高级宏观经济学

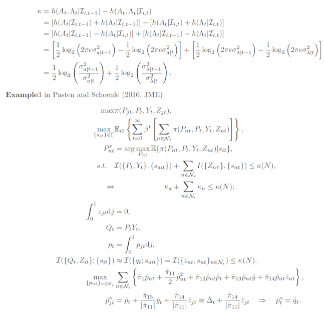
数理基础与解析初步

作者：张军 邓燕飞 沈吉 邬介然

出版单位：待定

更新时间：2025 年 9 月 5 日

当前版本：1.0



合抱之木，生于毫末；九层之台，起于累土；千里之行，始于足下。——《老子》

目录

作者致谢

作者简介

按姓氏首字母排序。

邓燕飞（主笔）

华东师范大学经济学博士（金融学专业）。

现就职于浙江财经大学，校聘副教授、校党委宣传部学术副部长（专聘副职），曾任职于上海交通大学安泰经济与管理学院（学术助理）、复旦大学经济学院（师资博士后）。学术成果发表于《管理世界》、《经济学》（季刊）、《世界经济文汇》等期刊。多年来，从事《数理经济学》、《随机分析基础》、《高级宏观经济学》、《文献阅读与综述》等本、硕、博阶段的教学工作，2023-2024 学年被评为校优秀教师。英文学术主页：https://idengyf.github.io/。

沈　吉

伦敦政治经济学院 (The London School of Economics and Political Science) 金融学博士。

现就职于北京大学，光华管理学院副教授。在《经济研究》、《金融研究》、《世界经济》和 Review of Financial Studies、Management Science 等中外期刊发表论文多篇。

邬介然

美国弗吉尼亚大学 (University of Virginia) 经济学博士。国家优秀青年科学基金获得者。

现就职于浙江大学，经济学院、金融研究院教授，金融研究院副院长、金融理论与政策研究中心主任、国际合作与交流处专聘副处长、未来区域发展实验室宏观经济中心主任。主要研究方向为：宏观经济学，资产定价理论，数理经济学与数值计算方法。研究成果发表在 Econometrica, Theoretical Economics, Journal of Economic Theory, Journal of Economic Dynamics and Control 、《世界经济》等国际国内顶级学术期刊。先后获得美联储杰出经济学研究奖、浙江大学年度十大学术进展、中国信息经济学会优秀创新成果奖等荣誉，并入选国家高层次人才（青年）计划、加拿大研究讲席教授（青年）计划 (Tier 2 Canada Research Chair)。担任多家国际顶级学术期刊担任匿名审稿人，以及中国宏观经济国际年会 (CICM) 学术论文评审委员会成员。在教学与社会服务方面，先后承担了浙江大学经济学拔尖班（本科生）以及经济学、金融学博士生高级资产定价理论与西方经济学研究前沿等课程的教学工作，并担任浙江大学金融学试验班班主任。英文学术主页：https://sites.google.com/site/jieranwu/。

张　军

复旦大学经济学博士。国务院特殊津贴获得者，长江学者特聘教授。

现就职于复旦大学，文科资深教授、经济学院院长、中国经济研究中心主任。获多项国家级人才称号。第八届国务院学位委员会学科评议组成员和理论经济学联席召集人、教育部全国高校经济学教指委副主任、复旦大学学位评定委员会副主任暨社科与管理学部主任。兼任上海经济学会副会长、中国经济社会理事会理事、广东省决策咨询顾问委员会委员、重庆十四五规划专家咨询委员会委员等。曾任上海市委决策咨询委员会委员、民进中央特邀咨询研究员等。2015 年荣获上海市先进工作者称号。2015 年 7 月受邀出席李克强总理主持的经济形势座谈会，2025 年 5 受邀出席李强总理主持的经济形势座谈会。2015 年 10 月与林毅夫、樊纲一起荣获第七届中国经济理论创新奖。2018 年获美国比较经济学会（CES）的最佳论文奖 Bergson Prize。2020 年 11 月获得《中国新闻周刊》评选的年度影响力人物——“年度经济学家”称号。2024 年获首届上海杰出人才。

丛书体系

考虑到高级宏观经济学是相对复杂的一套知识体系，近些年笔者在教学科研的探索中，逐步萌发编写高级宏观经济学系列教材的设想。

《高级宏观经济学 0：数理基础与解析初步》。主要介绍现代宏观经济学中经典模型构造与分析时常用的数理知识与演绎方法。由于现代宏观建立在微观基础之上，因而宏观就包含了微观。

《高级宏观经济学 I：经济波动与货币政策》。主要介绍带有货币变量的宏观波动模型，或可视为 [**Gali2015**] 的细化、拓展与延伸。细化指的是完整呈现该书中核心方程的来龙去脉，比如新 Keynes Phillips 曲线、福利损失函数、最优货币政策等的详细推导；拓展指的是介绍形式上相近的模型，比如从兼有黏性价格和黏性工资的双黏性模型拓展至最终品和中间品生产阶段皆存名义刚性的投入产出模型；延伸指的是从聚焦完全信息理性预期的常见模型到兼顾不完全信息理性预期模型与有限理性预期模型，此类概念及原理读者在阅读完本丛书上一册后会有所了解，此册则会延展介绍不完全信息理性预期及有限理性预期在货币政策分析中的应用。

《高级宏观经济学 II：经济增长与内外驱动》。初步设想是重点介绍经济增长理论模型中的内外生文化。

《高级宏观经济学 III：实证方法与计量检验》。着重介绍检验带有各式预期的宏观理论的实证技艺。

专家推荐

按姓氏首字母排序。

罗雨雷推荐语

普林斯顿大学 (Princeton University) 经济学博士。现就职于香港大学，经济与管理学院教授。

《高级宏观经济学：数理基础与解析初步》是一本极具价值的教材，适合研究生和高年级本科生深入学习宏观经济学。本书系统性介绍了理论宏观经济学涉及的数理方法，通过严谨的数理推导和详细的直觉解析，帮助读者深入理解经典或前沿的经济模型。作者在书中巧妙地平衡了理论深度与可读性，使得较为抽象的概念也能通过清晰的解释和实例变得易于理解。本书的另一个亮点是其对理论分析方法的全面覆盖，包括确定性和随机、静态和动态、离散时间和连续时间等各有侧重的主题。每一章都配有经济学案例分析，帮助读者巩固所学知识并应用于实际问题。此外，书中还提供了有价值的参考文献以供进一步阅读和钻研，为有兴趣深入研究的学生和学者提供了宝贵的资源。

宋铮推荐语

斯德哥尔摩大学 (Stockholm University) 经济学博士。现就职于香港中文大学，经济系主任、教授。

如何分析复杂多变的宏观经济？现代宏观经济学研究强调分析框架的内在一致性，因此高度依赖数理模型和定量分析。这种特点使得扎实的数理基础成为理解和运用现代宏观经济学理论的必备工具。然而，许多宏观经济学教材往往聚焦于经济理论的阐述，而对数理方法的介绍较为简略，这给初学者带来了不小的挑战。《高级宏观经济学：数理基础与解析初步》一书的问世，无疑是对立志从事宏观经济学研究的读者的一大福音。本书细致地讲解了高级宏观经济学中常用的数理方法，内容涵盖确定性模型与随机模型中的静态与动态最优、均衡求解、比较静态分析等关键工具。书中体系完备，逻辑清晰，在结构安排上亦有不少新意。它不仅是一部入门教材，也是一本实用工具书。

王鹏飞推荐语

康奈尔大学 (Cornell University) 经济学博士。现就职于北京大学，汇丰商学院院长、教授。

《高级宏观经济学：数理基础与解析初步》突破传统经济学教材按主题分章的编排模式，创新性地以动态优化、差分方程等核心数理工具为纲搭建体系。这种” 方法论导向” 的结构契合中国教育强调基础训练的特点，通过先系统阐释工具原理、再分层解析经济模型的路径，帮助读者建立” 由工具到问题” 的认知逻辑。书中既严谨推导数理形式，又注重揭示其经济学内涵，有效弥合了国内教学中常见的数理推导与经济思维断层，为学术研究提供了兼具规范性与实用性的范式参考。

致谢

项目资助

浙江财经大学文华创新融合课程建设项目之《数理经济学》（项目代码：10120222004）。

浙江财经大学首批四新重点教材建设项目之《高级宏观经济学》（项目代码：10156321009）。

浙江省哲学社会科学重点项目《基于理性疏忽引入适应性学习对扭转“预期转弱”的宏观政策研究》（项目代码：1S089024059）。

过程帮助

成书过程中，2021 年曾举办《高级宏观经济学》教材编撰研讨 会，2022 年底和 2024 年底分别召开了首届和第二届“预期与中国宏观经济学术研讨会”，彼时的清华大学董丰长聘副教授、新加坡南洋理工大学包特长聘副教授、厦门大学薛涧坡教授、上海财经大学盖庆恩教授、首都经济贸易大学经济学院陆明涛副教授、复旦大学许志伟教授和奚锡灿教授等参与的讨论对本书大有裨益。

成书过程中，各相关教学班的同学们是本书各版本的第一批受众，他们的认真阅读和积极反馈帮助本书不断精进。

数心雕龙

引言

[**ChiangWainwright2005**] 介绍道，数学在经济学中有长期而全面的应用，因此经济学中任何一个学科专业广义上都可称之为“数理经济学”。但狭义上，它与“计量经济学”和“文字经济学”又有明显不同：“计量经济学”着眼统计归纳，“数理经济学”立足逻辑演绎；“文字经济学”常用文字表述，“数理经济学”多用数学表达。

其中，“文字经济学”和“数理经济学”的交锋最多，不乏热烈讨论甚至激烈争论，但文字符号和数学符号都只是经济学中的描述语言和分析工具，以要使用谁莫使用谁为主题的论战似无意义，文字语言与数学语言自由切换地描述、分析和解决经济学问题或可作为一个应尽力达成的目标。

值得一提的是，因文字语言容易想到“文心雕龙”：《序志》开篇云，“夫‘文心’者，言为文之用心也。”而“雕龙”典出《史记 • 孟子荀卿列传》中“雕龙奭”一说。刘勰用“雕龙”饰“文心”，指作文应似雕镂龙纹那般细微用心。笔者深以为然，故本书对数学语言的处理，也尽可能想象在雕龙而细致入微。

数理分析在当前的宏观经济学研究中处于基础性的重要地位，在学科发展史上也发挥了革命性的推动作用。[**GKMS2023**] 总结了 1980-2018 年共 1984 篇发表在前五大和宏观领域前五大期刊上宏观经济学的研究文献，一个结论是，大部分的宏观研究都以理论为核心（样本年份中最后两年 70% 的文章都有理论模型，一点理论没有的文章极其稀少）。著名经济学者 Samuelson、Solow、Lucas 等一众经济学家无不具备深厚的数理功底，他们都具有非凡的概括和综合能力，总能把经济学中最为本质的规律和最重要的成果用最简洁的经济学模型和语言表达出，并整理成系统的理论框架。但正如 1906 年 Marshall 写给 Pauli 的信中所言, 数学只是一种语言, 其它什么都不是。本书希望在透彻梳理和细致探究数学这门语言在经济学中的发展和应用的基础上，尝试构建结合中国背景的宏观理论模型，以为建立新时代中国宏观经济知识体系贡献绵薄之力。

数理分析的不断发展深化也有助于学者和政策制定者理解日益复杂的现实宏观经济，从而制定更精细、更有效的宏观经济政策。中国新发展阶段国内外市场环境的不确定性陡增，供给侧和需求侧冲击叠加，转化成理论模型和数学语言就是多重冲击频现，信息摩擦突显，以往相对单调的宏观经济治理方法恐难以应对新发展阶段的诸多难题，健全宏观经济治理体系迫在眉睫，关键一环或是对经济主体预期的恰当管理以促使其行动与宏观政策目标一致。对此分析可建立科学的分析框架，这也是本书后三章（随机部分）三大主题的最终使命，即希望为不确定性环境下提出扭转预期偏弱推动新阶段我国经济继续高质量发展奠定理论基础，并将于压轴案例处讨论结合中国背景“基于理性疏忽引入适应性学习”的最优宏观政策。

