用向量方法巧解初中几何题

2021 年 2 月 21 日

1 题目

在四边形 ABCD 中，BA 平方 $\angle$DBC，且 $\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$，点 E 是 BC 的中点，连接 DE 交 AB 于点 F.

(1) 当 $\mathrm{AB} = 3\mathrm{BF}$ 时，求 $\angle$DBA 的度数；

(2) 直接写出 $\tan\angle \mathrm{BDE}$ 的最大值.

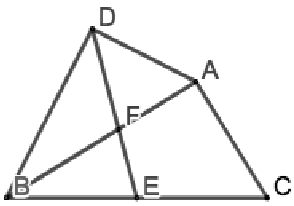

图 1-1: 题图

(1) **解**：以点 B 作为原点, 设 |BD| 是单位长度, 令 $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (1,0)$, 设 $\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{CBA} = \alpha$，设 $|\mathrm{BE}| = x$，如图所示 (图 1-2)：

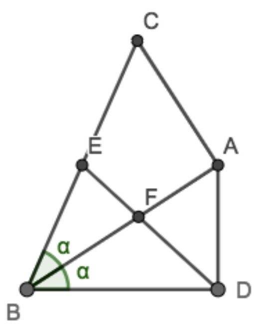

图 1-2: 题图重绘

于是

$$|\mathrm{BC}| = 2\,|\mathrm{BE}| = 2x, \quad |\mathrm{BA}| = |\mathrm{BC}|\cos\alpha = 2x\,\cos\alpha$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = 2x\,\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{1.1}$$

并且有

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = x\,(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \tag{1.2}$$

于是

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (x\cos 2\alpha - 1, x\sin 2\alpha) \tag{1.3}$$

由于线段 DE 交 BA 于点 F，故存在 $t > 0$，使得

$$\frac{1}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{DE}} \tag{1.4}$$

展开得

$$\frac{2}{3}x\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha) = (1,0) + t\,(x\,\cos 2\alpha - 1, x\,\sin 2\alpha) \tag{1.5}$$

两个向量相等的充分必要条件是它们的每个对应分量都相等，从而得

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x\,(\cos\alpha)^2 = 1 + tx\,\cos 2\alpha - t \\ \dfrac{1}{3}x\,\sin 2\alpha = tx\,\sin 2\alpha \end{cases} \tag{1.6}$$

由于 $\alpha \neq 0$，故首先解出 $t = \dfrac{1}{3}$，再代入方程组第一个式子得

$$\frac{2}{3}x\,(\cos\alpha)^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\left(2\,(\cos\alpha)^2 - 1\right) \tag{1.7}$$

解出 $x = 2$．由几何关系，我们有

$$|\mathrm{BA}| = |\mathrm{BC}|\,\cos\alpha = 2x\,\cos\alpha \tag{1.8}$$
$$|\mathrm{BD}| = |\mathrm{BA}|\,\cos\alpha = 2x\,(\cos\alpha)^2 = 1 \tag{1.9}$$

由此可得

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ. \tag{1.10}$$

□

(2) **解**： 过点 E 作 BD 的垂线，垂足为 E′，由第一小题得

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = (x\,\cos 2\alpha, x\,\sin 2\alpha) \tag{2.1}$$

从而

$$|\mathrm{BE}'| = x\,\cos 2\alpha, \quad |\mathrm{E}'\mathrm{E}| = x\,\sin 2\alpha \tag{2.2}$$

当 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，

$$|\mathrm{E}'\mathrm{D}| = |\mathrm{BD}| - |\mathrm{BE}'| = 1 - x\,\cos 2\alpha \tag{2.3}$$

是几何事实，并且此时有

$$\tan \angle \mathrm{BDE} = \frac{|\mathrm{E'E}|}{|\mathrm{E'D}|} = \frac{x \sin 2\alpha}{1 - x\cos 2\alpha} := g(a) \tag{2.4}$$

令 $h(a) = 1 - x\cos 2\alpha$ 并且简记做 h，我们来研究函数 g 在开区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 的单调性，求导可得：

$$g'(\alpha) = \frac{2x\cos 2\alpha\,(1 - x\cos 2\alpha) - 2x\sin 2\alpha\, x\sin 2\alpha}{h^2} \tag{2.5}$$

整理得：

$$h^2\, g'(\alpha) = 2x\,(\cos 2\alpha - x) \tag{2.6}$$

又由第一题结论得 $x = \dfrac{1}{2\,(\cos\alpha)^2}$，代入得：

$$\frac{h^2 g'(\alpha)}{2x} = \cos 2\alpha - \frac{1}{2\,(\cos\alpha)^2} = 2\,(\cos\alpha)^2 - \frac{1}{2\,(\cos\alpha)^2} - 1 \tag{2.7}$$

于是：

$$2\,(\cos\alpha)^2\,\frac{h^2 g'(\alpha)}{2x} = \left(2\,(\cos\alpha)^2\right)^2 - 2\,(\cos\alpha)^2 - 1 \tag{2.8}$$

令 $t = 2\,(\cos\alpha)^2$，得

$$2\,(\cos\alpha)^2\,\frac{h^2 g'(\alpha)}{2x} = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \tag{2.9}$$

从而 $g'(\alpha) > 0,\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$．由此可知，对任意 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$，恒有 $g(\alpha) < g(\frac{\pi}{4})$．同理可证 α 位于 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的情形．从而当 α 取 $\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan \angle \mathrm{BDE}$ 取得最大值，并且

$$\tan \angle \mathrm{BDE} = g(\alpha) \le g(\frac{\pi}{4}) = 1. \tag{2.10}$$

□