# 南京大学　电子科学与工程学院　全日制统招本科生

## 《量子物理》期末考试试卷　闭卷

任课教师姓名：王学锋、施毅

考试日期：2014 年 6 月 27 日　　考试时长：2 小时 0 分钟

考生年级＿＿＿＿考生专业＿＿＿＿考生学号＿＿＿＿考生姓名＿＿＿＿

| 题号 | 一<br>20 分 | 二<br>20 分 | 三<br>15 分 | 四<br>22 分 | 五<br>23 分 | 总分<br>100 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

除下列公式以外不得参考其他资料。解题过程中除了数学运算以外，请利用图示和文字清楚地解释你的推导和理由。

$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad v_{ph} = \frac{\omega}{k} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\text{Prob} = z^* z \qquad z = x + iy = re^{i\theta} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad 1\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \qquad \int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad H = \frac{(p_{x_{op}})^2}{2m} + V(x_{op}) \qquad p_{x_{op}} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad x_{op} = x$$

$$H\psi_E = E\psi_E \qquad \Psi_E(x,t) = \psi_E(x)e^{-iEt/\hbar} \qquad j_x = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)$$

$$\rho = \Psi^*\Psi \qquad \Delta x\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E\Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt}=\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\,[H,A_{\rm op}]\,\Psi\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial A_{\rm op}}{\partial t}\Psi\,dx$$

For $\frac{2m}{\hbar^2}V(x)=-\frac{\alpha}{a}\delta(x)$ $\quad \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0^+}-\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0^-}=-\frac{\alpha}{a}\psi(0)$

$$\langle A\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*A_{\rm op}\Psi\,dx \qquad \Delta A^2=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$$

$$T\sim e^{-2\int\sqrt{2m(V-E)}dx/\hbar} \qquad \Psi=\sum_n c_n\psi_n \qquad c_n=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*\Psi\,dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\right]+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R+V(r)R=ER$$

$$\mathbf{L}_{\rm op}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad L_{z\rm op}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L_{z\rm op}Y_{l,m_l}(\theta,\phi)=m_l\hbar Y_{l,m_l}(\theta,\phi) \qquad \mathbf{L}_{\rm op}^2Y_{l,m_l}(\theta,\phi)=l(l+1)\hbar^2Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$$

$$S_{x\rm op}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad S_{y\rm op}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \qquad S_{z\rm op}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\chi_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \chi_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$n(E)=e^{-\alpha}e^{-E/kT} \qquad n(E)=\frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT}-1}=\frac{1}{e^{(E-\mu)/kT}-1} \qquad n(E)=\frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1}$$

$$\Phi_{m_l}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\phi} \quad \boldsymbol{\mu}=\frac{q}{2m}\mathbf{L} \quad H\psi=E\psi \quad H=H_0+H' \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1 \qquad \delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq0\\ \infty & x=0\end{cases} \qquad \int f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$$

$h=6.626\times10^{-34}J\cdot s=4.136\times10^{-15}eV\cdot s$

$\hbar=h/2\pi=1.055\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}=6.582\times10^{-16}\,\mathrm{eV\cdot s}$

$c=3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$

$e=1.602\times10^{-19}C$

$m_e=9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$

1 eV= $1.602\times10^{-19}$ J

一.（每题 2 分，共 20 分）单选题（请将答案填在题后括号内，仅打勾不计分）

| 本题得分 | |
|---|---|

(1) 能量为 100 eV 的自由电子的德布罗依波长是（　　）

**(A)** 1.2 Å.　　**(B)** 1.5 Å.　　**(C)** 2.1 Å.　　**(D)** 2.5 Å.

(2) 康普顿散射实验证实了（　　）

**(A)** 电子具有波动性.

**(B)** 光具有波动性.

**(C)** 电子具有粒子性.

**(D)** 光具有粒子性.

(3) 已知宇称算符的一个已归一的本征波函数满足下式：$\Pi\psi(x) = -\psi(x)$，其中宇称算符定义为$\Pi\psi(x) = \psi(-x)$。下列表述中哪一个是正确的？（　　）

**(A)** $\langle x\rangle > 0$ 及 $\Delta x = 0$.

**(B)** $\langle x\rangle = 0$ 及 $\Delta x = 0$.

**(C)** $\langle x\rangle = 0$ 及 $\Delta x > 0$.

**(D)** $\langle x\rangle > 0$ 及 $\Delta x > 0$.

(4) 一个自由粒子的哈密顿和动量算符分别为$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$和$p_{xop} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$。下列波函数中属于这两个算符的共同本征函数的是：其中$k = \sqrt{2mE}/\hbar$　（　　）

**(A)** $A\cos kx$.　**(B)** $A\sin kx$.　**(C)** $Ae^{ikx}$.　**(D)** 上面三个答案都对.

(5) 假如频率$\nu$和波长$\lambda$之间的关系是$\nu = b/4\lambda^2$，这里$b$是一个常数，则群速应是（　　）

**(A)** $b/2\lambda$.　　**(B)** $b/\lambda$.　　**(C)** $2b/\lambda$.　　**(D)** $b/2\lambda^2$.

(6) 下列态函数中哪一个有可能是氦原子中的两个电子的态？（　　）

**(A)** $\psi_{1s}(r_1)\psi_{1s}(r_2)\chi_+(1)\chi_-(2)$.

**(B)** $\psi_{1s}(r_1)\psi_{1s}(r_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right]$.

**(C)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{1s}(r_1)\psi_{2s}(r_2) + \psi_{2s}(r_1)\psi_{1s}(r_2)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)\right]$.