前言

全书分为确定和随机两类理论模型，每类都是静态和动态两种，其中动态又有离散时间和连续时间之分，此为结构上的三个 2，简称 32。内容上又皆是三大主题：最优问题、均衡求解和比较分析，简称 3。故内容结构上谓之 323 式。

静态模型是静态最优求解、静态均衡确定和比较静态分析，动态模型相应地就是动态最优求解、动态均衡确定和比较动态分析。确定是随机的前身，静态是动态的特例，确定性静态模型的构建、求解和分析相对简单，但其对于动态理论模型中数理技术的掌握是很好的前导，故此将同一主题的静态和动态两种形式置于同一章。又由于确定和随机这两类模型的部分主题有重合，因此全书内容安排为确定模型的静动最优问题、确定模型的静动均衡求解、确定模型的静动比较分析、随机模型的静动比较分析、随机模型的静动均衡求解、随机模型的静动最优问题。恰好形成一个结构完整、少有重叠、各有侧重的闭环。

从著作的落脚点来看，笔者希望通透阐明信息在宏观随机理论尤其是最优宏观政策分析中的应用和价值。随机宏观经济理论中之所以要用到信息，是因为理论模型会着眼于当下及未来的不确定性而构建，而最优货币政策是一种目标均衡分析，它将最优化、均衡确定和比较分析三种技术性语言融为一体。着实，确定性只是一种理

想状态，与现实偏离甚远，但确定亦是随机的特殊情形，确定模型中的解析技术是随机模型中解析技术的基石，为使读者熟练掌握随机模型的构建与解析，故全书有确定和随机两大板块之分，并且皆是最优化、均衡求解和比较分析这完全对应的三大主题。

第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题。

现代宏观理论建立在微观基础之上，最优化是得到诸如消费需求、劳动需求、资本需求、劳动供给、资本供给等行为方程的常用方法。动态最优更是理论宏观中难以回避的首要问题。华人学者蒋中一有专著《动态最优化基础》重点介绍变分法和最优控制，龚六堂和苗建军有著作《动态经济学方法》着重讨论最优控制和动态规划。事实上，动态最优的 Lagrange 方法也很好用，林致远的著作《数理经济学（高级教程）》中有所介绍。关于 Lagrange 方法的由来，读者会发现这在同济版的高等数学中亦有阐述。问题是，这些方法有何关联？本章会从静态模型的 Lagrange 方法完美引入到动态模型，并会在连续时间中用 Lagrange 方法解释最优控制的由来，还会在离散时间中通过 Lagrange 方法引出动态规划方法。本章还建立了统一分析框架得到最优化的高阶条件，具有一定的创新。读者可能会困惑于能看懂部分教材仍无法看懂宏观理论文章，原因或许是这些著作未聚焦讨论一个核心问题，即宏观经济理论背景下如何确定"选择变量"？对于一个纯粹的数学问题，即便读者会用各种方法求解最优问题，一旦涉及宏观理论的具体建模，读者未必清楚哪个或哪些是应该作为"选择变量"。本章将用产品市场完全竞争、要素市场完全竞争、产品或要素市场垄断竞争为例，介绍不同理论背景下最优问题的恰当"选择变量"。尤其，将强调指出，比如完全竞争和垄断竞争，选择变量都有可能是产品数量，不同的是，在完全竞争理论中是供给量而在垄断竞争中是需求量。从逻辑结构上来看，第一章通过最优化得到行为方程后，加上定义方程和均衡条件，可得到完整的经济系统，这是第二、三章求解系统均衡及讨论外生变量或参数变动后"目标均衡"位移的前提。当然，早期宏观理论模型中的行为方程多为简单设定 (ad hoc)，比较分析的是"非目标均衡"，如此则可跳过最优求解。

第二章 均衡静态确定 vs. 均衡动态确定

静态均衡确定和动态均衡确定的内容相对简单，前者对于多维线性模型而言少不了借用矩阵求解（用矩阵求逆整体求解或用 Cramer 法则单个求解），后者对于离散时间和连续时间则分别求解差分方程（迭代法或滞后前瞻算子法）和微分方程（积分法或待定系数法），这在很多著作中都能找到相似内容。本章结合经典宏观模型形成了两点特色：（1）根据局部均衡与一般均衡或根据不同理论模型识别不同的内生变量与外生变量，比如古典模型中单侧的劳动供给市场或劳动力需求市场，实际工资都是外生变量，而对于古典模型的总供给侧而言，实际工资则是内生变量，但在古典模型中名义工资是内生变量而在 Keynes 模型中根据劳动力市场未能自动出清的关键假设而令名义工资是外生变量；（2）前述聚焦的是均衡的存在性与唯一性，为使下一章的比较分析更严谨，应讨论均衡的稳定性，这又分定性的相位图分析和定量的数理解析，一维的相位路径简单，但二维就比较复杂了，比如分界线和流线的判断等，虽是定性描绘，仍要找到抓手，而定量的数理解析低维与高维、离散与连续，虽有差异，仍可尽可能保持解析框架的统一。

第三章 比较静态分析 vs. 比较动态分析

比较分析指的是外生变量或参数变动引起的均衡内生变量的变动情况。本章强调指出了简型方程和结构方程在比较分析技术上的差异，若理论模型有解析解，则其为简型方程，倘还连续可微，则微积分方法可快速得到比较分析的结果，而结构方程则要麻烦一些，一维或高维隐函数法则、全微分方法、全导数方法皆可用于比较分析。供需弹性、同期替代弹性、跨期替代弹性、替代效应、收入效应、财富效应、CD、CES 等经济学中重要的基础概念一并置于本章介绍，它们实质是另一个数量级上的比较分析，即常见的比较分析是自变量改变 1 个单位引起的因变量的变化，而这些概念多指自变量改变 1 个百分比引起的因变量百分之的变化。

与确定模型中的比较分析指外生变量或参数变动一单位引起的均衡内生变量的变动符号（同向还是反向）、变动幅度、变动的持续时间等不同的是，随机模型中的比较分析指是外生变量或参数波动一单位引起的均衡内生变量的变化情况。此外，随机模型中的比较分析与确定性模型的比较分析并无特殊之处，当然，高度依赖于随机均衡确定或（及）随机最优求解。

第四章 随机均衡静态 vs. 随机均衡动态

随机均衡容易让读者想到动态随机一般均衡 (DSGE)，目前书上多见的是完全信息理性预期均衡理论，而不完全信息理性预期及有限理性预期更复杂或更贴合现实，自然仍是期刊文献中常出现的热点主题。静态随机均

衡中也有完全信息与不完全信息之分。本章最大的特色是用著名的 Lucas 信号提取模型贯穿全章，包括含有外生随机变量的完全信息静态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息但外生变量是完美共同知识的静态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的静态 Lucas 模型，以及内生变量有不完美信息但外生变量是完美共同知识的动态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（不可观测的内外生变量本身未以运动方程的形式出现仍是 Bayes 信号提取）、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（不可观测的内外生变量本身未运动方程的形式出现须升级为 Kalman 滤波）、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（新增不同运动形式的外生变量）。本章有多处细节处理，比如单个多个及单列多列信号的考察，先验均值为 0 不为 0 的讨论，从 Bayes 到 Kalman 无缝过渡的呈现。上述案例有个共同特征，即皆为外生信息结构，这可为下一章引出内生信息结构的系列问题奠定基础，此外，Lucas 模型作为新古典宏观经济理论的典范，在货币政策分析上也有重要的探讨价值，会通过均衡解体现。

第五章 随机静态最优 vs. 随机动态最优

如前所述，第一章可作为第二、三章的前提，亦可为本压轴章节深入浅出、细致完备地讨论外生信息和内生信息的随机理论模型作铺垫，而内、外生信息结构已经、正在、还将于宏观理论的理论文献和实际应用中发挥极为重要的作用。之所以让随机最优压轴，是因本书的核心内容内生信息结构依赖于随机最优框架，是选择信息得到随机行为方程的关键一步，此后一般还须求解随机均衡并作随机比较，它可囊括最优问题、均衡求解和比较分析这三大主题，因此，最后一章既可实现对内生信息结构系列问题的完整介绍，又相当于是对全书前述章节内容的概括、归纳和总结；此外，内、外生信息结构及“基于理性疏忽引入适应性学习”的最优货币政策分析，也是在随机最优的框架下实现的，因此它还是一个压轴性的应用问题。本章所选案例将根据理论知识的逻辑递进关系依次介绍央行政策执行的“衰减原则”[**Brainard1967**, **Blinder1998**]，公共信息与私人信息的社会价值 [**MorrisShin2002**]，外生信息与内生信息的最优货币政策 [**PW2014**]，高维理性疏忽的求解 [**MWY2022**, **AfrouziYang2021**] 及其最优货币政策分析 [**DZS2024**]。

符号列表

$\circ$	目标最优（广义最优，也是一种特殊的静态均衡）
$\circledcirc$	合意最优（狭义最优，施加一些限定，比如非名义刚性时的最优决策）
$*$	非目标静态均衡
$\otimes$	目标静态均衡（不完全信息下最优决策的博弈均衡）
$()_t^*$ 或 $(t)^*$	非目标均衡动态
$()_t^\otimes$ 或 $(t)^\otimes$	目标均衡动态
$\bullet$	非目标跨期均衡（稳态）
$\odot$	目标跨期均衡（稳态）

第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题

最优化问题表示无所拘束或有所约束地选择某个或某些自变量以使目标函数达到极值，其结果为目标处在极值位置的选择变量的值（的集合）。

1.1 静态最优问题

静态最优问题分无约束和有约束这两种常见情形，有约束又分等式约束和不等式约束。

无约束最优化亦即自由最优化，严格说来并非指对选择变量毫无约束，选择变量若有定义域也是一种约束。此处的无约束是指最优化问题的选择变量之间不存在彼此掣肘的关系。选择变量也被称为决策变量。

单个选择变量（以下简称“单变量”）不存在与其他选择变量牵绊的机会，两个选择变量（以下简称“双变量”）或更多个选择变量（以下简称“多变量”）之间存在相互关联、此消彼长的可能。

1.1.1 无约束最优化

本节先介绍选择变量无相互约束情况下最优问题的必要及充分条件。从单变量开始，再到多变量。

1.1.1.1 单个决策变量

微积分方法下单个选择变量的最优化问题直接对此自变量求导，令导数为 0 谓之一阶必要条件，但这需要满足前提假设，即函数 $O = f(x)$ 是连续可微的光滑曲线（排除常函数和单调函数）。导数为 0 的点可能是“拐点”（非稳定点），也可能是“驻点”（稳定点）；驻点可能仅是局部的相对极值（后文简称“极值”），而非全局的绝对极值（后文简称“最值”）。这涉及至少六个问题：

(1) 为何排除常函数和单调函数？

(2) 为何目标函数要连续且可微？

(3) 如何判定它是拐点还是驻点？

(4) 如何区分驻点极大亦或极小？

(5) 如何知晓它是极值还是最值？

(6) 如何简单证明微分方法合理？

问题 1，常函数的值 z 固定，无论自变量 x 如何选择，无所谓哪个目标值更大或更小；而有定义域 $[x_1, x_2]$ 的单调函数的端点容易判断为极值，当然也就是最值。可分别表示为：

$$f(x) = z; \quad \& \quad \begin{cases} \min f(x) = f(x_1), \\ \max f(x) = f(x_2). \end{cases}$$

问题 2，目标函数未必光滑，可能有尖折点（角点），此处导数不存在，因此尖折点是极值的话也无法通过导数来判断。本章聚焦微积分方法，因此函数各阶可导是基本前提；换言之，一阶导、二阶导、三阶导、四阶导直至任意高阶导假设存在：

$$f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), \ldots$$

问题 3，对于连续可微的目标函数而言，一阶导为斜率，一阶导大于 0 即斜率为正，一阶导小于 0 即斜率为负。极值点处一阶导必为 0，一阶导为 0 未必是极值。极值点左右两侧的斜率异号，倘一阶导为 0 处左右两边的

