Monades de Hopf : quelques exemples farfelus

Alain Bruguières

(Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
Université de Montpellier)

Higher structures in Noncommutative Geometry
and Quantum Algebra
Lille, October 8th-11th, 2024
Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1

Monades

Soit C une catégorie. La catégorie des endofunctors $\mathrm{EndoFun}(C)$ est monoïdale stricte($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_C$)

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie des endofunctors $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie des endofunctors $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module est un couple (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ t. q.

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie des endofunctors $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \ \text{(produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \ \text{(unité)}$$

Un T-module est un couple (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ t. q.

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}^T$ categorie des T-modules.

Monades

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie des endofunctors $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$ est monoïdale stricte($\otimes$=composition, $\mathbb{1} = 1_{\mathcal{C}}$)

Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde dans $\mathrm{EndoFun}(\mathcal{C})$:

$$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad \mu\colon T^2 \to T \text{ (produit)}, \quad \eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T \text{ (unité)}$$

Un T-module est un couple (M, r), $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $r\colon T(M) \to M$ t. q.

$$r\mu_M = rT(r) \quad \text{et} \quad r\eta_M = \mathrm{id}_M.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}^T$ categorie des T-modules.

Exemple

A monoïde dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$

$T = A\otimes ?$ est une monade sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^T = A\text{-}\mathrm{Mod}$

Monades comonoïdales [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C}$

Monades comonoïdales [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

Monades comonoïdales [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *monade comonoïdale* ssi $\mathcal{C}^T$ est monoïdal et U^T monoïdal strict.

Monades comonoïdales [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *monade comonoïdale* ssi $\mathcal{C}^T$ est monoïdal et U^T monoïdal strict.
Cela équivaut à

- T est un endofoncteur comonoïdal
  (avec $\Delta_{X,Y} \colon T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ and η sont comonoïdaux.

Monades comonoïdales [Moerdijk]

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (T, μ, η) monade sur $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^T$, $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$

T est une *monade comonoïdale* ssi $\mathcal{C}^T$ est monoïdal et U^T monoïdal strict.
Cela équivaut à

- T est un endofoncteur comonoïdal
  (avec $\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \to TX \otimes TY$ et $\varepsilon : T\mathbb{1} \to \mathbb{1}$)
- μ and η sont comonoïdaux.

Axiome principal :

$$\begin{tikzcd}
T^2(X \otimes Y) \arrow[r, "T\Delta_{X,Y}"] \arrow[d, "\mu_{X\otimes Y}"'] & T(TX \otimes TY) \arrow[r, "\Delta_{TX,TY}"] & T^2X \otimes T^2Y \arrow[d, "\mu_X \otimes \mu_Y"] \\
T(X \otimes Y) \arrow[rr, "\Delta_{X,Y}"'] & & TX \otimes TY
\end{tikzcd}$$

Monades de Hopf

Soit T monade comonoïdale. On définit les *morphismes de fusion* à gauche / à droite

- $H^l(X, Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X, Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Monades de Hopf

Soit T monade comonoïdale. On définit les *morphismes de fusion* à gauche / à droite

- $H^l(X, Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X, Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une *monade de Hopf à droite* est une monade comonoïdale dont le morphisme de fusion à droite est un isomorphisme. Idem à gauche, bilatère.

Monades de Hopf

Soit T monade comonoïdale. On définit les *morphismes de fusion* à gauche / à droite

- $H^l(X,Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X,Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une *monade de Hopf à droite* est une monade comonoïdale dont le morphisme de fusion à droite est un isomorphisme. Idem à gauche, bilatère.

Proposition

Si T est une monade comonoïdale sur $\mathcal{C}$ rigide, on a l'équivalence:

(i) T est une monade de Hopf;

(ii) $\mathcal{C}^T$ est rigide.

Soit T monade comonoïdale. On définit les *morphismes de fusion* à gauche / à droite

- $H^l(X,Y) = (\mathrm{id}_{TX} \otimes \mu_Y)\Delta_{X,TY} \colon T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$,
- $H^r(X,Y) = (\mu_X \otimes \mathrm{id}_{TY})\Delta_{TX,Y} \colon T(TX \otimes Y) \to TX \otimes TY$.

Une *monade de Hopf à droite* est une monade comonoïdale dont le morphisme de fusion à droite est un isomorphisme. Idem à gauche, bilatère.

Proposition

Si T est une monade comonoïdale sur $\mathcal{C}$ rigide, on a l'équivalence:

(i) T est une monade de Hopf;

(ii) $\mathcal{C}^T$ est rigide.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre, une algèbre de Hopf (H, σ) dans $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ définit une monade de Hopf sur $\mathcal{C}$:

Hopfitude et Homs internes

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est dite *close à droite* si elle admet des Homs internes à droite : pour $X, Y \in \mathcal{C}$, le préfaisceau $\mathcal{C}(- \otimes X, Y)$ est représentable, c-à-d il existe $Z = [X, Y]^r$ t. q.

$$\mathcal{C}(- \otimes X, Y) \simeq \mathcal{C}(-, Z).$$

Théorème

Soit T une monade comonoïdale sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ close à droite. Alors T est Hopf à droite si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est close à droite et le foncteur oubli $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ préserve les Homs internes à droite.

Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est dite *close à droite* si elle admet des Homs internes à droite : pour $X, Y \in \mathcal{C}$, le préfaisceau $\mathcal{C}(- \otimes X, Y)$ est représentable, c-à-d il existe $Z = [X, Y]^r$ t. q.

$$\mathcal{C}(- \otimes X, Y) \simeq \mathcal{C}(-, Z).$$

Théorème

Soit T une monade comonoïdale sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ close à droite. Alors T est Hopf à droite si et seulement si $\mathcal{C}^T$ est close à droite et le foncteur oubli $U^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ préserve les Homs internes à droite.

En fait, on n'a pas besoin de supposer $\mathcal{C}$ close à droite. Une monade comonoïdale T est Hopf à droite ssi U^T préserve les Homs internes à droite en tant que préfaisceaux.

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.
$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) une algèbre de Hopf centrale sur $\mathcal{C}$, c-à-d une algèbre de Hopf tressée dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.

$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) une algèbre de Hopf centrale sur $\mathcal{C}$, c-à-d une algèbre de Hopf tressée dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$

$\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, donnée par $X \mapsto H \otimes X$.

