MLE / MAP

Jeonghun Yoon

Terms

Bayes rule

Maximum Likelehood Estimate (MLE)

Maximum A Posteriori Estimate (MAP)

Bayes rule

likelihood
(우도 값)

prior
(사전 확률)

$$p(\theta|\mathbb{x}) = \frac{p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)}{\sum p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)}$$

posteriori
(사후 확률)

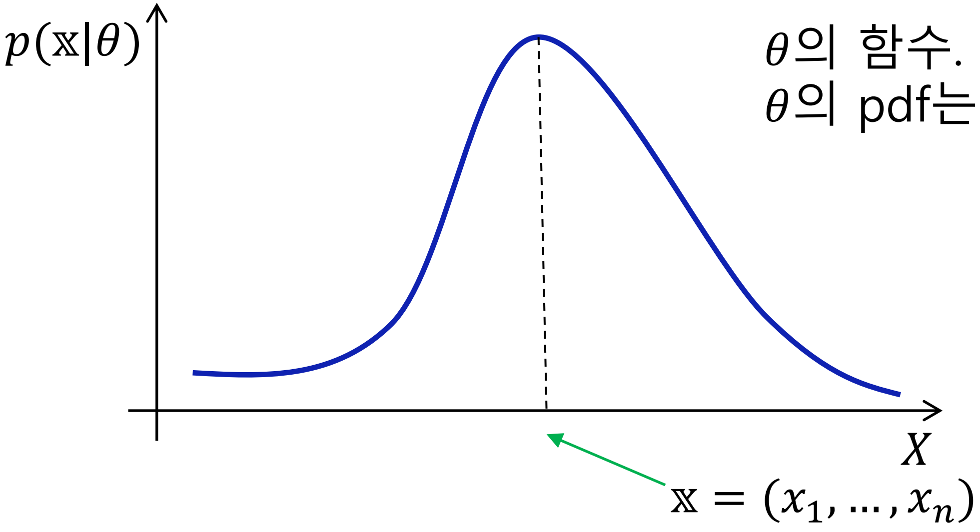
- 사후 확률 : 관찰 값들이 관찰 된 후에 모수(parameter)의 발생 확률을 구한다.
- 사전 확률 : 관찰 값들이 관찰 되기 전에 모수의 발생 확률을 구한다.
- 우도 값 : 모수의 값이 주어졌을 때 관찰 값들이 발생할 확률

Maximum Likelihood Estimate

$\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n)$
우도(likelihood)는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathcal{L}(\theta) = p(\mathbb{x}|\theta)$$

변수(parameter) θ가 주어졌을 때, data set $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (관찰 된, observed) 를 얻을 수 있는(obtaining) 확률



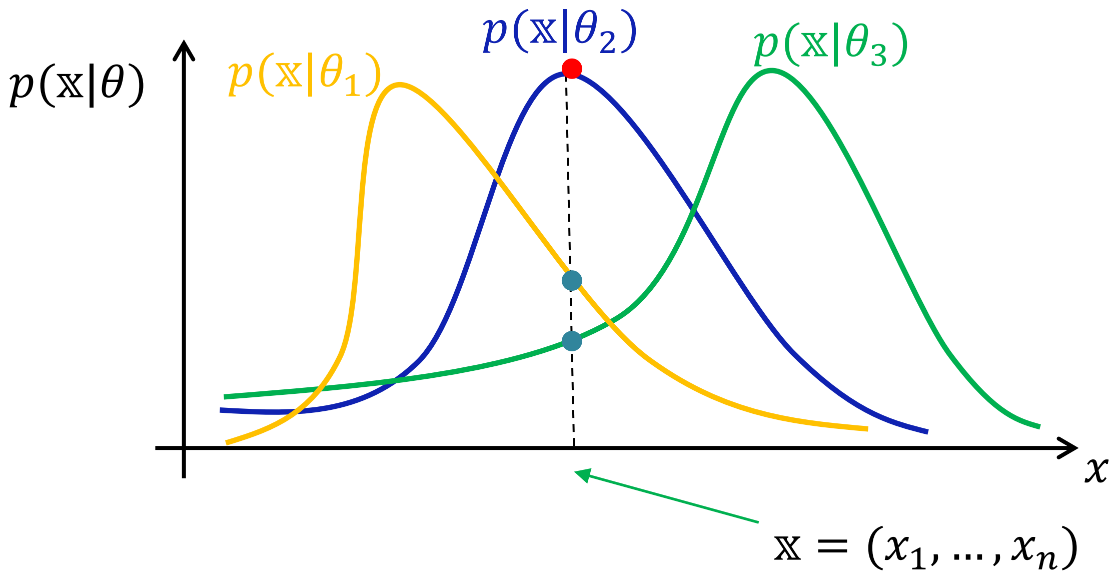
θ의 함수.
θ의 pdf는 아님.