斜率同号，则是拐点。因此，一阶导为 0 是极值存在的必要条件，而非充分条件。这归结为：

$$
f'(x)=0\begin{cases}
\text{拐点}\begin{cases}
\text{同号}\begin{cases} f'(x)>0 & \text{左}\\ f'(x)>0 & \text{右}\end{cases}\\
\text{同号}\begin{cases} f'(x)<0 & \text{左}\\ f'(x)<0 & \text{右}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{驻点}\begin{cases}
\text{异号}\begin{cases} f'(x)>0 & \text{左}\\ f'(x)<0 & \text{右}\end{cases}\\
\text{异号}\begin{cases} f'(x)<0 & \text{左}\\ f'(x)>0 & \text{右}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

问题 4，驻点邻域一阶导符号的变化有助判断极值，极大值点的左侧斜率为正而其右侧斜率为负，极小值点左侧斜率为负而右侧斜率为正；驻点邻域二阶导的符号正负亦能判断，若为正的斜率越来越缓（函数值以递减的速度递增）且为负的斜率越来越陡（函数值以递增的速度递减）则是极大值（二阶导总小于 0），若为负的斜率越来越缓（函数值以递减的速度递减）且为正的斜率越来越陡（函数值以递增的速度递增）则是极小值（二阶导总大于 0）。这归结为：

$$
\text{极值}\begin{cases}
\text{极大值}\begin{cases} f'(x)>0, f''(x)<0 & \text{左}\\ f'(x)<0, f''(x)<0 & \text{右}\end{cases}\\
\text{极小值}\begin{cases} f'(x)<0, f''(x)>0 & \text{左}\\ f'(x)>0, f''(x)>0 & \text{右}\end{cases}
\end{cases}
$$

问题 5，对于连续光滑弯曲的目标函数，若极值点皆可确定，自然可以对极值点进行比较以确定最值，但这样较为麻烦，且极值个数未见得容易穷尽；换个思路，若目标函数的凹凸性容易确定，则极值亦为最值，且具有凹或凸特征的目标函数在最优化经济学问题中常见。凹凸函数可根据定义（令 $0<\omega<1$，x_1, x_2 是曲线上任意给定的两点）判定，且凹函数的二阶导“处处”小于 0 而凸函数的二阶导“处处”大于 0，因此凹目标函数有最大值而凸目标函数有最小值。这归结为：

$$
\text{最值}\begin{cases}
\text{最大值}\left\{\begin{array}{ll} \omega f(x_1)+(1-\omega)f(x_2)\le f[\omega x_1+(1-\omega)x_2] & \text{定义}\\ f''(x)<0,\ \forall x & \text{性质}\end{array}\right\}\text{凹函数;}\\
\text{最小值}\left\{\begin{array}{ll} f''(x)>0,\ \forall x & \text{性质}\\ \omega f(x_1)+(1-\omega)f(x_2)\ge f[\omega x_1+(1-\omega)x_2] & \text{定义}\end{array}\right\}\text{凸函数.}
\end{cases}
$$

以上二阶导出现正负符号时才能对是极大值还是极小值作出判断，然并不排除二阶导也可能为 0，此时仍无法判断极大极小，因此 $f''(x)\le 0$ 或 $f''(x)\ge 0$ 与 $f'(x)=0$ 都是极值存在的必要条件。为何？这也是引出以下问题的缘由。

问题 6，以上一阶必要条件的推导用到中值定理，二阶以上必要或充分条件的推导借助 Taylor 展开。

i) 若 $O=f(x)$ 在定义域内连续可微，且 O 有极值 $f(x_o)$，则必有

$$f'(x_o)=0.$$

设 x 位于 x_o 的邻域，即 $x\in x_0+\Delta x$，且不妨设 $f(x)\le f(x_o)$，于是有 $f(x_o+\Delta x)\le f(x_0)$，则

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)\le 0}{\Delta x>0}\le 0;\\[2ex]
\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)\le 0}{\Delta x<0}\ge 0.
\end{array}\right\}
\quad\Rightarrow\quad
f'(x_o)=\left\{\begin{array}{l}
f'_+(x_o)\equiv\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}\le 0\\[2ex]
f'_-(x_o)\equiv\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}\ge 0
\end{array}\right\}=0.
$$

上述是 Fermat 引理。[**Samuelson1963**] 于数学附录中证明此一阶条件直接用微分中值定理。设 x_o 是定义域内一点，$x=x_o+\Delta x$ 是另一点 ($\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$)，则在 x 和 x_o 之间有一点 $\omega x+(1-\omega)x_o=x_o+\omega(x-x_o), \omega\in(0,1)$，

根据 Lagrange 中值定理有：

$$f'\left(x_o+\omega(x-x_o)\right)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\quad\Leftrightarrow\quad f(x)-f(x_o)=f'\left(x_o+\omega(x-x_o)\right)(x-x_o).$$

若 $f'(x_o)>0$，根据连续性假设，存在一个区间 $|x-x_o|<z$，使得 $f'(x)>0$ 在该区间内处处成立，因此，对比 x_o 大的所有 x 对应的函数值有 $f(x)-f(x_o)>0$，这与 $f(x)\le f(x_o)$ 的假设矛盾；同理，$f'(x_o)<0$ 也会导致矛盾。极小值的一阶必要条件亦可如此粗略证明。因此，极值的必要条件是 $f'(x_o)=0$。也可用微分思想来表达，即 $\mathrm{d}O=f'(x)\mathrm{d}x$，在极值点上，$x$ 的任何变化 ($\mathrm{d}x\ne 0$) 都不会引起 O 的变化 ($\mathrm{d}O=0$)，那么只能是 $f'(x)=0$，该方程的解即为 (x_o)，故等价于 $f'(x_o)=0$。[1]

还可以反证法来看，若极值处 $f'(x_o)\ne 0$，则：要么 $f'(x_o)>0$，它表示随着 x_o 的增长，目标值还将增大；要么 $f'(x_o)<0$，它表示随着 x_o 的增长，目标值还将减小。这两种情形下的目标值都不会是极值，反推极值位置必有 $f'(x_o)=0$。

ii) 再看二阶及以上的高阶必要条件或充分条件如何推导得到。让函数 $O=f(x)$ 围绕 $x=x_o$ 作 $n\in N^+$ 阶泰勒展开（省略余项且用符号 N^+ 表示任意正整数集）：

$$f(x)=\overbrace{\underbrace{f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)}_{\text{线性近似}}+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{f^{(3)}(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\frac{f^{(4)}(x_o)}{4!}(x-x_o)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n}^{\text{非线性近似}}.$$

(a) 我们关注 x_o 的邻域任意一点 x 的函数值 ($x\ne x_o$)，如果一阶导 $f'(x_o)\ne 0$，二阶导及更高阶导皆为 0，则有：

$$f(x)-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o).$$

若要判断 $x=x_o$ 时函数取得极值点，即 x_o 的左右邻域任意一点 x 皆满足 $f(x)<f(x_o)$ 时为极大值而 x_o 的左右邻域任意一点 x 皆满足 $f(x)>f(x_o)$ 时为极小值，这依赖于 $f'(x_o)(x-x_o)$ 的正负判断，而这包含 $f'(x_o)$ 和 $(x-x_o)$ 两项的乘积无法确定正负。

但倘是极值，以极大值为例：极大值左侧 $x-x_o<0$，极大值左侧 $f'(x_o)>0$；极大值右侧 $x-x_o>0$，极大值右侧 $f'(x_o)<0$。可见极大值左右两侧总有 $f'(x_o)(x-x_o)<0$。由此可知，$f'(x_o)\ne 0$ 意味着 $x=x_o$ 并非极值点；换言之，极值点必有 $f'(x_o)=0$。

(b) 既然极值点必有 $f'(x_o)=0$，假设二阶导 $f''(x_0)\ne 0$，则三阶导及更高阶导必为 0，Taylor 展开式为：

$$f(x)-f(x_o)=0+\frac{f''(x_o)}{2}(x-x_o)^2.$$

无论 x 位于 x_o 的左侧还是右侧，$(x-x_o)^2>0$ 总成立，则只要二阶导 $f''(x_o)>0$，则 $f(x)>f(x_o)$，极值点 $f(x_o)$ 总比其邻域小，因此其为极小值；

无论 x 位于 x_o 的左侧还是右侧，$(x-x_o)^2>0$ 总成立，则只要二阶导 $f''(x_o)<0$，则 $f(x)<f(x_o)$，极值点 $f(x_o)$ 总比其邻域大，因此其为极大值。

(c) 但若一阶导 $f'(x_o)=0$，二阶导 $f''(x_o)=0$ 呢？则至二阶项无法判断 x_o 的函数值 $f(x_o)$ 与其邻域任意 x 的函数值 $f(x)$ 的大小。假设三阶导不为零 $f^{(3)}(x_o)\ne 0$，则四阶导及更高阶导必为 0，Taylor 展开式为：

$$f(x)-f(x_o)=0+0+\frac{f^{(3)}(x_o)}{3\times 2\times 1}(x-x_o)^3.$$

由于无法判定 $(x-x_o)^3$ 的正负，因此三阶导 $f^{(3)}$ 的正负无法决定 $f^{(3)}(x_o)(x-x_o)^3$ 的正负，也就无法比较 $f(x_o)$ 与其邻域任意 x 的函数值 $f(x)$ 的大小，因此 $x=x_o$ 并非极值点。既然 $f'(x_o)=0$ 并非驻点，那就是拐点莫属了。导数的导数为 0，可见导数本身既可能是极大值，也可能是极小值，这对应形式上稍有不同的拐点。

(d) 递推，一阶导 $f'(x_o)=0$，二阶导 $f''(x_o)=0$，三阶导 $f^{(3)}(x_o)=0$，但假设四阶导 $f^{(4)}(x_o)\ne 0$，则五阶

[1] 另可参看 **[Dadkhah2011]** 的定理 12.1 或 **[Sundaram2001]** 关于一阶条件的严格证明。

导及更高阶导必为 0，Taylor 展开式为：

$$f(x)-f(x_o)=0+0+0+\frac{f^{(4)}(x_o)}{4!}(x-x_o)^4.$$

无论 x 位于 x_o 的左侧还是右侧，$(x-x_o)^4>0$ 总成立，则只要四阶导 $f^{(4)}(x_o)>0$，则 $f(x)>f(x_o)$，极值点 $f(x_o)$ 总比其邻域小，因此其为极小值；

无论 x 位于 x_o 的左侧还是右侧，$(x-x_o)^4>0$ 总成立，则只要四阶导 $f^{(4)}(x_o)<0$，则 $f(x)<f(x_o)$，极值点 $f(x_o)$ 总比其邻域大，因此其为极大值。

通过列举，规律可见一斑：若 $x=x_o$ 处的一阶导 $f'(x_o)=0$，则其为拐点或驻点。令二阶及以上的各阶导数中所遇到的第一个非 0 导数值是 j 阶导数，即 $f^{(j)}(x_o)\neq 0$。当 j 为奇数时，$(x_0,f(x_o))$ 为拐点；当 j 为偶数时，$f^{(j)}(x_o)>0$ 时 $f(x_o)$ 是极小值，$f^{(j)}(x_o)<0$ 时 $f(x_o)$ 是极大值。

以上 6 个问题，简单勾勒和逐次引出了无约束最优求解的一阶或高阶条件，仍囿于数学范畴。经济学而言，须回答的是，基于特定的经济环境如何选择符合相应经济条件的选择变量以使经济主体的目标最优。以下 3 个例题分别呈现了完全竞争不同构造上及完全竞争与垄断竞争市场环境下“选择变量”的异同。

例 1. 完全竞争市场环境下的产品供给

完全竞争时价格由市场供需确定，买卖双方皆不能控制价格，代表性厂商选择产品销售数量 Q_s（皆用下标 s 表示供给）以使利润最优化，利润被定义为扣除成本之后的收益。产品市场和要素市场都完全竞争时，收益和成本皆为销售量的函数，利润目标函数为：

$$\max_{Q_s}\Pi\equiv\mathcal{R}(Q_s)-C(Q_s).$$

先看一阶条件：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}Q_s}=\mathcal{R}'(Q_s)-C'(Q_s)=0\quad\Rightarrow\quad\underbrace{\overbrace{\mathcal{R}'(Q_s^\circ)}^{\text{边际收益}}}_{\text{MR}}=\underbrace{\overbrace{C'(Q_s^\circ)}^{\text{边际成本}}}_{\text{MC}}.$$

