совпадают. Замечаем, что $f(x) < 0$ на промежутке $(a; b)$.

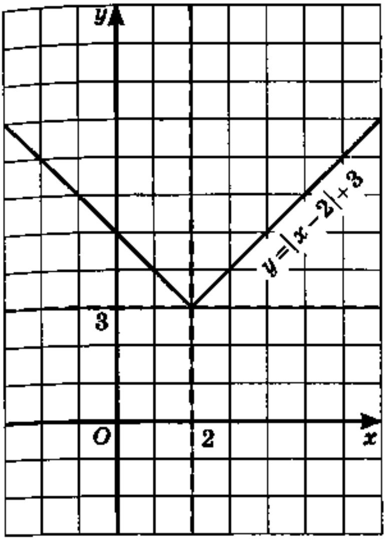


Рис. 12

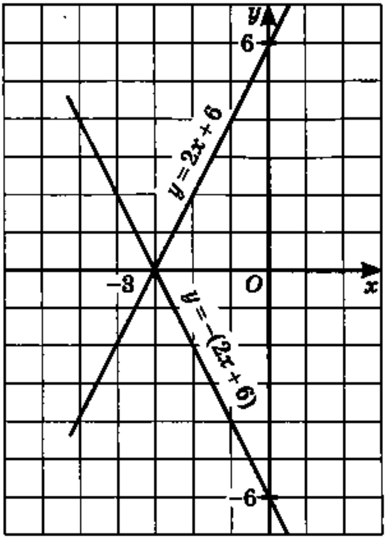


Рис. 13

Но если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$, значит, на указанном промежутке надо построить график функции $y = -f(x)$. Учтя все это, строим график функции $y = |f(x)|$, он изображен на рисунке 14, *б*.

Пример 1. График функции $y = \dfrac{a}{x+b}$ проходит через точку $\left(\sqrt{7};\ \sqrt{7}+3\right)$. Найти значения коэффициентов a и b, если известно, что это рациональные числа.

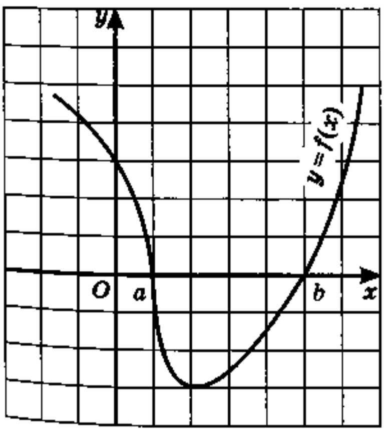


Рис. 14, *а*

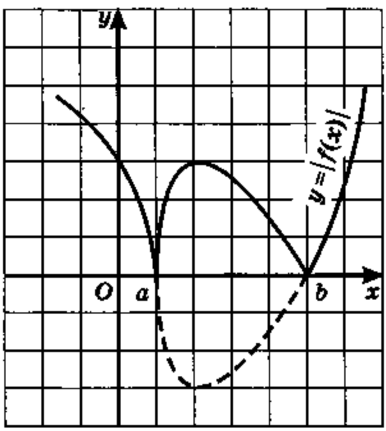


Рис. 14, *б*

Решение. Из условия следует, что выполняется равенство $\sqrt{7}+3=\dfrac{a}{\sqrt{7}+b}$. Имеем: $(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}+b)=a$; $(b+3)\sqrt{7}=a-3b-7$. Возможны два случая: $b+3=0$, $b+3\neq 0$.

В первом случае должно выполняться и равенство $a-3b-7=0$, т. е. задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} b+3=0, \\ a-3b-7=0. \end{cases}$

Решив эту систему, получим: $a=-2$, $b=-3$.

Во втором случае получаем: $\sqrt{7}=\dfrac{a-3b-7}{b+3}$. По условию a и b — рациональные числа, но тогда и $\dfrac{a-3b-7}{b+3}$ — рациональное число. В то же время $\sqrt{7}$ — иррациональное число. Это значит, что равенство $\sqrt{7}=\dfrac{a-3b-7}{b+3}$ не выполняется ни при каких рациональных значениях a и b.

Ответ: $a=-2$, $b=-3$.

Пример 2. Дана функция $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0<x\leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x}+1, \text{ если } x>3. \end{cases}$$

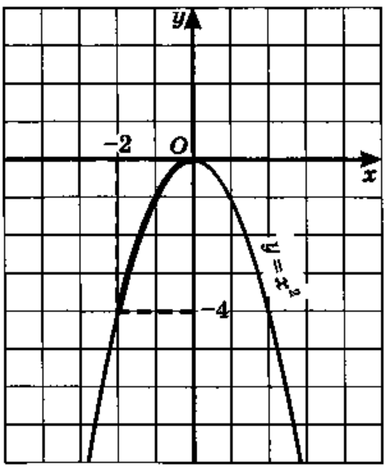


Рис. 15

а) Вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(1{,}25)$, $f(6)$, $f(-3)$.

б) Найти $D(f)$ и $E(f)$.

в) Выяснить, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ при различных значениях параметра a.

г) Решить неравенства:

$$f(x)<0{,}5;\ f(x)>0{,}5.$$

Решение. а) В этом примере речь идет о так называемой *кусочной функции* (или о кусочно-заданной функции). Значение $x=-2$ удовлетворяет условию $-2\leqslant x\leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по формуле $f(x)=-x^2$; $f(-2)=-(-2)^2=-4$.

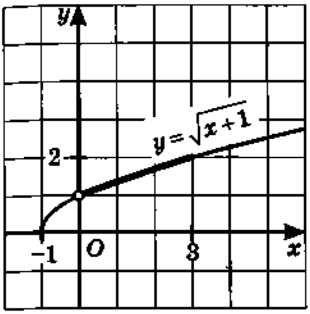


Рис. 16

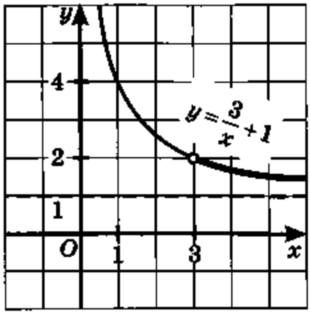


Рис. 17

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 3$, следовательно, $f(1{,}25)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25 + 1} = 1{,}5$.

Значение $x = 6$ удовлетворяет условию $x > 3$, следовательно, $f(6)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \frac{3}{x} + 1$; $f(6) = \frac{3}{6} + 1 = 1{,}5$.

Значение $x = -3$ не принадлежит области определения функции, а потому требование вычислить $f(-3)$ в данном случае некорректно.

б) Область определения функции состоит из трех промежутков: $[-2; 0]$, $(0; 3]$, $(3; +\infty)$. Объединив их, получим луч $[-2; +\infty)$.

Чтобы найти область значений функции, построим ее график. Он состоит из трех «кусочков» — части параболы $y = -x^2$, взятой на отрезке $[-2; 0]$ (рис. 15), части кривой $y = \sqrt{x + 1}$, взятой на полуинтервале $(0; 3]$ (рис. 16), и части гиперболы $y = \frac{3}{x} + 1$, взятой на открытом луче $(3; +\infty)$ (рис. 17); заметим, что $y = 1$ — асимптота гиперболы. Объединив эти кусочки на одном чертеже, получим график функции $y = f(x)$ (рис. 18). Спроецировав этот график на ось y, получим область значений функции, которая состоит из отрезка $[-4; 0]$ и полуинтервала $(1; 2]$.

Итак,

$$D(f) = [-2; +\infty),$$
$$E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2].$$

в) Выясним, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a. Для этого нужно определить,

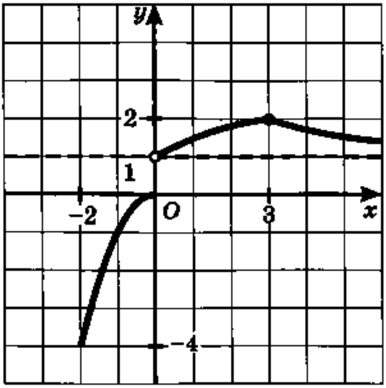


Рис. 18

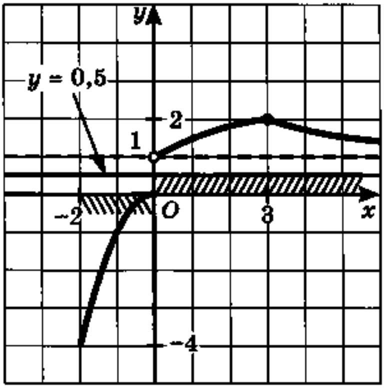


Рис. 19

сколько точек пересечения имеет построенный график функции (рис. 18) с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a. При $-4 \leqslant a \leqslant 0$ прямая пересекается с графиком только в одной точке, значит, уравнение имеет один корень. Аналогичная ситуация имеет место при $a = 2$. При $a < -4$, при $0 < a \leqslant 1$, а также при $a > 2$ прямая и график не пересекаются, значит, уравнение не имеет корней. Наконец, график и прямая пересекаются в двух точках при $1 < a < 2$. В этом случае уравнение имеет два корня.

Итак, уравнение $f(x) = a$ не имеет корней при $a < -4$, $0 < a \leqslant 1$, $a > 2$; имеет один корень при $-4 \leqslant a \leqslant 0$ и при $a = 2$; имеет два корня при $1 < a < 2$.

г) Решим неравенство $f(x) < 0,5$. График функции располагается ниже прямой $y = 0,5$ при $-2 \leqslant x \leqslant 0$ (рис. 19); это и есть решение неравенства. График функции располагается выше прямой $y = 0,5$ при $x > 0$; это и есть решение неравенства $f(x) > 0,5$ (рис. 19). ■

Пример 3. Под $\max(A; B)$ будем понимать наибольшее из чисел A, B. Построить график функции $y = \max(\sqrt{x}; 6 - x)$.

Решение. На рисунке 20 построены графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$. Они пересекаются в точке $(4; 2)$. Если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то $6 - x \geqslant \sqrt{x}$; если $x > 4$, то $\sqrt{x} > 6 - x$. Значит, если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то $\max(\sqrt{x}; 6 - x) = 6 - x$; если же $x > 4$, то $\max(\sqrt{x}; 6 - x) = \sqrt{x}$.

Таким образом, речь идет о построении графика кусочной функции $y = \begin{cases} 6 - x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 4. \end{cases}$ График функции изображен на рисунке 21. ■

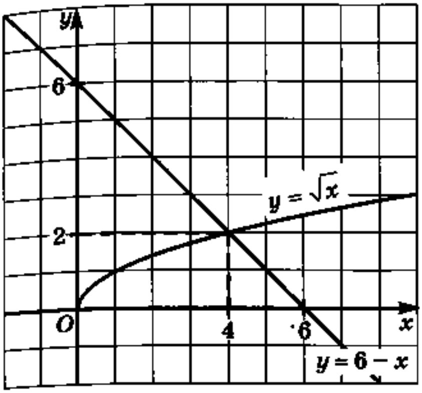


Рис. 20

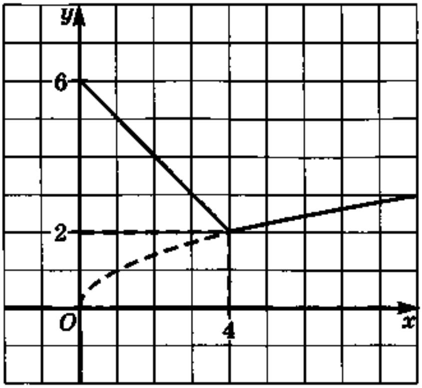


Рис. 21

Пример 4. Построить график функции

$$y = |2x - 4| + |x + 3| - 5.$$

Решение. Выражение $2x - 4$ обращается в 0 при $x = 2$, а выражение $x + 3$ — при $x = -3$. Эти две точки (2 и -3) разбивают числовую прямую на три промежутка (рис. 22). Рассмотрим первый промежуток — $(-\infty; -3]$. Если $x \leqslant -3$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 \leqslant 0$. Значит, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = -(x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

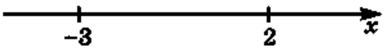


Рис. 22

$$y = -(2x - 4) - (x + 3) - 5 = -3x - 4.$$

Рассмотрим второй промежуток — $(-3; 2)$. Если $-3 < x < 2$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 > 0$. Следовательно, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

$$y = -(2x - 4) + (x + 3) - 5 = -x + 2.$$

Рассмотрим третий промежуток — $[2; +\infty)$. Если $x \geqslant 2$, то $2x - 4 \geqslant 0$ и $x + 3 > 0$. Значит, $|2x - 4| = (2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

$$y = (2x - 4) + (x + 3) - 5 = 3x - 6.$$

Подведем итоги. Фактически речь идет о построении графика кусочной функции

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x \leqslant -3; \\ -x + 2, \text{ если } -3 < x < 2; \\ 3x - 6, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 23. ■

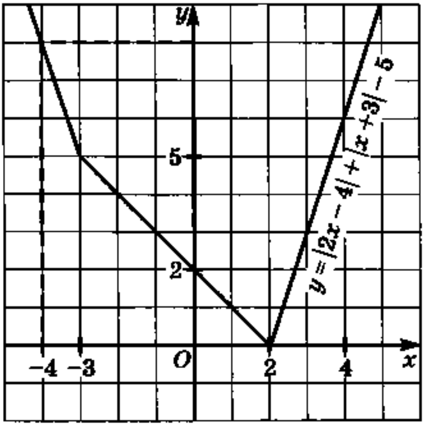


Рис. 23

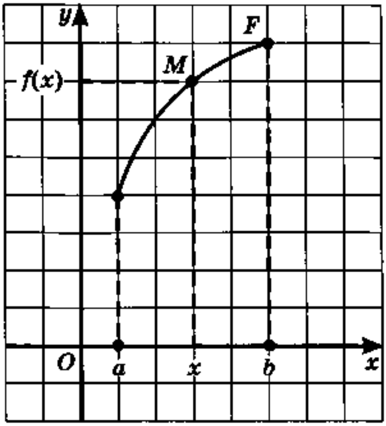


Рис. 24

Еще раз подчеркнем, что задать функцию — это значит указать п р а в и л о, которое позволяет по произвольно выбранному значению $x \in D(f)$ вычислить соответствующее значение y. Чаще всего это правило связано с формулой (например, $y = \sqrt{x}$) или с несколькими формулами, как было в примере 2 (*кусочная функция*). Такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Есть и другие способы задания функции.

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости и пусть, спроецировав эту линию на ось x, мы получим отрезок $[a; b]$ (рис. 24). Возьмем произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рисунке 24 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*.

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить ее график, то тем самым мы фактически осуществили переход от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удается осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная задача.

П р и м е р 5. На рис. 25 изображена парабола, на рис. 26 — гипербола, на рис. 27 — полуокружность. Перейти во всех этих случаях к аналитическому заданию функции.

Р е ш е н и е. Вершиной параболы служит точка $(1; -3)$. Значит, уравнение параболы можно записать так: $y = a(x - 1)^2 - 3$.

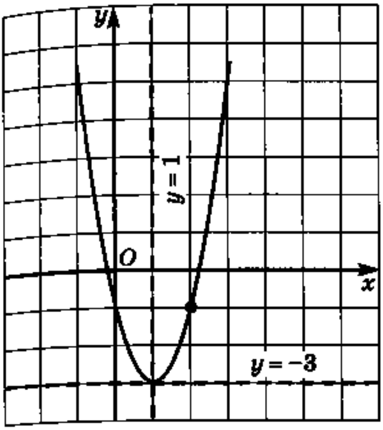


Рис. 25

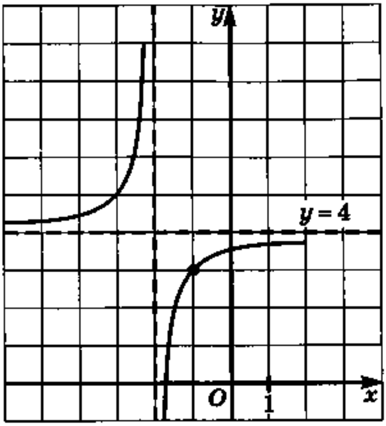


Рис. 26

Осталось найти значение коэффициента a. Будем ориентироваться на вспомогательную систему координат (пунктирные линии на рис. 25). Замечаем, что в этой системе абсциссе 1 соответствует ордината 2 (выделенная точка на рис. 25). Значит, $a = 2$. Итак, аналитическое задание функции получено: $y = 2(x - 1)^2 - 3$.

Асимптотами гиперболы (рис. 26) служат прямые $x = -2$, $y = 4$. Значит, уравнение гиперболы можно записать так: $y = \dfrac{a}{x+2} + 4$. Осталось найти значение коэффициента a. Будем ориентироваться на вспомогательную систему координат (пунктирные линии на рис. 26). Замечаем, что в этой системе абсциссе 1 соответствует ордината -1 (выделенная точка на рис. 26). Значит, $a = -1$. Итак, аналитическое задание функции получено: $y = \dfrac{-1}{x+2} + 4$.

Центром полуокружности (рис. 27) является точка (3; 0), радиус равен 2. Значит, уравнение соответствующей окружности таково: $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Из этого уравнения находим, что $y = \pm\sqrt{4 - (x - 3)^3}$. Поскольку на рис. 27 изображена нижняя полуокружность, получаем:

$$y = -\sqrt{4 - (x - 3)^3}. \quad \blacksquare$$

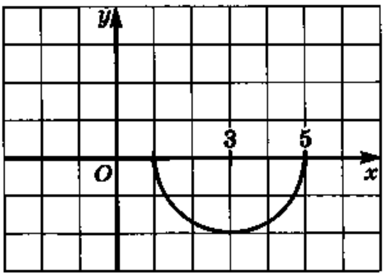


Рис. 27

Кроме аналитического и графического, на практике применяют *табличный* способ задания функции — с помощью таблицы, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближенные) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значение функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас еще только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идет о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведем примеры.

Пример 6. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие первая цифра после запятой в десятичной записи числа x. Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}6666...$, находим: $f(x) = 6$. А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000...$, и мы видим, что первая цифра после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}99...$, но обычно не рассматривают бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому каждому значению x можно поставить в соответствие значение первой цифры после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}. \quad \blacksquare$$

Пример 7. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех действительных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят x. Иными словами, функция $y = f(x)$ определяется следующими условиями:

а) $f(x)$ — целое число;

б) $f(x) \leqslant x$ (поскольку $f(x)$ не превосходит x);

в) $f(x) + 1 > x$ (поскольку $f(x)$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, значит, $f(x) + 1$ уже больше, чем x).

Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 2$, поскольку, во-первых, 2 — целое число, во-вторых, $2 < 2{,}534$ и, в-третьих, следующее целое число 3 уже больше, чем 2,534.

Если $x = 47$, то $f(x) = 47$, поскольку, во-первых, 47 — целое число, во-вторых, $47 \leqslant 47$ и, в-третьих, следующее за числом 47 целое число 48 уже больше, чем 47.

А чему равно значение $f(-0{,}23)$? Оно равно -1 (проверьте!).

У этой функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, а $E(f) = \boldsymbol{Z}$ (множество целых чисел). ■

Функцию, о которой шла речь в примере 7, называют *целой частью числа*, для нее используют обозначение $[x]$. Например, $[2{,}534] = 2$; $[47] = 47$; $[-0{,}23] = -1$. На рисунке 28 изображен график функции $y = [x]$.

Пример 8. Построить график функции $y = x - [x]$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = [x]$ (рис. 29). Вычитая ординаты второго графика из соответствующих ординат первого графика, получим требуемый график — он представлен на рисунке 30. ■

Функцию, о которой шла речь в примере 8, называют *дробной частью числа*; для нее используют обозначение $\{x\}$. Например, $\{2{,}534\} = 0{,}534$, поскольку $2{,}534 - 2 = 0{,}534$, $\{47\} = 0$ (так как $47 - 47 = 0$), $\{-0{,}23\} = 0{,}77$ (так как $-0{,}23 - (-1) = 0{,}77$), $\{-0{,}(23)\} = 0{,}(76)$ (так как $-0{,}(23) - (-1) = 1 - 0{,}232323\ldots = 0{,}767676\ldots = 0{,}(76)$).

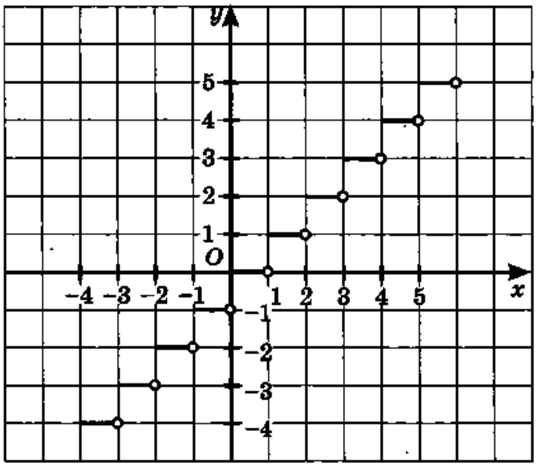


Рис. 28

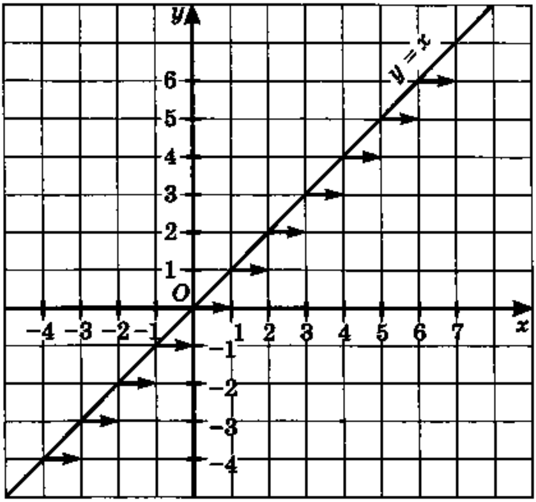


Рис. 29

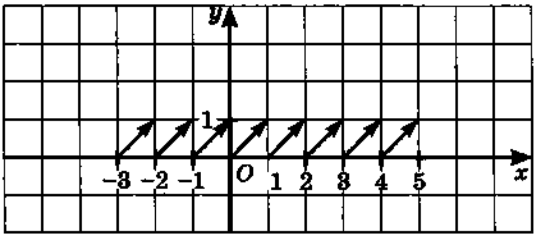


Рис. 30

Итак, мы познакомились с двумя новыми функциями, для задания которых используется словесный способ, — это функция $y = [x]$ (целая часть числа x) и функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x).

Пример 9. Построить график функции $y = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - x - 2}$.

Решение. Имеем:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1);$$
$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3);$$
$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Значит,

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 1)} =$$
$$= (x - 1)(x - 3).$$

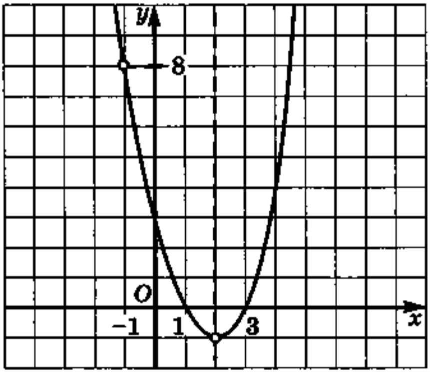


Рис. 31

Таким образом, $y = (x - 1)(x - 3)$, $x \neq 2$, $x \neq -1$. Графиком функции является парабола, пересекающая ось x в точках 1 и 3, с двумя «выколотыми» точками, абсциссы которых равны 2 и −1 (рис. 31). ■

§ 8. Свойства функций

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками: функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Если функция возрастает (или убывает) на своей естественной области определения, то говорят, что функция возрастающая (или убывающая) — без указания числового множества X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию:
а) $y = 5 - 2x$; б) $y = x^3 + 2$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = 5 - 2x$. Если $x_1 < x_2$, то $-2x_1 > -2x_2$, и, далее, $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой.

б) Введем обозначение: $f(x) = x^3 + 2$. Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2, и пусть $x_1 < x_2$. Тогда, по свойствам числовых неравенств, получим:

$$x_1^3 < x_2^3; \qquad x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой. ■

Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа. Иными словами, если существует такое число m, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$**, если все значения этой функции меньше некоторого числа. Иными словами, если существует такое число M, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции снизу или сверху на всей области ее определения.

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции легко читается по ее графику: если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 32, *а*); если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 32, *б*).

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. С одной стороны, вполне очевидно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0,$$

это означает, что функция ограничена снизу.

С другой стороны, $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху. ■

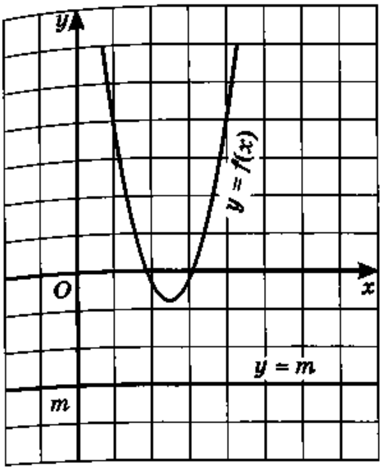


Рис. 32, *а*

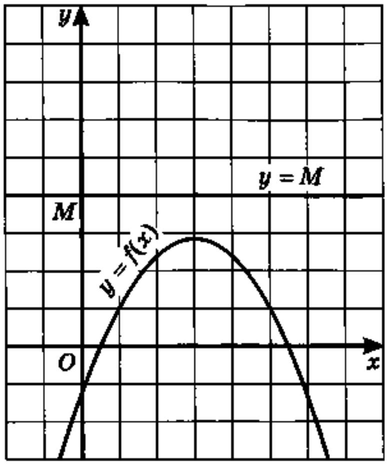


Рис. 32, *б*

Определение 5. Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) во множестве X с у щ е с т в у е т такая точка x_0, что $f(x_0) = m$;

2) д л я л ю б о г о значения x из множества X выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 6. Число M называют **наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) во множестве X с у щ е с т в у е т такая точка x_0, что $f(x_0) = M$;

2) д л я л ю б о г о значения x из множества X выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет о поиске наименьшего или наибольшего значения функции во всей области определения. Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения.

1) *Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует $y_{\text{наим}}$.*

4) *Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует $y_{\text{наиб}}$.*

Докажем для примера свойства 1 и 3.

Пусть функция $y = f(x)$ достигает наименьшего значения на множестве X. Это значит, что существует такая точка $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Но это (см. определение 3) как раз и означает ограниченность функции снизу.

Свойство 3 можно доказать методом от противного. Если предположить, что $y_{\text{наим}}$ существует, то, по свойству 1, функция ограничена снизу, что противоречит условию.

Пример 3. Исследовать функцию на ограниченность, найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 2x + 2 - 6\sqrt{2x - 7}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{2x^2 - 8x + 44}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$;

г) $y = \dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4}$.

Решение. а) $2x + 2 - 6\sqrt{2x - 7} = (2x - 7) - 6\sqrt{2x - 7} + 9 = \left(\sqrt{2x - 7} - 3\right)^2$. Функция $y = \left(\sqrt{2x - 7} - 3\right)^2$ принимает только неотрицательные значения, значит, она ограничена снизу. Из уравнения $\sqrt{2x - 7} - 3 = 0$ находим: $x = 8$; в этой точке функция достигает своего наименьшего значения $y_{\text{наим}} = 0$. Сверху функция не ограничена, поскольку выражение $\left(\sqrt{2x - 7} - 3\right)^2$ может принимать сколь угодно большие значения.

Подведем итоги. Функция ограничена снизу, $y_{\text{наим}} = 0$. Функция не ограничена сверху и, соответственно, у нее не существует наибольшего значения.

б) Введем обозначение: $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{2x^2 - 8x + 44}$.

Найдем область определения функции. Для этого решим систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 8x + 44 \geqslant 0. \end{cases}$ Из первого неравенства находим: $x \leqslant 2$; $x \geqslant 4$. Второе неравенство выполняется при любых значениях x, поскольку дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - 8x + 44$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Значит, решения первого неравенства являются и решениями системы. Итак, $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

Имеем: $y = \sqrt{(x - 3)^2 - 1} + \sqrt{2(x - 2)^2 + 36}$. На луче $(-\infty; 2]$ функции $y = (x - 3)^2 - 1$ и $y = 2(x - 2)^2 + 36$ не ограничены сверху, убывают и принимают неотрицательные значения. Теми же свойствами обладают функции $y = \sqrt{(x-3)^2 - 1}$, $y = \sqrt{2(x-2)^2 + 36}$ и их сумма, т. е. функция $y = f(x)$. Из убывания функции следует, что своего наименьшего значения она достигает в точке $x = 2$. Значит, на луче $(-\infty; 2]$ имеем: $y_{наим} = f(2) = 6$.

На луче $[4; +\infty)$ функции $y = (x-3)^2 - 1$ и $y = 2(x-2)^2 + 36$ не ограничены сверху, возрастают и принимают неотрицательные значения. Теми же свойствами обладают функции $y = \sqrt{(x-3)^2 - 1}$, $y = \sqrt{2(x-2)^2 + 36}$ и их сумма, т. е. функция $y = f(x)$. Из возрастания функции следует, что своего наименьшего значения она достигает в точке $x = 4$. Значит, на луче $[4; +\infty)$ имеем: $y_{наим} = f(4) = \sqrt{44}$.

Подведем итоги. Заданная функция ограничена снизу и $y_{наим} = 6$; сверху она не ограничена и наибольшего значения не существует.

в) Эта функция вроде бы похожа на предыдущую, но есть существенное отличие: то, что верно для суммы неотрицательных возрастающих (убывающих) функций, не проходит для их разности. Придется искать другие пути. Имеем:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)\left(\sqrt{x^2 - 4 + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 13}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{8}{\sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}}.$$

Знаменатель последней дроби принимает наименьшее значение 4 при $x = 2$; соответственно сама дробь при $x = 2$ достигает наибольшего значения, оно равно 4. Отсюда, кстати, сразу следует ограниченность функции сверху.

Далее, функция ограничена снизу, поскольку последняя дробь положительна при любых значениях x. На луче $[2; +\infty)$ функция $y = \sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}$ положительна и возрастает, значит, функция $y = \dfrac{8}{\sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}}$ положительна и убывает, наименьшего значения у нее нет.

Подведем итоги. Функция ограничена, $y_{наиб} = 4$, наименьшего значения у функции нет.

г) Имеем: $\dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4} = \dfrac{5(x^2 + 2x + 4) - 6}{x^2 + 2x + 4} = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$.

Знаменатель последней дроби принимает наименьшее значение 3 при $x = -1$; соответственно сама дробь при $x = -1$ достигает наибольшего значения, оно равно 2. Отсюда следует, что функция $y = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$ в точке $x = -1$ достигает наименьшего значения, оно равно 3.

Далее, для любого значения x выполняется неравенство $5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3} < 5$, значит, функция ограничена сверху. На луче $[-1; +\infty)$ функция $y = (x + 1)^2 + 3$ положительна и возрастает, функция $y = \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$ положительна и убывает, значит, функция $y = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$ возрастает. Но это значит, что наибольшего значения у нее нет.

Подведем итоги. Функция ограничена, $y_{наим} = 3$, наибольшего значения у функции нет. ■

Определение 7. Точку x_0 называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность (см. с. 45), для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точку x_0 называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума объединяют общим названием — *точки экстремума* (от латинского *extremum* — «крайний»). Для значений функции в этих точках используют символы y_{max}, y_{min}.

На рисунке 33 представлен график некоторой функции (предполагается, что $D(f) = (-\infty; +\infty)$). Как видите, у нее несколько точек экстремума: x_1 и x_3 — точки максимума, а x_2 и x_4 — точки минимума.

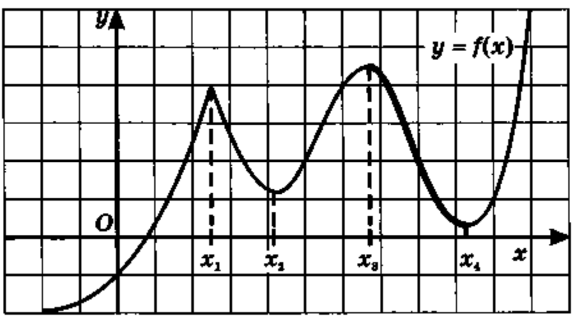


Рис. 33

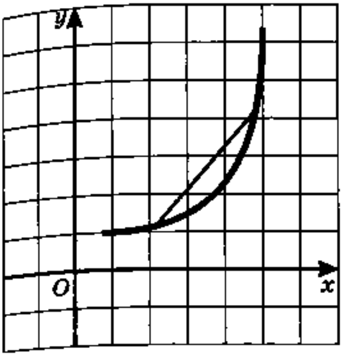


Рис. 34, *а*

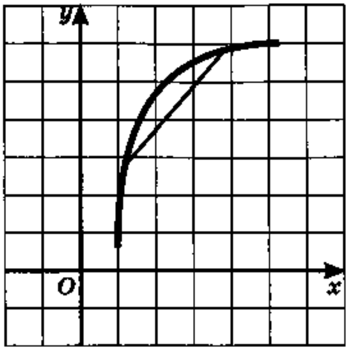


Рис. 34, *б*

Напомним еще два свойства функций. Первое — свойство выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 34, *а*). *Функция выпукла вверх* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 34, *б*).

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке* X — означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т. е. представляет собой сплошную линию).

Замечание. На самом деле о непрерывности функции можно говорить только тогда, когда *доказано*, что функция является непрерывной. Но соответствующее определение сложное и нам пока не по силам (мы дадим его позднее, в главе 7). То же са́мое можно сказать и о понятии выпуклости. Поэтому пока будем по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

Пример 4. График кусочной функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 35, состоит из дуги окружности, части гиперболы и отрезка прямой. Требуется: а) прочитать график; б) перейти от графического задания функции к аналитическому.

Решение. а) Перечислим свойства функции (т. е. прочтем график).

1) $D(f) = [-4; 7]$.

2) Функция возрастает на отрезке $[-4; 0]$, убывает на отрезке $[0; 3]$, возрастает на отрезке $[3; 7]$.

3) Функция ограничена и снизу и сверху.

4) $y_{наиб} = 7$ (достигается в точке $x = 7$), $y_{наим} = 0$ (достигается в точке $x = -4$).

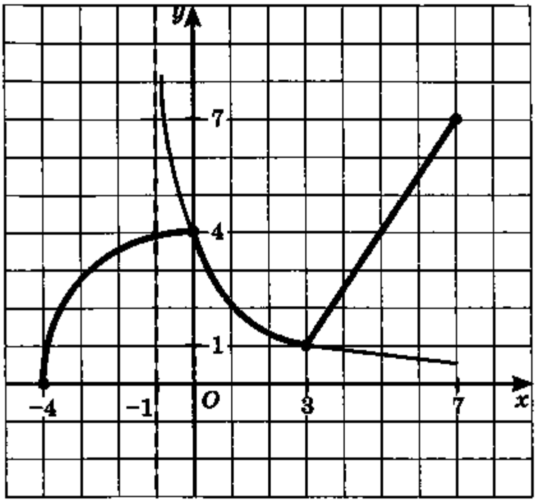


Рис. 35

5) Функция непрерывна в своей области определения.

6) $E(f) = [0; 7]$.

7) Функция выпукла вверх на отрезке $[-4; 0]$, выпукла вниз на отрезке $[0; 3]$; на отрезке $[3; 7]$ ее можно считать как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

8) У функции есть две точки экстремума: $x = 0$ — точка максимума, причем $y_{max} = 4$; $x = 3$ — точка минимума, причем $y_{min} = 1$.

б) Составим аналитическое задание функции. На отрезке $[-4; 0]$ графиком функции является дуга окружности с радиусом, равным 4, с центром в точке 0; уравнение этой окружности $x^2 + y^2 = 4^2$, значит, для части верхней полуокружности получаем: $y = \sqrt{16 - x^2}$.

На отрезке $[0; 3]$ имеем график обратной пропорциональности с коэффициентом 4, сдвинутый влево по оси x на 1. Значит, на этом промежутке $y = \dfrac{4}{x + 1}$.

Наконец, на отрезке $[3; 7]$ дана часть графика линейной функции $y = kx + m$, причем эта прямая проходит через точки $(3; 1)$ и $(7; 7)$, а потому коэффициенты k и m можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 3k + m, \\ 7 = 7k + m; \end{cases}$$

находим: $k = 1{,}5$, $m = -3{,}5$. Значит, $y = 1{,}5x - 3{,}5$ (на отрезке $[3; 7]$).

Зададим функцию аналитически, обратив при этом внимание на «стыковые» точки ($x = 0$ и $x = 3$): они не должны дублироваться в задании функции. Итак,

$$y = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2}, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{4}{x+1}, \text{ если } 0 < x < 3, \\ 1{,}5x - 3{,}5, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$ ■

Определение 8. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 9. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 5. Доказать, что $y = x^4$ — четная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной. ■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ также являются четными.

Пример 6. Доказать, что $y = x^3$ — нечетная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной. ■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ также являются нечетными.

Итак, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$, где n — натуральное число, можно сделать вывод: если n — нечетное число, то функция $y = x^n$ нечетная; если n — четное число, то функция $y = x^n$ четная.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, пусть $f(x) = 2x + 3$; тогда $f(1) = 5$, а $f(-1) = 1$, т. е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не выполняется ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть четной, нечетной, а также ни той ни другой.

Изучение вопроса, является ли заданная функция четной или нечетной, называют *исследованием функции на четность*.

В определениях 8 и 9 речь идет о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ одновременно принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют *симметричным множеством*.

Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 5)$ — несимметричные множества.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X — симметричное множество. Если же X — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной, ни нечетной.

Учитывая сказанное выше, рекомендуем при исследовании функции на четность использовать следующий алгоритм.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$, $x \in X$ на четность

1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Составить выражение $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если имеет место тождество $f(-x) = f(x)$, то функция четная;
   б) если имеет место тождество $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 7. Исследовать на четность функцию:

а) $y = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$; в) $y = \dfrac{x-4}{x^2-9}$;

б) $y = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Решение. а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \dfrac{2}{(-x)^6} = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \dfrac{2}{x^6}$ — четная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \dfrac{3}{(-x)^3} = -x^5 - \dfrac{3}{-x^3} = -\left(x^5 - \dfrac{3}{x^3}\right)$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - \dfrac{3}{x^3}$ — нечетная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 9}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 3 и -3. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и -3. Это — симметричное множество.

2) $f(-x) = \dfrac{(-x) - 4}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что скорее всего не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмем конкретное значение x, например $x = 4$. Имеем: $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\dfrac{8}{7}$, т. е. $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни четной, ни нечетной.

г) Функция $y = \sqrt{x - 3}$ определена на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция не является ни четной, ни нечетной. ■

Теперь обсудим геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы

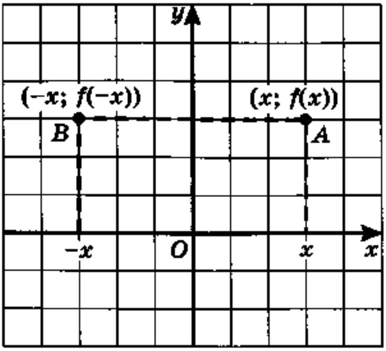


Рис. 36

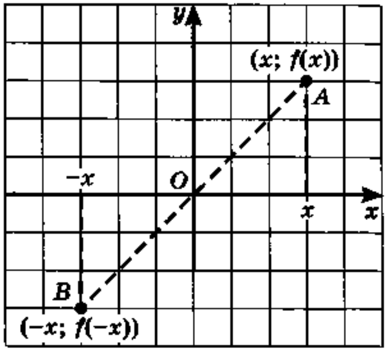


Рис. 37

являются противоположными числами, а ординаты одинаковы, т. е. эти точки симметричны относительно оси y (рис. 36). Таким образом, для каждой точки A графика четной функции существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика. Это означает, что ***график четной функции симметричен относительно оси y***.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами и ординаты являются противоположными числами, т. е. эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 37). Таким образом, для каждой точки A графика нечетной функции существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика. Это означает, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат***.

Верны и обратные утверждения.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция.

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$, $x \in X$ относительно оси y означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция.

Симметрия графика функции $y = f(x)$, $x \in X$ относительно начала координат означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

Выше, в § 7, мы говорили о том, как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = |f(x)|$. Теперь рассмотрим другую задачу: как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = f(|x|)$. Пусть график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 38, *а*. Поскольку при $x \geqslant 0$ выполнятся равенство $|x| = x$, можно сделать вывод о том, что при $x \geqslant 0$ графики функций $y = f(|x|)$ и $y = f(x)$ совпадают. Замечаем, далее, что, поскольку $|-x| = |x|$, функция $y = f(|x|)$ является четной, а потому ее график симметричен относительно оси ординат. Учтя все это, строим график функции $y = f(|x|)$, он изображен на рисунке 38, *б*.

Завершая разговор о графиках функции $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$, построим графики следующих функций: $y = 2x - 4$ (рис. 39, *а*), $y = |2x - 4|$ (рис. 39, *б*), $y = 2|x| - 4$ (рис. 39, *в*), и наконец, $y = |2|x| - 4|$ (рис. 39, *г*).

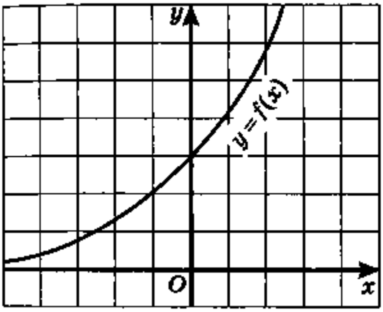


Рис. 38, *а*

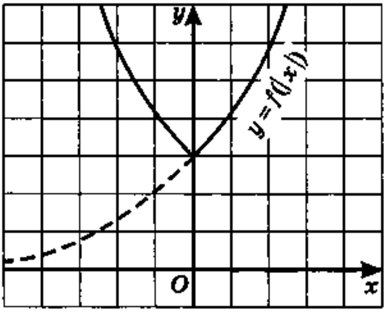


Рис. 38, *б*

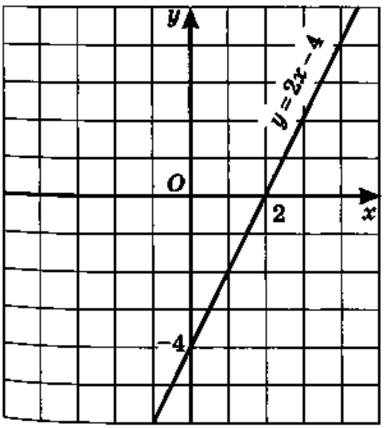


Рис. 39, *а*

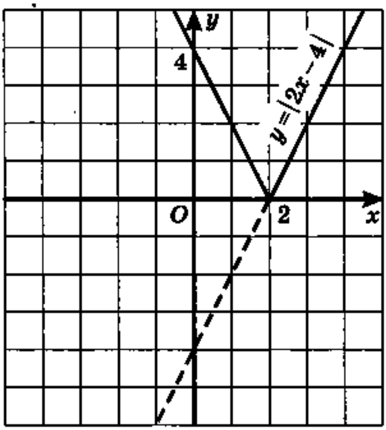


Рис. 39, *б*

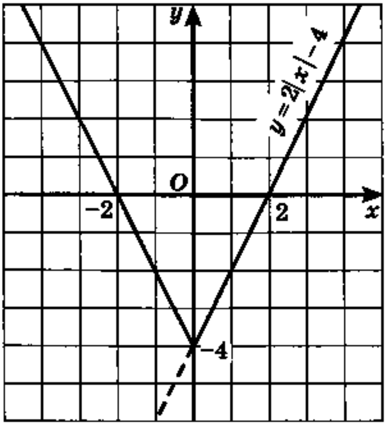


Рис. 39, в

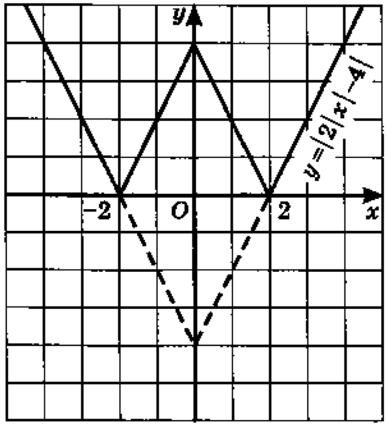


Рис. 39, г

§ 9. Периодические функции

В природе и технике часто встречаются явления, повторяющиеся по истечении некоторого промежутка времени. Например, при вращении Земли вокруг Солнца ее расстояние от Солнца все время меняется, но после полного оборота Земля оказывается на том же расстоянии от Солнца, что и год тому назад. Возвращается на свое место после полного оборота и лопасть турбины. Такие периодически повторяющиеся процессы описываются периодическими функциями.

Определение 1. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T, если для любого $x \in X$ выполняются равенства

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T). \qquad (1)$$

Из этого определения следует, что если функция с периодом T определена в точке x, то она определена и в точках $x + T$, $x - T$.

Любая функция имеет период, равный нулю (при $T = 0$ равенство (1) превращается в тождество $f(x - 0) = f(x) = f(x + 0)$).

Определение 2. Функцию, имеющую отличный от нуля период T, называют **периодической**.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T, то любое число, кратное T (т. е. число вида kT, $k \in Z$), также является ее периодом.

Докажем, например, что $2T$ — период функции. Имеем:

$$f(x) = f(x + T) = f((x + T) + T) = f(x + 2T),$$
$$f(x) = f(x - T) = f((x - T) - T) = f(x - 2T).$$

Аналогично доказывается, что $f(x) = f(x + 3T) = f(x - 3T)$, $f(x) = f(x + 4T) = f(x - 4T)$ и т. д.

Итак,

$$f(x - kT) = f(x) = f(x + kT).$$

Значит, все числа вида kT, $k \in Z$ — периоды функции.

Таким образом, периодическая функция имеет бесконечное множество различных периодов. В большинстве случаев среди положительных периодов периодической функции есть наименьший. Его называют *основным периодом* этой функции, все остальные ее периоды кратны основному периоду.

График периодической функции обладает следующей особенностью. Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения ее графика достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков длины T, а затем выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси x на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... (рис. 40). Чаще всего в качестве такого промежутка длины T выбирают промежуток с концами в точках $\left(-\frac{T}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{T}{2}; 0\right)$ или $(0; 0)$ и $(T; 0)$.

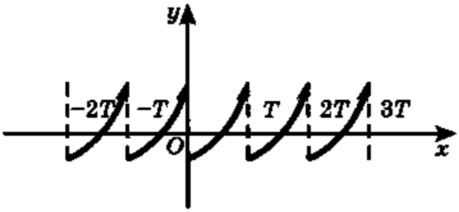


Рис. 40

Пример. Доказать, что функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x — см. § 7) периодическая.

Решение. Очевидно, что числа x и $x \pm k$, где k — любое целое число, имеют одинаковую дробную часть, т. е. $\{x - k\} = \{x\} = \{x + k\}$. Значит, любое целое число является периодом функции; есть и основной период: $T = 1$. Это наглядно иллюстрирует график функции $y = \{x\}$ (см. рисунок 30 в § 7). ■

В заключение заметим, что не у всякой периодической функции есть основной период. Классический пример — функция Дирихле* $y = d(x)$, где

$$d(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

* *П. Дирихле* (1805—1859) — немецкий математик.

Любое рациональное число r является периодом этой функции. В самом деле, если x — рациональное число, то $x - r$, $x + r$ — рациональные числа, а потому $d(x - r) = d(x) = d(x + r) = 1$. Если же x — иррациональное число, то $x - r$, $x + r$ — иррациональные числа, а потому $d(x - r) = d(x) = d(x + r) = 0$.

Итак, любое рациональное число является периодом функции Дирихле. Но среди положительных рациональных чисел нет наименьшего числа, значит, у периодической функции Дирихле нет основного периода.

§ 10. Обратная функция

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рисунках 41 и 42. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют областью своих значений отрезок $[c; d]$. Функция $y = f(x)$ обладает следующим свойством: какое бы число y_0 из множества значений функции ни взять, оно является значением функции только в одной точке x_0. Функция $y = g(x)$ этим свойством не обладает; например, для выбранного на рисунке 42 значения y_0 имеем: $y_0 = g(x_1)$, $y_0 = g(x_2)$ и $y_0 = g(x_3)$. Иными словами, среди множества значений функции $y = g(x)$ есть такие, которые функция принимает более чем в одной точке области определения. Говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*, а функция $y = g(x)$ *необратима*.

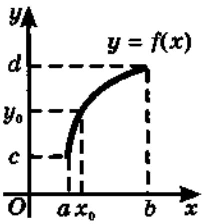


Рис. 41

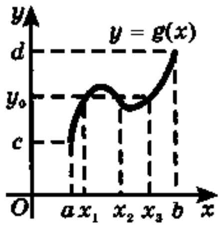


Рис. 42

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1. ***Если функция $y = f(x)$ монотонна на множестве X, то она обратима.***

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X и пусть $x_1 \neq x_2$ — две точки множества X. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Тогда из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима.

Наглядную иллюстрацию этой теоремы дают рисунки 41 и 42: функция $y = f(x)$ монотонна и обратима, тогда как функция $y = g(x)$ немонотонна и необратима.

Определение 2. Пусть обратимая функция $y = f(x)$ определена на множестве X и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X — область значений функции. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Из теоремы 1 следует, что для любой монотонной на X функции $y = f(x)$ существует обратная. Чтобы ее найти, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Теорема 2. ***Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на Y.***

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая функция, y_1 и y_2 — два ее значения, причем $y_1 < y_2$. Так как функция обратима, то каждое из этих значений достигается в одной точке: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Значения x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. В самом деле, если предположить, что $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию. Значит, из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, а это означает, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y.

Пример 1. Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция $y = 5x - 3$ определена на $\boldsymbol{R}$, возрастает на $\boldsymbol{R}$ и область ее значений есть $\boldsymbol{R}$. Значит, обратная функция существует на $\boldsymbol{R}$. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x; получим: $x = \frac{y + 3}{5}$. Это и есть искомая обратная функция. Она определена и возрастает на $\boldsymbol{R}$. ■

Пример 2. Показать, что для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

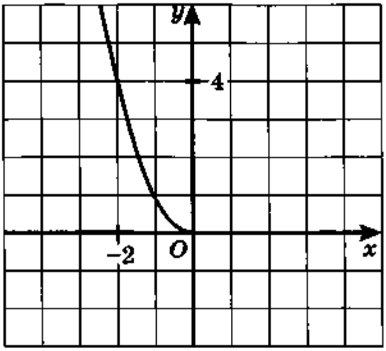


Рис. 43

Решение. Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ убывает, и область ее значений — луч $[0; +\infty)$ (рис. 43). Значит, обратная функция существует на $[0; +\infty)$.

Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. По условию $x \in (-\infty; 0]$. Этому промежутку принадлежат значения функции $x = -\sqrt{y}$ и не принадлежат значения функции $x = \sqrt{y}$. Таким образом, искомая обратная функция имеет вид $x = -\sqrt{y}$, $y = [0; +\infty)$. Эта функция, как и исходная функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, является убывающей. ■

Замечание. Монотонность функции, как мы видели, является достаточным условием существования обратной функции. Но оно не является необходимым условием. Так, на рисунке 44 изображен график немонотонной, но обратимой функции.

Переход от функции $y = f(x)$, $x \in X$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ сводится лишь к изменению ролей множеств X и Y: в первом случае осуществляется переход от X к Y, во втором — от Y к X, тогда как зависимость между x и y одна и та же в обоих случаях. Поэтому *графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.*

Обычно для обратной функции аргумент обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, т. е. вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут: $y = f^{-1}(x)$. Таким образом, если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $y = f(x)$ или эквивалентному уравнению $x = f^{-1}(y)$, то уравнению $y = f^{-1}(x)$ удовлетворяет пара чисел $(y; x)$.

Поэтому график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием является симметрия относительно прямой $y = x$ (биссектрисы I и III координатных углов). Значит, ***чтобы получить график функции $y = f^{-1}(x)$, обратной по отношению к функции $y = f(x)$, надо график функции $y = f(x)$ преобразовать симметрично относительно прямой $y = x$*** (рис. 45).

Пример 3. Дана функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое

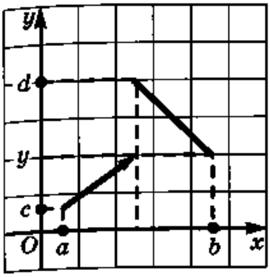


Рис. 44

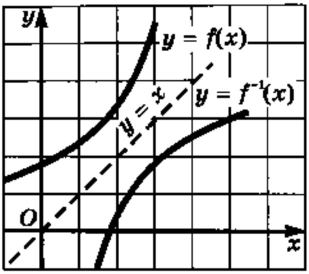


Рис. 45

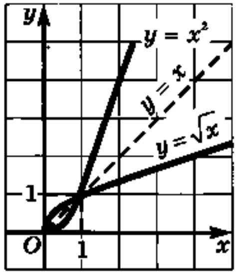


Рис. 46

выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

Решение. Заданная функция возрастает, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке $[0; +\infty)$.

Поменяв местами x и y, получим: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$. График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$, с помощью симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 46). ■

ГЛАВА 3 Тригонометрические функции

§ 11. Числовая окружность

Изучая курс алгебры, вы до сих пор имели дело с алгебраическими функциями, т. е. функциями, в аналитической записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменными (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного или кубического корня). Но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями другого типа, не алгебраическими. С первыми представителями класса неалгебраических функций — тригонометрическими функциями — мы познакомимся в этой главе.

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель — *числовая окружность*.

Для начала рассмотрим конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью, длина которой равна 400 м. Отмечен старт — точка A (рис. 47). Бегун из точки A движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м, 400 м, 800 м, 1500 м? А где надо провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м?

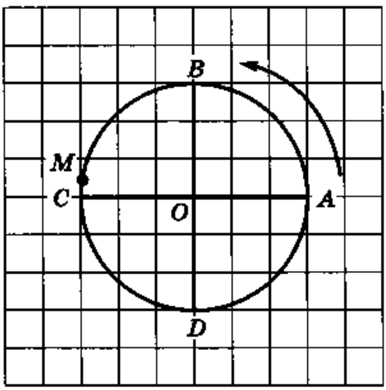


Рис. 47

Через 200 м бегун окажется в точке C, диаметрально противоположной точке A (200 м — это длина половины беговой дорожки, т. е. длина половины окружности). Пробежав 400 м, он вернется в точку A; пробежав 800 м, он вновь окажется в точке A. А 1500 м — это три «круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т. е. $\frac{3}{4}$ беговой дорожки. Финиш этой дистанции будет в точке D.

Нам осталось подсчитать, где находится финиш марафонской дистанции. Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь 42 км, и до финиша останется 195 м, это на 5 м меньше длины половины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке M, расположенной около точки C (рис. 47).

По беговой дорожке стадиона можно пробежать путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, можно и любому отрицательному числу поставить в соответствие точку на окружности: просто надо заставить спортсмена бежать в противоположном направлении, т. е. стартовать из точки A в направлении по часовой стрелке.

В принципе, любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность — окружность радиусом 1. Это будет наша «беговая дорожка». Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле $L = 2\pi R$. Если $R = 1$, то $L = 2\pi$. Длина половины окружности равна π, а длина четверти окружности — AB, BC, CD, DA (рис. 48) — равна $\frac{\pi}{2}$. Условимся называть дугу AB *первой четвертью* единичной окружности, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвертой четвертью* (рис. 48). При этом обычно речь идет об *открытой дуге*, т. е. о дуге без ее концов (что-то вроде интервала на числовой прямой).

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра (рис. 48). Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку M окружности по следующему правилу:

1) если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длиной t; конечная точка M этого пути и будет искомой точкой: $M = M(t)$;

2) если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длиной $|t|$; конечная точка M этого пути и будет искомой точкой: $M = M(t)$;

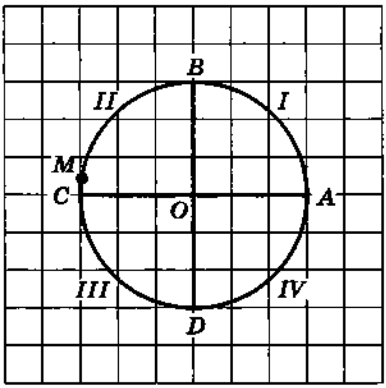


Рис. 48

3) числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A: $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью**.

Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для поиска соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении (рис. 48). Учтем, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$. Тогда числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; числу π соответствует точка C; числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, мы снова попадем в начальную точку A.

$\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и еще путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который, как мы видели выше, закончится в точке D.

$9\pi = 4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза описать целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и еще путь длиной π, который, как мы видели выше, закончится в точке C.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно, отправляясь из точки A, пройти по окружности в **отрицательном направлении** путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B. ■

Замечание 1. Работая с числовой прямой, обычно не говорят «точка прямой, соответствующая числу x», а говорят «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: фраза «точка t» означает, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

Пример 2. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB числовой окружности на три равные части точками K и P, получим: $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим: $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 49). ■

Пример 3. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам: $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся рисунком 49. Отложив дугу AM (ее длина равна $\frac{\pi}{4}$) от точки A пять раз в отрицательном направлении, получим точку L — середипу дуги BC. Итак, $L = L\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A семь раз в положительном направлении, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Учтем, что $\frac{5\pi}{3} = 10 \cdot \frac{\pi}{6}$. Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A десять раз в положительном направлении, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак, $S = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. ■

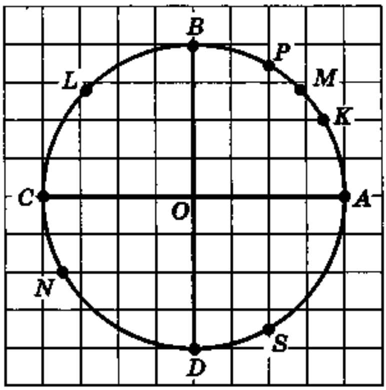


Рис. 49

Замечание 2. Обратите внимание на некоторую вольность в использовании математического языка. Ясно, что **дуга** AK

и **длина дуги** AK — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). Но обозначается и то и другое одинаково: AK. Более того, если точки A и K соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: AK. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и их кратным (т. е. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{2}$ и т. д.). Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

ПЕРВЫЙ МАКЕТ

Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано ее «имя» (рис. 50).

ВТОРОЙ МАКЕТ

Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано ее «имя» (рис. 51).

Следует обратить внимание на то, что на обоих макетах можно выделенным точкам присвоить и другие имена (условимся

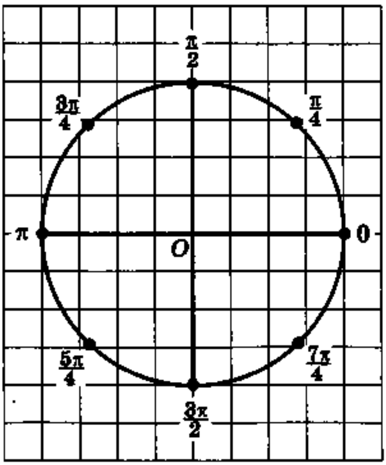


Рис. 50

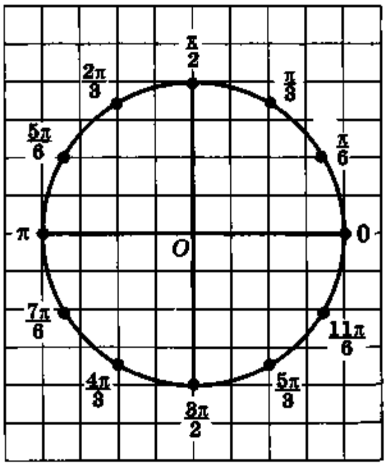


Рис. 51

в дальнейшем жаргонное в данном контексте слово «имя» использовать без кавычек). Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете было присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли бы присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, двигаясь по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно: $0, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, двигаясь по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно: $0, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{11\pi}{6}$.

Во всех разобранных примерах длины дуг выражались некоторыми долями числа π, что вполне понятно: длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаем дуги, длины которых выражаются долями числа π. Но, разумеется, можно найти на единичной окружности и такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1. Рассуждаем так:

$$\pi \approx 3{,}14;\ \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047;\ \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} = 0{,}785.$$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Обратимся к рисунку 49. Точка E, такая, что $AE = 1$, находится между точками M и P, поближе к точке P; точно указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

Рассуждая аналогичным образом, делаем вывод, что на единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рисунке 52 отмечены (приблизительно) соответствующие точки (причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена черточками на три равные части).

Пример 4. Найти на числовой окружности точку, соответствующую числу -7.

Решение. Нам нужно, отправляясь из точки A и двигаясь в отрицательном направлении (в направлении по часовой стрелке),

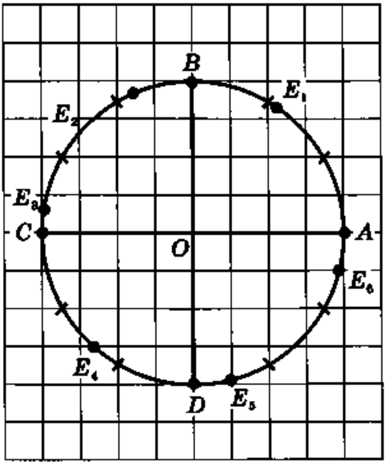


Рис. 52

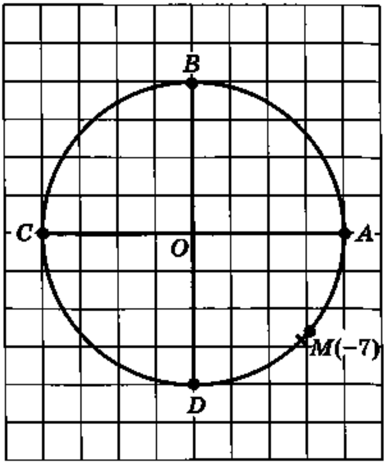


Рис. 53

пройти по окружности путь длиной 7. Длина одной окружности равна приблизительно 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь, приблизительно равный 0,72. Что же это за дуга? Ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рисунке 53 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти). ■

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только на прямой ее найти легче, чем на окружности). Но для числовой прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно: выше мы неоднократно убеждались в этом. Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида $t + 2\pi k$, где параметр k — любое целое число ($k \in Z$).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число k можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или иную сторону. Если, например, $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь обходов окружности в отрицательном направлении. Если мы находимся в точке M, то, сделав еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{M(t) = M(t + 2\pi k),\ k \in Z.}$$

На двух макетах числовой окружности (рис. 50, 51) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ т. е. числа, возникающие при первом обходе окружности в положительном направлении. На самом деле у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, и т. д.

Пример 5. Найти на числовой окружности точку:

а) $\frac{19\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение.

а) $\frac{19\pi}{4} = \left(4 + \frac{3}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$

Значит, числу $\frac{19\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{3\pi}{4}$, — это середина второй четверти (рис. 50).

б) $-\frac{37\pi}{6} = -\left(6 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-3).$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$ (или числу $\frac{11\pi}{6}$ на рис. 51). ■

Пример 6. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка 20?

Решение. Представим число 20 в виде $t + 2\pi k$ и подберем значение $k \in \mathbf{Z}$ так, чтобы число t попало в отрезок $[0; 2\pi]$ (или $[-2\pi; 0]$). Тогда мы сможем определить, какой четверти принадлежит точка t, а с ней и точка 20 (поскольку на числовой окружности t и $t + 2\pi k = 20$ — одна и та же точка).

Сделаем прикидку: $2\pi \approx 6{,}28$, значит, $2\pi k \approx 6{,}28k$; надо подобрать целое число k так, чтобы число $6{,}28k$ оказалось как можно ближе к числу 20. Очевидно, что $k = 3$. Имеем: $20 = 1{,}16 + 6{,}28 \cdot 3 \approx$

$\approx 1{,}16 + 2\pi \cdot 3$. Точка 1,16 находится в первой четверти, значит, и точка 20 принадлежит первой четверти. ■

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка [3; 5] служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала $(-4; 0)$ служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно числовое имя, на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

Пример 7. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге:

а) AB; б) BA; в) BD; г) DB; д) KM; е) MK

(здесь K и M соответственно середина первой и третьей четвертей числовой окружности).

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 54). Главные имена точек A и B соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Для удобства на первых порах будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

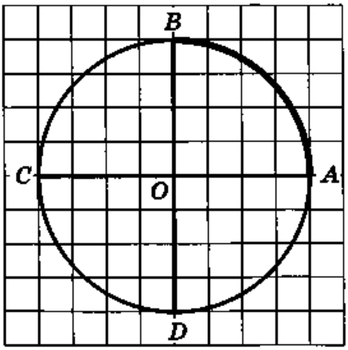


Рис. 54

б) Дуга BA — это дуга с началом в точке B и концом в точке A при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 55). Главные имена точек B и A в этом случае соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

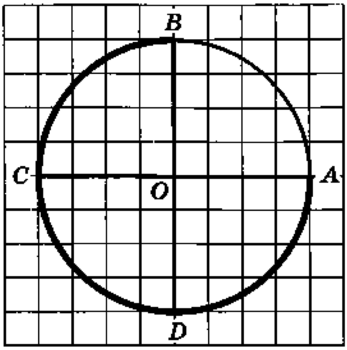


Рис. 55

а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k^*.$$

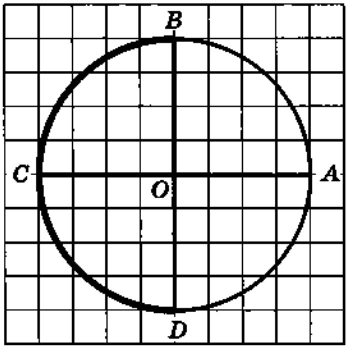


Рис. 56

в) Дуга BD — это дуга с началом в точке B и концом в точке D при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 56). Главные имена точек B и D соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Значит, ядром аналитической записи дуги BD является неравенство

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги BD имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

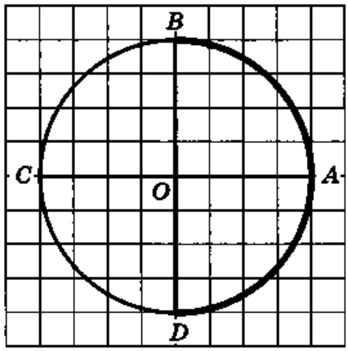


Рис. 57

г) Дуга DB — это дуга с началом в точке D и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 57). Главные имена точек D и B соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (а не $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как в предыдущем слу-

* Договоримся в дальнейшем не писать каждый раз $k \in Z$, хотя мы всегда будем это подразумевать.

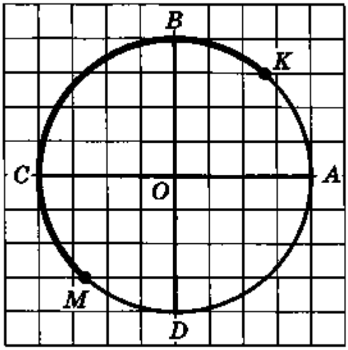


Рис. 58

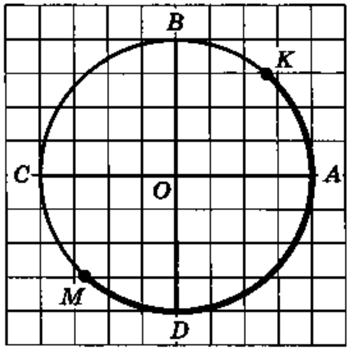


Рис. 59

чае); при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части неравенства. Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

д) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 58). Главные имена точек K и M соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

е) Дуга MK — это дуга с началом в точке M и концом в точке K при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 59). Главные имена точек M и K соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$ ■

§ 12. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy (рис. 60): центр окружности совместим с началом координат, ее радиус примем за масштабный отрезок. Начальная точка A числовой окружности — это точка (1; 0), при этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$.

