ICPC TEAM REFERENCE DOCUMENT NN br of NRU HSE 2

| Содержание | | | | | |
|------------|-------------------|--|---------------|--|--|
| 1 | Ша | Шаблон | | | |
| 2 | Алг | оритмы на строки | 2 | | |
| | 2.1 | Префикс-функция | 2 | | |
| | 2.2 | Z-функция | 2 | | |
| | 2.3 | Хеширование | 2 | | |
| 3 | Алг | оритмы на графах | 2 | | |
| | 3.1 | Алгоритм Дейкстры $O(n^2)$ | 2 | | |
| | 3.2 | Алгоритм Дейкстры $O(log(n) \cdot m)$ | 2 | | |
| | 3.3 | Поток | 3 | | |
| | 3.4 | Поиск компонент сильной связно- | | | |
| | | сти, построение конденсации графа $O(N+M)$ | 3 | | |
| | 3.5 | Поиск мостов $O(N+M)$ | 3 | | |
| | 3.6 | Поиск точек сочленения | 4 | | |
| | 3.7 | Нахождение отрицательного цикла | • | | |
| | 0.1 | в графе | 4 | | |
| 4 | Про | остые алгоритмы | 4 | | |
| 4 | 4.1 | Решето Эратосфена $O(n)$ | 4 | | |
| | 4.2 | Решето Эратосфена | 4 | | |
| | 4.2 | генего Эрагосфена $O(n \cdot log(log(n))) \dots \dots$ | 4 | | |
| | 4.3 | | 4 | | |
| | 4.4 | Умножение чисел по модулю | 4 | | |
| | 4.4 | Функция Эйлера | $\frac{4}{5}$ | | |
| | $\frac{4.5}{4.6}$ | Алгоритм Евклида | 5 5 | | |
| | $\frac{4.0}{4.7}$ | Расширенный алгоритм Евклида | 9 | | |
| | 4.7 | Обратный элемент в кольце по модулю | 5 | | |
| | 4.8 | Нахождение всех простых по задан- | 9 | | |
| | 4.0 | ному модулю за линейное время | 5 | | |
| | 4.9 | | 5 | | |
| | 4.10 | Дискретное логарифмирование | 5 | | |
| | 4.10 | Китайская теорема об остатках | 3 | | |
| 5 | Стр | уктуры данных | 5 | | |
| | 5.1 | Дерево отрезков | 5 | | |
| | 5.2 | Дерево Фенвика для суммы для од- | | | |
| | | номерного случая | 6 | | |
| | 5.3 | Дерево Фенвика для суммы для од- | | | |
| | | номерного случая | 6 | | |
| | 5.4 | Система непересекающихся множеств | 6 | | |
| | | 5.4.1 Поддержка расстояний до | | | |
| | | лидера | 6 | | |
| 6 | Геог | метрия | 7 | | |
| | 6.1 | Полярный угол | 7 | | |
| | 6.2 | Скалярное произведение, угол меж- | | | |
| | | ду векторами | 7 | | |
| | 6.3 | Площадь многоугольника | 7 | | |
| | 6.4 | Площадь треугольника | 7 | | |
| | c r | D | 7 | | |

| | 6.6 | Нормальное уравнение по двум точ- | | |
|---|-------------------|-----------------------------------|---|--|
| | | кам | 7 | |
| 7 | 7 Числа Фибоначчи | | | |
| | 7.1 | Свойства чисел Фибоначчи | 7 | |

1 Шаблон

```
#define USE MATH DEFINES
 /\#include <bits/stdc++.h>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <vector>
#include <string>
#include <set>
#include <queue>
#include <utility>
#include <iomanip>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <numeric>
#include <cmath>
#include <stack>
\#include <map>
#include <deque>
#include <sstream>
using namespace std;
#define int long long
typedef vector<int> vi;
typedef vector<pair<int, int>> vii;
typedef long long ll;
typedef long double ld;
//#define pi M_PI
#define all(x) (x).begin(), (x).end()
#define pb push_back
#define re return
#define fr(x) for(int i = 0; i < (x); i++)
const int \inf = 1000000000 + 7;
signed main() {
    ios\_base::sync\_with\_stdio(0);
    \overline{\text{cin.tie}}(0);
    cout.tie(0);
```

