# Les 2-foncteurs de Mackey et de Green

Ivo Dell'Ambrogio

Colloque tournant du Réseau Thématique «Algèbre»
CIRM Luminy, 13–15 mars 2024

Références :


1. Paul Balmer et I.D. *Mackey 2-functors and Mackey 2-motives.*
   EMS MONOGRAPHS IN MATHEMATICS. EMS, Zürich (2020)
2. Paul Balmer et I.D. *Green equivalences in equivariant mathematics.*
   MATH. ANN. (2021)
3. Jun Maillard. *A categorification of the Cartan-Eilenberg formula.*
   ADV. MATH. (2022).
4. I.D. *Green 2-functors.*
   TRANS. AMER. MATH. SOC. (2022)
5. Paul Balmer et I.D. *Cohomological Mackey 2-functors.*
   J. INST. MATH. JUSSIEU (2022)
6. I.D. *An introduction to Mackey and Green 2-functors.*
   arXiv:2305.01371 (2023)

# Qu'est-ce que la théorie des représentations ?

Au minimum : *groupes finis agissant par transformations linéaires !*

Pour $G$ un groupe fini et $k$ un corps ou anneau commutatif, on veut étudier la catégorie des $kG$-modules (à gauche, de type fini) et les applications $kG$-linéaires :

$$mod(kG)$$

Aussi, dans le cas modulaire (non semi-simple) :

la catégorie dérivée $D^b(mod\, kG)$, la category stable $\underline{mod}(kG)$.

Soit donc $\mathscr{M}(G)$ une des catégorie $mod(kG)$, $D^b(mod\, kG)$, ou $\underline{mod}(kG)$.

Laissons varier $G$!

# Une couche supplémentaire d'information *2-catégorique*

- Les foncteurs de **restriction**, **induction** et **conjugaison** $(H \leq G,\ g \in G)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}(G)\} \arrow[d, "Res_H^G"] & \\
\mathscr{M}(H) \arrow[u, bend left, "Ind_H^G"] \arrow[r, "Conj_g", "\sim"'] & \mathscr{M}({}^g H)
\end{tikzcd}$$

- Les **adjonctions** $Ind \dashv Res \dashv Ind$
(On a une *ambi*jonction car l'index est *fini* et les catégories sont *additives*!)
- **Isomorphismes naturels de conjugaison** entre certains foncteurs, e.g.

$$conj_g \colon Conj_g \circ Res^G_H \overset{\simeq}{\to} Res^G_{{}^g H}$$

- La **formule de Mackey** (for $K, L \leq G$):

$$Res^G_L \circ Ind^G_K \overset{\simeq}{\to} \bigoplus_{[g] \in L \backslash G / K} Ind^L_{L \cap {}^g K} \circ Conj_g \circ Res^K_{L^g \cap K} .$$

# Axiomatization : les 2-foncteurs de Mackey

$gpd_f$ : la 2-catégorie des groupoïdes finis, foncteurs fidèles, isom. naturels
$ADD$ : la 2-catégorie des catégories et foncteurs additifs, transf. naturelles

## Definition [Balmer-D. 2020]

Un **2-foncteur de Mackey** (global) est un 2-functor

$$\mathscr{M} : (gpd_f)^{op} \longrightarrow ADD$$

satisfaisant les axiomes suivants :

1. Additivité : $\mathscr{M}(G_1 \sqcup G_2) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(G_1) \oplus \mathscr{M}(G_2)$ et $\mathscr{M}(\varnothing) \xrightarrow{\sim} 0$.
2. Pour tout $i \colon H \to G$ fidèle, la “restriction” $i^* := \mathscr{M}(i) \colon \mathscr{M}(G) \to \mathscr{M}(H)$ admet un adoint à gauche $i_\ell$ et un adjoint à droite $i_r$.
3. Les adjonction de gauche et droite satisfont le Changement de Base.
4. Il existe un isomorphisme de foncteurs $i_\ell \cong i_r$ pour tout $i \colon H \to G$.

Pour la variante «locale», pour un $G$ fixé : remplacer $gpd_f$ avec $gpd_{f\,/G} \simeq G\text{-}set$.