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1; -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности, поскольку ее центром служит начало координат, а радиус равен 1. Уравнение числовой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (рис. 50 и 51). Начнем с точек первого макета:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ и } \frac{7\pi}{4}.$$

Числу $\frac{\pi}{4}$ соответствует точка M_1 на рисунке 60. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P. Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то соответствующий дуге AM_1 центральный угол окружности равен 45°, т. е. $\angle POM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; его катеты OP и M_1P равны, т. е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны. Кроме того, координаты точки $M_1(x; y)$ удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$. Значит, чтобы найти координаты точки M_1, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

при условии, что $x > 0$, $y > 0$. Решением является пара чисел $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

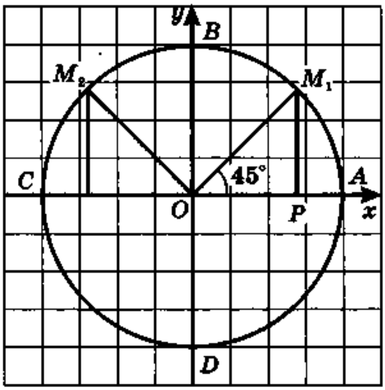


Рис. 60

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А что означает запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$? Она означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если будет написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x;\ y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом, $(x;\ y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти. Рассуждая, как и выше, получим для модуля абсциссы и модуля ординаты этой точки те же значения: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, значит,

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — получаем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвертой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Оформим полученные результаты в виде таблицы:

Точка окружности	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (рис. 51). Из точки $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ опустим перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 61). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1 = 1$. Угол M_1OP равен 30°, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB. Известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P = \frac{1}{2}$, тем самым найдена ордината точки M_1: $y = \frac{1}{2}$ (в первой четверти $y > 0$).

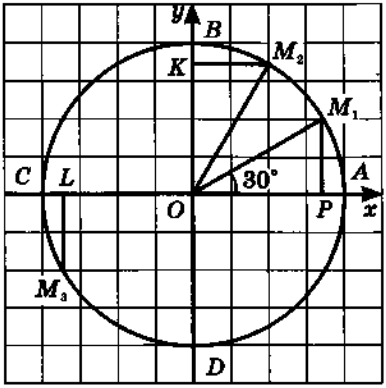


Рис. 61

Абсциссу точки M_1 найдем с помощью теоремы Пифагора:

$$x^2 = OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Получаем: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (в первой четверти $x > 0$).

$$\text{Итак, } M_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Возьмем точку $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Треугольник M_2OK равен треугольнику M_1OP (рис. 61), поэтому

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Те же самые абсолютные значения $\left(\frac{1}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ будут иметь координаты точек $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ (см. второй макет). По чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

(рис. 61). Числу $\frac{7\pi}{6}$ соответствует точка третьей четверти, в которой $x < 0$ и $y < 0$; далее, для точки M_3 выполняется неравенство $|y| < |x|$ (см. рис. 61), значит,

$$|x| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ а } |y| = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$$

А теперь попробуйте найти декартовы координаты точки $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$, проведя аналогичные рассуждения. Мы же пока приведем таблицу, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода:

Точка окружности	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности:

а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в предыдущем параграфе: числам t и $t + 2\pi k$ $(k \in Z)$ соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $\frac{45\pi}{4} = \left(10 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 5.$

Следовательно, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$ (рис. 50). Для точки $\frac{5\pi}{4}$ имеем: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) $-\frac{37\pi}{3} = -\left(12 + \frac{1}{3}\right) \cdot \pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-6)$.

Следовательно, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi = 44\pi + \pi = \pi + 2\pi \cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, это точка $C(-1;\ 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi) = P_3(-1;\ 0).$$

г) $-18\pi = 0 + 2\pi \cdot (-9)$. Следовательно, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, это точка $A(1;\ 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi) = P_4(1;\ 0).$$ ■

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 62). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. В результате получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений*:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \ k \in Z.$

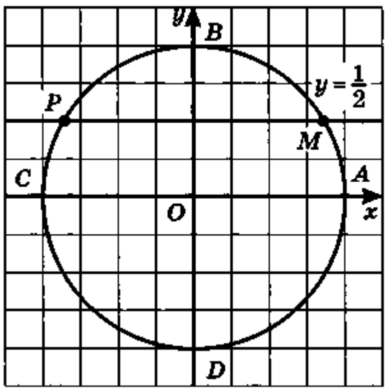


Рис. 62

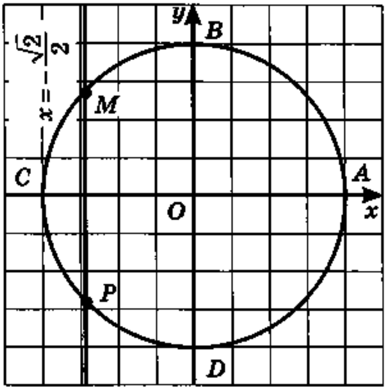


Рис. 63

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 63). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (рис. 50), а значит, и любому числу вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$; $k \in Z$.

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. В результате получаются две серии значений: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки M) и $t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки P). Чем это лучше по сравнению с записью ответа к примеру 3? Тем, что обе серии значений можно охватить одной записью: $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 62). Неравенству $y > \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т. е. дуги без концов M и P. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \quad \blacksquare$$

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y < \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 62). Неравенству $y < \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги PM имеет вид

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k. \quad \blacksquare$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 63). Неравенству $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги PM имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k. \qquad \blacksquare$$

Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 63). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Главные имена точек M и P в этом случае соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad \blacksquare$$

§ 13. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

1. Синус и косинус

<u>*Определение 1.*</u> Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают $\sin t$.

Итак (рис. 64),

$$\boxed{\begin{gathered}\textbf{если } M(t) = M(x;\, y), \textbf{ то}\\ x = \cos t,\\ y = \sin t.\end{gathered}}$$

В § 12 мы отметили, что для любой точки $M(x;\ y)$ числовой окружности выполняются неравенства: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Отсюда следует, что

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1.$$

Каждая точка M числовой окружности имеет в системе xOy координаты x и y, причем

если точка M находится в первой четверти, то $x > 0$, $y > 0$;

если точка M находится во второй четверти, то $x < 0$, $y > 0$;

если точка M находится в третьей четверти, то $x < 0$, $y < 0$;

если точка M находится в четвертой четверти, то $x > 0$, $y < 0$.

Это позволяет составить соответствующую таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности:

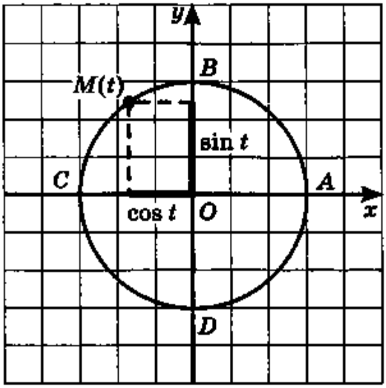


Рис. 64

Четверть	I	II	III	IV
$\cos t$	+	−	−	+
$\sin t$	+	+	−	−

Мы отметили в § 12, что уравнение числовой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Но $x = \cos t$, $y = \sin t$, значит,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

В § 12 мы заострили внимание на том, как важно научиться отыскивать координаты некоторых точек числовой окружности. Теперь эта мысль стала, думается, предельно ясной: опираясь на таблицы из § 12, мы без труда составим соответствующие таблицы для вычисления значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 1

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 2

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t = \frac{45\pi}{4}$; б) $t = -\frac{37\pi}{3}$; в) $t = 45\pi$; г) $t = -18\pi$.

Решение. а) В примере 1а § 12 мы установили, что числу $t = \frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Воспользовавшись данными таблицы 1 для точки $t = \frac{5\pi}{4}$, получим:

$$\cos\frac{45\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\frac{45\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) В примере 1б § 12 мы установили, что числу $t = -\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Воспользовавшись данными таблицы 2 для точки $t = \frac{5\pi}{3}$, получим:

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{1}{2};\quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) В примере 1в § 12 мы установили, что числу $t = 45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Воспользовавшись данными таблицы 1 для точки $t = \pi$, получим:

$$\cos 45\pi = -1,\quad \sin 45\pi = 0.$$

г) В примере 1г § 12 мы установили, что числу $t = -18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Воспользовавшись данными таблицы 1 для точки $t = 0$, получим:

$$\cos(-18\pi) = 1,\quad \sin(-18\pi) = 0.$$ ■

Пример 2. Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Но эта задача уже решена выше — в примере 2 § 12:

$$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \ k \in \mathbf{Z}. \qquad \blacksquare$$

Пример 3. Решить уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Но эта задача уже решена в примере 3 из § 12:

$$t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$(\text{или } t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k). \qquad \blacksquare$$

Пример 4. Решить уравнения:

а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y = 0$ и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (рис. 64), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т. д. Короче это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk, $k \in \mathbf{Z}$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид

$$t = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

б) Ординату $y = 1$ имеет точка B числовой окружности (рис. 64), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

в) Ординату $y = -1$ имеет точка D числовой окружности (рис. 64), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$ ■

Пример 5. Решить уравнения:

а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = 0$ и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (рис. 64), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т. д. Короче это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

б) Абсциссу $x = 1$ имеет точка A числовой окружности (рис. 64), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид

$$t = 2\pi k.$$

в) Абсциссу $x = -1$ имеет точка C числовой окружности (рис. 64), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид

$$t = \pi + 2\pi k.$$ ■

Замечание. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k принимает любые целочисленные значения ($k \in Z$), мы это подразумеваем, но ради краткости не всегда записываем.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $\cos t = \frac{2}{5}$; б) $\sin t = -0{,}3$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $\frac{2}{5}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

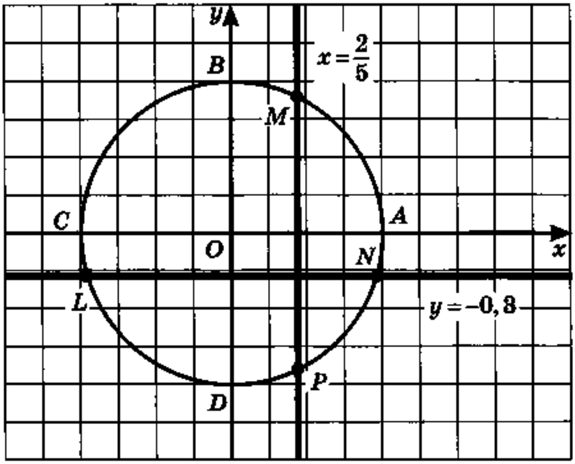


Рис. 65

Абсциссу $x = \frac{2}{5}$ имеют точки M и P (рис. 65), но каким числам t они соответствуют, мы не знаем. Решить это тригонометрическое уравнение мы пока не можем.

б) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $-0{,}3$ и записать, каким числа t они соответствуют. Ординату $-0{,}3$ имеют точки L и N (рис. 65), но каким числам t они соответствуют, мы не знаем. Решить это тригонометрическое уравнение мы тоже пока не можем.

К уравнениям из примера 6 мы вернемся, после того как заложим необходимую теоретическую базу. Это будет в § 22. ■

Пример 7. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 12.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 8. Решить неравенство $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 12.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решить систему неравенств $\begin{cases} \sin t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Решение. Сначала изобразим решения заданной системы неравенств на числовой окружности. Нужно найти на ней такие точки, координаты которых удовлетворяют условиям: $\begin{cases} y \leqslant \frac{1}{2}, \\ x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Первому неравенству удовлетворяют точки дуги NM, а второму — точки дуги PK на рисунке 66. Поскольку речь идет о системе неравенств, нас интересуют общие точки обеих дуг — это точки дуги PM. Осталось составить аналитическую запись этой дуги:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$ ■

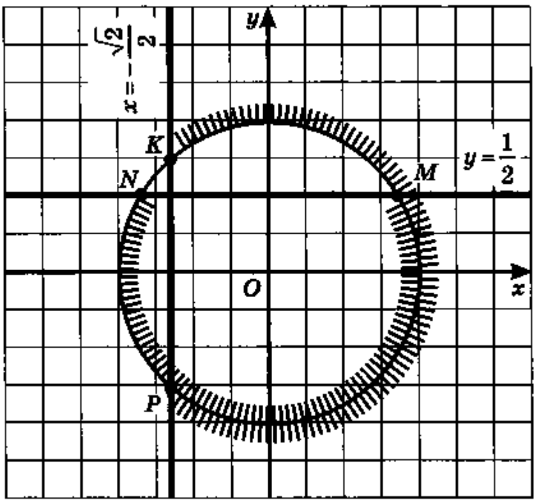


Рис. 66

Пример 10. Какое из двух чисел больше: $\sin 1$ или $\sin 2$?

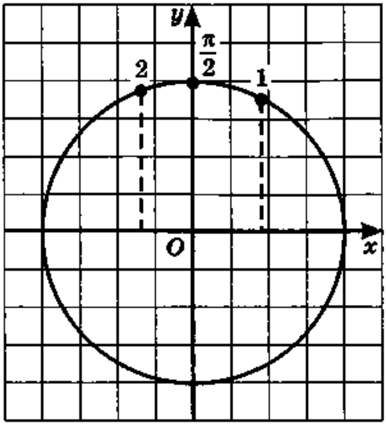


Рис. 67

Решение. Отметим на числовой окружности точки 1 и 2 (рис. 67). Обратите внимание на то, что расстояние от точки 1 до точки $\frac{\pi}{2}$ (по окружности) примерно равно 0,57 (поскольку $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$), а расстояние от точки 2 до точки $\frac{\pi}{2}$ примерно равно 0,43. Точка 2 находится ближе к точке $\frac{\pi}{2}$, чем точка 1, значит, ее ордината больше. Отсюда следует:

$$\sin 2 > \sin 1.$$ ■

Пример 11. Расположить в порядке возрастания числа $\sin 3$, $\cos 4$, $\sin 7$, $\cos 7$.

Решение. Отметим на числовой окружности точки 3, 4, 7 (рис. 68). Сразу заметим, что $\sin 3$, $\sin 7$, $\cos 7$ — положительные числа, а $\cos 4$ — отрицательное число, значит, $\cos 4$ — наименьшее из данных чисел.

Далее, число 7 отличается от числа 2π (точка A) примерно на 0,72 (поскольку $2\pi \approx 6{,}28$), а расстояние (по окружности) от точки A до середины первой четверти равно $\frac{\pi}{4}$, т. е. примерно 0,785. Это значит, что точка 7 располагается чуть ниже середины первой четверти (рис. 68), а потому ее ордината, т. е. $\sin 7$, меньше ее абсциссы, т. е. $\cos 7$. Итак, $\sin 7 < \cos 7$.

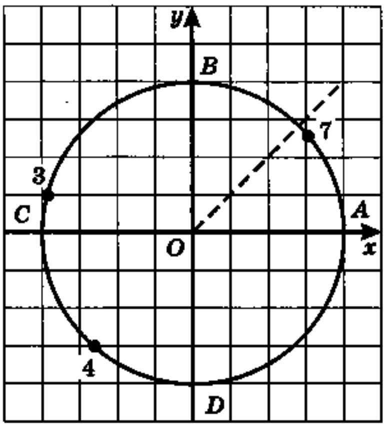


Рис. 68

Наконец, точка 3 находится по отношению к точке $C(\pi)$ ближе, чем точка 7 по отношению к точке $A(2\pi)$, а потому ордината точки 3 меньше ординаты точки 7. Это значит, что $\sin 3 < \sin 7$.

Окончательно получаем следующий результат:

$$\cos 4 < \sin 3 < \sin 7 < \cos 7. \ \blacksquare$$

Завершая разговор о синусе и косинусе, остановимся на их свойствах.

Свойство 1. Для любого числа t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t; \\ \cos(-t) &= \cos t. \end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности, т. е. симметричная точке M относительно оси абсцисс (рис. 69). У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$.

Свойство 2. Для любого значения t справедливы равенства:

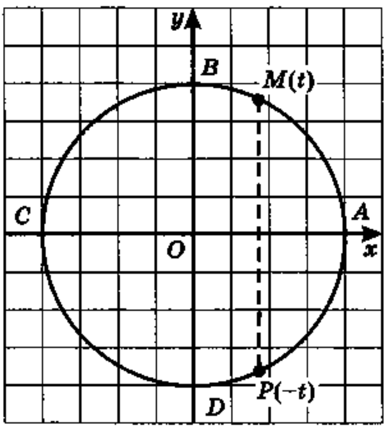


Рис. 69

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(t + 2\pi k) &= \sin t; \\ \cos(t + 2\pi k) &= \cos t. \end{aligned}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы уже не раз пользовались).

Свойство 3. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(t + \pi) &= -\sin t; \\ \cos(t + \pi) &= -\cos t. \end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t + \pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 70). У таких точек абсциссы равны по модулю, но противоположны по знаку, и ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что

$$\cos(t + \pi) = -\cos t;$$
$$\sin(t + \pi) = -\sin t.$$

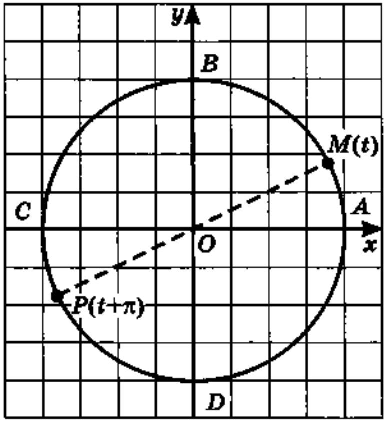


Рис. 70

2. Тангенс и котангенс

Определение 2. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, т. е. что $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (см. пример 5а), а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$, т. е. что $t \neq \pi k$ (см. пример 4а). Поэтому обычно определения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ записывают так:

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \text{ где } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \text{ где } t \neq \pi k,\ k \in Z.}$$

Впредь, говоря о $\text{tg}\, t$ или $\text{ctg}\, t$, мы будем подразумевать (не записывая), что аргумент t принимает только допустимые значения.

Опираясь на таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности (она имеется в пункте 1), нетрудно составить аналогичную таблицу для тангенса и котангенса:

Четверть	I	II	III	IV
$\text{tg}\, t$, $\text{ctg}\, t$	+	−	+	−

Пример 12. Вычислить:

а) $\text{tg}\, \frac{\pi}{4}$; б) $\text{tg}\, \frac{5\pi}{3}$; в) $\text{ctg}\, \frac{\pi}{2}$; г) $\text{ctg}\, \frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит,

$$\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

б) $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Значит,

$$\text{tg}\, \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$$

в) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Значит,

$$\text{ctg}\, \frac{\pi}{2} = 0 : 1 = 0.$$

г) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

$$\text{ctg}\, \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$$ ■

Как видите, зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса.

Тем не менее есть смысл составить небольшую таблицу основных значений тангенса и котангенса:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример 13. Расположить в порядке возрастания числа

$$1,\ \sin 1,\ \cos 1,\ \operatorname{tg} 1.$$

Решение. Отметим на числовой окружности точку 1: она расположена между точками $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, ближе к точке $\frac{\pi}{3}$ (рис. 71).

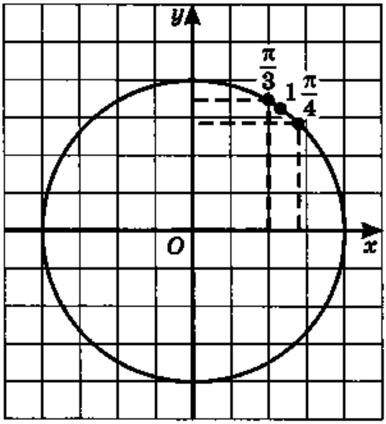


Рис. 71

У этой точки абсцисса и ордината положительны, причем абсцисса меньше ординаты. Это значит, что $\cos 1 < \sin 1$. Ясно также, что оба эти числа меньше 1.

Что касается $\operatorname{tg} 1$, то будем рассуждать так: ордината точки 1 больше ординаты точки $\frac{\pi}{4}$, а абсцисса точки 1 меньше абсциссы точки $\frac{\pi}{4}$; это значит, что $\sin \frac{\pi}{4} < \sin 1$, а $\cos \frac{\pi}{4} > \cos 1$. Но тогда

$$\operatorname{tg} 1 = \frac{\sin 1}{\cos 1} > \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos 1} > \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Итак, $\cos 1 < \sin 1 < 1 < \operatorname{tg} 1$. ■

Завершая разговор о тангенсе и котангенсе, остановимся на их свойствах.

Свойство 1. Для любого допустимого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(-t) &= -\operatorname{tg} t; \\ \operatorname{ctg}(-t) &= -\operatorname{ctg} t. \end{aligned}}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\cos(-t) = \cos t$, а $\sin(-t) = -\sin t$ (свойство 1 из пункта 1):

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Свойство 2. Для любого допустимого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t;\\ &\operatorname{ctg}(t+\pi) = \operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\cos(t+\pi) = -\cos t$, а $\sin(t+\pi) = -\sin t$ (свойство 3 из пункта 1):

$$\operatorname{tg}(t+\pi) = \frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(t+\pi) = \frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)} = \frac{-\cos t}{-\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

Нетрудно доказать, что выполняются и такие равенства:

$$\operatorname{tg}(t+2\pi) = \operatorname{tg} t, \quad \operatorname{tg}(t-\pi) = \operatorname{tg} t,$$
$$\operatorname{ctg}(t+2\pi) = \operatorname{ctg} t, \quad \operatorname{ctg}(t-\pi) = \operatorname{ctg} t,$$

и вообще

$$\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{tg}(t+\pi k) = \operatorname{tg} t;\\ &\operatorname{ctg}(t+\pi k) = \operatorname{ctg} t, \text{ где } k \in Z.\end{aligned}}$$

Пример 14. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

Решение. а) По свойству 1 выполняется равенство $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; так как $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то

$$-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(мы воспользовались свойством 2, а точнее, его обобщением). Итак,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$ (здесь мы также воспользовались свойством 2). ■

§ 14. Тригонометрические функции числового аргумента

Каким бы ни было действительное число t, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $u = \sin t$, где t — любое действительное число. Вы умеете вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$), знаете некоторые ее свойства.

Точно так же можно считать, что в предыдущем параграфе вы получили некоторые представления еще о трех функциях: $u = \cos t$, $u = \operatorname{tg} t$, $u = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют **тригонометрическими функциями числового аргумента t**.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций. Некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \text{ где } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \text{ где } t \neq \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \text{ где } t \neq \frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение:

а) $1 + \operatorname{tg}^2 t$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t$.

Решение. а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$. ■

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \text{ где } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \text{ где } t \neq \pi k, k \in Z.}$$

Пример 2. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t.$$

По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух указанных выше возможностей выбираем первую: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит,

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}, \text{ а } \cos^2 t = \frac{144}{169}.$$

Из последнего уравнения находим, что

$$\cos t = \frac{12}{13} \quad \text{или} \cos t = -\frac{12}{13}.$$

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Значит, из двух указанных выше возможностей выбираем вторую:

$$\cos t = -\frac{12}{13}.$$

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \text{ значит, } \sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13};$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

§ 15. Тригонометрические функции углового аргумента

Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс» на самом деле вам давно уже знакомы, правда, использовали вы их до сих пор в несколько иной интерпретации: в геометрии и физике рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс **угла** (а не **числа**, как это было в предыдущих параграфах).

Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла — это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла — это отношение катетов прямоугольного треугольника. В предыдущих параграфах мы иначе определяли

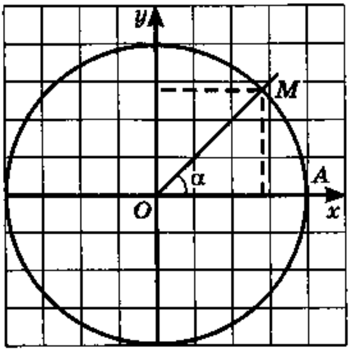


Рис. 72

понятия «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс». На самом деле эти подходы взаимосвязаны, в чем мы сейчас убедимся.

Возьмем угол с градусной мерой $\alpha°$ и построим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 72: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Ординату точки M естественно считать **синусом угла $\alpha°$**, а абсциссу этой точки — **косинусом угла $\alpha°$**.

Для отыскания синуса или косинуса угла $\alpha°$ совсем не обязательно каждый раз делать указанные построения. Достаточно учесть, что дуга AM составляет такую же часть длины числовой окружности, какую угол $\alpha°$ составляет от угла $360°$. Если длину дуги AM обозначить буквой t, то получим:

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{2\pi\alpha°}{360°},\ \text{т. е. } t = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha° = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha}{180};\quad \cos\alpha° = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi\cdot 30}{180} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 90° = \cos\frac{\pi\cdot 90}{180} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

$30°$, $90°$ — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ — *радианная мера* того же угла: $30° = \frac{\pi}{6}$ *рад*, $90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще

$$\boxed{\alpha° = \frac{\pi\alpha}{180}\ \textit{рад.}}$$

В частности,

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \textit{рад},}$$

$$\boxed{1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}.}$$

Например,

$$35^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 35 = \frac{7\pi}{36}\ \textit{рад};\quad \frac{2\pi}{3}\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Ради краткости условимся обозначение «*рад*» опускать, т. е. вполне допустимой является следующая запись:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\cdot 45\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т. д. Есть и различные меры для обозначения величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. **Угол в 1°** — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, опирающийся в единичной окружности на дугу длиной 1, а в окружности произвольного радиуса — на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Из формулы $1\ \textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$ получаем, что

$$1\ \textit{рад} \approx 57{,}3^\circ.$$

Рассматривая функцию $u = \sin t$ (или любую другую тригонометрическую функцию), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как было в предыдущих параграфах, но можем считать эту переменную и мерой угла, т. е. угловым аргументом. Поэтому, говоря о тригонометрической функции, в определенном смысле безразлично, считать ее функцией числового или углового аргумента.

Завершая этот параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, которые вы изучали в геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в этой главе.

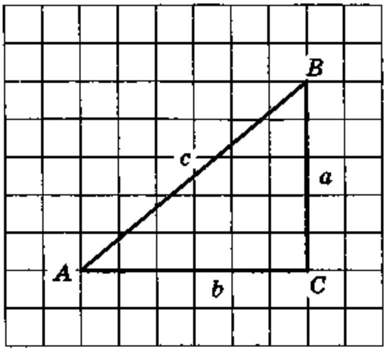


Рис. 73

Теорема. ***Если a, b, c — катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника ABC*** (рис. 73), ***то выполняются следующие равенства:***

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рисунке 74: вершину A поместим в центр окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения гипотенузы AB с окружностью обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т. е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ (радиус числовой окружности равен 1) и что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

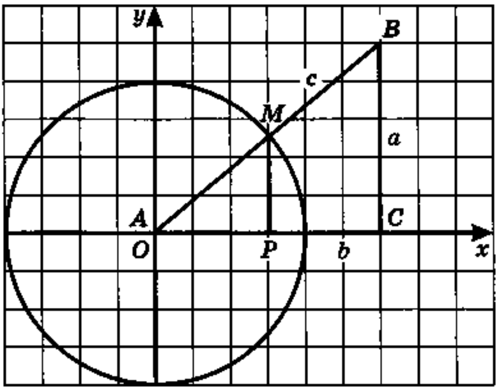


Рис. 74

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ находим, что $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ находим, что $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$.

Теорема полностью доказана.

§ 16. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики

В этом параграфе мы обсудим свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и построим их графики.

1. Функция $y = \sin x$

Выше, в § 14, мы сформулировали правило, позволяющее каждому числу t поставить в соответствие число $\sin t$, т. е. определили функцию $u = \sin t$. Отметим некоторые ее свойства.

Свойства функции $y = \sin x$.

Свойство 1. Область определения — множество R действительных чисел.

Это следует из того, что *любому числу* t соответствует на числовой окружности точка $M(t)$, которая имеет вполне определенную ординату; эта ордината и есть $\sin t$.

Свойство 2. $u = \sin t$ — нечетная функция.

Это следует из того, что, как было доказано в § 13, для любого числа t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$.

Значит, график функции $u = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOu.

Свойство 3. Функция $u = \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно

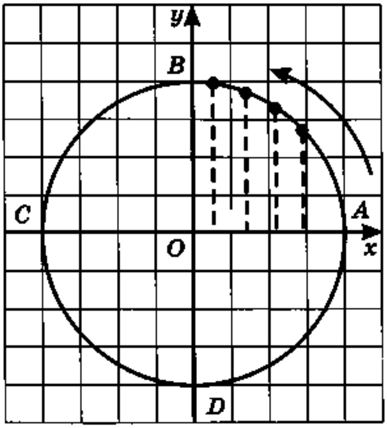


Рис. 75, а

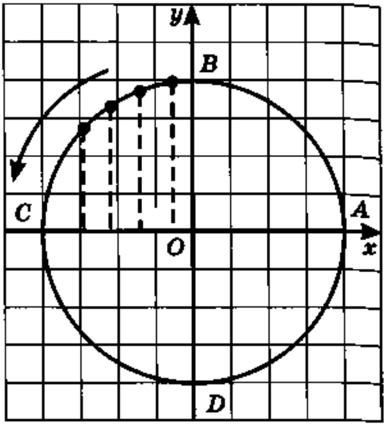


Рис. 75, б

увеличивается (от 0 до 1 — рис. 75, *а*), а при движении по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — рис. 75, *б*).

Свойство 4. Функция $u = \sin t$ ограничена и снизу и сверху. Это следует из того, что для любого t справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

Свойство 5. $u_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $u_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Свойство 6. Функция $u = \sin t$ периодическая, ее основной период равен 2π.

Доказательство. $T = 2\pi$ — период функции, это следует из того, что числам t, $t - 2\pi$, $t + 2\pi$ соответствует на числовой окружности одна и та же точка с одной и той же ординатой, а потому

$$\sin(t - 2\pi) = \sin t = \sin(t + 2\pi).$$

Докажем, что 2π — основной период. Предположим противное, что существует период T_1, такой, что $0 < T_1 < 2\pi$. Тогда для любого t выполняется равенство $\sin(t + T_1) = \sin t$, в частности

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_1\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Из уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_1\right) = 1$ следует, что $\frac{\pi}{2} + T_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (см. § 13, пример 4б), откуда $T_1 = 2\pi k$. Это противоречит предположению, согласно которому $0 < T_1 < 2\pi$.

Итак, 2π — основной период функции $u = \sin t$.

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Но (внимание!) вместо $u = \sin t$ будем писать $y = \sin x$ (ведь нам привычнее запись $y = f(x)$, а не $u = f(t)$). Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy (а не tOu).

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: на оси ординат 1 см = 1 (т. е. в ваших тетрадях в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки); на оси абсцисс 1 см (две клеточки) $= \frac{\pi}{3}$. Это, конечно, не совсем соответствует действительности (на самом деле $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$), но на это при построении графика особого внимания не обращают (считают, что $\pi \approx 3$).

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой. Это график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 76). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. Почему это так, мы пока объяснить не можем, отложим соответствующий разговор до главы 7.

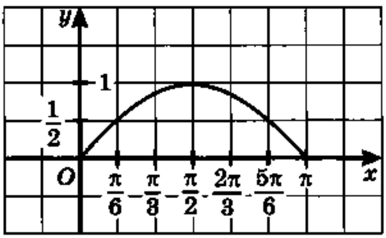


Рис. 76

Добавив к построенной линии симметричную ей относительно

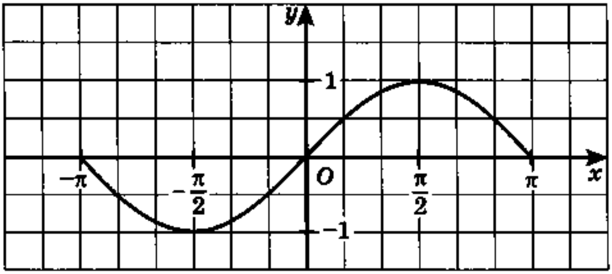


Рис. 77

начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 77).

Наконец, воспользуемся тем, что 2π — основной период функции $y = \sin x$. Это значит, что на отрезке $[\pi; 3\pi]$ график функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 78). Так же график будет выглядеть на отрезках $[3\pi; 5\pi]$, $[5\pi; 7\pi]$, $[-3\pi; -\pi]$ и т. д. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ представлен на рисунке 79.

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют *синусоидой*. Ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 77 или 78, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды,

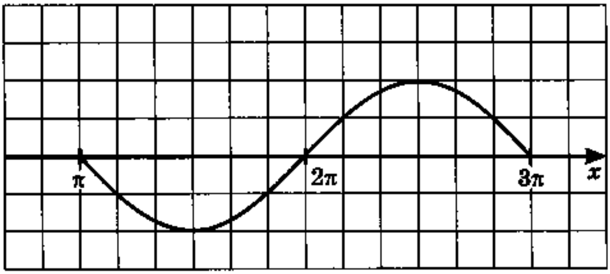


Рис. 78

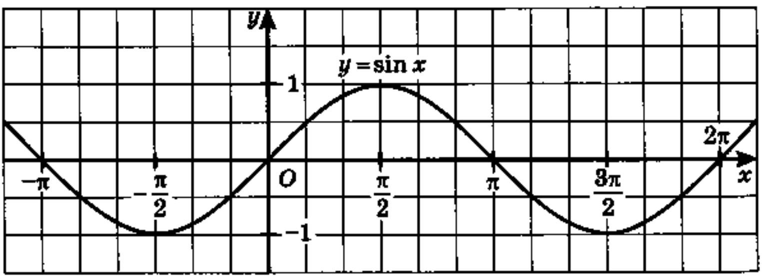


Рис. 79

которая изображена на рисунке 76, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 7. $y = \sin x$ — непрерывная функция.

Свойство 8. Область значений функции $y = \sin x$ — отрезок $[-1; 1]$.

Свойство 9. Функция выпукла вверх на отрезке $[0; \pi]$, выпукла вниз на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т. д.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 80).

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это прямая линия, проходящая через точки $(0; -\pi)$ и $(\pi; 0)$ (рис. 80).

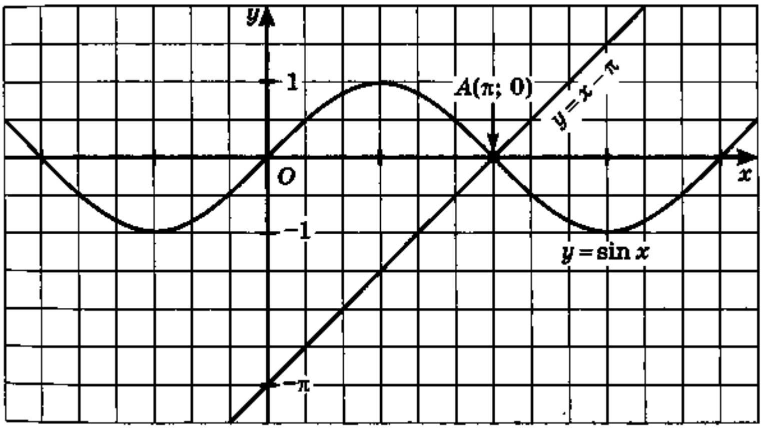


Рис. 80

4) Построенные графики пересекаются в одной точке $A(\pi; 0)$. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: π.

2. Функция $y = \cos x$

Изучение функции $y = \cos x$ можно было бы осуществить примерно по той же схеме, которая была использована для функции $y = \sin x$. Но мы выберем более короткий путь. Сначала докажем две формулы, важные сами по себе, но пока имеющие для нас лишь вспомогательное значение.

Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t.\end{gathered}}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t+\frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 81). Дуги AM и BP равны, соответственно, равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK = OL$, $MK = PL$. Учитывая расположение равных треугольников OKM и OLP в системе координат, делаем два вывода:

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M; это значит, что

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком, т. е.

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тем же выводам в тех случаях, когда точка M принадлежит не первой четверти.

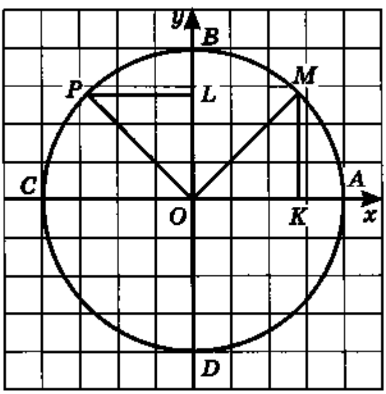


Рис. 81

Воспользуемся формулой $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (это та же формула, что доказана выше, только вместо переменной t мы используем переменную x). Она позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают.

Построим график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Для этого перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ (рис. 82) и построим график функции $y = \sin x$ в новой системе координат — это и будет график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ в старой системе координат (рис. 82), т. е. график функции $y = \cos x$. Его, как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно).

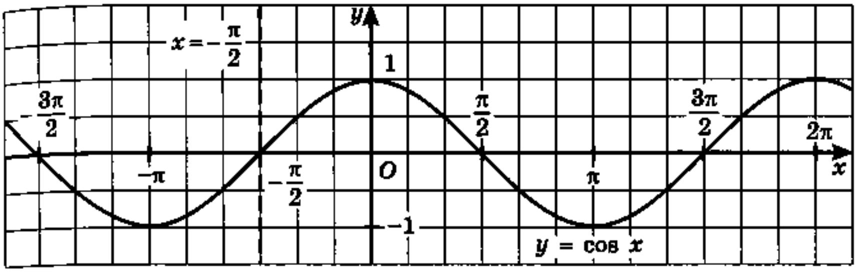


Рис. 82

Свойства функции $y = \cos x$

Свойство 1. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

Свойство 2. $y = \cos x$ — четная функция.

Это было доказано в § 13 (см. свойство 1 в пункте 1) и хорошо иллюстрирует график функции: график симметричен относительно оси y.

Свойство 3. Функция убывает на отрезке $[0;\ \pi]$, возрастает на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$ и т. д.

В общем виде это можно записать так: функция $y = \cos x$ убывает на любом отрезке вида $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ и возрастает на любом отрезке вида $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, где $n \in Z$.

Свойство 4. Функция ограничена и снизу и сверху.

Свойство 5. $y_{наим} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{наиб} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

Свойство 6. $y = \cos x$ — периодическая функция с основным периодом $T = 2\pi$.

Свойство 7. $y = \cos x$ — непрерывная функция.

Свойство 8. $E(f) = [-1;\ 1]$.

Свойство 9. Функция выпукла вверх на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, выпукла вниз на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и т. д.

Пример 2. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$, убеждаемся (рис. 83), что они имеют одну общую точку $A(0; 1)$. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень — $x = 0$.

Ответ: 0.

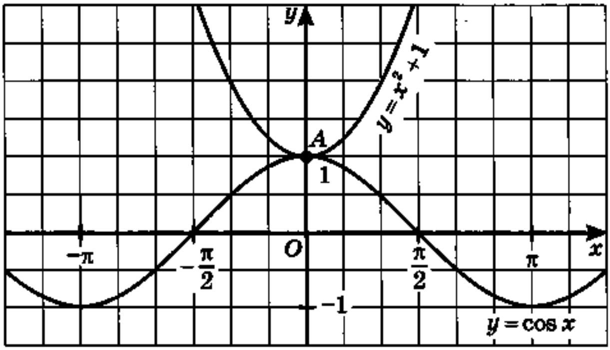


Рис. 83

Пример 3. а) Построить график функции

$$y = \begin{cases} |\sin x|, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{6}, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ если } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

б) Доказать, что эта функция убывает на отрезке [1; 3] и возрастает на отрезке [4; 6].

Решение. а) Чтобы построить график заданной кусочной функции, построим сначала график функции $y = \sin x$. Отразив симметрично относительно оси абсцисс все полуволны графика, расположенные ниже оси абсцисс, получим график функции $y = |\sin x|$ (рис. 84). Возьмем ту его часть, которая удовлетворяет условию $x \leqslant \frac{\pi}{6}$ (эта часть выделена на рис. 84). Далее, чтобы построить график функции $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, нужно график функции

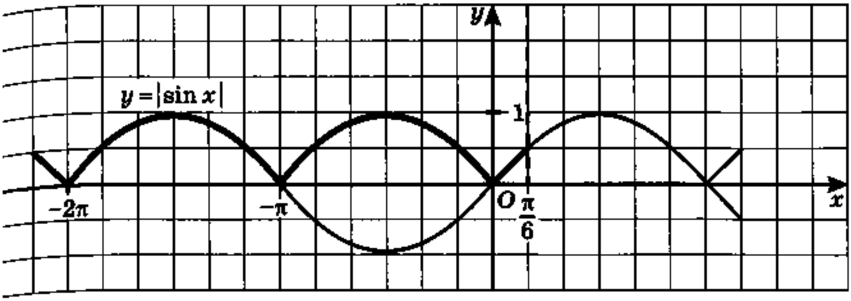


Рис. 84

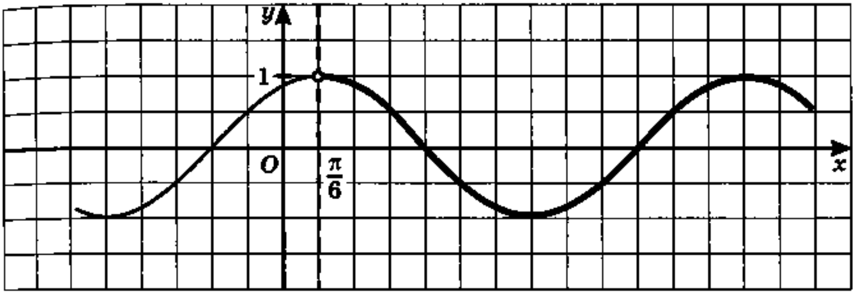


Рис. 85

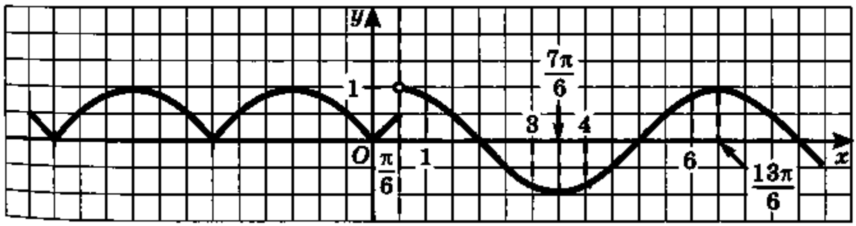


Рис. 86

$y = \cos x$ сдвинуть вправо (вдоль оси абсцисс) на $\frac{\pi}{6}$ (рис. 85). Возьмем ту его часть, которая удовлетворяет условию $x > \frac{\pi}{6}$ (выделена на рис. 85). График заданной кусочной функции изображен (в более мелком масштабе) на рисунке 86.

б) Воспользуемся построенным графиком. Отрезок [1; 3] принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$, поскольку $1 > \frac{\pi}{6}$, $3 < \frac{7\pi}{6}$. На отрезке

$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ функция убывает — это хорошо читается по ее графику, значит, и на отрезке [1; 3] функция убывает.

Отрезок [4; 6] принадлежит отрезку $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$, поскольку $4 > \frac{7\pi}{6}$, $6 < \frac{13\pi}{6}$. На отрезке $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right]$ функция возрастает — это хорошо читается по ее графику, значит, и на отрезке [4; 6] функция возрастает. ■

§ 17. Построение графика функции $y = mf(x)$

В предыдущих параграфах мы несколько раз говорили о том, как, зная график функции $y = f(x)$, построить график другой функции. Мы строили графики $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$. В этом и следующем параграфах мы познакомимся еще с двумя преобразованиями графиков.

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — положительное число.

Решение. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением ординат соответствующих точек графика

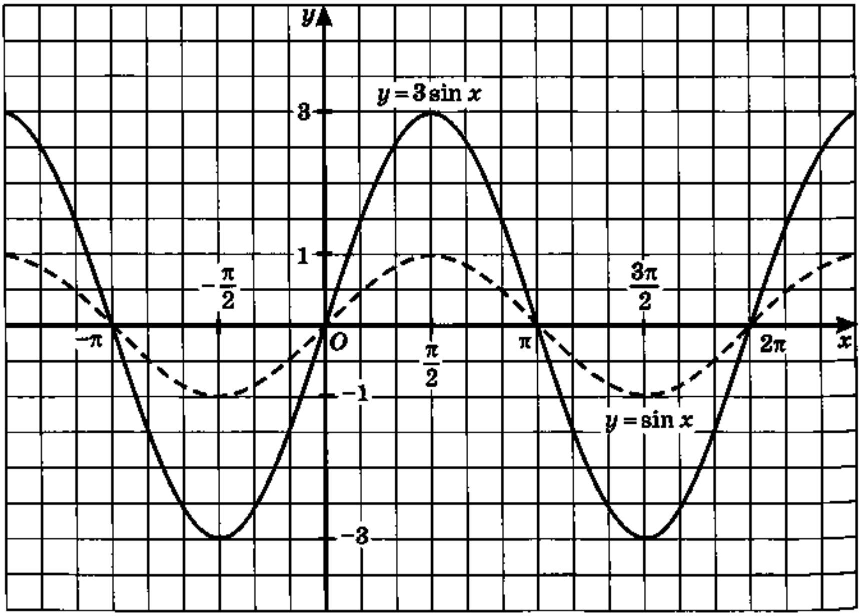


Рис. 87

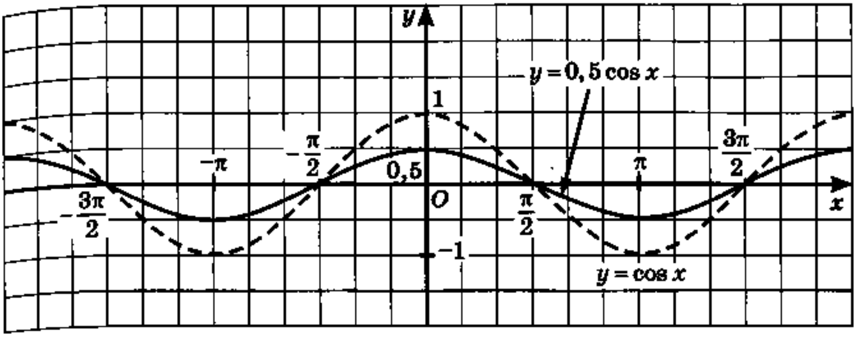


Рис. 88

функции $y = f(x)$ на число m. Такое преобразование графика называют обычно *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x, т. е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 0$.

Если $0 < m < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m = \frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

На рисунке 87 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = 3\sin x$, а на рисунке 88 — графики функций $y = \cos x$ и $y = 0,5\cos x$.

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где $m = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = -f(x)$. Ординаты точек графика функции $y = -f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$ только знаком. Точки $(x; f(x))$ и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 89).

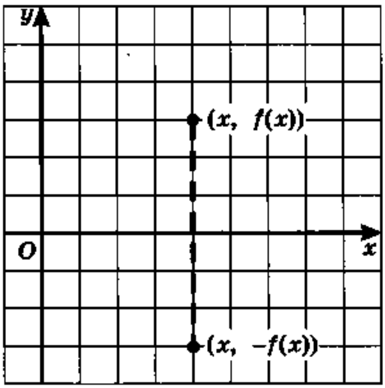


Рис. 89

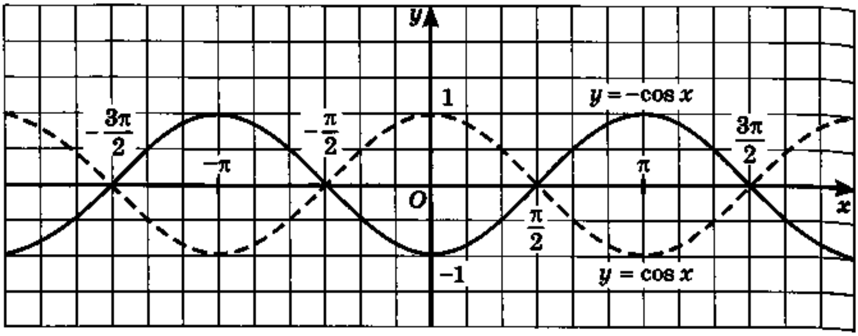


Рис. 90

Значит, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x (впрочем, этим мы уже пользовались в главе 2). На рисунке 90 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — отрицательное число.

Решение. При $m < 0$ справедливо равенство $mf(x) = -|m|f(x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = -|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его растяжение от оси x с положительным коэффициентом $|m|$;

3) растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

Пример. Построить график функции $y = -1{,}5 \sin x$.

Решение. 1) Построим график функции $y = \sin x$; для начала достаточно построить одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 91, *а*).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ (тонкая линия на рис. 91, *а*).

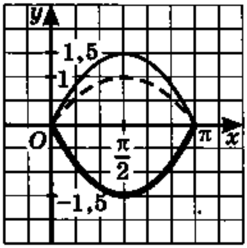


Рис. 91, *а*

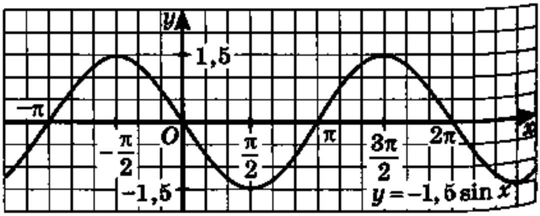


Рис. 91, *б*

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1{,}5 \sin x$ (она выделена на рис. 91, *а*).

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1{,}5 \sin x$ (рис. 91, *б*). ■

§ 18. Построение графика функции $y = f(kx)$

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.

Решение. Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Пусть, например, на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся эти точки, когда мы будем строить график функции $y = f(2x)$? Если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3). Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (−1; 3) (рис. 92, *а*), т. е. точки с той же ординатой, но с абсциссой, в два раза меньшей (по модулю). Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 92, *б*). Такое преобразование называют обычно *сжатием к оси ординат с коэффициентом 2*.

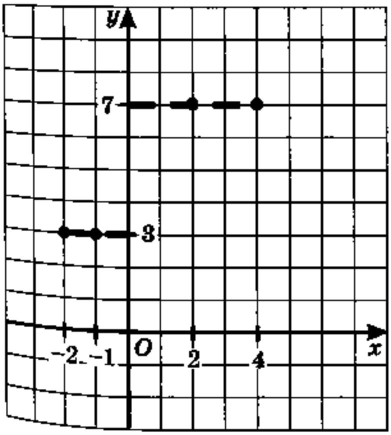


Рис. 92, *а*

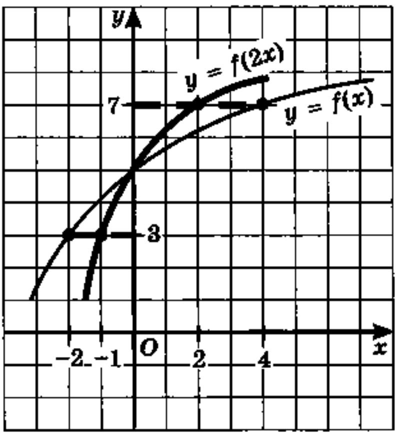


Рис. 92, *б*

Вообще график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k. Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $0 < k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Например, если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении с коэффициентом 3.

Пример 1. Построить графики функций:

а) $y = \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \cos 2x$.

Решение. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ (пунктирная линия на рис. 93) и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом $\frac{1}{2}$ или, что то же самое, растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin \frac{x}{2}$ (рис. 93). Затем построим весь график (рис. 94; здесь масштаб уменьшен).

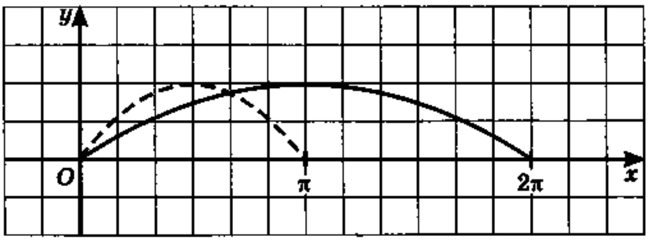


Рис. 93

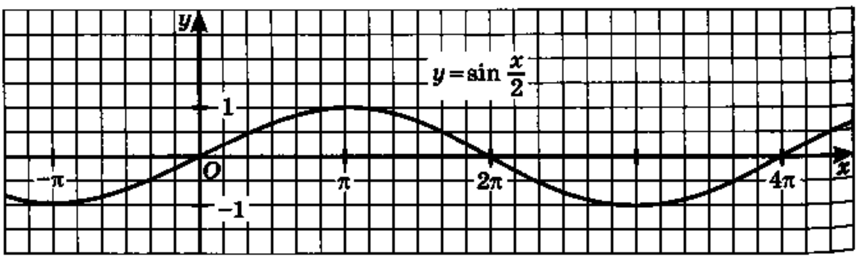


Рис. 94

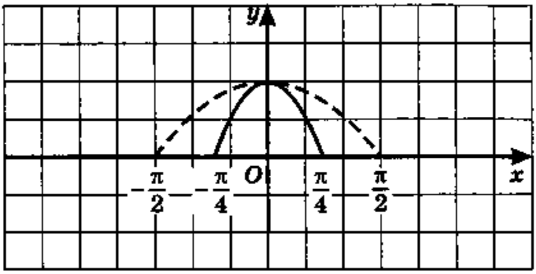


Рис. 95, *а*

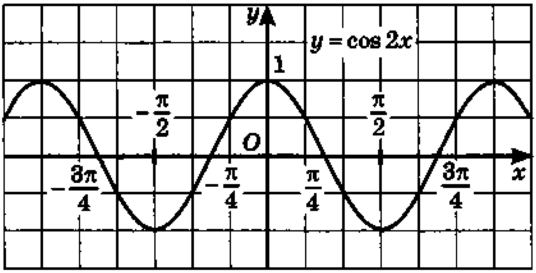


Рис. 95, *б*

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рис. 95, *а*) и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (рис. 95, *а*). Затем построим весь график (рис. 95, *б*). ■

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$. Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (−6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (−3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим: $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (−3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$, а точке (−6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(-x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 96).

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции*

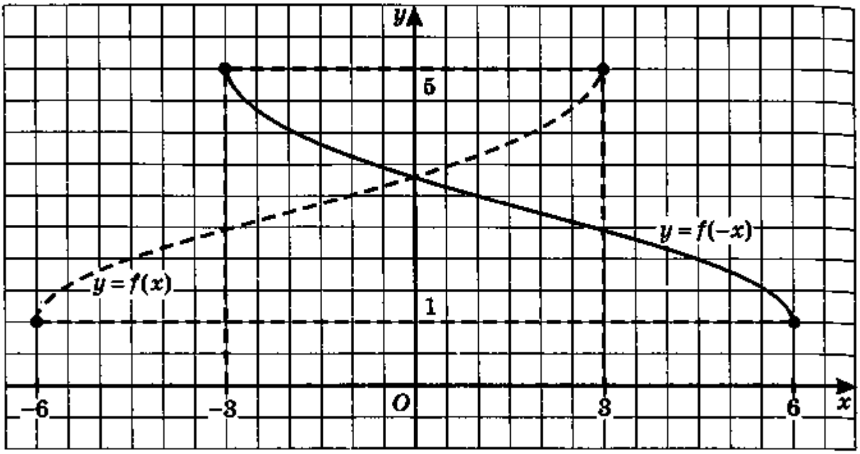


Рис. 96

$y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Решение. При $k < 0$ справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие к оси y с положительным коэффициентом $|k|$;

3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 2. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 97, *а*. Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями).

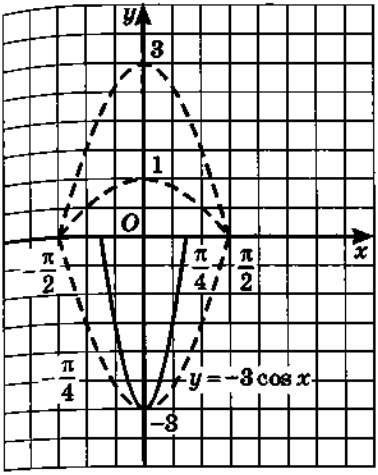


Рис. 97, *а*

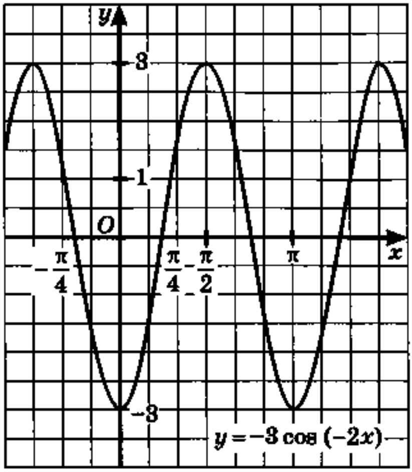


Рис. 97, *б*

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$ сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (рис. 97, *а*, сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 97, *б*). ■

§ 19. График гармонического колебания

Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой $s = A\sin(\omega t + \alpha)$. Эту формулу называют *законом* (или *уравнением*) *гармонических колебаний*. Если, например, материальную точку, висящую на пружине, вывести из положения равновесия, то она начнет совершать вертикальные колебания, причем закон движения (при отсутствии сопротивления окружающей среды) выражается указанной выше формулой, где t — время, а s — отклонение материальной точки от положения равновесия.

Пример. Построить график функции $s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ в системе координат sOt.

Р е ш е н и е. Имеем: $s = 3\sin 2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$. Чтобы построить график такой функции, нужно над синусоидой $s = \sin t$ (или, как мы условились выше, над полуволной синусоиды) осуществить следующие преобразования:

1) сжать ее к оси ординат с коэффициентом 2;

2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом 3;

3) сжатую и растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ влево.

В результате получится полуволна искомого графика, с помощью которой без труда можно построить весь график.

На практике указанную полуволну удобнее строить по-другому. Сначала решим уравнение $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ — это даст нам точки пересечения искомого графика с осью абсцисс. Имеем (см. пример 4 в § 13):

$$2t + \frac{\pi}{3} = \pi k,$$

$$2t = -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$t = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Дадим параметру k два соседних значения 0 и 1. При $k = 0$ получаем: $t_1 = -\frac{\pi}{6}$; при $k = 1$ получаем: $t_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. Точки $A\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ служат концами одной полуволны искомого графика. Серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$ — среднее арифметическое (полусумма) чисел $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найдем значение заданной функции в точке $\frac{\pi}{12}$:

$$s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3.$$

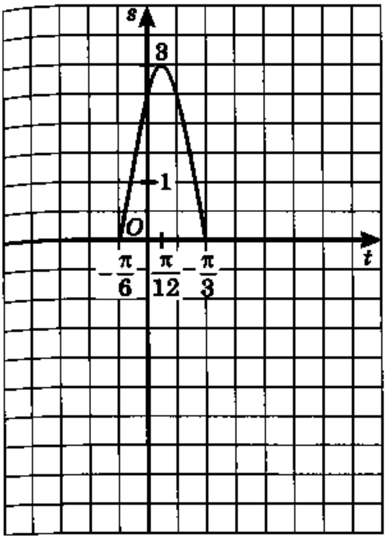


Рис. 98, *а*

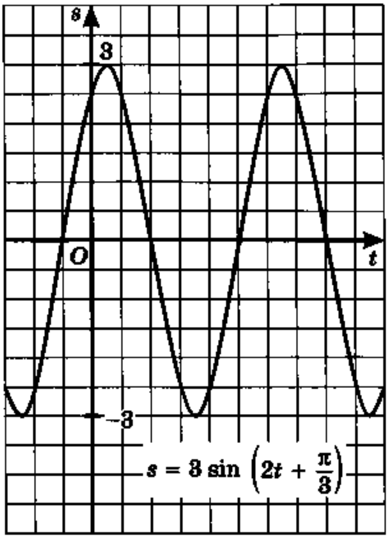


Рис. 98, *б*

Точка $C\left(\frac{\pi}{12}; 3\right)$ — верхняя точка искомой полуволны. По трем точкам — A, B и C — строим сначала полуволну искомого графика (рис. 98, *а*), а затем и весь график (рис. 98, *б*). ■

В уравнении гармонических колебаний $s = A \sin(\omega t + \alpha)$ все величины — A, ω, α — имеют определенный физический смысл: A (или $-A$, если $A < 0$) — амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия); ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний. Так, в рассмотренном уравнении $s = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ амплитуда равна трем ($A = 3$), частота колебаний равна двум ($\omega = 2$), начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{3}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 20. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

Отметим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известны из § 13). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

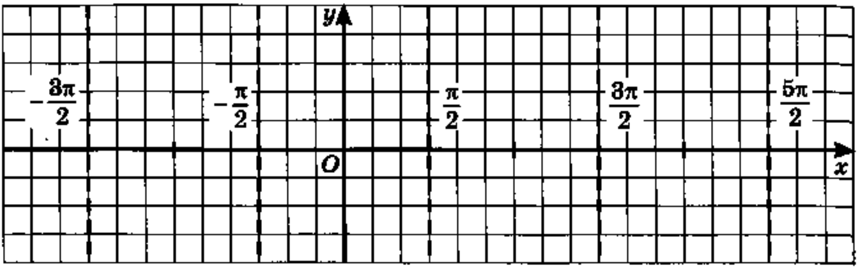


Рис. 99

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

Свойство 1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Это свойство означает, что на графике функции нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т. д. Эти прямые проведены пунктиром на рисунке 99.

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.).

Свойство 2. $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом π.

То, что π — период, следует из двойного равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi),$$

полученного в § 13. Меньше, чем π, положительный период быть не может, поскольку $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Поэтому π — основной период.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на π, 2π, 3π и т. д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция.

Это следует из доказанного в § 13 соотношения $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, следует по точкам построить часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 100). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 101). Воспользовавшись периодичностью, достроим весь график (рис. 102).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рисунке 101, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что главная ветвь тангенсоиды выходит из начала координат как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете из главы 7.

Отметим еще несколько свойств функции $y = \operatorname{tg} x$.

Свойство 4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

В более общем виде: функция возрастает на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Свойство 5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу.

Свойство 6. У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

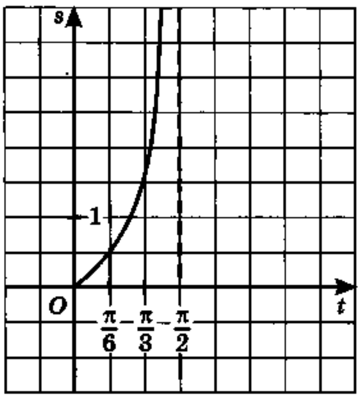


Рис. 100

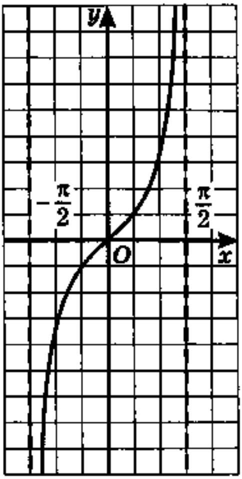


Рис. 101

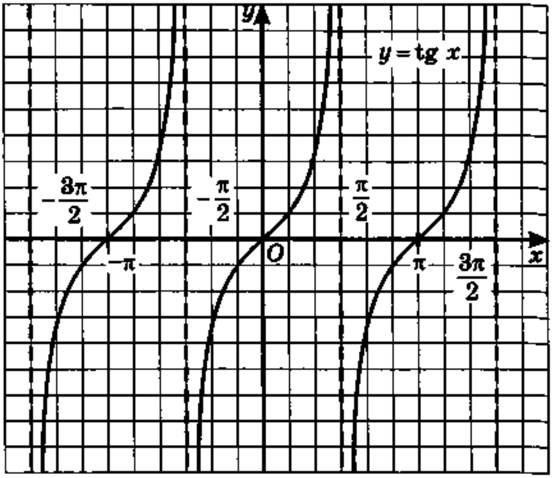


Рис. 102

Свойство 7. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

В более общем виде: функция непрерывна на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

Замечание. Свойства 4—8, прочитанные по графику, можно доказать, опираясь на соответствующие математические утверждения, которые вам пока неизвестны (поэтому мы и ограничиваемся наглядно-интуитивными представлениями). Впрочем, доказательство одного из свойств можно осуществить и сейчас.

Докажем, что функция $y = \mathrm{tg}\, x$ возрастает на полуинтервале $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Возьмем два значения аргумента — x_1 и x_2 — из этого промежутка; пусть $x_1 < x_2$. Тогда в силу возрастания на выбранном полуинтервале функции $y = \sin x$ будем иметь: $\sin x_1 < \sin x_2$.

В силу убывания на выбранном полуинтервале функции $y = \cos x$ будем иметь: $\cos x_1 > \cos x_2$. Значит,

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2.$$

Итак, из $x_1 < x_2$ следует, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, а это и означает возрастание функции $y = \operatorname{tg} x$ на выбранном промежутке.

П р и м е р 1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ — тангенсоиду — и $y = \sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 103), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались уже известным нам числовым равенством $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

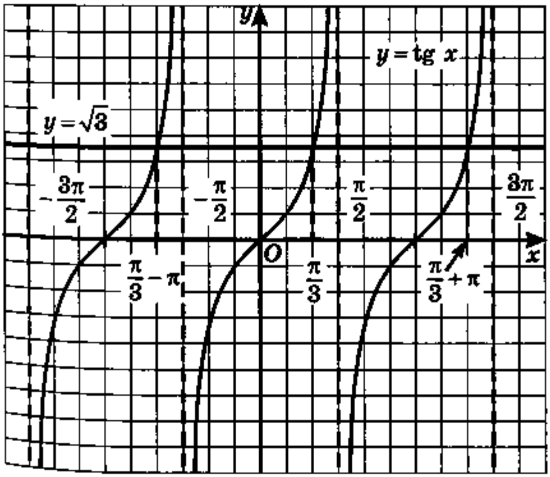


Рис. 103

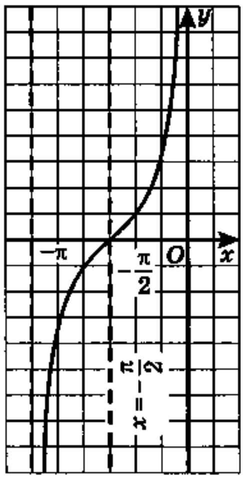


Рис. 104

Пример 2. Построить график функции $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Для начала разберемся с главной ветвью тангенсоиды.

1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (прямая $x = -\frac{\pi}{2}$ проведена на рисунке 104 пунктиром).

2) «Привяжем» функцию $y = \operatorname{tg} x$ к новой системе координат — это будет график функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, а точнее, главная ветвь этого графика (рис. 104).

3) Чтобы получить ветвь графика функции $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, достаточно построенную ветвь отобразить симметрично относительно оси x (рис. 105).