2 Алгоритмы на строки

2.1 Префикс-функция

```
 \begin{array}{l} vector < int > prefix function (string s) \; \{ \\ int \; n = (int) \; s.length(); \\ vector < int > pi \; (n); \\ for \; (int \; i=1; \; i<n; \; ++i) \; \{ \\ int \; j = pi[i-1]; \\ while \; (j > 0 \; \&\& \; s[i] \; != s[j]) \\ j = pi[j-1]; \\ if \; (s[i] == s[j]) \; ++j; \\ pi[i] = j; \\ \} \\ return \; pi; \\ \} \\ \end{array}
```

2.2 Z-функция

```
 \begin{array}{l} {\rm vector}{<} {\rm int} > z\_{\rm function} \ ({\rm string} \ s) \ \{ \\ {\rm int} \ n=({\rm int}) \ s.{\rm length}(); \\ {\rm vector}{<} {\rm int} > z \ (n); \\ {\rm for} \ ({\rm int} \ i=1, \, l=0, \, r=0; \, i< n; \, ++i) \ \{ \\ {\rm if} \ (i<=r) \\ {\rm z[i]} = \min \ (r\text{-}i+1, \, z[i\text{-}l]); \\ {\rm while} \ (i+z[i] < n \ \&\& \ s[z[i]] == s[i+z[i]]) \\ {\rm ++z[i];} \\ {\rm if} \ (i+z[i]-1 > r) \\ {\rm l} = i, \, r = i+z[i]\text{-}1; \\ \} \\ {\rm return} \ z; \\ \} \\ \end{array}
```

2.3 Хеширование

```
\begin{array}{l} {\rm const\ int\ mod} = 1000000000 + 7; \\ {\rm const\ int\ q} = 1009; \\ {\rm vector} < ll > ph; \\ {\rm vector} < ll > pq; \\ {\rm void\ pq\_put()} \\ \{ & pq.pb(1); \\ {\rm for\ (size\_t\ i = 1;\ i < 100000;\ ++i)} \\ {\rm pq.pb((pq[i-1]\ *\ q)\ \%\ mod);} \\ \} \end{array}
```

```
 \begin{cases} & \text{ll } h = 0; \\ & \text{if } (ph.size())h = ph.back(); \\ & \text{for } (int \ i = 0; \ i < s.size(); \ i++) \\ & \qquad \qquad h = (h * q + s[i]) \ \% \ mod; \\ & \qquad \qquad ph.pb(h); \\ & \qquad \qquad \} \\ & \text{re } h; \\ \end{cases}   \begin{cases} & \text{ll } ans = ph[r]; \\ & \text{if } (l) \ \{ \\ & \qquad \qquad ans - = ph[l - 1] * pq[r - l + 1] \ \% \ mod; \\ & \qquad \qquad \text{if } (ans < 0)ans \ + = mod; \\ \end{cases}   \begin{cases} & \qquad \qquad \\ \end{cases}  re ans;  \end{cases}
```

3 Алгоритмы на графах

3.1 Алгоритм Дейкстры $O(n^2)$

was - брали вершину или нет v - список смежности d - массив расстояний для точки х

```
int d[2001]:
int was[2001];
vector < pair < int, int >> v[2001];
int n;
void dijkstra(int x) {
           for (int i = 0; i < n; i++)
                      d[i] = inf;
           d[x] = 0;
           for (int it = 0; it < n; it++)
                       \quad \text{int id} = \text{-1};
                       \begin{array}{l} \text{for (int } i=0; \, i< n; \, i++) \\ \quad \quad \text{if (!was[i])if (id==-1 \mid\mid d[id]>d[i])} \end{array}
                                              id = i;
                       was[id] = -1;
                       for (auto p : v[id]) {
                                  int y = p.first;
                                  int t = p.second;
                                  d[y] = \min(d[y], d[id] + t);
           }
}
```

