Lille, le 17 octobre 2014

Benoit Fresse
Laboratoire Painlevé
UMR8524 de l'Université Lille 1 et du CNRS
Courriel : `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`
Page professionnelle : `http://math.univ-lille1.fr/~fresse/`

Proposition de mémoire de Master Recherche en Mathématiques
Homologie, réécriture, polygraphes
par Benoit Fresse, Laboratoire Painlevé (Université Lille 1)

Description :

Le propos de ce mémoire sera de comprendre des applications de méthodes de la topologie algébrique sur des problèmes de réécriture dans le domaine de la combinatoire et de l'informatique théorique.

La première partie du mémoire pourra porter sur la théorie des bases de Gröbner des algèbres associatives, qui donne de premières applications, dans un cadre classique et immédiatement abordable, des méthodes et idées de la réécriture.

En général, on se donne une algèbre A définie comme un quotient $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(r_1, \dots, r_k)$ d'une algèbre associative libre $F = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, linéairement engendrée par les mots $M = x_{w(1)} \cdot \dots \cdot x_{w(m)}$ sur n variables non-commutative $x_1, \dots, x_n$, par un idéal $I = (r_1, \dots, r_k)$ engendré par des relations $r_1, \dots, r_k$. Le premier problème, que la théorie des bases de Gröbner permet d'étudier, est d'associer une forme normale $f_{red} \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ à tout polynôme $f \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, de sorte que l'on a une équivalence $f \equiv g \bmod I \Leftrightarrow f_{red} = g_{red}$.

Le second problème est la question des syzygies, les relations entre relations : les relations de définition d'une algèbre de polynômes $S = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(r_{ij}, 1 \leq i < j \leq n))$, qui s'écrivent $r_{ij} = x_i x_j - x_j x_i$, ne sont ainsi pas indépendantes dans le sens que la relation $T = x_i x_j x_k - x_k x_j x_i$, dans S peut s'obtenir par deux combinaisons possibles de relations génératrices $T = (x_i x_j - x_j x_i)x_k + x_j(x_i x_k - x_k x_i) + (x_j x_k - x_k x_j)x_i = x_i(x_j x_k - x_k x_j) + (x_i x_k - x_k x_i)x_j + x_k(x_i x_j - x_j x_i)$. ce qui entraîne que l'on a la relation entre relations $x_i r_{jk} + r_{ik} x_j + x_k r_{ij} = r_{ij} x_k + x_k r_{ik} + r_{jk} x_i$ dans $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Les syzygies se formalisent en termes de complexes de chaînes, et les méthodes de réécriture permettent de déterminer ces complexes de façon effective.

Des développements et généralisations pourront être envisagés en cours de mémoires. Les polygraphes, par exemple, sont des généralisations de structures d'algèbres associatives qui mod 'elisent des schémas de compositions de cellules et qui pourront être étudiés dans ce travail de mémoire.

Ce mémoire, selon la façon dont il évoluera, pourra débouché sur un projet de thèse en mathématique ou en informatique théorique.

Références :

[Ber78] G.M. Bergman : The diamond lemma for ring theory. Adv. Math. 29 (1978), 178-218.

[GHM14] Y. Guiraud, E. Hoffbeck, P. Malbos : Linear polygraphs and Koszulity of algebras. Prépublication `arXiv:1406.0815` (2014). URL: `http://arxiv.org/abs/1406.0815`

[LVa01] J.-L. Loday, B. Vallette : Algebraic operads. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 346, Springer, 2012. Chapitres 4 et 8.
URL: `http://math.unice.fr/~brunov/Operades.html`

[Ufn95] V.A. Ufnarovski : Combinatorial and asymptotic methods in algebra, *in* Algebra VI. Encyclopedia Math. Sci. 57, Springer, 1995.