Maximum Likelihood Estimate

Maximum Likelihood Estimate는 다음과 같이 정의 된다.

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \arg\max_{\theta} p(\mathbb{x}|\theta)$$

관찰 된 data set $\mathbb{x} = (x_1, \ldots, x_n)$을 얻을 수 있는 확률이 가장 큰 θ가 MLE이다.



$\hat{\theta} = \theta_2$

Maximum A Posteriori Estimate

우리가 likelihood function $p(\mathbb{x}|\theta)$와 prior $p(\theta)$를 알 때, Bayes rule에 의하여 posteriori function의 값을 구할 수 있다.

likelihood
(우도 값)

prior
(사전 확률)

$$p(\theta|\mathbb{x}) = \frac{p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)}{\sum p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)}$$

posteriori
(사후 확률)

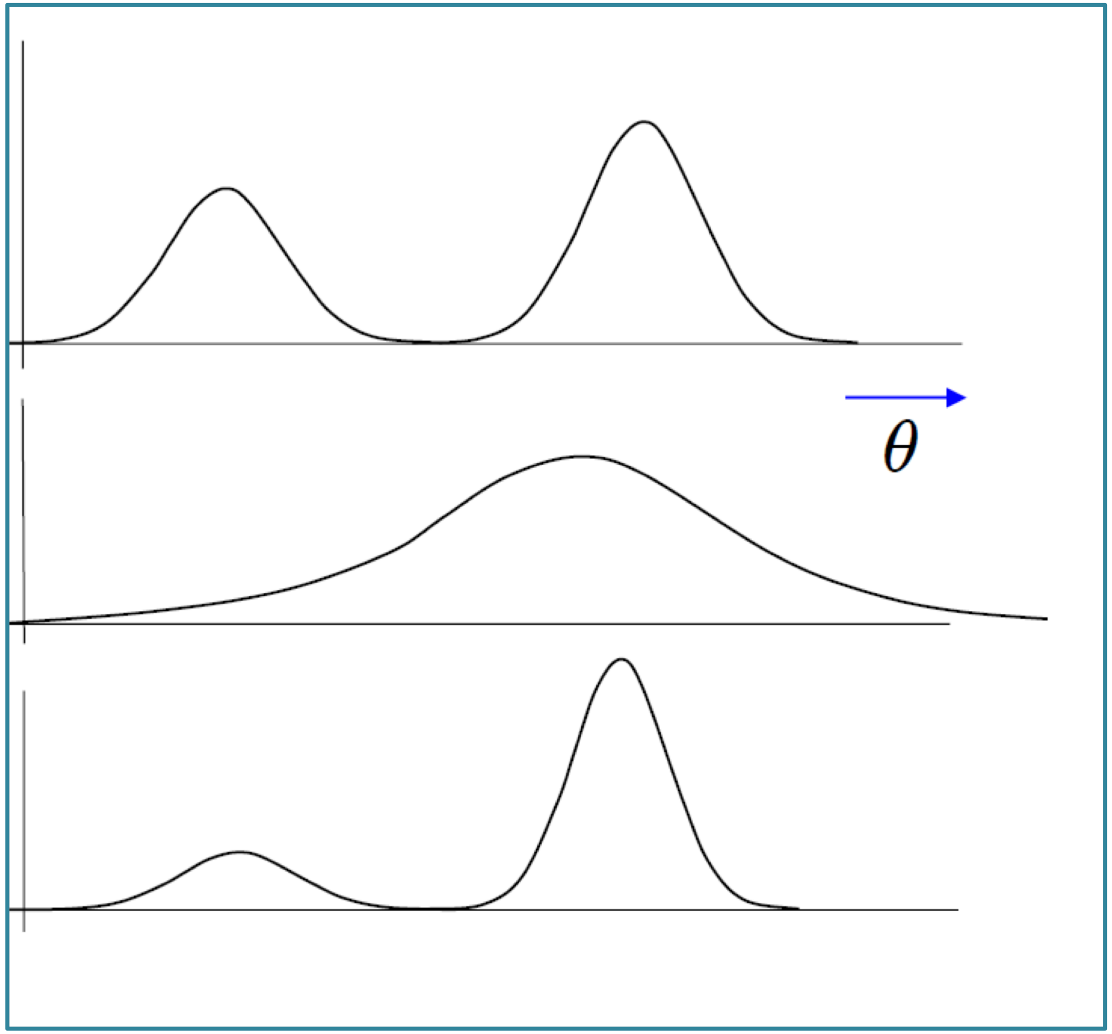
$$p(\theta|\mathbb{x}) \propto p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)$$

