

**Proposition de mémoire de Master 2 en Mathématiques :**  
***K-théorie topologique***

par Ivo Dell'Ambrogio  
ivo.dellambrogio@math.univ-lille1.fr  
bureau : M2 212

Le but sera de comprendre les éléments basiques de la théorie des fibrés vectoriels et de leurs classes caractéristiques, puis d'approfondir vers une des nombreuses applications en géométrie, algèbre ou analyse. C'est le début de la K-théorie topologique, un sujet déjà classique mais qui est au coeur de plusieurs domaines de recherche actuellement très actifs.

La théorie des fibrés vectoriels permet de faire de l'algèbre linéaire (réelle ou complexe) paramétrisée par un espace topologique  $X$ . Par exemple, les espaces tangents à une variété lisse  $X$  forment un exemple important de fibré vectoriel. Les classes caractéristiques (d'Euler, Chern, Pontrjagin...) sont des invariants qui relient les fibrés vectoriels avec la cohomologie de l'espace et qui permettent parfois de classer les fibrés. Plus en général, on peut organiser les fibrés vectoriels dans le groupe  $K^0(X)$  "de K-théorie" qui contient beaucoup d'information sur l'espace  $X$ . Des possibles sujet d'approfondissement sont :

- 1) La preuve de l'existence de *sphères exotiques*, c'est-à-dire de variétés lisses qui sont homéomorphe mais pas difféomorphes à une sphère Euclidienne  $S^n$ , est une application des classes de Pontrjagin qui a valu à Milnor sa médaille Fields en 1962 et a lancé le sujet de la topologie différentielle.
- 2) Le *théorème de Swan-Serre* établit l'équivalence entre les fibrés vectoriels sur un espace compact  $X$  et les modules projectifs de type fini sur l'algèbre  $C(X)$  des fonctions continues sur l'espace. C'est un pont conceptuel qui permet de transférer des résultats et méthodes entre la topologie et l'algèbre.

Le deuxième sujet offre aussi l'opportunité d'établir des liens avec l'analyse fonctionnelle, car  $C(X)$  est une typique *C\*-algèbre*, un objet central dans l'étude des opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert.

## Références

- John W. Milnor et James Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematical Studies 76, Princeton, 1974.
- John W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics 64, 1956.
- Richard G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the American Mathematical Society 105, 1962.