这得到边际收益等于边际成本的均衡条件，从中可求解出合意的产品供给量（产出水平）Q_s°。但在该供给量上未必实现了利润极大化的目标，利润极小化甚至利润继续上升的拐点处都是新增 1 单位销量的收益等于新增 1 单位销量的成本。因此，这只是必要条件。

再看二阶条件：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}Q_s^2}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q_s}\left(\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}Q_s}\right)=\mathcal{R}''(Q_s^\circ)-C''(Q_s^\circ)<0\quad\Rightarrow\quad\mathcal{R}''(Q_s^\circ)<C''(Q_s^\circ).$$

即边际收益的变化率小于边际成本的变化率时，能确保利润取得极大值（谓之充分条件）。

显性化收益曲线，完全竞争时收益为 $\mathcal{R}(Q_s)=PQ_s$，边际收益 $\mathcal{R}'(Q_s^\circ)=P$，边际收益的变化率 $\mathcal{R}''(Q_s^\circ)=0$，一二阶条件遂为：

$$\begin{cases}C'(Q_s^\circ)=P,\\C''(Q_s^\circ)>0.\end{cases}$$

这表明，最优产量水平 Q_s° 时的边际成本亦即售价，且该处的边际成本递增。为何？倘在选择的 Q_s 处边际成本递减，则在此时多生产 1 单位仍可获益 P，边际成本将小于 P，Q_s 不会是最优选择。

例 2. 完全竞争市场环境下的劳动力需求

生产活动依赖生产要素，常见的生产要素包括技术、资本和劳力。省略技术，外生资本，代表性厂商对劳动力这一生产要素的需求方程源自利润最优化：

$$\max_{L_d\rightleftarrows Q_s}\Pi\equiv\overbrace{PQ_s}^{\text{即时收益}}-\overbrace{WL_d}^{\text{可变成本}}-\overbrace{RPK}^{\text{固定成本}}.$$

产品市场和要素市场皆完全竞争，价格水平 P、工资水平 W、资本租金率 R（等于名义利率 i 与预期通货膨

胀 π_e 之差的实际利率水平 r 加上资本折旧率 δ）对于企业利润最优化问题而言外生（用灰色标示外生）；对物质资本或有形资本 K 这一生产要素的需求，短期而言相对固定，或视为外生；企业只选择劳动力 L_d（皆用下标 d 表示需求）这一投入要素以提供产出供给 Q_s（或也可通过选择产量后继而确定劳动需求，i.e., $L_d \rightleftarrows Q_s$），从而实现利润目标最优。

回到上述最优化问题。将技术水平 A 加持下的生产函数 $Q_s = AF(K, L_d)$ 代入定义的利润恒等式：

$$\max_{L_d \rightleftarrows Q_s} \Pi \equiv PAF(K, L_d) - RPK - WL_d \qquad \Leftrightarrow \qquad \max_{L_d \rightleftarrows Q_s} \Pi \equiv PAF(K, L_d) - WL_d$$

名义资本 PK 及其价格（名义总利率）R 都是外生，因此删除该项不影响一阶必要条件及由此确定的最优选择变量：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}L_d} = PAF_L(K, L_d^\circ) - W = 0 \xRightarrow{\text{劳动力需求曲线}} \begin{aligned} \overbrace{W/P}^{\text{实际工资}} &= \overbrace{AF_L(K, L_d^\circ)}^{\text{边际产出}}; \\ \underbrace{W/A}_{\text{边际成本}} &= \underbrace{PF_L(K, L_d^\circ)}_{\text{边际收益}} \end{aligned} \xRightarrow{\text{合意的劳动力需求}} L_d^\circ = f\left(\frac{W}{P}, A, K\right).$$

最优产出因此为：

$$Q_s^\circ = AF(K, L_d^\circ).$$

对劳动力这一生产要素的合意需求与最优产出的函数关系可通过逆函数 F^{-1} 表示为：

$$\Leftrightarrow \quad L_d^\circ = \frac{F^{-1}}{A} Q_s^\circ.$$

上述最优化问题可用一般函数表述为：

$$\max_{L_d \rightleftarrows Q_s} \Pi \equiv \underbrace{f\left(L_d; \frac{W}{P}, A, K\right)}_{\text{目标函数}}.$$

一阶必要条件及由此确定的最优选择变量：

$$f_{L_d} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad L_d^\circ = f\left(\frac{W}{P}, A, K\right).$$

代入上述目标函数可得到**值函数**：

$$\Pi^\circ \equiv \overbrace{f\left(L_d^\circ\left(\frac{W}{P}, A, K\right); \frac{W}{P}, A, K\right)}^{\text{值函数}}.$$

它有如下性质：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Pi^\circ}{\mathrm{d}K} &= \underbrace{\underbrace{\overbrace{f_{L_d^\circ}}^{\text{偏导}}}_{=0} \underbrace{\overbrace{\frac{\mathrm{d}L_d^\circ}{\mathrm{d}K}}^{\text{导数}}}_{\neq 0}}_{\text{间接效应}} + \underbrace{\overbrace{f_K}^{\text{偏导}}}_{\text{直接效应}}, \\ &= 0 + f_K. \end{aligned}$$

可见，值函数对某个外生变量的导数值即为目标函数对该外生变量的偏导值，这便是**包络定理**。此处有第三章比较分析的影子，但也是最优化主题的延伸。之所以作此介绍，一是本章稍后呈现的动态最优问题动态规划求解方法中要用到类似的函数形式；再是提醒读者注意，虽然值函数可视为结构方程（自变量之间有相关性），但不受内生性问题的困扰。

还需通过二阶条件判断所选择的 L_d° 使目标函数取得了极大值还是极小值：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}L_d^2} = PF_{LL} < 0.$$

生产函数被假设为有正的且递减的边际产出 ($F_L > 0, F_{LL} < 0$)，因此二阶条件小于 0 意味着上述最优化问题产生的是极大值。当然，根据定义或性质不难看出，利润恒等式定义的关于劳动力需求的目标函数是凹函数；或者说，利润函数中关于成本是线性的，因此决定利润函数凹凸特性的是与收益密切相关的生产函数；换言之，本例中利润函数的凹凸特性与生产函数的凹凸特性一致。而凹生产函数是经济学的一个重要假设，因此利润最优化问题中的极大值亦为最大值。

生产函数设定为：$Q_s = AK^\alpha L_d^{1-\alpha}$，参数 $\alpha \in [0,1]$ 和 $(1-\alpha) \in [0,1]$ 表示相应要素的产出份额（i.e., 要素变动 1% 引起的产出变动的百分比），这被称为 Cobb-Douglas 函数（第三章将系统性介绍由来和性质）。若暂不考虑劳动力要素，转而考察石油资源作为投入要素，假设厂商剔除石油成本以最大化产出，即：

$$
\begin{aligned}
& & Q_s &= \max_{\text{Oil}}(\mathcal{A}K^\alpha \text{Oil}^{1-\alpha} - p_{\text{oil}}\text{Oil}),\\
&\xRightarrow{\text{F.O.C.}} & 0 &= (1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha \text{Oil}^{-\alpha} - p_{\text{oil}},\\
&\Rightarrow & \text{Oil}^{-\alpha} &= \frac{p_{\text{oil}}}{(1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha},\\
&\Rightarrow & \text{Oil} &= \left[\frac{p_{\text{oil}}}{(1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}},\\
&\Rightarrow & \text{Oil}^{1-\alpha} &= \left[\frac{p_{\text{oil}}}{(1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha}\right]^{1-\frac{1}{\alpha}},\\
&\Rightarrow & Q_s &= \mathcal{A}K^\alpha \left[\frac{P_{\text{Oil}}}{(1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha}\right]^{1-\frac{1}{\alpha}} - P_{\text{Oil}}\left[\frac{P_{\text{Oil}}}{(1-\alpha)\mathcal{A}K^\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}},\\
& & &= \mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}K - \mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}} K(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\\
& & &= \mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}K - \mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}} K(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\alpha),\\
& & &= \underbrace{\alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}}} K,\\
& & &= AK.
\end{aligned}
$$

最后一步令 $A \equiv \alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathcal{A}^{\frac{1}{\alpha}} P_{\text{oil}}^{1-\frac{1}{\alpha}}$，其中 $\mathcal{A}$ 是技术水平，A 被定义为有效技术水平，它受石油实际价格 p_{oil} 驱动，并且因为 $1-\frac{1}{\alpha} < 0$，故石油实际价格上涨，会拉低有效技术水平。[2]

例 3. 垄断竞争市场环境下产品的最优定价

给定其他投入要素，厂商选择合意的劳动力以使利润最大化（凹生产函数确保极值即为最值）。现在仍假设劳动力要素市场完全竞争，但厂商在产品销售市场有一定的垄断竞争力，这意味着：

(1) 如果假设一个厂商对应一件产品，则垄断竞争环境下不宜用代表性厂商，因为垄断竞争意味着厂商因产品差异而有定价权。假设市场中有两家厂商，则厂商 1 和厂商 2 的产品之间并非完全可替代，替代弹性为 ϵ（此概念的具体定义详见第三章）。

(2) 资本和技术仍然给定（外生），资本甚至标准化为 1，生产函数设为 $Q_{is} = AL_{id}^{1-\alpha}$，令 $\alpha = 0$ 表示规模报酬不变（亦见第三章），因为投入要素增加 n 倍，很容易证明产出也增加 n 倍，即 $A(nL_{id}) = n(AL_{id}) = nQ_{is}$。要素市场仍是完全竞争，工资由市场供需决定，设为 W（对于厂商来说其为外生），但由于厂商 $i, i = \{1,2\}$ 在产品市场具有垄断竞争力，因此要素投入量由产品需求量决定，即

$$AL_{id} = \overbrace{Q_{is} = Q_{id}}^{\text{产品供给由产品需求决定}} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{L_{id} = Q_{id}/A}^{\text{要素需求由产品需求决定}}.$$

[2]生产函数中有效技术的定义借鉴了Moll (2023)。

(3) 对产品 i 的需求函数来自家庭部门给定预算约束时的效用最大化，这是等式约束（严格说来是不等式约束）最优化问题的求解结果，稍后讨论。厂商虽对其产品有垄断竞争力，可以对其产品有定价权，但总价格水平还包括其他厂商所确定的价格，因此总价格指数 P 对任一厂商而言，皆是外生；同时厂商定价会影响所定价产品的需求量，但全社会的需求总量 Q_d 对单个厂商而言也是外生（均衡时总需求等于总供给等于 Q），基于这些介绍，不加推导暂直接假设产品 i 的需求曲线为（**例** 9 将解释其来龙去脉）：

$$Q_{id} = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} Q.$$

求解厂商利润最优化时的最优定价（也即瞬时状态下的合意售价）有两种异曲同工的思路：

法一，厂商先选择产品需求量以最大化利润函数，再用反需求函数 $P_i = \left(\frac{Q_{id}}{Q}\right)^{-\frac{1}{\epsilon}} P$ 求解最优定价：

$$\begin{aligned}
\max_{P_i \rightleftarrows Q_{id} \leftrightarrows L_{id}} \Pi_i &\equiv P_i Q_{id} - W L_{id}, \\
&= P_i Q_{id} - W\frac{Q_{id}}{A} = \left(P_i - \frac{W}{A}\right) Q_{id}, \\
&= \left[\left(\frac{Q_{id}}{Q}\right)^{-\frac{1}{\epsilon}} P - \frac{W}{A}\right] Q_{id} = \frac{Q_{id}^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{Q^{-\frac{1}{\epsilon}}} P - \frac{W}{A} Q_{id}.
\end{aligned}$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_i}{\mathrm{d}Q_{id}} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) P Q^{\frac{1}{\epsilon}} Q_{id}^{-\frac{1}{\epsilon}} - \frac{W}{A} = 0.$$

由此可求解出合意的商品需求，再根据反需求函数可求解出合意的定价水平。但此过程略显多余，因为观察上述一阶条件，其中 $PQ^{\frac{1}{\epsilon}} Q_{id}^{-\frac{1}{\epsilon}}$ 恰为 P_i，故此一阶条件转变为：

