二、计算题（本题满分9分，共1题，每题9分）

本题得分	

假设目标出现在射程之内（射程之外无法命中目标）的概率为0.7，

这时射击的命中率为0.6，试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率。

设 A = "目标出现在射程之内"， B = "命中目标"， 2 分

由题意 $P(A)=0.7$，$P(B|A)=0.7$，且 $B\subset A$ 3 分

于是

$P(B)=P(AB)=P(A)P(B|A)=0.7\times0.6=0.42$ 2 分

则所求的概率为

$p=1-P_2(0)=1-C_2^0(0.42)^0(1-0.42)^2=0.6636$ 2 分

三、计算题（本题满分9分，共3题，每题3分）

本题得分	

设(X, Y)服从N(1, 0, 32, 42, -0.5)分布, Z=X/3+Y/2

1)求Z的期望与方差;

2)求X与Z的相关系数;

3)问X与Z是否相互独立？为什么？

1

$$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$$ 1

$$D(Z)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=3$$ 2

2

$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{DX}{3}+\frac{Cov(X,Y)}{2}=3-\frac{0.5\times3\times4}{2}=0$$ 2

$\therefore\rho_{XZ}=0$ 1

(3) 因Z为X、Y线性组合，故Z为正态分布，对正态分布而言，不相关即独立。故X与Z独立. 3

Scanned by CamScanner

四. 计算题（本题满分 11 分，共 3 题，第 1 题 3 分，第二题 4 分，第三题 4 分）

本题得分	

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{-3x}, x>0\\0，其它\end{cases}$$

（1） 确定常数 A;

（2）求 $Y=e^{x}$ 的概率密度函数;

（3） 计算 E(Y) 和 D(-3Y-1)

解:（1）由密度函数的性质，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}dx=A(-\frac{1}{3}e^{-3x})|_{0}^{+\infty}=\frac{A}{3}$$

所以， A = 3。　　3 分

（2）y = e x，x = ln y，x∈(0 , + ∞)时，y = e^{x} ∈(1 , + ∞)

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$$ ，　　1 分

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3\ln y}|\frac{1}{y}|, y>1\\0, y\le 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{y^4}, y>1\\0, y\le 1\end{cases}$$　　3 分（未写<=1 情况扣 1 分）

（3） $E(Y)=E(e^{x})=\int_{0}^{+\infty}e^{x}\cdot 3e^{-3x}dx=\frac{3}{2}$　　1 分

$$E(Y^2)=E(e^{2X})=\int_{0}^{+\infty}e^{2x}\cdot 3e^{-3x}=3$$　　1 分

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=3-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{4}$$　　1 分

$$D(-3Y-1)=9D(Y)=\frac{27}{4}$$　　1 分

Scanned by CamScanner

南京大学　电子科学与工程学院　全日制统招本科生

《概率论与随机过程》期末考试试卷　闭卷

任课教师姓名：____都思丹__于耀______

考试日期：______2015/6/24______　考试时长：__2__小时______分钟

考生年级__________考生专业__________考生学号__________考生姓名______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

注意：标准正态分布查询表参见试卷附表 1。

一．填空题（本题满分 10 分，共 5 题，每题 2 分）

本题得分	

1. 设随机事件 A、B，P(A) + P(B) = 0.9，P(AB) = 0.2，则 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$ = ______0.5_____；

2. 从 1，2，…，10 共十个数字中任取一个，然后放回，先后取出 5 个数字，则所得 5 个数字全不相同的事件的概率等于 __________。$\dfrac{P_{10}^5}{10^5}$

3. 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{A}{(4+x^2)(9+y^2)}$

则常数 A = _________ $\dfrac{6}{\pi^2}$ __________， X 的边际密度函数为 $f_X(x)$ = _________ $\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$ ______________；

4. 打靶 3 发，事件 A_i 表示“击中 i 发”， i = 0，1，2，3。那么事件 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示_B_______。