4) Зная одну ветвь, можно построить весь график (рис. 106). ■

На самом деле на рисунке 106 построен график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Почему? Потому что имеет место тождество

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

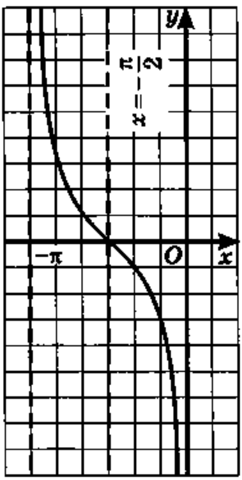


Рис. 105

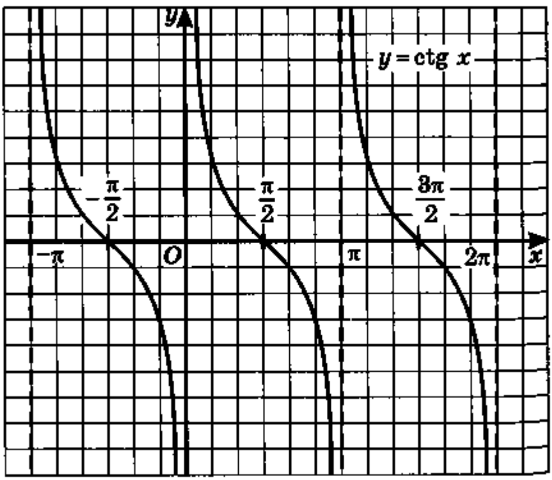


Рис. 106

В самом деле, известно, что $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$ $= -\sin x$ (см. § 16). Тогда $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos x}{-\sin x} =$ $= \operatorname{ctg} x$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции $y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой*. *Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -1$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ — тангенсоиду — и $y = -1$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 107), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{3\pi}{4}$ (мы знаем, что $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$), а все решения заданного уравнения можно охватить формулой $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

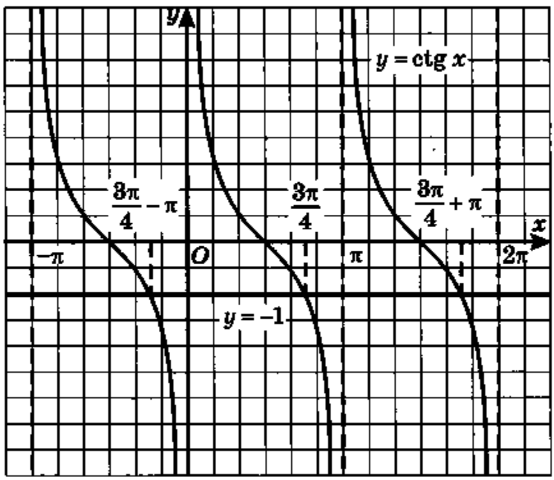


Рис. 107

Пример 4. Решить неравенство: а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x > -1$.

Решение. а) Нам нужно ответить на вопрос, при каких значениях x точки графика функции $y = \operatorname{tg} x$ расположены в координатной плоскости ниже прямой $y = \sqrt{3}$. Воспользуемся рисунком 103. Замечаем, что ниже указанной прямой располагается та часть главной ветви тангенсоиды, которая соответствует условию $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$. Воспользовавшись периодичностью функции, запишем окончательный ответ: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Нам нужно ответить на вопрос, при каких значениях x точки графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ расположены в координатной плоскости выше прямой $y = -1$. Воспользуемся рисунком 107. Замечаем, что выше указанной прямой располагается та часть главной ветви тангенсоиды, которая соответствует условию $0 < x < \frac{3\pi}{4}$. Воспользовавшись периодичностью функции, запишем окончательный ответ: $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. ■

При решении тригонометрических неравенств вида $\sin t < a$, $\cos t > b$ мы использовали числовую окружность. С помощью числовой окружности можно решать и неравенства вида $\operatorname{tg} t < a$, $\operatorname{ctg} t > b$. Пусть, например, нужно решить неравенство $\operatorname{tg} t < \sqrt{3}$ (мы решили его в примере 4а). Рассуждаем так: $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$ при $t = \frac{\pi}{3}$, отметим эту точку на числовой окружности (рис. 108). Учтем, что $\operatorname{tg} t$ не определен при $t = \pm\frac{\pi}{2}$, соответствующие точки отметим на числовой окружности светлыми кружочками («выколотые» точки). Поскольку на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $s = \operatorname{tg} t$ возрастает, то $s < \sqrt{3}$ при $t < \frac{\pi}{3}$, точнее, при $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{3}$; соответствующую

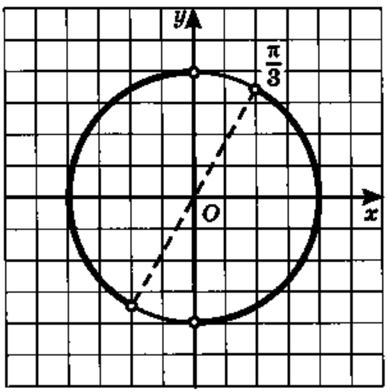


Рис. 108

дугу выделим на правой полуокружности (рис. 108). Учтем, наконец, что основной период функции $s = \operatorname{tg} t$ равен π. Прибавив период ко всем точкам выделенной дуги, получим еще одну дугу — в левой полуокружности, — содержащую решения неравенства. Для построенных двух дуг (рис. 108) можно составить аналитическую запись: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

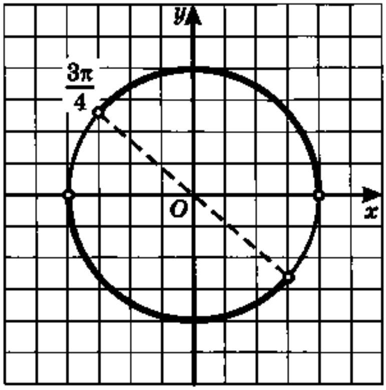


Рис. 109

Решим теперь неравенство $\operatorname{ctg} t > -1$ (мы решили его в примере 4б). Рассуждаем так: $\operatorname{ctg} t = -1$ при $t = \frac{3\pi}{4}$, отметим эту точку на числовой окружности (рис. 109). Учтем, что $\operatorname{ctg} t$ не определен при $t = 0$, $t = \pi$, соответствующие точки отметим на числовой окружности светлыми кружочками. Поскольку на интервале $(0; \pi)$ функция $s = \operatorname{ctg} t$ убывает, то $s > -1$ при $t < \frac{3\pi}{4}$, точнее, при $0 < t < \frac{3\pi}{4}$; соответствующую дугу выделим на верхней полуокружности (рис. 109). Учтем, наконец, что основной период функции $s = \operatorname{ctg} t$ равен π. Прибавив период ко всем точкам выделенной дуги, получим еще одну дугу — в нижней полуокружности, — содержащую решения неравенства. Для построенных двух дуг (рис. 109) можно составить аналитическую запись: $\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 5. Решить систему неравенств $\begin{cases} \operatorname{tg} t > -1, \\ \sin t < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Учтя, что $\operatorname{tg} t = -1$ при $t = -\frac{\pi}{4}$, отметим на числовой окружности (рис. 110, *а*) точку $M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Выколов концы вертикального диаметра BD, отметим в правой полуокружности дугу MB, точки которой удовлетворяют неравенству $\operatorname{tg} t > -1$. Добавив

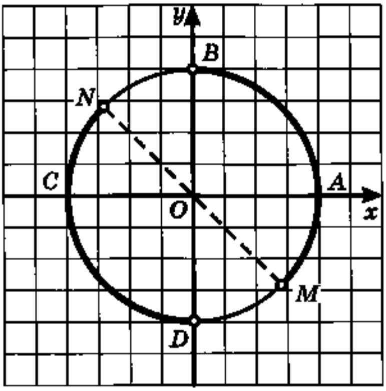


Рис. 110, *а*

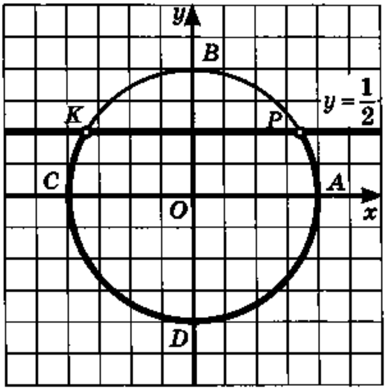


Рис. 110, *б*

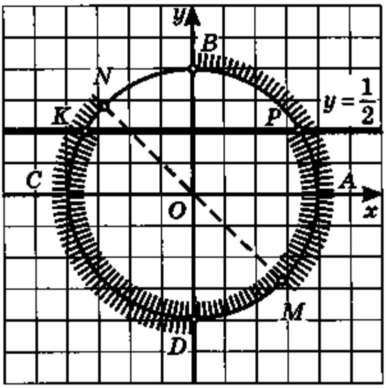


Рис. 110, *в*

соответствующую дугу ND в левой полуокружности, получим геометрическую иллюстрацию решения неравенства $\operatorname{tg} t > -1$. На рисунке 110, *б* представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства $\sin t < \frac{1}{2}$. Чтобы найти решение системы неравенств, изобразим построенные дуги на одной числовой окружности и посмотрим, где они пересекаются. Получаем открытые дуги MP и KD (рис. 110, *в*). Осталось составить аналитические записи этих дуг. Получаем: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$. ■

§ 21. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ монотонна и принимает все значения от -1 до 1 на каждом из следующих отрезков: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ и т. д. (см. рис. 79 в § 16). Значит, по теореме об обрат-

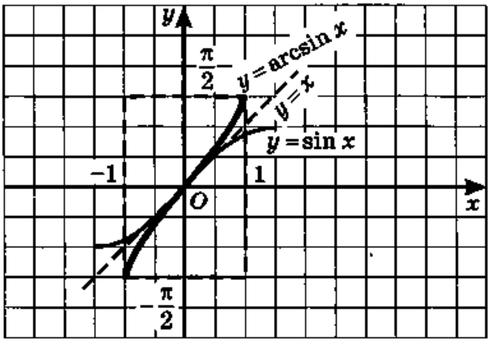


Рис. 111

ной функции (см. § 10), на каждом из указанных промежутков функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию. Следует подчеркнуть, что это различные обратные функции, среди них предпочтение отдают одной — функции, обратной к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ее обозначают $x = \arcsin y$. Поменяв, как обычно, x и y местами, пишут: $y = \arcsin x$.

Итак, $y = \arcsin x$ (читают: *арксинус* x) — это функция, обратная к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

График функции $y = \arcsin x$ может быть получен из графика функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 111).

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. $D(f) = [-1; 1]$.
2. $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция является нечетной: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. Функция возрастает.
5. Функция непрерывна.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ эквивалентны. Подставив в равенство $x = \sin y$ вместо y

выражение arcsin x, получим: $x = \sin(\arcsin x)$. Следовательно, для любого $x \in [-1; 1]$ имеем:

$$\sin(\arcsin x) = x, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Два последних соотношения дают возможность сформулировать содержательное истолкование символа arcsin a.

Определение 1. Если $|a| \leqslant 1$, то **arcsin a** — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Итак,

$$\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то}$$
$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$
$$\sin(\arcsin a) = a.$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунках 112, *а*, *б*. Кстати, эта иллюстрация делает достаточно наглядной формулу $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ (рис. 112, *в*). Кроме того, эта иллюстрация в какой-то степени объясняет термин «арксинус»: *arcus* — по-латыни *дуга* (сравните со словом *арка*).

Пример 1. Вычислить:

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin 0$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin 1$.

Решение. а) Пусть $\arcsin \frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Пусть $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

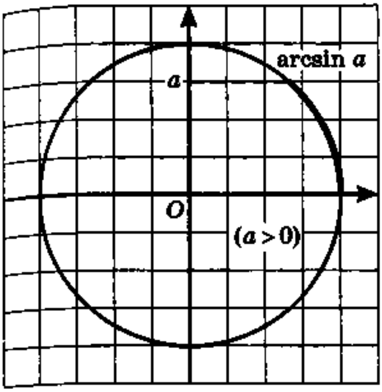


Рис. 112, *а*

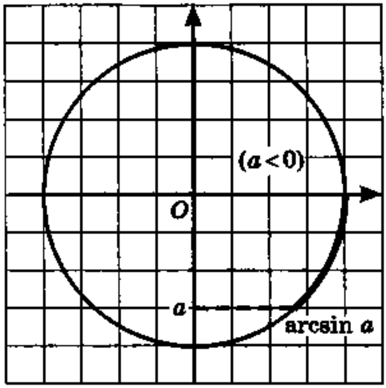


Рис. 112, *б*

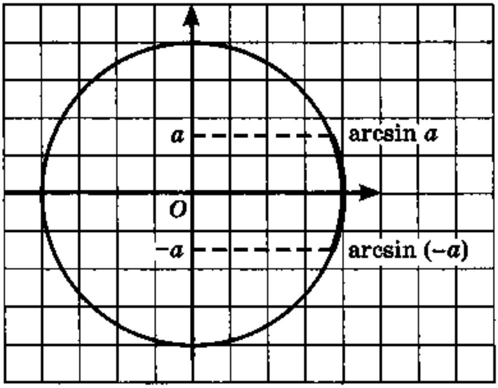


Рис. 112, *в*

в) Пусть $\arcsin 0 = t$. Тогда $\sin t = 0$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 0 = 0$.

г) Пусть $\arcsin 1 = t$. Тогда $\sin t = 1$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$.

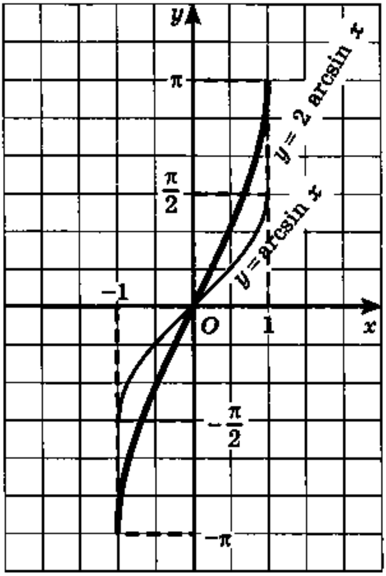


Рис. 113

Пример 2. Построить график функции $y = 2\arcsin x$.

Решение. Построив график функции $y = \arcsin x$ и осуществив его растяжение от оси x с коэффициентом 2 (см. § 17), получим требуемый график (рис. 113). ■

Пример 3. Построить график функции: а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. а) Выше мы отмечали, что $\sin(\arcsin x) = x$. Но выражение $\arcsin x$ имеет смысл лишь при $x \in [-1; 1]$. Таким образом, речь фактически идет о функции $y = x$, $x \in [-1; 1]$. Ее график изображен на рисунке 114.

б) Заметим прежде всего, что функция $y = \arcsin(\sin x)$ является периодической, с основным периодом 2π. Это значит, что для начала можно ограничиться построением графика функции на любом промежутке длины 2π. Выберем отрезок $[-\pi; \pi]$. Далее заметим, что функция $y = \arcsin(\sin x)$ является нечетной. В самом деле, $\arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x)$. Поскольку функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат, в частности на отрезке $[-\pi; \pi]$. Поэтому, построив график функции на отрезке $[0; \pi]$, мы с помощью симметрии сможем построить и график функции на отрезке $[-\pi; 0]$.

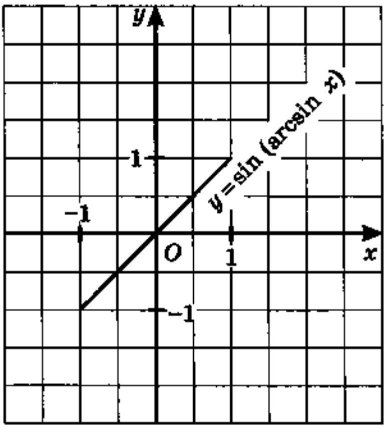


Рис. 114

Итак, рассмотрим функцию $y = \arcsin(\sin x)$, $x \in [0; \pi]$. По определению арксинуса эта запись означает, что $\sin y = \sin x$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а $x \in [0; \pi]$. Рассуждения проведем по отдельности в двух случаях: 1) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

1) Если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то, поскольку $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, из равенства $\sin y = \sin x$ следует равенство $y = x$ — в силу монотонности функции $s = \sin t$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то воспользуемся тем, что $\sin(\pi - x) = \sin x$. В самом деле, в § 13 мы отмечали, что $\sin(\pi + t) = -\sin t$. Значит,

$$\sin(\pi - x) = \sin(\pi + (-x)) = -\sin(-x) = \sin x.$$

Если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то $(\pi - x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но тогда из равенства $\sin y = \sin(\pi - x)$ следует равенство $y = \pi - x$.

Итак, функция $y = \arcsin(\sin x)$, $x \in [0; \pi]$ тождественна кусочной функции $y = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \text{ если } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$

График этой функции изображен на рисунке 115, *а*. На рисунке 115, *б* представлен график функции $y = \arcsin(\sin x)$, $x \in [-\pi; \pi]$, а на рисунке 116 — весь график функции $y = \arcsin(\sin x)$. ■

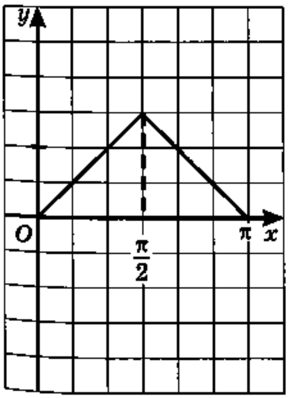


Рис. 115, *а*

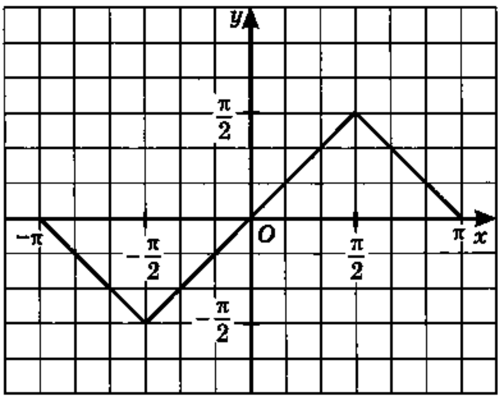


Рис. 115, *б*

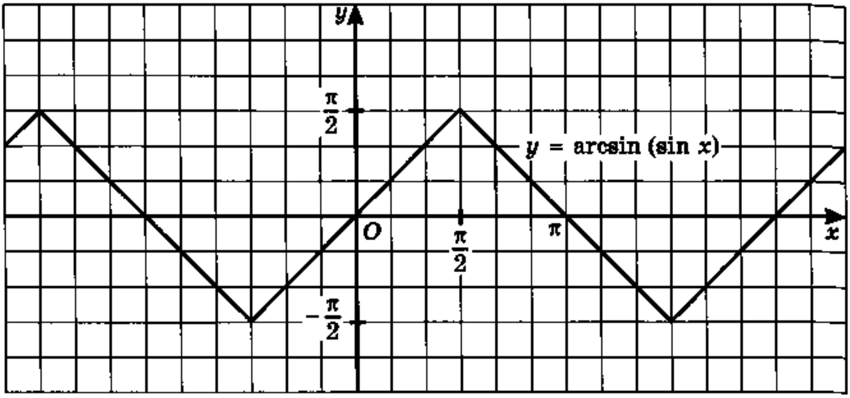


Рис. 116

Пример 4. Вычислить:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение. а) Воспользовавшись определением арксинуса, получим: $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

б) Пусть $\arcsin\frac{3}{5} = t$. Тогда $\sin t = \frac{3}{5}$, причем $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Требуется вычислить $\cos t$.

Имеем:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t;$$
$$\cos^2 t = 1 - \frac{9}{25};$$
$$\cos^2 t = \frac{16}{25};$$
$$\cos t = \frac{4}{5} \text{ или } \cos t = -\frac{4}{5}.$$

Поскольку t принадлежит первой четверти, из двух указанных выше возможностей выбираем первую: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Итак, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

в) Пусть $\arcsin\frac{3}{5} = t$. Тогда $\sin t = \frac{3}{5}$, $\cos t = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$. Получили: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4}$. ■

2. Функция $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ монотонна и принимает все значения от -1 до 1 на каждом из следующих отрезков: $[-\pi; 0]$, $[0; \pi]$, $[\pi; 2\pi]$ и т. д. (см. рис. 82 в § 16). Значит, по теореме об обратной функции (см. § 10), на каждом из указанных промежутков функция $y = \cos x$ имеет обратную функцию. Это различные обратные функции, среди них предпочтение отдают одной — функции, обратной к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$. Ее обозначают $x = \arccos y$. Поменяв, как обычно, x и y местами, пишут: $y = \arccos x$.

Итак, $y = \arccos x$ (читают: *арккосинус* x) — это функция, обратная к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

График функции $y = \arccos x$ может быть получен из графика функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 117).

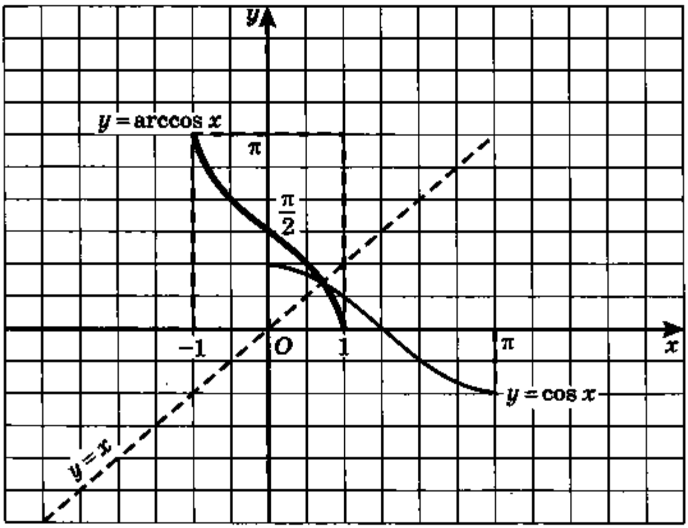


Рис. 117

Свойства функции $y = \arccos x$

1. $D(f) = [-1; 1]$.

2. $E(f) = [0; \pi]$.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной; это следует хотя бы из того, что график функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси y.

4. Функция убывает.

5. Функция непрерывна.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ эквивалентны. Подставив в равенство $x = \cos y$ вместо y выражение $\arccos x$, получим: $x = \cos(\arccos x)$. Следовательно, для любого $x \in [-1; 1]$ имеем:

$$\cos(\arccos x) = x,\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Два последних соотношения дают возможность сформулировать содержательное истолкование символа $\arccos a$.

Определение 2. Если $|a| \leqslant 1$, то $\arccos a$ — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то}\\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t = a,\\ 0 \leqslant t \leqslant \pi;\end{cases}\\ \cos(\arccos a) = a.\end{gathered}}$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунках 111, *а*, *б*.

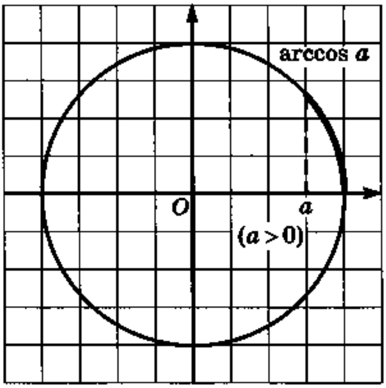


Рис. 118, *а*

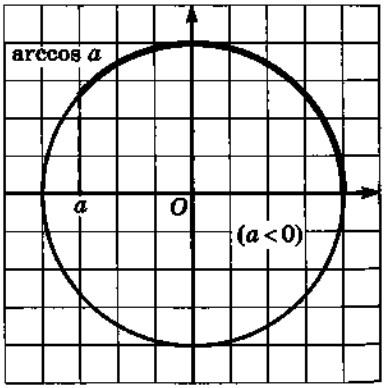


Рис. 118, *б*

Пример 5. Вычислить:

а) $\arccos \frac{1}{2}$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arccos 0$;

г) $\arccos 1$.

Решение. а) Пусть $\arccos\frac{1}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{1}{2}$ и $t \in [0; \pi]$.

Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Пусть $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

г) Пусть $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$. ■

Теорема. ***Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$.***

Доказательство. Будем считать для определенности, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM; $\arccos(-a)$ — длина дуги AP (рис. 119). Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, длины этих дуг равны. Получаем:

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP = PC + AP = AC = \pi.$$

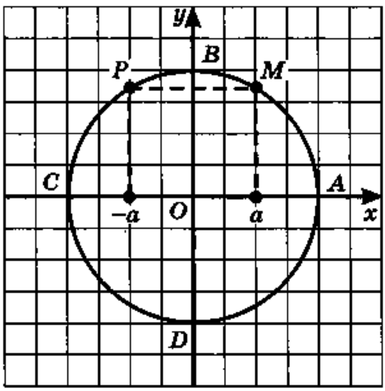


Рис. 119

На практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad \text{где } 0 < a < 1.}$$

При этом учитывают, что в случае, когда $a > 0$, число $\arccos a$ принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Такой же результат был получен выше при решении примера 4б.

Пример 6. Построить график функции $y = \arccos\frac{2x}{5}$.

Решение. Построив график функции $y = \arccos x$ и осуществив его растяжение от оси y с коэффициентом $\frac{5}{2}$ (см. § 18), получим требуемый график (рис. 120). ■

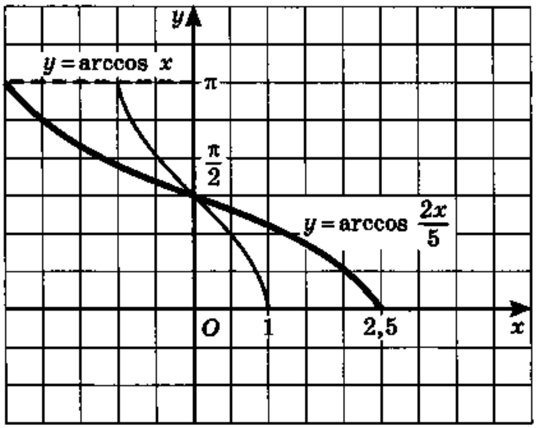


Рис. 120

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонна на каждом из следующих интервалов: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ и т. д. (см. рис. 102 в § 20). Значит, по теореме об обратной функции (см. § 10), на каждом из указанных промежутков функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию. Это различные обратные функции, среди них предпочтение отдают одной — функции, обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ее обозначают $x = \operatorname{arctg} y$. Поменяв, как обычно, x и y местами, пишут: $y = \operatorname{arctg} x$.

Итак, $y = \operatorname{arctg} x$ (читают: *арктангенс* x) — это функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ может быть получен из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 121).

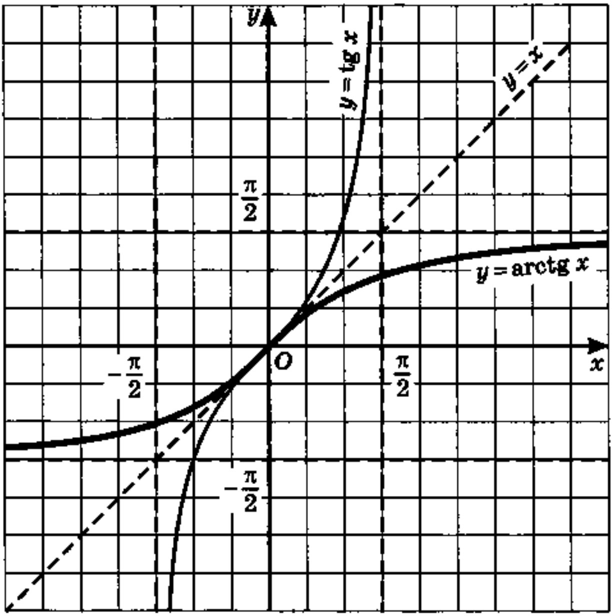


Рис. 121

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. $D(f) = [-\infty; +\infty]$.
2. $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция является нечетной: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. Функция возрастает.
5. Функция непрерывна.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ эквивалентны. Подставив в равенство $x = \operatorname{tg} y$ вместо

y выражение arctg x, получим: $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. Следовательно, для любого $x \in (-1;\ 1)$ имеем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Два последних соотношения дают возможность сформулировать содержательное истолкование символа arctg a.

Определение 3. arctg a — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} t = a,\\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2};\end{cases}\\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.\end{gathered}}$$

Пример 7. Вычислить:

а) arctg 1; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) arctg 0.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 1 = t$. Тогда $\operatorname{tg} t = 1$ и $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $t = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = t$. Тогда $\operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $t = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Можно было рассуждать и по-другому:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

в) Пусть $\operatorname{arctg} 0 = t$. Тогда $\operatorname{tg} t = 0$ и $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $t = 0$, поскольку $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ■

Пример 8. Решить уравнение $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$.

Решение. Построим график линейной функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$. Это прямая линия, для построения которой достаточно найти две точки. Из уравнения $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ получаем: если $x = 0$, то $y = \frac{\pi}{2}$; если $y = 0$, то $x = 2$. Через точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(2; 0)$ проводим прямую — это и есть график функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ (рис. 122).

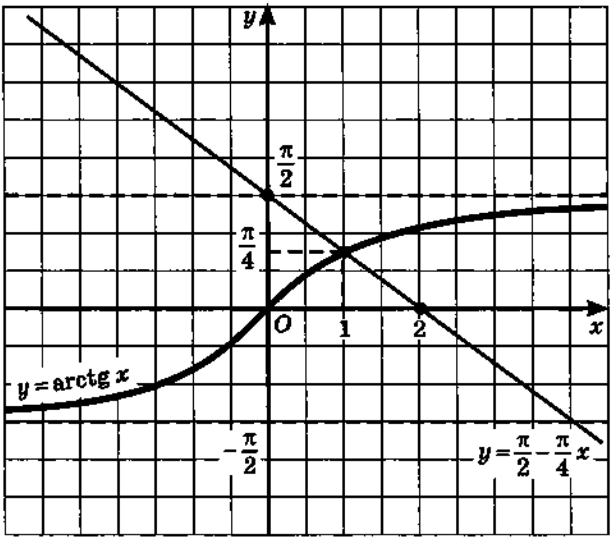


Рис. 122

В той же системе координат построим график функции $y = \operatorname{arctg} x$. Поскольку функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, а функция $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ убывает, их графики пересекаются только в одной точке (рис. 122). Абсцисса этой точки, вероятно, равна 1. Проверим: для функции $y = \operatorname{arctg} x$ получаем: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; для функции $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x$ при $x = 1$ получаем: $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, оба графика действительно имеют одну общую точку $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, а потому заданное уравнение имеет единственный корень: $x = 1$. ■

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонна на каждом из следующих интервалов: $(-\pi; 0)$, $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$ и т. д. (см. рис. 106 в § 20). Значит, по теореме об обратной функции (см. § 10), на каждом из указанных промежутков функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет обратную функцию. Это различные обратные функции, среди них предпочтение отдают одной — функции, обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$. Ее обозначают $x = \operatorname{arcctg} y$. Поменяв, как обычно, x и y местами, пишут: $y = \operatorname{arcctg} x$.

Итак, $y = \operatorname{arcctg} x$ (читают: *арккотангенс* x) — это функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ может быть получен из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 123).

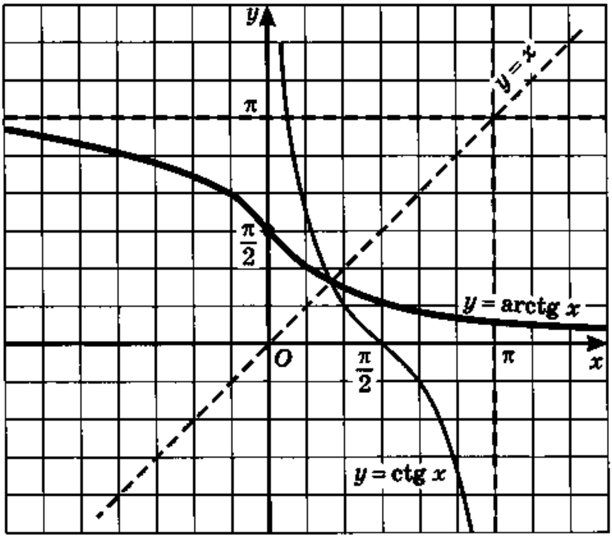


Рис. 123

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1. $D(f) = [-\infty; +\infty]$.
2. $E(f) = (0; \pi)$.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной; это следует хотя бы из того, что график функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси y.
4. Функция убывает.
5. Функция непрерывна.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arcctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$ эквивалентны. Подставив в равенство $x = \operatorname{ctg} y$ вместо y выражение $\operatorname{arcctg} x$, получим: $x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$. Следовательно, для любого x имеем:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Два последних соотношения дают возможность сформулировать содержательное истолкование символа $\operatorname{arcctg} a$.

Определение 4. $\operatorname{arcctg} a$ — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{ctg} t = a,\\ 0 < t < \pi;\end{cases}\\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a.\end{gathered}}$$

Для арккотангенса имеет место соотношение, аналогичное соответствующему соотношению для арккосинуса:

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Для обоснования этой формулы можно воспользоваться симметрией графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$ относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 124).

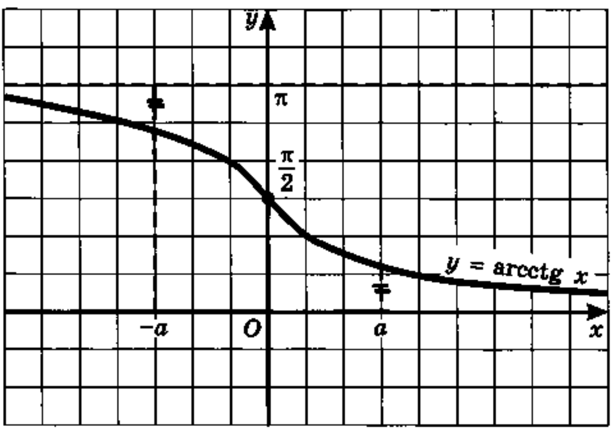


Рис. 124

Пример 9. Вычислить:

а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\operatorname{arcctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arcctg} 1 = t$. Тогда $\operatorname{ctg} t = 1$ и $t \in (0; \pi)$. Значит, $t = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\operatorname{arcctg} 0 = t$. Тогда $\operatorname{ctg} t = 0$ и $t \in (0; \pi)$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. ∎

Рассмотренные в настоящем параграфе функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ называют *обратными тригонометрическими функциями* (или *аркфункциями*).

5. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Выпишем наиболее важные соотношения для обратных тригонометрических функций, особенно часто используемые на практике (все они получены выше):

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

В следующих ниже примерах мы получим еще некоторые соотношения, которые тоже иногда оказываются полезными.

Пример 10. Упростить выражение:

а) $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. а) Пусть $\arcsin x = y$; тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Нужно найти $\cos y$.

Известно, что $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Значит, $\cos^2 y = 1 - x^2$. Но $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. Поэтому

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}, \text{ т. е.}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Заметим, что имеет место аналогичное соотношение $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg} x = y$; тогда $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Нужно найти $\sin y$.

Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, откуда $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. Но $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, а на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ косинус принимает лишь положительные значения. Поэтому $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$, т. е.

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Так как $\sin y = \operatorname{tg} y \cos y$, то

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ответ: а) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Пример 11. Доказать, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо тождество

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \qquad (1)$$

Решение. Сначала докажем, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$. В § 16 было получено соотношение $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$. Из него, в частности, следует, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-t)\right) = \cos(-t) = \cos t$.

Вычислим значение синуса от обеих частей доказываемого равенства (1):

$$\sin(\arcsin x) = x; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Так как синусы обеих частей равны, то, чтобы убедиться в справедливости тождества (1), остается показать, что $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y = \sin x$ (без проверки этого условия можно получить неверный результат, ведь тригонометрические функции могут принимать одинаковые значения и для различных значений аргумента: например, $\frac{\pi}{6} \ne \frac{5\pi}{6}$, но $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$).

Имеем: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, а потому $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Итак, $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат одному промежутку монотонности $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функции $y = \sin x$. Теперь можно утверждать, что тождество (1) доказано. ■

Аналогично можно доказать, что

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x.$$

Пример 12. Решить уравнение:

а) $\arcsin(2x^2 - 1) = \arcsin(5x - 3)$;

б) $\arccos 2x = \arcsin(2x - 1)$.

Решение. а) Поскольку $y = \arcsin x$ — монотонная функция, из равенства $\arcsin t = \arcsin z$ следует равенство $t = z$. Это значит, что данное уравнение сводится к уравнению $2x^2 - 1 = 5x - 3$, откуда получаем: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Но область определения уравнения задается условиями

$$\begin{cases} -1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1, \\ -1 \leqslant 5x - 3 \leqslant 1. \end{cases}$$

Первый из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет, а второй — нет. Значит, уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{1}{2}$.

б) Левая часть уравнения принимает значения из отрезка $[0; \pi]$ (по определению арккосинуса), а правая — из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (по определению арксинуса). Значит, нас интересуют те значения x, при которых обе части уравнения принимают равные значения из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пусть $\arccos 2x = t$, $\arcsin(2x - 1) = r$. Нас интересует равенство $t = r$, где t и r принадлежат отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Но на этом отрезке равенство $t = r$ эквивалентно равенству $\sin t = \sin r$. Поэтому мы имеем право взять от обеих частей заданного уравнения синус, т. е. перейти к уравнению $\sin(\arccos 2x) = \sin(\arcsin(2x - 1))$. Воспользуемся тем, что $\sin(\arccos 2x) = \sqrt{1 - (2x)^2}$ (см. пример 10а), а $\sin(\arcsin(2x - 1)) = 2x - 1$. Получим более простое уравнение: $\sqrt{1 - 4x^2} = 2x - 1$. Решим его:

$$1 - 4x^2 = (2x - 1)^2;$$
$$8x^2 - 4x = 0;$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Значение $x = 0$ не удовлетворяет иррациональному уравнению $\sqrt{1 - 4x^2} = 2x - 1$, это посторонний корень. Значение $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет иррациональному уравнению, а подставив $x = \frac{1}{2}$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это — корень уравнения.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

ГЛАВА 4

Тригонометрические уравнения

§ 22. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

1. Первые представления о простейших тригонометрических уравнениях

В § 13 и 20 мы научились решать некоторые тригонометрические уравнения вида $\sin t = a$, $\cos t = a$, $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$, где a — действительное число. Например, мы знаем, что уравнения $\sin t = a$ и $\cos t = a$ не имеют решений, если $a < -1$ или $a > 1$, поскольку область значений функции $s = \sin t$, равно как и функции $s = \cos t$, есть отрезок $[-1; 1]$.

Напомним, как мы решали тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\cos t = \frac{1}{2}$; б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Используем геометрическую модель — числовую окружность на координатной плоскости (рис. 125). Отметим на окружности точки M и P с абсциссой $\frac{1}{2}$ (они лежат на прямой $x = \frac{1}{2}$). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{3}$, а значит, всем числам вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Точка P соответствует числу $-\frac{\pi}{3}$, следовательно, и всем числам вида $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

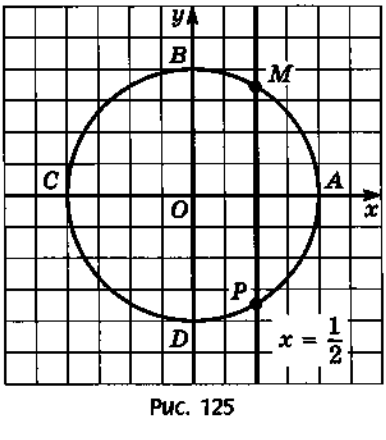


Рис. 125

В итоге получаем две серии решений уравнения:

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \ t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Обобщая, это можно записать так:

$$t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

б) Используем геометрическую модель — числовую окружность на координатной плоскости (рис. 126). Отметим на окружности точки M и P с ординатой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (они лежат на прямой $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$). Точка M соответствует значению $\frac{5\pi}{4}$, т. е. всем числам вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Точка P соответствует значению $\frac{7\pi}{4}$, т. е. всем числам вида $\frac{7\pi}{4} + 2\pi k$.

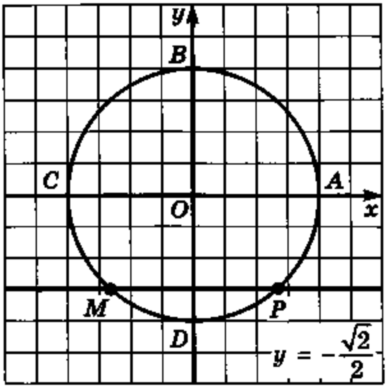


Рис. 126

В итоге получаем две серии решений уравнения:

$$t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in Z^*.$$ ■

Мы решали и некоторые уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, используя для этого графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Так, в § 20 мы, решив уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, получили: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$; решив уравнение $\operatorname{ctg} x = -1$, получили: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

Впрочем, и уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$ тоже можно решать графическим методом.

Но до сих пор мы могли решить тригонометрическое уравнение вида $\sin x = a$, $\cos x = a$ только для конкретных значений a: $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ мы тоже в состоянии решить пока только для конкретных значений a: $0, \pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Когда же в примере 6 в § 13 нам встретились уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$, $\sin t = -0{,}3$, мы сознались в своем бессилии, отложили

* Напомним о нашей договоренности: параметр k (или n), используемый для записи ответа, принимает любые целочисленные значения ($k \in Z$); это всегда мы подразумеваем, но не всегда явно записываем (ради экономии времени и бумаги).

решение этих уравнений до создания необходимой теоретической базы. Теперь с появлением аркфункций необходимая теоретическая база заложена.

2. Решение уравнения $\cos t = a$

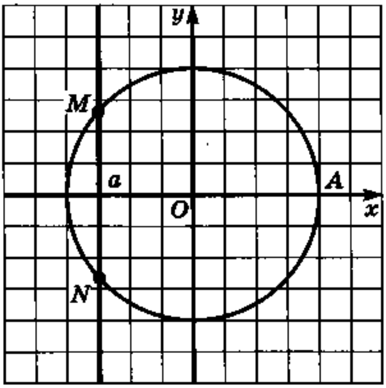


Рис. 127

Решим уравнение $\cos t = a$, где $|a| \leqslant 1$. По определению $\cos t$ — это абсцисса той точки числовой окружности, которая соответствует числу t. На числовой окружности есть две точки — M и N, абсциссы которых равны a. Эти точки симметричны относительно оси абсцисс, а потому величины дуг AM и AN равны по модулю, но противоположны по знаку (рис. 127). Точка M соответствует числу $\arccos a$, а значит, и всем числам вида $\arccos a + 2\pi k$. Точка N соответствует числу $-\arccos a$, а значит, и всем числам вида $-\arccos a + 2\pi k$.

Итак,

если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет решения:

$$\boxed{t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ \ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$;

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$.

В частности, для нерешенного в § 13 уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ теперь мы можем записать ответ: $t = \pm\arccos \frac{2}{5} + 2\pi k$.

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = \frac{2}{7}$;

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

в) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арккосинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1{,}2 < -1$, то уравнение $\cos t = -1{,}2$ не имеет решений. ■

Пример 3. Решить неравенство:

а) $\cos t > \frac{1}{2}$; б) $\cos t > 0{,}3$;

в) $\cos t \leqslant -0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $x > \frac{1}{2}$. Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 128).

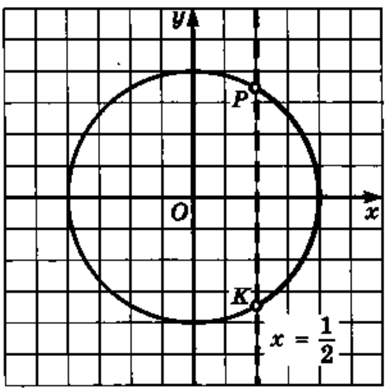


Рис. 128

Неравенству $x > \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги KP. Дуга KP — это дуга с началом в точке K и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек K и P в этом случае $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Значит, аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

б) Прямая $x = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 129). Неравенству $x > 0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные имена точек K и P в этом случае соответственно $-\arccos 0{,}3$ и $\arccos 0{,}3$. Значит, аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$-\arccos 0{,}3 + 2\pi k < t < \arccos 0{,}3 + 2\pi k.$$

в) Прямая $x = -0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 130). Неравенству $x \leqslant -0{,}3$ соответствуют точки дуги PK. Дуга PK — это дуга с началом в точке P и концом в точке K при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и K соответственно $\arccos(-0{,}3)$ и $2\pi - \arccos(-0{,}3)$. Значит, аналитическая запись дуги PK имеет вид

$$\arccos(-0{,}3) + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos(-0{,}3) + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad \blacksquare$$

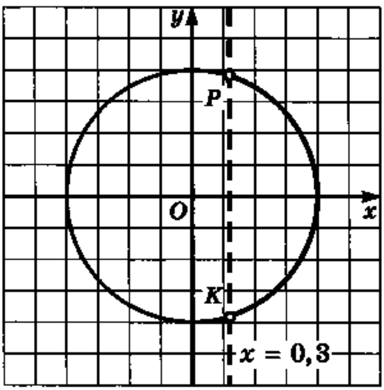


Рис. 129

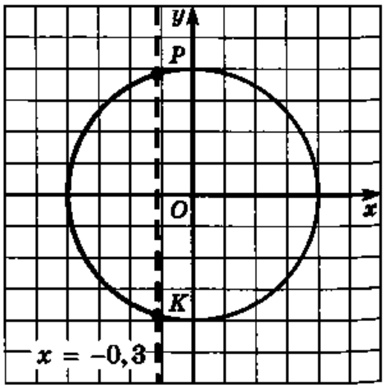


Рис. 130

3. Решение уравнения $\sin t = a$

Решим уравнение $\sin t = a$, где $|a| \leqslant 1$. Пусть для начала $a > 0$. С помощью числовой окружности (рис. 131) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP = AC - PC$, $AC = \pi$, а $PC = AM$, то получаем, что $t_2 = \pi - t_1$.

Поскольку $t_1 = \arcsin a$, то все решения уравнения $\sin t = a$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin a + 2\pi k,$$
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = a$, где $a < 0$. С помощью числовой окружности (рис. 132) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AL, взятая со знаком минус, t_2 — длина дуги AK.

Мы знаем (см. § 21), что $t_1 = \arcsin a$. Заметим далее, что $AK = AC + CK = AC + LA = AC - AL = \pi - \arcsin a$. Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = a$ следующим образом:

$$t = \arcsin a + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Итак,

если** $|a| \leqslant 1$, **то уравнение** $\sin t = a$ **имеет две серии решений:

$$\boxed{t = \arcsin a + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k; \; k \in Z.}$$

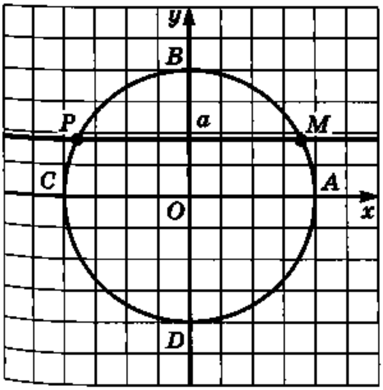


Рис. 131

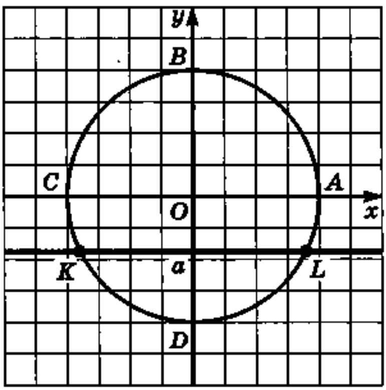


Рис. 132

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться более простыми соотношениями:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k$;

если $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 4. Решить уравнения:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$;   в) $\sin t = -0{,}3$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;   г) $\sin t = \sqrt{3}$.

Решение. а) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

б) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

в) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin (-0{,}3) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin (-0{,}3) + 2\pi k.$$

Вычислить значение арксинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений можно оставить в полученном виде или, учтя, что $\arcsin(-0,3) = -\arcsin 0,3$, записать так:

$$t = -\arcsin 0,3 + 2\pi k, \quad t = \pi + \arcsin 0,3 + 2\pi k.$$

Обратите внимание: решено уравнение $\sin t = -0,3$, которое мы не смогли решить в § 13.

г) Так как $\sqrt{3} > 1$, то уравнение $\sin t = \sqrt{3}$ корней не имеет. ■

Пример 5. Решить неравенство:

а) $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\sin t \geqslant 0,3$; в) $\sin t \leqslant 0,3$.

Решение. а) Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $y \geqslant \frac{1}{2}$. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 133). Неравенству $y \geqslant \frac{1}{2}$ соответствуют точки дуги KP. Главные имена точек K и P соответственно $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, а аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Прямая $y = 0,3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 134). Неравенству $y \geqslant 0,3$ соответствуют точки дуги KP.

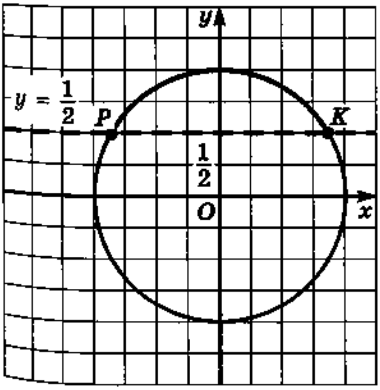


Рис. 133

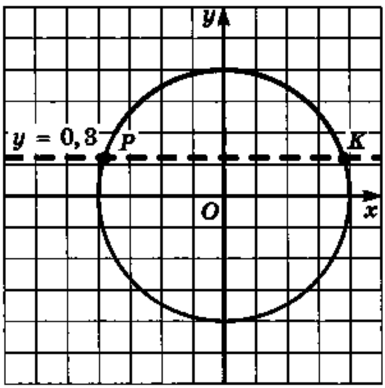


Рис. 134

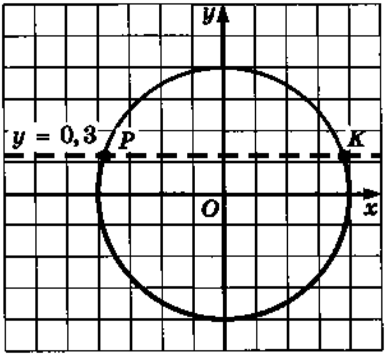


Рис. 135

Главные имена точек K и P, соответственно, $\arcsin 0,3$ и $\pi - \arcsin 0,3$. Значит, решение неравенства имеет вид

$$\arcsin 0,3 + 2\pi k \leqslant t \leqslant \pi - \arcsin 0,3 + 2\pi k.$$

в) Неравенству $y \leqslant 0,3$ соответствуют точки дуги PK (рис. 135). Главные имена точек P и K в этом случае $-\pi - \arcsin 0,3$ и $\arcsin 0,3$ соответственно. Значит, решение неравенства имеет вид

$$-\pi - \arcsin 0,3 + 2\pi k \leqslant t \leqslant t \ \arcsin 0,3 + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \quad \blacksquare$$

Выше получены две формулы для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = \arcsin a + 2\pi k,$$
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$
$$t = -\arcsin a + \pi(2k + 1).$$

Замечаем, что если перед $\arcsin a$ стоит знак $+$, то у числа π множителем является четное число $2k$ (см. первую строку); если же перед $\arcsin a$ стоит знак $-$, то у числа π множителем является нечетное число $2k + 1$ (см. вторую строку). Это наблюдение позволяет записать общую формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.}$$

Почему эта формула общая? Да потому, что при четном n ($n = 2k$) из нее получается первая из написанных выше формул, а при нечетном n ($n = 2k + 1$) — вторая из написанных выше формул.

С помощью полученной общей формулы можно по-другому записать решения уравнений примера 4. Так, для уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$. Для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n$. Это можно записать иначе, выполнив следующие преобразования: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n(-1) \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4}$.

В итоге получаем: $t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Пример 6. Решить систему неравенств $\begin{cases} \sin t \geqslant \frac{1}{3}, \\ \cos t \leqslant \frac{7}{8}. \end{cases}$

Решение. На рисунке 136 представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства $\sin t \geqslant \frac{1}{3}$ — дуга MN, где $AM = \arcsin \frac{1}{3}$, $AN = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$.

На рисунке 137 представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства $\cos t \leqslant \frac{7}{8}$ — дуга PK, где $AP = \arccos \frac{7}{8}$, $AK = 2\pi - \arccos \frac{7}{8}$.

Чтобы правильно расположить полученные дуги на общей числовой окружности, нужно выяснить, как связаны между собой числа $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arccos \frac{7}{8}$, тогда мы сможем расположить точки M и P в первой четверти в правильном порядке (впрочем, если судить по чертежу, точка M расположена ниже точки P, т. е., скорее всего, $\arcsin \frac{1}{3} < \arccos \frac{7}{8}$).

Пусть $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arccos \frac{7}{8}$. Тогда $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{7}{8}$, $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Поскольку $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{15}}{8}$, т. е. $\sin \alpha < \sin \beta$, то $\alpha < \beta$.

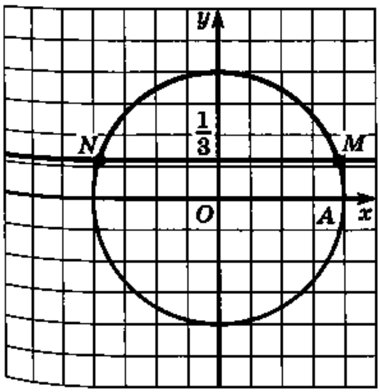


Рис. 136

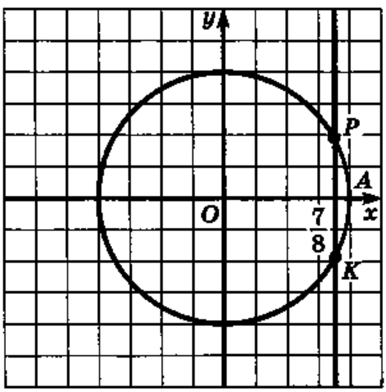


Рис. 137

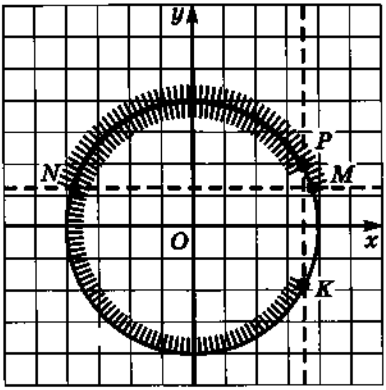


Рис. 138

Итак, $\arcsin\frac{1}{3} < \arccos\frac{7}{8}$, и теперь мы в состоянии построить правильную геометрическую иллюстрацию решения заданной системы неравенств — она представлена на рисунке 138, это дуга PN. Осталось составить ее аналитическую запись:

$$\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k \leqslant t \leqslant$$

$$\leqslant \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in Z. \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Вы, наверное, обратили внимание на то, что всюду в этом параграфе, говоря о решении уравнений и неравенств, мы обозначали переменную буквой t, а не x, к чему вы, естественно, больше привыкли. Это было сделано для того, чтобы удобнее было работать с числовой окружностью. Теперь мы имеем готовые формулы для решения уравнений $\sin t = a$, $\cos t = a$, значит, можем обходиться без числовой окружности и вернуться при решении уравнений (и даже неравенств, хотя в этом случае числовая окружность весьма полезна) к традиционному обозначению переменной буквой x (или любой другой буквой).

4. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (рис. 139). Они имеют бесконечно много точек пересечения,

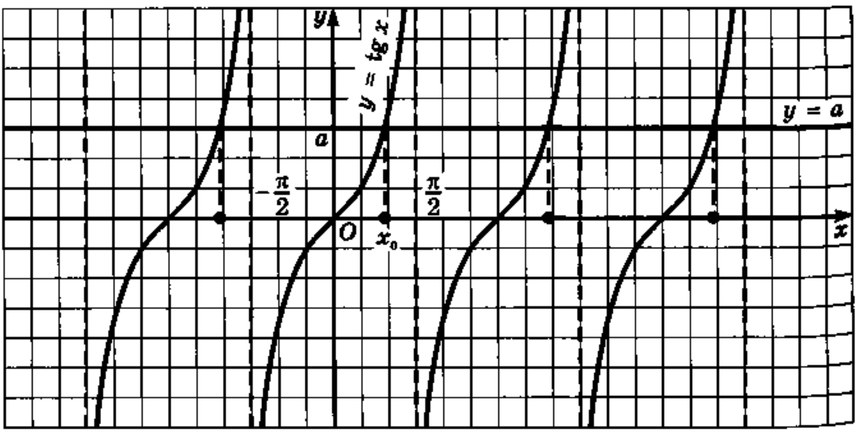


Рис. 139

абсциссы всех этих точек можно выразить формулой $x = x_0 + \pi n$, где $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x_0 = a$. Значит, $x_0 = \operatorname{arctg} a$ (см. § 21), а потому ***решение уравнения*** $\operatorname{tg} x = a$ ***имеет вид***

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.}$$

Аналогично ***решение уравнения*** $\operatorname{ctg} x = a$ ***имеет вид***

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.}$$

Пример 7. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1{,}2$;

б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x = -1$.

Решение. а) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n$.

Находим, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

б) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} \left(-\sqrt{3}\right) + \pi n$.

Находим, что $\operatorname{arctg} \left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

в) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} (-1{,}2) + \pi n$.

Вычислить значение арктангенса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arcctg} (-1) + \pi n$. Вычислим $\operatorname{arcctg} (-1)$:

$$\operatorname{arcctg} (-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n.$$ ■

Неравенство вида $\operatorname{tg} x < a$ (или $\operatorname{tg} x > a$) можно решать графически, придерживаясь следующего плана:

1) построить тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = a$;

2) выделить для главной ветви тангенсоиды промежуток оси x, на котором выполняется заданное неравенство;

3) учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, записать ответ в общем виде.

Пример 8. Решить неравенства:

а) $\operatorname{tg} x < 1$; б) $\operatorname{tg} x > -2$.

Решение. а) Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$. На главной ветви тангенсоиды они пересекаются в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 140).

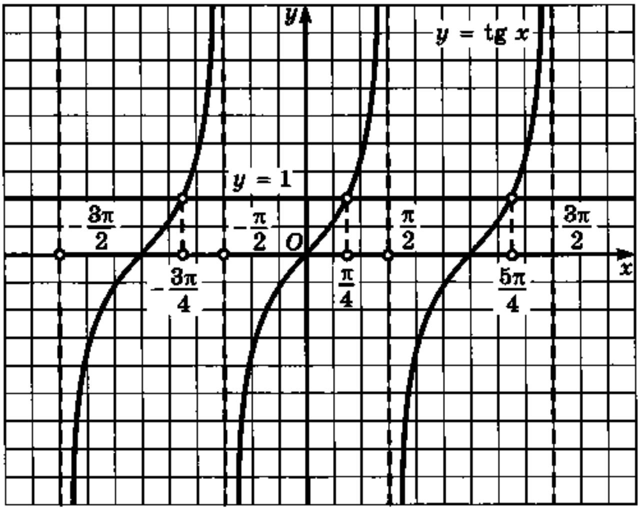


Рис. 140

Выделим промежуток оси x, на котором главная ветвь тангенсоиды расположена ниже прямой $y = 1$, это интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, делаем вывод, что заданное неравенство выполняется на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

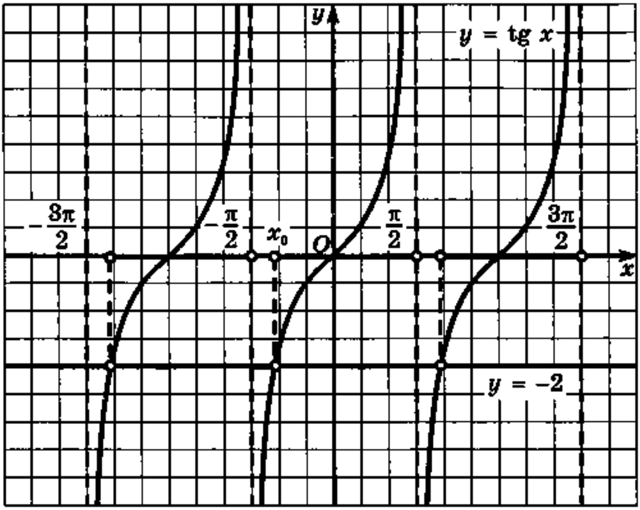


Рис. 141

Объединение всех таких интервалов и представляет собой общее решение заданного неравенства.

Ответ можно записать и по-другому:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

б) Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$. На главной ветви тангенсоиды (рис. 141) они пересекаются в точке с абсциссой $x_0 = \operatorname{arctg}(-2)$.

Выделим промежуток оси x, на котором главная ветвь тангенсоиды расположена выше прямой $y = -2$, это интервал $\left(\operatorname{arctg}(-2); \frac{\pi}{2}\right)$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, делаем вывод, что заданное неравенство выполняется на любом интервале вида

$$\left(\operatorname{arctg}(-2) + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Ответ можно записать в виде двойного неравенства:

$$\operatorname{arctg}(-2) + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$ ■

Замечание 2. Неравенство вида $\operatorname{tg} x > a$ $(\operatorname{tg} x < a)$ можно решать и с помощью числовой окружности. Об этом мы говорили выше в § 20 и используем ниже, в примере 9.

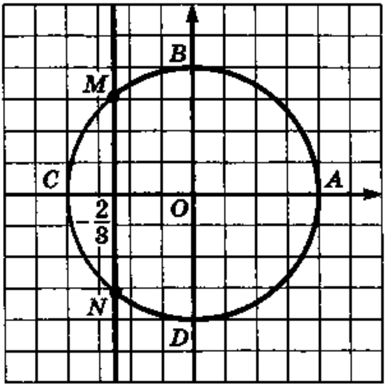


Рис. 142

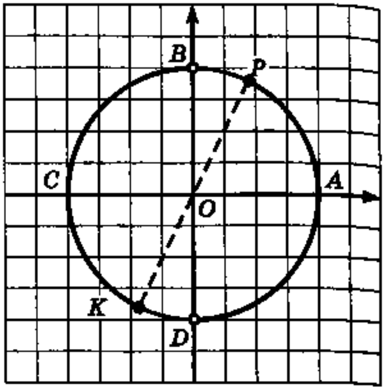


Рис. 143

Пример 9. Решить систему неравенств $\begin{cases} \cos x \geqslant -\frac{2}{3}, \\ \operatorname{tg} x \leqslant 2. \end{cases}$

Решение. На рисунке 142 представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства $\cos x \geqslant -\frac{2}{3}$ — дуга NM; здесь $AM = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $AN = 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

На рисунке 143 представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$ — дуги DP и BK, где $AP = \operatorname{arctg} 2$, $AK = \pi + \operatorname{arctg} 2$.

Чтобы правильно расположить полученные дуги на общей числовой окружности, нужно выяснить, как связаны между собой числа $\alpha = 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\beta = \pi + \operatorname{arctg} 2$, тогда мы сможем расположить точки N и K в третьей четверти в правильном порядке.

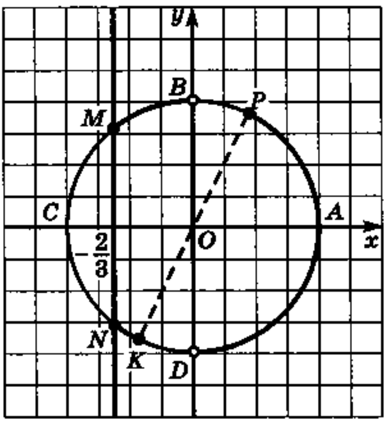


Рис. 144

Вычислим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Имеем: $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{4}$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Далее, $\operatorname{tg}\beta = 2$, значит, $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$. Но если для аргументов α и β из третьей четверти выполняется неравенство $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, то $\alpha < \beta$.

Итак, $2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) < \pi + \operatorname{arctg} 2$, и теперь мы в состоянии построить правильную геометрическую иллюстрацию решения заданной системы неравенств — она представлена на рисунке 144, это дуги DP, BM и NK. Осталось составить их аналитические записи:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad \blacksquare$$

5. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

или, что то же самое,

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) особо важны частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$).

К простейшим относят обычно и уравнения вида $T(kx + m) = a$, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 10. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Введем новую переменную $t = 2x$, тогда заданное уравнение примет вид $\sin t = \frac{1}{2}$, откуда получаем:

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем: $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ к записи $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

б) Мы знаем, что решения уравнения $\cos t = a$ имеют вид $t = \pm\arccos a + 2\pi n$. Для данного примера это означает, что

$$\frac{2}{3}x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n.$$

Вычислим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, воспользовавшись соответствующей формулой для арккосинуса (см. § 21):

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Значит, $\frac{2}{3}x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n$.

в) Мы знаем, что решения уравнения $\operatorname{tg} t = a$ имеют вид $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Для данного примера это означает, что $4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$. Далее получаем:

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}.$$

■

Пример 11. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (см. пример 10а). Придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ... , −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу решений.

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2 \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \dots$.

Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \dots$.

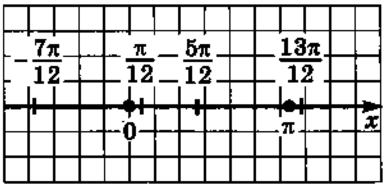


Рис. 145

На рисунке 145 представлена геометрическая интерпретация проведенных рассуждений.

Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$.

Пример 12. Найти те корни уравнения $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, которые принадлежат отрезку $[-2; 3]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$$

(см. пример 10б). Придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ... , −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + 0 = \pm\frac{\pi}{4}$. Оба эти числа $\left(-\frac{\pi}{4} \text{ и } \frac{\pi}{4}\right)$ принадлежат заданному отрезку $[-2; 3]$.

Если $n = 1$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$. Оба числа $\left(\frac{11\pi}{12} \text{ и } \frac{5\pi}{12}\right)$ принадлежат заданному отрезку $[-2; 3]$.

Если $n = 2$, то $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$. Числа $\frac{19\pi}{12}$ и $\frac{13\pi}{12}$ не принадлежат заданному отрезку $[-2; 3]$, поскольку оба они больше числа 3. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \dots$.

Пусть $n = -1$. Тогда $x = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}$. Это значит, что либо $x = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12}$, либо $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{11\pi}{12}$. Из этих двух значений заданному отрезку $[-2; 3]$ принадлежит только $-\frac{5\pi}{12}$, поскольку второе число, т. е. число $-\frac{11\pi}{12}$, меньше числа −2.

Не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}$.

§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений

1. Метод замены переменной

Этот метод вам хорошо известен, вы не раз применяли его при решении различных уравнений. Покажем на примерах, как он применяется при решении тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Решение. Введем новую переменную: $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое из этих уравнений не имеет решений, а для второго получаем:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n. \qquad \blacksquare$$

Пример 2. Решить уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда получаем:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0;$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение при́мет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$, т. е. либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения получаем: $x = 2\pi n$, из второго — $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$, т. е. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 4$.

Решение. Поскольку $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, есть смысл ввести новую переменную: $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Это позволит переписать уравнение в более простом виде: $z + \frac{3}{z} = 4$.

Далее получаем:

$$z^2 + 3 = 4z;$$
$$z^2 - 4z + 3 = 0;$$
$$z_1 = 1, \quad z_2 = 3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем два уравнения: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. Из первого уравнения находим: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$, т. е. $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = 2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$.

2. Метод разложения на множители

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — *методе разложения на множители*. Суть этого метода вам знакома: если уравнение $f(x) = 0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят так: задача сводится к решению *совокупности уравнений*

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$.

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n. \qquad \blacksquare$$

Пример 5. Решить уравнение $2 \sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$.

Решение. Имеем: $\cos 5x\,(2 \sin x - 1) = 0$. Значит, приходим к совокупности уравнений:

$$\cos 5x = 0; \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

Переход от уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ к совокупности уравнений: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$ — не всегда безопасен. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg} x\,(\sin x - 1) = 0$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим: $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Но включить обе серии решений в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений — ОДЗ), это посторонние корни.

3. Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени;** уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени.**

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента (a и b) отличны от нуля, так как, если $a = 0$, уравнение принимает вид $b \cos x = 0$ и отдельного обсуждения не заслуживает. Аналогично, при $b = 0$ получаем: $a \sin x = 0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x},$$

т. е. $a \operatorname{tg} x + b = 0$.

