

ICPC TEAM REFERENCE DOCUMENT

NN br of NRU HSE 2

Содержание

1 Шаблон	2
2 Алгоритмы на строки	2
2.1 Префикс-функция	2
2.2 Z-функция	2
2.3 Хеширование	2
3 Алгоритмы на графах	2
3.1 Алгоритм Дейкстры $O(n^2)$	2
3.2 Алгоритм Дейкстры $O(\log(n) \cdot m)$. .	2
3.3 Поток	3
3.4 Поиск компонент сильной связности, построение конденсации графа $O(N + M)$	3
3.5 Поиск мостов $O(N + M)$	3
3.6 Поиск точек сочленения	4
3.7 Нахождение отрицательного цикла в графе	4
4 Простые алгоритмы	4
4.1 Решето Эратосфена $O(n)$	4
4.2 Решето Эратосфена $O(n \cdot \log(\log(n)))$	4
4.3 Умножение чисел по модулю	4
4.4 Функция Эйлера	4
4.5 Алгоритм Евклида	5
4.6 Расширенный алгоритм Евклида . .	5
4.7 Обратный элемент в кольце по модулю	5
4.8 Нахождение всех простых по заданному модулю за линейное время . .	5
4.9 Дискретное логарифмирование . . .	5
4.10 Китайская теорема об остатках . . .	5
5 Структуры данных	5
5.1 Дерево отрезков	5
5.2 Дерево Фенвика для суммы для одномерного случая	6
5.3 Дерево Фенвика для суммы для двумерного случая	6
5.4 Система непересекающихся множеств	6
5.4.1 Поддержка расстояний до лидера	6
6 Геометрия	7
6.1 Полярный угол	7
6.2 Скалярное произведение, угол между векторами	7
6.3 Площадь многоугольника	7
6.4 Площадь треугольника	7
6.5 Расстояние от точки до прямой . . .	7

6.6 Нормальное уравнение по двум точкам	7
6.7 Построение выпуклой оболочки обходом Грэхэма $O(N \log N)$	7
7 Числа Фибоначчи	7
7.1 Свойства чисел Фибоначчи	7

1 Шаблон

```
#define _USE_MATH_DEFINES
// #include <bits/stdc++.h>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <vector>
#include <string>
#include <set>
#include <queue>
#include <utility>
#include <iomanip>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <numeric>
#include <cmath>
#include <stack>
#include <map>
#include <deque>
#include <sstream>
using namespace std;
#define int long long
typedef vector<int> vi;
typedef vector<pair<int, int>> vii;
typedef long long ll;
typedef long double ld;
// #define pi M_PI
#define all(x) (x).begin(), (x).end()
#define pb push_back
#define re return
#define fr(x) for(int i = 0; i < (x); i++)
const int inf = 1000000000 + 7;
signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(0);
    cin.tie(0);
    cout.tie(0);
}
```

2 Алгоритмы на строки

2.1 Префикс-функция

```
vector<int> prefix_function (string s) {
    int n = (int) s.length();
    vector<int> pi (n);
    for (int i=1; i<n; ++i) {
        int j = pi[i-1];
        while (j > 0 && s[i] != s[j])
            j = pi[j-1];
        if (s[i] == s[j]) ++j;
        pi[i] = j;
    }
    return pi;
}
```

2.2 Z-функция

```
vector<int> z_function (string s) {
    int n = (int) s.length();
    vector<int> z (n);
    for (int i=1, l=0, r=0; i<n; ++i) {
        if (i <= r)
            z[i] = min (r-i+1, z[i-l]);
        while (i+z[i] < n && s[z[i]] == s[i+z[i]])
            ++z[i];
        if (i+z[i]-1 > r)
            l = i, r = i+z[i]-1;
    }
    return z;
}
```

2.3 Хеширование

```
const int mod = 1000000000 + 7;
const int q = 1009;
vector<ll> ph;
vector<ll> pq;
void pq_put()
{
    pq.pb(1);
    for (size_t i = 1; i < 100000; ++i)
        pq.pb((pq[i-1] * q) % mod);
}
```

```
ll hashing(string s)
{
    ll h = 0;
    if (ph.size()) h = ph.back();
    for (int i = 0; i < s.size(); i++)
    {
        h = (h * q + s[i]) % mod;
        ph.pb(h);
    }
    re h;
}

ll get(int l, int r)
{
    ll ans = ph[r];
    if (l) {
        ans -= ph[l-1] * pq[r-l+1] % mod;
        if (ans < 0) ans += mod;
    }
    re ans;
}
```