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) P_i - \frac{W}{A} = 0.$$

由此跳过求解最优 Q_{id}° 而可得利润最大化时的瞬时最优定价：

$$P_i^{\circ} = \underbrace{\overbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}}}_{\text{成本加成}} \underbrace{\overbrace{\frac{W}{A}}}_{\text{名义边际成本}}.$$

劳动的边际产出为 A，名义工资除以劳动的边际产出是名义边际成本；$\frac{\epsilon}{\epsilon-1}$ 谓之成本加成。因此上式表示垄断竞争环境下的产品价格等于成本加成乘以边际成本，较之完全竞争环境下多了成本加成一项。

法二，厂商直接选择商品售价以最大化利润函数：

$$\begin{aligned}
\max_{L_{id} \rightleftarrows Q_{id} \rightleftarrows P_i} \Pi_i &\equiv P_i Q_{id} - W L_{id} = P_i Q_{id} - W\frac{Q_{id}}{A}, \\
&= \left(P_i - \frac{W}{A}\right) Q_{id} = \left(P_i - \frac{W}{A}\right)\left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} Q\right], \\
&= \frac{P_i^{1-\epsilon}}{P^{-\epsilon}} Q - \frac{W}{A}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} Q.
\end{aligned}$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_i}{\mathrm{d}P_i} = (1-\epsilon)\frac{P_i^{-\epsilon}}{P^{-\epsilon}} Q + \epsilon \frac{W}{A}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon-1} \frac{1}{P} Q = 0.$$

由此可得：

$$\frac{P_i^{\circ}}{P} = \overbrace{\underbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}}}^{\text{成本加成}} \overbrace{\underbrace{\frac{W/P}{A}}}^{\text{实际边际成本}}.$$

定义产品的相对价格为 $\frac{P_i^\circ}{P}$，而 $\frac{W}{P}$ 表示实际工资水平，实际工资除以劳动的边际成本是实际边际成本。上式表示垄断竞争环境下的产品的相对价格等于成本加成乘以实际边际成本；两边同时消掉总价格水平 P，得到与法一相同的推导结果；最大化实际利润函数 $\frac{P_i}{P}Q_{id}-\frac{W}{P}L_{id}$ 也可得到等价的结果。

法三，厂商选择高于边际成本的商品售价以最大化利润函数：

$$\begin{aligned}
\max_{Q_{id}\rightleftarrows P_i} \Pi_i &= (P_i-\mathrm{MC}_i)Q_{id},\\
&= (P_i-\mathrm{MC}_i)\left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon}Q\right],\\
&= \frac{P_i^{1-\epsilon}}{P^{-\epsilon}}Q-\mathrm{MC}_i\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon}Q.
\end{aligned}$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_i}{\mathrm{d}P_i}=(1-\epsilon)\frac{P_i^{-\epsilon}}{P^{-\epsilon}}Q+\epsilon\mathrm{MC}_i\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon-1}\frac{1}{P}Q=0.$$

由此可得：

$$P_i^\circ=\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\mathrm{MC}_i.$$

以上求解最优价格或继而求解最优需求量是给定边际成本。边际成本亦可由等式约束的利润最大化或等式约束的成本最小化推导而来。虽然这是等式约束最优化问题，但可转换为单个决策变量的无约束最优化问题：

$$\begin{aligned}
&\min_{L_{id}} C_i \equiv WL_{id},\\
&\qquad\Updownarrow\\
&\min_{Q_{is}} C_i = W\frac{Q_{is}}{A},\\
\Rightarrow\quad &\mathrm{MC}_i\equiv\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q_{is}}=\frac{W}{A}=\mathrm{MC}.
\end{aligned}$$

可见，在相应假设下各厂商的边际成本相同。

1.1.1.2 多个决策变量

I. 两个选择变量

前面在阐述单变量最优化一阶必要条件时提到了微分思想，即 $\mathrm{d}O=f'(x)\mathrm{d}x$，在取得极值点处，$x$ 的变动 $(\mathrm{d}x)$ 不会引起 O 的变动 $(\mathrm{d}O=0)$，那只能是 $f'(x)=0$。这对于得到双变量无约束最优化问题取得极值的一阶必要条件富有启迪。设双选择变量的目标函数为 $O=f(x,y)$，全微分后为 $\mathrm{d}O=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$，在取得极值点处，$x$ 和 y 的任何变化 $(\mathrm{d}x\neq0\neq\mathrm{d}y)$ 都不会引起 O 的变化 $\mathrm{d}O=0$，那么只能是

$$f_x=0=f_y.$$

这便得到了双变量无约束最优化问题取得极值的一阶必要条件。

双变量无约束最优化问题的二阶及以上的高阶必要条件或充分条件与单变量时的讨论步骤类似，但通常二阶条件就够用（i.e., 二阶条件不为 0），故只聚焦于此。通过让函数 $O=f(x,y)$ 围绕 $(x=x_o,y=y_o)$ 作二阶 Taylor 展开，并将一阶必要条件代入：

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_o,y_o)&=f_x^o(x-x_o)+f_y^o(y-y_o)+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}^o(x-x_o)^2+2f_{xy}^o(x-x_o)(y-y_o)+f_{yy}^o(y-y_o)^2\right],\\
&=0+0+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}^o(x-x_o)^2+2f_{xy}^o(x-x_o)(y-y_o)+f_{yy}^o(y-y_o)^2\right],\\
&=\frac{f_{xx}^o}{2}\left[(x-x_o)^2+2\frac{f_{xy}^o}{f_{xx}^o}(x-x_o)(y-y_o)+\frac{f_{yy}^o}{f_{xx}^o}(y-y_o)^2\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f^o_{xx}}{2}\left[(x-x_o)^2 + 2\frac{f^o_{xy}}{f^o_{xx}}(x-x_o)(y-y_o) + \frac{(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2 - \frac{(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2 + \frac{f^o_{yy}}{f^o_{xx}}(y-y_o)^2\right],\\
&= \frac{f^o_{xx}}{2}\left\{\left[(x-x_o)^2 + 2\frac{f^o_{xy}}{f^o_{xx}}(x-x_o)(y-y_o) + \frac{(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2\right] + \left[\frac{f^o_{yy}}{f^o_{xx}}(y-y_o)^2 - \frac{(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2\right]\right\},\\
&= \frac{f^o_{xx}}{2}\left\{\left[(x-x_o)^2 + 2\frac{f^o_{xy}}{f^o_{xx}}(x-x_o)(y-y_o) + \frac{(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2\right] + \frac{f^o_{xx}f^o_{yy}-(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2\right\},\\
&= \underbrace{\frac{f^o_{xx}}{2}\left\{\left[(x-x_o) + \frac{f^o_{xy}}{f^o_{xx}}(y-y_o)\right]^2 + \frac{f^o_{xx}f^o_{yy}-(f^o_{xy})^2}{(f^o_{xx})^2}(y-y_o)^2\right\}}_{\text{配平方}};
\end{aligned}
$$

$$
\overset{\text{或}}{=} \overbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-x_o & y-y_o \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} f^o_{xx} & f^o_{xy} \\ f^o_{yx} & f^o_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{Hessian 矩阵}}\begin{bmatrix} x-x_o \\ y-y_o \end{bmatrix}}^{\text{二次型}} = \frac{1}{2!}\left[f^o_{xx}(x-x_o)^2 + 2f^o_{xy}(x-x_o)(y-y_o) + f^o_{yy}(y-y_o)^2\right].
$$

从“配平方”得到的式子来看，欲判其正负，取决于 f^o_{xx} 和 $f^o_{xx}f^o_{yy}-(f^o_{xy})^2$ 两项的正负，且首先应满足 $f^o_{xx}f^o_{yy} > (f^o_{xy})^2$，在此前提下：

1) 若 $f^o_{xx} > 0$，则其为正，此时有 $f(x,y) - f(x_o,y_o) > 0$，即 $f(x,y) > f(x_o,y_o)$，$f(x_o,y_o)$ 为极小值；

2) 若 $f^o_{xx} < 0$，则其为负，此时有 $f(x,y) - f(x_o,y_o) < 0$，即 $f(x,y) < f(x_o,y_o)$，$f(x_o,y_o)$ 为极大值；

3) 由 $f^o_{xx}f^o_{yy} > (f^o_{xy})^2$ 总要成立，因此上述情形中 f^o_{xx} 与 f^o_{yy} 总是同号。

从“二次型”得到的式子来看，上述决定正负的条件恰在 Hessian 行列式中易于体现：

4) “配平方”的式子为正时，对于 2×2 维的 Hessian 行列式的各阶主子式皆为正有极小值，即

$$
\text{极小值}\left\{\begin{array}{ll}
\text{一阶领导主子式:} & \left|f^o_{xx}\right| > 0,\\
\quad\text{且} & \\
\text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{xx} & f^o_{xy} \\ f^o_{yx} & f^o_{yy} \end{vmatrix} > 0.
\end{array}\right\}\text{正定}
$$

5) “配平方”的式子为负时，对于 2×2 维 Hessian 行列式的各阶主子式先负再正有极大值，即

$$
\text{极大值}\left\{\begin{array}{ll}
\text{一阶领导主子式:} & \left|f^o_{xx}\right| < 0,\\
\quad\text{且} & \\
\text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{xx} & f^o_{xy} \\ f^o_{yx} & f^o_{yy} \end{vmatrix} > 0.
\end{array}\right\}\text{负定}
$$

二阶条件若继续为 0，则看更高阶条件，直至出现不为 0 的高阶充分条件为止。一阶必要条件满足而无法判定二阶或更高阶条件的正负情况时，单变量最优化时意味着出现“拐点”，但此时更复杂，还可能是“鞍点”，即某一截面上是极大值而另一截面上是极小值。

例 4. 完全竞争市场环境下的资本需求和劳动力需求

还以厂商利润最大化问题为例，增加有形资本作为选择变量。但注意 $Q_s = F(K_d, L_d)$ 并非约束条件，因为该方程无意描述两个选择变量 K_d 和 L_d 之间此消彼长的关系。由此，两个选择变量的无约束最优化问题为：

$$
\max_{\{K_d, L_d\}\rightleftarrows Q_s} \Pi \equiv PF(K_d, L_d) - RPK_d - WL_d.
$$

一阶必要条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}K_d} = PF_K(K_d, L_d) - RP = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}L_d} = PF_L(K_d, L_d) - W \quad = 0. \end{cases}$$

劳动的名义工资是 W，劳动的边际产出（边际物质产品）是 $F_L(K_d, L_d)$；资本的租金率 $R = r + \delta = i - \pi_e + \delta$ 谓之资本使用的边际成本（其中 $r = i - \pi_e$ 表示实际利率，π_e 是预期通货膨胀，δ 是资本折旧率，**例 12-1** 等处还将解释其由来），而 $F_K(K_d, L_d)$ 是资本的边际产出。

二阶条件可由 Hessian 矩阵给出：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{LK} & \Pi_{LL} \end{bmatrix}}_{\text{Hessian 矩阵}} \Rightarrow \begin{cases} \text{一阶领导主子式：} \begin{vmatrix} \Pi_{KK} \end{vmatrix} = PF_{KK} < 0, \\ \\ \text{二阶领导主子式：} \begin{vmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{LK} & \Pi_{LL} \end{vmatrix} = P^2(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2) > 0. \end{cases}$$

虽然 F_{KL} 和 F_{LK} 的交叉偏导顺序有所不同，但只要其是连续的，则根据 Young 定理有 $F_{KL} = F_{LK}$。

当 $F_{KK} < 0$ 时，根据 $F_{KK}F_{LL} > F_{KL}^2$ 可知，$F_{LL} < 0$。是故，此最优化问题的二阶充分条件为：

$$\begin{cases} F_{KK} < 0, \\ F_{LL} < 0, \\ F_{KK}F_{LL} > F_{KL}^2. \end{cases}$$

