Proposition de mémoire de Master 2 en mathématiques

par Alexis Virelizier

Dans les années 1980 ont été définis de nouveaux invariants des noeuds et 3-variétés, appelés invariants quantiques. Le premier (et le plus simple) des invariants quantiques des noeuds fut défini par Vaughan Jones (cela lui valut la médaille Fields en 1990).

Rappelons qu'un nœud est une courbe fermée de l'espace $\mathbb{R}^3$ sans point d'intersection. En d'autres termes, un nœud peut être vu comme une ficelle éventuellement enchevêtrée dont les extrémités ont été recollées. Tout nœud peut être représenté par un diagramme planaire. Par exemple :

nœud trivial O nœud trèfle T nœud huit H

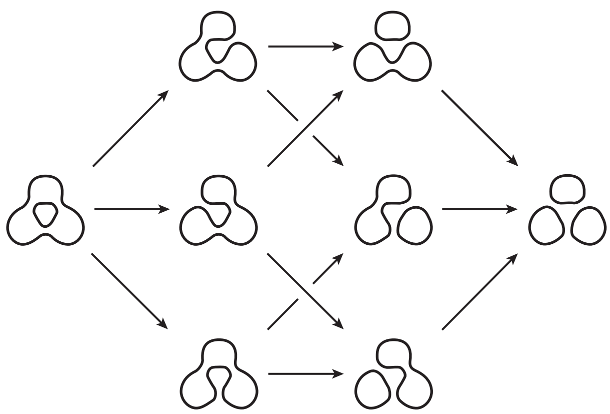
Jones a associé à tout nœud K un polynôme de Laurent $J_K(q)$. Par exemple,

$$J_O(q) = 1, \qquad J_T(q) = -q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}, \qquad J_H(q) = q^2 + q^{-2} - q - q^{-1} + 1.$$

Le polynôme de Jones est un invariant du nœud K, c'est-à-dire qu'il ne change pas lorsque l'on déforme K continûment (i.e., via des déplacements, étirements ou rétrécissements de la ficelle). Les nœuds trivial, trèfle et huit sont donc bien différents (car leurs polynômes de Jones sont distincts).

En 2000, Mikhail Khovanov a catégorifié le polynôme de Jones, c'est-à-dire il a défini une homologie dont la caractéristique d'Euler est le polynôme de Jones. L'homologie de Khovanov est un invariant des nœuds plus puissant que le polynôme de Jones : par exemple, elle détecte si un nœud est trivial contrairement au polynôme de Jones. Sa construction est basée sur les résolutions des croisements. Un croisement d'un diagramme de nœud peut être résolu de deux façons :

Un diagramme de nœud à n croisements possède donc 2^n résolutions qui peuvent être organisées en un hypercube. Par exemple, pour le diagramme ci-dessus du nœud trèfle, c'est un cube :



C'est via cet hypercube que Khovanov a défini un complexe de chaînes définissant son homologie.

L'objectif du stage est d'étudier les constructions de Jones et de Khovanov. Eventuellement seront abordés les liens de ces constructions avec les groupes quantiques introduits par Vladimir Drinfeld (un autre médaillé fields de 1990).

Bibliographie

[1] W.B.R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Math. 175, Springer, 1997.
[2] P. Turner, *Five Lectures on Khovanov Homology*, arXiv:math/0606464v1, 2006.