太原理工大学 线性代数 E 试卷（A）

适用专业：2020 级软件专业 考试日期：2021.7.7 时间：120 分钟 共 4 页

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					

学院 ______ 系 专业班级______ 姓名 ______ 学号

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封 线

一、本题共 15 小题，1-10 题为选择题,每小题 2 分 11-15 题为填空题,每小题 3 分，共 35 分。

1、设 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, 若 $|AB|=8$, 则 $a=$（ D ）。

A、$\dfrac{4}{3}$； B、$\dfrac{16}{3}$； C、$\dfrac{8}{3}$； D、0 。

2、 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，则下列结论**错误**的是（ D ）。

A、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的行列式的值相等； B、 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的秩相等；

C、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 特征值相同； D、$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 特征向量相同。

3、3 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意三个向量都线性无关，则向量组中 (A)。

A、每一个向量都能由其余三个向量线性表示；

B、只有一个向量能由其余三个向量线性表示；

C、只有一个向量不能由其余三个向量线性表示；

D、每一个向量都不能由其余三个向量线性表示。

4、已知齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ \lambda x+3y-z=0\\ \quad -y+\lambda z=0\end{cases}$ 仅有零解，则(A)。

A、$\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 1$； B、$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$；

C、$\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -1$； D、$\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$。

5、 已知A为n阶可逆矩阵，A^{-1}是A的逆矩阵，则 $\left\|A^{-1}\right|A| =$ （ B ）

A、 1；　　B、 $|A|^{1-n}$；　　C、 $(-1)^n$；　　D、 $|A|^{n-1}$。

6、若矩阵$A_{3\times3}$的特征值为1，-2，3 ，则下列矩阵可逆的是（ C ）

A、$A-E$；　B、$A+2E$；　C、$A-2E$；　D、$A-3E$。

7、设A为4×3矩阵，η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组$Ax=b$的3个线性无关的解，k_1,k_2为任意常数，则$Ax=b$的通解为C

A、$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$；　B、$\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$；

C、$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$；　D、$\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$。

8、设n阶方阵A、B满足$AB=0,B\neq0$，则必有（ D ）。

A、$A=0$；　B、A为可逆方阵；　C、$|B|\neq0$；　D、$|A|=0$。

9、若A为n阶实对称矩阵，且二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$正定，则下列结论**不正确**的是(D).

A、A的特征值全为正；　B、A的一切顺序主子式全为正；
C、A的主对角线上的元素全为正；　D、对一切n维列向量x，x^TAx全为正。

10、 设$\alpha=(1,2,k)$可由$(1,1,1)$，$(1,-1,2)$，$(-1,1,-2)$线性表示，则$k=$（ B ）。

A、1；　B、$\frac{1}{2}$；　C、$\frac{1}{3}$；　D、$\frac{1}{4}$。

11、设3阶矩阵A的特征值为1,1,2，则$\left|4A^{-1}-E\right|=$ __9__。

12、已知A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}$,则$A=\begin{bmatrix}1&-1\\-3&4\end{bmatrix}$。

13、 已知$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$，则代数余子式$A_{23}=$ ____a^2-b^2______。

学院 ______ 系 专业班级______ 姓名 ______ 学号 ______

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封 线

14、若 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&4\\0&0&k\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则常数 $k=$ ___0___ 。

15、 设四阶方阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3+4\alpha_4$，则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $\underline{k(1,1,1,-1)^T+(1,2,-3,4)^T}$ 。

二、本题共 2 小题，满分 24 分。

16.（12 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解：

$$(A\ E)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&4&0&0&1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&4&0&0&1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&-\frac{4}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 11$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots 12$$

17．（12 分）求线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$的通解.

解：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots 9$$

对应线性方程组为$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 - 1 \end{cases}$，取$x_3 = 0$，得特解$\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots 10$

对应齐次线性方程组为$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，取$x_3 = 1$，得基础解系为$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots 11$

$$\therefore \text{通解为} x = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots 12$$

三、本题共 2 小题，满分 24 分。

18．（12 分）设矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解：

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda) \cdots\cdots\cdots\cdots 5$$

所以特征值为$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 6. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8.$

当$\lambda_1 = 1$,求得特征向量为$x = k_1\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$；当$\lambda_2 = 3$,求得特征向量为$x = k_2\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=6$,求得特征向量为 $x=k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$…………11

$\therefore$ 取 $P=\begin{pmatrix}5&0&0\\-5&-3&0\\1&5&1\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$…………12

19.（12 分） 讨论参数 t 的取值，求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\t\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\\0\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大线性无关组。

解：$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\0&0&0\end{pmatrix}$ …………4

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&2+t&5\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3-t\\0&0&0\end{pmatrix}$ …………8

当 $t=3$ 时，$R(A)=2$，最大线性无关组为 α_1，α_2；当 $t\neq 3$ 时，$R(A)=3$，最大线性无关组为 α_1，α_2，α_3. …………12

四、本题共 2 小题，满分 17 分。

20.（12 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\-1&2&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&5\\0&1&0&-2\\0&2&6&6\end{vmatrix}$ …………4

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & 0 & -1 & -7\\0 & 0 & 4 & -4\end{vmatrix}$$ …………8

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & 0 & -1 & -7\\0 & 0 & 0 & -32\end{vmatrix}=32$$ …………12

21.（5分） 若 A 是 n 阶矩阵，且满足 $AA^T=E$，$|A|=-1$, 试证 $A+E$ 不可逆。

证明：

因为 $AA^T+A=E+A$ …………2

所以 $A(A^T+E)=E+A$ 两边同取行列式得

$|A||A^T+E|=|E+A|$， …………3

又因为 $|A^T+E|=|E+A|$ 且 $|A|=-1$, …………4

所以 $|E+A|=0$，所以 $A+E$ 不可逆 …………5