В итоге приходим к простейшему тригонометрическому уравнению

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

Но внимание! Вообще-то делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение нигде не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда однородное уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$ примет вид $a \sin x = 0$, т. е. $\sin x = 0$ (вы ведь не забыли, что коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках. Итак, при $a \neq 0$, $b \neq 0$ значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, а потому деление обеих частей уравнения на $\cos x$ — вполне благополучная операция, не приводящая к потере корней.

Уравнения вида $a \sin mx + b \cos mx = 0$ тоже называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени. Для их решения (при $a \neq 0$, $b \neq 0$) обе части уравнения почленно делят на $\cos mx$.

Пример 6. Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos 2x$, получим:

$$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0;\ \ \operatorname{tg} 2x = -1;\ \ 2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n;$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, легко убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$:

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $a\sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид

$$b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\,(b\sin x + c\cos x) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b\sin x + c\cos x = 0.$$

Получились два уравнения, которые мы решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = 0$, т. е. когда однородное уравнение имеет вид $a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородного уравнения.

Алгоритм решения уравнения
$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \operatorname{tg} x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида
$$a \sin^2 mx + b \sin mx \cos mx + c \cos^2 mx = 0.$$

Пример 8. Решить уравнение
$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$. Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} x$, получим: $z^2 - 3z + 2 = 0$; $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из первого уравнения находим:
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из второго уравнения находнм: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Здесь отсутствует член вида $a \sin^2 x$, значит, делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Решим уравнение методом разложения на множители:
$$\cos x \left(\sqrt{3} \sin x + \cos x\right) = 0;$$
$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Второе уравнение — однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $\cos x$:
$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0;$$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \text{ т. е. } x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Встречаются, разумеется, и однородные тригонометрические уравнения более высоких степеней; идеология их решения та же самая.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x - 3\cos^3 x = 0.$$

Решение. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то левая часть уравнения обращается либо в 1, либо в -1. Следовательно, указанные значения x не удовлетворяют заданному уравнению, а потому можно, не опасаясь потери решений, разделить обе части уравнения почленно на $\cos^3 x$. Получим:

$$\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0;$$
$$\mathrm{tg}^2 x\,(\mathrm{tg}\,x + 1) - 3\,(\mathrm{tg}\,x + 1) = 0;$$
$$(\mathrm{tg}\,x + 1)\,(\mathrm{tg}^2 x - 3) = 0.$$

Значит, либо $\mathrm{tg}\,x = -1$, откуда находим: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; либо $\mathrm{tg}\,x = \pm\sqrt{3}$, откуда находим: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.

В заключение рассмотрим более сложный пример.

Пример 11. Решить уравнение

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x \cos 3x + 5\cos^2 3x = 2$$

и выделить те его корни, которые принадлежат интервалу $(-\pi; \pi)$.

Решение. Чем это уравнение сложнее предыдущих? Во-первых, оно не является однородным, так как в правой его части содержится не 0, а 2. Во-вторых, в левой части уравнения под знаками синуса и косинуса находится не x, а $3x$. В-третьих, нужно не только решить уравнение в общем виде, но и выбрать корни, принадлежащие заданному промежутку. Эти три дополнительные трудности мы сейчас и начнем преодолевать.

С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ — это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x;$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0;$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Оно содержит в своем составе член $\sin^2 3x$, значит, применив способ почленного деления на $\cos^2 3x$, получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x + 3 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} 3x$, получим квадратное уравнение

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать формулу корней квадратного уравнения, но изящнее сделать так: заметив что

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = \left(z - \sqrt{3}\right)^2,$$

преобразовать квадратное уравнение к виду

$$\left(z - \sqrt{3}\right)^2 = 0.$$

Значит, $z = \sqrt{3}$, т. е.

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3};$$

$$3x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n;$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Осталось из найденной серии решений выбрать те корни уравнения, которые принадлежат заданному интервалу $(-\pi; \pi)$. Можно осуществить «перебор по параметру», т. е. последовательно придать параметру n значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ... , как мы это делали в § 22 (примеры 11 и 12). Но мы хотим показать еще один прием (быть может, он покажется вам более интересным).

Нам нужно найти такие значения x, которые содержатся в интервале $(-\pi; \pi)$, т. е. удовлетворяют двойному неравенству $-\pi < x < \pi$. Поскольку $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, получаем неравенство

$$-\pi < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < \pi.$$

Умножим все части этого неравенства на 9 и разделим на π:

$$-9 < 1 + 3n < 9;$$

$$-10 < 3n < 8;$$

$$-\frac{10}{3} < n < \frac{8}{3}.$$

Осталось выяснить, какие целочисленные значения параметра n удовлетворяют последнему неравенству. Это −3, −2, −1, 0, 1, 2. Значит, если перечисленные шесть значений подставить вместо n в формулу решений $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, то мы тем самым и выделим интересующие нас корни уравнения, принадлежащие заданному интервалу $(-\pi; \pi)$.

1) Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{9} - \pi = -\frac{8\pi}{9}$;

2) если $n = -2$, то $x = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{9}$;

3) если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{9}$;

4) если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{9} + 0 = \frac{\pi}{9}$;

5) если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}$;

6) если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$.

Ответ: $-\frac{8\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$; $-\frac{2\pi}{9}$; $\frac{\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$.

ГЛАВА 5 Преобразование тригонометрических выражений

§ 24. Синус и косинус суммы и разности аргументов

В этой главе речь пойдет о преобразованиях тригонометрических выражений с помощью различных формул тригонометрии. Самые важные — формулы *синуса и косинуса суммы аргументов*:

$$\boxed{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;} \tag{1}$$

$$\boxed{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y} \tag{2}$$

(их доказательство мы приведем в конце параграфа). Эти формулы считаются самыми важными потому, что с их помощью без особого труда можно вывести практически все основные формулы тригонометрии. Рассмотрим, например, выражение $\sin(x - y)$. Воспользуемся тем, что $x - y = x + (-y)$, и применим к выражению $x + (-y)$ первую из написанных выше формул — формулу синуса суммы:

$$\sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y).$$

Учитывая, что $\cos(-y) = \cos y$, $\sin(-y) = -\sin y$, получим:

$$\boxed{\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.} \tag{3}$$

Это формула *синуса разности аргументов*. Рассуждая аналогично, получим формулу *косинуса разности аргументов*:

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y),$$

т. е.

$$\boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.} \tag{4}$$

Рассмотрим примеры использования формул (1)—(4), учитывая при этом, что каждая из них применяется на практике как слева направо, так и справа налево.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 75°$; в) $\sin 15°$; г) $\cos 15°$.

Решение. а) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° +$

$$+ \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Мы воспользовались формулой (1) синуса суммы и известными значениями синуса и косинуса.

б) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

в) Воспользуемся формулой (3) синуса разности аргументов:

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

г) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$ ■

Замечание. Из курса геометрии известно, что $\sin \alpha° = \cos(90° - \alpha°)$. С помощью этой формулы примеры 1в и 1г можно решить быстрее, но наша цель была чисто дидактическая — показать примеры использования всех записанных выше четырех формул.

Пример 2. Вычислить:

а) $\sin 48° \cos 12° + \cos 48° \sin 12°$;

б) $\cos 37° \cos 8° - \sin 37° \sin 8°$;

в) $\cos \frac{14\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{14\pi}{15} \sin \frac{3\pi}{5}$.

Решение. а) Применим к заданному выражению формулу (1):

$$\sin 48° \cos 12° + \cos 48° \sin 12° = \sin(48° + 12°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Применим к заданному выражению формулу (2):

$$\cos 37° \cos 8° - \sin 37° \sin 8° = \cos(37° + 8°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) Применим к заданному выражению формулу (4):

$$\cos \frac{14\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{14\pi}{15} \sin \frac{3\pi}{5} = \cos\left(\frac{14\pi}{15} - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right)$, если известно, что

$$\cos y = -\frac{3}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < y < \pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой косинуса разности:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos y + \sin\frac{\pi}{3}\sin y. \qquad (5)$$

Значение $\cos y$ задано в условии, значения $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ известны, они равны соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Осталось вычислить значение $\sin y$:

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

По условию аргумент y принадлежит второй четверти, а в ней синус положителен, поэтому из равенства $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что $\sin y = \frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (5):

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}. \qquad \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить $\sin(x + y)$, если известно, что

$$\sin x = \frac{3}{5}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Воспользуемся формулой синуса суммы:

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y. \qquad (6)$$

Значения $\sin x$ и $\cos y$ заданы, нужно вычислить значения $\cos x$ и $\sin y$. Имеем:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

По условию аргумент x принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из равенства $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos x = \frac{4}{5}$.

Далее, $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

По условию аргумент y принадлежит третьей четверти, а в ней синус отрицателен. Поэтому из равенства $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что

$\sin x = -\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (6):

$$\sin(x + y) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -1. \qquad \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить $x + y$, если известно, что

$$\sin x = \frac{3}{5}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}; \ \cos y = -\frac{3}{5}, \ \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. В предыдущем примере мы установили, что при заданных условиях выполняется равенство $\sin(x + y) = -1$.

По условию $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$. Сложив эти два двойных неравенства, получим:

$$\pi < x + y < 2\pi.$$

Итак, $\sin(x + y) = -1$ и $\pi < x + y < 2\pi$, значит, $x + y = \frac{3\pi}{2}$. $\blacksquare$

Пример 6. Упростить выражение $\sqrt{3}\cos x - \sin x$.

Решение. Если переписать заданное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$ и учесть, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то можно увидеть, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы косинуса суммы для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x. Таким образом,

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right). \qquad \blacksquare$$

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Решение. В предыдущем примере мы получили, что

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$$

Решая это уравнение, последовательно получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Учтем, что $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Это позволит записать решение уравнения не в виде одной, а в виде двух серий, но зато они выглядят понятнее: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 8. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) +$$

$$+ \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sqrt{3}\cos x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{3}\cos x =$ $= \sqrt{3}$, т. е. $\cos x = 1$, откуда получаем: $x = 2\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 9. Вычислить $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Решение. Пусть $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\beta = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$. Тогда (см. § 21):

$$\cos\alpha = -\frac{1}{7},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Нам нужно вычислить $\alpha + \beta$. Для этого следует сначала вычислить $T(\alpha + \beta)$, где T — тригонометрическая функция. В данном случае целесообразнее всего в качестве T взять синус. Дело в том, что $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$, т. е. аргумент $\alpha + \beta$ находится во второй или третьей четверти. А синус эти две четверти различает по знаку (положителен во второй и отрицателен в третьей).

Чтобы вычислить $\sin(\alpha + \beta)$, надо знать $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$. Значения $\sin\beta$, $\cos\alpha$ указаны выше. Найдем $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}.$$

Поскольку $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, а потому $\sin\alpha > 0$, получаем:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Далее, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \frac{27}{196} = \frac{169}{196}$. Поскольку $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, а потому $\cos\beta > 0$, получаем: $\cos\beta = \sqrt{\frac{169}{196}} = \frac{13}{14}$.

Таким образом, $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$, $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos\beta = \frac{13}{14}$, $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Вычислим $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{13}{14} - \frac{1}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{49\sqrt{3}}{98} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha + \beta$ — аргумент из второй четверти. Это значит, что $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Завершая параграф, приведем доказательство формул (1) и (2), изменив (из соображений удобства) обозначения.

Теорема сложения. ***Для любых значений аргументов t и s справедливы формулы:***

$$\sin(t + s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s;$$
$$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, получим один вспомогательный результат из векторной алгебры. Известно, что если в декартовой прямоугольной системе координат задана точка $M(x; y)$, то вектор $\overline{OM}$ разлагается по базисным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ единственным образом (рис. 146):

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Если, в частности, $M(t)$ — точка числовой окружности, то $x = \cos t$, $y = \sin t$ и указанное разложение примет вид

$$\overline{OM} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}, \qquad (7)$$

где, как обычно, t — число, которому на числовой окружности соответствует точка M. Чтобы не обременять себя рассуждениями, связанными с неоднократным обходом числовой окружности, будем считать, что t — длина дуги AM (рис. 147). Если совокупность указанных трех векторов $(\overline{OM}, \vec{i}, \vec{j})$ как жесткую конструкцию повернуть на любой угол в любую сторону вокруг точки O, то векторы, конечно, изменятся, но их связь друг с другом останется прежней (рис. 147):

$$\overline{OP} = \cos t \cdot \vec{e}_1 + \sin t \cdot \vec{e}_2. \qquad (8)$$

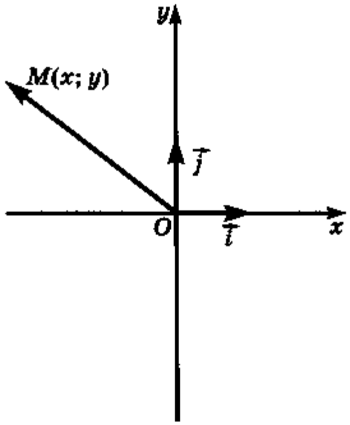


Рис. 146

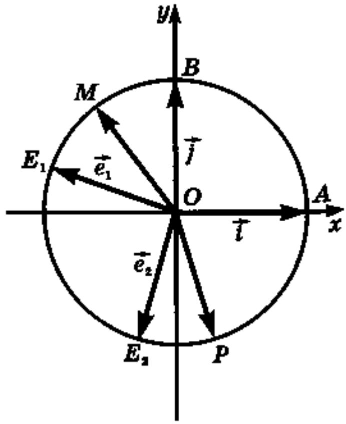


Рис. 147

Здесь $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OP}$ — единичные векторы с общим началом O, угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ равен $90°$ (в направлении против часовой стрелки), t — длина дуги E_1P (и дуги AM).

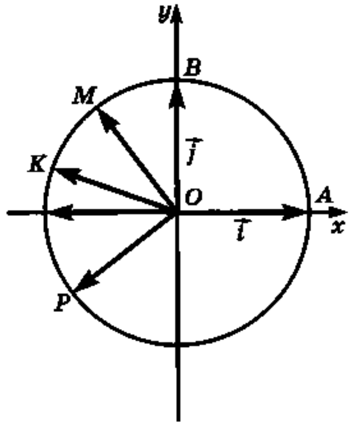


Рис. 148

Доказательство теоремы сложения.

1. Пусть M — точка числовой окружности, соответствующая числу t, K — точка числовой окружности, соответствующая числу $t + s$; тогда $AM = t$, $MK = s$ (с точностью до $2\pi n$). Отметим на числовой окружности еще одну точку — точку $P\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 148). Разложим, воспользовавшись соотношением (7), векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OP}$ по векторам $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}; \tag{9}$$

$$\overrightarrow{OK} = \cos(t + s) \cdot \vec{i} + \sin(t + s) \cdot \vec{j}; \tag{10}$$

$$\overrightarrow{OP} = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}.$$

Воспользовавшись формулами $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$, $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ (см. § 16), перепишем последнее разложение в виде

$$\overrightarrow{OP} = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}. \tag{11}$$

2. Воспользовавшись соотношением (8), разложим вектор $\overrightarrow{OK}$ по взаимно перпендикулярным векторам $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OK} = \cos s \cdot \overrightarrow{OM} + \sin s \cdot \overrightarrow{OP}. \tag{12}$$

3. Подставим в соотношение (12) вместо $\overrightarrow{OM}$ разложение (9), а вместо $\overrightarrow{OP}$ — разложение (11). Получим:

$$\overrightarrow{OK} = \cos s(\cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}) + \sin s(-\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}) =$$
$$= (\cos t \cos s - \sin t \sin s)\vec{i} + (\sin t \cos s + \cos t \sin s)\vec{j}.$$

Итак, мы получили, что

$$\overrightarrow{OK} = (\cos t \cos s - \sin t \sin s)\vec{i} + (\sin t \cos s + \cos t \sin s)\vec{j}. \quad (13)$$

4. Сравнив два разложения (10) и (13) вектора $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и воспользовавшись единственностью разложения, приходим к выводу, что

$$\cos t \cos s - \sin t \sin s = \cos(t + s),$$
$$\sin t \cos s + \cos t \sin s = \sin(t + s).$$

Теорема доказана.

§ 25. Тангенс суммы и разности аргументов

В § 24 мы получили формулы, выражающие синус и косинус суммы и разности аргументов через синусы и косинусы аргументов. В этом параграфе речь пойдет о том, как тангенс суммы или разности аргументов выражается через тангенсы аргументов. Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

При этом, разумеется, предполагается, что все тангенсы имеют смысл, т. е. что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (для первой формулы), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (для второй формулы), причем всюду, как обычно, $n \in \mathbf{Z}$.

Доказательство первой формулы мы приведем в конце параграфа. Но сначала рассмотрим ряд примеров, показывающих, как используются эти формулы на практике.

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 75°$; б) $\operatorname{tg} 15°$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $3+\sqrt{3}$:

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=$$

$$=\frac{6(2+\sqrt{3})}{6}=2+\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 75° = 2+\sqrt{3}$.

б) Воспользуемся тем, что $15° = 45° - 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1+\operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

И в этом случае целесообразно избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $3-\sqrt{3}$:

$$\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=$$

$$=\frac{6(2-\sqrt{3})}{6}=2-\sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$.

в) Заметим, что заданное выражение представляет собой правую часть формулы тангенса суммы для аргументов 27° и 18°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1-\operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°} = \operatorname{tg}(27°+18°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Ответ: а) $2+\sqrt{3}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2. Доказать тождество $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Решение. Применим к правой части проверяемого тождества формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x}=\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.$$ ■

Замечание. Когда речь идет о доказательстве тождества или о преобразовании выражения, всегда предполагают, что переменные принимают только допустимые значения. Так, в рассмотренном примере доказанное тождество справедливо при следующих условиях: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, если известно, что $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Решение. Воспользуемся тождеством, полученным в предыдущем примере:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}. \qquad (1)$$

Если мы вычислим $\operatorname{tg} x$, то вычислим и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Значение $\cos x$ задано, значение $\operatorname{tg} x$ найдем с помощью соотношения $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

По условию аргумент x принадлежит второй четверти, а в ней тангенс отрицателен. Поэтому из равенства $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$ находим, что $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$.

Подставим найденное значение $\operatorname{tg} x$ в правую часть формулы (1):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{7}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7. \quad \blacksquare$$

Пример 4. Доказать, что $\operatorname{tg} 1°$ — иррациональное число.

Решение. Предположим противное: пусть $\operatorname{tg} 1° = r$, где r — рациональное число. Рассмотрим число $\operatorname{tg} 2°$:

$$\operatorname{tg} 2° = \operatorname{tg}(1° + 1°) = \frac{\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 1°}{1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 1°} = \frac{r + r}{1 - r \cdot r} = \frac{2r}{1 - r^2}.$$

Оно также оказалось рациональным числом, обозначим его q. Итак, $\operatorname{tg} 2° = q$.

Вычислим $\operatorname{tg} 3°$:

$$\operatorname{tg} 3° = \operatorname{tg}(1° + 2°) = \frac{\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 2°}{1 - \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2°} = \frac{r + q}{1 - rq}.$$

Мы снова получили рациональное число. Продолжая этот процесс, получим, что $\operatorname{tg} 4°$, $\operatorname{tg} 5°$, ..., $\operatorname{tg} 30°$ — рациональные числа. Но $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а это — иррациональное число. Получили противоречие, значит, сделанное предположение неверно, т. е. $\operatorname{tg} 1°$ — иррациональное число. ■

В заключение, как было обещано, докажем формулу тангенса суммы. Имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x \cos y$:

$$\frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Итак, нам удалось преобразовать $\operatorname{tg}(x + y)$ к виду $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Аналогично доказывается формула тангенса разности.

§ 26. Формулы приведения

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\pi + t$, $\pi - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где $n \in \mathbf{Z}$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, когда в качестве аргумента тригонометрической функции будет выступать только аргумент t. Соответствующие формулы называют *формулами приведения*.

С некоторыми формулами приведения вы уже знакомы. Так, в § 13 мы доказали, что $\sin(\pi + t) = -\sin t$, $\cos(\pi + t) = -\cos t$, $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$. Еще две формулы приведения мы получили в § 16: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$. А в § 20 мы доказали, что $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{ctg} x$. Фактически все указанные формулы были получены с помощью числовой окружности. Но основной способ доказательства формул приведения основан на использовании формул сложения (речь идет о четырех формулах из § 24 и двух формулах из § 25). Приведем примеры:

$$\sin(\pi + t) = \sin\pi\cos t + \cos\pi\sin t = 0\cdot\cos t + (-1)\cdot\sin t = -\sin t;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t - \sin\frac{\pi}{2}\sin t = 0\cdot\cos t - 1\cdot\sin t = -\sin t;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)} = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}\cos t + \sin\frac{3\pi}{2}\sin t}{\sin\frac{3\pi}{2}\cos t - \cos\frac{3\pi}{2}\sin t} =$$

$$= \frac{0\cdot\cos t + (-1)\cdot\sin t}{(-1)\cdot\cos t - 0\cdot\sin t} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \operatorname{tg} t;$$

$$\sin(360^\circ - \alpha^\circ) = \sin 360^\circ\cos\alpha^\circ - \cos 360^\circ\sin\alpha^\circ =$$
$$= 0\cdot\cos\alpha^\circ - 1\cdot\sin\alpha^\circ = -\sin\alpha^\circ.$$

Итак,

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -\sin t;$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right) = \operatorname{tg} t;$$
$$\sin(360^\circ - \alpha^\circ) = -\sin\alpha^\circ.$$

Проанализируем полученные формулы. Замечаем, во-первых, что наименование преобразуемой функции после приведения к функции аргумента t (или α°) может сохраниться, а может и измениться (на родственное: синус — на косинус, котангенс — на тангенс и т. д.). Замечаем, во-вторых, что перед полученным выражением может появиться, а может и не появиться знак «минус».

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз нетрудно, но утомительно. Составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться можно, но неудобно, так как она будет громоздкой. На наше счастье, был придуман простой и удобный способ запоминания практически всех формул приведения:

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ *или*

$2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$ или $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);

3) перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $90° + \alpha°$, $90° - \alpha°$, $180° + \alpha°$ и т. д.

Применим сформулированное правило к уже полученным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi + t)$. Наименование функции сохраняется, т. е. получаем $\sin t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + t) = -\sin t$.

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$. Наименование функции изменяется на $\sin t$. Далее, из того, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, следует, что $\frac{\pi}{2} + t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Наименование функции следует изменить на $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2} - t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак «плюс». Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360° - \alpha°)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$). Далее, если считать, что

$0 < \alpha° < 90°$, получим, что $360° - \alpha°$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(360° - \alpha°) = -\sin\alpha°$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$, значит, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5t\right) = \operatorname{tg} 5t$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т. д.

Пример 1. Вычислить $\frac{\cos 78° \cos 327° - \sin 258° \sin 147°}{\cos 428° \sin 113° - \sin 248° \cos 293°}$.

Решение. Сначала воспользуемся формулами приведения:

$$\cos 327° = \cos(360° - 33°) = \cos 33°;$$
$$\sin 258° = \sin(180° + 78°) = -\sin 78°;$$
$$\sin 147° = \sin(180° - 33°) = \sin 33°;$$
$$\cos 428° = \cos(360° + 68°) = \cos 68°;$$
$$\sin 113° = \sin(90° + 23°) = \cos 23°;$$
$$\sin 248° = \sin(180° + 68°) = -\sin 68°;$$
$$\cos 293° = \cos(270° + 23°) = \sin 23°.$$

Значит,

$$\frac{\cos 78° \cos 327° - \sin 258° \sin 147°}{\cos 428° \sin 113° - \sin 248° \cos 293°} =$$

$$= \frac{\cos 78° \cos 33° + \sin 78° \sin 33°}{\cos 68° \cos 23° + \sin 68° \sin 23°} = \frac{\cos(78° - 33°)}{\cos(68° - 23°)} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2. Доказать, что для любых значений x выполняется тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$. Нам нужно доказать, что $\alpha = \beta$.

Сначала докажем, что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. В самом деле, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Далее, по определению арктангенса $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. По определению арккотангенса $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$. Но тогда

$$-\pi < -\operatorname{arcctg} x < 0;$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2} + 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. В силу монотонности функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ следует равенство $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать. ■

Пример 3. Вычислить: а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; б) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; в) $\arccos\left(\sin\frac{46\pi}{5}\right)$.

Решение. а) Пусть $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; тогда $\sin \alpha = \sin\frac{\pi}{5}$, причем $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, делаем вывод, что $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

б) Пусть $\alpha = \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; тогда $\sin \alpha = \sin\frac{4\pi}{5}$, причем $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $\frac{4\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, нельзя сделать вывод, что $\alpha = \frac{4\pi}{5}$. Воспользуемся формулой приведения: $\sin(\pi - x) = \sin x$. Получим:

$$\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}.$$

Итак, $\sin \alpha = \sin\frac{\pi}{5}$, значит, $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

в) Пусть $\alpha = \arccos\left(\sin\frac{46\pi}{5}\right)$; тогда $\cos \alpha = \sin\frac{46\pi}{5}$, причем $\alpha \in [0; \pi]$. С помощью формул приведения преобразуем выражение $\sin\frac{46\pi}{5}$ в выражение $\cos \beta$, где $\beta \in [0; \pi]$. Если это удастся, то из равенства $\cos \alpha = \cos \beta$ можно будет сделать вывод, что $\alpha = \beta$.

Имеем: $\sin \frac{46\pi}{5} = \sin\left(9\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) =$

$= \cos \frac{7\pi}{10}$. Итак, $\beta = \frac{7\pi}{10}$, поскольку условие $\frac{7\pi}{10} \in [0; \pi]$ выполняется.

Значит, $\alpha = \frac{7\pi}{10}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{7\pi}{10}$.

§ 27. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени

Здесь речь пойдет о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Их обычно называют *формулами двойного аргумента*.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\sin(x + x)$ формулу синуса суммы (см. § 24):

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\cos(x + x)$ формулу косинуса суммы (см. § 24):

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\operatorname{tg}(x + x)$ формулу «тангенс суммы» (см. § 25):

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы синуса двойного аргумента и косинуса двойного аргумента справедливы для любых значений аргумента (ника-ких ограничений нет), тогда как формула тангенса двойного аргумента справедлива лишь для тех значений аргумента x, для которых определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т. е. $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$.

Разумеется, формулы двойного аргумента можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 48^\circ = \cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ;$$

$$\cos (2x + 6y) = \cos^2 (x + 3y) - \sin^2 (x + 3y);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}.$$

И как всегда, любую из трех полученных в этом параграфе формул двойного аргумента можно использовать как справа налево, так и слева направо. Например, вместо $2 \sin 3x \cos 3x$ можно написать $\sin 6x$, а вместо $\cos^2 2{,}5t - \sin^2 2{,}5t$ можно написать $\cos 5t$.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

б) $1 - \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$.

Решение. а) Воспользовавшись тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента, получим:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

б) Здесь рассуждения аналогичны приведенным выше:

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2. \quad ■$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

Решение. В числителе дроби воспользуемся доказанным в примере 1 тождеством, а в знаменателе — формулой косинуса двойного аргумента:

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)} = \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Преобразования выполнены при условии $\cos 2x \neq 0$, т. е. $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$. ■

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но без множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

в) Этот пример сложнее, но зато красивее предыдущих: здесь нужно догадаться умножить и разделить заданное выражение на $4\cos 18^\circ$. Что это даст? Смотрите:

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2(2\sin 18^\circ \cos 18^\circ)\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}.$$

Как видите, мы дважды воспользовались формулой синуса двойного аргумента. Чтобы довести вычисления до конца, заметим, что $\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$. Таким образом,

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,25; в) 0,25.

Пример 4. Доказать тождество $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого тождества:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}.$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на 2 (чтобы применить формулу синуса двойного аргумента):

$$\frac{2}{2\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Итак, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Еще раз обращаем ваше внимание на то, что тождество доказано лишь для допустимых значений x, конкретнее, для $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. для значений x, при которых имеющиеся знаменатели отличны от нуля.

Пример 5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$.

Решение. Для вычислений нам необходимо знать, чему равен $\sin x$. Имеем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Отсюда получаем, что $\sin x = -\frac{4}{5}$ (поскольку аргумент x принадлежит четвертой четверти).

а) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

б) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

в) $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$.

г) Для вычисления $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)$ сначала воспользуемся формулой приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)=\cos 4x$. Затем применим к выражению $\cos 4x$ формулу косинуса двойного аргумента $\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x$, тем более, что значения $\cos 2x$ и $\sin 2x$ уже найдены:

$$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=\left(-\frac{7}{25}\right)^2-\left(-\frac{24}{25}\right)^2=\frac{49}{625}-\frac{576}{625}=-\frac{527}{625}.$$

Ответ: а) $-\frac{7}{25}$; б) $-\frac{24}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $-\frac{527}{625}$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin 4x-\cos 2x=0$.

Решение. Если в левой части уравнения применить к выражению $\sin 4x$ формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители. Имеем последовательно:

$$\sin 4x-\cos 2x=0;$$

$$2\sin 2x\cos 2x-\cos 2x=0;$$

$$\cos 2x\,(2\sin 2x-1)=0;$$

$$\cos 2x=0 \quad \text{или} \quad 2\sin 2x-1=0.$$

Из уравнения $\cos 2x=0$ находим:

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$$

Из уравнения $2\sin 2x-1=0$ находим:

$$\sin 2x=\frac{1}{2};$$

$$2x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n;$$

$$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$; $n\in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Вычислить $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда, по определению арктангенса (см. § 21), $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В данном случае можно последнее соотношение конкретизировать: $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, поскольку, по условию, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Итак, известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; нужно вычислить $\cos 2\alpha$.

Воспользуемся формулой $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; получим: $1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда находим, что $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$ и, соответственно, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. А теперь воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Получим:

$$\cos 2\alpha = \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}. \quad \blacksquare$$

Если в формуле $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ заменить $\sin^2\frac{x}{2}$ на $1 - \cos^2\frac{x}{2}$, получим: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, т. е. $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$. Значит,

$$\boxed{\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.} \qquad (1)$$

Если в формуле $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ заменить $\cos^2\frac{x}{2}$ на $1 - \sin^2\frac{x}{2}$, получим:

$$\cos x = \left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},$$

т. е. $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Значит,

$$\boxed{\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) обычно называют *формулами понижения степени.*

Замечание 2. Откуда появилось такое название? Причина, видимо, в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части — первая степень косинуса (степень понизилась). Но при применении этих формул будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Замечание 3. Полученные две формулы называют также *формулами половинного аргумента*, поскольку они позволяют, зная значение $\cos x$, найти значения синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{x}{2}$. Впрочем, с помощью этих формул можно найти и значение тангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Пример 8. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, т. е. $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, значит, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из уравнения $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем: $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}.$$

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти; в ней синус положителен, поэтому из уравнения $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{13}$ находим, что $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{3}{2}.$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) 1,5.

Пример 9. Доказать тождество

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}.$$

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{2}.$$

Поскольку

$$\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = -\sin 2x,$$

то числитель дроби приобретает вид $1+\sin 2x$, а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}.$$ ■

Пример 10. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

Решение. Можно, конечно, идти по проторенной дорожке — извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень, получить два более простых уравнения: $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, — а затем каждое из этих уравнений решить по соответствующей формуле. Но, как мы увидим, выгоднее воспользоваться формулой понижения степени:

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{4}$ и далее $\cos 6x = \frac{1}{2}$.

Получилось не два уравнения, а одно. Находим:

$$6x = \pm\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$ ■

Пример 11. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Пусть $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тогда, по определению арккосинуса (см. § 21), $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in [0; \pi]$. В данном случае последнее соотношение можно конкретизировать: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, поскольку, по условию, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, т. е. $\cos\alpha < 0$.

Итак, известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; нужно вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Выше мы отметили, что $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$. Значит, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 4$, откуда получаем, что либо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, либо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Но $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, а потому $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. В этом промежутке $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, значит, из двух указанных выше возможностей выбираем первую: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Ответ: 2.

§ 28. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения*

В этом параграфе речь пойдет о формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

Рассмотрим выражение $\sin(s + t) + \sin(s - t)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$$(\sin s \cos t + \cos s \sin t) + (\sin s \cos t - \cos s \sin t) = 2 \sin s \cos t.$$

Итак,

$$\sin(s + t) + \sin(s - t) = 2 \sin s \cos t. \qquad \text{(a)}$$

Введем обозначения: $x = s + t$, $y = s - t$. Если эти равенства сложить, получим: $x + y = 2s$, т. е. $s = \frac{x+y}{2}$. Если же из равенства $x = s + t$ вычесть равенство $y = s - t$, получим: $x - y = 2t$, т. е. $t = \frac{x-y}{2}$. А теперь заменим в формуле (а) $s + t$ на x, $s - t$ на y, s на $\frac{x+y}{2}$, t на $\frac{x-y}{2}$. Тогда формула (а) примет вид

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (1)$$

Например,

$$\sin 6x + \sin 4x = 2 \sin\frac{6x+4x}{2} \cos\frac{6x-4x}{2} = 2 \sin 5x \cos x;$$

$$\sin 43^\circ + \sin 17^\circ = 2 \sin\frac{43^\circ + 17^\circ}{2} \cos\frac{43^\circ - 17^\circ}{2} =$$

$$= 2 \sin 30^\circ \cos 13^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 13^\circ = \cos 13^\circ.$$

Воспользовавшись тем, что $-\sin y = \sin(-y)$, и формулой суммы синусов, находим, что

$$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) =$$

$$= 2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cos\frac{x-(-y)}{2} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (2)$$

Например,

$$\sin 3x - \sin 5x = 2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2} =$$

$$= 2\sin(-x)\cos 4x = -2\sin x\cos 4x.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t) + \cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t - \sin s\sin t) + (\cos s\cos t + \sin s\sin t) = 2\cos s\cos t.$$

Итак, $\cos(s+t) + \cos(s-t) = 2\cos s\cos t$.

Введем обозначения: $x = s + t$, $y = s - t$; получим (как при выводе формулы (1)):

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (3)$$

Например,

$$\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$$

(мы учли, что $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и что $\cos(-t) = \cos t$).

Рассмотрим выражение $\cos(s+t) - \cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t - \sin s\sin t) - (\cos s\cos t + \sin s\sin t) = -2\sin s\sin t.$$

Итак, $\cos(s+t) - \cos(s-t) = -2\sin s \sin t$.

Перейдя к переменным $x = s + t$, $y = s - t$, получим:

$$\boxed{\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.} \qquad (4)$$

Например,

$$\cos(2x+y) - \cos(4x-y) =$$

$$= -2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2} =$$

$$= -2\sin 3x \sin(-x+y) = 2\sin 3x \sin(x-y).$$

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 5x + \sin x = 0$; б) $\sin 17x = \sin 7x$; в) $\cos 3x = \sin x$.

Решение. а) Преобразовав сумму синусов в произведение по формуле (1), получим:

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cos 2x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать так:

$$2\sin 3x \cos 2x = 0.$$

Значит, либо $\sin 3x = 0$, откуда находим: $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{3}$, —

либо $\cos 2x = 0$, откуда находим: $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

б) Имеем последовательно:

$$\sin 17x - \sin 7x = 0;$$
$$2\sin 5x \cos 12x = 0;$$
$$\sin 5x = 0;\ \cos 12x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $5x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $12x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$.

в) Здесь придется воспользоваться формулой приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, чтобы вместо разности синуса и косинуса получить разность косинусов, для которой применима формула (4). Тогда получим последовательно:

$$\cos 3x - \sin x = 0;$$

$$\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = 0;$$

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Из второго уравнения находим: $2x - \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{3}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

б) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$; $x = \frac{\pi n}{5}$;

в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение. Сгруппируем первое и третье слагаемые левой части уравнения:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$$

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0;$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0;$$

$$\sin 2x = 0;\ \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $2x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{2}$.

Из второго уравнения находим:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n; \quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n; \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos^2 x + \sin^2 3x = 1$.

Решение. Это достаточно сложный пример, требующий умения свободно оперировать формулами тригонометрии. Поэтому мы сделаем его не спеша, обстоятельно, по действиям.

1) Дважды применим к левой части уравнения формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}.$$

2) Теперь заданное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1,$$

откуда получаем: $\cos 2x - \cos 6x = 0$.

3) Преобразуем разность косинусов в произведение:

$$\cos 2x - \cos 6x = -2\sin\frac{2x + 6x}{2}\sin\frac{2x - 6x}{2} =$$

$$= -2\sin 4x \sin(-2x) = 2\sin 4x \sin 2x.$$

Значит, задача сводится к решению уравнения

$$2\sin 4x \sin 2x = 0.$$

4) Полученное уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin 4x = 0; \quad \sin 2x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $4x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{4}$.

Из второго уравнения находим: $2x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}$; $x = \frac{\pi n}{2}$.

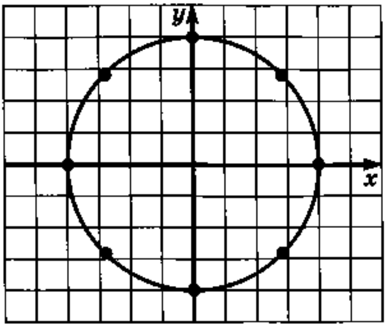


Рис. 149, *а*

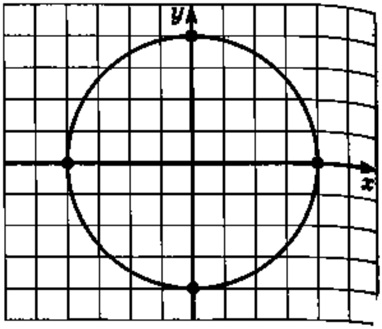


Рис. 149, *б*

Замечание. Полученный ответ можно записать компактнее. Поступим так: отметим все значения x, содержащиеся в серии $x = \frac{\pi n}{4}$, точками на числовой окружности — восемь точек на рисунке 149, *а* (они получаются, если параметру n придать последовательно значения 0, 1, 2, 3, ...). Отметим все значения x, содержащиеся в серии $x = \frac{\pi n}{2}$, точками на числовой окружности — четыре точки на рисунке 149, *б*. Но они уже отмечены на рисунке 149, *а*. Что это значит? Это значит, что вторая серия не содержит новой информации о решениях заданного тригонометрического уравнения, т. е. все его решения исчерпываются первой серией: $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

§ 29. *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы*

Сравните название этого параграфа с названием § 28, в котором речь шла о преобразовании суммы (или разности) синусов или косинусов в произведение. Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе.

В § 28 мы видели, что $\sin(s + t) + \sin(s - t) = 2\sin s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\cos t = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}.}$$

В § 28 мы видели, что $\cos(s+t)+\cos(s-t)=2\cos s\cos t$. Отсюда получаем:

$$\boxed{\cos s\cos t=\frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}.}$$

В § 28 мы видели, что $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\sin t$. Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\sin t=\frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}.}$$

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Преобразовать произведение в сумму:

а) $\sin 5x\cos 3x$; в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)$;
б) $\sin 3x\cos 5x$; г) $\sin 27°\sin 57°$.

Решение.

а) $\sin 5x\cos 3x=\dfrac{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)}{2}=\dfrac{\sin 8x+\sin 2x}{2}$.

б) $\sin 3x\cos 5x=\dfrac{\sin(3x+5x)+\sin(3x-5x)}{2}=$

$$=\frac{\sin 8x+\sin(-2x)}{2}=\frac{\sin 8x-\sin 2x}{2}.$$

в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)=$

$$=\frac{\cos((3x+y)+(x-3y))+\cos((3x+y)-(x-3y))}{2}=$$

$$=\frac{\cos(4x-2y)+\cos(2x+4y)}{2}.$$

г) $\sin 27°\sin 57°=\dfrac{\cos(27°-57°)-\cos(27°+57°)}{2}=$

$$=\frac{\cos(-30°)-\cos 84°}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 84°\right).$$ ■

Пример 2. Найти значение выражения $\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, если известно, что $\cos x=\dfrac{2}{3}$.

Решение.

$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x).$$

Значение $\cos x$ дано в условии, значение $\cos 2x$ легко найти, воспользовавшись формулой $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Таким образом,

$$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{18}.$$ ■

§ 30. Преобразование выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin (x + t)$

На практике, например при изучении колебаний, довольно часто встречаются выражения вида $A \sin x + B \cos x$, причем возникает необходимость свести эту сумму к одной тригонометрической функции.

Рассмотрим для примера выражение $\sqrt{3}\sin x + \cos x$. Если переписать это выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$ и учесть, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то можно заметить, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы «синус суммы» для аргументов x и $\frac{\pi}{6}$. Таким образом, $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) =$ $= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Итак,

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Выражение вида $A \sin x + B \cos x$ (для случая, когда $A = \sqrt{3}$, $B = 1$) мы преобразовали к виду $C \sin (x + t)$. Конкретнее, у нас получилось, что $C = 2$, $t = \frac{\pi}{6}$. Обратите внимание на то, что $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. В самом деле, $A^2 + B^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2 = C^2$. Оказывается, это неслучайно — на подобной идее основано преобразование любого выражения вида $A \sin x + B \cos x$.

Введем обозначение: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Заметим, что

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \frac{C^2}{C^2} = 1.$$

Это значит, что пара чисел — $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ — удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, т. е. точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ — синус некоторого аргумента t, т. е. $\frac{A}{C} = \cos t$, $\frac{B}{C} = \sin t$.

Учитывая все это, поработаем с выражением $A \sin x + B \cos x$:

$$A \sin x + B \cos x = C\left(\frac{A}{C} \sin x + \frac{B}{C} \cos x\right) =$$

$$= C(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = C \sin(x + t).$$

Итак,

$$\boxed{A \sin x + B \cos x = C \sin(x + t), \text{ где } C = \sqrt{A^2 + B^2}.}$$

Обычно аргумент t называют *вспомогательным* (*дополнительным*) *аргументом*. Как его находят, покажем в примере 1.

Пример 1. Преобразовать в произведение выражение $5 \sin x - 12 \cos x$.

Решение. Здесь $A = 5$, $B = -12$, $C = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

Имеем: $5 \sin x - 12 \cos x = 13\left(\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x\right)$.

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям $\cos t = \frac{5}{13}$, $\sin t = \frac{12}{13}$; можно считать, что $t = \arcsin \frac{12}{13}$.

Тогда

$$\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x = \sin x \cos t - \cos x \sin t = \sin(x - t).$$

Итак,

$$5 \sin x - 12 \cos x = 13 \sin(x - t), \text{ где } t = \arcsin \frac{12}{13}.$$ ■

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 5\sin x - 12\cos x.$$

Решение. Имеем (см. пример 1): $y = 13\sin(x - t)$.

Теперь ясно, что $y_{наим} = -13$, $y_{наиб} = 13$ (поскольку синус принимает значения от -1 до 1).

Ответ: $y_{наим} = -13$, $y_{наиб} = 13$.

Пример 3. Решить уравнение $5\sin x - 12\cos x = 13$.

Решение. В этом примере, как и в примере 2, есть смысл преобразовать выражение $5\sin x - 12\cos x$ к виду $13\sin(x - t)$. Получим:

$$13\sin(x - t) = 13;$$

$$\sin(x - t) = 1;$$

$$x - t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = t + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $t = \arcsin\frac{12}{13}$ (см. пример 1).

Ответ: $x = \arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Замечание. С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C} = \sin t$, $\frac{B}{C} = \cos t$. Тогда

$$A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) =$$

$$= C(\sin t\sin x + \cos t\cos x) = C\cos(x - t).$$

§ 31. Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)

Выше, в § 23, мы отметили, что имеются два основных метода решения тригонометрических уравнений: *введение новой переменной* и *разложение на множители*. Там же мы показали, как применяются эти методы при решении тригонометрических уравнений, в частности, при решении однородных тригонометрических уравнений. Теперь, после того, как мы изучили основные формулы тригонометрии, можем выделить два частных случая указанных выше методов. Первый — *метод введения вспомогательного аргумента*. О нем мы говорили в § 30 и привели пример решения тригонометрического уравнения этим методом (см. пример 3 в § 30). Здесь мы рассмотрим еще один метод — частный случай метода введения новой переменной. Он, в принципе, применим к любым уравнениям вида $R(\sin x, \cos x) = 0$, где R — символ некоторого рационального выражения. Основан этот метод на следующих рассуждениях.

Если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

В самом деле:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x;$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x.$$

Поэтому подстановка $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ преобразует уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ в уравнение $R\left(\frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right) = 0$. Левая часть этого уравнения является рациональным выражением с одной переменной u. Значит, указанная подстановка привела тригонометрическое уравнение к рациональному виду. Подстановку $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ принято называть *универсальной подстановкой.*

Почему сделано ограничение $x \neq \pi + 2\pi n$? Потому, что если $x = \pi + 2\pi n$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и тогда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен.

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, нужно всегда специально проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Решение. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ по формулам (1) и введя новую переменную $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, придем к рациональному уравнению:

$$3 \cdot \frac{2u}{1+u^2} + 4 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5.$$

Решив это уравнение, получим: $u = \frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ находим:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n;$$

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n.$$

Проверка показывает, что значения $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения не являются.

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся универсальной подстановкой. Выражая $\sin 2x$, $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ по формулам (1) и полагая $u = \operatorname{tg} x$, получим рациональное уравнение:

$$\frac{6u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1 = 0;$$

$$u = -\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n.$$

Но нужно еще проверить, не удовлетворяют ли заданному уравнению те значения x, при которых $2x = \pi + 2\pi k$, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Имеем:

$$3 \sin (\pi + 2\pi k) + \cos (\pi + 2\pi k) + 1 =$$
$$= 3 \sin \pi + \cos \pi + 1 = 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0.$$

Итак, проверка показала, что значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются решениями уравнения.

Второй способ.

Данное уравнение нетрудно преобразовать в однородное тригонометрическое уравнение второй степени:

$$3 \cdot 2 \sin x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0;$$
$$6 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$
$$\cos x (3 \sin x + \cos x) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; либо $3 \sin x + \cos x = 0$, откуда находим: $3 \operatorname{tg} x + 1 = 0$; $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$; $n \in Z$.

Зная формулы тригонометрии, можно применять методы введения новой переменной и разложения на множители к решению различных по сложности тригонометрических уравнений. Приведем два примера.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой суммы синусов:

$$\sin 5x + \sin x = 2 \sin \frac{5x + x}{2} \cos \frac{5x - x}{2} = 2 \sin 3x \cos 2x.$$

Воспользуемся формулой понижения степени:

$$2 \sin^2 x = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 - \cos 2x.$$

Это позволит выполнить преобразования данного уравнения:

$$2 \sin 3x \cos 2x + 1 - \cos 2x = 1;$$
$$2 \sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$
$$\cos 2x(2 \sin 3x - 1) = 0;$$
$$\cos 2x = 0; \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим: $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Из уравнения $\sin 3x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$; $n \in Z$.

Пример 4. Решить уравнение $\sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$(1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) = 2 \tag{2}$$

и воспользуемся тем, что $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ (см. пример 1 в § 27).

Введем новую переменную: $u = \sin x + \cos x$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$u^2 + u = 2,$$

корни этого уравнения таковы: $u_1 = 1$, $u_2 = -2$.

Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений

$$\sin x + \cos x = 1; \sin x + \cos x = -2.$$

К первому уравнению применим метод введения вспомогательного аргумента:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) = 1;$$

$$\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Есть смысл переписать полученный результат в виде двух серий:

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ т. е. } x = 2\pi n.$$

Что касается уравнения $\sin x + \cos x = -2$, то оно не имеет решений. В самом деле:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$
$$-2 \leqslant \sin x + \cos x \leqslant 2.$$

Но равенство $\sin x + \cos x = -2$ выполняется лишь тогда, когда и $\sin x = -1$, и $\cos x = -1$ *одновременно*, что невозможно.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$; $n \in Z$.

Пример 5. Сколько корней уравнения $5 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$ содержится в отрезке $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$?

Решение. Применим к выражению $5 \sin x - 12 \cos x$ метод введения вспомогательного аргумента (см. § 30):

$5 \sin x - 12 \cos x = 13\left(\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x\right) = 13(\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha) =$

$= 13 \sin (x - \alpha)$; здесь $\frac{5}{13} = \cos \alpha$, $\frac{12}{13} = \sin \alpha$, $\alpha = \arcsin \frac{12}{13}$.

Вернемся к заданному уравнению:

$$13 \sin (x - \alpha) + 13 \sin 3x = 0;$$

$$2 \sin \frac{x - \alpha + 3x}{2} \cos \frac{x - \alpha - 3x}{2} = 0;$$

$$\sin \left(2x - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Получаем совокупность двух уравнений:

$$\sin \left(2x - \frac{\alpha}{2}\right) = 0; \cos \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Из первого уравнения получаем: $2x - \frac{\alpha}{2} = \pi n$; $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

Из второго уравнения получаем: $x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Рассмотрим первую серию решений и выясним, сколько среди них тех, которые принадлежат заданному отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$. Для этого сначала нам надо сделать оценку для числа $\frac{\alpha}{4}$. Имеем: $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{12}{13} < 1$, т. е. $\sin\frac{\pi}{3} <$ $< \sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) < \sin\frac{\pi}{2}$; значит, $\frac{\pi}{3} < \arcsin\frac{12}{13} < \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\frac{\pi}{12} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{8}. \tag{1}$$

Теперь возьмем серию $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi n}{2}$ и будем давать параметру n значения 0, 1, 2 и т. д. При $n = 0$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4}$. Имеем: $\frac{\alpha}{4} > \frac{\pi}{12} > \frac{1}{4}$; $\frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{8} < 7$. Значит, $\frac{\alpha}{4} \in \left[\frac{1}{4};\ 7\right]$.

При $n = 1$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{2}$. Это число принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$.

При $n = 2$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4} + \pi$. Это число принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$.

При $n = 3$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{3\pi}{2}$. Это число принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$.

При $n = 4$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4} + 2\pi$. Имеем: $\frac{\alpha}{4} + 2\pi < \frac{\pi}{8} + 2\pi < 7$. Значит, число $\frac{\alpha}{4} + 2\pi$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$.

При $n = 5$ получаем: $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{2}$. Имеем: $\frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{2} > 7$. Значит, число $\frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{2}$ не принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4};\ 7\right]$. Тем более не принадлежат этому отрезку числа $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi n}{2}$ при $n = 6, 7, 8, \ldots$ Не принадлежат этому отрезку числа указанного вида и при отрицательных значениях параметра n.

Итак, из серии $x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi n}{2}$ отрезку $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$ принадлежат пять чисел.

Теперь возьмем серию $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$ и будем давать параметру n целочисленные значения. При $n = 0$ получаем: $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$. Из неравенства (1) следует, что $\frac{\pi}{6} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$. Значит, $\frac{\pi}{4} < -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3}$, откуда следует, что число $-\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$.

При $n = 1$ получаем: $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2}$. Это число принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$.

При $n = 2$ получаем: $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{5\pi}{2}$. Из неравенства (1) следует, что $\frac{\pi}{4} + 2\pi < -\frac{\alpha}{2} + \frac{5\pi}{2} < \frac{\pi}{3} + 2\pi$. Но $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \approx \frac{28{,}26}{4} > 7$. Значит, число $-\frac{\alpha}{2} + \frac{5\pi}{2}$ не принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$. Тем более не принадлежат этому отрезку числа $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$ при $n = 3, 4, 5, \ldots$. Не принадлежат этому отрезку числа указанного вида и при отрицательных значениях параметра n.

Итак, из серии $x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$ отрезку $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$ принадлежат два числа.

Ответ: в отрезке $\left[\frac{1}{4}; 7\right]$ содержится 7 корней заданного тригонометрического уравнения.

ГЛАВА 6 Комплексные числа

§ 32. Комплексные числа и арифметические операции над ними

Числа — один из основных математических объектов. Вам уже знакомы натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Все вместе они образуют множество действительных чисел. В этой главе мы познакомимся с новой числовой системой — системой *комплексных чисел* (в слове *комплексных* предпочтительнее делать ударение на втором слоге). Термин *система* здесь употребляется не в том смысле, как вы привыкли, говоря о решении системы уравнений или системы неравенств; термин *система* означает множество объектов вместе с некоторым набором свойств и отношений. В математике часто говорят не «множество натуральных чисел» или «множество целых чисел», а «система натуральных чисел», «система целых чисел».

Понятие числа развивалось и изменялось на протяжении всей истории человечества. С течением времени числовые системы расширялись, становились более сложными, включая как составные части ранее известные числовые системы (например, система целых чисел включает в себя систему натуральных чисел). Каждая из числовых систем имела свои преимущества и свои недостатки. У более сложной системы больше различных возможностей по ее использованию и применению, но при этом и само построение такой системы, и знание многочисленных деталей, очевидно, требуют бо́льших усилий и большего времени.

Об истории развития понятия числа можно написать отдельный учебник. Мы ограничимся только одной, чисто алгебраической, точкой зрения.

Рассмотрим «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, они указаны в таблице на с. 241. Мы видим, что по мере продвижения по строкам этой таблицы от N к R список во втором столбце расширяется как раз за счет сужения списка в третьем столбце. Осталась частично допустимая операция извлечения корней из произвольных чисел, которая, как мы увидим, станет допустимой в системе комплексных чисел.

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	*Вычитание*, деление, извлечение корней. Например, можно вычислить $7-5$, $48:4$, $\sqrt[3]{27}$; но, с другой стороны, уравнения $3x+2000=1001$, $4x=3$, $x^2=10$ не имеют корней в N
Целые числа, Z	Сложение, *вычитание*, умножение	*Деление*, извлечение корней. Например, можно вычислить $(-48):(-3)$, $\sqrt{36}$; но, с другой стороны, уравнения $5x-3=2004$, $x^2=999$ не имеют корней в Z
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, *деление*	*Извлечение корней из неотрицательных чисел.* Например, можно вычислить $\sqrt{\frac{81}{169}}$; но, с другой стороны, уравнения $x^2=2$, $3x^4-5=2003$ не имеют корней в Q
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, *извлечение корней из неотрицательных чисел*	*Извлечение корней из произвольных чисел.* Например, можно вычислить $\sqrt[3]{7}$; но, с другой стороны, уравнения $x^2=-1$, $2x^4+5x^2+3=0$ не имеют корней в R
Комплексные числа, C	Все операции	

Переходим к непосредственному построению множества (системы) C комплексных чисел, но сначала напомним еще раз схему взаимного расположения основных, последовательно расширяющихся числовых систем:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Несколько слов по поводу обозначений. N, R и C — это начальные буквы слов соответственно «natural», «real», «complex». Обозначение Z для множества целых чисел напоминает об исключительной роли нуля — «zero». Буква Q для множества рациональных чисел выбрана в связи с тем, что рациональные числа представимы в виде отношения или частного, а слово «quotient» как раз и переводится как «отношение».

Перечислим сначала те минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа.

C_1) *Существует комплексное число, квадрат которого равен −1.*

C_2) *Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.*

C_3) *Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий* (сочетательному, переместительному, распределительному).

Оказывается, выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество C комплексных чисел.

Условия C_1 и C_2 заставляют добавить к множеству R действительных чисел, как минимум, один новый элемент и по определению считать, что квадрат этого элемента равен −1. Такой элемент называют *мнимой единицей* и обозначают i. Это обозначение предложил в XVIII веке Л. Эйлер. Символ i в данном случае просто сокращение от «imaginary» («imaginaire») , что переводится с английского (с французского) как «мнимый, воображаемый».

$$\boxed{i^2 = -1,\ i \text{ — мнимая единица.}}$$

Условия C_2 и C_3 позволяют умножать действительные числа на мнимую единицу. Такие произведения называют *чисто мнимыми* числами. Например, i, $2i$, $-0{,}3i$, $\frac{2}{7}i$, $\sqrt{10} \cdot i$ — чисто мнимые числа. Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием C_3. Например,

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i,$$
$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39,$$
$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 i = -i.$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \quad ai - bi = (a - b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \quad (ai)(bi) = abi^2 = -ab$$

(a и b — действительные числа).

Кроме того, удобно (и естественно), по определению, считать, что $0 \cdot i = 0$. Число 0 — единственное число, являющееся одновременно и действительным, и чисто мнимым.

Условия C_2 и C_3 позволяют не только перемножать, но и складывать действительные числа и чисто мнимые числа, т. е. рассматривать суммы вида $a + bi$, где a и b — любые действительные числа. Если $a = 0$, то $a + bi = 0 + bi = bi$ — чисто мнимое число. Если $b = 0$, то $bi = 0 \cdot i = 0$ и $a + bi = a + 0 = a$ — действительное число. В остальных случаях суммы $a + bi$ не являются ни действительными, ни чисто мнимыми числами, они являются новыми, более сложными, «составными» числами. Заметим, что прилагательное «complex» как раз и переводится как «сложный, составной». Оказывается, что такими суммами исчерпываются вообще все комплексные числа.

Определение 1. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$\boxed{\begin{gathered} z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R, \\ i \text{ — мнимая единица.} \end{gathered}}$$

В записи $z = a + bi$ число a называют *действительной* частью комплексного числа z, а число b — *мнимой* частью комплексного числа z.

Определение 2. Два комплексных числа называют **равными**, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$\boxed{a + bi = c + di \;\Leftrightarrow\; a = c, b = d.}$$

Между комплексным числом $a + 0 \cdot i$ и действительным числом a обычно не делают никакой разницы, подобно тому, как, например, говорят о числе 3 на оси абсцисс, хотя, формально, полагалось бы говорить о точке (3; 0). Действительные числа — это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Значит, выполняется соотношение $R \subset C$.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием C_3. Например, найдем сумму комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = \\ = (a + c) + (b + d)i.$$

Аналогично находится разность комплексных чисел:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Для произведения комплексных чисел формула получается более сложной. Вот она:

$$\boxed{(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.}$$

Можно, конечно, выучить ее, но надежнее понимать, как она получена. В соответствии с условием C_3, следует в произведении $(a + bi) \cdot (c + di)$ раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di) = \\ = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -7i$. Вычислить:

а) z_1z_2; б) $z_1 + z_2z_3$; в) $z_1(z_2 - z_3)$; г) $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3$.

Решение.

а) $z_1z_2 = (1 - 2i)(3 + i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i = 5(1 - i)$.

б) $z_1 + z_2z_3 = (1 - 2i) + (3 + i)(-7i) = 1 - 2i - 21i - 7i^2 = 8 - 23i$.

в) $z_1(z_2 - z_3) = (1 - 2i)(3 + i + 7i) = (1 - 2i)(3 + 8i) = 3 - 6i + 8i - 16i^2 = 19 + 2i$.

г) Найдем отдельно второе и третье слагаемые:

$(z_2)^2 = (3 + i)(3 + i) = 9 + 3i + 3i + i^2 = 8 + 6i$;

$(z_3)^3 = (-7i)(-7i)(-7i) = (-7)^3i^3 = -343(i^2)i = 343i$.

Значит, $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3 = (1 - 2i) + (8 + 6i) + 343i = 9 + 347i$.

Заметим, что $(z_2)^2$ можно было вычислить изящнее. Ведь мы говорили, что на множестве комплексных чисел действуют привычные правила и законы арифметических действий; в частности, выполняются привычные формулы сокращенного умножения. Поэтому можно было действовать так:

$$(z_2)^2 = (3 + i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i. \qquad \blacksquare$$

Пример 2. Решить уравнение $(1 + i)z = 3 - i$.

Решение.

Первый способ. Пусть $z = x + yi$. Тогда

$$(1 + i)z = (1 + i)(x + yi) = x + ix + yi + yi^2 = (x - y) + (x + y)i.$$

Значит, $(x - y) + (x + y)i = 3 - i$. По определению равенства комплексных чисел получаем, что $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = -1. \end{cases}$

Решив эту систему уравнений, находим: $x = 1$, $y = -2$. Поэтому $z = 1 - 2i$.

Второй способ. Обе части уравнения $(1 + i)z = 3 - i$ домножим на $1 - i$. Получим:

$$(1 - i)(1 + i)z = (1 - i)(3 - i),$$
$$(1^2 - i^2)z = 3 - 3i - i + i^2,$$
$$2z = 2 - 4i,$$
$$z = 1 - 2i.$$

Ответ: $z = 1 - 2i$.

Второй способ, конечно, производит впечатление некоторого фокуса. Действительно, как догадаться умножить обе части уравнения именно на $1 - i$? Но раз уж мы увидели эффективность такого приема, попробуем применить его в общей ситуации для нахождения частного двух комплексных чисел. По определению, если $z_2 \neq 0$, то частное $\frac{z_1}{z_2}$ — это корень уравнения $z_2 \cdot z = z_1$.

Итак, рассмотрим уравнение $(c + di)z = a + bi$, где комплексное число $c + di$ отлично от нуля. Умножим обе части уравнения на $c - di$. Получим:

$$(c - di)(c + di)z = (c - di)(a + bi),$$
$$(c^2 - (di)^2)z = ac - (di)a + c(bi) - bdi^2,$$
$$(c^2 + d^2)z = (ac + bd) + (bc - ad)i,$$
$$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Итак, мы получили формулу для частного двух комплексных чисел:

$$\boxed{\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.}$$

Как и в случае произведения, для конкретных вычислений совсем не обязательно запоминать эту формулу. А вот что действительно стоит помнить, так это сам прием умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на $c - di$.

Пример 3. Пусть $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = 1 + 3i$. Вычислить $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)} =$$

$$= \frac{2 - i - 6i + 3i^2}{1+9} = \frac{-1-7i}{10} = -0{,}1 - 0{,}7i;$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{4+1} =$$

$$= \frac{-1+7i}{5} = -0{,}2 + 1{,}4i.$$

Значит, $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = (-0{,}1 - 0{,}7i) + (-0{,}2 + 1{,}4i) = -0{,}3 + 0{,}7i.$

Ответ: $-0{,}3 + 0{,}7i$.

Определение 3. Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному**. Если данное комплексное число обозначено буквой z, то сопряженное число обозначают $\bar{z}$: $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Например, сопряженным для числа $3 + 2i$ будет число $3 - 2i$; сопряженным для числа $-0{,}3 - 5i$ будет число $-0{,}3 + 5i$, сопряженным для числа $3i$ будет число $-3i$, сопряженным для числа $2i + 4$ (внимание!) будет число $-2i + 4$.

Если мнимая часть комплексного числа z равна нулю, т. е. если это на самом деле действительное число, то $\bar{z} = z$. Верно и обратное: если $\bar{z} = z$, то $x + yi = x - yi$, и поэтому $y = 0$, т. е. z — действительное число. Значит, для действительных чисел (и только для них) переход к сопряженному не дает ничего нового: число переходит само в себя. Тем самым операция перехода к сопряженному числу — это *новая* операция, которая содержательна именно для множества комплексных чисел. У этой операции есть много полезных свойств.

Свойство 1. Если $z = x + yi$, то $\bar{z} \cdot z = x^2 + y^2$.

В самом деле, $\bar{z} \cdot z = (x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

Между прочим, теперь мы можем разложить на множители не только разность квадратов, но и сумму квадратов. Смотрите:

$$z^2 + 16 = z^2 - (4i)^2 = (z - 4i)(z + 4i);$$
$$z^4 - 25 = (z^2 - 5)(z^2 + 5) = (z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5} \cdot i)(z + \sqrt{5} \cdot i).$$

Используя понятие сопряженного числа, общее правило нахождения частного $\frac{z_1}{z_2}$ можно сформулировать так: *следует и числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю.*

Переход к сопряженному числу, или, как говорят, операция *сопряжения* имеет весьма наглядный геометрический смысл, но этим мы займемся в следующем параграфе.

Свойство 2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, т. е. *число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.*

В самом деле, пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, а

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i.$$

С другой стороны, $\bar{z}_1 = a - bi$, $\bar{z}_2 = c - di$, значит,

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a + c) - (b + d)i.$$

Итак, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Аналогично доказывается следующее свойство.

Свойство 3. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$, т. е. *число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.*

Свойство 4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, т. е. *число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.*

В самом деле, пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$
$$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (bc + ad)i.$$

С другой стороны, $\overline{z}_1 = a - bi$, $\overline{z}_2 = c - di$, значит,

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (ac - bd) - (bc + ad)i.$$

Итак, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

Свойство 4 можно обобщить на случай произведения любого конечного числа комплексных чисел:

<u>*Свойство 5.*</u> $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \ldots \overline{z}_n$.

Попробуйте, воспользовавшись методом математической индукции, доказать это свойство самостоятельно.

Следующее свойство является непосредственным следствием свойства 5:

<u>*Свойство 6.*</u> $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, $n \in N$.

§ 33. Комплексные числа и координатная плоскость

Геометрической моделью множества R действительных чисел является числовая прямая. Любому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой, и наоборот, каждой точке на прямой соответствует единственное действительное число (см. § 4). При переходе к геометрической модели множества C комплексных чисел требуется, как минимум, еще одно измерение: ведь все точки прямой уже «заняты» действительными числами. Оказывается, геометрической моделью множества C является *координатная плоскость*. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно естественным образом поставить в соответствие точку $(a;\ b)$ координатной плоскости. Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа. На рисунке 150 отмечены на координатной плоскости комплексные числа:

$$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -4 + i,\ z_3 = -4 - i,\ z_4 = 5 - 2{,}5i.$$

При таком соответствии действительному числу $a = a + 0 \cdot i$ соответствует точка $(a;\ 0)$ с нулевой ординатой. Значит, действительные числа изображаются точками оси абсцисс.

Мнимой единице $i = 0 + 1 \cdot i$ соответствует точка $(0;\ 1)$ на оси ординат, и вообще точками этой оси будут изображаться все чисто

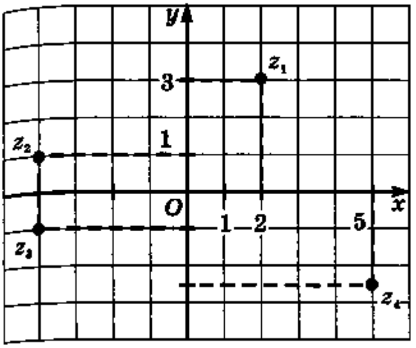


Рис. 150

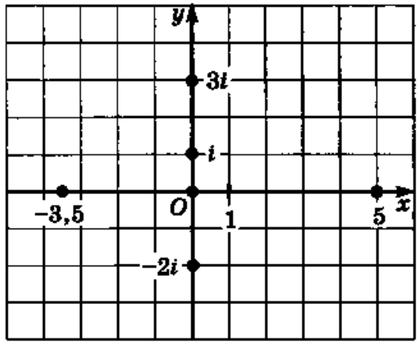


Рис. 151

мнимые числа. На рисунке 151 отмечены на координатной плоскости некоторые действительные и чисто мнимые числа: 0, 5, $-3{,}5$, i, $3i$, $-2i$.

Соответствие между множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и числовой прямой настолько привычно для нас, что мы зачастую не делаем никакой разницы между числом и точкой на прямой, изображающей это число. Например, все однозначно воспринимают утверждение: «$\sqrt{2}$ лежит левее 2», хотя, формально, полагалось бы говорить, что «точка, соответствующая числу $\sqrt{2}$, расположена на числовой прямой левее точки, соответствующей числу 2».