MLE vs MAP

Likelihood
$p(\mathbb{x}|\theta)$

Prior
$p(\theta)$

Posterior
$p(\theta|\mathbb{x}) \propto p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)$

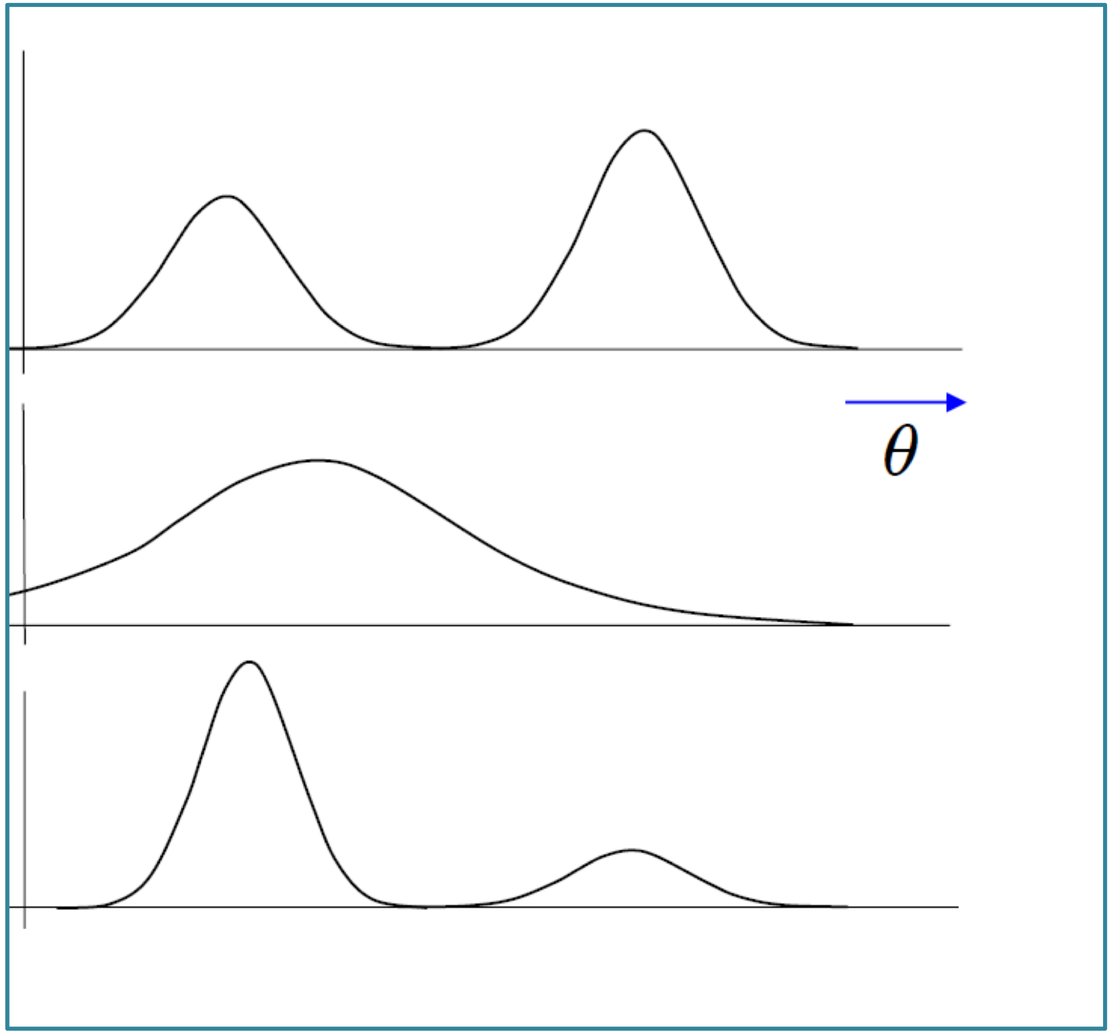


MLE vs MAP

Likelihood
$p(\mathbb{x}|\theta)$

Prior
$p(\theta)$

Posterior
$p(\theta|\mathbb{x}) \propto p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)$