3 Алгоритмы на графах

3.1 Алгоритм Дейкстры $O(n^2)$

was - брали вершину или нет v - список смежности
d - массив расстояний для точки x

```
int d[2001];
int was[2001];
vector<pair<int, int>> v[2001];
int n;
void dijkstra(int x) {
    for (int i = 0; i < n; i++)
        d[i] = inf;
    d[x] = 0;
    for (int it = 0; it < n; it++)
    {
        int id = -1;
        for (int i = 0; i < n; i++)
            if (!was[i] && (id == -1 || d[id] > d[i]))
                id = i;
        was[id] = 1;
        for (auto p : v[id]) {
            int y = p.first;
            int t = p.second;
            d[y] = min(d[y], d[id] + t);
        }
    }
}
```

3.2 Алгоритм Дейкстры $O(\log(n) \cdot m)$

d - массив расстояний для точки x

```
int d[3001];
vector<pair<int, int>> v[3001];
bool f(int x, int y) {
    if (d[x] != d[y])
        return d[x] < d[y];
    return x < y;
}
set<int, bool(*)(int, int)> s(f);
void dijkstra(int x) {
    x--;
    for (int i = 0; i <= n; i++)
    {
        d[i] = inf;
    }
    d[x] = 0;
    s.insert(x);
    while (!s.empty()) {
        int x = *s.begin();
        s.erase(x);
        for (auto p : v[x]) {
            int y = p.first;
            int t = p.second;
            if (d[y] > d[x] + t) {
                s.erase(y);
                d[y] = d[x] + t;
                s.insert(y);
            }
        }
    }
}
```

3.3 Поток

```

ll c[102][102];
ll f[102][102];
int was[102];
int p[102];
vector<vector<int>>> v(102);
int t;
ll dfs(int x, ll capacity) {
    if (x == t) {
        return capacity;
    }
    was[x] = 1;
    for (auto y : v[x]) {
        ll flow = min(c[x][y] - f[x][y], capacity);
        if (!was[y] && flow > 0) {
            ll delta = dfs(y, flow);
            if (delta == 0)
                continue;
            p[x] = y;
            return delta;
        }
    }
    return 0;
}

void calc(int x, ll cap) {
    int y = x;
    while (y != t) {
        f[y][p[y]] += cap;
        f[p[y]][y] -= cap;
        y = p[y];
    }
}

int main() {
    int n, k;
    cin >> n >> k;

    for (int i = 0; i < k; i++) {
        int a, b; ll w;
        cin >> a >> b >> w;
        c[a][b] = w;
        c[b][a] = w;
        v[a].push_back(b);
        v[b].push_back(a);
    }

    ll ans = 0;
    t = n;
    while (ll cap = dfs(1, 1000000000000000000)) {
        calc(1, cap);
        ans += cap;
        memset(was, 0, sizeof(was));
        memset(p, 0, sizeof(p));
    }

    cout << ans;
    return 0;
}

```

3.4 Поиск компонент сильной связности, построение конденсации графа $O(N + M)$

Дан ориентированный граф G , множество вершин которого V и множество рёбер — E . Петли и кратные рёбра допускаются. Обозначим через n количество вершин графа, через m — количество рёбер.

Компонентой сильной связности (strongly connected component) называется такое (максимальное по включению) подмножество вершин C , что любые две вершины этого подмножества достижимы друг из друга, т.е. для $\forall u, v \in C$:

$$u \mapsto v, v \mapsto u$$

```

vector<vector<int>>> g, gr;
vector<char> used;
vector<int> order, component;

void dfs1(int v) {
    used[v] = true;
    for (size_t i=0; i<g[v].size(); ++i)
        if (!used[g[v][i]])
            dfs1(g[v][i]);
    order.push_back(v);
}

void dfs2(int v) {
    used[v] = true;
    component.push_back(v);
    for (size_t i=0; i<gr[v].size(); ++i)
        if (!used[gr[v][i]])
            dfs2(gr[v][i]);
}

int main() {
    int n;
    ... read n ...
    for (;;) {
        int a, b;
        ... read edge (a,b) ...
        g[a].push_back(b);
        gr[b].push_back(a);
    }

    used.assign(n, false);
    for (int i=0; i<n; ++i)
        if (!used[i])
            dfs1(i);
    used.assign(n, false);
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        int v = order[n-1-i];
        if (!used[v]) {
            dfs2(v);
            ... cout component ...
            component.clear();
        }
    }
}