3.2 Алгоритм Дейкстры $O(log(n) \cdot m)$

d - массив расстояний для точки х

```
int d[3001];
vector{<}pair{<}int,\ int{>>}\ v[3001];
bool f(\text{int } x, \text{ int } y)  { if (d[x] != d[y])
                        return d[x] < d[y];
            return x < y;
\stackrel{\mathtt{'}}{\mathrm{set}}<\mathrm{int},\ \mathrm{bool}(^{*})(\mathrm{int},\ \mathrm{int})>\mathrm{s}(\mathrm{f});
void dijkstra(int x) {
             for (int i = 0; i <= n; i++)
            {
                         d[i] = inf;
            d[x] = 0;
s.insert(x);
            while (!s.empty()) {
    int x = *s.begin();
                         s.erase(x);
                         for (auto p : v[x]) {
                                     int y = p.first;
int t = p.second;
                                     if (d[y] > d[x] + t) {
                                                  s.erase(y);
                                                  d[y] = d[x] + t;
                                                  s.insert(y);
                         }
            }
```

3.3 Поток

```
ll c[102][102];
ll f[102][102];
int was[102];
int p[102];
vector < vector < int >> v(102);
ll dfs(int x, ll capacity) {
         if (x == t) {
                  return capacity;
         was[x] = 1;
         for (auto y : v[x]) {
                  ll flow = min(c[x][y] - f[x][y], capacity);
                  if (!was[y] \&\& flow > 0) {

ll \ delta = dfs(y, flow);
                            if (delta == 0)
                                     continue;
                            return delta;
                   }
         return 0;
}
void calc(int x, ll cap) {
         int v = x:
         while (y != t) \{ f[y][p[y]] += cap; \}
                  f[p[y]][y] = cap;
                  y = p[y];
int main() {
         int n, k;
         cin >> n >> k:
         for (int i = 0; i < k; i++) {
                   int a, b; ll w;
                   cin >> a >> b >> w;
                  c[a][b] = w;

c[b][a] = w;
                  v[a].push_back(b);
v[b].push_back(a);
         }
         ll \ ans = 0;
         while (ll cap = dfs(1, 100000000000000000)) {
                  calc(1, cap);
                   ans += cap;
                   memset(was, 0, sizeof(was));
                   memset(p, 0, sizeof(p));
         }
         cout << ans;
         return 0;
}
```

3.4 Поиск компонент сильной связности, построение конденсации графа O(N+M)

Дан ориентированный граф G, множество вершин которого V и множество рёбер — E. Петли и кратные рёбра допускаются. Обозначим через n количество вершин графа, через m — количество рёбер.

Компонентой сильной связности (strongly connected component) называется такое (максимальное по включению) подмножество вершин C, что любые две вершины этого подмножества достижимы друг из друга, т.е. для $\forall u,v \in C$:

```
u\mapsto v,v\mapsto u
```

```
vector < vector {<} int {>} > g, \, gr;
vector<char> used;
vector<int> order, component;
void dfs1 (int v) {
             used[v] = true;
             for (size_t i=0, i<g[v].size(); ++i) if (!used[ g[v][i] ]) dfs1 (g[v][i]);
             order.push back (v);
}
void dfs2 (int v) {
             used[v] = true;
             \begin{array}{c} {\rm component.push\_back} \ (v); \\ {\rm for} \ ({\rm size\_t} \ i{=}0; \ i{<}{\rm gr[v].size}(); \ +{+}i) \\ {\rm if} \ ({\rm !used[} \ {\rm gr[v[li]]})) \end{array}
                                       dfs2 (gr[v][i]);
\mathrm{int}\ \mathrm{main}()\ \{
             int n;
              ... read n ...
             \quad \text{for } (;;) \ \{
                          int a, b;
                           \dots read edge (a,b) \dots
                          g[a].push_back (b);
gr[b].push_back (a);
             }
             used.assign (n, false);
             for (int i=0; i< n; ++i)
                          if (!used[i])
                                       dfs1 (i);
             used.assign (n, false);
             for (int i=0; i < n; ++i) {
                          int\ v=order[n\hbox{-}1\hbox{-}i];
                          if (!used[v]) {
                                       dfs2(v);
                                        ... cout component ...
                                       component.clear();
             }
}
```