В случае с комплексными числами столь же естественно выглядит их, как говорят математики, *отождествление* с точками координатной плоскости. Например, фраза: «Число z_1 лежит в первой координатной четверти» — просто означает, что и действительная и мнимая части комплексного числа $z_1 = a + bi$ положительны (рис. 152). Слова: «z_2 лежит на оси ординат» — являются переводом на геометрический язык того факта, что число z_2 чисто мнимое (рис. 152), а «...комплексное число z_3 расположено выше биссектрисы I и III координатных четвертей...» — показывают, что мы имеем дело с комплексным числом $z_3 = a + bi$, у которого мнимая часть больше действительной части (рис. 152).

Более того, рассмотрение координатной плоскости позволяет с самого начала *определить* комплексные числа непосредственно через действительные числа без всякого первоначального использования мнимой единицы i: **комплексным числом** называют упорядоченную пару действительных чисел $z = (a; b)$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$. Сумма и произведение комплексных чисел определяются равенствами:

$$(a;\ b) + (c;\ d) = (a + b;\ c + d),$$
$$(a;\ b) \cdot (c;\ d) = (ac - bd;\ ac + bd).$$

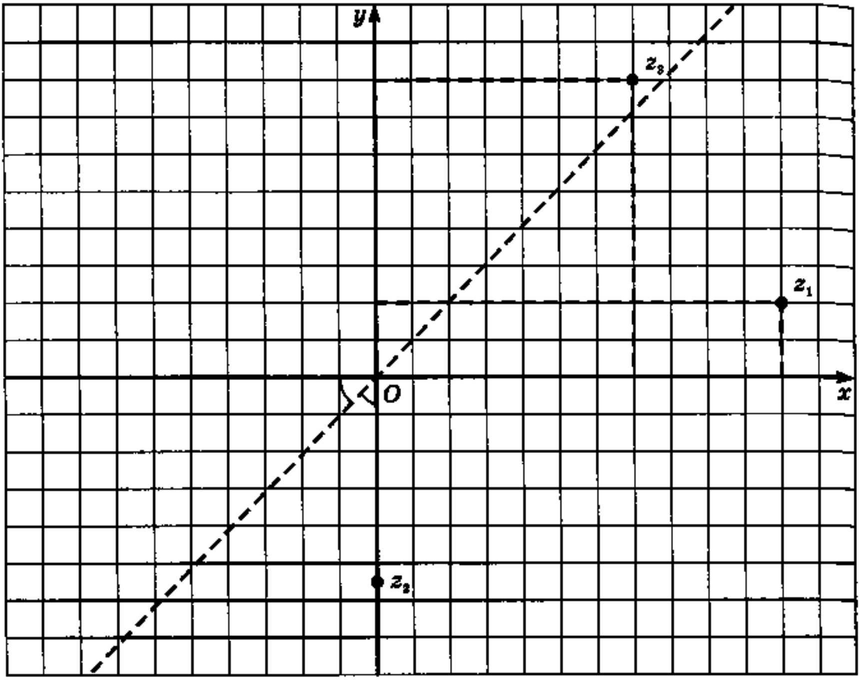


Рис. 152

Можно проверить, что для таким образом определенных суммы и произведения комплексных чисел верны сочетательный, переместительный и распределительный законы. При этом пара (0; 0) будет нулем относительно сложения, а пара (1; 0) будет единицей относительно умножения комплексных чисел. Действительно, для любого комплексного числа $z = (a; b)$ верно, что

$$(a;\ b) + (0;\ 0) = (a;\ b)$$
$$\text{и } (a;\ b) \cdot (1;\ 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0;\ a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a;\ b).$$

При таком подходе каждое действительное число x отождествляется с парой $(x;\ 0)$ и, соответственно, множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел отождествляется с множеством $\{(x;\ 0) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ всех пар с нулевой второй координатой.

Проверим тогда, что пара $i = (0;\ 1) \in \boldsymbol{C}$ будет мнимой единицей. Действительно, $i^2 = (0;\ 1)^2 = (0;\ 1) \cdot (0;\ 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1;\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1;\ 0) = -(1;\ 0)$, т. е. $i^2 = -1$ в комплексных числах. Наконец, равенство $z = (a;\ b) = a + bi$ при таком способе определения комплексных чисел можно *доказать*, а не принять в качестве определения, как на с. 243:

$$a + bi = (a;\ 0) + (b;\ 0)(0;\ 1) = (a;\ 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1;\ b \cdot 1 + 0 \cdot 0) =$$
$$= (a;\ 0) + (0;\ b) = (a;\ b).$$

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество всех комплексных чисел, у которых:

а) действительная часть равна -4;

б) мнимая часть является четным однозначным натуральным числом;

в) отношение мнимой части к действительной равно 2;

г) сумма квадратов действительной и мнимой частей равна 9.

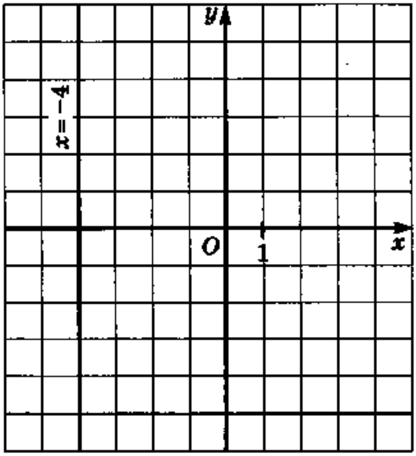


Рис. 153

Решение. а) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $x = -4$. Это уравнение прямой, параллельной оси ординат (рис. 153).

б) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $y = 2, 4, 6$ или 8. Это множество состоит из четырех прямых, параллельных оси абсцисс (рис. 154).

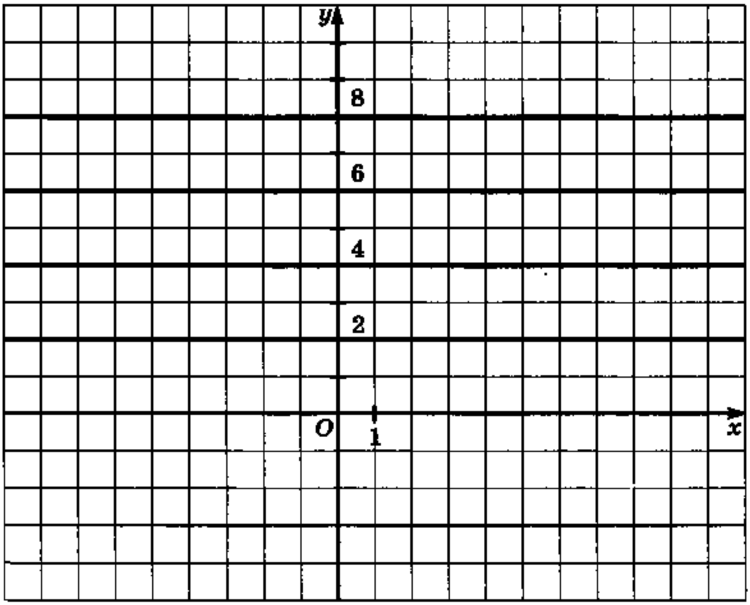


Рис. 154

в) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $\frac{y}{x} = 2$, или $y = 2x$, $x \neq 0$. Это прямая, проходящая через начало координат, с выколотой точкой (0; 0) (рис. 155).

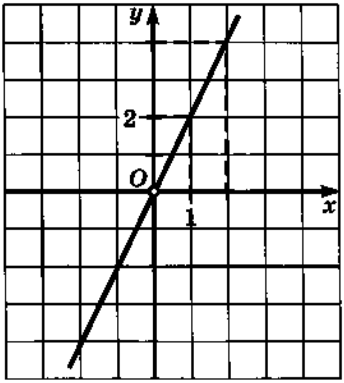


Рис. 155

г) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $x^2 + y^2 = 9$. Это окружность радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 156). ■

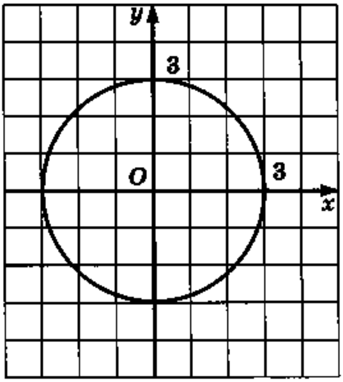


Рис. 156

Любую точку на координатной плоскости можно воспринимать двояко: алгебраически, как упорядоченную пару (a; b) действительных чисел, и как вектор с началом в точке (0; 0) и концом в точке (a; b). При векторном подходе к изображению комплексных чисел наглядный смысл получают операции сложения и вычитания двух комплексных чисел:
а) *вектор, соответствующий сумме* $z_1 + z_2$ *двух комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2 (рис. 157, *а*);
б) *вектор, соответствующий разности* $z_1 - z_2$ *двух комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2 (рис. 157, *б*).

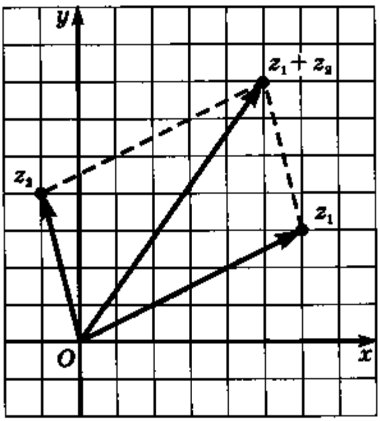


Рис. 157, *а*

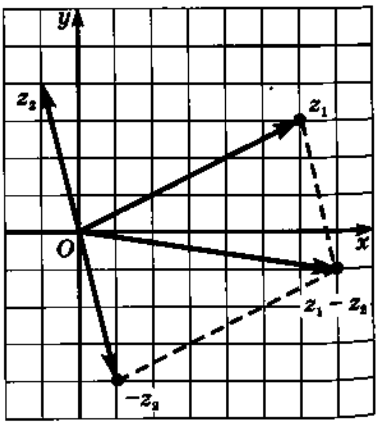


Рис. 157, *б*

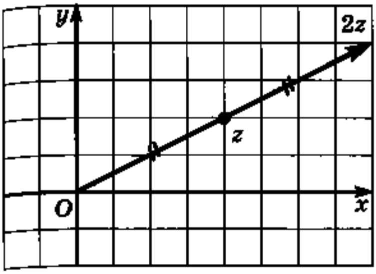


Рис. 158, *а*

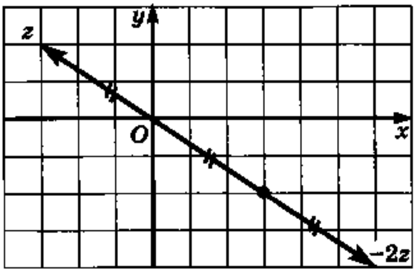


Рис. 158, *б*

Точно так же дело обстоит и с умножением комплексных чисел на действительные числа: *вектор, соответствующий произведению $k \cdot z$ действительного числа k на комплексное число z, равен произведению вектора, соответствующего числу z, на число k* (рис. 158, *а*, *б*).

Пример 2. Для комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 + 2i$ изобразить на координатной плоскости числа: а) $2z_1$; б) $-3z_2$; в) $z_1 + z_2$; г) $2z_1 - z_2$.

Решение. Соответствующие построения выполнены на рисунках 159, *а*, *б*, *в*, *г*.

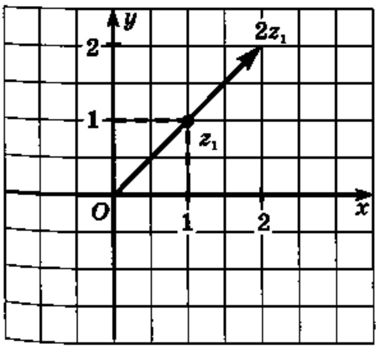


Рис. 159, *а*

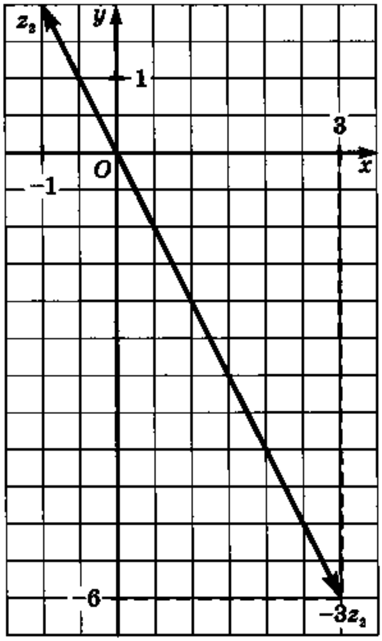


Рис. 159, *б*

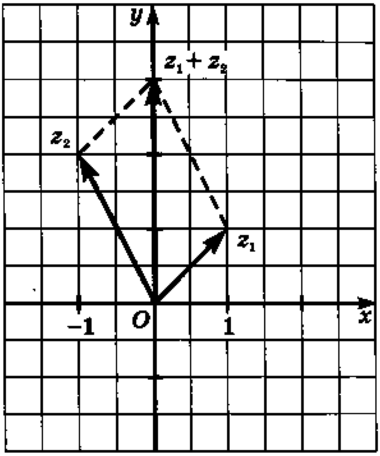


Рис. 159, *в*

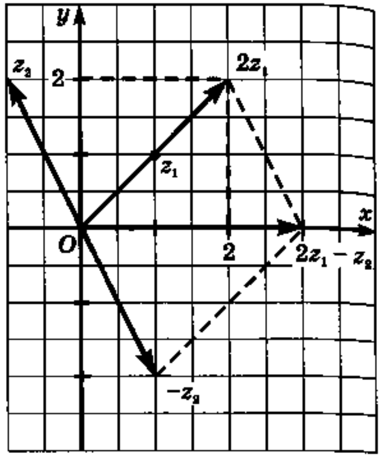


Рис. 159, *г*

Отметим, что можно найти числа в заданиях а) — г) по формулам § 32, а затем изобразить их на координатной плоскости. ■

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа объединяют таким образом: *во множестве комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно*. Подчеркнем, что сама эта формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, как в § 32, а с их геометрическими, векторными представлениями.

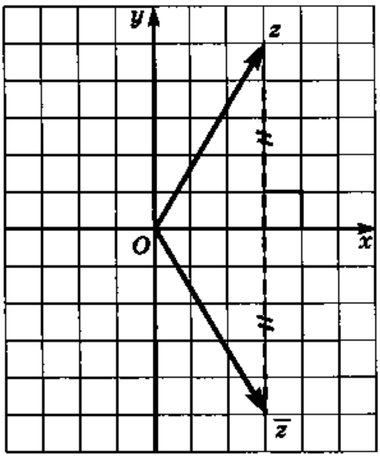


Рис. 160

В координатной плоскости ясный геометрический смысл имеет операция сопряжения (перехода к сопряженному числу). Действительно, если изобразить комплексные числа $z = x + yi$ и $\overline{z} = x - yi$ на координатной плоскости, то получатся точки $(x; y)$ и $(x; -y)$, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 160).

Значит, геометрически операция сопряжения есть осевая симметрия относительно оси абцисс. Сопряженные друг другу комплексные числа равноудалены от начала координат, а вектора, изображающие их, наклонены к оси абцисс

под одинаковыми углами, но расположены по разные стороны от этой оси. Сложим, например, «по правилу параллелограмма» комплексные числа z_1 и z_2, а затем отразим и их, и весь параллелограмм симметрично относительно оси абсцисс (рис. 161). Получим: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ — это свойство операции сопряжения было доказано в § 32 алгебраически, а теперь мы получили его геометрическое обоснование.

Итак, мы познакомились с геометрической моделью множества C комплексных чисел и с тем, как в этой модели выглядят некоторые арифметические операции над комплексными числами. Оказалось, что модель эта — привычная нам координатная плоскость, а операции в точности совпадают с векторными операциями сложения, вычитания и умножения на действительное число. Пока что ничего принципиально нового мы не увидели. Чтобы различать координатную плоскость саму по себе и координатную плоскость как модель множества комплексных чисел, принято в последнем случае говорить о *комплексной плоскости*.

В комплексной плоскости по-настоящему новые вещи мы увидим, когда постараемся найти геометрическую интерпретацию умножения и деления комплексных чисел. Тут, к сожалению, знакомая нам прямоугольная координатная система не поможет. Нам понадобится другая система координат, а более точно — система *других* координат точек плоскости. Чтобы определить их,

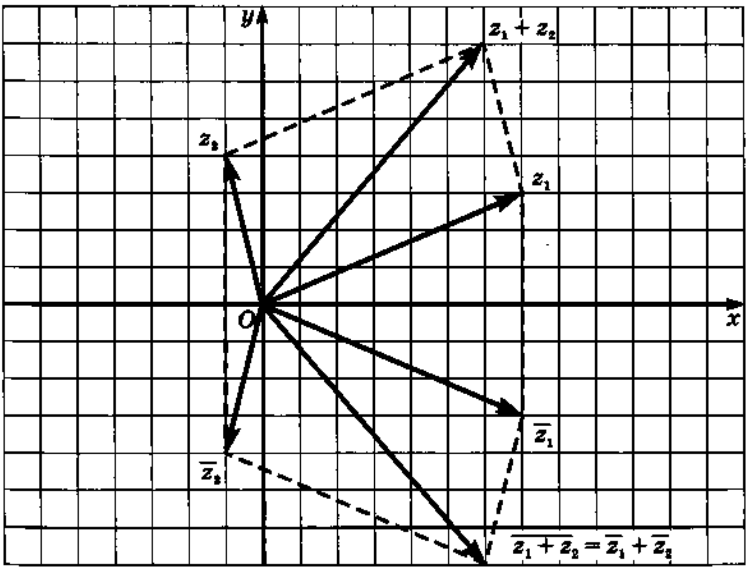


Рис. 161

напомним, что вектор может быть задан не только своими координатами в прямоугольной системе координат. Он может быть задан также своей *длиной* и своим *направлением*. Более подробно поговорим об этом в следующем параграфе.

§ 34. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Представим, что пункт наблюдения находится в начале координат O, а наблюдаемая точка M (например, спутник) непрерывно перемещается в плоскости. Как определить положение точки? Весьма затруднительно представить себе технические устройства, которые могли бы проектировать точку M на некоторые, заранее выбранные оси абсцисс и ординат и измерять величины (тысячи километров!) этих проекций: ведь передающие и принимающие информацию устройства имеются, как правило, только в O и в M. Куда более реалистично выглядит идея измерить: а) расстояние от O до M; б) угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ к некоторому фиксированному направлению, т. е. к лучу, выходящему из точки O. Знание двух величин — а) и б) — позволяет однозначно определить положение точки M (рис. 162).

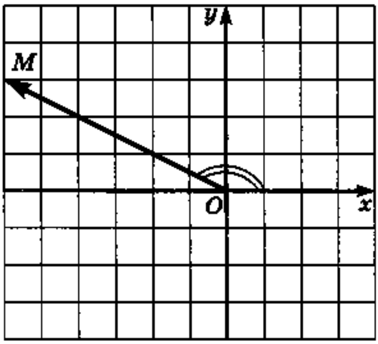


Рис. 162

Вернемся к комплексным числам и перейдем к более строгому изложению.

Определение 1. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют число $\sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначение: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Геометрически модуль комплексного числа $z = a + bi$ — это расстояние от z до O, а более формально — расстояние от точки координатной плоскости, соответствующей числу z, до начала координат (рис. 163, *а*, *б*).

Для объяснения достаточно применить теорему Пифагора к заштрихованному треугольнику. Длины его катетов равны $|a|$ и $|b|$, а значит, длина гипотенузы равна $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 1. Найти модуль комплексного числа:

а) $21 - 20i$; б) $-\frac{10}{i}$; в) $i(i - 1)$; г) $\frac{i - 1}{i}$.

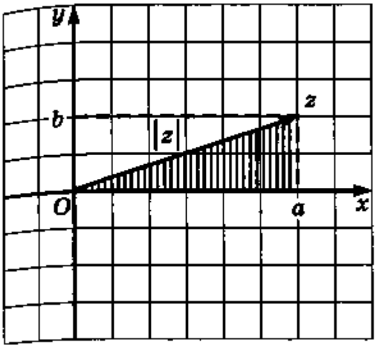


Рис. 163, *а*

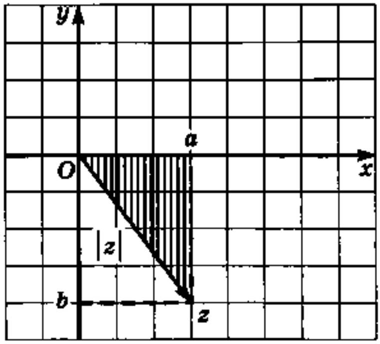


Рис. 163, *б*

Решение.

а) $\left|21 - 20i\right| = \sqrt{21^2 + (-20)^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29;$

б) $\left|-\dfrac{10}{i}\right| = \left|\dfrac{-10}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i}\right| = \left|10i\right| = 10;$

в) $\left|i(i - 1)\right| = \left|-1 - i\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$

г) $\left|\dfrac{i - 1}{i}\right| = \left|\dfrac{i - 1}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i}\right| = \left|1 + i\right| = \sqrt{2}.$ ■

Если $z = a + 0 \cdot i = a$ — действительное число, то $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, т. е. для действительных чисел введенное понятие модуля совпадает с ранее изученным. Совпадают и свойства модуля: на формульном уровне они такие же, как и для действительных чисел. Отметим наиболее важное свойство.

Теорема 1. ***Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:***

$$\boxed{\left|z_1 \cdot z_2\right| = \left|z_1\right| \cdot \left|z_2\right|.}$$

Доказательство. Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Так как модуль всегда неотрицателен, то достаточно проверить, что

$$\left|z_1 \cdot z_2\right|^2 = \left|z_1\right|^2 \cdot \left|z_2\right|^2.$$

Имеем:

$$\left|z_1 \cdot z_2\right|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 =$$
$$= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2 =$$
$$= a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \left|z_1\right|^2 \cdot \left|z_2\right|^2.$$

Теорема доказана.

Приведем еще некоторые свойства модуля:

1) $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2) $|-z| = |z|$.

3) $|\bar{z}| = |z|$.

4) $\bar{z} \cdot z = |z|^2$ или $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

5) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

6) $|z^n| = |z|^n$, $n \in N$.

7) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Первые 5 свойств вы при желании без труда докажете алгебраически. Шестое свойство — очевидное следствие теоремы 1. Что касается последнего свойства, то оно имеет наглядный геометрический смысл: длина одной стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон (рис. 164). Это свойство принято называть *неравенством треугольника*. Его нетрудно проверить и алгебраически.

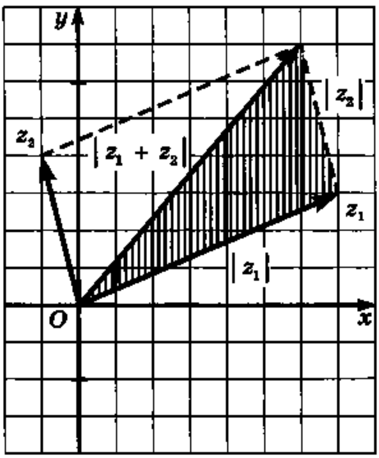


Рис. 164

Подробно изученная в § 12 числовая окружность на координатной плоскости тесно связана с понятием модуля комплексного числа: *модуль комплексного числа равен 1 тогда и только тогда, когда соответствующая ему точка координатной плоскости лежит на числовой окружности.*

Действительно, и равенство $|x + yi| = 1$, и принадлежность точки $(x; y)$ числовой окружности на координатной плоскости по определению означают, что $x^2 + y^2 = 1$.

Как же записываются точки числовой окружности в виде комплексных чисел? Ответ весьма прост.

Если точка $M(x;\ y)$ принадлежит числовой окружности, то $x = \cos\alpha$, а $y = \sin\alpha$ для некоторого действительного числа α. Та же точка $M(x;\ y)$ соответствует комплексному числу $x + yi$. Если не делать различия между комплексным числом и точкой координатной плоскости, изображающей это число, то получаем такое утверждение.

Теорема 2. ***Если комплексное число z лежит на числовой окружности, то $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ для некоторого действительного числа α; если $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то z лежит на числовой окружности*** (рис. 165).

Числовую окружность на координатной плоскости, рассматриваемой в качестве модели множества комплексных чисел, принято называть *единичной окружностью* в комплексной плоскости.

Теорема 3. ***Если комплексное число z лежит на единичной окружности, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Обратно, если $\bar{z} = \frac{1}{z}$, то z лежит на единичной окружности.***

Доказательство. Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ лежит на единичной окружности. Тогда $\bar{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ и $\bar{z}\cdot z = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Значит, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Обратно, если $\bar{z} = \frac{1}{z}$, то $\bar{z}\cdot z = 1$. Но $\bar{z}\cdot z = |z|^2$. Значит, $|z| = 1$, т. е. точка z лежит на единичной окружности (рис. 166).

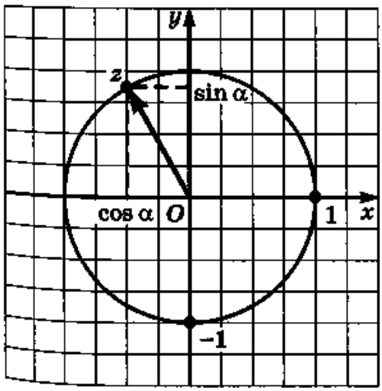


Рис. 165

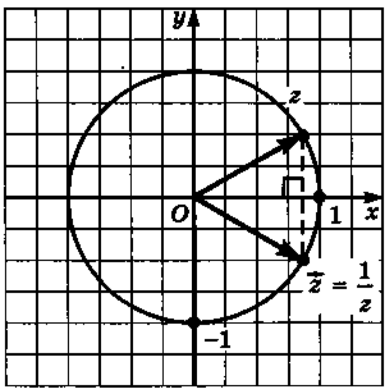


Рис. 166

Определение 2. **Тригонометрической формой** записи отличного от нуля комплексного числа z называют его запись в виде $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где ρ — положительное действительное число.

Используем единичную окружность для доказательства того, что любое отличное от нуля комплексное число имеет тригонометрическую форму записи.

Теорема 4. ***Всякое отличное от нуля комплексное число*** z ***может быть записано в виде*** $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ***где*** α ***— некоторое действительное число. Если*** $z = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$ ***— другая тригонометрическая запись числа*** z, ***то***

$$\rho = |z| \text{ и } \beta - \alpha = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Доказательство. Пусть $z \neq 0$. Тогда $|z| \neq 0$. Рассмотрим комплексное число $w = \frac{z}{|z|}$: оно равно произведению z на положительный множитель $\frac{1}{|z|}$. По теореме 1 $|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|\frac{1}{|z|}\cdot z\right| = \left|\frac{1}{|z|}\right|\cdot|z| = \frac{1}{|z|}\cdot|z| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. Значит, число w лежит на единичной окружности, и поэтому

$$w = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

для некоторого действительного числа α. Существование тригонометрической формы записи доказано.

Допустим, что $z = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$ — другая тригонометрическая форма записи комплексного числа z. Тогда $|z| = |\rho(\cos\beta + i\sin\beta)| = |\rho|\cdot|\cos\beta + i\sin\beta| = \rho$. Поэтому $\cos\beta + i\sin\beta = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{|z|} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. В координатной записи это означает, что $(\cos\beta; \sin\beta) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ — одна и та же точка числовой окружности. Но такое совпадение возможно тогда и только тогда, когда $\beta - \alpha = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Теорема доказана.

Итак, в тригонометрической форме записи $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ число ρ определено однозначно: $\rho = |z|$, а вот число α (в силу периодичности косинуса и синуса) не однозначно (обычно говорят «с точностью до $2\pi k$»). Например,

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = \\ = \cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi) = \cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k);$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2} =$$

$$= \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right);$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right).$$

Чтобы избежать неопределенности, математики договорились выбирать число α, принадлежащее какому-нибудь фиксированному промежутку длины 2π, обычно это полуинтервал $(-\pi; \pi]$.

Определение 3. **Аргументом отличного от нуля комплексного числа z** называют действительное число α такое, что:

а) $\alpha \in (-\pi; \pi]$;

б) $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Обозначение: **arg** z.

Геометрически аргумент комплексного числа z можно истолковать так: это угол, заключенный в пределах $(-\pi; \pi]$, который вектор z образует с положительным направлением оси абсцисс (рис. 167).

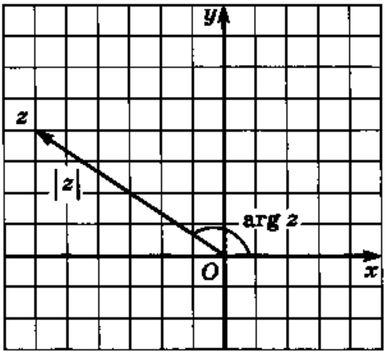


Рис. 167

Пример 2. Найти аргумент комплексного числа:

а) $z_1 = -i$; б) $z_2 = 6i$; в) $z_3 = -7$; г) $z_4 = -4 + 4i$.

Решение. Воспользуемся геометрическим истолкованием аргумента комплексного числа. С помощью рисунка 168 делаем следующие выводы: для числа $-i$ аргумент равен $-\frac{\pi}{2}$; для числа $6i$ аргумент равен $\frac{\pi}{2}$; для числа -7 аргумент равен π; для числа $-4 + 4i$ аргумент равен $\frac{3\pi}{4}$. ■

Пример 3. Изобразить множество всех тех комплексных чисел, у которых:

а) модуль равен 3; б) аргумент равен 0; в) аргумент равен π; г) аргумент равен $-\frac{5\pi}{6}$.

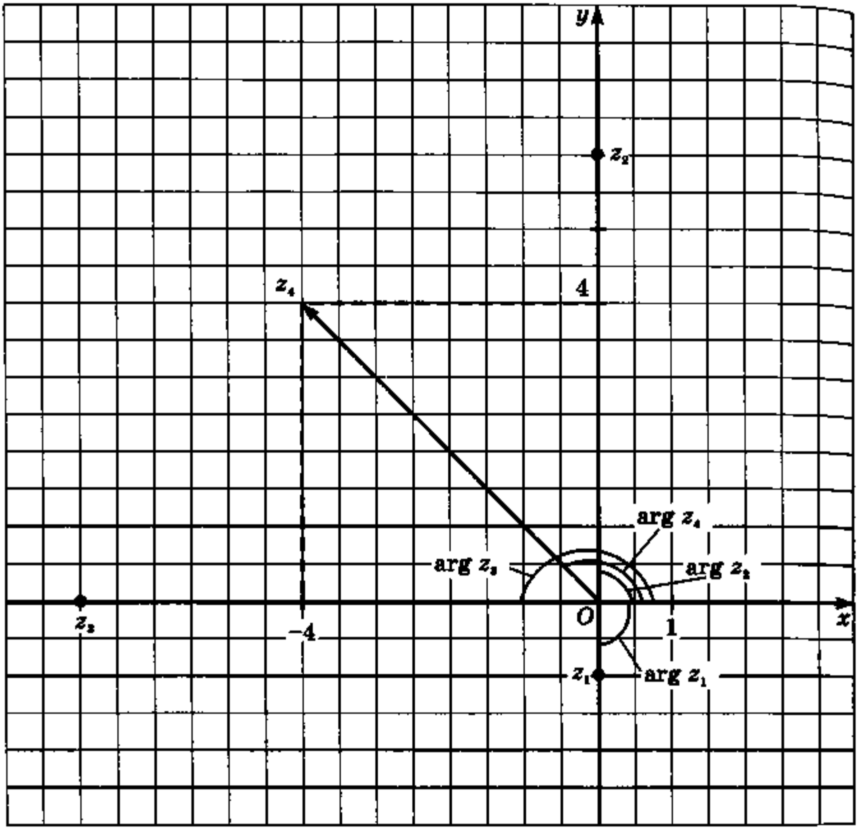


Рис. 168

Решение. а) Искомое множество — окружность радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 169).

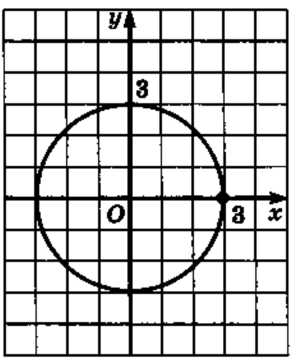


Рис. 169

б) Искомое множество — открытый положительный луч оси абсцисс (рис. 170, *а*; напомним, что, говоря об аргументе комплексного числа, мы исключаем из рассмотрения число $z = 0$).

в) Искомое множество — открытый отрицательный луч оси абсцисс (рис. 170, *б*);

г) Искомое множество — открытый луч, изображенный на рисунке 170, *в*. ■

Соединение вместе модуля и аргумента комплексного числа приводит к так называемой *стандартной тригонометрической форме записи* комплексного числа.

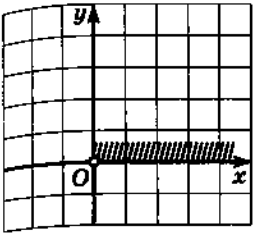


Рис. 170, *а*

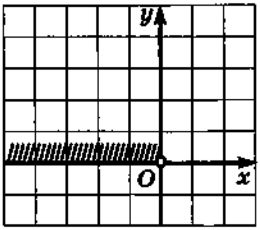


Рис. 170, *б*

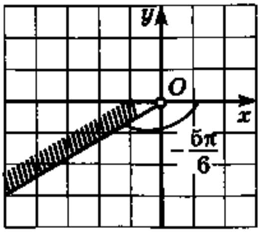


Рис. 170, *в*

Стандартная тригонометрическая форма записи	Тригонометрическая форма записи
$z = \lvert z\rvert \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha = \arg z \in (-\pi; \pi]$	$z = \lvert z\rvert(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in R$

Например,

Число	Стандартная тригонометрическая форма	Тригонометрическая форма
3	$3(\cos 0 + i\sin 0)$	$3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$, $3(\cos 26\pi + i\sin 26\pi)$, ...
$2i$	$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$2\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$, $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)$, ...
$1-i$	$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$	$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, ...

И в тригонометрической, и в стандартной тригонометрической формах записи для краткости вместо $|z|$ довольно часто пишут ρ.

Множество всех комплексных чисел с одним и тем же модулем R — это окружность радиуса R с центром в начале координат; множество всех комплексных чисел с фиксированным аргументом α — это открытый луч, выходящий из начала координат и наклоненный под углом α к положительному направлению оси абсцисс. Любой такой луч пересекается с любой такой окружностью в единственной точке. Поэтому, зная модуль и аргумент комплексного числа, мы однозначно можем определить само число.

Два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули и равны их аргументы.

Пример 4. Записать данное комплексное число в стандартной тригонометрической форме: а) $1 + i$; б) $-3 + 4i$; в) $-\sqrt{3} - i$; г) $2 - 2i\sqrt{3}$.

Решение. а) Найдем модуль числа $z = 1 + i$. Получим:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Значит, $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\pi < \alpha \leqslant \pi.$$

Ясно, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Итак, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Заметим, что аргумент можно было без труда вычислить с помощью геометрических соображений, построив заданное число на комплексной плоскости (рис. 171). В дальнейшем мы будем использовать оба приема, когда какой удобнее (скажем, выше, в примере 2, мы использовали геометрические соображения).

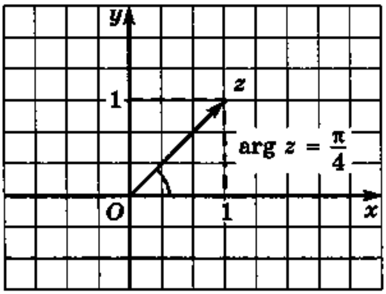


Рис. 171

б) Найдем модуль числа $z = -3 + 4i$. Получим: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Значит, $z = 5\left(\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ \sin\alpha = \frac{4}{5},\ -\pi < \alpha \leqslant \pi.$$

Этим условиям удовлетворяет число $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ (см. § 21).

Итак, $-3 + 4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

в) Найдем модуль числа $z = -\sqrt{3} - i$. Получим: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Значит, $z = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α, исходя из следующих соображений: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha \leqslant \pi$. Этим условиям удовлетворяет число $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$ (см. § 13).

Итак, $-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

г) Найдем модуль числа $z = 2 - 2i\sqrt{3}$. Получим: $|z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$. Значит, $z = 4\left(\frac{2}{4} + \frac{-2\sqrt{3}}{4}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α, исходя из следующих соображений: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\pi < \alpha \leqslant \pi$. Этим условиям удовлетворяет число $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ (см. § 13).

Итак, $2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. ■

Пример 5. Зная, что $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, изобразить на комплексной плоскости следующие числа и найти их аргументы: а) z; б) z^2; в) z^3; г) z^7.

Решение. Так как $|z| = 1$ (проверьте!), то и модули всех чисел из б) — г) равны единице (см. выше свойство 6), т. е. все эти числа лежат на единичной окружности. Остается найти их аргументы.

а) $\arg z = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in (-\pi; \pi]$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

б) $z^2 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} + 2i\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Значит, $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}$. Обратите внимание:

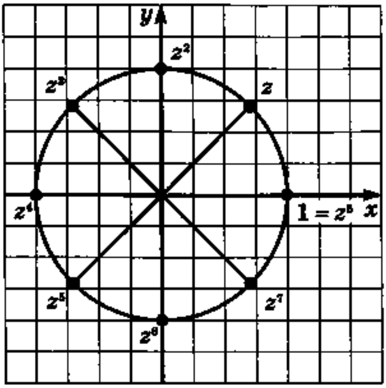


Рис. 172

он в два раза больше аргумента числа z (рис. 172). Заметим также, что в процессе вычислений у нас «проявились» формулы косинуса и синуса двойного аргумента и равенство $z^2 = i$.

в) $z^3 = z^2 \cdot z = iz = i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Здесь $\arg(z^3) = \frac{3\pi}{4}$, он в три раза больше, чем $\arg z$ (рис. 172).

г) На основе наблюдений, выполненных нами в примерах а) — в), естественно предположить, что и для числа z^7 выявится та же закономерность: аргумент увеличится по сравнению с аргументом числа z в 7 раз. Проверим:

$$z^7 = (z^2)^3 \cdot z = i^3 z = i^2 iz = -iz = -i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Соответствующая точка числовой окружности лежит в IV координатной четверти, ее аргумент равен $-\frac{\pi}{4}$ (рис. 172), так как $-\frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$. Мы не получили аргумент в семь раз больше, чем $\arg z$, но можно заметить, что это верно «с точностью до 2π»: $\arg(z^7) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$. ■

Тригонометрическая форма записи удобна и для выражения сопряженного числа $\bar{z}$, и для обратного числа $\frac{1}{z}$. Действительно, так как z и $\bar{z}$ симметричны относительно оси абсцисс, то из равенства $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ следует, что

$$\bar{z} = \rho(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \rho(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha));$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)).$$

В частности, $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$. Например, если точка z есть точка пересечения окружности радиусом 2 с центром в начале

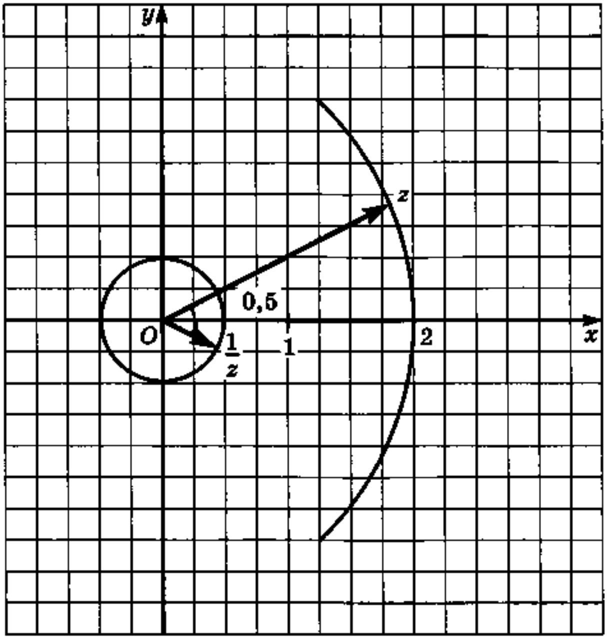


Рис. 173

координат O и луча, выходящего из O и наклоненного под углом $34°$ к оси абсцисс, то $\frac{1}{z}$ есть точка пересечения окружности радиусом 0,5 и луча, наклоненного под углом $-34°$ к оси абсцисс (рис. 173).

Посмотрим, как ведут себя аргументы при умножении и делении комплексных чисел.

Теорема 5. ***Если*** $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ***и*** $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, ***то***

а) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$.

Доказательство.

а) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\rho_2(\cos\beta + i\sin\beta) = \rho_1\rho_2((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta))$.

Используя формулы косинуса и синуса суммы двух аргументов (см. § 24), получим:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

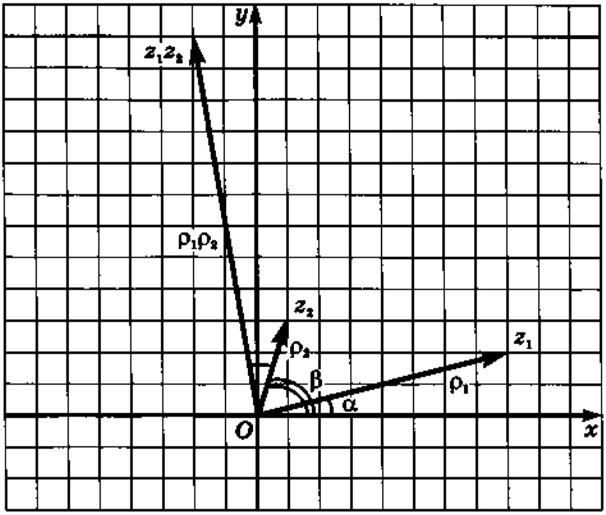


Рис. 174

На рисунке 174 показано, как строится в комплексной плоскости число $z_1 z_2$.

б) Так как $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2}(\cos\beta - i\sin\beta) = \frac{1}{\rho_2}(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$ и

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, то, используя пункт а), получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \rho_1 \cdot \frac{1}{\rho_2}(\cos(\alpha + (-\beta)) + i\sin(\alpha + (-\beta))) = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)).$$

Теорема доказана.

Весьма распространена такая словесная переформулировка этой теоремы:

а) ***При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.***

б) ***При делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются.***

Эта переформулировка почти правильная. Точнее, она абсолютно правильна, например, для комплексных чисел с положительными действительными частями. Для них $\alpha = \arg(z_1) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta = \arg(z_2) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и поэтому $\alpha + \beta \in (-\pi; \pi)$ и $\alpha - \beta \in (-\pi; \pi)$, т. е. $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ действительно являются аргументами соответственно произведения $z_1 \cdot z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$. Однако вполне может случиться, что записи $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ были стандартными тригонометрическими формами, а записи $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$ и $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta))$ оказались просто тригонометрическими формами. Это произойдет, если сумма $\alpha + \beta$ (разность $\alpha - \beta$) аргументов окажется вне пределов промежутка $(-\pi; \pi]$. В таких случаях для нахождения аргумента результата следует или прибавить, или вычесть 2π.

§ 35. Комплексные числа и квадратные уравнения

Из курса алгебры основной школы вам известно, что квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

с действительными коэффициентами a, b, c имеет два различных действительных корня, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — положительное число. Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень. Если же $D < 0$, то мы обычно говорили так: корней у этого уравнения нет (или, более точно: квадратное уравнение не имеет действительных корней).

Одно из преимуществ комплексных чисел перед действительными числами состоит в том, что во множестве C можно находить корни любых квадратных уравнений. В этом параграфе мы сначала покажем, как во множестве комплексных чисел можно извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Как следствие, мы научимся решать квадратные уравнения $az^2 + bz + c = 0$ с действительными коэффициентами a, b, c и отрицательным дискриминантом D. Затем мы рассмотрим извлечение квадратных корней из любых комплексных чисел, записанных как в алгебраической форме $z = a + bi$, так и в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. В заключение мы покажем, что знакомая вам формула корней квадратного уравнения сохраняется и для квадратных уравнений $az^2 + bz + c = 0$ с комплексными коэффициентами a, b, c. Но начать, разумеется, следует с определения квадратного корня.

Определение. Квадратным корнем (или *корнем второй степени*) из комплексного числа z называют комплексное число, квадрат которого равен z. Множество всех квадратных корней из комплексного числа z обозначают $\sqrt{z}$. *Извлечь квадратный корень из комплексного числа z — это значит найти множество $\sqrt{z}$.*

Извлечем, например, квадратный корень из -1. По определению следует решить уравнение $z^2 = -1$, т. е. $(x + yi)^2 = -1$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$. Раскрывая скобки в левой части, получаем:

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -1 + 0 \cdot i; \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -1, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что либо $y = 0$, либо $x = 0$. Если $y = 0$, то $x^2 = -1$; действительных корней у этого уравнения нет. Если $x = 0$, то $-y^2 = -1$, $y^2 = 1$, $y = \pm 1$. Значит, система имеет два решения: $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$, и, соответственно, уравнение $z^2 = -1$ имеет ровно два корня: $0 + 1 \cdot i = i$ и $0 - 1 \cdot i = -i$. Более кратко, $\sqrt{-1} = \pm i$. Действуя по такой же схеме, можно извлечь квадратный корень из любого отрицательного числа; например, нетрудно показать, что $\sqrt{-9} = \pm 3i$ (сделайте это самостоятельно) и вообще:

$$\boxed{\text{если } d < 0, \text{ то } \sqrt{d} = \pm\sqrt{-d} \cdot i.}$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 175.

Важное замечание. Знак квадратного корня в правой части записанного равенства понимается как арифметический квадратный корень из положительного действительного числа, а тот же знак корня в левой части означает извлечение корня уже в множестве комплексных чисел. Из курса алгебры основной школы

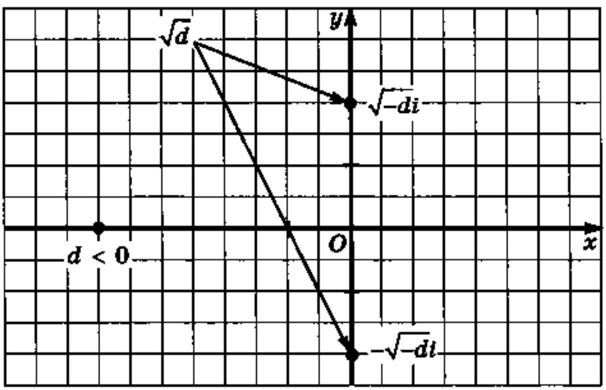


Рис. 175

вы знаете, что квадратный корень из положительного числа имеет только одно значение — положительное число (арифметический корень). Например, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$, $\sqrt{2{,}56} = 1{,}6$, $\sqrt{a^2} = |a|$. Для множества комплексных чисел, где понятие знака числа отсутствует, лишается всякого смысла и понятие арифметического корня. Работая с комплексными числами, пишут так: $\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{2{,}56} = \pm 1{,}6$, $\sqrt{25} = \pm 5$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$ и т. д. В множестве комплексных чисел квадратный корень из любого действительного числа (кроме 0) имеет два значения. Но, подчеркнем еще раз, всюду в дальнейшем для квадратных корней из положительных действительных чисел мы будем придерживаться прежней договоренности — речь будет идти только об арифметических корнях.

Пример 1. Решить уравнение $z^2 - 3z + 8{,}5 = 0$.

Решение. Так как все арифметические операции над действительными числами вместе со свойствами этих операций имеют место и для комплексных чисел, то сохраняется и формула корней квадратного уравнения. Воспользуемся ею:

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8{,}5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2}.$$

Ответ: $z_1 = 1{,}5 + 2{,}5i$, $z_2 = 1{,}5 - 2{,}5i$.

Пример 2. Решить уравнение: а) $z^4 - 1 = 0$; б) $z^6 - 1 = 0$.

Решение. а) Разложим левую часть на множители:

$$z^4 - 1 = 0,$$
$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0,$$
$$z^2 = 1;\quad z^2 = -1,$$
$$z_{1,2} = \pm 1;\quad z_{3,4} = \pm i.$$

б) Разложим левую часть на множители:

$$z^6 - 1 = 0,$$
$$(z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0,$$
$$(z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0.$$

Задача свелась к решению четырех уравнений. Из уравнения $z - 1 = 0$ находим: $z_1 = 1$. Из уравнения $z + 1 = 0$ находим: $z_2 = -1$. Из квадратного уравнения $z^2 + z + 1 = 0$ находим: $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Из квадратного уравнения $z^2 - z + 1 = 0$ находим: $z_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Итак, уравнение имеет 6 корней: ± 1, $\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. ■

Во всех решенных в этом параграфе уравнениях наблюдалась одна и та же закономерность: если у уравнения был комплексный корень, то и сопряженное число служило корнем того же уравнения. Оказывается, верна общая теорема.

Теорема 1. ***Если у уравнения***

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

с действительными коэффициентами имеется комплексный корень, то и число, сопряженное этому корню, также является корнем уравнения.

Доказательство. Проведем доказательство для $n = 2$ (для уравнений более высокой степени используется та же идея).

Если $az^2 + bz + c = 0$, то $\overline{az^2 + bz + c} = 0$. По свойствам операции сопряжения (см. § 32) $\overline{az^2 + bz + c} = \bar{a}(\bar{z})^2 + \bar{b}\bar{z} + \bar{c}$. Значит, $\bar{a}(\bar{z})^2 + \bar{b}\bar{z} + \bar{c} = 0$. Но $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$, так как коэффициенты, по условию, действительные числа. Значит, $a(\bar{z})^2 + b\bar{z} + c = 0$, т. е. $\bar{z}$ — корень уравнения $az^2 + bc + c = 0$. Теорема доказана.

Геометрически эта теорема означает, что множество всех корней уравнения

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

с действительными коэффициентами симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 160 в § 33).

Перейдем к уравнениям с комплексными коэффициентами. У квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$

с комплексными коэффициентами a, b, c, как правило, комплексным (не действительным) будет и дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Поэтому нам следует прежде всего научиться извлекать квадратные корни из комплексных чисел с ненулевой мнимой частью.

Теорема 2. *Если $b \neq 0$, то*

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\frac{b}{|b|}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Прежде чем доказывать теорему, подчеркнем, что в правой части этой формулы квадратные корни понимаются в обычном смысле — как арифметические корни из положительных действительных чисел.

Доказательство. Согласно определению, нам нужно найти все корни квадратного уравнения $z^2 = a + bi$, $z \in C$. Будем искать эти корни в виде $z = x + yi$. Тогда $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Значит,

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi.$$

Воспользовавшись условием равенства комплексных чисел, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

По условию $b \neq 0$, но тогда из второго уравнения системы следует, что $x \neq 0$, а потому второе уравнение системы можно переписать в виде $y = \frac{b}{2x}$. Подставив это выражение вместо y в первое уравнение системы, получим: $x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$ и далее

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2+4b^2}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Фактически мы получили два уравнения относительно действительной переменной x:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2};\ x^2 = \frac{a - \sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Второе уравнение явно не имеет корней, поскольку его правая часть — отрицательное число. Из первого уравнения найдем: $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ — и после этого вычислим y:

$$y = \frac{b}{2x} = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}} = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}} =$$

$$= \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2-a^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = \pm\frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Итак, $z = x + iy = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \left(\pm i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) =$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

Теорема доказана.

Итак, извлекая квадратный корень из комплексного числа с ненулевой мнимой частью, мы получаем два значения также с ненулевой мнимой частью, которые отличаются друг от друга только знаком. А если мнимая часть подкоренного выражения равна 0? Об этом мы уже говорили: извлекая квадратный корень из отрицательного действительного числа, мы тоже получаем два значения, отличающихся друг от друга знаком. Например, $\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-16} = \pm 4i$, $\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$. При извлечении квадратного корня из положительного действительного числа и (внимание!) *находясь в системе комплексных чисел*, мы тоже получаем два значения, например, $\sqrt{1} = \pm 1$, $\sqrt{25} = \pm 5$, $\sqrt{1{,}69} = \pm 1{,}3$. Но, напомним в очередной раз, если мы находимся в *системе действительных чисел*, предыдущие равенства недопустимы, так как мы договорились сохранить в таком случае прежние обозначения и рассматривать только арифметические корни. Поэтому придется писать только так: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$.

Пример 3. Вычислить: а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt{-i}$; в) $\sqrt{3-4i}$.

Решение. а) Здесь $z = i = 0 + 1 \cdot i$, т. е. $a = 0$, $b = 1$. По теореме 2 получаем:

$$\sqrt{i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}+0}{2}} + i \cdot \frac{1}{|1|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}-0}{2}}\right) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

б) Здесь $z = -i = 0 - 1 \cdot i$, т. е. $a = 0$, $b = -1$. По теореме 2 получаем:

$$\sqrt{-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2} + 0}{2}} + i \cdot \frac{-1}{|-1|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2} - 0}{2}}\right) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

в) Здесь $z = 3 - 4i$, т. е. $a = 3$, $b = -4$. По теореме 2 получаем:

$$\sqrt{3 - 4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2} + 3}{2}} + i \cdot \frac{-4}{|-4|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3}{2}}\right) =$$

$$= \pm(2 - i).$$ ■

Замечание 1. Можно, конечно, не пользоваться громоздкой формулой из теоремы 2, но учитывать идею доказательства этой теоремы. Для вычисления $\sqrt{3 - 4i}$ рассуждаем так: $\sqrt{3 - 4i} = x + yi$, $3 - 4i = (x + yi)^2$, и получаем систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4, \end{cases}$$

откуда находим: $x = 2$, $y = -1$ или $x = -2$, $y = 1$. Значит, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$ или $z_{1,2} = \pm(2 - i)$.

Вычисления в теореме 2 и в решении примера 3 получаются весьма громоздкими, не запоминающимися и не имеющими наглядного смысла. Все становится значительно проще и нагляднее, если использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа.

Теорема 3. $\sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть $z = \sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$.

Тогда

$$z^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Немного схитрим и частично используем предыдущую теорему, из которой следует, что у этого уравнения всегда два корня. Останется проверить, что

$$\left(\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

$$\left(-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Но оба эти равенства верны, так как при возведении в квадрат комплексного числа его аргумент удваивается (см. пример 5б из § 34). Теорема доказана.

Теорема 3 позволяет составить геометрически ясный алгоритм извлечения квадратного корня.

Алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа z

1. Найти модуль ρ и аргумент α этого числа.
2. Провести окружность радиусом $\sqrt{\rho}$ с центром в начале координат.
3. Провести через начало координат прямую под углом $\frac{\alpha}{2}$ к положительному направлению оси абсцисс.
4. Две точки пересечения проведенных окружности и прямой дают ответ (рис. 176).

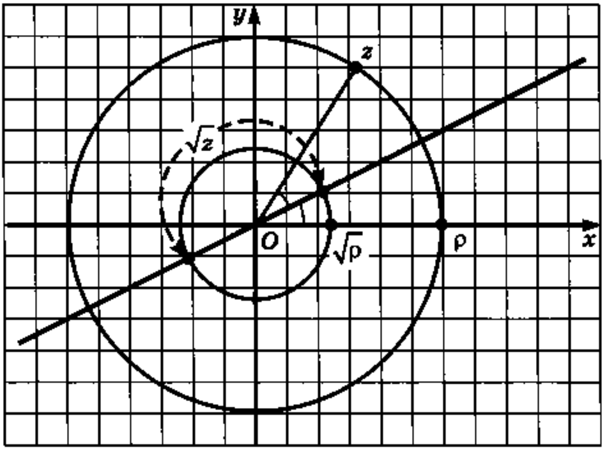


Рис. 176

Пример 4. Вычислить: а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt{-i}$; в) $\sqrt{-2+2i\sqrt{3}}$.

Решение. а) Запишем число i в стандартной тригонометрической форме:

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; здесь $\rho = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Воспользуемся теоремой 3:

$$\sqrt{i} = \sqrt{1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \pm\sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

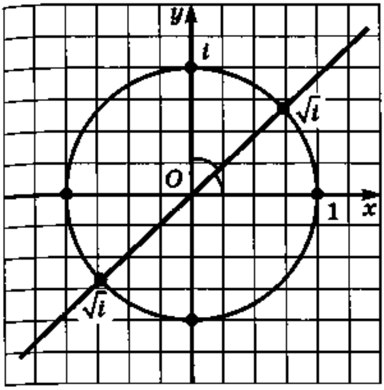


Рис. 177

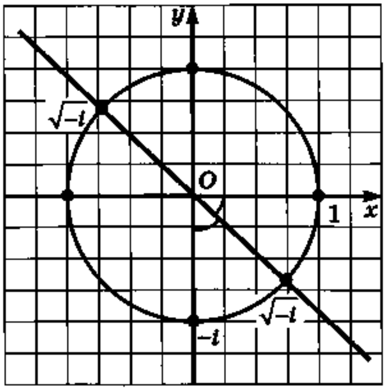


Рис. 178

Ответ, как видите, получился таким же, как в примере 3а (что вполне естественно). Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 177.

б) Запишем число $-i$ в стандартной тригонометрической форме:

$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; здесь $\rho = 1$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. По теореме 3:

$$\sqrt{-i} = \sqrt{1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \pm\sqrt{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

И здесь ответ получился таким же, как в примере 3б. Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 178.

в) Запишем число $-2 + 2i\sqrt{3}$ в стандартной тригонометрической форме:

$-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; здесь $\rho = 4$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (см. рис. 179).

Воспользуемся теоремой 3:

$$\sqrt{-2 + 2i\sqrt{3}} = \sqrt{4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \pm 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 179. ■

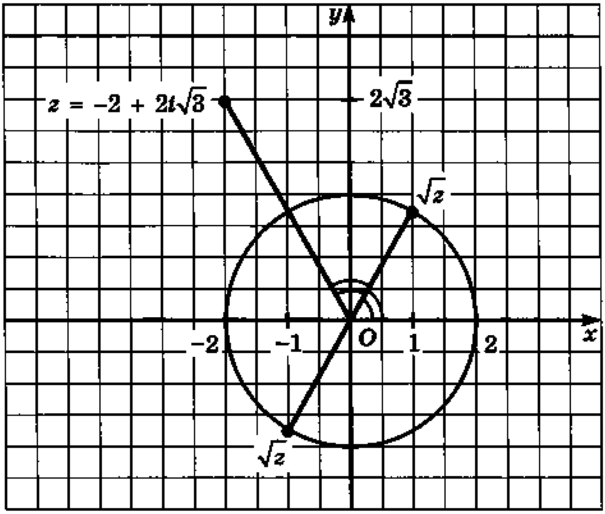


Рис. 179

Замечание 2. Формула из теоремы 3, конечно, выглядит привлекательнее формулы из теоремы 2, но только в тех случаях, когда у комплексного числа «хороший» аргумент α. А что делать, если, как в примере 3в, надо вычислить $\sqrt{3 - 4i}$? Если здесь перейти к тригонометрической форме, получим: $3 - 4i = 5\left(\frac{3}{5} + i\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где $\alpha = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$. Значит, при извлечении квадратного корня придется поработать с преобразованиями обратных тригонометрических функций, что вряд ли проще, чем использование формулы из теоремы 2 или идеи ее доказательства (составление системы уравнений). Значит, тактика, как всегда, должна быть гибкой.

Наконец, рассмотрим квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, с комплексными коэффициентами a, b, c. Повторим известные из курса алгебры 8-го класса преобразования:

$$az^2 + bz + c = 0;$$

$$z^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot z + \frac{c}{a} = 0; \ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0;$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};\ \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}\ (\text{где } D=b^2-4ac);$$

$$z_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Выше мы доказали, что $\sqrt{D}$ состоит из двух комплексных чисел, отличающихся друг от друга только знаком, значит, множества $\sqrt{D}$ и $\pm\sqrt{D}$ совпадают между собой. Поэтому можно сохранить привычную формулу корней квадратного уравнения:

$$\boxed{az^2+bz+c=0,\ \ a\neq 0 \Leftrightarrow z=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.}$$

Пример 5. Решить квадратное уравнение $z^2-iz-1+i=0$.

Решение. По формуле получаем:

$$z_{1,2}=\frac{i\pm\sqrt{(-i)^2-4\cdot 1\cdot(-1+i)}}{2}=\frac{i\pm\sqrt{3-4i}}{2}.$$

Но $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$ (см. пример 3в). Поэтому

$$z_{1,2}=\frac{i\pm\sqrt{3-4i}}{2}=\frac{i\pm(2-i)}{2};\ z_1=1,\ z_2=-1+i.$$

Ответ: $z_1=1$, $z_2=-1+i$.

Как обычно, у формулы корней квадратного уравнения есть полезные следствия.

Теорема 4. 1) ***Если z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$, то***

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a},\ z_1z_2=\frac{c}{a}\ \ \textit{(теорема Виета)}.$$

2) ***Если $z_1+z_2=-p$ и $z_1z_2=q$, то z_1 и z_2 — корни уравнения $z^2+pz+q=0$ (теорема, обратная теореме Виета).***

3) ***Если z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$, то***

$$az^2+bz+c=0=a(z-z_1)(z-z_2)$$

(формула разложения квадратного трехчлена на линейные множители).

Например, корнями квадратного трехчлена $z^2-iz-1+i$ являются числа 1 и $-1+i$. Значит, $z^2-iz-1+i=(z-1)(z+1-i)$.

§ 36. Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа

Начнем с возведения комплексных чисел в натуральную степень. Комплексные числа будем записывать в тригонометрической форме. Нам понадобится теорема 5 из § 34 о том, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

В примере 5 из § 34 мы уже обратили внимание на то, что при возведении конкретного числа z в квадрат произошло удвоение его аргумента, при возведении в куб — утроение аргумента, а при возведении в 7-ю степень аргумент увеличился в 7 раз. Оказывается, подобное утверждение справедливо для любого комплексного числа и любой натуральной степени.

Теорема 1. (Формула Муавра*.)

$$\boxed{(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),\ n \in N.}$$

Доказательство. Используем метод математической индукции (см. § 6). При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при $n = k$, т. е. что

$$(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^k = \rho^k(\cos k\alpha + i\sin k\alpha).$$

Докажем, что тогда утверждение верно и для $n = k + 1$. В самом деле,

$$(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^{k+1} = (\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^k \cdot \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= \rho^k(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) \cdot \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Воспользовавшись теоремой 5 из § 34, получим:

$$\rho^k(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) \cdot \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(k\alpha + \alpha) + i\sin(k\alpha + \alpha)) =$$
$$= \rho^{k+1}(\cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha).$$

Итак, $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^{k+1} = \rho^{k+1}(\cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha)$. Значит, утверждение верно при $n = k + 1$.

По принципу математической индукции получаем, что формула Муавра верна для любого $n \in N$. Теорема доказана.

Довольно часто эту теорему формулируют так.

Для возведения комплексного числа в n-ю степень следует:
— модуль числа возвести в n-ю степень;
— аргумент числа умножить на n.

---

* *А. Муавр* (1667—1754) — английский математик.

Пример 1. Вычислить: а) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6$;
б) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^{16}$; в) $(1 + i)^{13}$; г) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{11}$.

Решение. а) По формуле Муавра, $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6 = \cos(15^\circ \cdot 6) + i \sin(15^\circ \cdot 6) = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$.

б) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^{16} = \cos(15^\circ \cdot 16) + i \sin(15^\circ \cdot 16) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Отметим, что аргумент у числа $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^{16}$ равен не 240°, а $240^\circ - 360^\circ = -120^\circ$, так как $240^\circ \notin (-180^\circ; 180]$, а $-120^\circ \in (-180^\circ; 180]$.

в) Здесь число записано в алгебраической форме. Перейдем к тригонометрической форме и используем формулу Муавра:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(1 + i)^{13} = \left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^{13} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{13}\left(\cos\left(13 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(13 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^6\sqrt{2}\left(\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 64\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -64 - 64i.$$

Заметим, что в данном случае можно было обойтись без формулы Муавра:

$$(1 + i)^{13} = ((1 + i)^2)^6(1 + i) = (1 + 2i + i^2)^6(1 + i) = (2i)^6(1 + i) = -64(1 + i) = -64 - 64i.$$

г) Модуль числа $\sqrt{3} - i$ равен 2, а его аргумент равен $-\frac{\pi}{6}$. Значит, модуль числа $\left(\sqrt{3} - i\right)^{11}$ равен $2^{11} = 2048$, а $\arg\left(\left(\sqrt{3} - i\right)^{11}\right) = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$. Поэтому

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^{11} = 2048\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2048\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 1024\left(\sqrt{3} + i\right). \quad ■$$

У полученной формулы возведения комплексного числа в натуральную степень имеется ряд полезных следствий. Например, она верна не только для натуральных, но и для любых целых показателей степени.

Следствие 1. $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Для $n > 0$ утверждение уже доказано. Для $n = 0$ оно очевидно. Пусть $n < 0$. Тогда $-n > 0$ и $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^{-n} = \rho^{-n}(\cos(-n)\alpha + i\sin(-n)\alpha) = \rho^{-n}(\cos n\alpha - i\sin n\alpha)$.

Число $\cos n\alpha + i\sin n\alpha$ как точка комплексной плоскости лежит на единичной окружности. Значит, обратное к нему число $(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{-1}$ совпадает с сопряженным числом $\cos n\alpha - i\sin n\alpha$ (см. теорему 3 из § 34). Поэтому

$$(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \frac{1}{(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}(\cos n\alpha - i\sin n\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{\rho^{-n}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{-1}} = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Следствие 2. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Достаточно в предыдущем следствии считать, что $\rho = 1$.

Кстати, А. Муавр доказал в 1707 г. именно это равенство, а формулу, носящую имя Муавра, которой мы пользовались выше, предложил Л. Эйлер в 1748 г.

Следствие 3. Если модуль комплексного числа z равен единице, а его аргумент равен $\frac{2\pi}{m}$ $(m = 3, 4, 5, \ldots)$, то множество степеней $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots, z^{m-1}$ образует на комплексной плоскости множество вершин правильного m-угольника, вписанного в единичную окружность (рис. 180).

Перейдем к извлечению кубических корней из комплексных чисел.

Определение. **Кубическим корнем** (или *корнем третьей степени*) из комплексного числа z называют комплексное число, куб которого равен z. Множество всех кубических корней из комплексного числа z обозначают $\sqrt[3]{z}$. *Извлечь кубический корень из комплексного числа z — это значит найти множество $\sqrt[3]{z}$.*

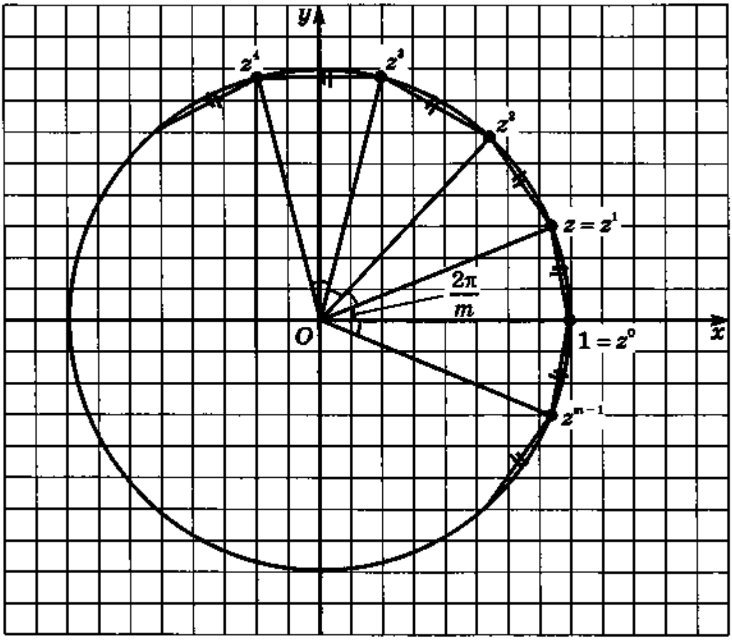


Рис. 180

Пример 2. Вычислить: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{8i}$.