```

3.5 Поиск мостов $O(N + M)$

Пусть дан неориентированный граф. Мостом называется такое ребро, удаление которого делает граф несвязным (или, точнее, увеличивает число компонент связности). Требуется найти все мосты в заданном графе.

```

const int MAXN = ...;
vector<int> g[MAXN];
bool used[MAXN];
int timer, tin[MAXN], fup[MAXN];

void dfs(int v, int p = -1) {
    used[v] = true;
    tin[v] = fup[v] = timer++;
    for (size_t i=0; i<g[v].size(); ++i) {
        int to = g[v][i];
        if (to == p) continue;
        if (used[to])
            fup[v] = min(fup[v], tin[to]);
        else {
            dfs(to, v);
            fup[v] = min(fup[v], fup[to]);
            if (fup[to] > tin[v])
                IS_BRIDGE(v, to);
        }
    }
}

void find_bridges() {
    timer = 0;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        used[i] = false;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        if (!used[i])
            dfs(i);
}

```

3.6 Поиск точек сочленения

Пусть дан связный неориентированный граф. Точкой сочленения (или точкой артикуляции, англ. "cut vertex" или "articulation point") называется такая вершина, удаление которой делает граф несвязным.

```
vector<int> g[MAXN];
bool used[MAXN];
int timer, tin[MAXN], fup[MAXN];

void dfs (int v, int p = -1) {
    used[v] = true;
    tin[v] = fup[v] = timer++;
    int children = 0;
    for (size_t i=0; i<g[v].size(); ++i) {
        int to = g[v][i];
        if (to == p) continue;
        if (used[to])
            fup[v] = min (fup[v], tin[to]);
        else {
            dfs (to, v);
            fup[v] = min (fup[v], fup[to]);
            if (fup[to] >= tin[v] && p != -1)
                IS_CUTPOINT(v);
            ++children;
        }
    }
    if (p == -1 && children > 1)
        IS_CUTPOINT(v);
}

int main() {
    int n;
    ... read n & g ...

    timer = 0;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        used[i] = false;
    dfs (0);
}
```

3.7 Нахождение отрицательного цикла в графе

```
struct edge {
    int a, b, cost;
};

int n, m;
vector<edge> e;
const int INF = 1000000000;

void solve() {
    vector<int> d (n);
    vector<int> p (n, -1);
    int x;
    for (int i=0; i<n; ++i) {
        x = -1;
        for (int j=0; j<m; ++j)
            if (d[e[j].b] > d[e[j].a] + e[j].cost) {
                d[e[j].b] = max (-INF, d[e[j].a] + e[j].cost);
                p[e[j].b] = e[j].a;
                x = e[j].b;
            }
    }

    if (x == -1)
        cout << "No negative cycle found.";
    else {
        int y = x;
        for (int i=0; i<n; ++i)
            y = p[y];

        vector<int> path;
        for (int cur=y; ; cur=p[cur]) {
            path.push_back (cur);
            if (cur == y && path.size() > 1)
                break;
        }
        reverse (path.begin(), path.end());
    }
```

```
        cout << "Negative cycle: ";
        for (size_t i=0; i<path.size(); ++i)
            cout << path[i] << ' ';
    }
}
```

4 Простые алгоритмы

4.1 Решето Эратосфена $O(n)$

pr - все простые числа до n
lp - минимальный простой делитель числа i

```
const int N = 10001000;
int lp[N + 1];
vector<int> pr;
void pcalc() {
    for (int i = 2; i <= N; ++i) {
        if (lp[i] == 0) {
            lp[i] = i;
            pr.push_back(i);
        }
        for (int j = 0; j < (int) pr.size() &&
            pr[j] <= lp[i] && i * pr[j] <= N; ++j)
            lp[i * pr[j]] = pr[j];
    }
}
```

4.2 Решето Эратосфена $O(n \cdot \log(\log(n)))$

d[i] == 0 если число i простое
long long d[10000000];

```
void calc_p(int n)
{
    d[0] = 1;
    d[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++)
    {
        if (d[i] == 0)
            for (int j = i + i; j <= n; j += i)
                d[j] = 1;
    }
}
```

4.3 Умножение чисел по модулю

```
ll mod;
long long mulmod(long long n, long long p){
    if (p == 0)
        return 0;
    if (p == 1)
        return n % mod;
    long long tmp = mulmod(n, p/2);
    long long ans = (tmp + tmp) % mod;
    if (p % 2 == 1)
        ans = (ans + n) % mod;
    return ans;
}
```

4.4 Функция Эйлера

Количество таких чисел в отрезке [1; n], наибольший общий делитель которых с n равен единице.