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.
$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) une algèbre de Hopf centrale sur $\mathcal{C}$, c-à-d une algèbre de Hopf tressée dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, donnée par $X \mapsto H \otimes X$. La structure comonoïdale est

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)$$

$$\varepsilon = \text{counité de } H$$

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.
$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) une algèbre de Hopf centrale sur $\mathcal{C}$, c-à-d une algèbre de Hopf tressée dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, donnée par $X \mapsto H \otimes X$. La structure comonoïdale est

$$\begin{aligned} \Delta_{X,Y} &= (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y) \\ \varepsilon &= \text{counité de } H \end{aligned}$$

De plus T est *augmentée*, c-à-d munie d'un morphisme de Hopf monades

$$e = (\varepsilon \otimes ?) : T \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$$

Monades de Hopf définie par une algèbre de Hopf.

Toute algèbre de Hopf H sur un corps K définit une monade de Hopf $H \otimes -$ sur Vect_K, et cette construction se généralise comme suit.
$\mathcal{C}$ catégorie monoïdale, (H, σ) une algèbre de Hopf centrale sur $\mathcal{C}$, c-à-d une algèbre de Hopf tressée dans le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$
$\rightsquigarrow$ une monade de Hopf $T = H \otimes_\sigma ?$ sur $\mathcal{C}$, donnée par $X \mapsto H \otimes X$. La structure comonoïdale est

$$\Delta_{X,Y} = (H \otimes \sigma_X \otimes Y)(\Delta \otimes X \otimes Y)$$
$$\varepsilon = \text{counité de } H$$

De plus T est *augmentée*, c-à-d munie d'un morphisme de Hopf monades

$$e = (\varepsilon \otimes ?) : T \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$$

Théorème (BVL)

algèbres de Hopf centrales dans $\mathcal{C}$ $\simeq$ monades de Hopf augmentées sur $\mathcal{C}$

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.
Par dualité un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ se traduit par une transformation dinaturelle ${}^{\vee}Y \otimes X \otimes Y \to X$

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.
Par dualité un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ se traduit par une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralizable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tous $X \in \mathcal{C}$.

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.
Par dualité un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ se traduit par une transformation dinaturelle ${}^{\vee}Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralizable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^{\vee}Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tous $X \in \mathcal{C}$. Alors un demi-tressage σ se traduit par un morphisme $\tilde{\sigma} \colon Z(X) \to X$

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.
Par dualité un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ se traduit par une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralizable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tous $X \in \mathcal{C}$. Alors un demi-tressage σ se traduit par un morphisme $\tilde{\sigma} : Z(X) \to X$

Theorem (BV)

Si $\mathcal{C}$ is centralisable, alors $Z : X \mapsto Z(X)$ est une **monade de Hopf quasitriangulaire sur** $\mathcal{C}$ et on a un isomorphisme canonique de catégories tressées

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^Z$$
$$(X, \sigma) \mapsto (X, \tilde{\sigma})$$

La Reine des Monades de Hopf !

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie rigide, et $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son centre.
Par dualité un demi-tressage $\sigma_Y : X \otimes Y \to Y \otimes X$ se traduit par une transformation dinaturelle ${}^\vee Y \otimes X \otimes Y \to X$
On dit que $\mathcal{C}$ est *centralizable* si $Z(X) = \int^{Y \in \mathcal{C}} {}^\vee Y \otimes X \otimes Y$ existe pour tous $X \in \mathcal{C}$. Alors un demi-tressage σ se traduit par un morphisme $\tilde{\sigma} : Z(X) \to X$

Theorem (BV)

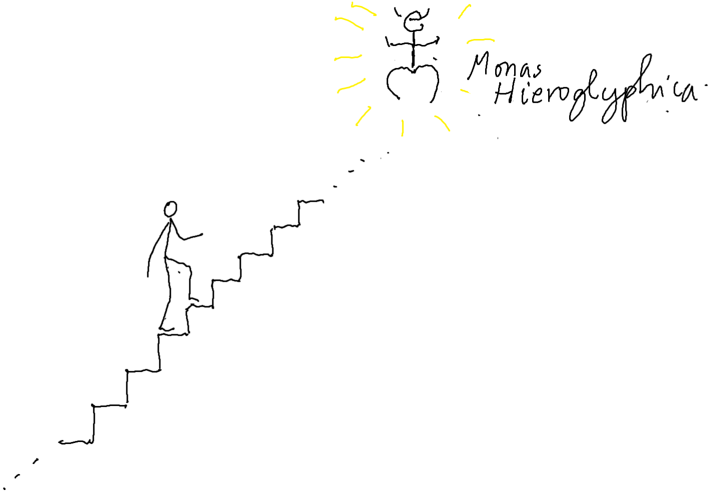
Si $\mathcal{C}$ is centralisable, alors $Z : X \mapsto Z(X)$ est une **monade de Hopf quasitriangulaire sur** $\mathcal{C}$ et on a un isomorphisme canonique de catégories tressées

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) &\to \mathcal{C}^Z \\ (X, \sigma) &\mapsto (X, \tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

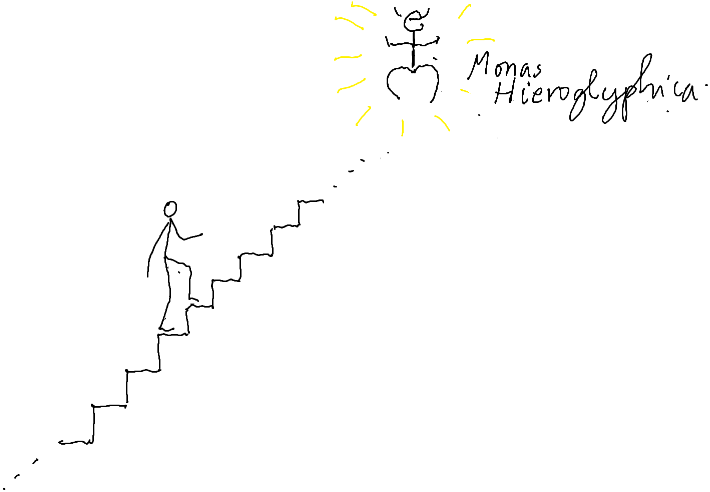
La monade Z n'est augmentée que si $\mathcal{C}$ est tressée.

Les monades de Hopf sont un escalier sans fin qui mène à un monde d’abstraction, un monde ésotérique...

Les monades de Hopf sont un escalier sans fin qui mène à un monde d'abstraction, un monde ésotérique...