3.5 Поиск мостов O(N + M)

Пусть дан неориентированный граф. Мостом называется такое ребро, удаление которого делает граф несвязным (или, точнее, увеличивает число компонент связности). Требуется найти все мосты в заданном графе.

```
const int MAXN
vector<int> g[MAXN];
bool used[MAXN];
int timer, tin[MAXN], fup[MAXN];
void dfs (int v, int p = -1) {
            (\text{int } \mathbf{v}, \text{ int } \mathbf{p} = \mathbf{r}) (\text{used}[\mathbf{v}] = \text{true}; (\text{tin}[\mathbf{v}] = \text{fup}[\mathbf{v}] = \text{timer} + +;
            for (size_t i=0; i<g[v].size(); ++i) {
    int to = g[v][i];
                        if (to == p) continue;
                        if (used[to])
                                   fup[v] = min (fup[v], tin[to]);
                                   dfs (to, v);
                                   fup[v] = min (fup[v], fup[to]);
                                   if (fup[to] > tin[v])
IS_BRIDGE(v,to);
            }
}
{\tt void\ find\_bridges()\ \{}
            timer = 0:
            for (int i = 0; i < n; ++i)
                       used[i] = false;
            for (int i=0; i<n; ++i)
                        if (!used[i])
                                   dfs (i);
}
```

3.6 Поиск точек сочленения

Пусть дан связный неориентированный граф. Точкой сочленения (или точкой артикуляции, англ. "cut vertex"или "articulation point") называется такая вершина, удаление которой делает граф несвязным.

```
\begin{array}{l} {\rm vector}{<} {\rm int}{>} \ {\rm g[MAXN]}; \\ {\rm bool} \ {\rm used[MAXN]}; \end{array}
int timer, tin[MAXN], fup[MAXN];
void dfs (int v, int p = -1) {
                used[v] = true;

tin[v] = fup[v] = timer++;

int children = 0;
                \begin{array}{l} \text{for (size\_t i=0; i<g[v].size(); ++i) } \\ \text{int to = g[v][i];} \end{array}
                                 if (to == p) continue; if (used[to])
                                                  \widetilde{\operatorname{fup}[v]} = \min \; (\operatorname{fup}[v], \, \operatorname{tin}[\operatorname{to}]);
                                 else {
                                                  \begin{array}{l} {\rm dfs}\ ({\rm to},\ v); \\ {\rm fup}[v] = {\rm min}\ ({\rm fup}[v],\ {\rm fup}[{\rm to}]); \\ {\rm if}\ ({\rm fup}[{\rm to}] > = {\rm tin}[v]\ \&\&\ p\ != -1) \end{array}
                                                                  IS_CUTPOINT(v);
                                                   ++children;
                if (p == -1 \&\& \text{ children} > 1)
                                 IS CUTPOINT(v);
}
int main() {
                int n;
                ... read n & g ...
                timer = 0:
                for (int i=0; i< n; ++i)
                                 used[i] = false;
                dfs (0);
}
```

3.7 Нахождение отрицательного цикла в графе

```
struct edge {
           int\ a,\ b,\ cost;
int n, m;
vector<edge> e;
const int \bar{\text{INF}} = 10000000000;
void solve() {
            vector<int> d (n);
            vector < int > p(n, -1);
            for (int i=0; i< n; ++i) {
                        x = -1:
                        \begin{array}{l} x = -1; \\ \text{for (int j=0; j<m; ++j)} \\ \text{if (d[e[j].b] > d[e[j].a] + e[j].cost) } \{ \\ \text{d[e[j].b] = max (-INF, d[e[j].a] + e[j].cost);} \\ \text{p[e[j].b] = e[j].a;} \\ \text{...} \\ \text{...} \\ \text{...} \\ \text{...} \end{array} 
                                                   = e[j].b;
                                    }
            }
            if (x == -1)
                        cout << "No negative cycle found.";
            else \{
                        int\ y=x;
                        for (int i=0; i< n; ++i)
                                   y = p[y];
                        vector<int> path;
                        for (int cur=y; ; cur=p[cur]) {
                                    path.push_back (cur);
                                    if (cur = y \&\& path.size() > 1)
break;
                        reverse (path.begin(), path.end());
```

```
\begin{array}{c} cout << "Negative \ cycle: "; \\ for \ (size\_t \ i=0; \ i< path. size(); \ ++i) \\ cout << path[i] << \ ' \ '; \\ \end{array} \}
```