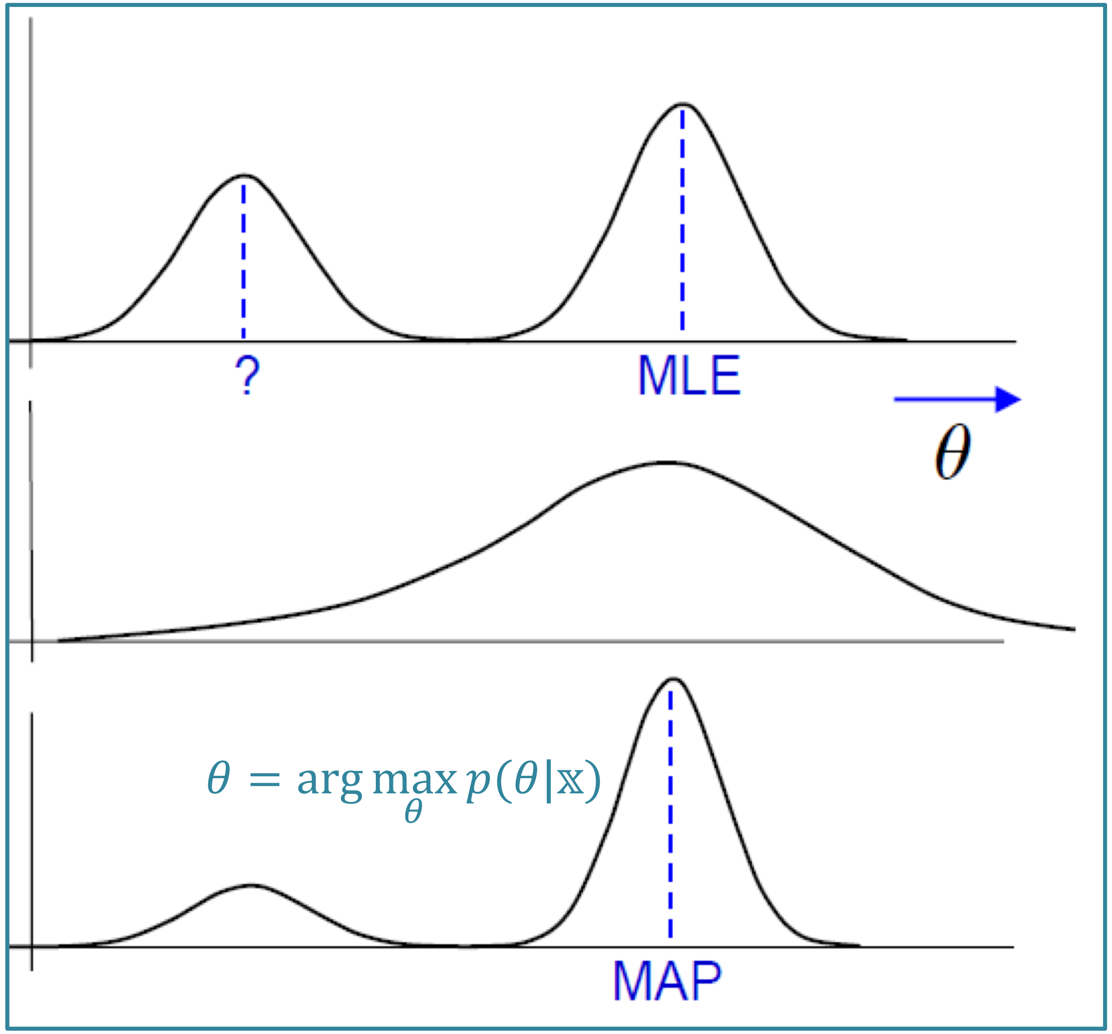


MLE vs MAP

Likelihood
$p(\mathbb{x}|\theta)$

Prior
$p(\theta)$

Posterior
$p(\theta|\mathbb{x}) \propto p(\mathbb{x}|\theta)p(\theta)$



MLE 예제

최대 우도 추정은 관측 값이 주어졌을 때 모델의 매개변수들 중 그 관측 값을 발생시켰을 가능성이 가장 높은 매개변수들의 값을 추정하는 것이다.

이항 분포를 예로 들어보자. 표본 (0, 1, 0, 0, 1, 0)이 이항 분포로부터 추출되었다. $P(X = 1) = \mu$, $P(X = 0) = 1 - \mu$ 이다. 매개변수 μ에 대한 최대 우도 추정(MLE)은 무엇일까?

MLE 예제

μ의 우도 = $L(\mu)$
$= P(x = 0)\times P(x = 1)\times P(x = 0)\times P(x = 0)\times P(x = 1)\times P(x = 0)$
$= (1 - \mu)\times\mu\times(1 - \mu)\times(1 - \mu)\times\mu\times(1 - \mu)$
$= (1 - \mu)^4\times\mu^2$

우도를 최대화하는 것과 로그 우도를 최대화하는 것은 동일한 과제이므로 수학적 편의를 위해 양변에 로그를 취한다.

$$\log(L(\mu)) = \log((1 - \mu)^4\mu^2) = 4\times\log(1 - \mu) + 2\times\log(\mu)$$

미분을 하여 0이 되는 지점을 찾는다.

$$\frac{\partial(\log L(\mu))}{\partial\mu} = 0 \Longrightarrow 4\times\frac{1}{1 - \mu}\times(-1) + 2\times\frac{1}{\mu} = 0 \Longrightarrow -4\times\mu + 2(1 - \mu) = 0 \Longrightarrow \mu = \frac{1}{3}$$

MLE 예제

하지만 미분을 0으로 하는 식에서 찾은 안장값(saddle point)이 최대값인지 최솟값인지 확인하기 위해 한 번 더 미분을 해야 한다. μ값이 최대값이라면 $\log(L(\mu))$를 두 번 미분한 값은 음수여야 한다.

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log(L(\mu)) = -4\times\frac{1}{(1-\mu)^2} - \frac{2}{\mu^2}$$

$\frac{1}{3}$ 을 대입하자.

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\log(L(\mu)) = -4\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -9 - 18 = -27$$

따라서 우도를 최대화하는 μ는 $\frac{1}{3}$ 이라는 것이 증명된다.

MLE 예제

따라서

- Likelihood : $L(\mu) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.021948$
- Log Likelihood : $\ln\left(L(\mu)\right) = \ln(0.021948) = -3.819$

정리해보면 관측값이 (0, 1, 0, 0, 1, 0)과 같을 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$인 것이다. 표본에서 앞면이 2번, 뒷면이 4번이다. 관측값만 살펴보았을 때 동전의 앞면이 나올 확률은 직관적으로 보아도 $\frac{1}{3}$ 이다. 아주 그럴 듯한, 모수의 예측값이다.