学院________系________专业班级________姓名________学号________

(密封线外不要写姓名、学号、班级、密封线内不准答题，违者按零分计)

密 封

考试方式：__闭卷__

太原理工大学__线性代数__试卷 A

适用专业__工科各专业__考试日期：__2021-7-7__ 时间：__120__分钟 共__2__页

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、专业班级、考试教室、学号填涂在相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成，答在试卷上无效。
3. 考试结束，将试卷和答题卡一并交回。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 3 阶可逆矩阵，$|A|=2$，则 $|(A^*)^{-1}|=$ ____________.

2. 若向量组 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,3,t)^T$ 线性相关，则 $t=$ ____________.

3. 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ ____________.

4. 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $|B^{-1}-E|=$ _____.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为____________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，则 A 的列向量 ____________.

   A. 必有两个向量对应分量成比例；

   B. 必有一个向量为零向量；

   C. 必有一个向量是其余向量的线性组合；

   D. 组成的向量组的秩为零.

7. 若 A 与 B 相似，则下列结论不正确的是 ____________.

   A. $|A|=|B|$ B. A 与 B 有相同的特征多项式

   C. $tr(A)=tr(B)$ D. A 与 B 有相同的伴随矩阵

8. 设λ_1,λ_2为实对称矩阵A的两个不同特征值，α,β是A的分别属于λ_1与λ_2的特征向量，则α与β是 ____________.

A. 线性相关　　B. 相互正交

C. 对应分量成比例　　D. 必有零向量

9. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$, 则$A$与$B$ ___________.

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似

C.不合同但相似　　D.不合同且不相似

10. 设$A\neq 0,B\neq 0$为n阶方阵，满足$AB=0$，则必有 ____________.

A. $R(A)=0$　　B. $R(B)=0$

C. $R(A)+R(B)=n$　　D. $R(A)+R(B)\leq n$

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

11. 已知向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\\-1\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\1\end{bmatrix}$，求这一向量组的秩及一个极大无关组.

12. 设有向量$\alpha_1^T=(1,2,2)$, $\alpha_2^T=(-2,-1,2)$, $\alpha_3^T=(-2,2,-1)$, $\beta_1^T=(0,3,0)$, $\beta_2^T=(0,3,3)$, 把β_1,β_2表示成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

13. 解矩阵方程$AX=A+2X$，其中$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$.

四、解答题

14. （12 分）设非齐次线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$，问$\lambda$取何值时，方程组

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并在有无穷多解时，求出通解.

15. （10 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值及其对应的线性无关的特征向量.

16. （12 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3，且 A 的属于特征值 1 与 2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$，

（1）求 A 的属于 3 的特征向量 α_3；

（2）求矩阵 A.

五、证明题（6 分）

17. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $A\neq 0$，试证：存在一个 n 阶非零矩阵 B，使 $AB=0$ 的充要条件是 $|A|=0$.