

南京大学 电子科学与工程学院 全日制统招本科生

《数字信号处理》期末考试试卷 闭 卷

任课教师姓名：李 晨 庄建军

考试日期：2015.6.27 考试时长：2 小时 分钟

考生年级 考生专业 考生学号 考生姓名

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. (20 分) 单项选择

本题得分	
------	--

以下选择每题 2 分，共计 20 分

1. 下列哪个系统是移不变系统 (B)

A. $T[x(n)] = g(n)x(n)$ B. $T[x(n)] = x(n-n_0)$ C. $T[x(n)] = nx(n)$ D. $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^n x(k)$

2. 已知一 FIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$ ，试判断滤波器的类型为 (A)

A. 低通 B. 高通 C. 带通 D. 带阻

3. $\delta(n-1)$ 的 Z 变换是 (B)

A. 1 B. z^{-1} C. $2\pi \delta(\omega)$ D. 2π

4. 下面有关序列的傅里叶变换 (DTFT) 说法正确的是 (A)

A. 时域为离散序列，频域为连续周期信号

B. 时域为离散周期序列，频域也为离散周期序列

C. 时域为离散无限长序列，频域为连续周期信号

D. 时域为离散有限长序列，频域也为离散有限长序列

5. 下列哪一个系统一定是因果系统 (D)

A. $y(n) = x(n-n_0)$ B. $y(n) = x(-n)$ C. $y(n) = 3x(2n)$ D. $y(n) = \text{th}(n+1)x(n)$

6. 设 $H(z)$ 是线性相位 FIR 系统，已知 $H(z)$ 中的 3 个零点分别为 1, 0.8, $1+j$ ，该系统阶数至少为 (D)

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

7. 若序列 $x(n]$ 的长度为 30，则用基 2 的 FFT 算法计算 $X(k)$ 的复数乘法次数为 (A)

A. 80 B. 96 C. 128 D. 256

8. 若序列的长度为 N ，要能够由频域抽样信号 $X(k)$ 恢复原序列，而不发生时域混叠现象，则频域抽样点数 M 需满足的条件是 (B)
- A. $N \geq M$ B. $N \leq M$ C. $N \leq 2M$ D. $N \geq 2M$
9. IIR 数字滤波器可以单独调整其零极点位置的结构是 (D)
- A. 直接 I 型 B. 典范型 C. 并联型 D. 级联型
10. 有关 IIR 数字滤波器特点说法正确的是 (C)
- A. $h(n)$ 有限长
B. 实现同样的性能阶次高的多
C. 可用模拟滤波器设计
D. 可用 FFT 计算

二. (30 分) 填空 (每空 2 分)

本题得分	
------	--

1. 序列 $x(n) = A \cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{5\pi}{8})$ 的周期为 14。
2. 单位响应为 $h(n)$ 的 LTI 系统，输入 $x(n]$ 时，输出 $y(n)$ ；输入为 $3x(n-2)+2\delta(n-1)$ ，输出为 $3y(n-2)+2h(n-1)$ 。
3. 已知序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，则序列 $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$ 的傅里叶变换为 $2\cos\omega X(e^{-j\omega})$ 。
4. 为了改善计算序列 DFT 时出现的栅栏效应，可以采取的措施是 补零。
5. 设计一个 N 点的 FIR 线性相位带通滤波器的 $h(n)$ 应该满足的条件是: $h(n) = \underline{h(N-1-n)}$ 。
6. 时域 N 点的有限长序列 $x(n)$ 有 $X(e^{j\omega})$ ，对 $X(e^{j\omega})$ 进行 M 点均匀抽样，则时域中对应的新序列 $y(n)$ 和原序列 $x(n)$ 的关系是: $y(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rM)$ 。
7. 对 N 点 $x(n)$ 有 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ，则 $\text{IDFT}\{\text{Re}[X(k)]\} = \underline{\frac{1}{2}[x(n) + x((N-n))_N]R_N(N)}$ 。
8. 某序列 DFT 的表达式是 $X(k) = \sum_{n=0}^5 x(n)W_8^{kn}$ ，由此可看出，该序列的时域长度是 6，变换后数字频域上相邻两个频率样点之间隔是 $\frac{\pi}{4}$ 。
9. 冲激响应不变法作为模拟滤波器逼近数字滤波器的常用方法，其优点是① 时域逼近良好，② 保持线性关系，缺点是 频域发生混叠。
10. 用窗函数设计法设计 FIR 数字滤波器时，阻带最小衰减由 窗形状 决定，过渡带宽则与 窗形状 和 窗宽 有关。

三. (20 分) 简单计算 (每题 5 分)

本题得分	
------	--

1. 一个长度为 8 的序列 $x(n)$ 在 $0 \leq n \leq 7$ 之外为零, 其 8 点的 DFT 为 $X(k) = 1 + 2 \sin(\frac{2\pi k}{8}) + 3 \cos(\frac{4\pi k}{8}) + 4 \sin(\frac{6\pi k}{8})$, 计算 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$

