学院________系________专业班级________姓名________学号________

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封

考试方式： 闭卷

太原理工大学 线性代数 试卷 A

适用专业 工科各专业 考试日期： 2024-7-5 时间： 120 分钟 共 2 页

注意事项：

1. 答题前，务必将姓名、专业班级、考试教室（考场）、学号填涂在相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成，答在试卷上无效。
3. 考试结束，将试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 6 & 8 & 1 & 2\\ 3 & 9 & 1 & 2\\ 6 & 2 & 3 & 3\end{vmatrix}$，则 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$ （　　）

A. -6　　B. 2　　C. 6　　D. 0 。

2.下列条件中不是 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 （　　）

A. $|A|\neq 0$　　B. $r(A)=n$　　C. A 是正定矩阵　　D. A 等价于 n 阶单位矩阵

3.已知 A， B， $A+B$， $A^{-1}+B^{-1}$ 均为可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 是 （　　）

A. $A+B$　　B. $A^{-1}+B^{-1}$　　C. $(A+B)^{-1}$　　D. $A(A+B)^{-1}B$ 。

4.设 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则下列向量组可作为该方程组基础解系的是 （　　）

A. $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$　　B. $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_1$

C. $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$　　D. $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_1$ 。

5.若 $A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 0\\ 2 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$，则 $a=$ （　　）

A. 0　　B. 2　　C. -2　　D. 6 。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

7.设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，则 $(A+2E)^{-1}=$________。

8.齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 λ,μ 的取值为________。

9.设 A 为正定矩阵，$A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，则 a 应满足条件________________________。

10.已知 3×4 矩阵 A 的行向量组线性无关，则秩 $r(A^T)=$_____________。

三、计算下列各题（每小题 8 分，共 24 分）

11.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $AB+E=A^2+B$，求矩阵 B。

12.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

求 A 的秩 $r(A)$，并求 A 的一个最高阶非零子式及 A 的列向量组的一个极大无关组。

13. 求一个正交变换，把二次曲面方程 $2x^2+3y^2+3z^2+4yz=1$ 化成标准方程。

四、解答题（每小题 10 分，共 40 分）

14.设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ 2x_1+4x_2-(5-\lambda)x_3=\lambda+1 \end{cases},$$

问 λ 为何值时，方程组有唯一解，无解，无穷多解，并在有无穷多解时，求出通解。

15.设三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,-3$，求矩阵 $B=A^*-2A+3E$ 的特征值及 $\left|B^{-1}\right|$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

16.已知向量组

$A:\vec{\alpha}_1=(0,1,2,3)^T$，$\vec{\alpha}_2=(3,0,1,2)^T$，$\vec{\alpha}_3=(2,3,0,1)^T$；

$B:\vec{\beta}_1=(2,1,1,2)^T$，$\vec{\beta}_2=(0,-2,1,1)^T$，$\vec{\beta}_3=(4,4,1,3)^T$。

（1）证明向量组 B 可由向量组 A 线性表示；

（2）写出向量组 B 可由向量组 A 线性表示的表达式。

17. 设三阶对称矩阵 A 的特征值为 2, 1, 1，与特征值 $\lambda=2$ 对应的特征向量 $p_1=(1,1,1)^T$，求矩阵 A。

五、证明题（6 分）

18.设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，证明：秩 $r(A)+r(A-E)=n$。