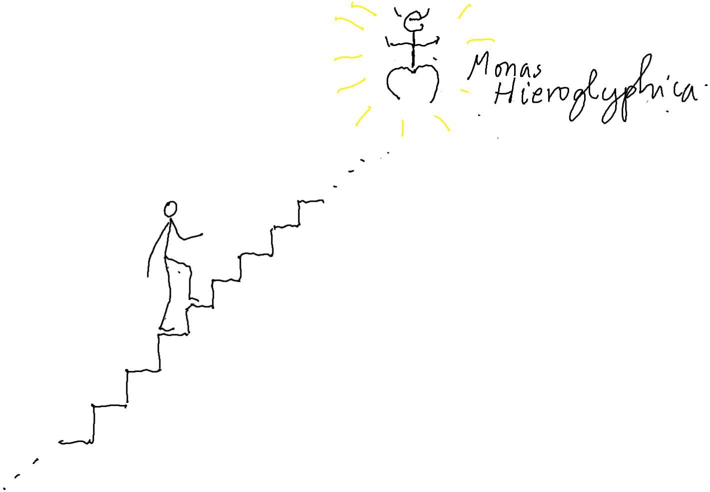


Les monades de Hopf sont un escalier sans fin qui mène à un monde d'abstraction, un monde ésotérique...



It's all abstract nonsense!

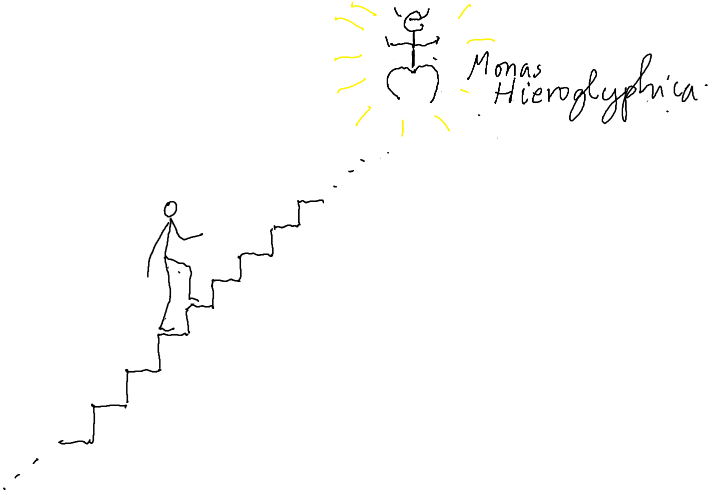
Les monades de Hopf sont un escalier sans fin qui mène à un monde d'abstraction, un monde ésotérique...



It's all abstract nonsense!

C'est quoi une monade de Hopf dans les réels ?

Les monades de Hopf sont un escalier sans fin qui mène à un monde d'abstraction, un monde ésotérique...



It's all abstract nonsense!

C'est quoi une monade de Hopf dans les réels ?

Nous allons considérer des exemples plus terre-à-terre....

Soit set la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien.
Quelles sont les monades de Hopf sur set ?

Soit set la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien.
Quelles sont les monades de Hopf sur set ?
Faits généraux : un foncteur entre catégories cartésiennes admet une unique structure comonoïdale, et une transformation naturelle entre deux tels foncteurs est automatiqueemnt comonoïdale. Une monade sur une catégorie cartésienne a donc une unique structure comonoïdale.

Soit set la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien. Quelles sont les monades de Hopf sur set ?
Faits généraux : un foncteur entre catégories cartésiennes admet une unique structure comonoïdale, et une transformation naturelle entre deux tels foncteurs est automatiqueemnt comonoïdale. Une monade sur une catégorie cartésienne a donc une unique structure comonoïdale.

Proposition.

Soit T une monade sur set. Alors soit T est fidèle, soit pour tout X dans set, $\#T(X) \leq 1$.
Il y a exactement deux monades non fidèles sur set, Pt et Pt_0 définies comme suit:

$$\mathrm{Pt}(X) = * \quad Pt_0(X) = * \quad \text{si } X \neq \emptyset,\ Pt_0(\emptyset) = \emptyset.$$

Ces deux monades sont de Hopf.

Soit set la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien.
Quelles sont les monades de Hopf sur set ?
Faits généraux : un foncteur entre catégories cartésiennes admet une unique structure comonoïdale, et une transformation naturelle entre deux tels foncteurs est automatiqueemnt comonoïdale. Une monade sur une catégorie cartésienne a donc une unique structure comonoïdale.

Proposition.

Soit T une monade sur set. Alors soit T est fidèle, soit pour tout X dans set, $\# T(X) \leq 1$.
Il y a exactement deux monades non fidèles sur set, Pt et Pt_0 définies comme suit:

$$\mathrm{Pt}(X) = * \quad Pt_0(X) = * \quad \text{si } X \neq \emptyset,\ Pt_0(\emptyset) = \emptyset.$$

Ces deux monades sont de Hopf.

Quelles sont les monades de Hopf fidèles sur set?

Soit set la catégorie des ensembles finis, munie du produit cartésien.
Quelles sont les monades de Hopf sur set ?
Faits généraux : un foncteur entre catégories cartésiennes admet une unique structure comonoïdale, et une transformation naturelle entre deux tels foncteurs est automatiqueemnt comonoïdale. Une monade sur une catégorie cartésienne a donc une unique structure comonoïdale.

Proposition.

Soit T une monade sur set. Alors soit T est fidèle, soit pour tout X dans set, $\#T(X) \leq 1$.
Il y a exactement deux monades non fidèles sur set, Pt et Pt_0 définies comme suit:

$$\mathrm{Pt}(X) = * \quad Pt_0(X) = * \quad \text{si } X \neq \emptyset,\ Pt_0(\emptyset) = \emptyset.$$

Ces deux monades sont de Hopf.

Quelles sont les monades de Hopf fidèles sur set?
Notation : $[n] = [1, n]$ in $\mathbb{N}$.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

1ère étape. Si Θ est bijectif, G admet une unique structure de monoïde telle que Θ soit un isomorphisme de monades, et si de plus T est de Hopf à droite, G est un groupe.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

1ère étape. Si Θ est bijectif, G admet une unique structure de monoïde telle que Θ soit un isomorphisme de monades, et si de plus T est de Hopf à droite, G est un groupe.
Soit $t = \#T$ l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $t(n) = \#T([n])$.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

1ère étape. Si Θ est bijectif, G admet une unique structure de monoïde telle que Θ soit un isomorphisme de monades, et si de plus T est de Hopf à droite, G est un groupe.
Soit $t = \#T$ l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $t(n) = \#T([n])$.