Решение. а) <u>Первый способ</u>. Требуется решить уравнение $z^3 = 1$. Имеем:

$$z^3 - 1 = 0,$$
$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0.$$

Задача свелась к решению двух уравнений. Из уравнения $z - 1 = 0$ находим: $z_1 = 1$. Из квадратного уравнения $z^2 + z + 1 = 0$ находим: $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

<u>Второй способ</u>. Будем искать корни уравнения $z^3 = 1$ в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in (-\pi; \pi]$. Тогда

$$z^3 = (\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^3 = \rho^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha);$$
$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

Используя условия равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, получаем: $\rho^3 = 1$ и $3\alpha = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Значит, $\rho = 1$ и $\alpha = \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\alpha \in (-\pi; \pi]$, то $k = 0$, $k = 1$ или $k = -1$.

Если $k = 0$, то $\alpha = 0$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Если $k = 1$, то $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Если $k = -1$, то $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Мы видим, что множество корней третьей степени из единицы — это множество, состоящее из трех чисел. Числа эти расположены на единичной окружности и образуют вершины правильного вписанного треугольника (рис. 181). Одна из вершин, число 1, дает «обычный» действительный корень из единицы, а две другие вершины нельзя найти, находясь в множестве действительных чисел.

Заметим также, что корень уравнения $z^3 = 1$, соответствующий аргументу $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$, можно записать в тригонометрическом (нестандартном) виде как $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)$, т. е. рассмотрев случай не $k = -1$, а $k = 2$. Итак,

$$\sqrt[3]{1} = \left\{\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3} \,\middle|\, k = 0, 1, 2\right\}.$$

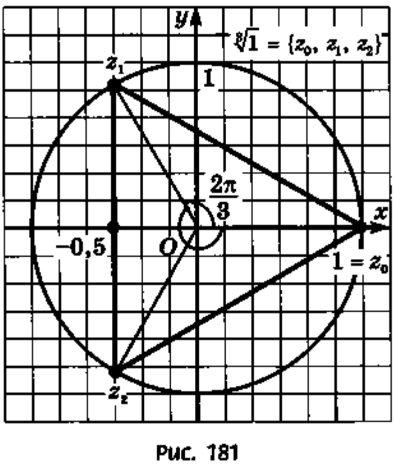


Рис. 181

Так как параметру k придаются значения 0, 1, 2, соответствующие значения корня третьей степени из комплексного числа z обычно обозначают z_0, z_1, z_2.

б) Требуется решить уравнение $z^3 = 8i$. Будем искать корни этого уравнения в тригонометрической форме $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in (-\pi; \pi]$. Тогда

$$z^3 = (\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^3 = \rho^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha);$$

$$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Используя условия равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, получим: $\rho^3 = 8$ и $3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Значит, $\rho = 2$ и $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Если $k = 0$, то $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$. Если $k = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$. Если $k = 2$, то $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ и $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$. Нетрудно проверить, что при $k = 3, 6, 9, \ldots$ ответ совпадет с ответом при $k = 0$, а при $k = 4, 7, 10, \ldots$ и $k = 5, 8, 11, \ldots$ ответ совпадет с ответами при $k = 1$ и $k = 2$.

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 182.

Ответ: а) $z_0 = 1$, $z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

б) $z_{0,1} = \pm\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$.

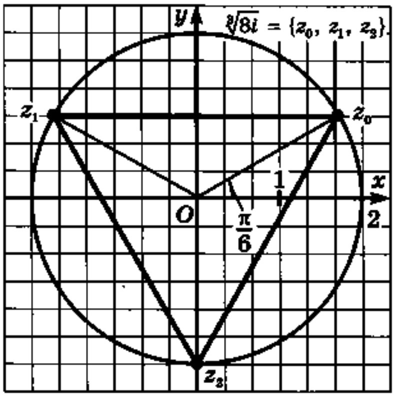


Рис. 182

Перейдем к общему случаю извлечения кубического корня. Тривиальную ситуацию $\sqrt[3]{0} = 0$ рассматривать не будем. Оказывается, что, как и в разобранном примере 2, *для каждого ненулевого комплексного числа количество корней третьей степени из него равно трем*.

Теорема 2.

$$\sqrt[3]{z} = \left\{\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{3}\right) \middle| k = 0, 1, 2\right\}.$$

Доказательство. Запишем z в стандартной тригонометрической форме: $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in (-\pi; \pi]$. Требуется решить уравнение

$$(r(\cos\beta + i\sin\beta))^3 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

относительно неизвестных r и β. Использовав формулу Муавра, получим:

$$r^3(\cos 3\beta + i\sin 3\beta) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Это значит, что $r^3 = \rho$ и $3\beta = \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $r = \sqrt[3]{\rho}$ и $\beta = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Введем обозначения:

$$z_k = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right), \quad w_k = \frac{z_k}{\sqrt[3]{\rho}}.$$

Для числа k есть три возможности:

1) $k = 3m$; 2) $k = 3m + 1$; 3) $k = 3m + 2$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Если $k = 3m$, то

$$w_k = \cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3} = \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 2\pi m\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{3} + 2\pi m\right) = \cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3} = w_0.$$

Если $k = 3m + 1$, то

$$w_k = \cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3} = \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3} + 2\pi m\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3} + 2\pi m\right) = \cos\frac{\alpha + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi}{3} = w_1.$$

Если $k = 3m + 2$, то

$$w_k = \cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3} = \cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3} + 2\pi m\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3} + 2\pi m\right) = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} = w_2.$$

Следовательно, среди всех чисел $z_k = \sqrt[3]{\rho}\cdot w_k$, $k \in \mathbb{Z}$ есть ровно три различных числа и это числа z_0, z_1, z_2. Они и образуют множество всех корней третьей степени из z. Теорема доказана.

Довольно часто формулу из этой теоремы записывают с использованием стандартных обозначений для модуля и аргумента:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

Теорема 2 позволяет составить геометрический алгоритм извлечения кубического корня.

Алгоритм извлечения кубического корня из комплексного числа z

1. Найти модуль ρ и аргумент α этого числа.
2. Провести окружность радиусом $\sqrt[3]{\rho}$ с центром в начале координат.
3. Провести из начала координат луч под углом $\frac{\alpha}{3}$ к положительному направлению оси абсцисс.
4. Найти точку z_0 пересечения окружности и луча.
5. Построить правильный треугольник, вписанный в окружность, одна из вершин которого равна z_0.

Вершины треугольника образуют множество всех корней 3-й степени из числа z (рис. 183).

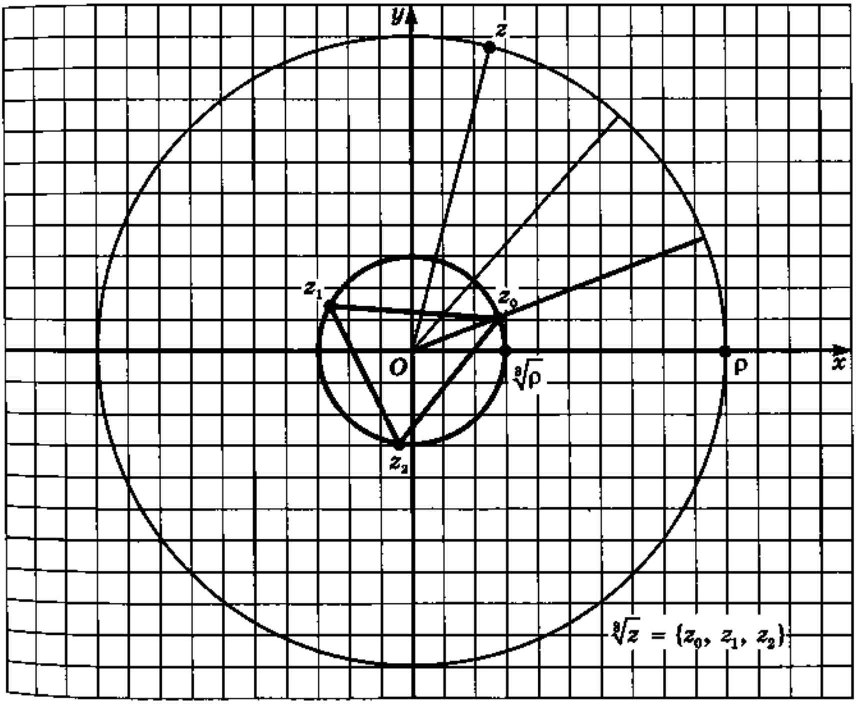


Рис. 183

Особо следует подчеркнуть, что не все пункты этого алгоритма могут быть геометрически реализованы для произвольных комплексных чисел. Дело в том, что существуют задачи на построение, не разрешимые с помощью циркуля и линейки. К числу таких задач относится, например, *трисекция угла*, т. е. деление произвольного угла на три равные части.

Пример 3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[3]{(-125 + 125i) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Решение. а) Если $z = -1$, то $\rho = 1$, $\alpha = \pi$. Значит,

$$z_0 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_1 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 1}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$z_2 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 2}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 184.

б) Если $z = i$, то $\rho = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$z_0 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{3} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}.$$

$$z_1 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 1}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}.$$

$$z_2 = \cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 2}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 185.

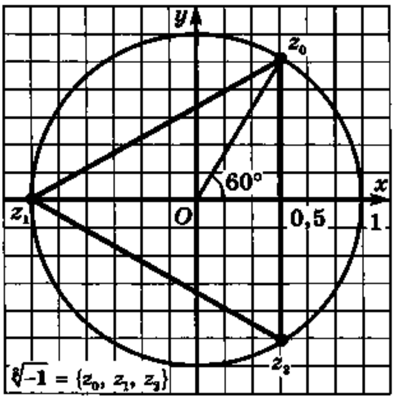


Рис. 184

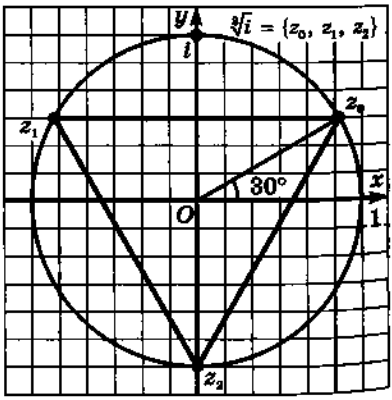


Рис. 185

в) Здесь $z = -\frac{125\sqrt{2}}{2} + \frac{125\sqrt{2}}{2}\cdot i$, значит, $\rho = \sqrt{\frac{125^2}{2} + \frac{125^2}{2}} = 125$.

Представив z в виде $z = 125\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 125\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, приходим к выводу, что $\alpha = \arg z = \frac{3\pi}{4}$.

Значит, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{125}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0, 1, 2$.

Если $k = 0$, то $z_0 = 5\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Если $k = 1$, то $z_1 = 5\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

Если $k = 2$, то $z_2 = 5\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = 5\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 186. ■

Завершая параграф, рассмотрим два примера, формулировки которых не содержат никаких упоминаний о комплексных числах, но в решении которых существенным образом используются именно комплексные числа.

Пример 4. Выразить $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$.

Решение. Запишем формулу Муавра при $n = 3$:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha.$$

Левую часть раскроем по формуле куба суммы:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\cdot i\sin\alpha + 3\cos\alpha\cdot(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3 = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha).$$

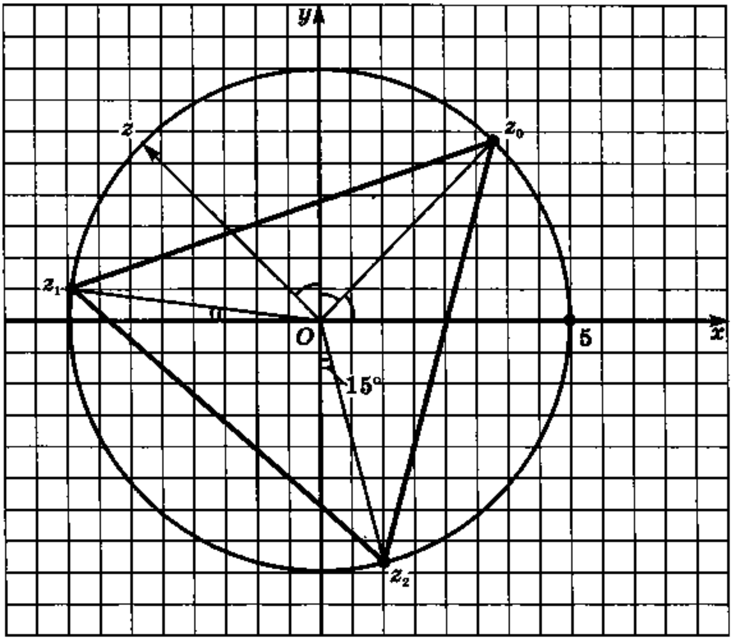


Рис. 186

Итак,

$$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha) = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha.$$

Используя условие равенства комплексных чисел, получаем:

1) $\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha = \cos 3\alpha,$

$\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot(1 - \cos^2\alpha) = \cos 3\alpha,$

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha;$

2) $3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha = \sin 3\alpha,$

$3(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = \sin 3\alpha,$

$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha.$

Итак,

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

■

В примере 4 мы вывели так называемые *формулы тройного аргумента*. Эти же формулы можно получить без использования комплексных чисел, применяя формулы косинуса и синуса суммы к $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$ и $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$ и используя далее формулы для тригонометрических функций двойного аргумента. Однако преимущество приведенного в примере 4 решения состоит в том, что по той же схеме можно получить и формулы, выражающие $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$ через соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Можно двигаться далее и выразить $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ как функции от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, но для этого нужно уметь раскрывать скобки в выражении $(a + b)^n$. Такая формула есть — это *бином Ньютона*, но с ней мы познакомимся позднее в § 48.

Пример 5. Найти сумму

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, мы «погонимся за двумя зайцами» и одновременно с указанной суммой будем искать и сумму $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$. Первую сумму обозначим C, а вторую — S.

Для комплексного числа $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ рассмотрим геометрическую прогрессию $1, z, z^2, z^3, \ldots$ со знаменателем z. Запишем формулу для суммы первых $n + 1$ членов этой прогрессии:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

К каждому слагаемому левой части применим формулу Муавра:

$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + (\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = C + iS.$

Осталось найти действительную и мнимую части дроби $\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, а затем воспользоваться тем, что действительная часть равна C, а мнимая часть равна S. Отсюда и получатся нужные формулы для C и S.

Сначала преобразуем знаменатель:

$$1 - z = (1 - \cos\alpha) - i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Значит,

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{((1 - \cos(n+1)\alpha) - i\sin(n+1)\alpha)\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Если в числителе последней дроби раскрыть скобки и привести подобные члены, то (после деления на знаменатель) получатся выражения для действительной и мнимой частей всей дроби. Используя формулы синуса разности и суммы синусов, находим:

$$C = \frac{(1 - \cos (n + 1)\alpha) \cdot \sin \dfrac{\alpha}{2} + \sin (n + 1)\alpha \cdot \cos \dfrac{\alpha}{2}}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \dfrac{\alpha}{2} + \left(\sin (n + 1)\alpha \cos \dfrac{\alpha}{2} - \cos (n + 1)\alpha \sin \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \dfrac{\alpha}{2} + \sin \left((n + 1)\alpha - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \dfrac{(n + 1)\alpha}{2} \cdot \cos \dfrac{n\alpha}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}.$$

Аналогично, но по формулам косинуса разности и разности косинусов, находим:

$$S = \frac{(1 - \cos (n + 1)\alpha) \cdot \cos \dfrac{\alpha}{2} - \sin (n + 1)\alpha \cdot \sin \dfrac{\alpha}{2}}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \dfrac{\alpha}{2} - \cos \left((n + 1)\alpha - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \dfrac{(n + 1)\alpha}{2} \cdot \sin \dfrac{n\alpha}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}.$$

В итоге получаем:

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha =$$

$$= \frac{\sin \dfrac{(n + 1)\alpha}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{n\alpha}{2},$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin \dfrac{(n + 1)\alpha}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}.$$ ■

Замечание. Оба эти равенства можно доказать без применения комплексных чисел: или методом математической индукции, или домножая обе части на знаменатель $\sin \dfrac{\alpha}{2}$ и преобразуя произведения тригонометрических функций в их суммы. Но это возможно только в том случае, когда правые части равенств заранее известны. При таких подходах совершенно неясно, откуда, собственно, получаются выражения в правых частях. А использование комплексных чисел и формулы Муавра позволяет доказать сразу обе формулы и при этом объясняет сам способ получения ответа.

ГЛАВА 7 Производная

Мы приступаем к изучению раздела математики, который обычно называют «Математический анализ». Естественно, что в школе мы ограничимся изучением лишь отдельных элементов математического анализа. Это будет первое знакомство с серьезным разделом высшей математики. Сразу попытаемся объяснить, что здесь «анализируют». Анализируют довольно тонкие моменты: как ведет себя функция не только в целом, в своей области определения (*глобальный* подход), но и около конкретной точки (*локальный* подход). Такой анализ практически всегда связан с понятием *предела* (предела функции, предела последовательности). С этим понятием мы познакомимся в § 38 и 39, а далее изучим *производную* — важную математическую модель, давшую название всей главе. Построение этой модели основано на понятии предела.

§ 37. Числовые последовательности

1. Определение числовой последовательности и способы ее задания

Что такое числовая последовательность и как она задается, вам известно из курса алгебры 9-го класса. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента или числовой последовательностью** и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ или (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например *словесно*, когда правило задания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots .$$

Особенно важны *аналитический* и *рекуррентный* способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots .$$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности

$$C,\ C,\ C,\ \ldots,\ C,\ \ldots .$$

Такую последовательность называют постоянной (или *стационарной*).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots .$$

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n + d$$

(a и d — заданные числа, d — разность арифметической прогрессии).

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$b_1 = b,\quad b_{n+1} = b_n \cdot q$$

(b и q — заданные числа, $b \neq 0$, $q \neq 0$; q — знаменатель геометрической прогрессии). Прогрессии вы изучали в курсе алгебры 9-го класса.

Пример 1. Составить возможную формулу n-го члена последовательности (y_n): а) 2, 4, 6, 8, 10, ...; б) 1, 3, 5, 7, 9, ...; в) 4, 8, 12, 16, 20, ...; г) 7, 11, 15, 19, 23, ...; д) $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$.

Решение. а) $y_n = 2n$;

б) $y_n = 2n - 1$;

в) $y_n = 4n$;

г) каждый член этой последовательности на 3 больше соответствующего члена последовательности из пункта в). Значит, $y_n = 4n + 3$;

д) $y_n = \frac{n+1}{n^2}$. ■

Пример 2. Дана последовательность $y_n = 24n + 36 - 5n^2$.

а) Сколько в ней положительных членов?

б) Найти наибольший член последовательности.

в) Есть ли в последовательности наименьший член?

Решение. Здесь удобно перейти к «функциональному» определению последовательности: речь идет о функции

$$y = 24x + 36 - 5x^2,\ x \in N.$$

а) Чтобы ответить на поставленный вопрос, решим неравенство $24x + 36 - 5x^2 > 0$.

Из уравнения $24x + 36 - 5x^2 = 0$ находим: $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Уравнение оси симметрии параболы $y = 24x + 36 - 5x^2$ можно найти по формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, получим: $x = 2{,}4$. На рисунке 187 схематически (с разными масштабами по осям) изображен график функции $y = -5x^2 + 24x + 36$.

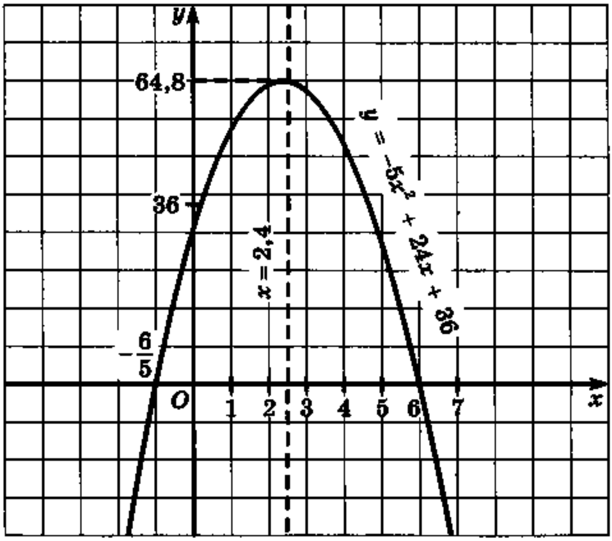


Рис. 187

Неравенство $24x + 36 - 5x^2 > 0$ выполняется при $-\frac{6}{5} < x < 6$.

В этом интервале содержится пять натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5); соответственно, в заданной последовательности пять положительных членов: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.

б) График последовательности состоит из точек параболы с абсциссами 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Среди них нужно найти точку с наибольшей ординатой. Ясно, что это будет точка, наиболее близко расположенная к оси параболы. Уравнение оси, напомним, $x = 2{,}4$, ближайшая точка последовательности имеет абсциссу $x = 2$. Значит, наибольшим членом последовательности является y_2. Осталось вычислить значение второго члена последовательности $y_n = 24n + 36 - 5n^2$:

$$y_2 = 24 \cdot 2 + 36 - 5 \cdot 2^2 = 64.$$

в) Члены последовательности, начиная с третьего, располагаются на правой ветви построенной параболы. Наименьшего среди них нет.

Ответ: а) 5; б) $y_2 = 64$ — наибольший член последовательности; в) наименьшего члена у последовательности нет.

Пример 3. Выписать первые десять членов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, если $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Решение. n-й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1;\\
y_2 &= 1;\\
y_3 &= y_1 + y_2 = 1 + 1 = 2;\\
y_4 &= y_2 + y_3 = 1 + 2 = 3;\\
y_5 &= y_3 + y_4 = 2 + 3 = 5;\\
y_6 &= y_4 + y_5 = 3 + 5 = 8;\\
y_7 &= y_5 + y_6 = 5 + 8 = 13;\\
y_8 &= y_6 + y_7 = 8 + 13 = 21;\\
y_9 &= y_7 + y_8 = 13 + 21 = 34;\\
y_{10} &= y_8 + y_9 = 21 + 34 = 55.
\end{aligned}$$ ■

Последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., о которой шла речь в примере 3, специально изучают в математике, поскольку она обладает целым рядом интересных свойств. Ее называют *последовательностью Фибоначчи* — по имени итальянского математика XIII века. Задать последовательность Фибоначчи рекуррентно — легко, а аналитически — трудно.

Аналитически последовательность Фибоначчи задается так:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Пример 4. Последовательность (y_n) задана рекуррентно: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2}$. Задать эту последовательность аналитически.

Решение. Найдем несколько членов последовательности:
$y_1 = 1$;
$y_2 = 2$;
$y_3 = 5y_2 - 6y_1 = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 4$;
$y_4 = 5y_3 - 6y_2 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 8$;
$y_5 = 5y_4 - 6y_3 = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 16$;
$y_6 = 5y_5 - 6y_4 = 5 \cdot 16 - 6 \cdot 8 = 32$.

Получили последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Возникает естественное предположение, что $y_n = 2^{n-1}$. Чтобы убедиться в его справедливости, проверим, выполняется ли для $y_n = 2^{n-1}$ заданное в условии рекуррентное соотношение $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2}$.

Если $y_n = 2^{n-1}$, то $y_{n-1} = 2^{n-2}$, $y_{n-2} = 2^{n-3}$. Тогда

$$5y_{n-1} - 6y_{n-2} = 5 \cdot 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-3}(5 \cdot 2 - 6) =$$
$$= 2^{n-3} \cdot 2^2 = 2^{n-1} = y_n.$$

Рекуррентное соотношение выполняется, наша догадка подтвердилась.

Ответ: $y_n = 2^{n-1}$.

Пример 5. Последовательность (y_n) задана рекуррентно: $y_1 = a$, $y_n = y_{y-1}^2 - 4y_{n-1} + 4$, если $n > 1$. При каких значениях параметра a последовательность является стационарной?

Решение. Последовательность (y_n), у которой $y_1 = a$, будет стационарной, если каждый ее член равен a, в частности $y_n = a$, $y_{n-1} = a$. Тогда рекуррентное соотношение

$$y_n = y_{y-1}^2 - 4y_{n-1} + 4$$

принимает вид $a = a^2 - 4a + 4$, т. е. $a^2 - 5a + 4 = 0$. Решив это уравнение, находим: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.

Ответ: $a = 1$ или $a = 4$.

Пример 6. Дана последовательность Фибоначчи:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_n = y_{n-2} + y_{n-1}, \text{ если } n = 3, 4, 5, \ldots$$

(см. пример 3). С помощью метода математической индукции (см. § 6) доказать, что:

а) $y_{2n+2} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n+1}$;

б) $y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = (-1)^n$.

Решение. а) При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$y_4 = y_1 + y_3.$$

Первые 4 члена последовательности Фибоначчи таковы: 1, 1, 2, 3. Равенство $y_4 = y_1 + y_3$, т. е. $3 = 1 + 2$ верно.

Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е.

$$y_{2k+2} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1}.$$

Докажем, что тогда утверждение верно для $n = k + 1$, т. е.

$$y_{2k+4} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1} + y_{2k+3}.$$

С помощью рекуррентного соотношения, задающего последовательность Фибоначчи, находим, что $y_{2k+4} = y_{2k+2} + y_{2k+3}$. Воспользовавшись для y_{2k+2} сделанным предположением, получим:

$$y_{2k+4} = y_{2k+2} + y_{2k+3} = (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1}) + y_{2k+3} =$$
$$= y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1} + y_{2k+3}.$$

Итак, проверяемое утверждение верно для $n = 1$, и из того, что оно верно для натурального числа $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$. Значит, по принципу математической индукции оно верно для любого $n \in N$.

б) При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$y_2^2 - y_1 y_3 = (-1)^1.$$

Поскольку у последовательности Фибоначчи $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, мы получаем: $1^2 - 1 \cdot 2 = -1$ — верное равенство.

Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е.

$$y_{k+1}^2 - y_k y_{k+2} = (-1)^k.$$

Докажем, что тогда утверждение верно для $n = k + 1$, т. е.

$$y_{k+2}^2 - y_{k+1} y_{k+3} = (-1)^{k+1}.$$

В самом деле,

$$y_{k+2}^2 - y_{k+1} y_{k+3} = y_{k+2}^2 - y_{k+1}(y_{k+1} + y_{k+2}) =$$
$$= y_{k+2}^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+1} y_{k+2} = y_{k+2}(y_{k+2} - y_{k+1}) - y_{k+1}^2 =$$
$$= y_{k+2} y_k - y_{k+1}^2 = -(y_{k+1}^2 - y_k y_{k+2}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Значит, утверждение верно для любого n. ■

2. Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность — частный случай числовой функции, а потому некоторые свойства функций можно перенести и на последовательности.

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует такое число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Иными словами, последовательность *ограничена сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа. Число M называют *верхней границей* последовательности.

Ясно, что если последовательность ограничена сверху, то у нее бесконечно много верхних границ.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, -25, \ldots, -n^2, \ldots$ ограничена сверху; в качестве верхней границы можно взять число -1 (или любое число, которое больше, чем -1).

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует такое число m, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Иными словами, последовательность *ограничена снизу*, если все ее члены не меньше некоторого числа. Число m называют *нижней границей* последовательности.

Например, последовательность $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$ ограничена снизу; в качестве нижней границы можно взять число 1 (или любое число, меньшее, чем 1).

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют **ограниченной последовательностью**. Например, ограниченной является последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. В качестве верхней границы можно взять 1, в качестве нижней — 0. Если построить график этой последовательности, т. е. график функции $y = \frac{1}{x}$, $x \in N$ (выделенные точки на рисунке 188), то можно заметить, что весь график расположен в полосе между двумя горизонтальными прямыми (в данном случае это $y = 0$ и $y = 1$). Но в этом и состоит, как известно, геометрический признак ограниченности функции (см. § 8).

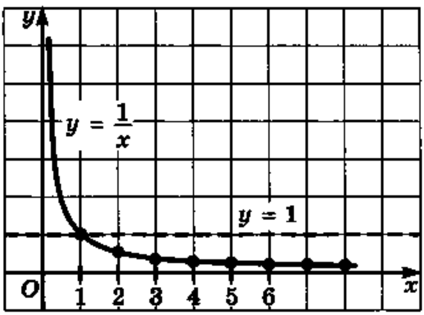


Рис. 188

Особенно наглядным становится свойство ограниченности последовательности, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками

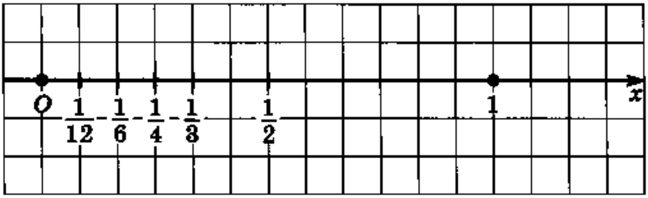


Рис. 189

на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 189).

Пример 7. Исследовать на ограниченность последовательность

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение. Чтобы было понятно, о какой последовательности идет речь, выпишем несколько ее членов:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1}},\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и т. д.

Эта последовательность ограничена снизу: все ее члены удовлетворяют неравенству $y_n \geqslant 1$. Выясним, является ли последовательность ограниченной сверху. Рассмотрим ее n-й член ($n > 1$):

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В этой сумме n слагаемых, причем наименьшим из них является последнее слагаемое $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Значит, $y_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. $y_n > \sqrt{n}$. Поскольку число $\sqrt{n}$ можно выбрать больше любого заданного числа M, то и y_n можно выбрать больше любого заданного числа M. Это значит, что последовательность не ограничена сверху.

Ответ: последовательность ограничена снизу и не ограничена сверху.

Определение 4. Последовательность (y_n) называют возрастающей, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_{n-1} < y_n < \ldots .$$

Например, последовательность 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... — возрастающая.

Определение 5. Последовательность (y_n) называют **убывающей**, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_{n-1} > y_n > \dots .$$

Например, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ — убывающая.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности**. Например, $1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$ и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ — монотонные последовательности, а последовательность $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \dots$ — не монотонная.

Исследуют последовательности на монотонность с помощью приведенных выше определений, но иногда бывает удобно использовать следующее достаточно очевидное утверждение: *если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на луче* $[1; +\infty]$, *то последовательность $y_n = f(n)$ — возрастающая (убывающая).* Например, функция $y = x^2$ возрастает на луче $[1; +\infty)$, и последовательность $y_n = n^2$ возрастает; функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на луче $[1; +\infty)$, и последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ убывает.

Пример 8. Исследовать на монотонность последовательность $y_n = \frac{n^2}{5^n}$.

Решение. Выпишем n-й и $(n + 1)$-й члены последовательности: $y_n = \frac{n^2}{5^n}$, $y_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$. Чтобы сравнить эти члены, составим их разность и оценим ее знак:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} - \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 5n^2}{5^{n+1}} = \frac{2n + 1 - 4n^2}{5^{n+1}}.$$

Для натуральных значений n справедливы неравенства $2n \leqslant 2n^2$ и $1 < 2n^2$. Сложив их, получим: $2n + 1 < 4n^2$, т. е. для любых натуральных значений n справедливо неравенство $\frac{2n + 1 - 4n^2}{5^{n+1}} < 0$, значит, $y_{n+1} - y_n < 0$.

Итак, для любых натуральных значений n выполняется неравенство $y_{n+1} < y_n$, а это значит, что последовательность (y_n) убывает. ■

§ 38. Предел числовой последовательности

1. Определение предела последовательности

Рассмотрим две числовые последовательности — (y_n) и (x_n).

$$(y_n)\colon 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots,\ 2n-1,\ \dots;$$

$$(x_n)\colon 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots .$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой (рис. 189 для (x_n) и рис. 190 для (y_n)). Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) *сходится*, а последовательность (y_n) *расходится*.

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности? Чтобы ответить на этот вопрос, используем понятие окрестности точки, которое мы ввели выше (см. с. 45).

Уточним: математики не используют слова «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение. **Число b называют пределом последовательности (y_n), если в *любой* заранее выбранной окрестности точки b содержатся *все* члены последовательности, начиная с некоторого номера.**

Пишут либо так: $y_n \to b$ (читают: *y_n стремится к b* или *y_n сходится к b*), либо так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (читают: *предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b*; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Дадим несколько пояснений к определению 1.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Возьмем интервал $(b - r_1;\ b + r_1)$, т. е. окрестность точки b; r_1 — радиус этой окрестности ($r_1 > 0$). Существует номер n_1, начиная с которого вся последователь-

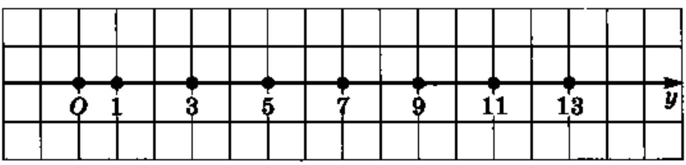


Рис. 190

ность содержится в указанной окрестности: $y_{n_1} \in (b - r_1; b + r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b - r_1; b + r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b - r_1; b + r_1)$ и т. д.

А что будет, если взять интервал $(b - r_2; b + r_2)$, где $0 < r_2 < r_1$, т. е. если уменьшить радиус окрестности? Опять найдется номер, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности, но этот номер будет больше, т. е. $n_2 > n_1$.

Замечание. Если число b — предел последовательности, то, образно выражаясь, окрестность точки b — это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает» y_{n_0} и все последующие члены последовательности. Чем «тоньше» ловушка, т. е. чем меньшая выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется» последовательность, но потом все равно «подписывает акт о капитуляции» — попадает, начиная с некоторого номера, в выбранную окрестность.

Пример 1. Дана последовательность (y_n):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$.

Решение. Возьмем любую окрестность точки 0, пусть ее радиус равен r (рис. 191). Ясно, что всегда можно подобрать натуральное число n_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n_0} < r$. Если, например, $r = 0{,}001$, то в качестве n_0 можно взять 1001, поскольку $\frac{1}{1001} < 0{,}001$; если $r = \frac{3}{5774}$, то в качестве n_0 можно взять 5774, поскольку $\frac{1}{5774} < \frac{3}{5774}$; и т. д. Но это значит, что член последовательности (y_n) с номером n_0, т. е. y_{n_0}, попадает в выбранную окрестность точки 0. Тем более в этой окрестности будут находиться все последующие члены заданной убывающей последовательности $y_n = \frac{1}{n}$. В соответствии с определением 1 это и означает, что

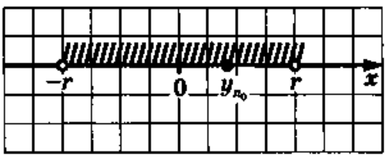


Рис. 191

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.}$$ ■

Пример 2. Найти предел последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots.$$

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, последовательность сходится к 0: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. ■

Результат, полученный в примере 2, является частным случаем более общего утверждения:

$$\boxed{\text{если } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n\to\infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идет о последовательности $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$. Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится.

Пример 3. Найти предел последовательности

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots.$$

Решение. Выполним некоторые преобразования выражения $\frac{2n}{n+1}$:

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+1} = \frac{2(n+1)-2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Это значит, в частности, что

$$\frac{2}{2} = 2 - \frac{2}{1+1};\ \frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{2+1};\ \frac{6}{4} = 2 - \frac{2}{3+1};$$

$$\frac{8}{5} = 2 - \frac{2}{4+1};\ \frac{10}{6} = 2 - \frac{2}{5+1}$$

и т. д., а потому заданную последовательность можно переписать так:

$$2 - \frac{2}{2}, 2 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{2}{4}, 2 - \frac{2}{5}, 2 - \frac{2}{6}, \ldots, 2 - \frac{2}{n+1}, \ldots.$$

Теперь ясно, что «точкой сгущения» является 2 (из числа 2 вычитается все меньшее и меньшее положительное число); иными словами, последовательность сходится к числу 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$ ■

А теперь обсудим результаты, полученные в примерах 1—3, с геометрической точки зрения. Для этого построим графики последовательностей $y_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y_n = \frac{2n}{n+1}$, т. е. графики функций: $y = \frac{1}{x}$, $x \in N$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$; $y = \frac{2x}{x+1}$, $x \in N$.

График первой из этих трех функций изображен на рисунке 188. Он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, 4, ... , лежащих на ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

У второй функции аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют *показательной*. На рисунке 192 изображен график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$. Он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, ... , лежащих на некоторой кривой, ее называют *экспонентой*.

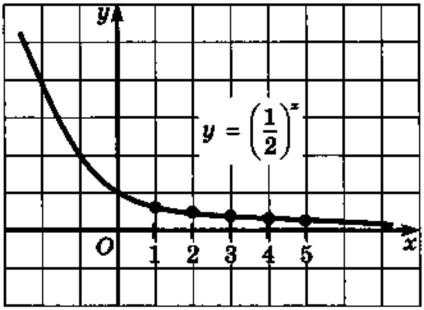


Рис. 192

Осталось рассмотреть третью функцию. Сначала надо построить график функции $y = \frac{2x}{x+1}$ или, что то же самое, $y = \frac{-2}{x+1} + 2$.

Графиком этой функции является гипербола, которая получается из гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ сдвигом на 1 влево по оси x и на 2 вверх по оси y (рис. 193).

Теперь мы имеем представление о графике последовательности $y_n = \frac{2n}{n+1}$. Он состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, 4, ... , лежащих на правой ветви построенной гиперболы (рис. 194).

Замечаете ли вы кое-что общее в характере трех построенных графиков последовательностей (см. рис. 188, 192 и 194)? Смотрите: на всех трех рисунках точки графика по мере их ухода вправо все ближе и ближе подходят к некоторой горизонтальной прямой: на рисунке 188 — к прямой $y = 0$, на рисунке 192 — к прямой $y = 0$, на рисунке 194 — к прямой $y = 2$. Каждую из этих прямых называют *горизонтальной асимптотой* графика.

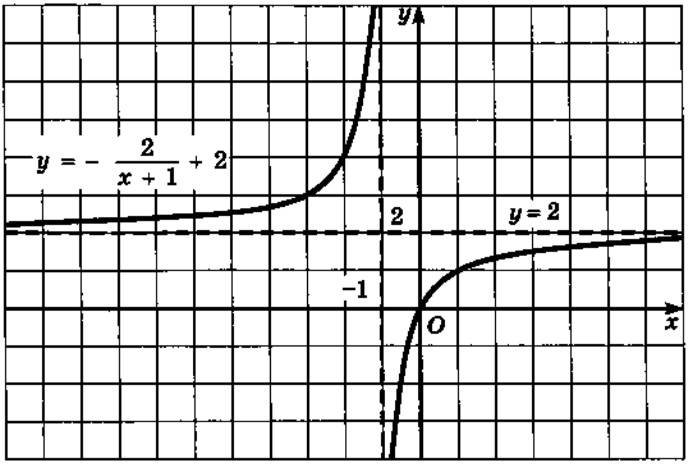


Рис. 193

Подведем итоги:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{1}{x}$, $x \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ и прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ и прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{2x}{x+1}$, $x \in N$.

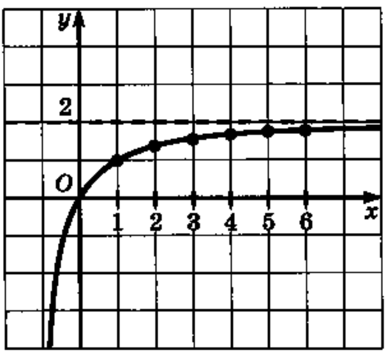


Рис. 194

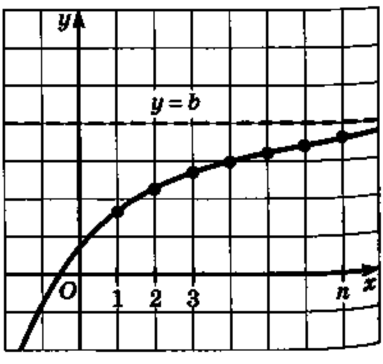


Рис. 195

Вообще *равенство* $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$ *означает, что прямая* $y = b$ *является горизонтальной асимптотой графика последовательности* $y_n = f(n)$, *т. е. графика функции* $y = f(x)$, $x \in N$ (рис. 195).

На практике используется еще одно истолкование равенства $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$, связанное с приближенными вычислениями: *если последовательность* $y_n = f(n)$ *сходится к числу* b, *то выполняется приближенное равенство* $f(n) \approx b$, *причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше* n.

2. Свойства сходящихся последовательностей

Сходящиеся последовательности обладают рядом интересных свойств. Формальные доказательства этих свойств — прерогатива вузовского курса высшей математики. Основаны доказательства на формализованном варианте данного выше определения 1 (этот вариант определения — опять-таки прерогатива курса высшей математики). Мы дадим лишь формулировки свойств.

Свойство 1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Свойство 2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX веке немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса).

Приведем классический пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмем окружность и будем последовательно вписывать в нее правильные многоугольники: 4-угольник, 8-угольник, 16-угольник и т. д. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена (снизу числом 0, а сверху, например, числом, выражающим площадь описанного около окружности квадрата). Значит, построенная последовательность сходится, ее предел принимается за площадь круга. Именно с помощью таких рассуждений и получена в математике формула площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиуса r правильных многоугольников).

3. Вычисление пределов последовательностей

Выше мы отметили, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\quad \lim_{n\to\infty}q^n=0,\quad \text{если } |q|<1.$$

Добавим еще одно соотношение: $\lim_{n\to\infty}C=C$. Иными словами, *предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности.*

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема.

Теорема. ***Если*** $\lim_{n\to\infty}x_n=b$, $\lim_{n\to\infty}y_n=c$, ***то***

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=b+c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{b}{c},$$

если $c\neq0$;

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n)=kb.$$

Пример 4. Найти предел последовательности:

а) $x_n=\frac{1}{n^2}$; в) $z_n=\frac{k}{n^4}$;

б) $y_n=\frac{1}{n^3}$; г) $t_n=\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3$.

Решение. а) Имеем: $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot0=0.$$

б) Рассуждая, как в пункте а), получим: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(k\cdot\frac{1}{n^4}\right) = k\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = k\cdot 0 = 0.$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0.}$$

г) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3. \quad \blacksquare$$

Пример 5. Даны числа b_1 и q, такие, что $b_1 \neq 0$, $|q| < 1$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

Решение. Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\frac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{q-1}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(q^n-1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$), и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n-1) = 0 - 1 = -1$. Тогда

$$\frac{b_1}{q-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1}\cdot(-1) = \frac{b_1}{1-q}.$$

Ответ: $\frac{b_1}{1-q}$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+4}$.

Решение. В подобных случаях применяют искусственный прием: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}.$$

Далее воспользуемся правилом «предел дроби (частного)». Поскольку предел числителя равен $2 + 0 = 2$, а предел знаменателя равен $1 + 0 = 1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1} = 2$.

Ответ: 2.

4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$
$$S_2 = b_1 + b_2;$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$
$$\ldots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n;$$
$$\ldots$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, то $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$.

В примере 5 мы установили, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Но $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ мы назвали выше суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии существует и вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Пример 7. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой: $S = \frac{b_1}{1 - q}$. Значит, $S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ: $S = 8$.

Пример 8. Сумма геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов — 40,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ со знаменателем q ($|q| < 1$), ее сумма вычисляется по формуле $\frac{b_1}{1 - q}$. По условию эта сумма равна 9. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1}{1 - q} = 9$.

Последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$ также является геометрической прогрессией: ее первый член равен b_1^2, знаменатель равен q^2, а сумма вычисляется по формуле $\frac{b_1^2}{1 - q^2}$. По условию эта сумма равна 40,5. Таким образом, получаем уравнение $\frac{b_1^2}{1 - q^2} = 40{,}5$.

В итоге задача сводится к решению системы уравнений относительно переменных b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы используем метод подстановки: выразим из первого уравнения переменную b_1. Получим: $b_1 = 9(1 - q)$. Подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы:

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Далее последовательно находим:

$$\frac{2(1-q)}{1+q} = 1;\ \ 2 - 2q = 1 + q;\ \ q = \frac{1}{3};$$

$$b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6.$$

Итак, $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

По условию требуется найти b_5. Имеем: $b_5 = b_1q^4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$.

Ответ: $b_5 = \frac{2}{27}$.

§ 39. Предел функции

1. Предел функции на бесконечности

В § 38 мы получили следующий результат: равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = b \qquad (1)$$

означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(n)$ (рис. 195). Напомним, что здесь аргумент n принимает только натуральные значения.

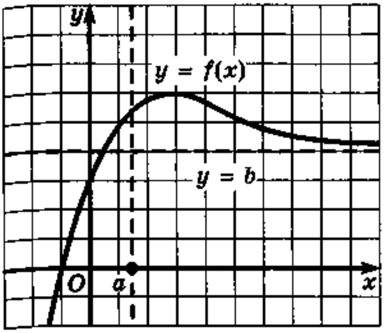


Рис. 196

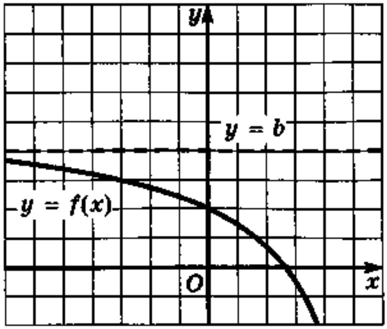


Рис. 197

Пусть теперь дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 196). Естественно, что в этом случае по аналогии с приведенным выше равенством (1) используется запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 197), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

Если одновременно выполняются соотношения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b,$$

то можно объединить их одной записью: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Но обычно используют более экономную запись:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

(читают: предел *функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*).

В этом случае прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ как бы с двух сторон (рис. 198).

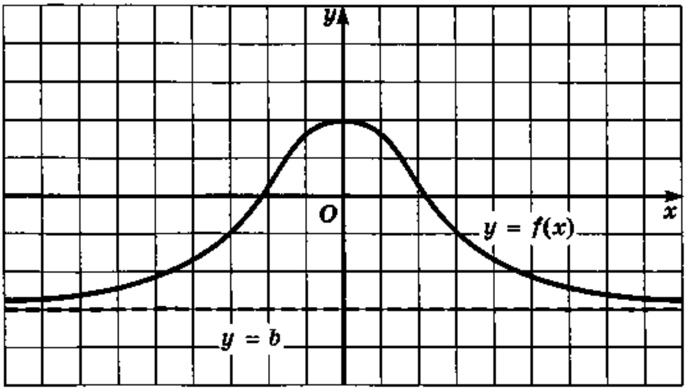


Рис. 198

Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по тем же правилам, что и вычисление предела последовательности. Приведем их (с соответствующими изменениями).

1) ***Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение***

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^m} = 0.}$$

2) ***Если*** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, ***то***

а) ***предел суммы равен сумме пределов:***

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) ***предел произведения равен произведению пределов:***

$$\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) ***предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что*** $c \neq 0$***):***

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) ***постоянный множитель можно вынести за знак предела:***

$$\lim_{x \to \infty} kf(x) = kb.$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Осталось воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Поскольку предел числителя равен $2 + 0 = 2$, а предел знаменателя равен $1 - 0 = 1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1} = 2$.

Ответ: 2.

Замечание. Сравните только что решенный пример с примером 6 из § 38: все то же самое — та же идея, те же рассуждения. Отличие только одно: там переменная n принимала лишь натуральные значения, а здесь переменная x принимает любые действительные значения (кроме, разумеется, значений -2 и 2, которые обращают в нуль знаменатель дроби, содержащейся под знаком предела).

2. Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рисунках 199—201. Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, тем не менее это три разные функции, они отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = a$. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 199, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 200, значение $f(a)$ существует, но оно «неудачное», так как отличается от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 201, значение $f(a)$ существует, и оно «удачное» — равно b. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то все три функции будут тождественными.

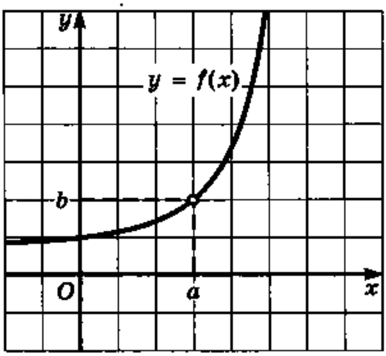


Рис. 199

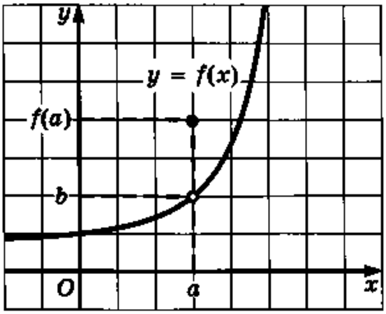


Рис. 200

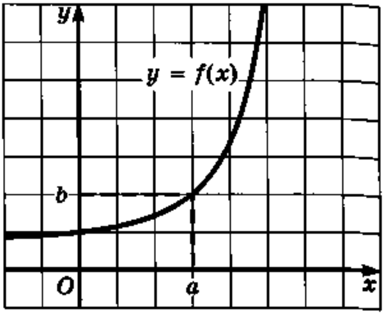


Рис. 201

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b*).

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбираются все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b. Можно сказать и так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство $f(x) \approx b$ (причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньшая окрестность выбирается). При этом, подчеркнем, *сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.*

А теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию (рис. 201), которая удовлетворяет условию

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

В каких случаях мы с вами до сих пор использовали понятие «непрерывная функция»? Мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию, т. е. не имеет «проколов» и «скачков». На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии (без «проколов» и «скачков») только тогда, когда *установлена* непрерывность функции.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке* $x = a$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

В курсе алгебры 7—9-го классов мы отмечали, что функции $y = C$, $y = kx + m$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, где n — натуральное число, непрерывны на всей числовой прямой. Отмечали также, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$ (n — натуральное число) непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но претерпевает разрыв в точке $x = 0$. В главе 3, говоря о тригонометрических функциях, мы отмечали непрерывность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на всей числовой прямой, а также непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ в каждом промежутке из области их определения. До сих пор мы опирались на наглядные представления и интуицию. Математики доказали, опираясь на определение непрерывности, что все упомянутые утверждения верны. Так что теперь мы будем пользоваться ими на законных основаниях.

Имеет место более сильное утверждение:

если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7. \qquad \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Выражение $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$ определено в любой точке $x \geqslant 0$, в частности в точке $x = 2$. Следовательно, функция $y = f(x)$

непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4} = \frac{0}{\sqrt{2}+4} = 0. \qquad \blacksquare$$

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не вызвало затруднений: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но бывают случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение. Если подставить значение $x = -3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \frac{x - 3}{4}.$$

Значит, функции $y = \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$ и $y = \frac{x - 3}{4}$ тождественны при условии $x \neq -3$. Но (внимание!) при вычислении предела функции при $x \to -3$ саму точку $x = -3$ можно исключить из рассмотрения, мы об этом говорили выше. Значит,

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5. \qquad \blacksquare$$

Для вычисления предела функции в точке, как и для предела на бесконечности, используют правила: «предел суммы», «предел произведения», «предел частного».

Вернемся снова к названию раздела математики, который мы начали изучать, — математический анализ. В начале главы 7 мы отметили: *анализируют* в этом разделе математики то, как ведет себя функция около конкретной точки, точнее, *в окрестности* конкретной точки. Именно этим мы и занимались, делая выводы о функциях, графики которых изображены на рисунках 199—201. Проведенный краткий анализ привел нас к понятию предела функции в точке и к понятию непрерывности функции в точке.

Теория пределов — достаточно сложный раздел математического анализа, который изучается в вузах. Наше знакомство с понятием предела, как вы, наверное, заметили, поверхностное, основанное на интуиции и наглядных представлениях. Продолжая это «шапочное» знакомство, получим один очень существенный для высшей математики результат. При этом опять будем использовать не строгие рассуждения (нам пока это не по силам), а рассуждения, основанные на интуиции, наглядности, правдоподобии. Такие рассуждения математики часто называют рассуждениями «на пальцах».

Возьмем числовую окружность, выберем достаточно малое положительное значение t, отметим на окружности точку $M(t)$ и ее ординату, т. е. $\sin t$; значит, t — это длина дуги AM, $\sin t$ — это длина перпендикуляра MP (рис. 202). Для достаточно малых значений t выполняется приближенное равенство $AM \approx MP$, т. е. $\sin t \approx t$, и, следовательно, $\frac{\sin t}{t} \approx 1$.

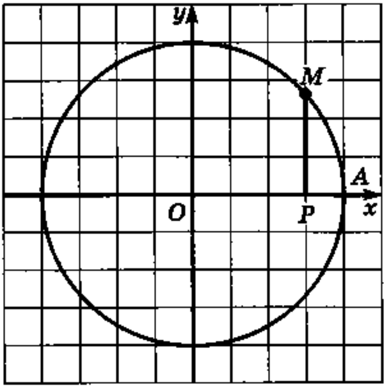


Рис. 202

Например,

$$\frac{\sin 1}{1} \approx 0{,}84147; \quad \frac{\sin 0{,}1}{0{,}1} \approx 0{,}99833;$$

$$\frac{\sin 0{,}01}{0{,}01} \approx 0{,}99998.$$

Естественно предположить, что

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.}$$

В курсе математического анализа доказано, что это утверждение верно.

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.
$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Пример 5. Найти приращение функции $y = x^2$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке:

а) $x = 1{,}1$; б) $x = 0{,}98$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = x^2$. Имеем: $f(1) = 1^2 = 1$; $f(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$;

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21.$$

б) $f(1) = 1$; $f(0{,}98) = 0{,}98^2 = 0{,}9604$;

$$\Delta y = f(0{,}98) - f(1) = 0{,}9604 - 1 = -0{,}0396.$$ ■

Обратите внимание на полученный в примере 5 ответ: приращение функции (как, впрочем, и приращение аргумента) может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

А теперь посмотрим на определение непрерывной функции с точки зрения приращений аргумента и функции. Определение непрерывности функции в точке $x = a$ выглядит так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Здесь $x \to a$, значит, $(x - a) \to 0$, т. е. $\Delta x \to 0$. При этом $f(x) \to f(a)$, значит, $(f(x) - f(a)) \to 0$, т. е. $\Delta y \to 0$.

Получаем новое истолкование понятия непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие:

если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Выше мы отметили, что функцию называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка. Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка, например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$. Для точки a данное выше определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$, то $\Delta y \to 0$. Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$, то $\Delta y \to 0$. В частности, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна не только в любой точке $x > 0$, но и в точке $x = 0$ (в указанном выше смысле). Поэтому функцию $y = \sqrt{x}$ считают непрерывной на всем луче $[0; +\infty)$.

Пример 6. Для функции $y = kx + m$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = kx + m$;

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + m;$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + m) - (kx + m) =$$
$$= (kx + k \cdot \Delta x + m) - (kx + m) = k \cdot \Delta x.$$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$ ■

На рисунке 203 изображен график линейной функции $y = kx + m$, отмечены приращения аргумента и функции при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$. Чертеж подсказывает, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла между прямой $y = kx + m$ и положительным направлением оси x, а это угловой коэффициент прямой. Значит, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, что фактически и получено при решении примера 6, но с помощью формальных преобразований.

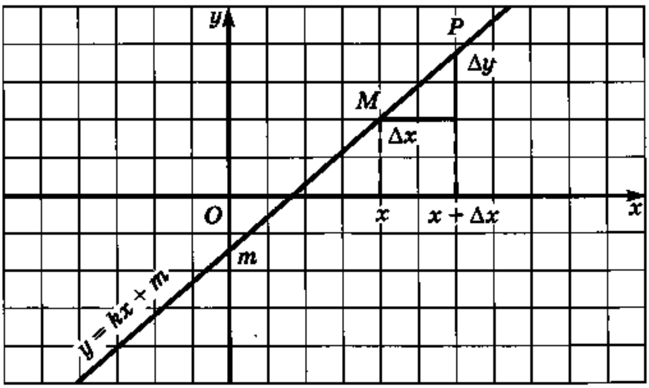


Рис. 203

Пример 7. Для функции $y = x^2$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = x^2$;

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Итак, $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. ■

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

При вычислении последнего предела мы учли, что x — фиксированная точка, т. е. постоянное число, а Δx — переменная: если $\Delta x \to 0$, то $(2x + \Delta x) \to 2x$.

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. ■

§ 40. Определение производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Часто бывает так, что, решая задачи, очень далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Сила математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в других областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств и др. В этом параграфе речь пойдет о принципиально новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.

Задача 1 (*о скорости движения*). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

Р е ш е н и е. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 204): $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки станет другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Рис. 204

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Полученную разность мы назвали в § 39 приращением функции: $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м).

Нетрудно найти среднюю скорость $v_{ср}$ движения тела за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ (м/с).$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют *мгновенной скоростью*)? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$.

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, выясним, что следует понимать под *касательной* к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола $y = x^2$ *касается* оси x в точке $x = 0$ или, что то же самое, ось x является *касательной* к параболе в точке $x = 0$ (рис. 205). И дело не в том, что ось x и парабола имеют только одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

Дана кривая L (рис. 206), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на этой кривой — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно

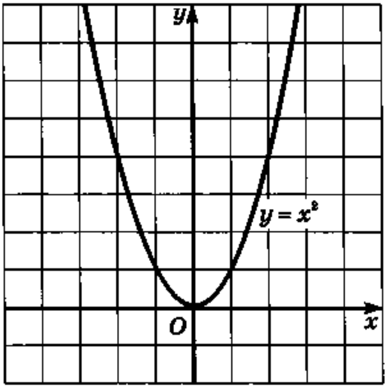


Рис. 205

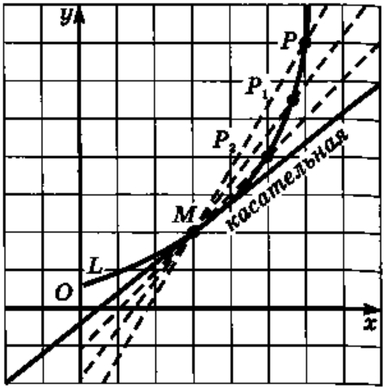


Рис. 206

обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют **касательной к кривой L в точке M**.

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y = x^2$, проведите секущую OP, где O — вершина параболы, P — произвольная точка. Возьмите точку P поближе к O, проведите вторую секущую. Возьмите точку P еще ближе к O, проведите третью секущую и т. д. Вы обнаружите, что предельным положением для построенных секущих будет ось x — это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям).

Задача 2 (*о касательной к графику функции*). Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a;\ f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике (рис. 207) точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнет приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что *угловой коэффициент касательной* $k_{\text{кас}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

Используя приведенную выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем:

$$\boxed{k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

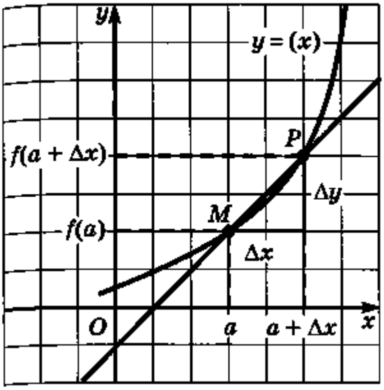


Рис. 207

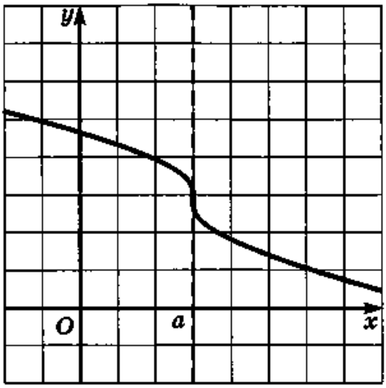


Рис. 208

Замечание. В приведенном решении задачи 2 упущен случай, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс (см., например, рис. 208). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

Итак, две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи физики, химии, экономики и т. д. приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели.

Этим мы и займемся в следующем пункте.

2. Определение производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x** и обозначают $f'(x)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).}$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$ — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$**.

В примере 6 § 39 мы доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$.

Это означает, что $y' = k$, или, подробнее,

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

В примере 7 § 39 мы доказали, что для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

Это означает, что $y' = 2x$, или, подробнее,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Рассмотренные в пункте 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\boxed{v = s'(t).}$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t. А математики говорят так: производная функции $y = f(x)$ выражает *скорость изменения функции*, т. е. скорость изменения y относительно x.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной (рис. 209):

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Поскольку $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 209).

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки x выполняется приближенное равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, т. е. $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

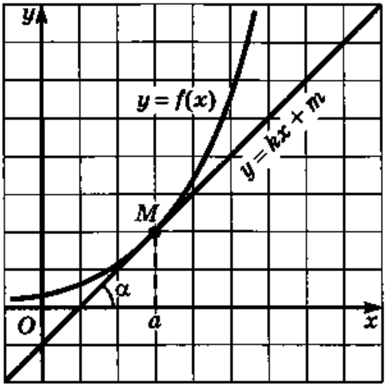


Рис. 209

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной (в заданной точке x). Например, для функции $y = x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx 2x \cdot \Delta x$.

Если внимательно прочитать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм отыскания производной. Сформулируем его.

Алгоритм нахождения производной
(для функции $y = f(x)$)

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

   Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предлагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют *дифференцируемой в точке* x. Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют *дифференцированием функции* $y = f(x)$. Эти термины имеют глубокий математический смысл, но мы говорить о нем не будем (не хватает теоретических знаний).

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой те два достаточно тонких свойства функций, которые мы обсудили в этом и в предыдущем параграфах, — непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $M(x; f(x))$ можно провести касательную, причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$. Такой график не может «разрываться» в точке M, т. е. функция обязана быть непрерывной в точке x.

Это были рассуждения «на пальцах». Приведем несколько более строгие рассуждения. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке (см. пункт 3 в § 39).

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $y = |x|$ непрерывна везде, в частности в точке $x = 0$ (рис. 210), но касательной к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производной.

А вот еще один пример. На рисунке 211 изображен график кусочной функции $y = f(x)$, где

$$y = \begin{cases} -\sqrt{-x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в точке $x = 0$ касательная совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x = 0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

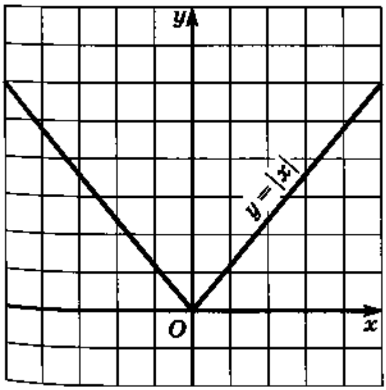


Рис. 210

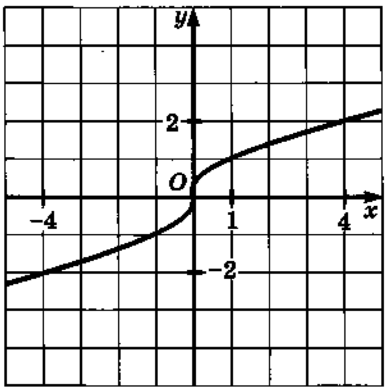


Рис. 211

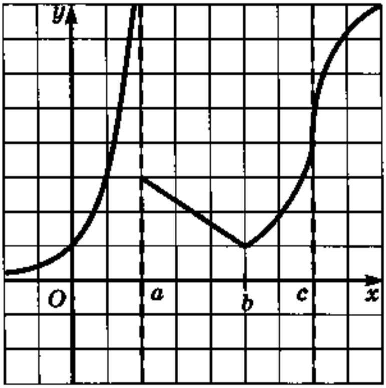


Рис. 212

Итак, мы познакомились с новым свойством функции — дифференцируемостью. Формальные определения тех или иных свойств функции — дело, конечно, хорошее, но у нас всегда были приемы считывания информации о наличии того или иного свойства функции по ее графику. Например, если график был сплошным, то мы говорили, что функция непрерывна. А как по графику можно сделать вывод о дифференцируемости функции?

Ответ фактически получен выше. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема. Так, по графику функции, изображенному на рисунке 212, можно сделать вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$; конкретнее: $x = a$ — точка разрыва функции, в точке $x = b$ касательная не существует, а в точке $x = c$ касательная параллельна оси y.

Если же говорить о непрерывности функции не в локальном смысле (в точке), а в глобальном (на множестве), то делаем такой вывод: функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; a)$ и на луче $[a; +\infty)$, хотя подчеркнем еще раз, что в самой точке $x = a$ она не является непрерывной.

§ 41. Вычисление производных

1. Формулы дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$C' = 0;$$
$$x' = 1;$$
$$(kx + m)' = k;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены в § 40.

Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Здесь мы добавим три формулы, которые выводятся по алгоритму, приведенному в § 40. Определенные технические трудности при этом, естественно, возникают. Поступим так: сначала укажем новые формулы дифференцирования, потом разберем несколько примеров, а затем докажем новые формулы.

Итак, сообщаем еще три формулы дифференцирования:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5,\ x = 4;$ г) $y = \sqrt{x},\ x = 4;$

б) $y = x^2,\ x = -1;$ д) $y = \sin x,\ x = 0;$

в) $y = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{2};$ е) $y = \cos x,\ x = \frac{\pi}{6}.$

Решение. а) Пусть $f(x) = 3x + 5$. Имеем: $(3x + 5)' = 3$; значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности в заданной точке $x = 4$. Это можно записать так: $f'(4) = 3$.

б) $f(x) = x^2$; $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) $f(x) = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) $f(x) = \sqrt{x}$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) $f(x) = \sin x$; $(\sin x)' = \cos x$, значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) $f(x) = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$, значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. ■

Когда в § 16 мы строили график функции $y = \sin x$, то обратили ваше внимание на следующее обстоятельство: из начала координат синусоида выходит как бы под углом 45° (рис. 213). И там же сознались: почему это так, мы пока объяснить вам не можем, соответствующий разговор будет позднее. «Момент истины» наступил. Мы только что видели, что для функции $y = \sin x$

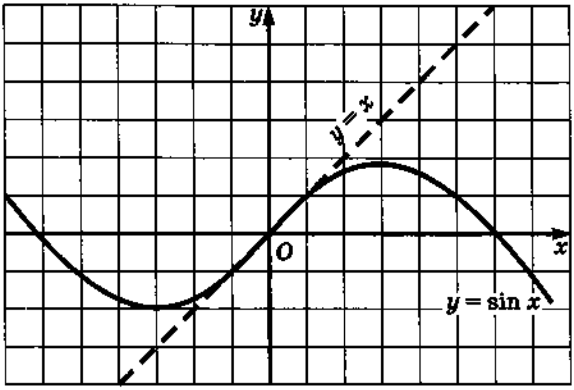


Рис. 213

выполняется равенство $f'(0) = 1$. $f'(0)$ в данном случае — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$. Если угловой коэффициент прямой равен 1, то прямая образует с положительным направлением оси x угол 45°. Это обстоятельство и учитывается при построении графика функции $y = \sin x$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который равен $f'(1)$.

Имеем: $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Итак, $k = 2$, т. е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Чтобы найти значение коэффициента m, воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т. е. через точку $(1; 1)$. Подставим $x = 1$, $y = 1$ в уравнение $y = 2x + m$:

$$1 = 2 \cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рисунке 214 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж наглядно демонстрирует, что эта прямая касается параболы в точке $(1; 1)$.