可见，关于生产函数某些常见性质的假设是为使利润取得极大值；若生产函数为凹曲线（二阶导处处小于 0），则极大值亦是最大值。同于单变量极大值的二阶条件，双变量时资本和劳动这两个要素的边际产出的变化率递减亦是极大值的一组充分条件，但额外有“相同要素变化率的乘积大于交叉要素变化率的乘积”这一取得极值的充分条件。之所以新增该条件，是因一种要素的改变不仅影响其自身的边际产出还将影响另一种要素的边际产出。假设 $F_{KL} = F_{LK}$ 相较于 F_{KK} 及 F_{LL} 更大，即一种要素变动（比如资本）对另一要素（即劳力）的边际产出的影响甚于对该要素（i.e., 资本）自身的边际产出的影响，尽管 $F_{KK} < 0$，但这会使得 F_K 净增加，而非递减，此时增加资本减少劳动仍可以提高利润，是故 $F_{KK}F_{LL} > F_{KL}^2$ 是取得极值的另一充分条件 **[SilberbergSuen2001]**。

例 5. 垄断竞争市场环境下两个产品的最优定价

设具有一定垄断竞争力的厂商对旗下两产品的售价分别是 P_1 和 P_2，市场对这两产品的需求函数分别是：

$$\left.\begin{aligned} Q_{1d} &= a - bP_1 + P_2, \\ Q_{2d} &= \alpha - \beta P_2 + P_1. \end{aligned}\right\} \quad \text{vs.} \quad \begin{cases} \log Q_{1d} = \log Q - \epsilon \log P_1 + \epsilon \log P, \\ \log Q_{2d} = \log Q - \epsilon \log P_2 + \epsilon \log P. \end{cases}$$

可对这两组需求曲线作一比较：左侧是 ad-hoc 形式，右侧是**例** 3 中拎出来的两种产品的需求曲线（后面会介绍它可基于家庭部门支出给定时最大化一篮子消费品严格推导而来因而具有微观基础）。右侧两边取对数后左右两侧的需求曲线有很大的相似性，总价格水平 P 中包含 P_2 等产品 1 以外的产品价格。右侧不同产品对应的是不同厂商，而要计算的是某一厂商的利润最大化，因此仅有其价格自身是选择变量；而左侧两个产品同属于一个厂商，要计算的也是该厂商的利润最大化，因此价格 1 和价格 2 都是选择变量。但总归，从需求函数中可知，两个商品的销售情况会相互影响，某一商品售价高则需求量低，但另一商品售价高其需求量也高，这说明两者皆为正常商品，且彼此存在可替代性，尤其，右侧给出了不会趋近无穷大的替代弹性为 ϵ。

垄断竞争厂商的利润定义为总收益减总成本，即

$$\overbrace{\Pi}^{\text{总利润}} \equiv \overbrace{\mathcal{R}(P_1, P_2)}^{\text{总收益}} - \overbrace{C(P_1, P_2)}^{\text{总成本}}.$$

总收益为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(P_1, P_2) &= P_1 Q_{1d} + P_2 Q_{2d}, \\ &= P_1(a - bP_1 + P_2) + P_2(\alpha - \beta P_2 + P_1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= aP_1 - bP_1^2 + P_1P_2 + \alpha P_2 - \beta P_2^2 + P_1P_2,\\
&= aP_1 - bP_1^2 + \alpha P_2 - \beta P_2^2 + 2P_1P_2.
\end{aligned}
$$

此处忽略了对要素市场的讨论，可简单假设一个总成本函数：

$$
\begin{aligned}
C(P_1,P_2) &= Q_{1d}^2 + Q_{1d}Q_{2d} + Q_{2d}^2,\\
&= (a-bP_1+P_2)^2 + (a-bP_1+P_2)(\alpha-\beta P_2+P_1) + (\alpha-\beta P_2+P_1)^2,\\
&= (a^2+b^2P_1^2+P_2^2-2abP_1+2aP_2-2bP_1P_2)\\
&\quad + (a\alpha - a\beta P_2 + aP_1 - b\alpha P_1 + b\beta P_1P_2 - bP_1^2 + \alpha P_2 - \beta P_2^2 + P_1P_2)\\
&\quad + (\alpha^2+\beta^2P_2^2+P_1^2-2\alpha\beta P_2+2\alpha P_1-2\beta P_1P_2),\\
&= (a^2+a\alpha+\alpha^2) + (-2ab+a-b\alpha+2\alpha)P_1 + (2a-a\beta+\alpha-2\alpha\beta)P_2\\
&\quad + (b^2-b+1)P_1^2 + (1-\beta+\beta^2)P_2^2 + (-2b+b\beta+1-2\beta)P_1P_2.
\end{aligned}
$$

从而得到目标函数：

$$
\max_{\{P_1,P_2\}} \Pi = -(a^2+a\alpha+\alpha^2) + (2ab+b\alpha-2\alpha)P_1 + (a\beta+2\alpha\beta-2a)P_2 - (1+b^2)P_1^2 - (1+\beta^2)P_2^2 + (1+2b-b\beta+2\beta)P_1P_2.
$$

一阶必要条件为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi}{\partial P_1} &= (2ab+b\alpha-2\alpha) - 2(1+b^2)P_1 + (1+2b-b\beta+2\beta)P_2 = 0,\\
\frac{\partial\Pi}{\partial P_2} &= (a\beta+2\alpha\beta-2a) - 2(1+\beta^2)P_2 + (1+2b-b\beta+2\beta)P_1 = 0.
\end{aligned}
$$

重新排列：

$$
\left.\begin{aligned}
2(1+b^2)P_1 - (1+2b-b\beta+2\beta)P_2 &= b\alpha+2ab-2\alpha,\\
-(1+2b-b\beta+2\beta)P_1 + 2(1+\beta^2)P_2 &= a\beta+2\alpha\beta-2a.
\end{aligned}\right\}
\quad \text{vs.} \quad
\left\{\begin{aligned}
F^1 &\equiv 2(1+b^2)P_1 - (1+2b-b\beta+2\beta)P_2 - b\alpha - 2ab + 2\alpha = 0,\\
F^2 &\equiv -(1+2b-b\beta+2\beta)P_1 + 2(1+\beta^2)P_2 - a\beta - 2\alpha\beta + 2a = 0.
\end{aligned}\right.
$$

写成矩阵形式：

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 2(1+b^2) & -(1+2b-b\beta+2\beta)\\ -(1+2b-b\beta+2\beta) & 2(1+\beta^2)\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}
\underbrace{\begin{bmatrix} P_1\\ P_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b\alpha+2ab-2\alpha\\ a\beta+2\alpha\beta-2a\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}
\quad \text{vs.} \quad
\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial P_1} & \frac{\partial F^1}{\partial P_2}\\ \frac{\partial F^2}{\partial P_1} & \frac{\partial F^2}{\partial P_2}\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}
\underbrace{\begin{bmatrix} P_1\\ P_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b\alpha+2ab-2\alpha\\ a\beta+2\alpha\beta-2a\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}
$$

若 Jacobi 系数矩阵 $\mathbf{J} \neq 0$，则矩阵求逆或 Cramer 法则皆可求解内生变量 P_1 和 P_2（目标均衡值），由此可得两个商品的最优售价（合意定价）：

$$
\xRightarrow[\text{整体求解}]{\text{矩阵求逆}}
\begin{bmatrix} P_1^\circ\\ P_2^\circ\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2(1+b^2) & -(1+2b-b\beta+2\beta)\\ -(1+2b-b\beta+2\beta) & 2(1+\beta^2)\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix} b\alpha+2ab-2\alpha\\ a\beta+2\alpha\beta-2a\end{bmatrix};
$$

或

$$
\xRightarrow[\text{逐个求解}]{\text{Cramer 法则}}
\begin{cases}
P_1^\circ = \dfrac{\begin{vmatrix} b\alpha + 2ab - 2\alpha & -(1+2b-b\beta+2\beta) \\ a\beta + 2\alpha\beta - 2a & 2(1+\beta^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1+b^2) & -(1+2b-b\beta+2\beta) \\ -(1+2b-b\beta+2\beta) & 2(1+\beta^2) \end{vmatrix}}, \\[3em]
P_2^\circ = \dfrac{\begin{vmatrix} 2(1+b^2) & b\alpha + 2ab - 2\alpha \\ -(1+2b-b\beta+2\beta) & a\beta + 2\alpha\beta - 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1+b^2) & -(1+2b-b\beta+2\beta) \\ -(1+2b-b\beta+2\beta) & 2(1+\beta^2) \end{vmatrix}}.
\end{cases}
$$

下一章聚焦均衡问题时还会再介绍矩阵代数在线性系统均衡求解上的应用，此处用消元法亦可求解。值得一提的是，上述求解过程将目标函数转换成只含价格的这组选择变量，但也可像求解前面例 3 的方法一，将需求函数写成反需求函数，将目标函数写成只含产品需求这组变量后再将其作为选择变量，求解出产品的合意需求后再根据反需求函数求解出每个产品的合意定价，本题而言，此思路其实还更为简便 [**ChiangWainwright2005**]。

二阶充分条件为：

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \Pi_{P_1P_1} & \Pi_{P_1P_2} \\ \Pi_{P_2P_1} & \Pi_{P_2P_2} \end{bmatrix}}_{\text{Hessian 矩阵}} \Rightarrow
\begin{cases}
\text{一阶领导主子式：} \left|\Pi_{P_1P_1}\right|, \\[2em]
\text{二阶领导主子式：} \begin{vmatrix} \Pi_{P_1P_1} & \Pi_{P_1P_2} \\ \Pi_{P_2P_1} & \Pi_{P_2P_2} \end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

即

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial P_1} &= (2ab + b\alpha - 2\alpha) - 2(1+b^2)P_1 + (1+2b-b\beta+2\beta)P_2 = 0, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial P_2} &= (a\beta + 2\alpha\beta - 2a) - 2(1+\beta^2)P_2 + (1+2b-b\beta+2\beta)P_1 = 0.
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\Pi_{P_1P_1} &= -2(1+b^2), \\
\Pi_{P_1P_2} &= 1+2b-b\beta+2\beta, \\
\Pi_{P_2P_2} &= -2(1+\beta^2), \\
\Pi_{P_2P_1} &= 1+2b-b\beta+2\beta.
\end{aligned}
$$

其中一阶领导主子式 $-2(1+b^2) < 0$，二阶领导主子式即 Hessian 行列式本身 $4(1+b^2)(1+\beta^2)-(1+2b-b\beta+2\beta)^2$，若要确保所求为极大值（凹或拟凹为最大值），二阶领导主子式应为正，即 $4(1+b^2)(1+\beta^2) > (1+2b-b\beta+2\beta)^2$。

II. 多个决策变量

下面讨论 $m \geq 3$ 个选择变量的无约束最优化问题。设目标函数为 $O = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$，全微分后为 $\mathrm{d}O = f_1\mathrm{d}x_1 + f_2\mathrm{d}x_2 + f_3\mathrm{d}x_3 + \cdots + f_m\mathrm{d}x_m$，其中 f_j 表示函数对各选择变量 x_j 的偏导，正整数 $j \in [1, m]$。同于双变量一节中对一阶必要条件的讨论，在取得极值点处，选择变量的变动 ($\mathrm{d}x_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, m$) 不会引起 O 的变动 ($\mathrm{d}O = 0$)。用符号 ∇ 表示函数对各元素求偏导的集合（梯度向量），即

$$
\nabla f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = \mathbf{0},
$$

这便得到了多变量无约束最优化问题取得极值的一阶必要条件。

双变量已经是多变量了，因此更多变量的无约束最优化问题的二阶及以上的高阶必要条件或充分条件自然仍是与单变量时的讨论步骤类似。简单起见，只列示 3 选择变量的函数围绕 $(x_1 = x_{1o}, x_2 = x_{2o}, x_3 = x_{3o})$ 作二阶 Taylor 展开，在该点处的二阶偏导标记为 $f^o_{x_ix_j}, i = \{1,2,3\}, j = \{1,2,3\}$。将一阶必要条件代入后有：

