POLINOMIOS ESPECIALES

I) Polinomio Ordenado

Es aquel polinomio donde sus grados relativos están ordenados en forma ascendente o descendente .

Ejemplo:

$P_{(x)}$ es un polinomio ordenado .

Hallar: $M = a + b.c$

$$P(x) = 9x^2 + \underbrace{8x^{b-1}}_{GA=3} + \underbrace{7x^{c+1}}_{GA=4} + \underbrace{6x^{a+8}}_{GA=5} + 5x^6$$

Resolución

Luego por concepto:

$b - 1 = 3 \quad \wedge \quad c + 1 = 4 \quad \wedge \quad a + 8 = 5$

$\Rightarrow \quad b = 4 \quad \wedge \quad c = 3 \quad \wedge \quad a = -3$

$M = -3 + 12 \qquad \therefore \quad M = 9$

II) Polinomio Completo

Es aquel polinomio donde están presentes todos sus términos desde el término de mayor grado hasta el término independiente .

Propiedad

En todo polinomio completo se cumple que:

$\#$ de términos $= [\,P\,]^\circ + 1$

Ejemplo:

Sea el polinomio completo:

$$P(x) = (a-4)x^{a-9} + (a-5)x^{a-8} + (a-6)x^{a-7} + \ldots$$

Indique su término cuadrático.

Resolución

Observamos que el menor exponente es:

$a - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 9$ Reemplazando:

$$P(x) = 5x^0 + 4x^1 + 3x^2 + 2x^3 + 1x^4$$

$\therefore$ Término cuadrático $= 3x^2$

LUIS CARBAJAL

III) Polinomio Homogéneo

Es aquel polinomio donde los grados de sus términos son iguales.

Ejemplo:

Hallar a + b si el polinomio es homogéneo :

$$P_{(x,y)} = ax^{a^{a-5}} + by^{a^3} + cx^{b^{a+1}}$$

Resolución

$$\text{GA} = a^{a-5} = a^3 = b^{a+1}$$

$a - 5 = 3 \longrightarrow a = 8$

$8^3 = b^9 \longrightarrow b = 2$

$\therefore\ a + b = 10$

IV) Polinomios Idénticos

Dos o más polinomios no nulos son idénticos si y solo si sus términos semejantes son iguales.Además sus valores numéricos son siempre iguales para todo valor que tome la variable.

Denotación : $P_{(X)} \equiv Q_{(X)}$

Se lee: $P_{(X)}$ es idéntico a $Q_{(X)}$

Ejemplo:

Hallar "m" y "n", si se cumple:

$$7 - x \equiv m\,(x-1) + n\,(x+2)$$

Resolución

Evaluando:

Si: x = 1 $\rightarrow$ 7 – 1 = m($\cancel{1-1}$) + n(1 + 2)

$n = 2$

Si: x = 0 $\rightarrow$ 7 – 0 = m(0 – 1) + 2(0 + 2)

7 = m(– 1) + 4

$m = -3$

LUIS CARBAJAL

V) Polinomios Idénticamente nulo

Es aquel polinomio reducido donde todos sus coeficientes son iguales a cero.

Denotación : $P_{(X)} \equiv 0$

Se lee: $P_{(X)}$ es idénticamente nulo

Ejemplo:

Sea: $P_{(x\,;\,y)} = (a-4)xy^2 - \underbrace{(20-b)\,x^2y + ax^2y}$

Determinar: a.b

Resolución

Reduciendo:

$$P_{(x\,;\,y)} = \underbrace{(a-4)}_{=0}xy^2 + \underbrace{(a\ -20+b)}_{=0}x^2y$$

→ a = 4 ∧ b = 16

∴ $a.b$ = 64

REPASO DE POLINOMIOS

1. Dados los polinomios:

$$P(x) = x^6 - 7x^{12} + 14x^9 + 13$$

$$Q(x) = x^{18} + 2x^5 - 4x^4 - 36$$

Calcular: $G.A.\left(\sqrt[6]{P-Q}\right)$

Resolución

$$G.A.\left(\sqrt[6]{P-Q}\right) = \frac{1}{6}\,\text{G.A.}(P - Q)$$

$$= \frac{1}{6}\,\text{Máx}[\underbrace{\text{G.A.}(P)}_{12};\underbrace{\text{G.A.}(Q)}_{18}]$$