2ème étape. Si T est fidèle, t est injective, et si de plus T est de Hopf à droite, t est linéaire, c-à-d $\#T(X) = \#G\,\#X$.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

1ère étape. Si Θ est bijectif, G admet une unique structure de monoïde telle que Θ soit un isomorphisme de monades, et si de plus T est de Hopf à droite, G est un groupe.
Soit $t = \#T$ l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $t(n) = \#T([n])$.

2ème étape. Si T est fidèle, t est injective, et si de plus T est de Hopf à droite, t est linéaire, c-à-d $\#T(X) = \#G\,\#X$.

Il suffit donc de montrer que si t est linéaire, Θ est surjective.

Soit T une monade sur set, et soit $G = T(*)$.
On a une transformation naturelle canonique $\Theta_X : G \times X \to T(X)$, $(a, x) \mapsto T(x)(a)$.
Montrons que si T est fidèle et de Hopf à droite, G est un groupe (fini) et Θ est un isomorphisme de monades.

1ère étape. Si Θ est bijectif, G admet une unique structure de monoïde telle que Θ soit un isomorphisme de monades, et si de plus T est de Hopf à droite, G est un groupe.
Soit $t = \#T$ l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $t(n) = \#T([n])$.

2ème étape. Si T est fidèle, t est injective, et si de plus T est de Hopf à droite, t est linéaire, c-à-d $\#T(X) = \#G\,\#X$.

Il suffit donc de montrer que si t est linéaire, Θ est surjective.

3ème étape. Soit $n \geq 1$, F un endofoncteur de set à croissance au plus linéaire, et $\alpha_X : X^n \to F(X)$ une transformation naturelle. Alors α se factorise à travers l'une des projections $X^n \to X$.

4ème étape. Soit $a \in T([n])$. Alors a définit une transformation naturelle $\alpha_X : X^n \to T(X)$ donnée par $\alpha_X(x) = T(x)\alpha$, voyant $x \in X^n$ comme une application $[n] \to X$, et on a $a = \alpha_{[n]}(1, 2, \ldots, n)$.

4ème étape. Soit $a \in T([n])$. Alors a définit une transformation naturelle $\alpha_X : X^n \to T(X)$ donnée par $\alpha_X(x) = T(x)\alpha$, voyant $x \in X^n$ comme une application $[n] \to X$, et on a $a = \alpha_{[n]}(1, 2, \ldots, n)$.
Au vu de l'étape 3, si t est linéaire α se factorise à travers une transformation naturelle $\gamma_X : X \to T(X)$, de la forme $\Theta_X(g, -)$, où $g = \gamma_*$, donc $a \in Im(\Theta_{[n]})$, et Θ est surjectif.

4ème étape. Soit $a \in T([n])$. Alors a définit une transformation naturelle $\alpha_X : X^n \to T(X)$ donnée par $\alpha_X(x) = T(x)\alpha$, voyant $x \in X^n$ comme une application $[n] \to X$, et on a $a = \alpha_{[n]}(1, 2, \ldots, n)$.
Au vu de l'étape 3, si t est linéaire α se factorise à travers une transformation naturelle $\gamma_X : X \to T(X)$, de la forme $\Theta_X(g, -)$, où $g = \gamma_*$, donc $a \in Im(\Theta_{[n]})$, et Θ est surjectif.

On a donc montré :

Théorème

les monades de Hopf (à droite) sur set sont Pt, Pt_0 et les monades de la forme $X \mapsto G \times X$, G étant un groupe fini.

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Quelles sont les monades de Hopf sur $\mathcal{V}_K$?

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Quelles sont les monades de Hopf sur $\mathcal{V}_K$?

Toute algèbre de Hopf de dimension finie H sur K définit une monade de Hopf $H \otimes_K -$ sur $\mathcal{V}_K$, qui est K-linéaire. Y en a-t-il d'autres ?

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Quelles sont les monades de Hopf sur $\mathcal{V}_K$?

Toute algèbre de Hopf de dimension finie H sur K définit une monade de Hopf $H \otimes_K -$ sur $\mathcal{V}_K$, qui est K-linéaire. Y en a-t-il d'autres ?

Soit $k \subset K$ un sous-corps d'indice fini (t.q. $[K : k]$ est fini).

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Quelles sont les monades de Hopf sur $\mathcal{V}_K$?

Toute algèbre de Hopf de dimension finie H sur K définit une monade de Hopf $H \otimes_K -$ sur $\mathcal{V}_K$, qui est K-linéaire. Y en a-t-il d'autres ?

Soit $k \subset K$ un sous-corps d'indice fini (t.q. $[K : k]$ est fini).

Le foncteur k-linéaire monoïdal fort $U = K \otimes_k - : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_K$ admet un adjoint à droite R, le foncteur oubli, et un adjoint à gauche

$$L = K_k^* \otimes_K -,$$

où $K_k^* = \mathrm{Hom}_k(K, k)$.
Par conséquent $T_k = UR, E \mapsto K \otimes_k K_k^* \otimes_K E$ est une monade de Hopf k-linéaire sur $\mathcal{V}_K$.

Soit K un corps commutatif et $\mathcal{V}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Quelles sont les monades de Hopf sur $\mathcal{V}_K$?

Toute algèbre de Hopf de dimension finie H sur K définit une monade de Hopf $H \otimes_K -$ sur $\mathcal{V}_K$, qui est K-linéaire. Y en a-t-il d'autres ?

Soit $k \subset K$ un sous-corps d'indice fini (t.q. $[K : k]$ est fini).

Le foncteur k-linéaire monoïdal fort $U = K \otimes_k - : \mathcal{V}_k \to \mathcal{V}_K$ admet un adjoint à droite R, le foncteur oubli, et un adjoint à gauche

$$L = K_k^* \otimes_K -,$$

où $K_k^* = \mathrm{Hom}_k(K, k)$.
Par conséquent $T_k = UR, E \mapsto K \otimes_k K_k^* \otimes_K E$ est une monade de Hopf k-linéaire sur $\mathcal{V}_K$.
Qu'en est-il du cas général ?

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Comme dans le cas des ensembles finis, on montre que t est injective, et linéaire.