# Commentaires sur les axiomes

Inspirés par :

- Les foncteur de Mackey ordinaires (en groupes abéliens) [Green, Dress 70s]
- Les dérivateurs additifs [Grothendieck 80s]
- Similaire et complémentaire aux $(\infty, 1)$-functors de Mackey de [Barwick '17]

Explications :

- **Additivité 1 :** les groupoïdes se décomposent en groupes $G \simeq \coprod_n G_n$
  $\rightsquigarrow$ la donnée du 2-foncteur $\mathscr{M}$ est déterminée par son effet sur la 2-sous-catégorie des groupes finis : les $Res^G_H, Cong_g$ (ou $Isos_\varphi$), et $cong_g$ !
- **Induction 2 :** comme pour les dérivateurs, les foncteurs de co/induction $i_\ell$ and $i_r$ ne font vraiment pas partie des données.
- **Ambidexterité 4 :** l'existence d'un iso $i_\ell \cong i_r$ quelconque suffit, ce qui est facile à vérifier dans les exemples !

**Fait (*théorème de rectification*):** les axiomes 1-4 impliquent l'existence d'isomorphismes canoniques $\theta_i \colon i_\ell \cong i_r$ pour tout $i$, uniquement déterminés, satisfaisant des compatibilités en plus (pseudo-naturalité en $i$ etc).

# Changement de Base = formule de Mackey canonique

**Axiome 3 de CB :** un carré iso-comma (pseudo-pullback) $\gamma$ dans $gpd_f$ définit, via le 2-foncteur $\mathscr{M}$ et les adjonctions gauche/droite, deux «mates» $\gamma_\ell$ et $(\gamma^{-1})_r$ :

$$\gamma = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \bullet \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & \bullet \arrow[dl, "j"] \\ & \bullet & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \color{red}{\gamma_\ell} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "q_\ell"] & \\ \bullet \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "i_\ell"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \color{red}{(\gamma^{-1})_r} = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "q_r"] & \\ \bullet \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "i_r"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd}$$

L'axiome 3 demande que les deux soient inversibles : $j^* i_\ell \cong q_\ell p^*$ and $j^* i_r \cong q_r p^*$.
**Fait :** via les isos de rectification $\theta_i$ et $\theta_j$, ils sont inverses : $(\gamma_\ell)^{-1} = (\gamma^{-1})_r$.

**Exemple fondamental :** pour deux sous-groupes $K, L \leq G$

$$\text{iso-comma} \quad \begin{tikzcd} & (i/j) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ K \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & L \arrow[dl, "j"] \\ & G & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad (i/j) \simeq \coprod_{[g] \in L \backslash G / K} L \cap {}^g K$$

on obtient la formule de Mackey !

**Rmq :** le groupoïde d'iso-comma $(i/j)$ et les isos de CB sont canoniques, tandis que cette décomposition dépend de choix.

# Exemples : les 2-foncteurs de Mackey sont partout

Il existe un 2-foncteur de Mackey $\mathscr{M}$ pour chacune des familles suivantes de catégories additives (en fait, abéliennes ou triangulées) :

- **En théorie des représentations linéaires** :
  $\mathscr{M}(G) = mod\, kG$, $Mod\, kG$, $D^b(mod\, kG)$, $D(Mod\, kG)$, $\underline{mod}(kG)$...
- **En topologie** :
  $\mathscr{M}(G) = Ho(Sp^G)$, la catégorie homotopique équivariante des $G$-spectres.
- **En géométrie non-commutative** :
  $\mathscr{M}(G) = KK^G$ or $E^G$, la théorie équivariante de Kasparov ou la E-théorie de Higson-Connes des C*-algebres.
- **En géométrie** (défini localement, pour un groupe $G$ fixé) :
  $X$ : un espace localement annelé (e.g. un schéma) muni d'une $G$-action.
  $\forall\, H \leq G$, $\mathscr{M}(H) = Sh(X/\!/H)$ la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules $H$-équivariants.

  Variantes : la catégorie dérivée $D(Sh(X/\!/H))$, ou les faisceaux constructibles, ou cohérents si $X$ est un schéma noethérien, etc.

# Monadicité

OK... Qu'est-ce qu'on peut démontrer avec ces axiomes ?