(A) 全部击中；　(B) 至少有一发击中；
(C) 必然击中；　(D) 击中 3 发

5. 设随机变量 X 与Y 相互独立，且D(X) = 3，D(Y) = 1，则Z=3X-2Y 的方差为__A______。

(A) 31；　(B) 23；　(C) 11；　(D) 7

Scanned by CamScanner

六. 计算题（本题满分 14 分，共 1 题，每题 14 分）

本题得分	

把数字 1、2、3...n 任意的排成一列，如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置，则视为一次巧合，求巧合次数 X 的数学期望，方差。

设$X=\sum X_i$　　1

X为总次数、总个数等等总体情况

$X_i=\{0,1\}$为第i分次、第i人等单位情况　　1

这里设X_i表示第i个数正好在第i个位置

则$P\{X_i=0\}=\frac{n-1}{n}, P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}$　　2

$EX_i=\frac{1}{n}$　　1

$DX_i=EX_i^2-(EX_i)^2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$　　1

$EX=\sum EX_i=n*\frac{1}{n}=1$　　1

$DX=\sum DX_i+2C_n^2E((X_i-\frac{1}{n})(X_j-\frac{1}{n}))$　　2

$\sum DX_i=n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=1-\frac{1}{n}$　　1

注意这里X_i与X_j不独立，不能直接分开

$E((X_i-\frac{1}{n})(X_j-\frac{1}{n}))=E(X_iX_j)-\frac{1}{n}EX_i-\frac{1}{n}EX_j+\frac{1}{n^2}=E(X_iX_j)-\frac{1}{n^2}$　　1

$P\{X_i=1, X_i=1\}=P\{X_i=1\}P\{X_j=1|X_i=1\}=\frac{1}{n}(\frac{1}{n-1})$　　1

$E(X_iX_j)=0*?+1*\frac{1}{n}(\frac{1}{n-1})=\frac{1}{n}(\frac{1}{n-1})$　　2

Scanned by CamScanner

五. 计算题（本题满分 11 分，共 3 题，第 1 题 5 分，第二、三题 3 分）

本题得分	

资料表明，一种载重汽车的轮胎，报废前的公路行驶里程数服从正态分布，其平均行驶公里数为 6 万公里，标准差为 0.8 万公里。现有一辆该载重汽车，新装上了 12 个这样的轮胎试求

1、任意观察一个轮胎，其报废前行驶的里程数超过 4 万公里的概率

2、任意观察一个轮胎，其报废前行驶的里程数在 4 到 7 万公里之间的概率

3、观察所有轮胎，最多有两个轮胎行驶的里程数不超过 6 万公里的概率

解：1、设轮胎行驶里程数为X，$X \sim N(6, 0.8^2)$　　1

则$P\{X \geq 4\} = P\{\frac{X-6}{0.8} \geq \frac{4-6}{0.8}\} = P\{\frac{X-6}{0.8} \geq -2.5\}$

$=1-P\{\frac{X-6}{0.8} \leq -2.5\}$　　1

因X为正态分布，因此$\frac{X-6}{0.8}$服从标准正态分布　　1

即$P\{X \geq 4\} = 1-\Phi(-2.5)$

$=1-(1-\Phi(2.5))$　　1

$=\Phi(2.5) = 0.9938$　　1

2、同理$P\{4 \leq X \leq 7\} = P\{\frac{4-6}{0.8} \leq \frac{X-6}{0.8} \leq \frac{4-7}{0.8}\}$　　1

$=\Phi(1.25)-\Phi(-2.5)$

$=\Phi(1.25)-((1-\Phi(2.5))) = \Phi(2.5)+\Phi(1.25)-1$　　1

$=0.8882$　　1

3、设每个轮胎行驶里程数不超过6公里概率为p，则有$p=\{X \leq 6\}=0.5$　　1

则k个轮胎不超过6公里概率为$C_{12}^{k} p^{k}(1-p)^{12-k} = C_{12}^{k} p^{k} p^{12-k} = C_{12}^{k} p^{12}$　　1