解:

$$X(k) = 1 - j \left(e^{j\frac{2\pi k}{8}} - e^{-j\frac{2\pi k}{8}} \right) - \frac{3}{2} j \left(e^{j\frac{4\pi k}{8}} - e^{-j\frac{4\pi k}{8}} \right) - 2j \left(e^{j\frac{6\pi k}{8}} - e^{-j\frac{6\pi k}{8}} \right) \quad \text{---2 分}$$

$$= 1 - je^{j\frac{2\pi k}{8}} + je^{-j\frac{2\pi k}{8}} - \frac{3}{2} je^{j\frac{4\pi k}{8}} + \frac{3}{2} je^{-j\frac{4\pi k}{8}} - 2je^{j\frac{6\pi k}{8}} + 2je^{-j\frac{6\pi k}{8}}$$

$$= 1 - je^{j\frac{2\pi}{8}k} + je^{j\frac{2\pi}{8}7k} - \frac{3}{2} je^{j\frac{2\pi}{8}2k} + \frac{3}{2} je^{j\frac{2\pi}{8}6k} - 2je^{j\frac{2\pi}{8}3k} + 2je^{j\frac{2\pi}{8}5k}$$

$$= 1 - je^{j\frac{2\pi}{8}k} - \frac{3}{2} je^{j\frac{2\pi}{8}2k} - 2je^{j\frac{2\pi}{8}3k} + 2je^{j\frac{2\pi}{8}5k} + \frac{3}{2} je^{j\frac{2\pi}{8}6k} + je^{j\frac{2\pi}{8}7k} \quad \text{---1 分}$$

$$x(n) = \delta(n) - j\delta(n-1) - \frac{3}{2}j\delta(n-2) - 2j\delta(n-3) + 2j\delta(n-5) + \frac{3}{2}j\delta(n-6) + j\delta(n-7)$$

$$\text{或 } x(n) = \left\{ 1, -j, -\frac{3}{2}j, 0, -2j, 2j, \frac{3}{2}j, j \right\} \quad \text{---2 分}$$

2. 研究一个输入为 $x(n)$ 和输出为 $y(n)$ 的时域线性离散移不变系统, 已知它满足 $y(n-1) - \frac{10}{3}y(n) + y(n+1) = x(n)$ 并已知系统是稳定的, 试求其单位抽样响应。

解: 对差分方程两边取 z 变换

$$z^{-1}Y(z) - \frac{10}{3}Y(z) + zY(z) = X(z)$$

$$\text{得系统函数: } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z} = \frac{1z}{z^2 - \frac{10}{3}z + 1} = \frac{z}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)}, \quad \text{---1 分}$$

零点: $z = 0, \infty$

极点: $z = \frac{1}{3}, 3$

因为系统稳定, 所以 ROC: $\frac{1}{3} < |z| < 3$ -----1 分

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} = \frac{A_1}{(z - \frac{1}{3})} + \frac{A_2}{(z - 3)}$$

$$A_1 = \text{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{3}{8}$$

$$A_2 = \text{Res}\left(\frac{H(z)}{z}\right)_{z=3} = \frac{3}{8}$$

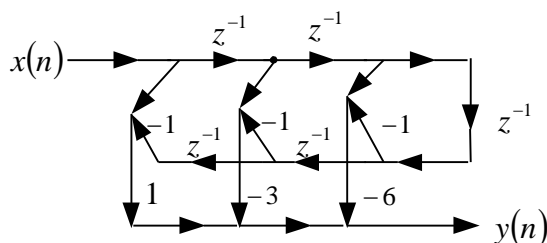
$$H(z) = \frac{-\frac{3}{8}z}{(z - \frac{1}{3})} + \frac{\frac{3}{8}z}{(z - 3)}, \quad \text{ROC: } \frac{1}{3} < |z| < 3 \quad \text{---1 分}$$

$$\frac{z}{(z - \frac{1}{3})} \xrightarrow{|z| > \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad \frac{-z}{(z - 3)} \xrightarrow{|z| < 3} 3^n u(-n - 1)$$

$$h(n) = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{3}{8}3^n u(-n-1) \quad \text{---2 分}$$

3. 仔细观察下图。

- (1) 这是什么类型具有什么特性的数字滤波器？
- (2) 写出其差分方程和系统函数。



解：

- (1) 因为 $h(n)$ 为奇对称, $N=6$ 为偶数。

所以是第四类线性相位的 FIR 数字滤波器, 适合用做希尔伯特滤波器及微分器。

---2 分

- (2) 系统函数: $H(z) = 1 - 3z^{-1} - 6z^{-2} + 6z^{-3} + 3z^{-4} - z^{-5}$

---1 分

$$\text{差分方程: } y(n) = x(n) - 3x(n-1) - 6x(n-2) + 6x(n-3) + 3x(n-4) - x(n-5)$$

---2 分

4. 若 $x(n) = R_5(n)$,

- (1) 求此序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 并大致画出其幅度谱。
- (2) 计算 $x(n)$ 8 点的 DFT, 并在 $X(e^{j\omega})$ 的幅度谱上标出 $X(k)$ 所在的点。