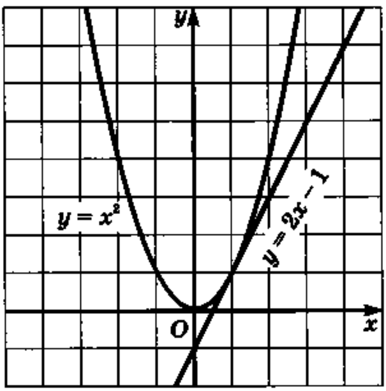


Рис. 214

Ответ: $y = 2x - 1$.

А теперь выполним данное выше обещание: выведем новые формулы дифференцирования.

Найдем производную функции $y = \sqrt{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x > 0$) имеем: $f(x) = \sqrt{x}$.

2) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Здесь полезно применить искусственный прием: домножить числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Что это даст? В числителе мы получим разность квадратов: $\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$, т. е. $(x + \Delta x) - x$, или Δx; сама дробь примет вид

$$\frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) \cdot \Delta x}, \text{ т. е. } \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Итак, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В процессе рассуждений мы воспользовались тем, что если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ и $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$.

Найдем производную функции $y = \sin x$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = \sin x$.

2) $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Преобразуем полученное выражение, воспользовавшись формулой «разность синусов» ($\sin s - \sin t = 2 \sin \frac{s - t}{2} \cos \frac{s + t}{2}$):

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$. В правой части полученного равенства — обратите внимание — три раза содержится выражение $\dfrac{\Delta x}{2}$. Есть смысл обозначить его буквой t. Получим: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin t\cos(x+t)}{t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin t\cos(x+t)}{t}$.

Далее рассуждаем так: $\Delta x \to 0$, а $t = \dfrac{\Delta x}{2}$, значит, $t \to 0$, и под знаком предела вместо условия $\Delta x \to 0$ можно записать условие $t \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin t\cos(x+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos(x+t).$$

Получили произведение пределов. Первый предел равен 1 (см. с. 319), а второй предел (в силу непрерывности косинуса) равен $\cos x$. В итоге получаем $\cos x$.

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично выводится формула

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

2. Правила дифференцирования

Здесь речь пойдет о правилах нахождения производных суммы, произведения, частного функций.

Теорема 1. ***Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:***

$$\boxed{(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют короче, в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

Теорема 2. ***Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем***

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют короче, в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x.$$

Теорема 3. ***Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем***

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют так: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции*.

Например,

$$((2x + 3)\sin x)' = (2x + 3)'\sin x + (2x + 3)(\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x + 3)\cos x.$$

Теорема 4. ***Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем***

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} =$$

$$= \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}.$$

Дальнейший план изложения материала в этом пункте будет таким. Сначала мы выведем первые два правила дифференцирования — это сравнительно нетрудно. Затем рассмотрим ряд примеров на использование правил и формул дифференцирования, чтобы вы к ним привыкли. В самом конце пункта мы приведем доказательство третьего правила дифференцирования.

Доказательство теоремы 1.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Пусть $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) =$ $= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$.

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Доказательство теоремы 2.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Пусть $kf(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = kf(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k(f(x + \Delta x) - f(x)) =$ $= k\Delta f$.

Итак, $\Delta y = k\Delta f$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta f}{\Delta x} = k\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

Итак,

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' =$

$$= 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

Мы воспользовались первым и вторым правилами, а также формулами дифференцирования линейной функции $y = -4x + 2$ и функции $y = x^2$.

Ответ: $y' = 6x - 4$.

Пример 4. Найти производную функции:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение. а) Представим x^3 в виде $x^2 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

б) Представим x^4 в виде $x^3 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Итак, $(x^4)' = 4x^3$.

в) Представим x^5 в виде $x^4 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4(x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4.$$

Итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^4)' = 4x^3$; в) $(x^5)' = 5x^4$.

А теперь сравним пять формул: две формулы, которые мы знали раньше, и те три формулы, которые вывели в примере 4. Смотрите:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Возникает естественная гипотеза: для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.} \qquad (1)$$

«Естественная гипотеза» — это стилистический оборот из области интуиции. Интуиция хороша для открытия новых фактов, но не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но строго не обосновали. Докажем ее методом математической индукции (см. § 6).

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так: $(x^1)' = 1 \cdot x^0$. Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k.$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что формула (1) верна для любого натурального числа n.

Пользуясь формулой (1) и соответствующими правилами дифференцирования, можно найти производную любого многочлена.

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение. $y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$.

Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нам нужно найти точки, в которых производная, т. е. $3x^2 - 3$, обращается в нуль. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Так как $y = x^3 - 3x + 2$, то находим соответственно:

$$y_1 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$$
$$y_2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4.$$

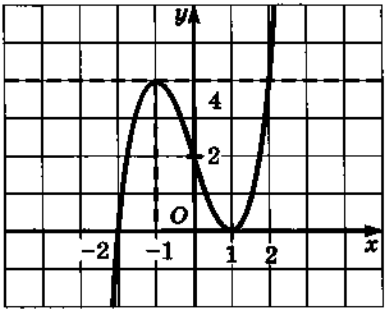


Рис. 215

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ в точке (1; 0) или в точке (−1; 4), будет параллельна оси x. На рисунке 215 дана геометрическая иллюстрация полученного результата — построен график функции $y = x^3 - 3x + 2$. При этом мы учли, что $y = 2$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = -2$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке $x = -2$. ■

Формула (1) верна и в случае, когда показатель степени — любое целое отрицательное число. Пусть $y = x^{-n}$, $n \in N$. Имеем:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Например, $(x^{-5})' = -5x^{-6}$; $\left(\frac{1}{x^{97}}\right)' = (x^{-97})' = -97x^{-98}$.

Таким образом, *для любого $m \in Z$ справедлива формула*

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

Пример 6. Найти производную функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, и правилом дифференцирования частного. Получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, мы вывели еще одну формулу дифференцирования:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Понятно, что эта формула справедлива лишь при допустимых значениях x, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Рассуждая аналогично (советуем провести соответствующие рассуждения), получим:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$ ■

В математике, наряду с прямой задачей, часто решают обратную. До сих пор мы говорили о том, как по функции найти ее производную. Но часто бывает так, что известна производная, а найти нужно саму функцию. Если, например, известно, что $f'(x) = \cos x$, то $f(x) = \sin x$; в самом деле, производная от $\sin x$ равна

$\cos x$. Если известно, что $f'(x) = x^2$, то нетрудно догадаться, что $f(x) = \frac{x^3}{3}$; в самом деле, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

В курсе алгебры и начал анализа 11-го класса мы подробнее поговорим о решении обратных задач, т. е. о том, как, зная производную функции, найти саму функцию.

Завершая этот пункт, выполним данное выше обещание, выведем правило дифференцирования произведения, т. е. функции $y = f(x) \cdot g(x)$.

Доказательство теоремы 3.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной, а также тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Пусть $f(x)\ g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x)\ g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)\ g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)\ (g(x) + \Delta g) =$$
$$= f(x)\ g(x) + \Delta f\ g(x) + f(x)\ \Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x)\ g(x) + \Delta f\ g(x) + f(x)\ \Delta g + \Delta f \Delta g) -$
$- f(x)\ g(x) = \Delta f\ g(x) + f(x)\ \Delta g + \Delta f \Delta g.$

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f g(x) + f(x) \Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \dfrac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x \cdot \Delta x} \Delta x.$

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \dfrac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x \cdot \Delta x} \Delta x\right) =$

$= f'(x)\ g(x) + g'(x)\ f(x) + f'(x)\ g'(x) \cdot 0 = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x).$

Итак,

$$(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x).$$

3. Понятие и вычисление производной n-го порядка

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке множества X. Производная этой функции, в свою очередь, является функцией от x на X. Следовательно, можно говорить о производной полученной функции, т. е. о производной от первой производной. Если она существует, то ее называют *производной второго порядка* функции $y = f(x)$ или, короче, *второй производной* и обозначают $f''(x)$ или y''. Значит, по определению, $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично, если существует производная от второй производной, то ее называют *третьей производной* и обозначают $f'''(x)$. Следовательно, по определению, $f'''(x) = (f''(x))'$.

Вообще *производной n-го порядка* называют производную от производной $(n - 1)$-го порядка. Производную n-го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$. Итак, по определению, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Для производной n-го порядка используется также обозначение $y^{(n)}$.

В § 40 мы отметили, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, то первая производная — это скорость движения: $v = s'(t)$. Рассматривая производную скорости по времени t, получим скорость изменения скорости, т. е. ускорение: $a = v' = (s')' = s''(t)$.

Итак, *ускорение есть вторая производная координаты по времени*. В этом состоит механический смысл второй производной.

Пример 7. Найти $f'''(1)$, если $f(x) = x^5$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$, $f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2$. Следовательно, $f'''(1) = 60 \cdot 1^2 = 60$. ■

Пример 8. Тело движется прямолинейно по закону $s = 10t^2 + 3t - 1$ (s — в метрах, t — в секундах). Доказать, что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. $s' = (10t^2 + 3t - 1)' = 20t + 3$, $s'' = (20t + 3)' = 20$. Значит, ускорение постоянно и равно 20 м/с². Так как по закону Ньютона действующая сила пропорциональна ускорению, то она постоянна. ■

§ 42. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции

В математике приходится рассматривать не только «чистые функции» ($y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{x}$ и т. д.), но и «функции от функций», например $y = \sqrt{\arcsin x}$, $y = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}$ (подобные выражения нам уже встречались) — их называют *сложными функциями*. Дадим точное определение.

Определение. Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X и U — область ее значений. Пусть, далее, функция $y = f(u)$ определена на множестве U. Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$. Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$. Ее называют **композицией функций или сложной функцией**.

Если, например, $u = x^2$, а $y = \sqrt{u+1}$, то композиция функций имеет вид $y = \sqrt{x^2+1}$ (области определения двух исходных функций и сложной функции не указаны, значит, подразумеваются естественные области определения — об этом мы говорили выше в § 7).

А теперь выполним рассуждения «в обратном направлении»: сложная функция $y = \operatorname{tg}\sqrt{x^4+x^2+x}$ является композицией трех функций:

$$y = \operatorname{tg} u,\ u = \sqrt{z},\ z = x^4 + x^2 + 1.$$

Обсудим вопрос о том, как искать производную сложной функции $y = f(g(x))$, т. е. $y = f(u)$, $u = g(x)$.

Значению x_0 из области определения функции соответствуют значения $u_0 = g(x_0)$ и $y_0 = f(u_0)$ (берутся лишь значения, в которых рассматриваемые функции дифференцируемы). В § 40 мы отмечали, что производиая выражает скорость изменения функции в рассматриваемой точке. Значит, $g'(x_0)$ показывает скорость изменения u относительно x в точке x_0, а $f'(u_0)$ — скорость изменения y относительно u в точке u_0. Поэтому, чтобы найти $f'(g(x_0))$, т. е. скорость изменения y относительно x в точке x_0, надо перемножить $g'(x_0)$ и $f'(u_0)$ (если, скажем, u меняется в 2 раза быстрее, чем x, а y — в 3 раза быстрее, чем u, то y меняется быстрее, чем x, в $2 \cdot 3 = 6$ раз). Итак, $f'(g(x_0)) = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$. Так как точка x_0 была выбрана произвольно, то полученное равенство можно переписать в более общем виде:

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).} \qquad (1)$$

Обычно переменную u называют ***промежуточным аргументом*** и полученное правило дифференцирования композиции функций формулируют в виде следующей теоремы (приведем ее без доказательства).

Теорема. ***Производная композиции двух функций — $y = f(u)$, $u = g(x)$ — равна произведению производной функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимой переменной:***

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

(здесь y'_x означает производную y по x, y'_u — производную y по промежуточному аргументу u, а u'_x — производную промежуточного аргумента u по независимой переменной x).

Пример 1. Найти производную функции $y = \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + 5\right)^3$.

Решение. Пусть $u = x^2 - \dfrac{1}{x} + 5$. Тогда заданную функцию можно рассматривать как композицию двух функций: $y = u^3$ и $u = x^2 - \dfrac{1}{x} + 5$. Воспользовавшись правилом дифференцирования композиции двух функций, получим:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)' \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\right)' = 3u^2 \cdot \left(2x + \frac{1}{x^2}\right).$$

Подставляя вместо u его выражение, получим:

$$y' = 3\left(x^2 - \frac{1}{x} + 5\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right).$$ ■

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 16}$.

Решение. Здесь $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 16$. Значит, $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot (x^2 + 16)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{u}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$. ■

Пример 3. Плот подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега равно 25 м, если известно, что ворот расположен выше поверхности воды на 4 м.

Решение. Пусть $s = PW$ — длина каната между воротом W и плотом P (рис. 216), $x = PB$ — расстояние плота от берега (в метрах), $WB = 4$ м, следовательно, $s = \sqrt{x^2 + 16}$. Здесь x есть функция от времени t, т. е. $x = x(t)$. Нам нужно найти скорость движения плота, т. е. x'_t. Имеем: $s'_t = s'_x \cdot x'_t$. Но в предыдущем примере мы установили, что $\left(\sqrt{x^2 + 16}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$. Значит,

$$s'_t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \cdot x'_t = \frac{x}{s} \cdot x'_t,$$

откуда $x'_t = \dfrac{s}{x} \cdot s'_t$.

По условию $s'_t = 3$, $x = 25$, и, следовательно, $s = \sqrt{25^2 + 4^2} = \sqrt{641}$. Тогда $x'_t = \dfrac{\sqrt{641}}{25} \cdot 3 \approx 3{,}03$.

Итак, искомая скорость примерно равна 3,03 м/мин. ■

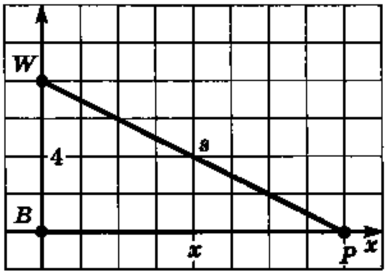


Рис. 216

Особо отметим часто встречающийся случай, когда приходится дифференцировать сложную функцию вида $y = f(kx + m)$, т. е. $y = f(u)$, $u = kx + m$. Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(kx + m) \cdot (kx + m)' = f'(kx + m) \cdot k.$$

Итак,

$$\boxed{(f(kx + m))' = k \cdot f'(kx + m).}$$

Например,

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x,$$

$$\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 1\right)\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3} + 1\right)},$$

$$((3 - 5x)^{10})' = -5 \cdot 10(3 - 5x)^9 = -50(3 - 5x)^9.$$

Пример 4. Найти значение производной функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{7 - 2{,}16x}$, в точке $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства:

1) под знаком корня напишем не x, а $7 - 2{,}16x$;

2) не забудем про дополнительный множитель, равный $(-2{,}16)$, это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{7 - 2{,}16x}\right)' = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16x}};$$

$$f'(1) = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7 - 2{,}16}} = -2{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = -\frac{2{,}16}{4{,}4} = -\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1) = -\frac{27}{55}$.

Пример 5. Найти производную сложной функции $y = \cos^4 3x$.

Решение. Здесь $y = u^4$, $u = \cos 3x$. Значит,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^4)' \cdot (\cos 3x)' = 4u^3 \cdot (-3 \sin 3x) = -12 \cos^3 3x \sin 3x. \blacksquare$$

Используя полученное в этом параграфе правило дифференцирования сложной функции, можно обосновать правило дифференцирования обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке X и пусть для нее существует обратная функция $x = g(y)$, дифференцируемая на промежутке $Y = E(f)$. Тогда $f(g(y)) = y$, и, считая y независимой переменной, получаем: $(f(g(y)))' = 1$. С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$(f(g(y)))' = f'(g(y)) \cdot g'(y) = f'(x) \cdot g'(y) = y'_x \cdot x'_y.$$

Таким образом, получаем равенство $1 = y'_x \cdot x'_y$. Значит, зная производную функции $y = f(x)$, можно производную обратной функции $x = g(y)$ найти по формуле

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

(разумеется, при условии, что $f'(x) \neq 0$).

Применим полученную формулу для вывода формул дифференцирования обратных тригонометрических функций. Начнем с функции $y = \arcsin x$. Она является обратной для функции $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит,

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично обстоит дело с функцией $y = \arccos x$. Она является обратной для функции $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$. Значит,

$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Итак, мы получили две новые формулы дифференцирования:

$$\boxed{\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}}$$

Обе они имеют место при $x \in (-1; 1)$. Обе производные не существуют при $x = -1$ и при $x = 1$. Это, кстати, хорошо видно на графиках функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ (см. рис. 111 и 117 в § 21): в указанных точках касательные к графику перпендикулярны оси x, т. е. производная не существует.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Она является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит,

$$(\operatorname{arctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$. Аналогично выводится формула $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$ (сделайте это самостоятельно).

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1 + x^2};\\ (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}}$$

Пример 6. Найти скорость изменения функции $y = \arcsin 3x + \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$.

Решение. Положим, $f(x) = \arcsin 3x + \operatorname{arctg} x$. Нам нужно вычислить $f'(0)$. Сначала найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = (\arcsin 3x + \operatorname{arctg} x)' = (\arcsin 3x)' + (\operatorname{arctg} x)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (3x)^2}} \cdot 3 + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Значит, $f'(0) = 3 + 1 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 7. Найти производную функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. $y' = (\arcsin(\sin x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x)^2}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.

Если $\cos x > 0$, то $y' = 1$; если $\cos x < 0$, то $y' = -1$; если же $\cos x = 0$, то производная не существует. Это хорошо читается по графику функции $y = \arcsin(\sin x)$, который мы построили в § 21 (см. рис. 116). ■

§ 43. Уравнение касательной к графику функции

В § 40 говорилось о том, что если точка $M(a; f(a))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ и если в этой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Мы этим уже несколько раз пользовались. Например, в § 41 было установлено, что график функции $y = \sin x$ (синусоида) в начале координат образует с осью абсцисс угол 45° (точнее, касательная к графику в начале координат составляет с положительным направлением оси x угол 45°), а в примере 5 § 41 были найдены точки на графике заданной функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс. В примере 2 § 41 было составлено уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ (точнее, в точке (1; 1), но чаще указывают только значение абсциссы, полагая, что если значение абсциссы известно, то значение ординаты можно найти из уравнения $y = f(x)$). В этом параграфе мы выработаем алгоритм составления уравнения касательной к графику любой функции.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(a;\ f(a))$; пусть известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: известно, что $k = f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a;\ f(a))$. Это значит, что если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство $f(a) = ka + m$, т. е. $m = f(a) - ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой:

$$y = kx + m;$$
$$y = kx + (f(a) - ka);$$
$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

Нами получено уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Если, скажем, $f(x) = x^2$ и $x = 1$ (т. е. $a = 1$), то $f(a) = f(1) = 1^2 = 1$; $f'(x) = 2x$, значит, $f'(a) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = 2$, получим: $y = 1 + 2(x - 1)$, т. е. $y = 2x - 1$.

Сравните этот результат с тем, что был получен в примере 2 § 41. Естественно, получилось то же самое.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в начале координат. Имеем: $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, значит, $f'(0) = 1$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$, получим: $y = x$.

Именно поэтому мы и провели тангенсоиду в § 20 через начало координат под углом 45° к оси абсцисс.

Решая эти достаточно простые примеры, мы фактически пользовались определенным алгоритмом, который заложен в формуле (1). Сделаем этот алгоритм явным.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) $a = 1$.

2) $f(a) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$.

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (1). Получим:

$$y = 1 - (x - 1); \quad y = 2 - x.$$

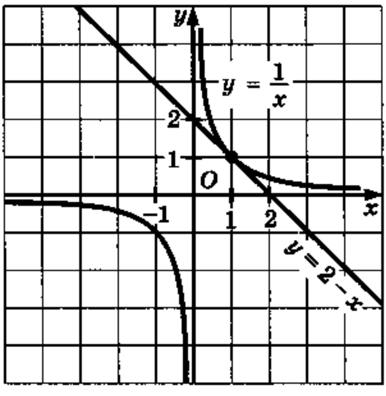


Рис. 217

На рисунке 217 изображена гипербола $y = \frac{1}{x}$, построена прямая $y = 2 - x$. Чертеж подтверждает приведенные выкладки: прямая $y = 2 - x$ касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2 - x$.

Пример 2. К графику функции $y = \frac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x - 5$.

Р е ш е н и е. Уточним формулировку задачи. Требование «провести касательную» обычно означает «составить уравнение касательной». Это логично, ведь если составлено уравнение касательной, то не будет затруднений с построением на координатной плоскости прямой по ее уравнению.

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Но, в отличие от предыдущего примера, здесь имеется неясность: не указана явно абсцисса точки касания.

Начнем рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y = 4x - 5$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой: $k_{\text{кас}} = 4$. Но $k_{\text{кас}} = f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a) = 4$.

Имеем: $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$; $f'(a) = a^2$.

Из уравнения $f'(a) = 4$, т. е. $a^2 = 4$, находим: $a_1 = 2$, $a_2 = -2$. Значит, имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи: одна в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой -2.

Теперь можно действовать по алгоритму.

1) $a_1 = 2$, $a_2 = -2$.

2) $f(a_1) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $f(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

3) $f'(a_1) = f'(a_2) = 4$.

4) Подставив значения $a_1 = 2$, $f(a_1) = \frac{8}{3}$, $f'(a_1) = 4$ в формулу (1), получим: $y = \frac{8}{3} + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - \frac{16}{3}$.

Подставив значения $a_2 = -2$, $f(a_2) = -\frac{8}{3}$, $f'(a_2) = 4$ в формулу (1), получим: $y = -\frac{8}{3} + 4(x + 2)$, т. е. $y = 4x + \frac{16}{3}$.

Ответ: $y = 4x - \frac{16}{3}$; $y = 4x + \frac{16}{3}$.

П р и м е р 3. Из точки (0; 1) провести касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \sqrt{x}$. Заметим, что и здесь, как в примере 2, не указана явно абсцисса точки касания. Тем не менее действуем по алгоритму.

1) Пусть $x = a$ — абсцисса точки касания; ясно, что $a > 0$.

2) $f(a) = \sqrt{a}$.

3) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4) Подставив значения a, $f(a) = \sqrt{a}$, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ в формулу (1), получим:

$$y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a);$$

$$y = \frac{x}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2}. \qquad (2)$$

По условию касательная проходит через точку (0; 1). Подставив в уравнение (2) значения $x = 0$, $y = 1$, получим:

$$1 = \frac{\sqrt{a}}{2};\ \sqrt{a} = 2;\ a = 4.$$

Как видите, в этом примере только на четвертом шаге алгоритма нам удалось найти абсциссу точки касания. Подставив значение $a = 4$ в уравнение (2), получим:

$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

На рисунке 218 представлена геометрическая иллюстрация: построен график функции $y = \sqrt{x}$, проведена прямая $y = \frac{x}{4} + 1$, выделена точка касания (4; 2).

Ответ: $y = \frac{x}{4} + 1$.

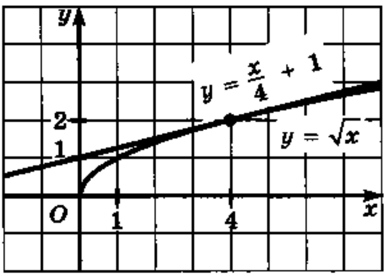


Рис. 218

В § 40 мы отметили, что для функции $y = f(x)$, имеющей производную в фиксированной точке x, справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

или, подробнее,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Для удобства дальнейших рассуждений изменим обозначения:

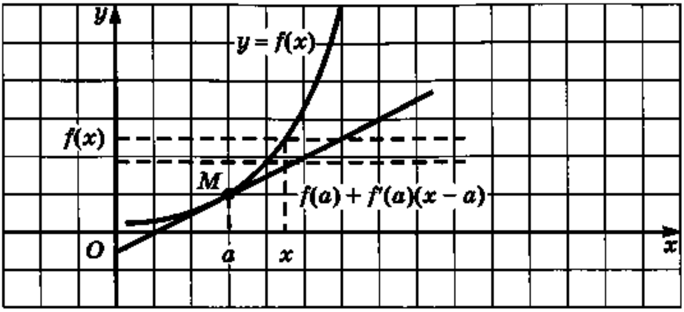


Рис. 219

вместо x будем писать a, вместо $x + \Delta x$ будем писать x и, соответственно, вместо Δx будем писать $x - a$. Тогда написанное выше приближенное равенство примет вид

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)\,(x - a),$$

или

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a).} \qquad (3)$$

А теперь взгляните на рисунок 219. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке $M(a;\, f(a))$. Отмечена точка x на оси абсцисс близко от a. Ясно, что $f(x)$ — ордината графика функции в указанной точке x. Что же такое $f(a) + f'(a)\,(x - a)$? Это ордината касательной, соответствующая той же точке x, — см. формулу (1). В чем же смысл приближенного равенства (3)? В том, что в качестве приближенного значения функции в точке x берут значение ординаты касательной в той же точке.

Пример 4. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Решение. Речь идет о нахождении значения функции $y = x^7$ в точке $x = 1{,}02$. Воспользуемся формулой (3), учитывая, что в данном примере $f(x) = x^7$, $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1$; $x = 1{,}02$, $f'(x) = 7x^6$, и, следовательно, $f'(a) = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$.

В итоге получаем:

$$1{,}02^7 \approx 1 + 7 \cdot 0{,}02, \text{ т. е. } 1{,}02^7 \approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим:

$$1{,}02^7 = 1{,}148685667\ldots\,.$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7 \approx 1{,}14$.

§ 44. Применение производной для исследования функций

1. Исследование функций на монотонность

На рисунке 220 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x острый угол, а значит, у обеих прямых положительный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_2) > 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *возрастающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \geqslant 0.$$

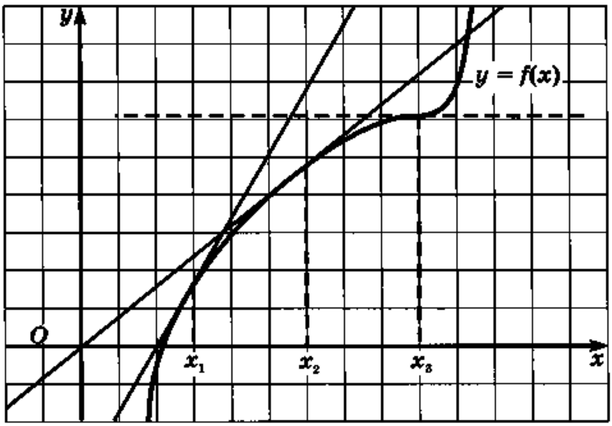


Рис. 220

На рисунке 221 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x тупой угол, а значит, у обеих прямых отрицательный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) < 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \leqslant 0.$$

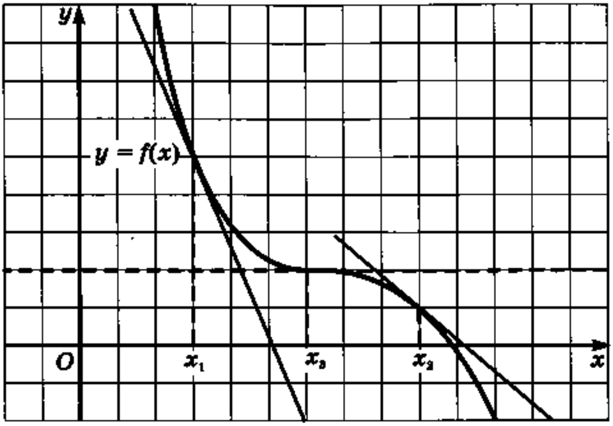


Рис. 221

Эти рассуждения показывают, что между характером монотонности функции и знаком ее производной есть определенная связь: *если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.*

Для практики гораздо важнее то, что верны и обратные утверждения, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, во избежание недоразумений, берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определенной на отрезке $[a; b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании и о значении производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. В определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Теорема 1. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.***

Теорема 2. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.***

Доказательства этих теорем обычно проводят в курсе высшей математики. Мы ограничимся проведенными выше рассуждениями «на пальцах» и для большей убедительности дадим еще физическое истолкование сформулированных теорем.

Пусть по прямой движется материальная точка, $s = s(t)$ — закон движения. Если скорость все время положительна, то точка постоянно удаляется от начала отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ возрастает. Если же скорость все время отрицательна, то точка постоянно приближается к началу отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения была положительна, затем в какой-то отдельный момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущееся тело в указанный момент времени как бы притормаживает, а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает. А что такое скорость? Это производная пути по времени. Значит, от знака производной (скорости) зависит характер монотонности функции — в данном случае функции $s = s(t)$. Об этом как раз и говорят обе сформулированные теоремы.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 5x^4 + 6x^2.$$

Очевидно, что при всех x выполняется неравенство $5x^4 + 6x^2 \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$. Значит, по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой. ■

Пример 2. а) Доказать, что функция $y = 5\cos x + \sin 4x - 10x$ убывает на всей числовой прямой;

б) решить уравнение $y = 5\cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5$.

Решение. а) Найдем производную заданной функции:

$$y' = -5\sin x + 4\cos 4x - 10.$$

Полученное выражение всегда отрицательно. В самом деле, для всех значений x выполняются неравенства: $-5\sin x \leqslant 5$ и $4\cos 4x \leqslant 4$. Сложив их, получим: $-5\sin x + 4\cos 4x \leqslant 9$.

Значит, $-5\sin x + 4\cos 4x - 10 \leqslant -1$.

Тем более $-5\sin x + 4\cos 4x - 10 < 0$. Это неравенство выполняется при всех значениях x. Значит, по теореме 2, функция убывает на всей числовой прямой.

б) Рассмотрим уравнение

$$5\cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5.$$

Как было установлено только что, $y = 5\cos x + \sin 4x - 10x$ — убывающая функция. В то же время $y = x^3 + 5$ — возрастающая функция. Имеет место следующее утверждение: *если одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один* (рис. 222 наглядно иллюстрирует это утверждение; доказательство было проведено в курсе алгебры 9-го класса — см. наш учебник «Алгебра–9», § 12). Корень заданного уравнения подобрать нетрудно: $x = 0$ (при этом значении уравнение обращается в верное числовое равенство $5 = 5$).

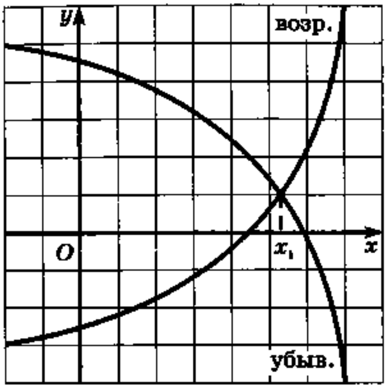


Рис. 222

Итак, $x = 0$ — единственный корень заданного уравнения. ■

Пример 3. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких — убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

На рисунке 223 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на открытом луче $(-\infty; -1)$ производная положительна, на интервале $(-1; 0)$ — отрицательна, на открытом луче $(0; +\infty)$ — положительна. Значит, на первом из указанных промежутков функция возрастает, на втором — убывает, на третьем — возрастает.

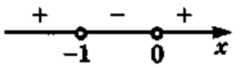


Рис. 223

Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Таким образом, заданная функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 0]$.

б) Графики функций строят «по точкам». Для этого надо составить таблицу значений функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности $x = -1$ и $x = 0$ и еще несколько значений:

x	-1	0	1	-2
y	0	-1	4	-5

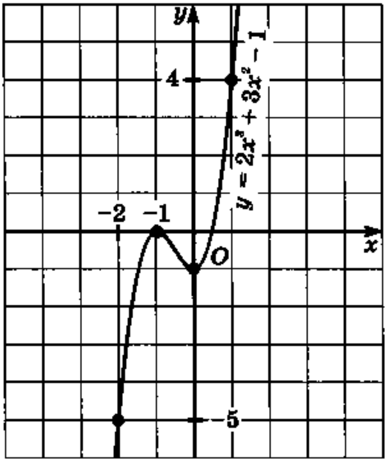


Рис. 224

Отметим эти точки на координатной плоскости. Учтем найденные в пункте а) промежутки возрастания и убывания функции, а также то, что в точках $x = -1$ и $x = 0$ производная функции равна нулю, т. е. касательная к графику функции в указанных точках параллельна оси абсцисс. Более того, в точке $(-1; 0)$ она даже совпадает с осью абсцисс. Учтем, наконец, то, что функция непрерывна, т. е. ее графиком является сплошная линия. График заданной функции изображен на рисунке 224. ■

Завершая рассуждения об исследовании функций на монотонность, обратим внимание на одно обстоятельство. Мы говорили, что если на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X; если же на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке. А что будет, если на всем промежутке выполняется тождество $f'(x) = 0$? Видимо, функция не должна ни возрастать, ни убывать. Что же это за функция? Ответ очевиден — это постоянная функция $y = C$ (буква C — первая буква слова *constanta*, что означает «постоянная»). Ниже (см. пункт 3) мы об этом еще поговорим.

2. Отыскание точек экстремума

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (рис. 224). На графике есть две уникальные точки, определяющие вид графика, — это точки $(-1; 0)$ и $(0; -1)$. В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции (слева от точки $x = -1$ функция возрастает, справа от нее, но только до точки $x = 0$, функция убывает; слева от точки $x = 0$ функция убывает, справа от нее — возрастает);

2) касательная к графику функции параллельна оси x, т. е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) $f(-1)$ — наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Точно так же $f(0)$ — наименьшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = 0$. Напомним терминологию (см. § 8): $x = -1$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума функции; общее название — точки экстремума.

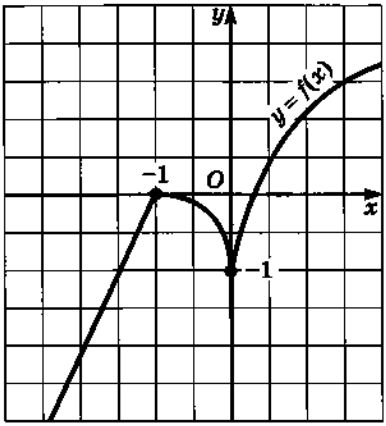


Рис. 225

А теперь рассмотрим рисунок 225, где изображен график другой функции. Не правда ли, он похож на предыдущий график? На нем те же две уникальные точки, но одна из указанных выше трех особенностей этих точек изменилась: нельзя сказать, что касательные к графику в этих точках параллельны оси x. В точке $x = -1$ касательная вообще не существует, а в точке $x = 0$ она перпендикулярна оси x (точнее, она совпадает с осью y).

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос мы сможем найти, еще раз проанализировав графические модели, представленные на рисунках 224 и 225.

Обратите внимание: для функции, график которой изображен на рисунке 224, в обеих точках экстремума производная обращается в нуль. А для функции, график которой изображен на рисунке 225, в обеих точках экстремума производная не существует. Это не случайно, поскольку, как доказано в курсе математического анализа, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. ***Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.***

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, — *критическими*.

Пример 4. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Решение. Известно, что графиком заданной квадратичной функции является парабола, причем ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. Но в таком случае вершина параболы является точкой минимума функции, касательная к параболе в ее вершине параллельна оси x, значит, в вершине параболы должно выполняться условие $y' = 0$.

Имеем: $y' = (2x^2 - 6x + 3)' = 4x - 6$.

Приравняв производную нулю, получим:

$$4x - 6 = 0; \quad x = 1{,}5.$$

Подставив найденное значение x в уравнение параболы, получим:

$$y = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 3 = -1{,}5.$$

Итак, вершиной параболы служит точка $(1{,}5; -1{,}5)$, а осью параболы — прямая $x = 1{,}5$ (рис. 226). В качестве контрольных точек удобно взять точку $(0; 3)$ и симметричную ей относительно оси параболы точку $(3; 3)$. На рисунке 227 по найденным трем точкам построена парабола — график заданной квадратичной функции. ■

Помните ли вы, как строили график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в 8—9-м классах? Практически так же, только ось параболы находили не с помощью производной, а по формуле $x = -\frac{b}{2a}$, которую приходилось запоминать. Решение, показанное в примере 4, освобождает нас от необходимости помнить эту формулу. Чтобы найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ или уравнение ее оси симметрии, достаточно приравнять нулю производную квадратичной функции.

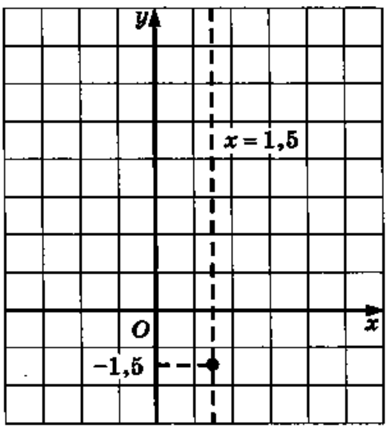


Рис. 226

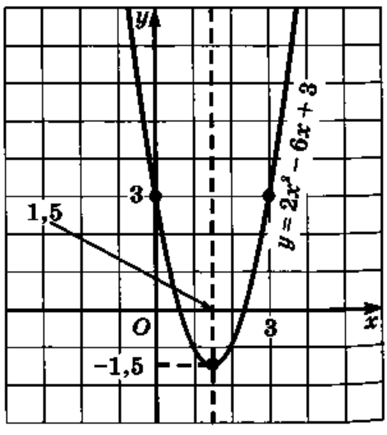


Рис. 227

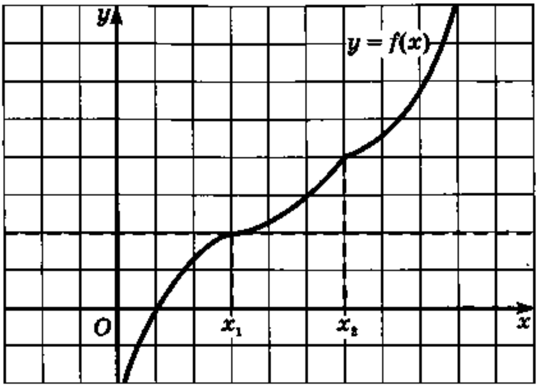


Рис. 228

А теперь вернемся к теореме 3, в которой говорится, что если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $x = x_0$ — стационарная или критическая точка функции. Возникает естественный вопрос: верна ли обратная теорема, т. е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Отвечаем: нет, неверно. Посмотрите на рисунок 228, где изображен график возрастающей функции, не имеющей точек экстремума. У этой функции есть стационарная точка $x = x_1$, в которой производная обращается в нуль (в этой точке график функции имеет касательную, параллельную оси x), но это не точка экстремума, а *точка перегиба*, и есть критическая точка $x = x_2$, в которой производная не существует, но это также не точка экстремума, а *точка излома графика*. Поэтому скажем так: теорема 3 дает только *необходимое условие экстремума* (справедлива прямая теорема), но оно не является *достаточным условием* (обратная теорема не выполняется).

А как же быть с достаточным условием? Как узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 224, 225, 227 и 228.

Замечаем, что при переходе через точку максимума (речь идет о точке $x = -1$ на рисунках 224 и 225) изменяется характер монотонности функции: слева от точки максимума функция возрастает, справа — убывает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки максимума производная положительна, справа — отрицательна.

Замечаем, что при переходе через точку минимума (речь идет о точке $x = 0$ на рисунках 224 и 225 и о точке $x = 1{,}5$ на рисунке 227) также изменяется характер монотонности функции: слева от точки минимума функция убывает, справа — возрастает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки минимума производная отрицательна, справа — положительна.

Если же и слева и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией, график которой изображен на рисунке 228: и слева и справа от стационарной точки x_1 и от критической точки x_2 производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством — строгие доказательства проводятся в курсе математического анализа) справедливости следующей теоремы.

Теорема 4 (достаточные условия экстремума). ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:***

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Пример 5. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Найдем производную данной функции:

$$y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$
$$y' = 12x(x^2 - 4x + 4);$$
$$y' = 12x(x - 2)^2.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$ — это две стационарные точки заданной функции. На рисунке 229 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на промежутке $(-\infty; 0)$ производная отрицательна, на промежутке $(0; 2)$ — положительна, на промежутке $(2; +\infty)$ — положительна. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, а $x = 2$ точкой экстремума не является. На луче $(-\infty; 0]$ функция убывает, на луче $[0; +\infty)$ — возрастает.

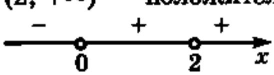


Рис. 229

В точке минимума $x = 0$ имеем: $y = -11$, значит, $y_{min} = -11$.

б) Чтобы построить график функции, нужно знать особо важные точки графика. К таковым относятся:

— найденная точка минимума $(0; -11)$;

— стационарная точка $x = 2$; в этой точке:

$$y = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 11 = 5;$$

— точки пересечения графика с осями координат; в данном примере это уже найденная точка $(0; -11)$ — точка пересечения графика с осью y. Кроме того, можно заметить, что $x = 1$ — корень уравнения $3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11 = 0$, т. е. $y = 0$ при $x = 1$. Значит, найдена точка пересечения графика с осью x — это точка $(1; 0)$.

Итак, мы имеем точку минимума $(0; -11)$, точку пересечения графика с осью x — точку $(1; 0)$ и стационарную точку $(2; 5)$. В точке $(2; 5)$ касательная к графику функции горизонтальна, но это не точка экстремума, а точка перегиба.

График функции схематически изображен на рисунке 230. Заметим, что есть еще одна точка пересечения графика с осью абсцисс, но найти ее нам не удалось. ■

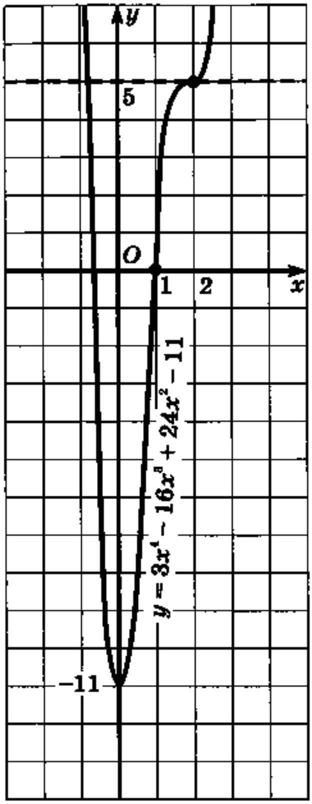


Рис. 230

Завершая этот пункт, заметим, что мы фактически выработали

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. Опираясь на теоремы 1, 2 и 4, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, то также можно пользоваться этим алгоритмом, но с одним добавлением: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 6. Исследовать функцию $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение. Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{(x^4 + 16)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^4 + 16)}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 16)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x^3}.$$

2) Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = -2$ — это стационарные точки. Производная не существует в точке $x = 0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

3) Отметим точки -2, 0 и 2 на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 231).

4) Делаем выводы: на луче $(-\infty; -2]$ функция убывает, на полуинтервале $[-2; 0)$ функция возрастает, на полуинтервале $(0; 2]$ функция убывает, на луче $[2; +\infty)$ функция возрастает.

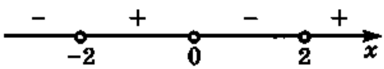


Рис. 231

Далее, $x = -2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$ (подставили значение $x = -2$ в формулу $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$).

Аналогично устанавливаем, что и $x = 2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$. ■

3. Применение производной для доказательства тождеств и неравенств

Доказательство тождеств с помощью производной основано на следующей теореме (приведем ее без доказательства).

Теорема 5 (условие постоянства функции). ***Для того чтобы непрерывная функция $y = f(x)$ была постоянна на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы во всех внутренних точках промежутка производная функции была равна нулю.***

Пример 7. Доказать тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, и найдем ее производную: $f'(x) = (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. Итак, $f'(x) = 0$ в любой точке x, значит, функция постоянна на всей числовой прямой: $f(x) = C$. Чтобы найти значение константы C, вычислим $f(x)$ в какой-нибудь точке x. Например, $f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Итак, $f(x) = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать. ■

Пример 8. Доказать, что при $0 < x < 0{,}5$ справедливо неравенство

$$2x + \frac{1}{x^2} > 5.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$, и найдем ее производную:

$$f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)' = (2x + x^{-2})' = 2 - 2x^{-3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}.$$

Замечаем, что $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$, значит, в частности, функция убывает на полуинтервале $(0; 0{,}5]$. Поэтому для любого x из интервала $(0; 0{,}5)$ справедливо неравенство $f(x) > f(0{,}5)$. Но $f(0{,}5) = 5$, значит, на интервале $(0; 0{,}5)$ выполняется неравенство $f(x) > 5$, что и требовалось доказать. ■

Пример 9. Доказать, что если $\alpha < \beta$, то $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = x + \cos x$, и найдем ее производную: $f'(x) = 1 - \sin x$. Здесь $f'(x) \geqslant 0$ при любом значении x, причем $f'(x) = 0$ не на сплошном промежутке, а лишь в точках вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Значит, функция возрастает на всей числовой прямой, а потому, из $\alpha < \beta$ следует $f(\alpha) < f(\beta)$, т. е. $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$. ■

§ 45. Построение графиков функций

За годы изучения курса алгебры в школе вы накопили достаточно большой опыт построения графиков функций. В основном строили графики «по точкам»: для заданной функции $y = f(x)$ находили контрольные точки $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$, $(x_3; f(x_3))$,

$(x_4; f(x_4))$ и т. д., отмечали их на координатной плоскости и, полагаясь на интуицию, соединяли найденные точки плавной кривой. Как выбирались эти контрольные точки? Иногда обдуманно, например, искали вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$ или точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат. Но чаще выбор контрольных точек был случайным, «по наитию».

Графики любых функций строят по точкам. Но если вид графика заранее неизвестен, эти точки надо выбирать со смыслом — выделять особо важные точки графика, которые определяют его вид. Об этом мы уже говорили выше, когда строили графики функций $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (см. рис. 224) и $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ (см. рис. 230). К особо важным точкам графика функции $y = f(x)$ относят:

— стационарные и критические точки;

— точки экстремума;

— точки пересечения графика с осью x (*нули функции*) и с осью y;

— точки разрыва функции.

Если речь идет о построении графика незнакомой функции, когда заранее невозможно представить вид графика, полезно применять определенную схему исследования свойств функции, которая помогает составить представление о ее графике. Когда такое представление сложится, можно приступать к построению графика по точкам.

В курсе математического анализа разработана универсальная схема исследования свойств функции и построения графика функции, позволяющая строить весьма сложные графики. Для наших нужд будут достаточны упрощенные варианты указанной схемы.

1) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек. Именно так мы действовали до сих пор, когда строили графики следующих функций:

$$y = 2x^2 - 6x + 3 \quad \text{(рис. 227)};$$
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad \text{(рис. 224)};$$
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11 \quad \text{(рис. 230)}.$$

2) Если функция $y = f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции (если область не задана) и с указания ее точек разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на четность, поскольку графики четной или нечетной функций обладают симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geqslant 0$, а затем дорисовать симметричную ветвь.

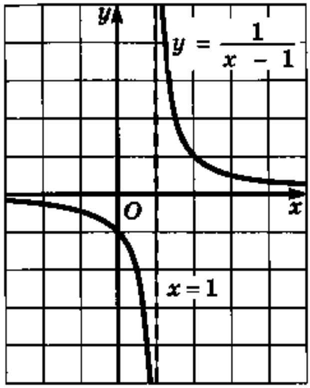


Рис. 232

4) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то, как известно (см. § 39), прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Асимптоту следует строить на координатной плоскости, она дает своеобразный ориентир для графика.

5) Горизонтальная асимптота характеризуется условием: если $x \to \infty$, то $y \to b$. При условии: если $x \to a$, то $y \to \infty$, — прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Например, для функции $y = \frac{1}{x-1}$ — ее график (гипербола) изображен на рисунке 232 — вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$. Если $x \to 1$, то знаменатель данной дроби становится (по модулю) все меньше и меньше, точнее: $(x - 1) \to 0$; соответственно сама дробь становится (по модулю) все больше и больше, точнее: $\frac{1}{x-1} \to \infty$.

Самый распространенный признак существования вертикальной асимптоты заключается в следующем:

если $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *и при* $x = a$ *знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то* $x = a$ *— вертикальная асимптота графика функции* $y = f(x)$.

В следующих примерах учтем все вышеуказанные обстоятельства и построим графики функций, придерживаясь определенной схемы.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение 1. Введем обозначение: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Найдем область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Значит, заданная функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, а потому начнем с построения ветви графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Имеем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда $x \geqslant 0$, выберем значение $x = 1$. При $x < 1$ имеем: $y' > 0$; при $x > 1$ имеем: $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

На промежутке $[0; 1]$ функция возрастает, на промежутке $[1; +\infty)$ функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума и что $y = 0$ — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 233). Добавив ветвь, симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 234). ■

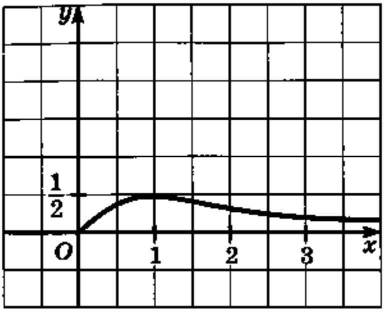


Рис. 233

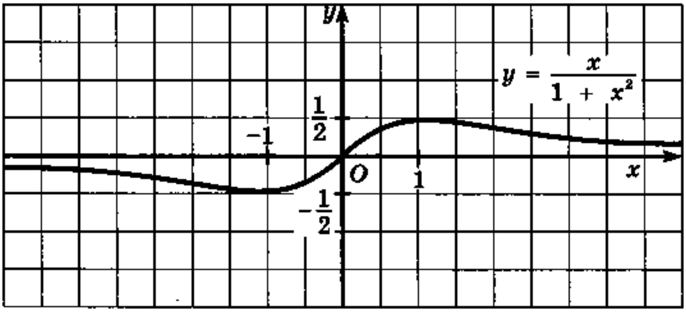


Рис. 234

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Решение. 1. Введем обозначение: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x = 1$, $x = -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x).$$

Значит, заданная функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби

обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)' \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная существует всюду в области определения функции, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем: $y' > 0$; при $x > 0$ имеем: $y' < 0$. Значит, $x = 0$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1$.

При $x > 0$ имеем: $y' < 0$; но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0; 1)$ функция убывает, на промежутке $(1; +\infty)$ функция также убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{15}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, учтя при этом, что $(0; -1)$ — точка максимума, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота, что $x = 1$ — вертикальная асимптота, построим ветви искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 235). Добавив ветви, симметричные построенным относительно оси ординат, получим весь график (рис. 236). ■

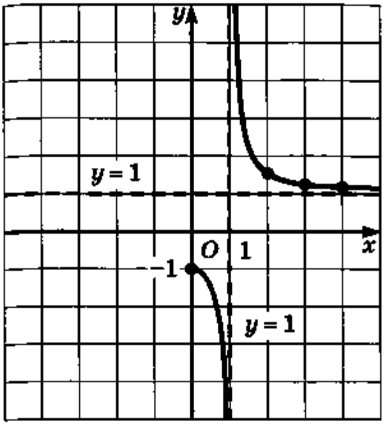


Рис. 235

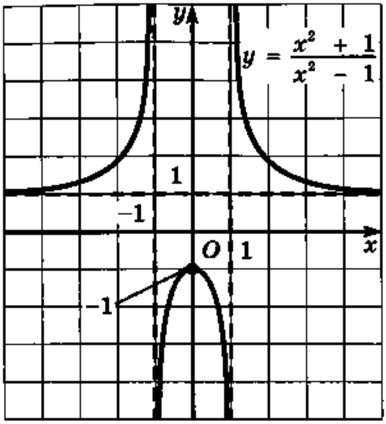


Рис. 236

§ 46. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

1. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Вы уже накопили некоторый опыт нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы использовали для этого график функции. Пусть, например, дана функция $y = \frac{x}{1+x^2}$. Построив ее график (см. рис. 234), легко сделать вывод о том, что $y_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$, а $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$.

В некоторых случаях можно найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. Например, для функции $y = \sqrt{9-x^2}$ можно рассуждать так: ясно, что $\sqrt{9-x^2} \leqslant 3$, значит, $y_{\text{наиб}} = 3$ (это значение достигается функцией в точке $x = 0$). С другой стороны, ясно, что $\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$, значит, $y_{\text{наим}} = 0$ (это значение достигается функцией при $x = 3$ или при $x = -3$).

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ — несколько графиков таких функций представлено на рисунках 237—239. Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам.

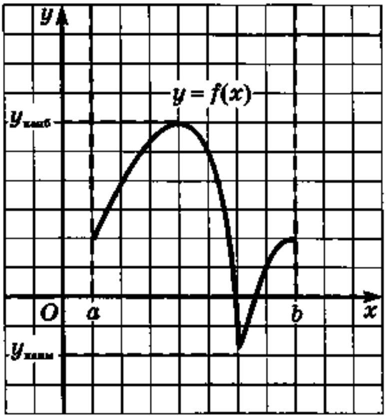


Рис. 237

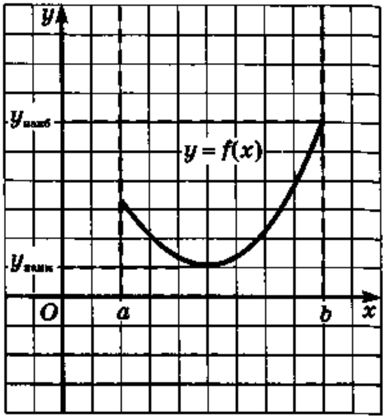


Рис. 238

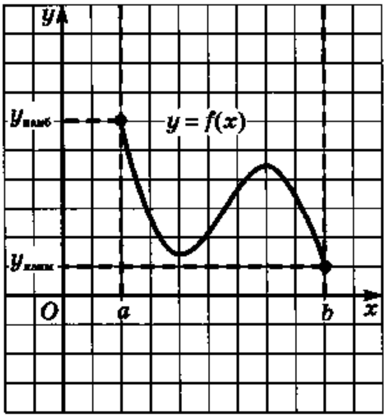


Рис. 239

1. ***Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.***

Это весьма солидная теорема математического анализа, доказательство ее требует достаточной продвинутости в изучении этого курса.

2. ***Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.***

Здесь возможны варианты — некоторые из них представлены на рисунках 237—239. Смотрите: на рисунке 237 и наибольшее и наименьшее значения достигаются внутри отрезка. На рисунке 238 наименьшее значение достигается внутри отрезка, а наибольшее — в концевой точке. На рисунке 239 и наибольшее, и наименьшее значения достигаются в концевых точках.

3. ***Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.***

В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае наибольшее (или наименьшее) значение функции одновременно является экстремумом, а экстремум достигается только в стационарной или критической точке.

Подводя итог сказанному, получаем следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Алгоритм, как видите, сравнительно простой, для его иллюстрации достаточно одного примера. Мы приводим два примера, из которых второй — для тех, кому интересны математические «изюминки».

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

а) на отрезке $[-4; 6]$; в) на отрезке $[-2; 2]$.

б) на отрезке $[0; 6]$;

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет, а стационарные найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от условий задачи.

а) Обе стационарные точки (и $x = -3$, и $x = 5$) принадлежат заданному отрезку $[-4; 6]$. Значит, на третьем шаге алгоритма мы составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом, $y_{наим} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{наиб} = 82$ (достигается в точке $x = -3$).

б) Отрезку [0; 6] принадлежит лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x = 5$. Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции:

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{\text{наим}} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (достигается в точке $x = 0$).

в) Отрезку $[-2; 2]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек, значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках: если $x = -2$, то $y = 71$; если $x = 2$, то $y = -93$.

Таким образом, в этом случае $y_{\text{наим}} = -93$, $y_{\text{наиб}} = 71$. ■

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$ на отрезке [0; 2].

Решение. Если $x \geqslant 1$, то $|x - 1| = x - 1$, и функция принимает вид $y = 5x^3 - x^2 + x$; если $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, и функция принимает вид $y = 5x^3 + x^2 - x$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 + x, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 5x^3 + x^2 - x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

1) Вычисляя $f'(x)$, мы должны учесть, что при $x > 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 - x^2 + x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$.

При $x < 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 + x^2 - x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$.

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, это критическая точка функции.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x + 1, \text{ если } x > 1; \\ 15x^2 + 2x - 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

2) Критическую точку мы уже нашли — это точка $x = 1$. Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.

Если $x > 1$, то $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$; уравнение $15x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Если $x < 1$, то $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$; из уравнения $15x^2 + 2x - 1 = 0$ находим: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Из этих двух значений заданному отрезку [0; 2] принадлежит только точка $x = \frac{1}{5}$.

3) Составим таблицу значений функции $y = 5x^3 - x|x-1|$, включив в нее точки $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{1}{5}$ — концы заданного отрезка и лежащие внутри отрезка критическую и стационарную точки:

x	0	$\frac{1}{5}$	1	2
y	0	$-\frac{3}{25}$	5	38

Из имеющихся в таблице значений наименьшим является $-\frac{3}{25}$, наибольшим — 38.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{25}$; $y_{\text{наиб}} = 38$.

А как быть, если речь идет о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции, непрерывной на незамкнутом промежутке, например на интервале? Можно построить график функции и снять информацию с полученной графической модели. Но чаще оказывается более удобным использовать следующую теорему.

Теорема. ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:***

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$.

На рисунках 240 и 241 приведены соответствующие геометрические иллюстрации.

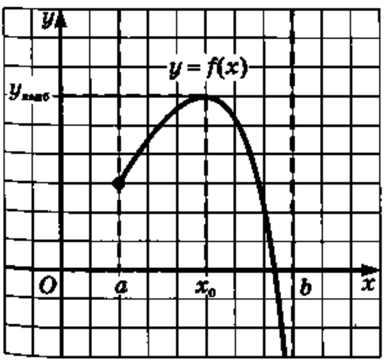


Рис. 240

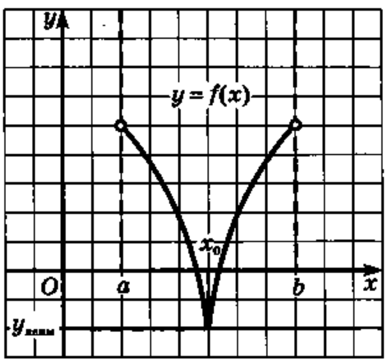


Рис. 241

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Решение. $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ (см. пример 1 из § 45).

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Заданному лучу $[0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = 1$. При $x < 1$ имеем: $y' > 0$, а при $x > 1$ имеем: $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$.

Поскольку $x = 1$ — единственная стационарная точка функции на заданном промежутке, причем точка максимума, то, по теореме,

$$y_{\text{наиб}} = y_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Ранее (см. рис. 233) был построен график функции на заданном луче — он хорошо иллюстрирует полученный результат.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$.

Пример 4. Доказать, что для любого $x \in R$ справедливо неравенство

$$x^5 + (1-x)^5 \geqslant \frac{1}{16}.$$

Решение. Пусть $f(x) = x^5 + (1-x)^5$; исследуем функцию $y = f(x)$ на экстремум:

$$f'(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4 = 5(x^2 - (1-x)^2)(x^2 + (1-x)^2) =$$
$$= 5(2x-1)(2x^2 - 2x + 1);$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0{,}5$. Других стационарных или критических точек у функции нет (уравнение $2x^2 - 2x + 1$ не имеет действительных корней). Если $x < 0{,}5$, то $f'(x) < 0$, а если $x > 0{,}5$, то $f'(x) > 0$; значит, $x = 0{,}5$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума. Тогда, согласно теореме этого параграфа, $f(0{,}5)$ — наименьшее значение функции. Но $f(0{,}5) = 0{,}5^5 + (1-0{,}5)^5 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$. Значит, для любого $x \in R$ справедливо неравенство $f(x) \geqslant \frac{1}{16}$, т. е. $x^5 + (1-x)^5 \geqslant \frac{1}{16}$. ■

2. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин

Российский математик XIX века П. Л. Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д.

Задачи подобного рода носят общее название — *задачи на оптимизацию* (от латинского слова optimum — «наилучший»). В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2) работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретным примерам решения задач на оптимизацию, дадим некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (сокращенно: О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за *независимую переменную* (сокращенно: Н. П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой О. В.

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x. Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим}}$ или $y_{\text{наиб}}$, в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые были даны в пункте 1 данного параграфа.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Пример 5. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее прочность была наибольшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

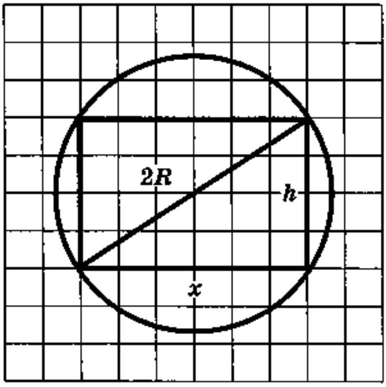


Рис. 242

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим О. В. буквой y.

2) Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Объявим независимой переменной (Н. П.) ширину балки, обозначим ее буквой x. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R (рис. 242), то $0 < x < 2R$ — таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0;\ 2R)$.

3) Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме Пифагора). Значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, т. е. $y = kxh^2$ (где коэффициент k — некоторое положительное число). Значит,

$$y = kx(4R^2 - x^2), \text{ где } x \in (0;\ 2R).$$

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = kx(4R^2 - x^2)$, $x \in (0;\ 2R)$ надо найти $y_{наиб}$.

Имеем:

$$y = 4kR^2x - kx^3;$$
$$y' = 4kR^2 - 3kx^2.$$

Критических точек нет. Найдем стационарные точки. Приравняв производную нулю, получим:

$$4kR^2 - 3kx^2 = 0;$$

$$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Заданному интервалу $(0;\ 2R)$ принадлежит лишь точка x_1, причем $x_1 = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ — точка максимума функции. Значит, по теореме из пункта 1, $y_{\text{наиб}} = f(x_1) = f\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{16kR^3}{3\sqrt{3}}$ (здесь $f(x) = kx(4R^2 - x^2)$).

<u>Третий этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Мы выяснили, что ширина x прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдем высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

Значит, $h = \dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, а потому $\dfrac{h}{x} = \sqrt{2}$.

Ответ: сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

Замечание. Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но, разумеется, они принимают указанное отношение, равным 1,4 (приближенное значение иррационального числа $\sqrt{2}$ как раз равно 1,4).

Пример 6. В степи, на расстоянии 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей на шоссе к поисковой партии точки расположен райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе — со скоростью 10 км/ч?

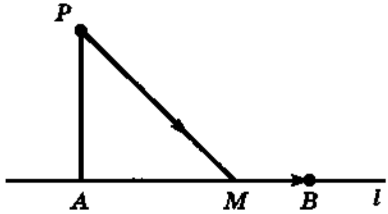


Рис. 243

Решение. <u>Первый этап</u>. *Составление математической модели.*

Сделаем чертеж. На рисунке 243 точка P означает местонахождение поисковой партии, прямая l — шоссе, B — райцентр, $PA \perp l$, $PA = 9$ км, $AB = 15$ км, PMB — маршрут следования курьера, причем положение точки M между A и B пока неизвестно.

1) Оптимизируемая величина — время t движения курьера из P в B; надо найти $t_{\text{наим}}$.

2) Пусть $AM = x$. По смыслу задачи точка M может занять любое положение между A и B, не исключая самих точек A и B. Значит, реальные границы изменения x таковы: $0 \leqslant x \leqslant 15$.

3) Выразим t через x. Имеем: $PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{81 + x^2}$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, значит, время t_1, затраченное на этот путь, выражается формулой $t_1 = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8}$. Далее, $MB = 15 - x$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 10 км/ч, значит, время t_2, затраченное на этот путь, выражается формулой $t_2 = \frac{15 - x}{10}$. Найдем суммарное время t, затраченное на весь путь:

$$t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}.$$

Итак, $t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$, $x \in [0; 15]$.

Это математическая модель задачи.

<u>Второй этап</u>. *Работа с составленной моделью.*

4) Для функции $t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$ надо найти наименьшее значение на отрезке $[0; 15]$.

Находим t':

$$t' = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\sqrt{81 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{10}(-1) = \frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10}.$$

Производная t' существует при всех x. Найдем точки, в которых $t' = 0$. Имеем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0;\ 5x = 4\sqrt{81 + x^2};\ 25x^2 = 16(81 + x^2);$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81;\ x^2 = 16 \cdot 9;\ x = 4 \cdot 3 = 12.$$

Значение $x = 12$ принадлежит отрезку [0; 15].

Составим таблицу значений функции, куда включим значения функции на концах отрезка и в найденной стационарной точке:

x	0	12	15
t	$\frac{105}{40}$	$\frac{87}{40}$	$\frac{5\sqrt{306}}{40}$

Следовательно, $t_{\text{наим}} = \frac{87}{40}$ (поскольку $87 < 5\sqrt{306}$).

<u>Третий этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.*

Так как $t_{\text{наим}}$ достигается при $x = 12$, то велосипедисту надо ехать по такому маршруту PMB, чтобы расстояние между точками A и M по шоссе было равно 12 км. ■

Пример 7. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. <u>Первый этап</u>. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О. В. буквой S.

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н. П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0; +\infty)$.

3) Если h — высота бака, то $V = x^2h$, откуда находим: $h = \frac{V}{x^2}$.

На рисунке 244 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$.

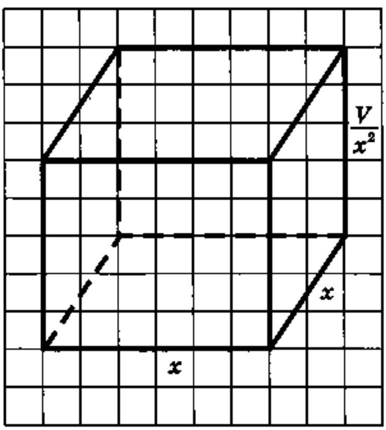


Рис. 244

Значит,

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{V}{x^2} \cdot x = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Итак,

$$S = x^2 + \frac{4V}{x},\ x \in (0; +\infty).$$

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $S = x^2 + \frac{V}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим}}$. Для этого нужна производная функции:

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2};$$

$$S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}.$$

На промежутке $(0; +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = \sqrt[3]{2V}$.

Заметим, что при $x < \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому, согласно теореме из пункта 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$.

ГЛАВА 8 Комбинаторика и вероятность

§ 47. Правило умножения. Перестановки и факториалы

Все мы довольно часто говорим «это невероятно», «более вероятно, что...», «это маловероятно», «можно утверждать со стопроцентной вероятностью, что...» и т. д., когда пытаемся спрогнозировать наступление того или иного события. При этом обычно мы опираемся на интуицию, жизненный опыт, здравый смысл. Но часто такие оценки оказываются недостаточными и бывает важно знать, *на сколько* или *во сколько раз* одно случайное событие вероятнее другого. Иными словами, нужны точные *количественные* оценки, нужно уметь *численно* характеризовать возможность наступления того или иного события. Раздел математики, посвященный исследованию количественных оценок случайных событий, называют *теорией вероятностей*.

Вероятности различных случайных событий в ряде азартных игр (карты, кости...) вычислили французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль. Они использовали метод, который позже был назван *комбинаторным анализом* или, проще, *комбинаторикой*. Сам термин «*комбинаторный*» впервые использовал немецкий философ, математик и дипломат Вильгельм Готфрид Лейбниц в своей «Диссертации о комбинаторном искусстве» (1666). Грубо говоря, *комбинаторика* — это искусство подсчета числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок тех или иных элементов некоторых множеств. Именно с комбинаторики мы и начнем знакомство с элементами теории вероятностей.

Пример 1. Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?