4 Простые алгоритмы

4.1 Решето Эратосфена O(n)

```
рг - все простые числа до n lp - минимальный простой делитель числа i const int N = 10001000; int lp[N + 1]; vector<int> pr; void pcalc() { for (int i = 2; i <= N; ++i) { if (lp[i] == 0) { lp[i] = i; pr.push_back(i); } for (int j = 0; j < (int) pr.size() && pr[j] <= lp[i] && i * pr[j] <= N; ++j) lp[i * pr[j]] = pr[j]; } } lp[i * pr[j]] = pr[j]; } }
```

4.2 Решето Эратосфена

```
O(n \cdot log(log(n)))
```

d[i] == 0 если число і простое long long d[10000000];

4.3 Умножение чисел по модулю

```
ll mod; long long mulmod(long long n, long long p){ if (p==0) return 0; if (p==1) return n % mod; long long tmp = mulmod(n, p/2); long long ans = (tmp + tmp) % mod; if (p\ \%\ 2==1) ans = (ans + n) % mod; return ans; }
```

4.4 Функция Эйлера

Количество таких чисел в отрезке [1; n], наибольший общий делитель которых с n равен единице.

Если р — простое число, то ϕ (p)=p-1. (Это очевидно, т.к. любое число, кроме самого р, вза-имно просто с ним.)

Если р — простое, а — натуральное число, то $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$. (Поскольку с числом p^a не взачимно просты только числа вида $pk(k \in \mathcal{N})$, которых $p^a/p = p^{a-1}$ штук.)

Если а и b взаимно простые, то $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

Самое известное и важное свойство функции Эйлера выражается в теореме Эйлера:

```
a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m},
```

где a и m взаимно просты. В частном случае, когда m простое, теорема Эйлера превращается в так называемую малую теорему Ферма:

4.5 Алгоритм Евклида

```
int gcd (int a, int b) {
          return b ? gcd (b, a % b) : a;
}
```

4.6 Расширенный алгоритм Евклида

```
\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= \gcd(a,b). \\ &\text{int gcd (int a, int b, int \& x, int \& y) } \{ \\ &\text{if (a == 0) } \{ \\ &\text{x = 0; y = 1;} \\ &\text{return b;} \\ \} \\ &\text{int x1, y1;} \\ &\text{int d = gcd (b\%a, a, x1, y1);} \\ &\text{x = y1 - (b / a) * x1;} \\ &\text{y = x1;} \\ &\text{return d;} \\ \} \end{aligned}
```

4.7 Обратный элемент в кольце по модулю

Обратным к числу а по модулю m называется такое число b, что:

```
\begin{aligned} a \cdot b &\equiv 1 \pmod{m} \\ &\text{int } \mathbf{x}, \, \mathbf{y}; \\ &\text{int } \mathbf{g} = \mathbf{gcdex} \; (\mathbf{a}, \, \mathbf{m}, \, \mathbf{x}, \, \mathbf{y}); \\ &\text{if } (\mathbf{g} \; ! = 1) \\ &\text{cout} << \text{"no solution"}; \\ &\text{else } \{ \\ &\text{x} = (\mathbf{x} \; \% \; \mathbf{m} + \mathbf{m}) \; \% \; \mathbf{m}; \\ &\text{cout} << \mathbf{x}; \\ \} \end{aligned}
```

4.8 Нахождение всех простых по заданному модулю за линейное время

```
 \begin{array}{l} r[1] = 1; \\ \text{for (int i=2; i< m; ++i)} \\ r[i] = (m - (m/i) * r[m\%i] \% m) \% m; \end{array}
```

