学院________系 专业班级________ 姓名________ 学号________

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封 线

太原理工大学 线性代数E 试卷（A）

适用专业：2023级软件专业 考试日期：2024.7.5 时间：120 分钟 共 2 页

一、选择题（本题共5小题，每小题3分，共15分）

1、设矩阵$A=\begin{pmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$且$|A|=2,|B|=-7$则$|A+B|$等于（D ）。

A、5　　B、-5　　C、-10　　D、-20

2、已知A,B,C均为n阶矩阵，并且$AB=BC=CA=E$，E是单位矩阵，那么$A^2+B^2+C^2=$（ C ）。

A、E　　B、$2E$　　C、$3E$　　D、O

3、若齐次方程组$Ax=0$有无穷多解，则非齐次方程组$Ax=b$（ D ）。

A、必有无穷多解；　B、必有唯一解；　C、必无解；　D、有解时必有无穷多解

4、设$\alpha_1=(1,1,-1)$，$\alpha_2=(-2,-1,2)$向量$\alpha=(2,\lambda,\mu)$与α_1及α_2都正交，则$\lambda=$（ D ）。

A、1　　B、2　　C、3　　D、0

5、下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是（A ）

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$；　C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

二、填空题（本题共5小题，每小题3分，共15分）

6、如果$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}A^{-1}P=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

7、设3阶方阵A的三个特征值分别为2，0，1；$B=A+2E$,则行列式$|B|=$__24__。

8、设$A=(2\quad 3)$，则$|A^TA|=$__0__。

9、齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$只有零解，则$\lambda$应满足的条件是$\underline{\quad \lambda\neq 1 \qquad}$。

10、二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$的秩等于$\underline{2}$。

三、计算题（本题共5小题、每小题12分，满分60分）

11、（12分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的逆矩阵$A^{-1}$。

解;

$$(A\quad E)=\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{pmatrix}$$ ……………5分

$$\to\begin{pmatrix}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$ ……………8分

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$ ……………10分

$$\therefore A^{1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$ ……………12分

12、（12分）求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\2x_1+x_2+x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3-x_4=6\\x_1+2x_2-4x_3-4x_4=-1\end{cases}$的通解。

解：$B\to\begin{pmatrix}1&0&2&2&3\\0&1&-3&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ……………6分

对应线性方程组为$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 + 3 \\ x_2 = \ 3x_3 + 3x_4 - 2 \end{cases}$ …………… 8 分

取 $x_3 = x_4 = 0$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应齐次线性方程组为$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = \ 3x_3 + 3x_4 \end{cases}$，得基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ …………11分

通解为 $x = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …………… 12 分

13、（12 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)(5-\lambda)$

所以特征值为 $\lambda_1 = -1$，λ_2=3，λ_3=5，$\lambda_3 = 1$.　　…………7分

当 $\lambda = -1, A+E \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，得特征向量为 $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；……8分

当 $\lambda = 3, A-3E \to \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，得特征向量为 $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$………………9分

当 $\lambda = 5, A-5E \to \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得特征向量为 $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$………………10分

取 $P=(x_1\ x_2\ x_3)$，有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 3 & \\ & & 5\end{pmatrix}$ …………12分

14、（12 分）设 $\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(-1,1,-3,1)$，$\alpha_3=(4,5,3,-1)$，$\alpha_4=(4,5,-3,1)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大线性无关向量组,并用最大线性无关向量组线性表示该向量组中其它向量。

解：解：$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\ \alpha_3^T,\ \alpha_4^T)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 4\\ 1 & 1 & 5 & 5\\ 3 & -3 & 3 & -3\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ …………5分

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ …………10分

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，

最大线性无关组为 α_1，α_2　α_4 …………11分

$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$ …………12分

15、（12 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}$。

解：解：$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 7 & 5 & 13\\ 0 & 7 & -7 & 12\end{vmatrix}$ …………4分

$$=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$ …………8分

$$=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 27 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 12分$$

四、证明题，满分 10 分

16、（10 分） 已知向量组α_1 , α_2 , α_3线性无关，证明向量组$\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2$线性无关。

证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关，设存在不全为零的数k_1,k_2,k_3使得

$$k_1(\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_2)=0$$

$$(k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_3)\alpha_2+(k_1+k_2)\alpha_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 6分$$

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_2+k_3=0 \\ k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \end{cases}，又\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0，所以 k_1=k_2=k_3=0$$

故向量组$\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2$线性无关 …………10分