学院＿＿＿＿系　专业班级＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密　封　线

太原理工大学 <u>线性代数 E</u> 试卷（A）

适用专业：<u>2021 级软件专业</u> 考试日期：<u>2022.6.15</u> 时间：<u>120</u> 分钟 共 <u>2</u> 页

题　号	一	二	三	四	总　分
得　分					

一、本题共 10 小题，1-5 题为选择题 6-10 题为填空题，每小题 3 分，共 30 分。

1、设 n 阶方阵 A 、B 满足 $AB=0$，$B\neq 0$，则必有（　D　）。

A、$A=0$　　B、A 为可逆方阵　　C、$|B|\neq 0$　　D、$|A|=0$

2、设 A 是 4 阶方阵，且行列式 $|A|=8, B=-\frac{1}{2}A$, 则 $|B|=$（ D　）。

A、-4　　B、4　　C、$-\frac{1}{2}$　　D、$\frac{1}{2}$

3、设 A 为 n 阶方阵，且秩 $(A)=n-1.a_1,a_2$ 是非齐次方程组 $AX=B$ 的两个不同的解向量，则 $AX=0$ 的通解为（　C　）。

A、ka_1　　B、ka_2　　C、$k(a_1-a_2)$　　D、$k(a_1+a_2)$

4、已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 $r(r<m)$，则该向量组中（ A　）。

A、必有 r 个向量线性无关　　B、任意 r 个向量线性无关

C、任意 r 个向量都是该向量组的最大无关组 D、任一向量都可由其余向量线性表出

5、设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则（　C　）。

A、f 的秩为1　B、f 的秩为2　C、f 为正定的　D、f 为负定的

6、已知三阶方阵 A 有一个特征值为 2，对应于 2 的线性无关的特征向量为 $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，则 $A\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=$ $\underline{\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}}$。

7、设 A 为三阶矩阵，若 $|A|=-2$，则 $|-A|=$ <u>　　2　　</u>。

8、设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为 $\lambda=$ <u>　　1　　</u>。

9、已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \\ x_1+4x_2+ax_3=0 \end{cases}$有非零解，那么常数$a=$ <u>3</u> 。

10、设$\beta=(1,2,k)$可由$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,-1,2)$，$\alpha_3=(-1,1,-2)$线性表示，则$k=\frac{1}{2}$。

二、本题共 2 小题，满分 24 分。

11、（12 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求其逆矩阵$A^{-1}$。

解：

$$(A\ E)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots 12$$

12、（12 分）当λ为何值时，齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ \lambda x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+\lambda x_2=0 \end{cases}$有非零解？并求通解。

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-3)$， 当$\lambda=-2$ 或 $\lambda=3$ 方程组有非零解$\cdots\cdots\cdots\cdots 4$

当 $\lambda=-2$，由 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，通解 $x=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$； ……………8

当 $\lambda=3$，$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 解得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$，通解 $x=k_2\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$； ……………12

三、本题共 2 小题，满分 24 分。

13、（12 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ …………3

所以特征值为 $\lambda_3=-2$，$\lambda_1=\lambda_2=1$， ……………6.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由 $(E-A)x=0$，解得特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ……………10

当 $\lambda_3=-2$，$(-2E-A)x=0$ 解得特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ……………12

14、（12 分） 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$、$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$、$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$、$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\1\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组表示。

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&3\\1&3&-1&5\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ …………4

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ …………6

故 $R(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=2$ …………8

最大线性无关组为 α_1， α_2 …………10

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$$
$$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$$ ……………12

四、本题共 2 小题，满分 22 分。

15、（12 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & -9 & 11 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & -9 & 11 \end{vmatrix}$$ …………6

$$=\begin{vmatrix} 3 & 7 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -14 & 21 \end{vmatrix}=7$$ …………12

16、（10 分） 已知向量组 α_1 , α_2 , α_3 线性无关，证明向量组 $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2$ 线性无关。

证明：设存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1(\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_2)=0$$
$$(k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_3)\alpha_2+(k_1+k_2)\alpha_3=0$$ …………6

又因为 α_1 , α_2 , α_3 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}，又 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0，所以 k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

故向量组 $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2$ 线性无关 …………10