4.9 Дискретное логарифмирование

Задача дискретного логарифмирования заключается в том, чтобы по данным целым a, b, m решить уравнение:

```
a^x = b \pmod{m},
     где а и т — взаимно просты
int solve (int a, int b, int m) {
           int n = (int) \text{ sqrt } (m + .0) + 1;
          \begin{array}{l} {\rm int\ an} = 1; \\ {\rm for\ (int\ i=0;\ i< n;\ ++i)} \\ {\rm an} = ({\rm an\ *\ a})\ \%\ m; \end{array}
           map < int, int > vals;
          for (int i=1, cur=an; i<=n; ++i) {
                     \quad \text{if } (!vals.count(cur)) \\
                     vals[cur] = i;
cur = (cur * an) % m;
           }
           for (int i=0, cur=b; i<=n; ++i) {
                      if (vals.count(cur)) {
                                int ans = vals[cur] * n - i;
                                if (ans < m)
                                           return ans:
                      cur = (cur * a) % m;
           return -1:
}
```

4.10 Китайская теорема об остатках

```
\begin{array}{l} \mbox{for (int $i\!=\!0$; $i\!<\!k$; $+\!+\!i$) $\{} \\ x[i] = a[i]; \\ \mbox{for (int $j\!=\!0$; $j\!<\!i$; $+\!+\!j$) $\{} \\ x[i] = r[j][i] * (x[i] - x[j]); \\ \\ x[i] = x[i] \% \ p[i]; \\ \mbox{if } (x[i] < 0) \ x[i] += p[i]; \\ \mbox{\}} \end{array}
```

5 Структуры данных

5.1 Дерево отрезков

```
ll t[4*100000];
void build(int v, int vl,int vr, vi& a){
       if(vl == vr) \{ \\ t[v] = a[vl];
                return:
         int c = vl + (vr - vl)/2;
        \text{build}(2*v+1,vl,c,a);
        \begin{array}{l} \text{build}(2^*\text{v}+1,1,2,3);\\ \text{build}(2^*\text{v}+2,\text{c}+1,\text{vr},\text{a});\\ \text{t}[\text{v}] = \max(\text{t}[2^*\text{v}+1],\,\text{t}[2^*\text{v}+2]); \end{array}
il sum(int v, int vl, int vr, int l, int r){
        if(l) > vr \mid\mid r < vl)
                return -inf - 1;
        if(l <= vl && vr <= r)
        \begin{array}{l} {\rm return} \ t[v]; \\ {\rm int} \ c = vl + (vr \cdot vl)/2; \\ {\rm ll} \ q1 = {\rm sum}(2^*v+1, \, vl, \, c, \, l, r); \\ {\rm ll} \ q2 = {\rm sum}(2^*v+2, c+1, vr, l, r); \\ \end{array} 
        return max(q1, q2);
void modify(int v, int vl, int vr, int pos, int x){
       if(vl == vr) \{ \\ t[v] = x;
                return:
        int c = vl + (vr - vl)/2;
```

```
if(c>=pos)\\
          modify(2*v + 1, vl, c, pos,x);
          modify(2*v + 2,c +1,vr,pos,x);
     t[v] = \max(t[2*v+1], t[2*v+2]);
}
Прибавление на отрезке
void update (int v, int vl, int vr, int l, int r, int add) {
     if (l > r)
          return;
     if\ (l == vl\ \&\&\ vr == r)
          t[v] \mathrel{+}= add;
     else {
           \begin{array}{l} \text{int } c = vl + (vr \cdot vl)/2; \\ \text{update } (v^*2 + 1, \, vl, \, c, \, l, \, \min(r, c), \, add); \\ \text{update } (v^*2 + 2, \, c + 1, \, vr, \, \max(l, c + 1), \, r, \, add); \\ \end{array} 
}
int get (int v, int vl, int vr, int pos) {
     if (vl == vr)
          return t[v];
     int c = vl + (vr - vl)/2;
     if\ (pos <= c)
          \mathrm{return}\ t[v]\ +\ \mathrm{get}\ (v*2+1,\ vl,\ c,\ pos);
           return t[v] + get (v*2+2, c+1, vr, pos);
}
Присвоение на отрезке
\begin{array}{c} \mathrm{void} \ \mathrm{push} \ (\mathrm{int} \ \mathrm{v}) \ \{ \\ \mathrm{if} \ (\mathrm{t[v]} \ != -1) \ \{ \end{array}
                     t[v*2+1] = t[v*2+2] = t[v];
                      t[v] = -1;
void update (int v, int vl, int vr, int l, int r, int color) {
           if (l > r)
                     return;
           if (l == vl \&\& vr == r)
                     t[v] = color;
           else {
                      push (v);
                      int c = vl + (vr - vl)/2;
                      update (v*2+1, vl, c, l, min(r,c), color);
                      update (v^*2+2, c+1, vr, max(l,c+1), r, color);
int get (int v, int vl, int vr, int pos) {
           if (vl == vr)
                     return t[v];
           push (v);
           int c = vl + (vr - vl)/2;
           if (pos \le c)
                     return get (v*2+1, vl, c, pos);
           else
                      return get (v*2+2, c+1, vr, pos);
}
```