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Comme dans le cas des ensembles finis, on montre que t est injective, et linéaire.
On en déduit que T est un foncteur additif exact, du fait que $T(X) \oplus T(Y)$ est toujours facteur direct de $T(X \oplus Y)$ d'une part, et que les suites exactes dans $\mathcal{V}_K$ sont scindées d'autre part.

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Comme dans le cas des ensembles finis, on montre que t est injective, et linéaire.
On en déduit que T est un foncteur additif exact, du fait que $T(X) \oplus T(Y)$ est toujours facteur direct de $T(X \oplus Y)$ d'une part, et que les suites exactes dans $\mathcal{V}_K$ sont scindées d'autre part.
De plus $k = \{x \in X, T_0 T(x) = x T_0\}$ est le plus grand sous-corps de K tel que T soit k-linéaire.

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Comme dans le cas des ensembles finis, on montre que t est injective, et linéaire.
On en déduit que T est un foncteur additif exact, du fait que $T(X) \oplus T(Y)$ est toujours facteur direct de $T(X \oplus Y)$ d'une part, et que les suites exactes dans $\mathcal{V}_K$ sont scindées d'autre part.
De plus $k = \{x \in X, T_0 T(x) = x T_0\}$ est le plus grand sous-corps de K tel que T soit k-linéaire.
On montre que k est d'indice fini dans K.

Soit T une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$. Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $t(n) = \dim_K T(K^n)$.

Comme dans le cas des ensembles finis, on montre que t est injective, et linéaire.

On en déduit que T est un foncteur additif exact, du fait que $T(X) \oplus T(Y)$ est toujours facteur direct de $T(X \oplus Y)$ d'une part, et que les suites exactes dans $\mathcal{V}_K$ sont scindées d'autre part.

De plus $k = \{x \in X, T_0 T(x) = x T_0\}$ est le plus grand sous-corps de K tel que T soit k-linéaire.

On montre que k est d'indice fini dans K.

La catégorie $\mathcal{C} = {\mathcal{V}_K}^T$ est k-tensorielle finie, et le foncteur oubli $U : \mathcal{C} \to \mathcal{V}_K$ est un foncteur fibre (non neutre).

De cela on déduit :

De cela on déduit :

Théorème

Une monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$ est donc donnée par un sous-corps k de K tel que $[K : k]$ est fini, et, de manière équivente,

1. d'une catégorie k-tensorielle finie munie d'un foncteur fibre ω vers $\mathcal{V}_K$;
2. d'un k-algébroïde de Hopf H de base K

$$H = \int_{X \in \mathcal{C}} \omega(X) \otimes_K \omega(X)^*$$

Le théorème suivant généralise la notion d'algèbre trivialisante intruduite par Deligne pour caractériser les catégories tensorielles symétriques tannakiennes au cas non-symétrique.

Théorème

Notons que, pour une catégorie k-tensorielle finie $\mathcal{C}$, les foncteurs fibres à valeurs dans $\mathcal{V}_K$ sont en bijection avec les algèbres commutatives (A, σ) du centre de $\mathcal{C}$ vérifiant:

1. $\mathcal{C}(\mathbb{1}, A) \simeq K$;
2. (A trivialisante) $\forall X \in \mathcal{C}, A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules pour un $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant généralise la notion d'algèbre trivialisante intruduite par Deligne pour caractériser les catégories tensorielles symétriques tannakiennes au cas non-symétrique.

Théorème

Notons que, pour une catégorie k-tensorielle finie $\mathcal{C}$, les foncteurs fibres à valeurs dans $\mathcal{V}_K$ sont en bijection avec les algèbres commutatives (A, σ) du centre de $\mathcal{C}$ vérifiant:

1. $\mathcal{C}(\mathbb{1}, A) \simeq K$;
2. (A trivialisante) $\forall X \in \mathcal{C}, A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ comme A-modules pour un $n \in \mathbb{N}$.

Notons qu'il résulte du théorème d'Artin-Schreier que toute monade de Hopf sur $\mathcal{V}_K$ est de la forme $H \otimes -$ pour H algèbre de Hopf sur K, si $K = \mathbb{R}$ ou K est algébriquement clos de caractéristique > 0 car alors nécessairement $k = K$.

Un ensemble ordonné (poset) M peut être vu comme une catégorie où deux flèches parallèles sont égales et tout isomorphisme est une identité.

Un ensemble ordonné (poset) M peut être vu comme une catégorie où deux flèches parallèles sont égales et tout isomorphisme est une identité. Une monade T sur un monoïde M est alors une application

$$t : M \to M$$

$$x \mapsto \overline{x}$$

qui est croissante, idempotente et involutive:

$$x \leq y \implies \overline{x} \leq \overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = \overline{x}, \quad x \leq \overline{x}.$$

Un ensemble ordonné (poset) M peut être vu comme une catégorie où deux flèches parallèles sont égales et tout isomorphisme est une identité. Une monade T sur un monoïde M est alors une application

$$t : M \to M$$

$$x \mapsto \overline{x}$$

qui est croissante, idempotente et involutive:

$$x \leq y \implies \overline{x} \leq \overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = \overline{x}, \quad x \leq \overline{x}.$$

La catégorie M^T des T-module s'identifie à l'ensemble ordonné $T = \{x \in M, \overline{x} = x\}$.

Un ensemble ordonné (poset) M peut être vu comme une catégorie où deux flèches parallèles sont égales et tout isomorphisme est une identité. Une monade T sur un monoïde M est alors une application

$$t : M \to M$$
$$x \mapsto \overline{x}$$

qui est croissante, idempotente et involutive:

$$x \leq y \implies \overline{x} \leq \overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = \overline{x}, \quad x \leq \overline{x}.$$

La catégorie M^T des T-module s’identifie à l’ensemble ordonné $T = \{x \in M, \overline{x} = x\}$.

Inversement, un sous-ensemble $T \subset M$ provient d’une monade si et seulement s’il est *monadique*, c’est-à-dire s’il satisfait la condition

$$\forall x \in M \qquad \exists \min\{y \in T \mid x \leq y\}.$$

Un ensemble ordonné (poset) M peut être vu comme une catégorie où deux flèches parallèles sont égales et tout isomorphisme est une identité. Une monade T sur un monoïde M est alors une application

$$t : M \to M$$

$$x \mapsto \overline{x}$$

qui est croissante, idempotente et involutive:

$$x \leq y \implies \overline{x} \leq \overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = \overline{x}, \quad x \leq \overline{x}.$$

La catégorie M^T des T-module s'identifie à l'ensemble ordonné $T = \{x \in M, \overline{x} = x\}$.