Если p — простое число, то $\phi(p) = p-1$. (Это очевидно, т.к. любое число, кроме самого p, взаимно просто с ним.)

Если p — простое, a — натуральное число, то $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$. (Поскольку с числом p^a не взаимно просты только числа вида $pk (k \in \mathcal{N})$, которых $p^a/p = p^{a-1}$ штук.)

Если a и b взаимно простые, то $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

Самое известное и важное свойство функции Эйлера выражается в теореме Эйлера:

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

где a и m взаимно просты. В частном случае, когда m простое, теорема Эйлера превращается в так называемую малую теорему Ферма:

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

```
int phi (int n) {
    int result = n;
    for (int i=2; i*i<=n; ++i)
        if (n % i == 0) {
            while (n % i == 0)
                n /= i;
            result -= result / i;
        }
    if (n > 1)
        result -= result / n;
    return result;
}
```

4.5 Алгоритм Евклида

```
int gcd (int a, int b) {
    return b ? gcd (b, a % b) : a;
}
```

4.6 Расширенный алгоритм Евклида

$$a \cdot x + b \cdot y = \gcd(a, b).$$

```
int gcd (int a, int b, int & x, int & y) {
    if (a == 0) {
        x = 0; y = 1;
        return b;
    }
    int x1, y1;
    int d = gcd (b%a, a, x1, y1);
    x = y1 - (b / a) * x1;
    y = x1;
    return d;
}
```

4.7 Обратный элемент в кольце по модулю

Обратным к числу a по модулю m называется такое число b , что:

$$a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$$

```
int x, y;
int g = gcdex (a, m, x, y);
if (g != 1)
    cout << "no solution";
else {
    x = (x % m + m) % m;
    cout << x;
}
```

4.8 Нахождение всех простых по заданному модулю за линейное время

```
r[1] = 1;
for (int i=2; i<m; ++i)
    r[i] = (m - (m/i) * r[m%i] % m) % m;
```

4.9 Дискретное логарифмирование

Задача дискретного логарифмирования заключается в том, чтобы по данным целым a, b, m решить уравнение:

$$a^x = b \pmod{m},$$

где a и m — взаимно просты

```
int solve (int a, int b, int m) {
    int n = (int) sqrt (m + .0) + 1;

    int an = 1;
    for (int i=0; i<n; ++i)
        an = (an * a) % m;

    map<int,int> vals;
    for (int i=1, cur=an; i<=n; ++i) {
        if (!vals.count(cur))
            vals[cur] = i;
        cur = (cur * an) % m;
    }

    for (int i=0, cur=b; i<=n; ++i) {
        if (vals.count(cur)) {
            int ans = vals[cur] * n - i;
            if (ans < m)
                return ans;
        }
        cur = (cur * a) % m;
    }
    return -1;
}
```

4.10 Китайская теорема об остатках

```
for (int i=0; i<k; ++i) {
    x[i] = a[i];
    for (int j=0; j<i; ++j) {
        x[i] = r[j][i] * (x[j] - x[j]);

        x[i] = x[i] % p[i];
        if (x[i] < 0) x[i] += p[i];
    }
}
```

5 Структуры данных

5.1 Дерево отрезков

```
ll t[4*100000];
void build(int v, int vl, int vr, vi& a){
    if(vl == vr){
        t[v] = a[vl];
        return;
    }
    int c = vl + (vr - vl)/2;
    build(2*v+1, vl, c, a);
    build(2*v+2, c+1, vr, a);
    t[v] = max(t[2*v+1], t[2*v+2]);
}
ll sum(int v, int vl, int vr, int l, int r){
    if(l > vr || r < vl){
        return -inf - 1;
    }
    if(l <= vl && vr <= r)
        return t[v];
    int c = vl + (vr - vl)/2;
    ll q1 = sum(2*v+1, vl, c, l, r);
    ll q2 = sum(2*v+2, c+1, vr, l, r);
    return max(q1, q2);
}
void modify(int v, int vl, int vr, int pos, int x){
    if(vl == vr){
        t[v] = x;
        return;
    }
    int c = vl + (vr - vl)/2;
```

```

    if(c >= pos)
        modify(2*v + 1, vl, c, pos,x);
    else
        modify(2*v + 2,c +1,vr,pos,x);
    t[v] = max(t[2*v+1], t[2*v+2]);
}