解：

$$(1) X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 x(n)e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}(e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}$$

$$= e^{-j2\omega} \frac{\sin\frac{5}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}, \quad \text{---2 分}$$

---幅度谱 1 分, 标出 $X(k)$ 位置 1 分

$$(2) X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k} = e^{-j\frac{\pi k}{2}} \frac{\sin\frac{5\pi k}{8}}{\sin\frac{\pi k}{8}} \quad \text{---1 分}$$

四. (10 分) 已知一个有限长序列 $x(n) = 2\delta(n) - \delta(n-4)$

本题得分	
------	--

- (1) 求它的 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$
- (2) 已知序列 $y(n)$ 的 8 点离散傅立叶变换为 $Y(k) = W_8^{3k}X(k)$, 求序列 $y(n)$
- (3) 已知序列 $m(n)$ 的 8 点离散傅立叶变换为 $M(k) = X(k)Y(k)$, 求序列 $m(n)$

解:

$$(1) \quad X(k) = \sum_{n=0}^7 [2\delta(n) - \delta(n-4)]W_8^{nk} = 2 - (-1)^k, k = 0, \dots, 7 \quad \text{---2 分}$$

$$(2) \quad y(n) = x((n-3))_8 = 2\delta(n-5) - \delta(n-1) \quad \text{---2 分}$$

$$(3) \quad Y(k) = \sum_{n=0}^7 y(n)W_8^{nk} = 2W_8^{5k} - W_8^k \quad \text{---2 分}$$

$$M(k) = X(k)Y(k) = 5W_8^{5k} - 4W_8^k \quad \text{---2 分}$$

$$m(n) = -4\delta(n-1) + 5\delta(n-5) \quad \text{---2 分}$$

五. (10 分) 已知 $x(n)$ 是 4 点的实序列, 并且已知 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$

本题得分	
------	--

的前 3 个值为: 6, $-1+j$, 4。

(1) 求 $X(3)$ 的值;

(2) 写出利用 FFT 程序来实现 IFFT 的步骤。

(3) 按照(2)中的方法, 计算出 4 点序列 $x(n)=\text{IDFT}[X(k)]$, 要求画出按频率抽选(DIF)输入自然序输出倒位序的基-2 FFT 蝶形运算流图来完成具体计算过程。

解:

(1) $x(n)$ 是实序列, $X(k)$ 是圆周共轭对称分量, 即

$$X(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$X(3) = X^*((4-3))_4 R_4(k) = X^*(1) = -1-j \quad \text{---2 分}$$

(2)

1) 对 $X(k)$ 取共轭得 $X^*(k)$;

2) 对 $X^*(k)$ 做 N 点 FFT;

3) 对 2) 中结果取共轭并除以 N ---4 分

(3) $X^*(k) = \{6, -1-j, 4, -1+j\}$ 对 $X^*(k)$ 画 DIF FFT 流程图, 再乘以 1/4,

$$\text{得 } x(n) = \{2, 0, 3, 1\}$$

---4 分

六. (10 分) 用双线性变换法设计一个 Butterworth 数字低通滤波器, 要求在频率低于 $0.2\pi\text{rad}$ 的通带内幅度特性下降小于 1dB, 在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内, 衰减大于 15dB。

本题得分	
------	--

解:

(1) 由数字滤波器技术指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

(2) 考虑预畸变, 得模拟滤波器技术指标, 选 $T=1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_{12} = 15\text{dB} \quad \text{---2 分}$$

(3) 设计 Butterworth 模拟低通滤波器

确定参数

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1-1}}{10^{0.1\delta_2-1}}} = 0.092$$

$$N = -\frac{\log k_{sp}}{\log \lambda_{sp}} = 5.306 \quad \text{取 } N=6$$

$$\Omega_c = \Omega_s (10^{0.1\delta_2})^{-\frac{1}{2N}} = 0.7662 \text{ rad/s} \quad \text{---求出 } N \text{ 和 } \Omega_c \text{ 2 分}$$

用阻带技术指标, 使得通带特性较好

求出极点 (左半平面)

$$s_k = \Omega_c e^{j[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者由 $N=6$, 直接查表得 ---2 分

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

去归一化

$$H(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) \quad \text{---2 分}$$

$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

(4) 将 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器 ---2 分

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{21-z^{-1}}{T_1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{(1 - 1.268z^{-1} + 0.7051z^{-2})} \frac{1}{(1 - 1.010z^{-1} + 0.358z^{-2})} \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$