Inversement, un sous-ensemble $T \subset M$ provient d'une monade si et seulement s'il est *monadique*, c'est-à-dire s'il satisfait la condition

$$\forall x \in M \qquad \exists \min\{y \in T \mid x \leq y\}.$$

Si tel est le cas, la monade est définie paz

$$x \mapsto t(x) = \overline{x} = \min\{y \in T \mid x \leq y\}.$$

Le monoïde M définit une catégorie monoïdale si et seulement s'il est ordonné (po monoid). Dans ce cas, une monade comonoïdale sur M est une monade $t : M \to M$, $x \mapsto \overline{x}$ satisfaisant :

$$\overline{xy} \leq \overline{x}\,\overline{y}, \qquad \overline{1} = 1.$$

Le monoïde M définit une catégorie monoïdale si et seulement s'il est ordonné (po monoid). Dans ce cas, une monade comonoïdale sur M est une monade $t : M \to M$, $x \mapsto \overline{x}$ satisfaisant :

$$\overline{xy} \leq \overline{x}\,\overline{y}, \qquad \overline{1} = 1.$$

Si tel est le cas, $T = \{x \in M \mid \overline{x} = x\}$ est un sous-monoïde de M. Ainsi, $T \subset M$ provient d'une monade comonoïdale si et seulement si c'est un sous-monoïde monadique de M.

Le monoïde M définit une catégorie monoïdale si et seulement s'il est ordonné (po monoid). Dans ce cas, une monade comonoïdale sur M est une monade $t : M \to M$, $x \mapsto \overline{x}$ satisfaisant :

$$\overline{xy} \leq \overline{x}\,\overline{y}, \qquad \overline{1} = 1.$$

Si tel est le cas, $T = \{x \in M \mid \overline{x} = x\}$ est un sous-monoïde de M. Ainsi, $T \subset M$ provient d'une monade comonoïdale si et seulement si c'est un sous-monoïde monadique de M.

Une monade comonoïdale $t : M \to M$ est de Hopf à droite SSI

$$\overline{x\,\overline{y}} = \overline{x}\,\overline{y},$$

ce qui équivaut à dire que t est T-linéaire à droite.

Le monoïde M définit une catégorie monoïdale si et seulement s'il est ordonné (po monoid). Dans ce cas, une monade comonoïdale sur M est une monade $t : M \to M$, $x \mapsto \overline{x}$ satisfaisant :

$$\overline{xy} \leq \overline{x}\,\overline{y}, \qquad \overline{1} = 1.$$

Si tel est le cas, $T = \{x \in M \mid \overline{x} = x\}$ est un sous-monoïde de M. Ainsi, $T \subset M$ provient d'une monade comonoïdale si et seulement si c'est un sous-monoïde monadique de M.

Une monade comonoïdale $t : M \to M$ est de Hopf à droite SSI

$$\overline{x\,\overline{y}} = \overline{x}\,\overline{y},$$

ce qui équivaut à dire que t est T-linéaire à droite.
Si M est commutatif, Hopf à gauche, Hopf à droite et Hopf tout court sont équivalents.

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.
De même le Hom interne à gauche $\lceil y/x \rceil = \max\{t \mid tx \leq y\}$.

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.
De même le Hom interne à gauche $\lceil y/x \rceil = \max\{t \mid tx \leq y\}$.
Si M admet des Homs internes à droite, alors une monade comonoïdale t est de Hopf à droite si et seulement

$$\forall x, y \in T, \qquad \lceil x \setminus y \rceil \in T.$$

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.
De même le Hom interne à gauche $\lceil y/x \rceil = \max\{t \mid tx \leq y\}$.
Si M admet des Homs internes à droite, alors une monade comonoïdale t est de Hopf à droite si et seulement

$$\forall x, y \in T, \qquad \lceil x \setminus y \rceil \in T.$$

On dit que M est *positif* si $\forall x \in M, 1 \leq x$. Alors $\lceil x \setminus y \rceil$ ne peut exister que si $x \leq y$.

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.
De même le Hom interne à gauche $\lceil y/x \rceil = \max\{t \mid tx \leq y\}$.
Si M admet des Homs internes à droite, alors une monade comonoïdale t est de Hopf à droite si et seulement

$$\forall x, y \in T, \qquad \lceil x \setminus y \rceil \in T.$$

On dit que M est *positif* si $\forall x \in M, 1 \leq x$. Alors $\lceil x \setminus y \rceil$ ne peut exister que si $x \leq y$.
On dira que M est *positivement clos à gauche* si pour $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ existe.

Soit M un monoïde ordonné, $x, y \in M$. Un Hom interne à droite de x à y est un élément z tel que $xt \leq y \iff t \leq z$, autrement dit

$$z = \max\{t \mid xt \leq y\}.$$

On le notera $\lceil x \setminus y \rceil$.
De même le Hom interne à gauche $\lceil y/x \rceil = \max\{t \mid tx \leq y\}$.
Si M admet des Homs internes à droite, alors une monade comonoïdale t est de Hopf à droite si et seulement

$$\forall x, y \in T, \qquad \lceil x \setminus y \rceil \in T.$$

On dit que M est *positif* si $\forall x \in M, 1 \leq x$. Alors $\lceil x \setminus y \rceil$ ne peut exister que si $x \leq y$.
On dira que M est *positivement clos à gauche* si pour $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ existe.
Dans ce cas, une monade comonoïdale T est Hopf à droite si et seulement si

$$\forall x, y \in T, \quad x \leq y \implies \lceil x \setminus y \rceil \in T.$$

Exemple 1. Le monoïde ordonné $(\mathbb{R}, +)$. Le Hom interne existe, c’est la soustraction : $\lceil y/x \rceil = \lceil x \setminus y \rceil = y - x$.

Exemple 1. Le monoïde ordonné $(\mathbb{R}, +)$. Le Hom interne existe, c'est la soustraction : $\lceil y/x \rceil = \lceil x \setminus y \rceil = y - x$.
Une monade de Hopf sur $\mathbb{R}$ est donc un sous-monoide additif T de $\mathbb{R}$ stable par soustraction, donc un sous-groupe.