**(D)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_{1s}(r_1)\psi_{2s}(r_2) - \psi_{2s}(r_1)\psi_{1s}(r_2)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right]$.

(7) 对于一维的薛定谔方程 $H\Psi(x,t)=i\hbar\dfrac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$，下列表述中哪一个是正确的？（　　）

**(A)** $\Psi^*\Psi$ 与时间无关.

**(B)** $\Psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}$，这里 $\omega=E/\hbar$.

**(C)** $\Psi(x,t)=\psi_E(x)e^{-iEt/\hbar}$.

**(D)** 方程可以采用变量分离法来解，即使势能 $V$ 是位置也是时间的函数.

(8) 某一固体的费米能 $E_{\mathrm{F}}=10\ \mathrm{eV}$，当这固体处于温度为 $T=1000\ \mathrm{K}$ 的热平衡时，能量为 $E=E_{\mathrm{F}}$ 的能态被电子占据的几率是 （　　）

**(A)** $4\times10^{-2}$.　　**(B)** 0.5.　　**(C)** 0.75.　　**(D)** 1.0.

(9) 对一个体系施以一个外场时，哈密顿 $H=H_0+H'$，这里 $H'$ 就是由外场所引进的一个附加项，以下论点正确的是（　　）

**(A)** 这个附加项 $H'$ 一定会使原来未受干扰时相应于不同本征能量的波函数叠加在一起，导致态函数发生变化.

**(B)** 由 $H'$ 引起的未受干扰时的两个能量本征态的叠加与这两个本征态的能量无关.

**(C)** 未受干扰时的两个能量本征态的能量相差越大，由 $H'$ 引起的这两个态的叠加几率越大.

**(D)** 未受干扰时的两个能量本征态的能量相差越小，由 $H'$ 引起的这两个态的叠加几率越大.

**(E)** 以上论点全都错误.

(10) 由于耦合作用，一个二维空间中原本各向同性的谐振子的哈密顿出现了一个附加项 $\beta xy$,这里 $\beta/m\omega^2<<1$，以下论点正确的是（　　）