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) - f(x_{1o}, x_{2o}, x_{3o}) &= f^o_{x_1x_1}(x_1 - x_{1o})^2 + f^o_{x_1x_2}(x_1 - x_{1o})(x_2 - x_{2o}) + f^o_{x_1x_3}(x_1 - x_{1o})(x_3 - x_{3o}) \\
&\quad + f^o_{x_2x_1}(x_2 - x_{2o})(x_1 - x_{1o}) + f^o_{x_2x_2}(x_2 - x_{2o})^2 + f^o_{x_2x_3}(x_2 - x_{2o})(x_3 - x_{3o}) \\
&\quad + f^o_{x_3x_1}(x_3 - x_{3o})(x_1 - x_{1o}) + f^o_{x_3x_2}(x_3 - x_{3o})(x_2 - x_{2o}) + f^o_{x_3x_3}(x_3 - x_{3o})^2, \\
&= \underbrace{\text{留给读者}}_{\text{配平方}};
\end{aligned}
$$

$$\overset{?}{=}\overbrace{\begin{bmatrix} x_1-x_{1o} & x_2-x_{2o} & x_3-x_{3o}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} f^o_{x_1x_1} & f^o_{x_1x_2} & f^o_{x_1x_3}\\ f^o_{x_2x_1} & f^o_{x_2x_2} & f^o_{x_2x_3}\\ f^o_{x_3x_1} & f^o_{x_3x_2} & f^o_{x_3x_3}\end{bmatrix}}_{\text{Hessian 矩阵}}\begin{bmatrix} x_1-x_{1o}\\ x_2-x_{2o}\\ x_3-x_{3o}\end{bmatrix}}^{\text{二次型}}.$$

前面对于 2×2 维的 Hessian 行列式，并未引出领导主子式的概念。而 3×3 及更高维的 Hessian 行列式，各阶顺序主子式中的头一个即为领导主子式，这是我们关注的对象。

对于 3×3 维的 Hessian 行列式的各阶领导主子式皆为正有极小值，即

$$\text{极小值}\left\{\begin{array}{ll}\text{一阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1}\end{vmatrix}>0,\\ \text{且} & \\ \text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1} & f^o_{x_1x_2}\\ f^o_{x_2x_1} & f^o_{x_2x_2}\end{vmatrix}>0,\\ \text{且} & \\ \text{三阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1} & f^o_{x_1x_2} & f^o_{x_1x_3}\\ f^o_{x_2x_1} & f^o_{x_2x_2} & f^o_{x_2x_3}\\ f^o_{x_3x_1} & f^o_{x_3x_2} & f^o_{x_3x_3}\end{vmatrix}>0.\end{array}\right\}\text{正定}$$

对于 3×3 维 Hessian 行列式的各阶领导主子式先负再正又负有极大值，即

$$\text{极大值}\left\{\begin{array}{ll}\text{一阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1}\end{vmatrix}<0,\\ \text{且} & \\ \text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1} & f^o_{x_1x_2}\\ f^o_{x_2x_1} & f^o_{x_2x_2}\end{vmatrix}>0,\\ \text{且} & \\ \text{三阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} f^o_{x_1x_1} & f^o_{x_1x_2} & f^o_{x_1x_3}\\ f^o_{x_2x_1} & f^o_{x_2x_2} & f^o_{x_2x_3}\\ f^o_{x_3x_1} & f^o_{x_3x_2} & f^o_{x_3x_3}\end{vmatrix}<0.\end{array}\right\}\text{负定}$$

例 6. 完全竞争市场环境下对有形资本、人力资本和劳动力的需求

前面**例** 4 中隐含了所有劳动者是相同的生产技术或相同的工作时间。但劳动者因教育、培训、干中学等会形成有效单位劳动存量，谓之人力资本，用 H 来表示。由此，三个选择变量的无约束最优化问题为：

$$\max_{\{K_d,H_d,L_d\}}\ \Pi\equiv PF(K_d,H_d,L_d)-RPK_d-W_HH_d-W_LL_d.$$

一阶必要条件：

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}K_d}&=PF_K(K_d,H_d,L_d)-RP=0,\\ \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}H_d}&=PF_H(K_d,H_d,L_d)-W_H=0,\\ \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}L_d}&=PF_L(K_d,H_d,L_d)-W_L=0.\end{aligned}\right.$$

有效劳动的名义工资是 W_H，有效劳动的边际产出（边际物质产品）是 $F_H(K_d,H_d,L_d)$。

二阶条件可由 Hessian 矩阵给出：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\Pi_{KK} & \Pi_{KH} & \Pi_{KL}\\ \Pi_{HK} & \Pi_{HH} & \Pi_{HL}\\ \Pi_{LK} & \Pi_{LH} & \Pi_{LL}\end{bmatrix}}_{\text{Hessian 矩阵}} \Rightarrow \begin{cases}\text{一阶领导主子式：}\left|\Pi_{KK}\right| = PF_{KK} < 0,\\ \text{二阶领导主子式：}\begin{vmatrix}\Pi_{KK} & \Pi_{KH}\\ \Pi_{HK} & \Pi_{HH}\end{vmatrix} = P^2(F_{KK}F_{HH} - F_{KH}^2) > 0,\\ \text{三阶领导主子式：}\begin{vmatrix}\Pi_{KK} & \Pi_{KH} & \Pi_{KL}\\ \Pi_{HK} & \Pi_{HH} & \Pi_{HL}\\ \Pi_{LK} & \Pi_{LH} & \Pi_{LL}\end{vmatrix} \gtreqless 0?\end{cases}$$

由前述分析可知二阶领导主子式为正是前提条件，在此基础上，奇数阶领导主子式同号，即

$$\text{三阶领导主子式：}\begin{vmatrix}\Pi_{KK} & \Pi_{KH} & \Pi_{KL}\\ \Pi_{HK} & \Pi_{HH} & \Pi_{HL}\\ \Pi_{LK} & \Pi_{LH} & \Pi_{LL}\end{vmatrix} = P^3(F_{KK}F_{HH}F_{LL}+2F_{KH}F_{HL}F_{LK}-F_{KK}F_{HL}^2-F_{LL}F_{KH}^2-F_{HH}F_{KL}^2) < 0,$$

此时有极大值。

综上，不难发现：

(1) 一阶领导主子式即只有 Hessian 行列的左上方第一个元素，二阶领导主子式的元素为 Hessian 行列式的左上方四个，而三阶领导主子式即为 Hessian 行列式本身。这是 3×3 的 Hessian 行列式的各阶领导主子式，$m\times m$ 的各阶领导主子式依此类推；

(2) 对于 $m\times m$ 的 Hessian 行列式：有极小值时各阶领导主子式皆为正，而有极大值时各阶领导主子式负正交替；更确切地说，偶数阶领导主子式总为正，奇数阶领导主子式为正时有极小值、为负时有极大值。

1.1.2 有约束最优化

上一节选择变量之间不会彼此限制，对某个选择变量的决策不会对其他选择变量产生影响，因此又被称为自由最优化。本节开始，考虑存在各种约束形式的最优化问题，包括等式约束、非负约束和不等式约束。不难想象，约束会使定义域变小，目标函数的值域自然也会变小，因此求极大值时约束极值总会小于（或恰巧等于）自由极值。[3]

1.1.2.1 决策变量之间的等式约束

I. 双变量单个等式约束

设双变量单个等式约束的目标函数和约束条件分别为：

$$\underset{\min}{\overset{\max}{\longleftrightarrow}} O = f(x,y),$$
$$\text{s.t.}\quad g(x,y) = z,$$

其中，x 和 y 是选择变量（自变量），O 是极值（因变量），f 和 g 都是函数符号，z 是常数（固定的数）或参数（可变的数）。约束条件也可以写成 $g(x,y,z) = 0$ 或令 $z = 0$ 简化为 $g(x,y) = 0$。

i) 消元法

等式约束最优化问题的一个求解方向是通过约束条件解出某个或某些个选择变量的函数，将其代入目标函数，由此等式约束最优化转变成了自由最优化问题，目标函数中的选择变量在降维后，直接应用无约束最优化的必要和充分条件即可。

[3] 以双变量等式约束最优化为例，若有两个线性约束方程且相交于一点，则这两个约束反倒排除了选择变量的其他可能性，约束最优化问题意义不大，因此约束方程的数量应少于选择变量的数量，以对选择变量有切实的限制性作用。

ii) 微分法

从几何图形上来看，最优值取自预算约束线与等值目标线（无差异曲线）的切点处，即在该点，预算约束线的斜率与无差异曲线的斜率相同。其理论依据是：

对于双变量无约束最优化问题 $O = f(x, y)$，全微分后有 $\mathrm{d}O = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y$，极值点处必有 $f_x = 0 = f_y$，因此 $\mathrm{d}O = 0$。加入约束条件 $g(x, y) = z$ 后目标函数仍可全微分，但 $f_x = 0 = f_y$ 无需满足，只要仍有 $\mathrm{d}O = 0$；$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 也不再任意可变，变动范围缩小至直线 $g_x \mathrm{d}x + g_y \mathrm{d}y = 0$ 上。满足上述两条件只需：

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y} \quad \overset{\text{或}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}.$$

iii) 乘数法

Lagrange 乘数法的推导也可从约束条件转变到无约束条件的视角。从约束条件出发有：

$$\begin{aligned}
& g(x, y) = z, \\
\xrightarrow[g_y \neq 0]{g_y \text{存在}} \quad & \mathrm{d}y = -\frac{g_x}{g_y}\mathrm{d}x, \\
\Rightarrow \quad & y = y(x), \\
\Rightarrow \quad & O = f[x, y(x)].
\end{aligned}$$

这便将约束条件纳入了目标函数。然后在点 $x = x_o$ 附近二阶 Taylor 展开：

$$f[x, y(x)] - f[x_o, y(x_o)] = \overbrace{\underbrace{\left\{ \underbrace{f_x^o [x, y(x)]}_{\text{一阶偏导}} + \underbrace{\overbrace{f_y^o [x, y(x)]}^{a} \overbrace{y_x^o (x)}^{b}}_{\text{一阶复合求偏导}} \right\} (x - x_o)}_{\text{线性近似}} + \frac{(\overbrace{f_{xx}^o}^{\text{偏导}} + \overbrace{f_{xy}^o y_x^o}^{\text{复合求导}}) + [\overbrace{(f_{yx}^o + f_{yy}^o y_x^o)}^{a'} \overbrace{y_x^o}^{b} + \overbrace{f_y^o}^{a} \overbrace{y_{xx}^o}^{b'}]}{2} (x - x_o)^2}^{\text{非线性近似}}.$$

满足等式约束的一阶必要条件：

$$\underbrace{\overbrace{\underbrace{0 = f_x^o + f_y^o y_x^o}_{\frac{\mathrm{d}f[x, y(x)]}{\mathrm{d}x}\big|_{x=x_0}}}^{\text{降维后最优化的一阶条件}} \xRightarrow[z = g(x_o, y_o) \Rightarrow y_x^o = -\frac{g_x^o}{g_y^o}]{y_x^o \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_o}} \left\{ \begin{aligned} f_x^o - f_y^o \frac{g_x^o}{g_y^o} &= 0 \\ g(x_o, y_o) &= z \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\frac{f_{y_o}}{g_{y_o}} \equiv -\lambda} \left\{ \begin{aligned} f_x^o + \lambda g_x^o &= 0 \\ f_y^o + \lambda g_y^o &= 0 \\ g(x_o, y_o) &= z \end{aligned} \right\} \xLeftarrow[y = y_o]{x = x_o} \overbrace{\left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{aligned} \right\} \Leftarrow \mathcal{L} \equiv f(x, y) + \lambda[g(x, y) - z]}^{\text{构造 Lagrange 函数直面双变量等式约束最优化的一阶条件}}}_{\text{左右两端完全等价}}.$$

这便构造了 Lagrange 函数，λ 为 Lagrange 乘子。

将一阶必要条件代入上述非线性展开式，则有

$$\begin{aligned}
& f[x, y(x)] - f[x_o, y(x_o)] \\
& \quad = 0 + (f_{xx}^o + f_{xy}^o y_x^o) + [(f_{yx}^o + f_{yy}^o y_x^o) y_x^o + f_y^o y_{xx}^o], \\
& \quad = f_{xx}^o + 2 f_{xy}^o y_x^o + f_{yy}^o (y_x^o)^2 + f_y^o y_{xx}^o \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \quad \text{极大值;} \\ > 0 & \Leftrightarrow \quad \text{极小值.} \end{cases}
\end{aligned}$$