Exemple 1. Le monoïde ordonné $(\mathbb{R}, +)$. Le Hom interne existe, c'est la soustraction : $\lceil y/x \rceil = \lceil x \setminus y \rceil = y - x$.
Une monade de Hopf sur $\mathbb{R}$ est donc un sous-monoide additif T de $\mathbb{R}$ stable par soustraction, donc un sous-groupe.
Il doit encore être monadique, c'est-à-dire que tout réel x admet un plus petit majorant dans T, donc T est non-nul et discret, autrement dit $T = \mathbb{Z}a$ pour un réel $a > 0$, et la monade $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction escalier $t(x) = a\lfloor x/a \rfloor$

Exemple 1. Le monoïde ordonné $(\mathbb{R}, +)$. Le Hom interne existe, c'est la soustraction : $\lceil y/x \rceil = \lceil x \setminus y \rceil = y - x$.
Une monade de Hopf sur $\mathbb{R}$ est donc un sous-monoide additif T de $\mathbb{R}$ stable par soustraction, donc un sous-groupe.
Il doit encore être monadique, c'est-à-dire que tout réel x admet un plus petit majorant dans T, donc T est non-nul et discret, autrement dit $T = \mathbb{Z}a$ pour un réel $a > 0$, et la monade $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction escalier $t(x) = a\lfloor x/a \rfloor$

Théorème

Les monades de Hopf sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions escalier de pente 1 : $t(x) = a\lfloor x/a \rfloor$, $a > 0$.

Exemple 1. Le monoïde ordonné $(\mathbb{R}, +)$. Le Hom interne existe, c'est la soustraction : $\lceil y/x \rceil = \lceil x \setminus y \rceil = y - x$.
Une monade de Hopf sur $\mathbb{R}$ est donc un sous-monoide additif T de $\mathbb{R}$ stable par soustraction, donc un sous-groupe.
Il doit encore être monadique, c'est-à-dire que tout réel x admet un plus petit majorant dans T, donc T est non-nul et discret, autrement dit $T = \mathbb{Z}a$ pour un réel $a > 0$, et la monade $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction escalier $t(x) = a\lfloor x/a \rfloor$

Théorème

Les monades de Hopf sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions escalier de pente 1 : $t(x) = a\lfloor x/a \rfloor$, $a > 0$.

Exemple 2. Le monoïde ordonné $(\mathbb{N}, +)$. Il est positif, et positivement clos, le Hom interne étant la soustraction. Ainsi, les monades de Hopf correspondent aux sous-monoïdes additifs de $\mathbb{N}$ stables par soustraction, c'est-à dire de la forme $\mathbb{N}a$. La monadicité implique que $a > 0$, d'où là encore

$$t(x) = a\lfloor x/a \rfloor.$$

Exemple 3. $(\mathbb{N}^*, \times)$. Monoide positif, positivement clos, le Hom interne est $\lceil y/x \rceil$ au sens usuel (plus petit entier $\geq y/x$). Une monade de Hopf correspond à un sous-monoide multiplicatif T de $\mathbb{N}^*$, stable par Hom interne.

Exemple 3. $(\mathbb{N}^*, \times)$. Monoide positif, positivement clos, le Hom interne est $\lceil y/x \rceil$ au sens usuel (plus petit entier $\geq y/x$). Une monade de Hopf correspond à un sous-monoide multiplicatif T de $\mathbb{N}^*$, stable par Hom interne.
On montre qu'alors $T = \{a^n\}$ pour un certain $a > 1$, et

$$t(x) = a^{\lfloor \log_a(x) \rfloor}.$$

Exemple 3. $(\mathbb{N}^*, \times)$. Monoide positif, positivement clos, le Hom interne est $\lceil y/x \rceil$ au sens usuel (plus petit entier $\geq y/x$). Une monade de Hopf correspond à un sous-monoide multiplicatif T de $\mathbb{N}^*$, stable par Hom interne.
On montre qu'alors $T = \{a^n\}$ pour un certain $a > 1$, et

$$t(x) = a^{\lfloor \log_a(x) \rfloor}.$$

Exemple 4. Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ le monoïde de ses parties, avec pour opération $\cup$ et pour ordre $\subset$.

Exemple 3. $(\mathbb{N}^*, \times)$. Monoide positif, positivement clos, le Hom interne est $\lceil y/x \rceil$ au sens usuel (plus petit entier $\geq y/x$). Une monade de Hopf correspond à un sous-monoide multiplicatif T de $\mathbb{N}^*$, stable par Hom interne.
On montre qu'alors $T = \{a^n\}$ pour un certain $a > 1$, et

$$t(x) = a^{\lfloor \log_a(x) \rfloor}.$$

Exemple 4. Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ le monoïde de ses parties, avec pour opération $\cup$ et pour ordre $\subset$.
Une monade comonoïdale sur $\mathcal{P}(X)$ est automatiquement de Hopf.

Exemple 3. $(\mathbb{N}^*, \times)$. Monoide positif, positivement clos, le Hom interne est $\lceil y/x \rceil$ au sens usuel (plus petit entier $\geq y/x$). Une monade de Hopf correspond à un sous-monoide multiplicatif T de $\mathbb{N}^*$, stable par Hom interne.
On montre qu'alors $T = \{a^n\}$ pour un certain $a > 1$, et

$$t(x) = a^{\lfloor \log_a(x) \rfloor}.$$

Exemple 4. Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ le monoïde de ses parties, avec pour opération $\cup$ et pour ordre $\subset$.
Une monade comonoïdale sur $\mathcal{P}(X)$ est automatiquement de Hopf.

Théorème

Une monade de Hopf sur $\mathcal{P}(X)$ qui préserve les produits est une topologie sur X, T étant l'ensemble des fermés de X.

Exemple 5. Le monoïde des mots.

Exemple 5. Le monoïde des mots. Soit X un ensemble et $\mathcal{M} = \mathrm{Mo}(X)$ le monoïde des mots sur X, avec l'ordre :

$$x \leq y \iff \quad x \text{ est un sous-mot (suite extraite) de } y.$$

Exemple 5. Le monoïde des mots. Soit X un ensemble et $\mathcal{M} = \mathrm{Mo}(X)$ le monoïde des mots sur X, avec l’ordre :

$$x \leq y \iff \quad x \text{ est un sous-mot (suite extraite) de } y.$$

C’est un monoïde positif, positivement clos. Pour $x, y \in \mathcal{M}$ tels que $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ est la sous-chaine terminale maximale de y telle que, posant $y = tz$, on a $x \leq t$. On définit symétriquement $\lceil y / x \rceil$.