$$= \frac{1}{6}(18) = 3$$

2. Si el grado de: $P(x).\ Q^2(x)$ es 13 y el grado de $P^2(x)\ Q^3(x)$ es 22. Calcular el grado de:

$$E = P^3(x).Q^3(x)$$

Resolución

$$\begin{cases} [P.Q^2]° = 13 \\ [P^2.Q^3]° = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [P]° + [Q^2]° = 13 \\ [P^2]° + [Q^3]° = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [P]° + 2[Q]° = 13 \quad \ldots\times 2 \\ 2[P]° + 3[Q]° = 22 \end{cases} \quad -$$

$$[Q]° = 4$$

$$\rightarrow [P]° = 5$$

Nos piden:

$$[E]° = [P^3(x).Q^3(x)]° = [P^3]° + [Q^3]°$$

$$[E]° = 3[P]° + 3[Q]° = 3(5) + 3(4)$$

$$\therefore [E]° = 27$$

LUIS CARBAJAL

3. Sea: $[P]° = 7 \quad \wedge \quad [Q]° = 3$

Calcular:

$E = [P^2 + Q^4]° - [P \cdot Q^3]°$

Resolución

Donde :

$$[P^2 + Q^4]° = \text{Máx}\,(\,[P^2]°\,;[Q^4]°\,)$$

$$= \text{Máx}\,(\,\underbrace{2[P]°}_{14}\,;\underbrace{4[Q]°}_{12}\,) = 14$$

$$[P \cdot Q^3]° = [P]° + [Q^3]° = [P]° + 3\,[Q]°$$

$$= 7 + 3\,(3) = 16$$

$\therefore \quad E = -2$

4. Si: $G.A.(P) = a \quad \wedge \quad G.A.(Q) = b \quad (b > a)$

Sabiendo: $G.A.(P + Q) = 7 \quad ...(I)$

$G.A.(P \cdot Q) = 10 \quad ...(II)$

Calcular: $G.A.(P^7 - Q^3)$

Resolución

En (I) : $\text{Máx}[\underbrace{G.A.(P)}_{a};\underbrace{G.A.(Q)}_{b}] = 7 \longrightarrow b = 7$

En (II) : $G.A.(P) + \underbrace{G.A.(Q)}_{7} = 10 \longrightarrow a = 3$

Nos piden:

$$G.A.(P^7 - Q^3) = \text{Máx}[G.A.(P^7); G.A.(Q^3)]$$

$$= \text{Máx}\,[\underbrace{7.\,G.A.(P)}_{21};\ \underbrace{3.G.A.(Q)}_{21}]$$

$\therefore\ G.A.(P^7 - Q^3) = 21$

5. Si el polinomio :

$$R_{(x\,;\,y\,;\,z)} = x^{a^b} + x^7y^{b^a} + x^{20}z^{12}$$

es homogéneo. Calcular : $(a-b)^2$

Resolución

$$\text{GA} = a^b = 7 + b^a = 32$$

$$a^b = 2^5 \quad \wedge \quad b^a = 25 = 5^2$$

$\longrightarrow$ $a = 2$ $\wedge$ $b = 5$

$$\longrightarrow (a-b)^2 = (-3)^2 = 9$$

6. Si el polinomio:

$P(x) = (a + b - 2)x^3 + (a + c - 3)x + (b + c - 5)$

Se anula para cualquier valor de "x".Calcular: "a + b + c"

Resolución

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ a + c &= 3 \\ b + c &= 5 \end{aligned} \quad +$$

$2(a + b + c) = 10 \longrightarrow a + b + c = 5$

7. Dada la siguiente identidad:

$Ax(x - 1) + Bx(x - 2) + C(x - 1)(x - 2) \equiv 5x^2 + x + 4$

Calcule: A.B.C

Resolución

Evaluando:

Si: $x = 1 \rightarrow \cancel{A.1.0} + B.1(-1) + \cancel{C.0.(-1)} = 5.1 + 1 + 4$

$\rightarrow -B = 10 \rightarrow B = -10$

Si: $x = 2 \rightarrow A.2.1 + \cancel{B.2.0} + \cancel{C.1.0} = 5.4 + 2 + 4$

$\rightarrow 2A = 26 \rightarrow A = 13$

Si: $x = 0 \rightarrow C(-1)(-2) = 4$

$2C = 4 \rightarrow C = 2$

$\therefore$ A.B.C = – 260

LUIS CARBAJAL