Parmi les bonnes propriétés des isos canoniques $\theta_i$, on peut démontrer que l'ambijonction à chaque $i\colon H \to G$ a la **propriété de Frobenius spéciale** :

$$\Big(\, \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(H)} \xRightarrow{\text{unité}} i^* i_\ell \overset{\theta_i}{\cong} i^* i_r \xRightarrow{\text{counité}} \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(H)} \,\Big) \quad = \quad \mathrm{id}$$

Par une version «separable» du critère de monadicité de Beck, ceci entraine :

## Co/monadicité de la restriction [Balmer-D. 2020]

Supposons que $\mathscr{M}$ prends ses valeurs dans les catégories idempotent-complètes. Pour tout $i\colon H \to G$, l'adjunction $i^* \dashv i_r$ est monadique and $i_\ell \dashv i^*$ comonadique :

$$\mathscr{M}(G)^{i_\ell i^*} \overset{\sim}{\leftarrow} \mathscr{M}(H) \overset{\sim}{\rightarrow} \mathscr{M}(G)^{i_r i^*}$$

On peut ainsi extraire la «petite» catégorie $\mathscr{M}(H)$ de la «grande» $\mathscr{M}(G)$. Parfois, on peut aussi aller dans l'autre direction!

# La formule de Cartan-Eilenberg

Un résultat classique reliant la cohomologie et la fusion dans les groupes :

**Formule des éléments stables [Cartan-Eilenberg '56]**

Soit $0 < p = \mathrm{char}(k) \mid |G|$. L'algèbre de cohomologie est calculée par la limite

$$H^*(G;k) \cong \lim_{P \in \mathscr{F}_p(G)} H^*(P;k)$$

sur la **catégorie de $\boldsymbol{p}$-fusion** $\mathscr{F}_p(G) = \begin{cases} \text{objets : } p\text{-sous-groupes } P \text{ de } G \\ \text{morphismes : incl. \& conj. entre eux.} \end{cases}$

Mais la cohomologie n'est qu'un petit morceau de la catégorie dérivée de $G$ :

$$H^*(G;k) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(mod\, kG)}(k, \Sigma^* k).$$

**Question :** est-ce que $D^b(mod\, kG)$ admet une reconstruction similaire à partir de $D^b(mod\, kP)$ pour les $p$-sous-groupes $P \leq G$, avec les restrictions & conjugations ?

# Oui !

$\mathscr{M}$ est dit **cohomologique** si $(\mathrm{Id}_{\mathscr{M}(G)} \Rightarrow i_r i^* \overset{\theta^{-1}}{\cong} i_\ell i^* \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{M}(G)}) = [G:H]\,\mathrm{id}$ pour toute inclusion de sous-groupe $i\colon H \to G$.

## Descente $p$-locale, ou Cartan-Eilenberg catégorifié [Maillard '21]

Supposons $\mathscr{M}$ idempotent-complet et $k$-linéaire, avec $k$ une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre.
Si de plus $\mathscr{M}$ est cohomologique, il existe une équivalence de catégories

$$\mathscr{M}(G) \simeq \operatorname*{bilim}_{P \in \mathscr{O}_p(G)} \mathscr{M}(P)$$

où la bilimite est calculée dans $ADD$ au-dessus de la **catégorie des $p$-orbites** :

$$\mathscr{O}_p(G) = \begin{cases} \text{objets : les orbites } G/P \text{ pour } P \leq G \text{ un } p\text{-sous-groupe} \\ \text{morphismes : les applications } G\text{-équivariantes entre elles.} \end{cases}$$

- $\mathscr{O}_p(G)$ raffine la catégorie de fusion $\mathscr{F}_p(G)$, qu'elle admet comme quotient.
- Exemples de $\mathscr{M}$ cohomologiques : $\mathscr{M} = mod(k-)$, $D^b(k-)$, and $\underline{mod}(k-)$.
- Aussi, les faisceaux équivariants sur une $G$-variété $X$ sur $k$ : $Sh(X/\!/G)$ etc. Examples précédents : le cas $X = \mathrm{Spec}(k)$ muni de la $G$-action triviale !