Exemple 5. Le monoïde des mots. Soit X un ensemble et $\mathcal{M} = \mathrm{Mo}(X)$ le monoïde des mots sur X, avec l’ordre :

$$x \leq y \iff \quad x \text{ est un sous-mot (suite extraite) de } y.$$

C’est un monoïde positif, positivement clos. Pour $x, y \in \mathcal{M}$ tels que $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ est la sous-chaine terminale maximale de y telle que, posant $y = tz$, on a $x \leq t$. On définit symétriquement $\lceil y/x \rceil$.
Une monade comonoïdale sur $\mathrm{Mo}(X)$ est la donnée d’une partie $T \subset \mathrm{Mo}(X)$ (les mots fermés) vérfiant :

1. T est un sous-monoïde de $\mathrm{Mo}(X)$;
2. T est monadique, ce qui équivaut à :
   - 2.1 tout mot est majoré par un mot fermé,
   - 2.2 si x, y sont deux mots fermés, tous leurs sous-mot communs maximaux sont fermés.

Exemple 5. Le monoïde des mots. Soit X un ensemble et $\mathcal{M} = \mathrm{Mo}(X)$ le monoïde des mots sur X, avec l'ordre :

$$x \leq y \iff \quad x \text{ est un sous-mot (suite extraite) de } y.$$

C'est un monoïde positif, positivement clos. Pour $x, y \in \mathcal{M}$ tels que $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ est la sous-chaine terminale maximale de y telle que, posant $y = tz$, on a $x \leq t$. On définit symétriquement $\lceil y/x \rceil$.
Une monade comonoïdale sur $\mathrm{Mo}(X)$ est la donnée d'une partie $T \subset \mathrm{Mo}(X)$ (les mots fermés) vérfiant :

1. T est un sous-monoïde de $\mathrm{Mo}(X)$;
2. T est monadique, ce qui équivaut à :
   - 2.1 tout mot est majoré par un mot fermé,
   - 2.2 si x, y sont deux mots fermés, tous leurs sous-mot communs maximaux sont fermés.

Elle est de Hopf si et seulement si pour x, y fermés avec $x \leq y$, $\lceil x \setminus y \rceil$ et $\lceil y/x \rceil$ sont fermés.

Quelques faits. Si T est une monade de Hopf sur $\mathcal{M}$, alors T est librement engendré comme monoïde par ses éléments indécomposables.

Quelques faits. Si T est une monade de Hopf sur $\mathcal{M}$, alors T est librement engendré comme monoïde par ses éléments indécomposables.

De plus T admet une décomposition canonique. Soit $X = \sqcup_i X_i$ une partition de X, et soit T_i une monade de Hopf sur $\mathrm{Mo}(X_i)$. Alors on définit une monade de Hopf $T = \bigotimes_i T_i$ sur X comme suit. Tout $x \in \mathrm{Mo}(X)$ admet une unique écriture $x = x_1 \dots x_n$, avec $x_i \in \mathrm{Mo}(X_{a_i})$, et $a_i \neq a_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Alors $T(x) = T_{a_1}(x_1) \dots T_{a_n}(x_n)$.

Quelques faits. Si T est une monade de Hopf sur $\mathcal{M}$, alors T est librement engendré comme monoïde par ses éléments indécomposables.

De plus T admet une décomposition canonique. Soit $X = \sqcup_i X_i$ une partition de X, et soit T_i une monade de Hopf sur $\mathrm{Mo}(X_i)$. Alors on définit une monade de Hopf $T = \bigotimes_i T_i$ sur X comme suit. Tout $x \in \mathrm{Mo}(X)$ admet une unique écriture $x = x_1 \dots x_n$, avec $x_i \in \mathrm{Mo}(X_{a_i})$, et $a_i \neq a_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Alors $T(x) = T_{a_1}(x_1) \dots T_{a_n}(x_n)$.

On dit que T est connexe s'il n'est pas de la forme $T' \otimes T''$. Cela revient à dire que tous les mots fermés commencent par la même lettre, et finissent par la même lettre.

Quelques faits. Si T est une monade de Hopf sur $\mathcal{M}$, alors T est librement engendré comme monoïde par ses éléments indécomposables.

De plus T admet une décomposition canonique. Soit $X = \sqcup_i X_i$ une partition de X, et soit T_i une monade de Hopf sur $\mathrm{Mo}(X_i)$. Alors on définit une monade de Hopf $T = \bigotimes_i T_i$ sur X comme suit. Tout $x \in \mathrm{Mo}(X)$ admet une unique écriture $x = x_1 \dots x_n$, avec $x_i \in \mathrm{Mo}(X_{a_i})$, et $a_i \neq a_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Alors $T(x) = T_{a_1}(x_1) \dots T_{a_n}(x_n)$.

On dit que T est connexe s'il n'est pas de la forme $T' \otimes T''$. Cela revient à dire que tous les mots fermés commencent par la même lettre, et finissent par la même lettre.

Proposition

Toute monade de Hopf sur $\mathcal{M}$ s'écrit de manière unique $T = \otimes_i T_i$, où chaque T_i est connexe.

Quelques faits. Si T est une monade de Hopf sur $\mathcal{M}$, alors T est librement engendré comme monoïde par ses éléments indécomposables.

De plus T admet une décomposition canonique. Soit $X = \sqcup_i X_i$ une partition de X, et soit T_i une monade de Hopf sur $\mathrm{Mo}(X_i)$. Alors on définit une monade de Hopf $T = \bigotimes_i T_i$ sur X comme suit. Tout $x \in \mathrm{Mo}(X)$ admet une unique écriture $x = x_1 \dots x_n$, avec $x_i \in \mathrm{Mo}(X_{a_i})$, et $a_i \neq a_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Alors $T(x) = T_{a_1}(x_1) \dots T_{a_n}(x_n)$.

On dit que T est connexe s'il n'est pas de la forme $T' \otimes T''$. Cela revient à dire que tous les mots fermés commencent par la même lettre, et finissent par la même lettre.

Proposition

Toute monade de Hopf sur $\mathcal{M}$ s'écrit de manière unique $T = \otimes_i T_i$, où chaque T_i est connexe.

On peut donc se restreindre à la classification des monades de Hopf connexes sur les mots, mais c'est compliqué...