```

Прибавление на отрезке

```

void update (int v, int vl, int vr, int l, int r, int add) {
    if (l > r)
        return;
    if (l == vl && vr == r)
        t[v] += add;
    else {
        int c = vl + (vr- vl)/2;
        update (v*2+1, vl, c, l, min(r,c), add);
        update (v*2+2, c+1, vr, max(l,c+1), r, add);
    }
}

```

```

int get (int v, int vl, int vr, int pos) {
    if (vl == vr)
        return t[v];
    int c = vl + (vr- vl)/2;
    if (pos <= c)
        return t[v] + get (v*2+1, vl, c, pos);
    else
        return t[v] + get (v*2+2, c+1, vr, pos);
}

```

Присвоение на отрезке

```

void push (int v) {
    if (t[v] != -1) {
        t[v*2+1] = t[v*2+2] = t[v];
        t[v] = -1;
    }
}

void update (int v, int vl, int vr, int l, int r, int color) {
    if (l > r)
        return;
    if (l == vl && vr == r)
        t[v] = color;
    else {
        push (v);
        int c = vl + (vr- vl)/2;
        update (v*2+1, vl, c, l, min(r,c), color);
        update (v*2+2, c+1, vr, max(l,c+1), r, color);
    }
}

int get (int v, int vl, int vr, int pos) {
    if (vl == vr)
        return t[v];
    push (v);
    int c = vl + (vr- vl)/2;
    if (pos <= c)
        return get (v*2+1, vl, c, pos);
    else
        return get (v*2+2, c+1, vr, pos);
}

```

5.2 Дерево Фенвика для суммы для одномерного случая

```

vector<int> t;
int n;

void init (int nn)
{
    n = nn;
    t.assign (n, 0);
}

int sum (int r)
{
    int result = 0;
    for (; r >= 0; r = (r & (r+1)) - 1)
        result += t[r];
    return result;
}

void inc (int i, int delta)
{
    for (; i < n; i = (i | (i+1)))
        t[i] += delta;
}

```

```

int sum (int l, int r)
{
    return sum (r) - sum (l-1);
}

void init (vector<int> a)
{
    init ((int) a.size());
    for (unsigned i = 0; i < a.size(); i++)
        inc (i, a[i]);
}

```

5.3 Дерево Фенвика для суммы для двумерного случая

```

vector <vector <int> > t;
int n, m;

int sum (int x, int y)
{
    int result = 0;
    for (int i = x; i >= 0; i = (i & (i+1)) - 1)
        for (int j = y; j >= 0; j = (j & (j+1)) - 1)
            result += t[i][j];
    return result;
}

void inc (int x, int y, int delta)
{
    for (int i = x; i < n; i = (i | (i+1)))
        for (int j = y; j < m; j = (j | (j+1)))
            t[i][j] += delta;
}

```

5.4 Система непересекающихся множеств

```

int root[101];
int get(int x){
    if(root[x] == x)
        re x;
    re root[x] = get(root[x]);
}

void merge(int a, int b){
    a = get(a);
    b = get(b);
    if(rand() % 2)
        swap(a,b);
    root[a] = b;
}

for(int i = 0; i < n; i++)
    root[i] = i;

```

5.4.1 Поддержка расстояний до лидера

```

void make_set (int v) {
    parent[v] = make_pair (v, 0);
    rank[v] = 0;
}

pair<int,int> find_set (int v) {
    if (v != parent[v].first) {
        int len = parent[v].second;
        parent[v] = find_set (parent[v].first);
        parent[v].second += len;
    }
    return parent[v];
}

void union_sets (int a, int b) {
    a = find_set (a) .first;
    b = find_set (b) .first;
    if (a != b) {
        if (rank[a] < rank[b])
            swap (a, b);
        parent[b] = make_pair (a, 1);
        if (rank[a] == rank[b])
            ++rank[a];
    }
}