Решение. Первый способ. Выпишем по порядку все числа от 10 до 99 и выберем те, что нам нужны: 10, 12, 14, 20, 22, 24, 40, 42, 44, 50, 52, 54, 90, 92, 94. Всего 15 чисел.

Второй способ. Первой цифрой не может быть 0. Если первая цифра 1, то вторая (четная!) цифра — 0, 2 или 4. Всего 3 варианта.

Если первая цифра 2, то для второй цифры возможны те же 3 варианта. В случаях, когда первая цифра равна 4, 5 или 9, рассуждение повторяется, и в каждом из этих случаев будет по 3 варианта. Всего получается 5 раз по 3, т. е. 15 четных двузначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9.

Третий способ. Для выбора первой цифры есть 5 вариантов: 1, 2, 4, 5 или 9. Для второй цифры есть 3 варианта: 0, 2 или 4. Значит, всего есть $5 \cdot 3 = 15$ вариантов составления нужных нам чисел. ■

Обсудим предложенные способы решения. Первый способ неплох, но тут можно сбиться со счета или что-то пропустить. Кроме того, перспективы поступать так же в более сложных ситуациях (например, с четырехзначными числами) довольно безрадостны. Второй способ, по существу, просто упорядочивает подсчет вариантов в первом способе и в сложных случаях также вряд ли применим. Третий способ наиболее ясен с формальной точки зрения. Непонятно только обоснование: «...Значит, имеются $5 \cdot 3$...» На чем основано это «значит»? Почему 5 и 3 следует именно перемножить, а, например, не сложить? Ответ на эти вопросы фактически дает второй способ решения. В нем как раз и приведено объяснение: $5 \cdot 3$ — это 5 раз по 3.

Чтобы не приводить к каждой задаче два решения — краткое и подробное, поступим так. Сформулируем и докажем общее *правило умножения* и в дальнейшем будем использовать именно его в качестве обоснования подсчета вариантов.

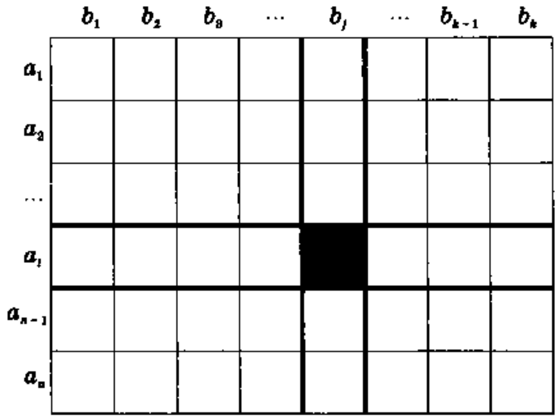
ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

В примере 1 испытание A состоит в выборе первой цифры числа, и у него имеется 5 возможных исходов, а испытание B состоит в выборе второй цифры, и у него имеется 3 возможных исхода. Так как выбор первой цифры независим от выбора второй цифры, то, по правилу умножения, всего получается $5 \cdot 3 = 15$ исходов.

Доказательство правила умножения, по существу, состоит в раскрытии смысла используемых терминов. Исходом проведения двух испытаний — A и B — *по определению*, является пара $(a; b)$, у которой на первом месте стоит какой-то исход испытания A, а на втором месте — какой-то исход испытания B. Независимость испытаний A и B означает, что в такой паре $(a; b)$ возможны абсолютно все комбинации исходов этих испытаний: при любом выборе одной «координаты» a в качестве другой «координаты» b можно выбрать любой исход испытания B.

Для наглядности рассмотрим прямоугольную таблицу, строки которой помечены всеми исходами испытания A, а столбцы — всеми исходами испытания B.



Исход $(a_i; b_j)$ проведения двух испытаний A и B впишем в клетку, стоящую в i-й строке и j-м столбце. Независимость испытаний означает, что все клетки будут заняты. Поэтому клеток в такой таблице столько же, сколько всевозможных исходов независимого проведения испытаний A и B. С другой стороны, число всех клеток равно произведению числа строк на число столбцов, т. е. равно $n \cdot k$. Правило умножения доказано.

Вот как это же рассуждение выглядит в примере 1:

	0	*2*	*4*
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

Всего $5 \cdot 3 = 15$ чисел.

Правило умножения для *двух* независимых испытаний удобно объяснять, используя прямоугольные таблицы. Но если проводятся *три* испытания, то для иллюстрации придется использовать и длину, и высоту, и ширину. На картинке получится прямоугольный параллелепипед, разбитый на кубики. Здесь уже и рисунок, и объяснения выглядят сложнее, поскольку, например, будут невидимые кубики. Еще хуже дело обстоит с четырьмя испытаниями. Окружающее нас пространство всего лишь трехмерно, и для рисунка в этом случае не хватит измерений. Докажем правило умножения для произвольного числа независимых испытаний.

Теорема 1. (Правило умножения для конечного числа испытаний.) ***Число всех возможных исходов независимого проведения n испытаний равно произведению количеств исходов этих испытаний.***

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции (см. § 6). При $n = 2$ утверждение уже доказано (*базис математической индукции*). Предположим, что оно верно для любых k испытаний, и докажем, что тогда оно верно и для любых $(k + 1)$ испытаний $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ (*индукционный шаг*).

Обозначим $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$ количества исходов испытаний $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$. Рассмотрим два испытания — A и B: испытание A состоит в независимом проведении первых испытаний $A_1, A_2, \dots, A_k$, а испытание B совпадает с испытанием A_{k+1}. По индукционному предположению, число исходов испытания A равно произведению $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$, а по правилу умножения для двух испытаний, число исходов независимого проведения испытаний A и B равно произведению $(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k) \cdot m_{k+1}$. Остается заметить, что независимое проведение испытаний A и B — это в точности независимое проведение испытаний $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$.

Итак, утверждение верно для $n = 2$, и из справедливости утверждения для $n = k$ вытекает его справедливость для $n = k + 1$. Значит, по принципу математической индукции утверждение справедливо для любого натурального числа $n \geqslant 2$.

Пример 2. В коридоре три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора (включая случай, когда все лампочки не горят)?

Решение. Пронумеруем лампочки. Первая лампочка может или гореть, или не гореть, т. е. имеются два возможных исхода. Но то же самое относится и ко второй, и к третьей лампочкам. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет *независимо* друг от друга. По правилу умножения получаем, что число всех способов освещения равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. ■

Приведем так называемое *дерево вариантов* для примера 2 (рис. 245). На этом дереве наглядно представлен способ получения всех восьми вариантов освещения.

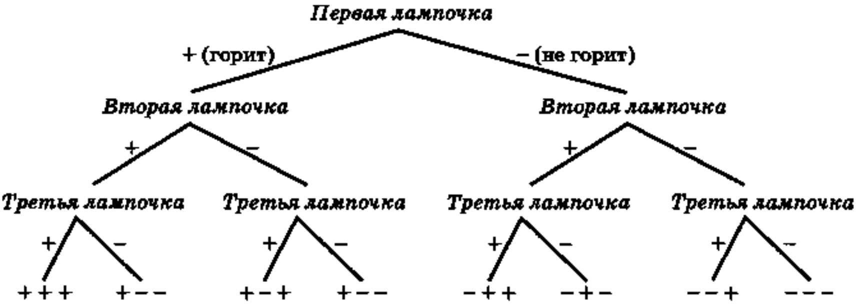


Рис. 245

В рассмотренном примере речь шла фактически о выборе того или иного подмножества данного трехэлементного множества $\{a_1, a_2, a_3\}$. Выбор подмножества $\{a_1, a_3\}$ означает, что горят первая и третья лампочки; выбор пустого подмножества $\varnothing$ означает, что не горит ни одна лампочка; выбор всего множества означает, что горят все лампочки. Оказалось, что у трехэлементного множества $2^3 = 8$ подмножеств. Обобщим этот результат.

Теорема 2. ***У множества, состоящего из n элементов, имеется ровно 2^n различных подмножеств.***

Доказательство. Произвольно занумеруем все элементы данного множества:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}.$$

Будем составлять подмножество A множества $\{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$. Обозначим через X_1 испытание, состоящее в проверке того, принадлежит или не принадлежит элемент x_1 подмножеству $A \subset X$. Аналогично определим испытания $X_2, X_3, \ldots , X_n$. Каждое из испытаний $X_1, X_2, \ldots , X_n$ имеет 2 исхода. В результате их независимого проведения будет составлено подмножество $A \subset X$. Но по правилу умножения имеется $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}} = 2^n$ различных исходов независимого проведения этих n испытаний. Значит, всего имеется 2^n различных подмножеств множества X.

Пример 2 привел нас к теореме о числе всех подмножеств n-элементного множества. И в решении примера, и в доказательстве теоремы мы начинали с произвольной нумерации элементов конечного множества. Но элементы данного множества можно перенумеровать многими способами. Интересно, сколькими способами можно осуществить такую нумерацию? Оказывается, что правило умножения позволяет дать ответ и на этот вопрос. Более того, ответ приводит к крайне важному в математике понятию *факториала*. Сначала рассмотрим пример.

Пример 3. В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение. Ответ оказывается неожиданно большим: почти два года! Объясним его. Для удобства рассуждений пронумеруем стулья: № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6 — и будем считать, что семья (бабушка, дедушка, мама, папа, дочь, сын) будет рассаживаться на стулья поочередно. Нас интересует, сколько всего существует различных способов рассаживания. Предположим, что первой усаживается бабушка. У нее имеется 6 вариантов выбора стула. Вторым садится дедушка и *независимо* выбирает стул из 5 оставшихся. Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из 4 стульев. У папы будет уже 3 варианта, у дочки — 2, ну а сын сядет на единственный незанятый стул. По правилу умножения получаем, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов рассаживания. Таким образом, в «игру с рассаживаниями» семья может играть 720 дней, т. е. почти 2 года. ■

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

По-английски одно из значений слова «factor» — «множитель». Так что *«эн факториал»* примерно переводится как «состоящий из n множителей». Приведем несколько первых значений для $n!$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320

В частности, ответ в примере 3 можно записать в таком виде: 6!. Этот пример приводит нас к весьма важной теореме о числе нумераций конечного множества.

Теорема 3. ***n различных элементов можно занумеровать числами от 1 до n ровно $n!$ способами.***

Доказательство. Проведем независимо n следующих испытаний. Первое состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n - 1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n - 1)$ исходов. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n - 2)$ элементов получит № 3, и т. д. Остается применить правило умножения и получить ответ:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Доказанную теорему часто используют в несколько иной терминологии, опираясь на понятие *перестановки*, которое, в свою очередь, связано с понятием *отображения*.

Определение 2. Если каждому элементу множества X по некоторому правилу ставится в соответствие элемент того же множества, то говорят, что задано **отображение множества X в себя.**

Определение 3. **Перестановкой** конечного множества называют его отображение в себя, при котором различные элементы переходят в различные.

Перечислим, например, все перестановки множества $\{a, b, c\}$ из трех элементов. Используем сначала язык «стрелок», которые описывают отображение множества в себя. Вот какие перестановки получаются — см. рисунок 246, всего $6 = 3!$ перестановок.

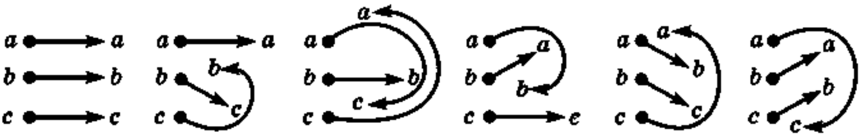


Рис. 246

В виде, приближенном к табличному, эти же перестановки можно записать так:

$$1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, 2) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, 3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, 4) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, 5) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, 6) \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Тут в верхней строке в фиксированном порядке выписаны все элементы множества, а в нижней строке записаны те элементы, которые соответствуют им при конкретной перестановке.

Теорема 4. ***Число всех перестановок n-элементного множества равно n!.***

Доказательство. Мы фактически повторим доказательство теоремы 3. Сначала произвольно пронумеруем элементы данного множества: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Проведем независимо n следующих испытаний. Первое состоит в выборе элемента $f(x_1)$, который при перестановке f будет соответствовать элементу x_1. Это испытание имеет n исходов: ведь x_1 можно отобразить в любой из элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента $f(x_2)$, в который при перестановке перейдет x_2. Так как один элемент $f(x_1)$ из n данных уже выбран, то для выбора $f(x_2)$ остается $(n-1)$ вариантов. Значит, второе испытание имеет $(n-1)$ исходов. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого в один из оставшихся $(n-2)$ элементов отобразится элемент x_3, и т. д. Остается применить правило умножения и получить ответ для числа всех возможных перестановок: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Число перестановок множества из n элементов обозначают P_n (буква P, видимо, ассоциируется с первой буквой английского слова *permute* (*permutation*) — *переставлять* (*перестановка*)). Итак,

$$\boxed{P_n = n!.}$$

Пример 4. Три медведя по одному выбегают из дома, догоняя девочку. Сколькими способами они смогут выбежать?

Решение. Порядок выбегания из дома задает нумерацию трех медведей числами 1, 2, 3. Таких нумераций имеется $3! = 6$. ■

Пример 5. Сколькими способами четыре вора могут по одному разбежаться на все четыре стороны?

Решение. Четыре стороны фиксированы, например юг, север, запад, восток или, для простоты, 1, 2, 3, 4. Порядок разбегания по ним задает нумерацию четырех воров числами 1, 2, 3, 4. Таких нумераций имеется $4! = 24$. ■

Пример 6. Одиннадцать футболистов строятся перед началом матча. Первым — обязательно капитан, вторым — обязательно вратарь, а остальные — случайным образом. Сколько существует способов построения?

Решение. Девять футболистов (все, кроме капитана и вратаря) надо расставить на девять мест — с третьего по одиннадцатое. Всего имеется $9! = 362\,880$ таких перестановок. ■

Пример 7. В 10 «Б» классе в среду 7 уроков: алгебра, геометрия, литература, физкультура, русский язык, английский язык, биология.

а) Сколько можно составить различных вариантов расписания на среду?

б) В скольких вариантах расписания физкультура будет значиться последним уроком?

в) В скольких вариантах расписания естественно-математические и гуманитарные предметы будут идти блоками, разделенными уроком физкультуры?

Решение. а) Каждое возможное расписание задает нумерацию семи названных предметов числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 в соответствии с порядковым номером урока. Таких нумераций имеется $7! = 5040$.

б) Шесть уроков (кроме физкультуры) надо распределить по номерам 1—6. Всего имеется $6! = 720$ вариантов.

в) Физкультуру следует поставить четвертым уроком. Расписание будет составлено, как только мы проведем следующие три независимых испытания. Во-первых, выбор блока (первый — третий или пятый — седьмой уроки) для гуманитарных предметов. Тут возможны два исхода: поставить этот блок до урока физкультуры или после него. Алгебра, геометрия и биология автоматически окажутся в другом блоке. Во-вторых, выбор порядка гуманитарных предметов в уже выбранном блоке: $P_3 = 3! = 6$ различных перестановок. В-третьих, следует посчитать и все перестановки для естественно-математических предметов — их тоже 6. По правилу умножения получаем: $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

Ответ: а) 5040; б) 720; в) 72.

§ 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты

В предыдущем параграфе решения почти всех задач сводились к выбору *одного* элемента из данного множества и подсчету числа таких выборов. Теперь мы займемся выбором большего числа элементов данного множества и начнем, разумеется, со случая *двух* элементов.

Пример 1. В чемпионате по футболу участвовали 7 команд. Каждая команда играла с каждой один раз. Сколько всего было игр?

Решение. Первый способ. Рассмотрим таблицу 7×7, в которую вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3 : 1	0 : 5	2 : 2	0 : 0	1 : 0	1 : 3
2			4 : 3	1 : 0	1 : 0	0 : 0	1 : 1
3				1 : 3	1 : 0	1 : 2	0 : 0
4					1 : 1	1 : 1	1 : 4
5						1 : 0	0 : 0
6							2 : 2
7							

По диагонали клетки не используются, так как никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, то останется $7^2 - 7 = 7(7 - 1) = 42$ клетки. В нижней части результатов нет, потому что все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы (не 3 : 1, а 1 : 3, не 1 : 4, а 4 : 1, и т. д.; ничейные результаты 0 : 0, 1 : 1 и т. д. дублируются). Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42, т. е. 21.

Второй способ. Произвольно пронумеруем команды номерами от 1 до 7 и посчитаем число игр поочередно. Команда № 1 встречается с командами № 2—7 — это 6 игр. Команда № 2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру, с командой № 1, мы уже посчитали. Получается всего 5 новых игр. Команда № 3 проведет 6 встреч, из которых 2 — с командами № 1 и № 2 — уже посчитаны. Значит, добавятся еще 4 игры. Продолжая, получаем ответ:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Третий способ. Используем геометрическую модель: 7 команд — это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами — это встреча двух соответствующих команд. Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается $7 \cdot 6$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: и как выходящий из одной своей вершины, и как выходящий из другой своей вершины. Значит, всего проведен $7 \cdot 3 = 21$ отрезок.

Ответ: 21 игра.

Сравнивая первый и второй способы, можно легко найти сумму $1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$ первых n натуральных чисел. Идея такого сравнения принадлежит древнегреческим математикам, ей

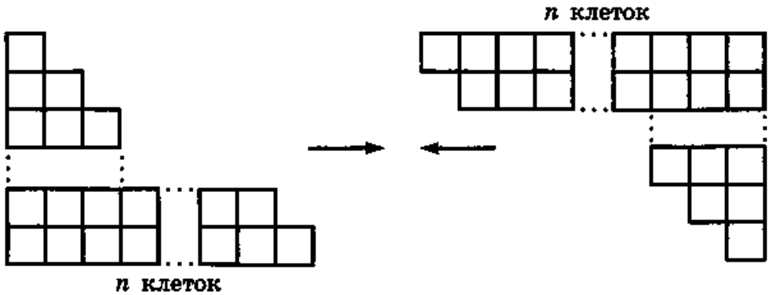


Рис. 247

более 2500 лет! Сначала они рисовали клетчатую лесенку, в основании которой полоса из n клеток, над ней полоса, в которой $(n - 1)$ клетка, затем полоса, в которой $(n - 2)$ клетки, и т. д.; в предпоследней строке стояли две клетки, а наверху одна клетка. Правее они рисовали ту же лесенку, но в перевернутом виде: внизу одна клетка, над ней две, затем три клетки, ... , а последняя строка состоит из n клеток (рис. 247).

Затем они сдвигали эти лесенки вместе и получали *прямоугольник* из n строк и $(n + 1)$ столбцов (рис. 248). Число клеток, из которых состоит этот прямоугольник, равно $n(n + 1)$.

Значит, в каждой из двух равных между собой лесенок находится ровно $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток. Получаем известную формулу:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

В примере 1 мы, по существу, использовали ту же формулу, но только для суммы первых шести натуральных чисел:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2}.$$

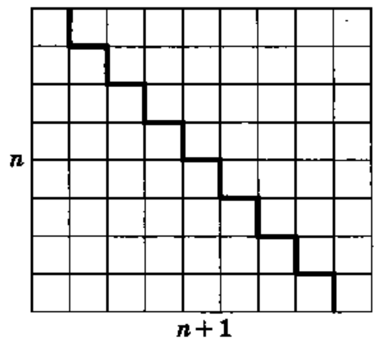


Рис. 248

При чем же здесь выбор нескольких элементов, о котором сказано в названии параграфа? Дело в том, что состав игры определен, как только мы *выбираем две* команды. Значит, количество всех игр в турнире из n команд — это в точности количество всех *выборов двух элементов из n данных* элементов. Важно при этом то, что порядок выбора не имеет значения, т. е. если выбраны 2 команды, то неважно, какая из них первая, а какая — вторая.

Теорема 1 (о выборе двух элементов). ***Если множество состоит из n элементов ($n > 2$), то у него имеется ровно $\frac{n(n-1)}{2}$ подмножеств, состоящих из двух элементов.***

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Базис индукции. Пусть $n = 2$. Два элемента из двух данных можно выбрать единственным способом. Так как $1 = \frac{2 \cdot (2-1)}{2}$ — верное равенство, то для $n = 2$ утверждение справедливо.

Индукционный шаг. Предположим, что утверждение верно при $n = k\ (k \geqslant 2)$, т. е. предположим, что любое k-элементное множество имеет $\frac{k(k-1)}{2}$ двухэлементных подмножеств. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для $n = k + 1$, т. е. докажем, что любое $(k + 1)$-элементное множество имеет $\frac{(k+1)k}{2}$ двухэлементных подмножеств.

Рассмотрим любое множество из $(k + 1)$ элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ и будем выбирать из них два элемента. Сначала посчитаем число выборов двух элементов из первых k элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. По индукционному предположению, это число равно $\frac{k(k-1)}{2}$. Остались те выборы, при которых один из выбираемых элементов — это x_{k+1}. Но тогда другой элемент мы выбираем из первых k элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, т. е. число таких выборов равно k. Значит, всего получается

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$$

выборов, что и требовалось доказать.

На основании принципа математической индукции делаем вывод о справедливости утверждения для любого $n \geqslant 2$.

На практике доказанную теорему чаще используют в виде следующего правила:

> *Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.*

Достаточно длинный словесный оборот «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» неудобен при регулярном использовании в решении задач. Математики поступили просто: ввели новый термин и специальное обозначение.

Определение 1. Число всех выборов двух элементов из n данных *без учета их порядка* обозначают C_n^2 и называют **числом сочетаний из n элементов по 2.**

Символ C_n^2 читается в русской транскрипции так: «цэ из эн по два». Буква «C» хорошо согласуется здесь «и с французским, и с нижегородским»: с одной стороны, C — это первая буква слова *combinations*, с другой стороны, C — это первая буква слова *сочетание*.

Учитывая сказанное, теорему 1 о выборе двух элементов можно записать в виде формулы

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Пример 2. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и стали играть друг с другом по одному разу в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было: а) между футболистами; б) между хоккеистами; в) между футболистами и хоккеистами; г) всего?

Решение. а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Тут надо действовать по правилу умножения. Одно испытание — выбор футболиста, а другое испытание — выбор хоккеиста.

Испытания предполагаются независимыми, и у них соответственно 11 и 6 исходов. Значит, получится $11 \cdot 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы: $55 + 15 + 66 = 136$, но можно использовать формулу для вычисления C_{17}^2:

$$C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136. \quad \blacksquare$$

А что получится, если мы *будем учитывать порядок* двух выбираемых элементов? Тут удобно использовать правило умножения из предыдущего параграфа.

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n - 1)$ способами.

Действительно, первый по порядку элемент можно выбрать n способами. Из оставшихся $(n - 1)$ элементов второй по порядку элемент можно выбрать $(n - 1)$ способами. Так как два этих испытания (выбора) независимы друг от друга, то, по правилу умножения, получаем $n(n - 1)$.

Определение 2. Число всех выборов двух элементов из n данных *с учетом их порядка* обозначают A_n^2 и называют **числом размещений из n элементов по 2.**

Пример 3. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии; б) они должны быстро стереть с доски?

Решение. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702$; б) $C_{27}^2 = \dfrac{27 \cdot 26}{2} = 351$. $\blacksquare$

Итак, вот краткий итог для числа выборов двух элементов из n данных.

$A_n^2 = n(n-1)$ **размещения**	$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ **сочетания**	$C_n^2 = \dfrac{A_n^2}{2}$

А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, на 4 и вообще на произвольное число k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Дадим сначала необходимые определения.

Определение 3. Число всех выборов k элементов из n данных *с учетом их порядка* обозначают A_n^k и называют **числом размещений из n элементов по k**. Число всех выборов k элементов из n данных *без учета порядка* обозначают C_n^k и называют **числом сочетаний из n элементов по k**.

Теорема 2. ***Для любых натуральных чисел n и k таких, что $k < n$, справедливы соотношения:***

$$1)\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!};\quad 2)\ C_n^k = \frac{A_n^k}{k!};\quad 3)\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. 1) Нам следует поочередно выбирать k элементов из n данных. Проведем независимо k следующих испытаний. Первое из них состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n-1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n-1)$ исходов. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n-2)$ элементов получит № 3, и т. д. В последнем, k-м испытании будет $(n-(k-1))$ исходов, так как в предыдущих испытаниях выбрано $(k-1)$ элементов. Остается применить правило умножения. Получим:

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2) Достаточно проверить, что $k!\cdot C_n^k = A_n^k$. Будем проводить выбор k элементов с учетом порядка в два этапа. Сначала выберем их «кучей», без учета порядка. Число вариантов тут, по определению, равно C_n^k. На втором этапе будем упорядочивать, т. е. нумеровать по порядку выбранные k элементов всеми возможными способами. Но число таких нумераций (перестановок) нам известно из предыдущего параграфа: оно равно $P_k = k!$. Значит, каждому неупорядоченному выбору k элементов из n данных соответствует $k!$ упорядоченных выборов. При этом каждый упорядоченный выбор будет посчитан ровно один раз. Следовательно, $k!\cdot C_n^k = A_n^k$.

3) Это — очевидное следствие формул 1) и 2).

Теорема доказана.

В частности, по доказанной формуле, $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$ в полном соответствии с тем фактом, что один элемент из n данных можно выбрать n способами. Если по этой формуле посчитать C_n^2, то также получится согласование с уже известным ответом:

$$\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)((n-2)(n-3)(n-4)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)}{2\cdot 1\cdot((n-2)(n-3)(n-4)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

А каким будет число C_n^k при $k = n$? По определению C_n^n — это количество выборов n элементов из n данных без учета порядка. Но такой выбор единственен, т. е. $C_n^n = 1$. Если же попробовать применить формулу теоремы 2, то получается вот что:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{1}{0!}.$$

Что же такое «ноль факториал»? Математики поступили просто. Чтобы сохранить красивую формулу для C_n^k при всех $k \leqslant n$, решили *по определению* считать, что $0! = 1$.

Тогда $C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1$, что отлично согласуется с комбинаторным определением C_n^n. При такой договоренности понятный смысл имеет и C_n^0; получается, что

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Действительно, 0 элементов из n данных можно «выбрать» единственным способом, ничего не выбирая.

У приведенной теоремы есть ряд важных следствий. Рассмотрим одно из них: *справедлива формула*

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}.}$$

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},\quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Как видите, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители меняются местами, что, естественно, не отражается на числовом значении выражения.

В чем польза полученной формулы? Представьте себе, что надо вычислить C_{15}^{13}. Получаем: $C_{15}^{13} = \frac{A_{15}^{13}}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1}$. Если же использовать равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$, то вычисления упростятся:

$$C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$$

Пример 4. В классе 27 учеников, из которых нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу, второй — сходить за мелом, третий — пойти дежурить в столовую; б) им следует спеть хором?

Решение. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^{3} = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550$;

б) $C_{27}^{3} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3!} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3 \cdot 2} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$ ■

Пример 5. Собрание из 80 человек выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Председателем может быть любой из участников собрания — 80 вариантов. Если председатель выбран, то секретарем может оказаться любой из оставшихся 79 человек — 79 вариантов. По правилу умножения получаем (в предположении о независимости выбора секретаря и председателя), что выбор председателя и секретаря осуществляется $80 \cdot 79 = 6320$ способами.

Если испытание А — выбор председателя и секретаря — завершено, то следует заняться испытанием В — выбором трех членов редакционной комиссии из оставшихся 78 участников собрания. Редакционную комиссию выбирают списком, т. е. порядок отбора не имеет значения. Сделать это можно C_{78}^{3} способами. Имеем:

$$C_{78}^{3} = \frac{78 \cdot 77 \cdot 76}{3!} = 13 \cdot 77 \cdot 76 = 76\,076.$$

Поскольку испытания А и В предполагаются независимыми, остается лишь применить правило умножения: $6320 \cdot 76\,076 = 480\,800\,320$.

Ответ: 480 800 320 способов.

П р и м е р 6. Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Найти количество возможных вариантов билета.

б) Сколько из них тех, в которых ученик знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство вопросов?

Р е ш е н и е. а) Порядок вопросов в билете не важен. Поэтому возможны C_{20}^3 вариантов билета:

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 60 \cdot 19 = 1140.$$

б) Тут все три вопроса следует выбирать из тех 12, которые ученик выучил. Получаем:

$$C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 2 \cdot 110 = 220.$$

в) Билет подобного типа составляется так: следует выбрать независимо друг от друга по одному вопросу — из блока выученных 12 вопросов, из блока проигнорированных учеником 5 вопросов и из оставшихся 3 вопросов. По правилу умножения получаем ответ:

$$12 \cdot 5 \cdot 3 = 180.$$

г) Большинство вопросов из трех — это два или три. Выбрать два из 12 выученных вопросов и один из оставшихся 8 вопросов можно (по правилу умножения) $C_{12}^2 \cdot C_8^1 = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot 8 = 528$ способами. А билеты, в которых все вопросы выучены, уже посчитаны в пункте б), их всего 220. В итоге получается $528 + 220 = 748$ билетов.

Ответ: а) 1140; б) 220; в) 180; г) 748.

П р и м е р 7. Найти коэффициент при x^2 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:

а $(1 + x)^4$; б) $(1 + x)^{44}$; в) $(2 - x)^{14}$; г) $\left(2 + \sqrt{x}\right)^n$.

Р е ш е н и е. а) $(1 + x)^4 = (1 + x)^3 \cdot (1 + x) = (1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 + x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$; коэффициент при x^2 равен 6.

б) $(1 + x)^{44} = (1 + x)(1 + x) \ldots (1 + x)$ — всего 44 одинаковых множителя. При раскрытии скобок будут получаться однотипные слагаемые. Каждое из них состоит из 44 множителей, причем каждый из множителей равен 1 или x, в зависимости от того, что именно мы выбираем в очередной скобке $(1 + x)$. Вторая степень у x будет получаться тогда и только тогда, когда в каких-то двух скобках из 44 мы выберем множитель x, а во всех остальных скобках выберем множитель 1. Но 2 элемента из 44 можно выбрать C_{44}^2 способами. Получаем: $C_{44}^2 = \frac{44 \cdot 43}{2} = 22 \cdot 43 = 946$.

в) $(2 - x)^{14}$. Будем рассуждать так же, как и в пункте б), только в скобках вместо разности запишем сумму:

$(2 - x)^{14} = (2 + (-x))^{14} = (2 + (-x))(2 + (-x)) \cdot ... \cdot (2 + (-x))$ — всего 14 одинаковых множителей. При раскрытии скобок будут получаться однотипные слагаемые. Каждое из них состоит из 14 множителей, причем каждый из множителей равен 2 или $(-x)$. Вторая степень у x будет получаться тогда и только тогда, когда в каких-то двух скобках из 14 мы выберем множитель $(-x)$, а во всех остальных 12 скобках выберем множитель 2. В каждом таком случае получится одночлен $2^{12}x^2$. Количество таких одночленов будет равно числу выборов двух элементов из 14, т. е. равно $C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} =$ $= 7 \cdot 13 = 91$. Значит, коэффициент при x^2 равен:

$$2^{12} \cdot 91 = 4096 \cdot 91 = 372\,736.$$

г) Рассматривая выражение $\left(2 + \sqrt{x}\right)^n$, следует учесть, что $x^2 = \left(\sqrt{x}\right)^4$, и поэтому из n одинаковых скобок $\left(2 + \sqrt{x}\right)$ следует выбрать четыре, а не две, как в пунктах б) и в). В отобранных скобках следует выбрать в качестве множителя $\sqrt{x}$, а в остальных $(n - 4)$ скобках следует выбрать в качестве множителя 2. Получается $2^{n-4}C_n^4$ — это и будет коэффициент при x^2.

Ответ: а) 6; б) 946; в) 372 736; г) $2^{n-4}C_n^4$.

Рассмотренный пример в конкретной ситуации показывает, как доказывается знаменитая формула *бинома Ньютона*. Что означает загадочное слово *бином*? «Би» — стандартная приставка, означающая удвоение, раздвоение, двойственность и т. п. «Ном» — сокращение от французского *nombre*, т. е. число, номер, нумерация. Похоже и на английское *number*. Значит, кратко, бином — это «два числа». Речь идет о сумме двух чисел, точнее — о степени суммы двух чисел. Как минимум, две такие формулы — формулы сокращенного умножения — мы знаем. Это квадрат суммы и куб суммы двух чисел. Запишем их вместе с первой степенью суммы так:

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$$
$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2;$$
$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3.$$

Знаком умножения отделены числовые коэффициенты при одночленах. Заметим, что

$$1 = C_3^0,\ 3 = C_3^1,\ 3 = C_3^2,\ 1 = C_3^3$$

(в формуле куба суммы). Оказывается, что для любой степени $(a + b)^n$ имеется похожая формула — *формула бинома Ньютона* (или просто *бином Ньютона*); числовые коэффициенты у содержащихся в ней одночленов — числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^k, ..., C_n^{n-1}, C_n^n. По этой причине для чисел C_n^k кроме названия «число сочетаний из n по k» часто используют термин *биномиальные коэффициенты*.

БИНОМ НЬЮТОНА

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... +$$
$$+ C_n^k a^{n-k}b^k + ... + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что после раскрытия скобок в выражении $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)\ldots(a + b)}_{n \text{ множителей}}$ и приведения подобных членов одночлен $a^{n-k}b^k$ будет иметь коэффициент C_n^k.

При раскрытии скобок будут получаться произведения вида $\underbrace{\underline{\underline{\ ?\ }} \cdot \underline{\underline{\ ?\ }} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{\ ?\ }}}_{n \text{ множителей}}$, где на каждом из n мест стоит или a, или b, в зависимости от того, что именно мы выбираем в очередной скобке. Если в k скобках взят множитель b, а в остальных $(n - k)$ скобках взят множитель a, то в результате такого умножения получится одночлен $a^{n-k}b^k$. Количество таких одночленов в точности равно количеству выборов тех k скобок из n данных, из которых в дальнейшем будет взят множитель b. Значит, после раскрытия всех скобок в выражении $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)\ldots(a + b)}_{n \text{ множителей}}$ количество одночленов $a^{n-k}b^k$ равно числу выборов k элементов из n данных (без учета порядка).

Следовательно, числовой коэффициент одночлена $a^{n-k}b^k$ равен C_n^k, что и требовалось доказать.

Пример 8. Раскрыть скобки в выражении: а) $(a + b)^5$; б) $(a + b)^6$.

Решение. а) $(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4b + C_5^2 a^3b^2 + C_5^3 a^2b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

б) $(a + b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5b + C_6^2 a^4b^2 + C_6^3 a^3b^3 + C_6^4 a^2b^4 + C_6^5 ab^5 + C_6^6 b^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. ■

Пример 9. Вычислить $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$.

Решение. Применим формулу бинома Ньютона к выражению $(1 + x)^n$. Получим: $(1 + x)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1}x + C_n^2 1^{n-2}x^2 + ... + C_n^k \cdot 1^{n-k}x^k + ... + C_n^{n-2} \cdot 1^2x^{n-2} + C_n^{n-1} \cdot 1 \cdot x^{n-1} + C_n^n x^n$. Положив в этом тождестве $x = 1$, получим:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad ■$$

Пример 10. Выразить $\cos 5x$ и $\sin 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение. По формуле Муавра (см. § 36)

$$\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5.$$

Для выражения $(\cos x + i \sin x)^5$ используем формулу из примера 8а), где $a = \cos x$ и $b = i \sin x$. С учетом равенств $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ получим:

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x) -$$
$$- 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x =$$
$$= (\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x) +$$
$$+ i (5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x).$$

По условию равенства комплексных чисел из формулы (1) получаем:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5 \cos x (1 - \cos^2 x)^2;$$
$$\sin 5x = 5 \sin x (1 - \sin^2 x)^2 - 10 \sin^3 x (1 - \sin^2 x) + \sin^5 x.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получаем, что $\cos 5x$ и $\sin x$ выражаются через $\cos x$ и $\sin x$ по одинаковым формулам:

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x;$$
$$\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде треугольной таблицы. Вот эта таблица — ее называют *треугольником Паскаля*:

$C_1^0 \quad C_1^1$	$1 \quad 1$
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$	$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

. . . .

Основная закономерность образования строк в треугольнике Паскаля состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.* Например, над числом 6 в четвертой строке стоят числа 3 и 3, причем $3 + 3 = 6$; над числом 10 в пятой строке — числа 4 и 6, причем $4 + 6 = 10$. В n-й строке на $(k + 1)$-м месте в треугольнике Паскаля стоит число C_n^k, а над ним стоят числа C_{n-1}^k и C_{n-1}^{k-1}. Докажем, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Используем запись биномиальных коэффициентов через факториалы:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$$

$$= (n-1)! \cdot \left(\frac{1}{k!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\right) =$$

$$= (n-1)! \cdot \frac{(n-k)+k}{k!(n-k)!} = (n-1)! \cdot \frac{n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Завершая параграф, соберем вместе полученные сведения о биномиальных коэффициентах:

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$,	$C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$, $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

§ 49. Случайные события и их вероятности

Когда, решая, например, физическую задачу, мы говорим о равномерном движении тела, то имеем дело с некоторой абстрактной *моделью*. Ведь в реальной жизни практически никакое физическое тело не движется равномерно какое-то заметное время. Да и что такое физическое тело? Когда мы решаем текстовые задачи про «производительность труда» или «про пешехода», то имеем дело с *моделями* реальности — с абстрактным заводом, у которого все знаем про производительность труда, или же с путником, с одинаковой скоростью и без устали шагающим по прямолинейному шоссе. В социологии или экономике тоже принято говорить о той или иной *модели* — модели развития общества или производственных отношений. Вообще при решении задач с «жизненными» условиями мы, как правило, имеем дело с двумя различными вещами. С одной стороны, в условии задачи есть вроде бы достаточно реальный объект или ситуация. С другой стороны, решая задачу, мы работаем с *моделью* этого объекта или ситуации. Модель обычно упрощает реальную ситуацию и делает возможным получение ответа. Надо только точно понимать, что ответ относится к *модели*, а возможность применять этот ответ в реальной жизни следует еще проверять.

Теория вероятностей и математическая статистика занимаются построением и исследованием моделей различных ситуаций, связанных с понятием *случайности*. Один из основателей математической статистики шведский ученый Гаральд Крамер писал так: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом "случайный". Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах». Мы последуем этому совету.

Во многих играх используют игральный кубик. У кубика 6 граней, на каждой грани отмечено различное количество точек — от 1 до 6. Играющий бросает кубик и смотрит, сколько точек имеется на выпавшей грани (на той грани, которая располагается сверху). Довольно часто точки на грани кубика заменяют на соответствующую цифру и тогда говорят о выпадении 1, выпадении 2 и т. д. Бросание кубика можно считать опытом, экспериментом, испытанием, а полученный результат — исходом испытания или элементарным событием. Почти 400 лет тому назад к Галилео Галилею обратился один из игроков в азартную игру — бросание игральных костей (кубиков) — с просьбой объяснить несовпадение между реальными результатами игры в кости и своими собственными подсчетами. С одной стороны, практика игры показывает, что при трехкратном бросании игрального кубика сумма в 10 очков выпадает *чаще* суммы в 9 очков. С другой стороны, и сумма 10, и сумма 9 выпадают *ровно в шести* комбинациях: для 10 это $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 2, 6\}$, $\{3, 3, 4\}$, а для 9 это $\{1, 4, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 3, 3\}$. Галилей объяснил этот парадокс в своей работе «О появлении очков при бросании кости». Рассмотрим его аргументы.

Пример 1. Игральный кубик бросают три раза подряд и каждый раз записывают число выпавших очков. Найдите количество:

а) всех возможных результатов;

б) тех результатов, в которых сумма очков равна 4;

в) тех результатов, в которых сумма очков равна 9;

г) тех результатов, в которых сумма очков равна 10.

Решение. а) Результатом этого опыта является упорядоченная тройка (x, y, z) чисел, каждое из которых может равняться 1, 2, 3, 4, 5, 6. Так как бросания предполагаются независимыми друг от друга, то можно применить правило умножения и получить ответ: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$. Итак, всего имеется 216 возможных результатов.

б) Следует найти число натуральных решений уравнения $x + y + z = 4$. Таких решений ровно три: $(1; 1; 2)$, $(1; 2; 1)$, $(2; 1; 1)$.

в) Следует найти число натуральных решений уравнения $x + y + z = 9$, $x \leqslant 6$, $y \leqslant 6$, $z \leqslant 6$. Тут прямое перечисление всех возможностей затруднительно. Будем действовать по шагам. Если 9 представлено как сумма слагаемых 1, 4, 4, то возможны три варианта: $1 + 4 + 4$, $4 + 1 + 4$, $4 + 4 + 1$. По тем же причинам три варианта возможны для слагаемых 2, 2, 5. Если же все три слагаемых различны (случаи $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$), то их можно произвольно расставлять на имеющиеся три места. В каждом случае получится $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Наконец, для слагаемых 3, 3, 3 возможен только один вариант: $3 + 3 + 3 = 9$. Итак, всего получается $3 + 3 + 6 + 6 + 6 + 1 = 25$ решений.

г) Действуя так же, как и в пункте в), найдем, что всего имеется $3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 6 = 27$ решений (проверьте!) уравнения $x + y + z = 10$ в натуральных числах, не превосходящих 6.

Ответ: а) 216; б) 3; в) 25; г) 27.

Итак, в модели, предложенной Галилею игроком, и для суммы 10 очков, и для суммы 9 очков все шесть перечисленных выше комбинаций предполагались равновозможными, а в модели самого

Галилея это совсем не так: слагаемые 3, 3, 3 дают только одну возможность получить в сумме 9, а слагаемые 1, 3, 5 позволяют получить 9 шестью разными способами. Реальная игровая практика показывает, что модель Галилея более точно соответствует действительности.

Перевод разобранной ситуации на язык теории вероятностей выглядит так. Если событие A (событие B) состоит в том, что при трех бросаниях кубика сумма очков равна 9 (равна 10), то вероятность события A (события B) равна $\frac{25}{216}$ (равна $\frac{27}{216}$). Значит, событие B более вероятно, чем событие A. Тут подсчет произведен по *классической вероятностной схеме*, в которой все исходы некоторого испытания предполагаются равновозможными между собой.

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения вероятности события A при проведении некоторого испытания следует:

1) найти число N всех возможных исходов данного испытания;

2) найти количество $N(A)$ тех исходов испытания, в которых наступает событие A;

3) найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Вероятность события A принято обозначать так: $P(A)$. Объяснение такого обозначения очень простое: «вероятность» по-французски — *probabilite*, по-английски «вероятно» — *probably*.

Итак,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Довольно часто пункты 1—4 приведенной классической вероятностной схемы выражают одной довольно длинной фразой.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Замечание 1. Одному ученику задали вопрос: «Какова вероятность выпадения тройки при одном бросании кубика?» Ученик ответил так: «Вероятность равна 0,5». И объяснил свой ответ: «Тройка или выпадет, или нет. Значит, всего есть два исхода и ровно в одном наступает интересующее нас событие. По классической вероятностной схеме получаем ответ 0,5». Есть ли в этом рассуждении ошибка? Ее *почти нет*! Более точно, она имеется только в одном, но очень принципиальном, моменте. Да, действительно, тройка или выпадет, или нет, т. е. при таком определении исхода бросания $N = 2$. Правда и то, что $N(A) = 1$ и уж, разумеется, верно, что $\frac{1}{2} = 0{,}5$. А вот выполнение условия о равновозможности всех исходов вызывает сомнения. Конечно, с чисто юридической точки зрения, мы имеем право считать, что выпадение тройки равновероятно ее «невыпадению». Но вот можем ли мы так считать, не нарушая свои же естественные предположения об «одинаковости» граней? Конечно, нет! Здесь мы имеем дело с правильным рассуждением внутри некоторой модели. Только вот сама эта модель «неправильная», т. е. плохо соответствует реальному явлению.

Замечание 2. Если мы говорим, что при бросании кубика вероятность выпадения 1 равна $\frac{1}{6}$, это совсем не значит, что, бросив кубик 6 раз, вы получите единицу один раз, бросив кубик 12 раз, вы получите единицу два раза, бросив кубик 18 раз, вы получите единицу три раза и т. д. Слово *вероятно* носит *предположительный характер*. Мы предполагаем, что скорее всего может произойти. Вероятно, если мы бросим кубик 600 раз, цифра 1 выпадет 100 раз или около 100.

Замечание 3. Какова же абстрактная модель, работая с которой мы приходим к классическому определению вероятности? Опишем ее. Допустим, что вы каким-то образом перечислили все возможные исходы некоторого опыта, испытания, эксперимента. Может быть, вы выписали эти исходы в одну строку через запятую. Может быть, каждый исход записали в отдельную строку и строки пронумеровали. Может быть, вы изобразили исходы какими-то значками на листе бумаги или разместили их под разными «ярлычками» на экране монитора (рис. 249). При переходе к модели вся эта конкретика не важна. Важно только общее число N всех исходов, или, как говорят, элементарных событий.

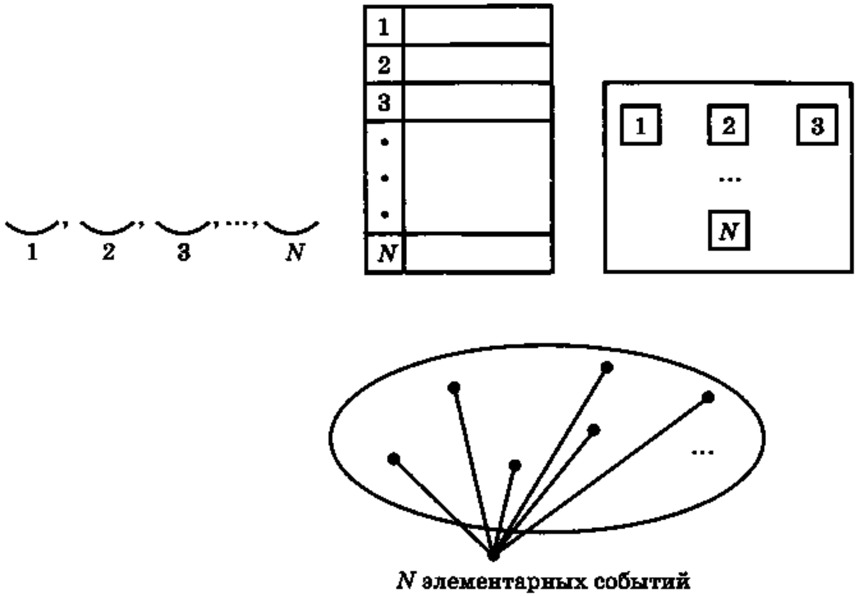


Рис. 249

Теперь нас интересует вероятность некоторого случайного события A, которое может произойти, а может и не произойти в результате проведенного испытания. Это означает, что событие A происходит при наступлении *только части* всех возможных исходов. Такие исходы часто называют *благоприятствующими* наступлению события A. Тогда вероятность события A — это доля исходов, *благоприятствующих* A, среди всех N возможных исходов. В частности, вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{N}$, т. е. все они равновероятны между собой (рис. 250).

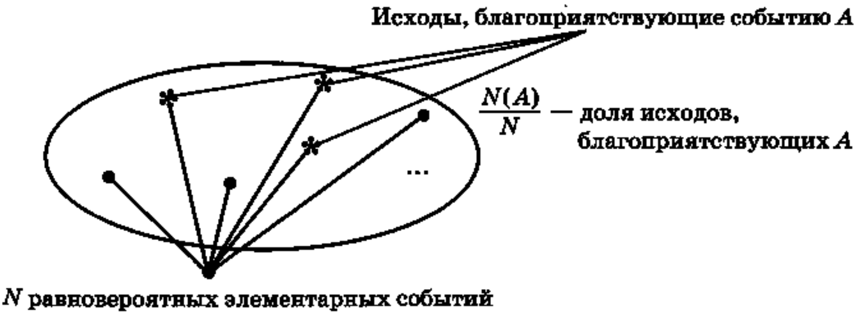


Рис. 250

В такой модели событие — это просто подмножество N-элементного множества всех элементарных событий. Грубо говоря, все элементарные события — это N лампочек, каждая из которых может гореть или не гореть, а разные события — это разные способы освещения с помощью той или иной части загоревшихся лампочек.

Пример 2. Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика:

а) сумма очков равна 1;

б) модуль разности очков меньше 7;

в) сумма очков меньше 10;

г) произведение очков кратно 5.

Решение. а) Минимальная сумма очков равна 2. Значит, $N(A) = 0$ и $P(A) = 0$.

б) Максимальный модуль разности выпавших очков равен 5 (при выпадении очков 1 и 6); $5 < 7$. Значит, $N(A) = N$ и $P(A) = 1$.

в) При каждом независимом бросании возможны 6 исходов. По правилу умножения получаем, что данный опыт имеет $6 \cdot 6 = 36$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. считать, что все $N = 36$ исходов равновозможны между собой.

Вместо подсчета тех исходов, в которых наступает интересующее нас событие A, перечислим те исходы, в которых оно не наступает, т. е. те исходы, в которых сумма очков равна 10, 11 или 12. Таких исходов ровно 6: (4; 6), (6; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6). Значит, $N(A) = 36 - 6 = 30$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

г) Если первой выпала цифра 5, то при любой второй цифре их произведение кратно 5. Получается шесть вариантов: (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6). Еще шесть вариантов получается, если на втором месте стоит 5. Так как 5 — простое число, то других вариантов нет. Вроде бы ответ $6 + 6 = 12$? Но один результат (5; 5) мы посчитали *дважды*. Значит, интересующее нас событие A наступает ровно в 11 из возможных 36 равновероятных между собой исходов, т. е. $N(A) = 11$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{11}{36}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{11}{36}$.

Каждая задача примера 2 интересна по-своему. В пункте а) мы имеем дело с **невозможным** событием. Так называют событие, которое никогда не наступает при проведении данного испытания; его вероятность равна нулю. В пункте б), наоборот, событие обязательно наступит в данном испытании. Такие события называют **достоверными**. Вероятность достоверного события равна единице. В пункте в) нам удобнее оказалось перейти к противоположному событию. Так называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда <u>не наступает</u> интересующее нас событие. Наконец, в пункте г) мы на конкретном примере убедились в справедливости *правила суммы*, которое позволяет подсчитывать количество элементов в объединении двух множеств.

Теорема 1 (правило суммы). ***Если множество A состоит из n элементов, множество B состоит из k элементов, а пересечение $A \cap B$ состоит из m элементов, то объединение $A \cup B$ состоит из $(n + k - m)$ элементов.***

Доказательство. Пронумеруем все элементы множества A так, чтобы на первых m местах стояли все элементы пересечения $A \cap B$:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\};$$
$$A \cap B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$

Все элементы множества B также пронумеруем так, чтобы на первых m местах в том же порядке стояли все элементы пересечения $B \cap A = A \cap B$:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_k\};$$
$$A \cap B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}; \quad a_1 = b_2 \ldots, a_m = b_m.$$

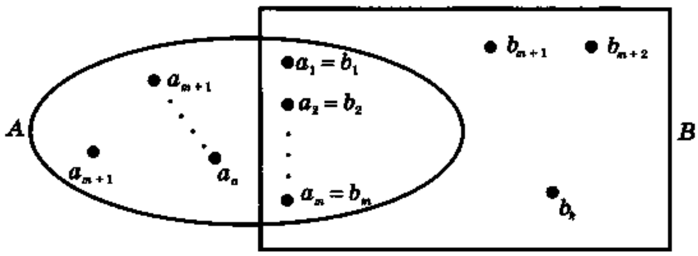
Для каждого элемента x из $A \cup B$ возможен только один из двух случаев:

1) x принадлежит множеству A, но не принадлежит множеству B;

2) x принадлежит множеству B.

Есть ровно $(n - m)$ элементов, для которых верно условие 1): это $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$. Условие 2) верно для k элементов: это все элементы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ множества B.

Значит, $A \cup B$ состоит из $(n - m) + k = n + k - m$ элементов (рис. 251). Теорема доказана.



Всего $(n - m) + k = n + k - m$ элементов

Рис. 251

Если для числа элементов конечного множества X использовать обозначение $N(X)$, то правило суммы можно записать так:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

$$\text{или } N(A \cup B) + N(A \cap B) = N(A) + N(B).$$

Из доказанного правила суммы следует теорема о вероятности суммы двух событий. Только сначала надо определить, что такое сумма двух событий, а заодно и что такое произведение двух событий.

Определение. **Суммой** событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда происходит или событие A, или событие B. Обозначение: $A + B$.

Произведением событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда одновременно происходят и событие A, и событие B. Обозначение: AB.

Теорема 2 (о вероятности суммы событий).

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность произведения этих событий:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Доказательство. Событие A — это некоторое подмножество N-элементного множества всех элементарных событий, B — какое-то другое подмножество того же N-элементного множества. Объединение $A \cup B$ соответствует сумме $A + B$, а пересечение $A \cap B$ соответствует произведению AB событий A и B.

Тогда, по определению вероятности и по теореме 1 (правило суммы), имеем:

$$P(A + B) = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N} =$$

$$= \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} - \frac{N(AB)}{N} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы 2 является случай двух событий, которые не могут произойти одновременно. Такие события называют **несовместными**. Им соответствуют непересекающиеся подмножества N-элементного множества всех элементарных событий.

Например, всякое событие несовместно с противоположным ему событием.

Следствие 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Доказательство. Несовместность событий A и B означает, что событие AB является невозможным. Значит, $P(AB) = 0$ и

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B).$$

А если имеется три или больше событий, любые два из которых несовместны? Применяя метод математической индукции, нетрудно получить такое следствие.

Следствие 2. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

В теории вероятностей есть стандартные игровые ситуации, например, бросание монеты или игрального кубика, вытаскивание карт из колоды. Упомянем еще «урновую схему»: в темном ящике (урне) лежат неотличимые на ощупь шары различного цвета. Один или несколько шаров вытаскивают. Ищется вероятность того, что выбранные шары имеют какой-то определенный набор цветов.

Пример 3. В урне лежат 10 белых и 11 оранжевых шаров. Случайным образом достают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них есть 4 белых шара?

Решение. Всего имеется $N = C_{21}^5$ исходов данного испытания. Обозначим буквой M интересующее нас событие. Возможны два случая. Может случиться, что среди 5 выбранных шаров будет *ровно* 4 белых шара. Обозначим это событие буквой A. А может случиться, что все 5 выбранных шаров белые, а оранжевых нет вовсе. Обозначим это событие буквой B. Тогда A и B — несовместные события, в сумме дающие событие M, и, следовательно,

$$P(M) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Найдем вероятность события A. Оно наступает, когда 4 из 5 шаров белые, а 1 шар оранжевый. Из 10 белых шаров 4 шара можно выбрать C_{10}^4 способами, а из 11 оранжевых шаров 1 шар можно выбрать $C_{11}^1 = 11$ способами. Выбор разноцветных шаров считаем независимым. По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать $N(A) = C_{10}^4 \cdot C_{11}^1$ способами. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{11}^1}{C_{21}^5} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 11 \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{110}{969} \approx 0{,}114.$$

Для $P(B)$ подсчет аналогичен: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N} = \dfrac{C_{10}^5}{C_{21}^5} \approx 0{,}012$. Значит, $P(M) = P(A) + P(B) \approx 0{,}114 + 0{,}012 = 0{,}126$.

Ответ: 0,126.

Обратите внимание, что задачи на отыскание вероятностей случайных событий «в два с половиной раза» сложнее задач по комбинаторике. Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта. Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении $N(A)$. При этом во второй раз это уже более сложная комбинаторика. Наконец, надо еще уметь вычислить значение дроби. Вот и получается «две с половиной комбинаторики».

Следствие 3. *Сумма вероятности события и вероятности противоположного ему события равна единице.*

Доказательство. Если B — событие, противоположное событию A, то сумма $A + B$ является достоверным событием. Ведь каждый исход испытания благоприятствует или наступлению A, или ненаступлению A, т. е. наступлению B. Так как события A и B несовместны, то

$$P(A) + P(B) = P(A + B) = 1.$$

К сожалению, в полученном равенстве $P(A) + P(B) = 1$ нет никакой информации о связи событий A и B между собой, приходится держать эту связь в уме. Удобнее было бы заранее дать событию B обозначение, явно указывающее на его связь с событием A. Событие, противоположное событию A, обозначают так: $\bar{A}$. В этом обозначении событие A как бы перечеркивается (отрицается) стоящей выше чертой. Итак, результат следствия 3 можно записать в виде краткой формулы:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1.}$$

В левой части — два слагаемых. Значит, есть две возможности перенести одно из них в правую часть. Получатся две полезные формулы:

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A),\ P(A) = 1 - P(\bar{A}).}$$

Их можно оформить как следствия из теоремы 2.

<u>*Следствие 4.*</u> *Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события.*

<u>*Следствие 5.*</u> *Если из единицы вычесть вероятность противоположного события, то получится вероятность самого события.*

На практике вычисляют то, что кажется проще: или $P(A)$, или $P(\bar{A})$. После этого пользуются формулой или $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, или $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Пример 4. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают 5 карт. Какова вероятность того, что среди выбранных карт будет хотя бы одна бубна?

Решение. Из множества в 36 элементов мы производим выбор пяти элементов, причем порядок этих элементов не важен. Значит, возможно получение $N = C_{36}^5$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновозможны между собой.

Если A — интересующее нас событие, то противоположное событие $\bar{A}$ состоит в том, что среди выбранных пяти карт *нет ни одной* бубны. Но это значит, что все 5 карт выбраны из других карточных мастей, т. е. из $36 - 9 = 27$ карт. Значит, $N(\bar{A}) = C_{27}^5$, и легко можно найти вероятность противоположного события $\bar{A}$. Затем по следствию 5 теоремы 2 можно найти и вероятность самого события A:

$$P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{C_{27}^5}{C_{36}^5} = \frac{27!}{5! \cdot 22!} \cdot \frac{5! \cdot 31!}{36!} =$$

$$= \frac{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} \approx 0{,}214;$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}786.$$

Ответ: 0,786.

Когда говорят, что основы теории вероятностей создали и разработали французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль, то невольно возникает впечатление, что Ферма и Паскаль, как-то собравшись вместе, сначала приняли решение создать новую теорию, а затем, в соответствии с неким разработанным планом, и осуществили задуманное. Конечно, это не так! Не было никакого совместного плана, и теория, как мы ее сейчас представляем, по-настоящему появилась существенно позже. Просто Ферма и Паскаль решали интересные задачи и в переписке между собой и другими математиками обсуждали подходы к их решению, полученные результаты, связь с другими задачами, возможности применения в новых ситуациях и т. п. Рассмотрим задачу, которую с большим основанием можно отнести к задачам, положившим начало развитию теории вероятностей, или, как еще тогда говорили, *комбинаторного анализа*. Эту задачу примерно в 1640 г. предложил Паскалю кавалер де Мере — весьма влиятельный деятель при дворе Людовика XIV.

Пример 5. Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы один раз, или то, что шестерка не появится ни разу?

Решение. По правилу умножения при четырехкратном бросании игральной кости всего имеется $N = 6^4$ исходов. Сама формулировка задачи ясно указывает на то, что мы имеем дело с парой противоположных друг другу событий. Что же обозначить за A, а что за $\bar{A}$? Удобно за A обозначить то событие, вероятность которого проще сосчитать. Для появления шестерки хотя бы один раз есть очень много различных ситуаций: шестерка при третьем бросании, шестерка при первом и четвертом бросаниях и т. п. Не очень ясно, как их все пересчитать, да мы и не будем делать этого.

Пусть A — событие, состоящее в том, что шестерка не появится ни разу. Но это означает, что при каждом из четырех бросаний имелось ровно *пять* исходов: выпадение 1, выпадение 2, ..., выпадение 5. По правилу умножения находим, что $N(A) = 5^4$. Значит, $P(A) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{25 \cdot 25}{36 \cdot 36} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823 < 0{,}5$. Мы видим, что вероятность события A хотя немного, но все-таки меньше, чем 0,5. Так как $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, то вероятность противоположного события $\bar{A}$ немного, но больше, чем 0,5.

Ответ: появление хотя бы одной шестерки более вероятно, чем полное отсутствие шестерок при четырех бросаниях игральной кости.

Кавалер де Мере как раз и обратился к Паскалю с просьбой подтвердить и объяснить реальное игровое наблюдение о том, что появление шестерки при четырех бросаниях более вероятно, нежели ее отсутствие. Кстати, для *трех* бросаний ответ получится другой: ведь тогда $P(A) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787 > 0{,}5 > P(\bar{A})$.

Подведем итоги нашего знакомства с элементами теории вероятностей. Во-первых, мы познакомились с наиболее простой и распространенной схемой подсчета вероятности случайных событий — с *классической вероятностной схемой*. Мы узнали, что со случайными событиями, оказывается, можно производить некоторые действия, похожие на привычные алгебраические действия: случайные события можно *складывать* и *перемножать*. Кроме того, от случайного события можно переходить к *противоположному событию*. Мы познакомились с тем, как в простейших случаях таких действий ведет себя вероятность событий: речь идет о формуле $P(A + B) = P(A) + P(B)$ вероятности суммы несовместных событий и о формуле $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Мы вплотную подошли к одной из наиболее распространенных вероятностных моделей: *независимым повторениям одного и того же испытания с двумя возможными исходами*. Более подробный разговор об этой модели и о ее применениях в различных практических задачах мы отложим до 11-го класса.

Рассмотрим еще одну задачу кавалера де Мере, которую он обсуждал с Паскалем.

Пример 6. Сколько раз следует бросить пару игральных костей, чтобы вероятность одновременного появления хотя бы раз двух шестерок оказалась больше вероятности отсутствия пары шестерок?

У де Мере, в зависимости от способа подсчета вероятности, получалось то 24, то 25. Он не видел ошибки ни в одном из двух своих способов и писал Паскалю, что математика не применима к таким задачам. Повторим контраргументы Паскаля.

Решение. При одном бросании пары (различных) костей имеется 36 исходов, из которых только в одном появятся две шестерки одновременно, а в остальных 35 исходах будут другие результаты. Пусть A — событие, состоящее в том, что две шестерки не появятся ни разу при n бросаниях пары костей. Тогда $P(A) = \frac{35^n}{36^n}$ и $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$. Значит, следует решить неравенство $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > 0{,}5$, или $\left(\frac{35}{36}\right)^n < 0{,}5$, $\left(\frac{36}{35}\right)^n > 2$. При достаточно больших n это неравенство, несомненно, верно. Но найти точную оценку вручную достаточно сложно. Вычисления на калькуляторе показывают, что $\left(\frac{36}{35}\right)^{24} \approx 1{,}9661$, а $\left(\frac{36}{35}\right)^{25} \approx 2{,}0223$.

Ответ: при $n = 25$ бросаниях пары костей появление хотя бы одной пары шестерок более вероятно, чем их отсутствие. ■

Попробуем сформулировать общее утверждение, частными случаями которого являются рассмотренные примеры. Итак, *если в некотором испытании с N равновозможными исходами событие A наступает ровно в k исходах, то вероятность того, что при n независимых повторениях испытания событие A наступит хотя бы раз, равна* $1 - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$. Вспомним, что частное $\frac{k}{N}$ — это в точности вероятность $P(A)$ события A. Оказывается, верна общая теорема.

Теорема 3. ***Пусть p — вероятность события A в некотором испытании и пусть это испытание независимым образом повторяют n раз. Тогда:***

1) ***вероятность того, что событие A наступит в каждом из n повторений, равна p^n;***

2) ***вероятность того, что событие A наступит хотя бы в одном из n повторений, равна $1 - (1 - p)^n$.***

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

I вариант — 4 ч в неделю, II вариант — 5 ч в неделю, III вариант — 6 ч в неделю

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
Повторение материала 7—9 классов	4	4	4
Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА			
§ 1. Натуральные и целые числа	3	4	5
§ 2. Рациональные числа	1	2	2
§ 3. Иррациональные числа	2	2	2
§ 4. Множество действительных чисел	1	2	3
§ 5. Модуль действительного числа	2	2	3
Контрольная работа № 1	1	1	1
§ 6. Метод математической индукции	2	3	4
Итого:	12	16	20
Глава 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ			
§ 7. Определение числовой функции и способы ее задания	2	2	3
§ 8. Свойства функций	3	3	4
§ 9. Периодические функции	1	2	3
§ 10. Обратная функция	2	3	4
Контрольная работа № 2	1	1	1
Итого:	9	11	15
Глава 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ			
§ 11. Числовая окружность	2	2	2
§ 12. Числовая окружность на координатной плоскости	2	3	3
§ 13. Синус и косинус. Тангенс и котангенс	3	3	4
§ 14. Тригонометрические функции числового аргумента	2	3	3
§ 15. Тригонометрические функции углового аргумента	1	2	2
§ 16. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики	3	3	3
Контрольная работа № 3	1	1	1
§ 17. Построение графика функции $y = mf(x)$	2	2	2
§ 18. Построение графика функции $y = f(kx)$	2	3	3

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
§ 19. График гармонического колебания	1	2	2
§ 20. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики	2	2	3
§ 21. Обратные тригонометрические функции	3	4	5
Итого:	**24**	**30**	**33**
Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ			
§ 22. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства	4	5	6
§ 23. Методы решения тригонометрических уравнений	4	5	6
Контрольная работа № 4	2	2	2
Итого:	**10**	**12**	**14**
Глава 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ			
§ 24. Синус и косинус суммы и разности аргументов	3	3	4
§ 25. Тангенс суммы и разности аргументов	2	2	2
§ 26. Формулы приведения	2	2	2
§ 27. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени	3	4	5
§ 28. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение	3	4	5
§ 29. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму	2	3	3
§ 30. Преобразование выражения $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \sin (x + t)$	1	2	2
§ 31. Методы решения тригонометрических уравнений	3	4	5
Контрольная работа № 5	2	2	2
Итого:	**21**	**26**	**30**
Глава 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА			
§ 32. Комплексные числа и арифметические операции над ними	2	2	3
§ 33. Комплексные числа и координатная плоскость	1	2	3
§ 34. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	2	3	3

Окончание таблицы

Изучаемый материал	Количество часов		
	Вариант		
	I	II	III
§ 35. Комплексные числа и квадратные уравнения	**1**	**2**	**2**
§ 36. Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа	**2**	**2**	**3**
Контрольная работа № 6	**1**	**1**	**1**
Итого:	**9**	**12**	**15**
Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ			
§ 37. Числовые последовательности	**2**	**3**	**3**
§ 38. Предел числовой последовательности	**2**	**2**	**3**
§ 39. Предел функции	**2**	**3**	**4**
§ 40. Определение производной	**2**	**2**	**2**
§ 41. Вычисление производных	**3**	**4**	**5**
§ 42. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции	**2**	**3**	**3**
§ 43. Уравнение касательной к графику функции	**3**	**3**	**4**
Контрольная работа № 7	**2**	**2**	**2**
§ 44. Применение производной для исследования функций	**3**	**4**	**5**
§ 45. Построение графиков функций	**2**	**2**	**3**
§ 46. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин	**4**	**5**	**6**
Контрольная работа № 8	**2**	**2**	**2**
Итого:	**29**	**35**	**42**
Глава 8. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ			
§ 47. Правило умножения. Комбинаторные задачи. Перестановки и факториалы	**2**	**3**	**4**
§ 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты	**2**	**3**	**4**
§ 49. Случайные события и их вероятности	**3**	**3**	**5**
Контрольная работа № 9	**—**	**1**	**1**
Итого:	**7**	**10**	**18**
Повторение	**11**	**14**	**17**
Всего:	**136**	**170**	**204**

ОГЛАВЛЕНИЕ

9 785346 012016