# L'équivalence de Green

Pour $\mathscr{M}$ un 2-foncteur de Mackey, notons :

- $\mathscr{M}(G;S) := \{M \mid M \text{ sommand de } \mathrm{Ind}(N) \text{ pour un } N \in \mathscr{M}(S)\} \overset{\text{pleine}}{\subset} \mathscr{M}(G)$ la sous-catégorie pleine des ***S*-objets**, pour $S \leq G$ un sous-groupe.
- $\mathscr{M}(G;\mathbb{S})$ de façon similaire pour un ensemble $\mathbb{S}$ de sous-groupes de $G$.

## L'équivalence de Green [Balmer-D. 2021]

Soit $\mathscr{M}$ un 2-foncteur de Mackey (pour $G$), et $Q \leq H \leq G$ des groupes finis. Alors le foncteur d'induction induit une équivalence de catégories

$$\left(\frac{\mathscr{M}(H;Q)}{\mathscr{M}(H;\mathbb{X})}\right)^{\natural} \xrightarrow[\sim]{Ind_H^G} \left(\frac{\mathscr{M}(G;Q)}{\mathscr{M}(G;\mathbb{X})}\right)^{\natural}$$

où $\mathbb{X} = \{Q \cap {}^gQ \mid g \in G \smallsetminus H\}$ et où $(-)^{\natural}$ dénote la complétion idempotente.

- Ici les quotients $\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{B}}$ sont au sens des catégories additives.
- Dans les exemples on a jamais besoin de $(-)^{\natural}$, pour différentes raisons.

Supposons que $\mathscr{M}$ prends ses valeurs dans les catégories de **Krull-Schmidt** : tout object admet donc une unique décomposition en somme d'indécomposables.

Tout objet indécomposable $M \in \mathscr{M}(G)$ a un **vertex** : un sous-groupe $Q \leq G$, unique à moins de $G$-conjugaison, tel que $M \in \mathscr{M}(G; Q)$ et minimal pour cela.

## Corollaire (la correspondance de Green)

Si $\mathscr{M}$ est de Krull-Schmidt et $Q \leq H \leq G$ tels que $N_G(Q) \subseteq H$, on a une bijection

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{objets indéc. de } \mathscr{M}(H)\\ \text{de vertex } Q\end{array}} \underset{\text{“Res”}}{\overset{\text{“Ind”}}{\rightleftarrows}} \boxed{\begin{array}{c}\text{objets indéc. de } \mathscr{M}(G)\\ \text{de vertex } Q\end{array}}$$

où $N \in \mathscr{M}(H)$ correspond à $M \in \mathscr{M}(G)$ ssi $M \leq \mathrm{Ind}_H^G(N)$ ssi $N \leq \mathrm{Res}_H^G(M)$.

- Pour $\mathscr{M} = mod(k-)$ on récupère les cas classiques [J. A. Green '58, '64, '74]
- Exemples d'autres $\mathscr{M}$ de Krull-Schmidt :
  - $D^b(mod(k-))$, sur un corps $k$ ou un anneau local gentil.
  - $Coh(X//-)$ et $D^b(Coh X//-)$, les faisceaux cohérents équivariants sur $X$ une $G$-variété algébrique régulière et propre sur un corps $k$.

# Quelques autres utilisations de notre théorie

- [Balmer–D. 20 & 22] Une approche «motivique» à la **théorie des blocs** : on peut étudier dans ce cadre les décompositions

$$\mathscr{M}(G) \simeq \mathscr{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{B}_n$$

  en termes de la structure de $G$ et indépendamment de $\mathscr{M}$.

- [D. 2022] On peut introduire des structures multiplicatives (munir les $\mathscr{M}(G)$ d'un produit tensoriel), ce qui nous amène aux **2-foncteurs de Green**.

- En homotopie stable : tout $\mathbb{E}_\infty$-anneau $R$ dans l'$\infty$-catégorie monoïdale des $G$-spectres $Sp^G$ définit un 2-foncteur de Mackey et de Green (local pour $G$) via

$$\forall\, H \leq G : \qquad \mathscr{M}(H) = \mathrm{Ho}\big(\ Res^G_H(R)\text{-modules dans } Sp^H\ \big).$$

  Ceci catégorifie le fait bien connu que les groupes d'homotopies de tout $G$-spectre (en anneaux) $X$ s'organisent en un foncteur de Mackey (de Green) $\underline{\pi}_* X$ au sens classique.

*Merci de votre attention !*