```

6 Геометрия

6.1 Полярный угол

```
ld u = atan2(b, a);
if (u < 0) u += 2 * PI;
```

6.2 Скалярное произведение, угол между векторами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
double ans = acos((x1 * x2 + y1 * y2) /
sqrt((x1 * x1 + y1 * y1) * (x2 * x2 + y2 * y2)));
```

6.3 Площадь многоугольника

```
int n;
cin >> n;
vector<pair<int, int>>>a(n);
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cin >> a[i].X >> a[i].Y;
}
double s = 0;
for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
    s += (a[i + 1].X - a[i].X) * (a[i + 1].Y + a[i].Y);
}
s += (a[0].X - a[n-1].X) * (a[0].Y + a[n-1].Y);
```

6.4 Площадь треугольника

```
ld ans = (x2 - x1) * (y3 - y1) - (y2 - y1) * (x3 - x1);
labs(ans) / 2.0;
```

6.5 Расстояние от точки до прямой

a b c коэффициенты нормального уравнения прямой

```
ld ans = a*x + b*y + c;
ans /= sqrt(a*a + b*b);
```

6.6 Нормальное уравнение по двум точкам

```
int a = y1 - y2; int b = x2 - x1; int c = x1*y2 - x2*y1;
```

6.7 Построение выпуклой оболочки обходом Грэхэма $O(N \log N)$

```
struct pt {
    double x, y;
};

bool cmp (pt a, pt b) {
    return a.x < b.x || a.x == b.x && a.y < b.y;
}

bool cw (pt a, pt b, pt c) {
    return a.x*(b.y-c.y)+b.x*(c.y-a.y)+c.x*(a.y-b.y) < 0;
}

bool ccw (pt a, pt b, pt c) {
    return a.x*(b.y-c.y)+b.x*(c.y-a.y)+c.x*(a.y-b.y) > 0;
}

void convex_hull (vector<pt> & a) {
    if (a.size() == 1) return;
    sort (a.begin(), a.end(), &cmp);
    pt p1 = a[0], p2 = a.back();
    vector<pt> up, down;
    up.push_back (p1);
```

```
    down.push_back (p1);
    for (size_t i=1; i<a.size(); ++i) {
        if (i==a.size()-1 || cw (p1, a[i], p2)) {
            while (up.size()>=2 && !cw (up[up.size()-2], up[up.size()-1], a[i]))
                up.pop_back();
            up.push_back (a[i]);
        }
        if (i==a.size()-1 || ccw (p1, a[i], p2)) {
            while (down.size()>=2 && !ccw (down[down.size()-2], down[down.size()-1], a[i]))
                down.pop_back();
            down.push_back (a[i]);
        }
    }
    a.clear();
    for (size_t i=0; i<up.size(); ++i)
        a.push_back (up[i]);
    for (size_t i=down.size()-2; i>0; --i)
        a.push_back (down[i]);
}
```

7 Числа Фибоначчи

7.1 Свойства чисел Фибоначчи

Соотношение Кассини:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Правило "сложения":

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n.$$

Из предыдущего равенства при $k = n$ вытекает:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Из предыдущего равенства по индукции можно получить, что

$$F_{nk} \text{ всегда кратно } F_n.$$

Верно и обратное к предыдущему утверждению:

если F_m кратно F_n , то m кратно n .

НОД-равенство:

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}.$$

Теорема Цекендорфа утверждает, что любое натуральное число n можно представить единственным образом в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$N = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$$

где $k_1 \geq k_2 + 2, k_2 \geq k_3 + 2, \dots, k_r \geq 2$ (т.е. в записи нельзя использовать два соседних числа Фибоначчи).

Нетрудно получить и правило прибавления единицы к числу в фибоначчией системе счисления: если младшая цифра равна 0, то её заменяем на 1, а если равна 1 (т.е. в конце стоит 01), то 01 заменяем на 10. Затем "исправляем" запись, последовательно исправляя везде 011 на 100. В результате за линейное время будет получена запись нового числа.

Перевод числа в фибоначчией систему счисления осуществляется простым "жадным" алгоритмом: просто перебираем числа Фибоначчи от больших к меньшим и, если некоторое $F_k \leq n$, то F_k входит в запись числа n , и мы отнимаем F_k от n и продолжаем поиск.