5.2 Дерево Фенвика для суммы для одномерного случая

```
vector<int> t;
int n;
void init (int nn)
{
         n = nn;
         t.assign (n, 0);
\mathrm{int}\ \mathrm{sum}\ (\mathrm{int}\ r)
         int result = 0:
         for (; r >= 0; r = (r \& (r+1)) - 1)
                   result += t[r];
         return result;
}
void inc (int i, int delta)
{
         for (; i < n; i = (i | (i+1)))
                   t[i] += delta;
}
```

```
\label{eq:continuous_section} \begin{cases} & \text{ return sum (r) - sum (l-1);} \\ \\ & \text{ return sum (r) - sum (l-1);} \\ \\ & \text{ void init (vector < int > a)} \\ \\ & \text{ init ((int) a.size());} \\ & \text{ for (unsigned } i = 0; \, i < a.size(); \, i++) \\ & \text{ inc (i, a[i]);} \\ \\ \\ \end{cases}
```

5.3 Дерево Фенвика для суммы для одномерного случая

5.4 Система непересекающихся множеств

```
\begin{split} &\inf \operatorname{root}[101]; \\ &\inf \operatorname{get}(\operatorname{int} x) \{\\ &\operatorname{if}(\operatorname{root}[x] == x) \\ &\operatorname{re} x; \\ &\operatorname{re} \operatorname{root}[x] = \operatorname{get}(\operatorname{root}[x]); \\ \} \\ &\operatorname{void} \operatorname{merge}(\operatorname{int} a, \operatorname{int} b) \{\\ &\operatorname{a} = \operatorname{get}(a); \\ &\operatorname{b} = \operatorname{get}(b); \\ &\operatorname{if}(\operatorname{rand}() \% \ 2) \\ &\operatorname{swap}(a,b); \\ &\operatorname{root}[a] = b; \\ \} \\ &\operatorname{for}(\operatorname{int} \ i = 0; \ i < n; \ i++) \\ &\operatorname{root}[i] = i; \end{split}
```

5.4.1 Поддержка расстояний до лидера

```
 \begin{array}{l} \mbox{void make\_set (int v) \{} \\ & \mbox{parent[v] = make\_pair (v, 0);} \\ & \mbox{rank[v] = 0;} \\ \mbox{\}} \\ \mbox{pair<int,int> find\_set (int v) \{} \\ & \mbox{if (v != parent[v].first) \{} \\ & \mbox{int len = parent[v].second;} \\ & \mbox{parent[v] = find\_set (parent[v].first);} \\ & \mbox{parent[v].second += len;} \\ \mbox{\}} \\ & \mbox{return parent[v];} \\ \mbox{\}} \\ \mbox{void union\_sets (int a, int b) \{} \\ & \mbox{a = find\_set (a) .first;} \\ & \mbox{b = find\_set (b) .first;} \\ & \mbox{if (a != b) \{} \\ & \mbox{if (rank[a] < rank[b])} \\ & \mbox{swap (a, b);} \\ & \mbox{parent[b] = make\_pair (a, 1);} \\ & \mbox{if (rank[a] == rank[b])} \\ & \mbox{++rank[a];} \\ \mbox{\}} \\ \mbox{\}} \\ \mbox{\}} \\ \mbox{} \end{array}
```