**(A)** 上述耦合作用并没有使这个原本在二维空间各向同性的谐振子的基态态函数发生变化，只是使它的能量产生了一个移动.

**(B)** 由于上述耦合作用，这个原本在二维空间各向同性的谐振子的基态能量产生了一个随 $\beta$ 呈线性变化的移动.

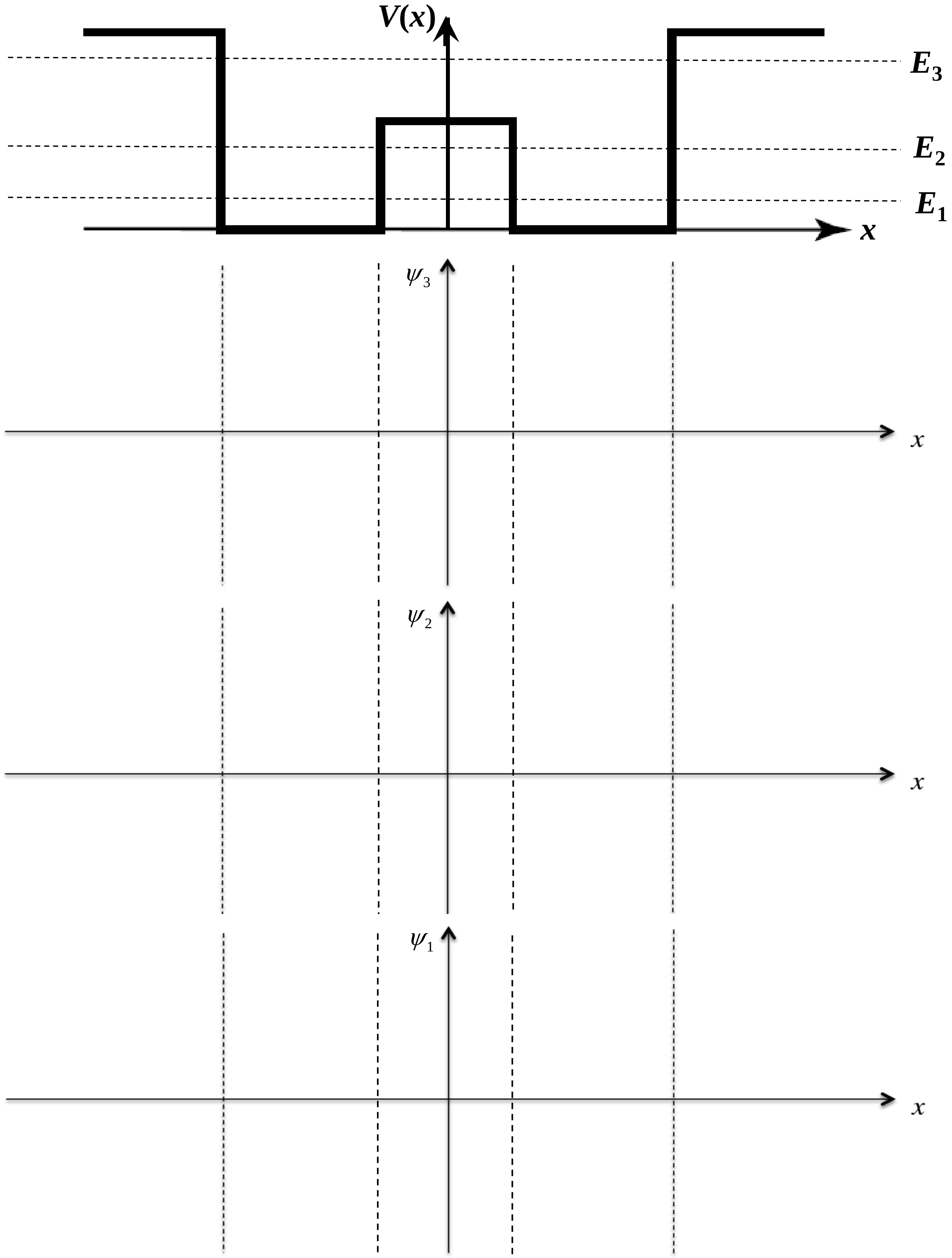
**(C)** 微扰近似方法对这个原本在二维空间各向同性的谐振子的第一激发态不再适用.

**(D)** 在求解上述耦合作用对这个原本在二维空间各向同性的谐振子的第二激发态，也就是第三能级的影响时，我们必须令一个 $3\times3$ 的行列式为零.

**(E)** 以上论点全都错误.

二.（20 分）

下图所示为一具有对称势能函数的一维有限不规则方势阱，请画出相应于如图所示势能的三个最低能量的波函数$\psi_1$、$\psi_2$和$\psi_3$，指出每个波函数的重要特点。



| 本题得分 | |
|---|---|

三.（15 分）**(a)**（7 分）求粒子处于波函数 $\Psi(x)=e^{ikx}\psi(x)$ 时动量的期望值，这里 $\psi(x)$ 是一个已归一的任意实函数。

**(b)**（8 分）求两个粒子的体系处于 $\chi(1,2)=\chi_{-}(1)\chi_{-}(2)$ 中的总自旋 $S$。

| 本题得分 | |
|---|---|

四.（22 分）**(a)**（10 分）对一个在如下所示的二维势阱中质量为 $m$ 的粒子的定态薛定谔方程求解。

$$V(x,y)=\begin{cases} 0 & 0<x<2L_0 \ \& \ 0<y<L_0 \\ \infty & x<0 \ \& \ x>2L_0,\ y<0 \ \& \ y>L_0 \end{cases}$$

即求出这个粒子的能量本征值以及与其相应的本征函数的一般表达式。注意：一个在一维无限深势阱 $V(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<L \\ \infty & x<0 \ \& \ x>L \end{cases}$ 中质量为 $m$ 的粒子的能量本征值及其相应的本征波函数分别为 $E_n=\dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$，$\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi}{L}x$，这里 $n=1,2,3,\cdots$。

**(b)**（8 分）写出能量最低的四个能级以及相应的波函数。

**(c)**（4 分）写出能量最低的简并能级以及相应的波函数。

| 本题得分 | |
|---|---|

五.（23 分）一个保持在 $xy$ 平面内围绕 $z$ 轴转动的刚体转子的能量 $E=\frac{L_z^2}{2I}$，这里转动惯量 $I$ 是一个常数。在时间 $t=0$ 转子波函数的平面方位角部分是 $\psi(\phi)=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\cos 2\phi+\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\sin 3\phi$。

**(a)** (8 分) 求随时间而变化的波函数，即写出 $\psi(\phi,t)$。

**(b)** (5 分) 求 $\langle E\rangle$ 在时间 $t$ 的值。

**(c)** (5 分) 求 $\langle L_z\rangle$ 和 $\Delta L_z$ 在时间 $t$ 的值。

**(d)** (5 分) 证明转子的运动是周期性的，并求出其周期 $T$。