1

最多两个不超过的概率为$\sum_{0}^{2} C_{12}^{k} p^{12} =$

Scanned by CamScanner

九. 计算题（本题满分 14 分，共 3 题，第 1 题 5 分，第 2 题 3 分，第 3 题 6 分）

本题得分	

设一个坛子中装有 4 个球，它们或是红色的，或是黑色的。从坛子中随机地取出一个球，并换入一个另一种颜色的球，经过 n 次取球置换，令 $X(n),n\ge1$ 表示第 n 次取球后坛中的黑球数。

（1）$\{X(n),n\ge1\}$ 是否构成马氏链，是否为齐次的，为什么？

（2）试写出其状态空间与一步转移概率矩阵。

（3）讨论经过足够多次取球后，坛中球的颜色分布情况。

解：$X(n),n\ge1$ 的参数集为 $T=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，状态集为 $E=\{0,1,2,3,4\}$，当 X(n) 的取值确定时，X(n+1) 的取值完全由 X(n) 确定，故 $X(n),n\ge1$ 为马氏链，2 分

$$P_{ij}(n)=P(X(n+1)=j\,|\,X(n)=i)$$

$$=\begin{cases}1 & j=1,i=0 \text{ 或 } j=3,i=4\\ \dfrac{i}{4} & j=i-1,1\le i\le3\\ 1-\dfrac{i}{4} & j=i+1,1\le i\le3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 　　2 分

与 n 无关，故为齐次马氏链。　　1 分

（2）状态空间　　1 分

一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1/4&0&3/4&0&0\\0&1/2&0&1/2&0\\0&0&3/4&0&1/4\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$ 　　2 分

（3）证明遍历性 3 分

计算平稳分布 3 分

$\frac{1}{16}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{16}$

Scanned by CamScanner

本题得分	

八．计算题（本题满分 11 分，共 1 题，每题 11 分）

某校共有 4900 个学生，已知每天晚上每个学生到阅览室去学习的概率为 0.1，问阅览室　要准备多少个座位，才能以 99%的概率保证每个去阅览室的学生都有座位．

解：设去阅览室学习的人数为ξ，要准备 k 个座位．

$\xi \sim b(n,p), n=4900, p=0.1$　　2

$np = 4900 \times 0.1 = 490$　　2

$\sqrt{npq} = \sqrt{4900 \times 0.1 \times 0.9} = \sqrt{441} = 21.$　　2

$$P\{0 \le \xi \le k\} \approx \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{k-490}{21}\right) - \Phi\left(\frac{0-490}{21}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{k-490}{21}\right) - \Phi(-23.23) \approx \Phi\left(\frac{k-490}{21}\right) = 0.99.$$　　3

查 $N(0,1)$ 分布表可得 $\frac{k-490}{21} = 2.326\,3, k = 21 \times 2.326\,3 + 490 = 538.852\,3$　　2

$$\approx 539.$$

要准备 539 个座位,才能以 99%的概率保证每个去阅览室学习的学生都有座位.

Scanned by CamScanner

七. 计算题（本题满分 11 分，共 1 题，每题 11 分）

本题得分	

随机变量 $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$ 相互独立，且他们的分布都为：

X_i	-1	1
p_i	0.7	0.3

求行列式
$$\begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{vmatrix}$$
的分布。

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{vmatrix} = X_1X_4 - X_2X_3$$

X_1, X_4 独立，由已知有

X_1X_4 / X_2X_3	1	-1
p_i	0.7*0.7+0.3*0.3=0.58	0.7*0.3*2=0.42

因此

$X_1X_4 - X_2X_3$	-2	0	2
p_i	0.58*0.42=0.2436	0.58*0.58+0.42*0.42=0.5128	0.58*0.42=0.2436

Scanned by CamScanner