学院________系 专业班级________ 姓名________ 学号________

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封 线

太原理工大学 <u>线性代数 E</u> 试卷（A）

适用专业：<u>2022 级软件专业</u> 考试日期：<u>2023.7.7</u> 时间：<u>120</u> 分钟 共 <u>2</u> 页

一、本题共 10 小题，1-5 题为选择题 6-10 题为填空题，每小题 3 分，共 30 分。

1、 若 A、B 都是 n 阶方阵，则必有（ C ）。

A、$AB=BA$　　B、$AB\neq BA$　　C、$|AB|=|BA|$　　D、$|AB|\neq|BA|$

2、设 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $(x_1,x_2)=$（D ）。

A、（1，1）；　　B、（2，1）；　　C、（1，-1）；　　D、（1，2）

3、已知 A 是 2×6 矩阵，B 是 3×6 矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ （C ）。

A、无公共解；　B、只有公共零解；　C、必有公共非零解；　D、同解.

4、 已知 4 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足：秩 (α_1,α_2)=秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，那么，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 的秩为 （ C ）。

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

5、已知三阶矩阵 A 使得行列式 $|A+3E|=|A+4E|=|A+5E|=0$，则行列式 $|A|=$ <u>D</u>。

A、15　　B、-15　　C、0　　D、1

6、若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则常数 $k=$ <u>0</u> 。

7、设 A 为 3 阶方程，且 $|-2A|=2$，则 $|A|=$ <u>$-\frac{1}{4}$</u>。

8、设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 则 $|A|$= <u>-1</u> 。

9、已知线性方程组 $\begin{cases} kx+3y+4z=0 \\ -x+ky=0 \\ ky+z=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ <u>1 或 3</u>.

10、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^{2023}=$ <u>$6^{2022}A$</u>。

二、本题共 2 小题，满分 24 分。

11、（12 分）设三阶方阵 A 与 B 满足 $AB = B + 3E$，且 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 B。

解：由 $AB = B + 3E$ 得 $B = 3(A-E)^{-1}$ …………6

$$(A-E \quad E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ …………8

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ …………12

12、（12 分）当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = k \end{cases}$ 有解？并求通解。

解： $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & -5 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ 所以 $k = -1$ 时，有解 …………4

对应线性方程组为 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 - 1 \end{cases}$，取 $x_3 = 0$，得特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ …………7

对应齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，取 $x_3 = 1$，得基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ …………10

$$\therefore \text{通解为}\, x = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ …………12

学院＿＿＿＿＿系　专业班级＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密　　封　　线

三、本题共 2 小题，满分 24 分。

13、(12 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)$…………5

所以特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$.　　…………8

当 $\lambda=2$, $A-2E\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $x=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；……10

当 $\lambda=1$, $A-E\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $x=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$………………12

14、(12 分) 已知向量 $\alpha_1=(1,1,3,1)^T$，$\alpha_2=(-1,1,-1,3)^T$，$\alpha_3=(5,-2,8,-9)^T$，$\alpha_4=(-1,3,1,7)^T$，求向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的秩及极大无关组；并将其余向量表示成所求极大无关组的线性组合.

解：$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}$　　…………4

$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　…………8

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，　　…………9

最大线性无关组为 α_1，α_2　　…………10

$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$ …………12

$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$

四、本题共 2 小题，满分 22 分。

15、（12 分）计算行列式$\begin{vmatrix}2&1&2&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix}2&1&2&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-2&0&-1&3\\1&1&1&0\\-3&0&3&4\end{vmatrix}$ …………6

$=-\begin{vmatrix}1&1&2\\-2&-1&3\\-3&3&4\end{vmatrix}$ …………8

$=-\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&-1&6\\-6&3&4\end{vmatrix}=32$ …………12

16、（10 分） 已知向量$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，并且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，证明存在不全为 1 的常数$c_2,c_3,c_4$使得$\alpha_1=c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+c_4\alpha_4$.

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性相关，所以存在不全为零的数$d_2,d_3,d_4$使得

$d_2\alpha_2+d_3\alpha_3+d_4\alpha_4=0$ …………6

又因为$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，所以

$\alpha_1=(1+d_2)\alpha_2+(1+d_3)\alpha_3+(1+d_4)\alpha_4$

又因为d_2,d_3,d_4不全为零，所以$(1+d_2),(1+d_3),(1+d_4)$ 不全为 1，存在不全为 1 的常数c_2,c_3,c_4使得$\alpha_1=c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+c_4\alpha_4$. …………10