6 Геометрия

6.1 Полярный угол

```
\begin{array}{l} ld\; u = atan2(b,\,a);\\ if\; (u < 0)\; u \; += \; 2\; *\; PI; \end{array}
```

6.2 Скалярное произведение, угол между векторами

```
\begin{split} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{double ans} &= \operatorname{acos}((\mathbf{x}1 * \mathbf{x}2 + \mathbf{y}1 * \mathbf{y}2) / \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{r}\mathbf{t}((\mathbf{x}1 * \mathbf{x}1 + \mathbf{y}1 * \mathbf{y}1) * (\mathbf{x}2 * \mathbf{x}2 + \mathbf{y}2 * \mathbf{y}2))); \end{split}
```

6.3 Площадь многоугольника

```
\begin{split} & \text{int } n; \\ & \text{cin} >> n; \\ & \text{vector} < \text{pair} < \text{int, int} >> a(n); \\ & \text{for (int } i = 0; \ i < n; \ i++) \ \{ \\ & \text{cin} >> a[i].X >> a[i].Y; \\ \} \\ & \text{double } s = 0; \\ & \text{for (int } i = 0; \ i < n - 1; \ i++) \ \{ \\ & \text{s} += (a[i+1].X - a[i].X)^*(a[i+1].Y + a[i].Y); \\ \} \\ & \text{s} += (a[0].X - a[n-1].X)^*(a[0].Y + a[n-1].Y); \end{split}
```

6.4 Площадь треугольника

ld ans = (x2 - x1) * (y3 - y1) - (y2 - y1) * (x3 - x1); labs(ans) / 2.0;

6.5 Расстояние от точки до прямой

а b с коэффициенты нормального уравнения прямой

 $\begin{array}{l} ld \; ans = a^*x + b \; *\; y + c; \\ ans \; / = sqrt(a^*a + b^*b); \end{array}$

6.6 Нормальное уравнение по двум точкам

int a = y1 - y2; int b = x2 - x1; int c = x1*y2 - x2*y1;

7 Числа Фибоначчи

7.1 Свойства чисел Фибоначчи

Соотношение Кассини:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n.$$
 Правило "сложения": $F_{n+k}=F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n.$ Из предыдущего равенства при $\mathbf{k}=\mathbf{n}$ вытека-

Из предыдущего равенства при k=n вытека ет:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Из предыдущего равенста по индукции можно получить, что

 F_{nk} всегда кратно F_n .

Верно и обратное к предыдущему утверждение:

если F_m кратно F_n , то m кратно n. НОД-равенство:

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}.$$

Теорема Цекендорфа утверждает, что любое натуральное число n можно представить единственным образом в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$N=F_{k_1}+F_{k_2}+\ldots+F_{k_r}$$
 где $k_1\geq k_2+2, k_2\geq k_3+2,\ldots,k_r\geq 2$ (т.е. в записи нельзя использовать два соседних числа Фибоначчи).

Нетрудно получить и правило прибавления единицы к числу в фибоначчиевой системе счисления: если младшая цифра равна 0, то её заменяем на 1, а если равна 1 (т.е. в конце стоит 01), то 01 заменяем на 10. Затем "исправляем" запись, последовательно исправляя везде 011 на 100. В результате за линейное время будет получена запись нового числа.

Перевод числа в фибоначчиеву систему счисления осуществляется простым "жадным"алгоритмом: просто перебираем числа Фибоначчи от больших к меньшим и, если некоторое $F_k \leq n$, то F_k входит в запись числа n, и мы отнимаем F_k от n и продолжаем поиск.