这等价于：

$$\begin{aligned}
& f_{xx}^o + 2 f_{xy}^o y_x^o + f_{yy}^o (y_x^o)^2 + f_y^o y_{xx}^o, \\
\xRightarrow[y_{xx}^o = ?]{y_x^o = -\frac{g_x^o}{g_y^o}} \quad & = f_{xx}^o - 2 f_{xy} \frac{g_x^o}{g_y^o} + f_{yy} \left(\frac{g_x^o}{g_y^o} \right)^2 + f_y^o y_{xx}^o,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{xx}^o - 2f_{xy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o} + f_{yy}^o \left(\frac{g_x^o}{g_y^o}\right)^2 + f_y^o \left[-\frac{g_{xx}^o}{g_y^o} + 2\frac{g_{xy}^o g_x^o}{(g_y^o)^2} - \frac{g_{yy}^o (g_x^o)^2}{(g_y^o)^3}\right],\\
&= f_{xx}^o - 2f_{xy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o} + f_{yy}^o \left(\frac{g_x^o}{g_y^o}\right)^2 - \lambda \left[-g_{xx}^o + 2\frac{g_{xy}^o g_x^o}{g_y^o} - \frac{g_{yy}^o (g_x^o)^2}{(g_y^o)^2}\right],\\
&= \left[f_{xx}^o (g_y^o)^2 - 2f_{xy}^o g_x^o g_y^o + f_{yy}^o (g_x^o)^2 + \lambda g_{xx}^o (g_y^o)^2 - 2\lambda g_{xy}^o g_x^o g_y^o + \lambda g_{yy}^o (g_x^o)^2\right] \cancel{\frac{1}{(g_y^o)^2}},\\
&= \left(f_{xx}^o + \lambda g_{xx}^o\right)(g_y^o)^2 - 2\left(f_{xy}^o + \lambda g_{xy}^o\right) g_x^o g_y^o + \left(f_{yy}^o + \lambda g_{yy}^o\right)(g_x^o)^2,\\
&= \mathcal{L}_{xx}^o (g_y^o)^2 - 2\mathcal{L}_{xy}^o g_x^o g_y^o + \mathcal{L}_{yy}^o (g_x^o)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\mathcal{L}_{xx}^o (g_y^o)^2] \times 1^2 - 2(\mathcal{L}_{xy}^o g_x^o g_y^o) \times 1 \times 1 + [\mathcal{L}_{yy}^o (g_x^o)^2] \times 1^2,\\
&= \underbrace{\quad ? \quad}_{\text{无需配平方}};
\end{aligned}
$$

$$
\overset{\text{或}}{=} \overbrace{-\begin{bmatrix} ? & ? & ? \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & g_x^o & g_y^o \\ g_x^o & \mathcal{L}_{xx}^o & \mathcal{L}_{xy}^o \\ g_y^o & \mathcal{L}_{yx}^o & \mathcal{L}_{yy}^o \end{bmatrix}}_{\text{Hessian 加边矩阵}} \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}}^{\text{无需二次型}},
$$

$$
= -\overbrace{\begin{vmatrix} 0 & g_x^o & g_y^o \\ g_x^o & \mathcal{L}_{xx}^o & \mathcal{L}_{xy}^o \\ g_y^o & \mathcal{L}_{yx}^o & \mathcal{L}_{yy}^o \end{vmatrix}}^{\text{Hessian 加边行列式}} \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad f[x, y(x)] \gtrless f[x_o, y(x_o)] \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & g_x^o & g_y^o \\ g_x^o & \mathcal{L}_{xx}^o & \mathcal{L}_{xy}^o \\ g_y^o & \mathcal{L}_{yx}^o & \mathcal{L}_{yy}^o \end{vmatrix}}^{\text{Hessian 加边行列式}} \lessgtr 0.
$$

可见，不算所加的这个“边”的维度，2×2 的 Hessian 加边行列式小于 0 时目标函数有极小值，Hessian 加边行列式大于 0 时有极大值。[4]

例 7. 完全竞争市场环境下对不同消费品的需求决策

设有 C_1 和 C_2 两种商品可供消费，相应售价 P_1、P_2 及名义收入PQ对家庭部门而言外生。效用函数和预算

[4]此为双变量等式约束最优化问题的二阶充分条件，推导过程较为繁琐，有两处稍作补充：

①

$$
\begin{cases}
\dfrac{f_{y_o}}{g_{y_o}} \equiv -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} = f(x,y) + \lambda[g(x,y) - z] \quad \Leftrightarrow \quad z = g(x,y);\\
\dfrac{f_{y_o}}{g_{y_o}} \equiv +\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} = f(x,y) + \lambda[z - g(x,y)] \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y) = z.
\end{cases}
$$

②

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O} &= f[x, y(x)],\\
f_x^o &= f_x^o[x, y(x)] + f_y^o[x, y(x)] y_x^o;\\
y_x^o &= -\frac{g_x^o[x, y(x)]}{g_y^o[x, y(x)]},\\
\Rightarrow \quad y_{xx}^o &= -\frac{1}{g_y^o}(g_{xx}^o + g_{xy}^o y_x^o) + (-g_x^o)[-(g_y^o)^{-2}(g_{yx}^o + g_{yy}^o y_x^o)],\\
&= -\frac{1}{g_y^o}\left(g_{xx}^o - g_{xy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o}\right) + (-g_x^o)\left[-(g_y^o)^{-2}\left(g_{yx}^o - g_{yy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o}\right)\right],\\
&= -\frac{1}{g_y^o}\left(g_{xx}^o - g_{xy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o}\right) + g_x^o (g_y^o)^{-2}\left(g_{yx}^o - g_{yy}^o \frac{g_x^o}{g_y^o}\right),\\
&= -\frac{g_{xx}^o}{g_y^o} + \frac{g_{xy}^o g_x^o}{(g_y^o)^2} + \frac{g_x^o g_{yx}^o}{(g_y^o)^2} - \frac{g_{yy}^o (g_x^o)^2}{(g_y^o)^3},\\
&= -\frac{g_{xx}^o}{g_y^o} + 2\frac{g_{xy}^o g_x^o}{(g_y^o)^2} - \frac{g_{yy}^o (g_x^o)^2}{(g_y^o)^3}.
\end{aligned}
$$

约束分别为：

$$\max_{C_1,C_2} U \equiv U(C_1,C_2),$$
$$\text{s.t.} \quad P_1C_1 + P_2C_2 = PQ \equiv M.$$

消元和构造 Lagrange 函数皆可求解，此题而言，微分法简便直观。从 C_1-C_2 的几何平面上易知最优解处为无差异曲线（能够产生相同效用水平的 C_1 和 C_2 的组合）和预算约束线的交点。

给定货币度量的名义收入 PQ 的预算约束线的斜率为：

$$\begin{aligned} & P_1\mathrm{d}C_1 + P_2\mathrm{d}C_2 = \mathrm{d}(PQ), \\ \Rightarrow \quad & P_1\mathrm{d}C_1 + P_2\mathrm{d}C_2 = 0, \\ \Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1} = \underbrace{-\frac{P_1}{P_2}}_{\text{等预算线的斜率}}. \end{aligned}$$

固定即期效用 U 的无差异曲线的斜率为：

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}U = U_1^o\mathrm{d}C_1 + U_2^o\mathrm{d}C_2, \\ \Rightarrow \quad & 0 = U_1^o\mathrm{d}C_1 + U_2^o\mathrm{d}C_2, \\ \Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1} = \underbrace{-\frac{U_1^o}{U_2^o}}_{\text{等效用曲线的斜率}}, \end{aligned}$$

其中，$U_i^o \equiv \frac{\partial U(\cdot)}{\partial C_i}, i = 1,2$，表示效用函数对消费品 1 和消费品 2 的一阶偏导并在最优决策处取导数值。

联立相切条件与预算约束：

$$\begin{cases} \overbrace{\overbrace{U_1^o/U_2^o}^{\text{边际替代率}} = \overbrace{P_1/P_2}^{\text{相对价格}}}^{\text{合并 Lagrange 函数对选择变量 } C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 的一阶条件}}, \\ \underbrace{P_1C_1 + P_2C_2 = PQ}_{\text{Lagrange 函数对选择变量 Lagrange 乘子的一阶条件}}. \end{cases}$$

由于 $U_1^o = U_1^o(C_1,C_2)$ 和 $U_2^o = U_2^o(C_1,C_2)$，因此若给出了效用函数的具体形式，则能解出合意的消费水平 C_1° 和 C_2°。后面章节将会讨论对具有一般函数形式的模型如何进行比较静态分析，即外生变量 P_1、P_1 和 PQ 的变化对合意消费选择束的定性影响。

二阶充分条件的写出仍可借助构造 Lagrange 函数 $\mathcal{L} \equiv U(C_1,C_2) + \lambda(PQ - P_1C_1 - P_2C_2)$ 及改写约束条件为 $g(C_1,C_2) \equiv P_1C_1 + P_2C_2 - PQ = 0$：

$$\begin{aligned} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & g_1^o & g_2^o \\ g_1^o & \mathcal{L}_{11}^o & \mathcal{L}_{12}^o \\ g_2^o & \mathcal{L}_{21}^o & \mathcal{L}_{22}^o \end{vmatrix}}^{\text{Hessian 加边行列式}} &= \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & U_{11}^o & U_{12}^o \\ P_2 & U_{21}^o & U_{22}^o \end{vmatrix}, \\ &= 2P_1P_2U_{12}^o - P_1^2U_{22}^o - P_2^2U_{11}^o, \\ &\equiv |\bar{H}| \gtreqless 0? \end{aligned}$$

其中，$g_i^o \equiv \frac{\partial g(\cdot)}{\partial C_i}, i = 1,2$ 表示预算约束曲线对消费品 1 和消费品 2 的偏导并在最优决策处取导数值；$\mathcal{L}_{ij}^o \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial C_{ij}}, i,j = \{1,2\}$ 表示 Lagrange 函数对消费品 1 和消费品 2 的二阶偏导及交叉偏导并在最优决策处取导数值；$U_{ij}^o \equiv \frac{\partial U(\cdot)}{\partial C_{ij}}, i,j = \{1,2\}$ 表示效用函数对消费品 1 和消费品 2 的二阶偏导及交叉偏导并在最优决策处取导数值。

上述二阶条件与无差异曲线的曲率（i.e., 斜率的斜率）密切相连，即

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1} = -\frac{U_1^o(C_1,C_2)}{U_2^o(C_1,C_2)} = \frac{P_1}{P_2}, \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}^2C_2}{\mathrm{d}C_1^2} = -\frac{\frac{\partial U_1^o(C_1,C_2(C_1))}{\partial C_1}U_2^o - U_1^o\frac{\partial U_2^o(C_1,C_2(C_1))}{\partial C_1}}{(U_2^o)^2}, \\
& = -\frac{\left(U_{11}^o + U_{12}\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1}\right)U_2^o - U_1^o\left(U_{21}^o + U_{22}\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1}\right)}{(U_2^o)^2}, \\
& = -\frac{\left(U_{11}^o - U_{12}\frac{P_1}{P_2}\right)U_2^o - U_1^o\left(U_{21}^o - U_{22}\frac{P_1}{P_2}\right)}{(U_2^o)^2}, \\
& = -\frac{\left(U_{11}^o - U_{12}\frac{P_1}{P_2}\right)U_2^o - \left(U_2^o\frac{P_1}{P_2}\right)\left(U_{21}^o - U_{22}\frac{P_1}{P_2}\right)}{(U_2^o)^2}, \\
& = \frac{\frac{P_1}{P_2}\left(U_{21}^o - U_{22}\frac{P_1}{P_2}\right) - \left(U_{11}^o - U_{12}\frac{P_1}{P_2}\right)}{U_2^o}, \\
& = \frac{\left[\frac{P_1}{P_2}\left(U_{21}^o - U_{22}\frac{P_1}{P_2}\right) - \left(U_{11}^o - U_{12}\frac{P_1}{P_2}\right)\right]P_2^2}{U_2^oP_2^2}, \\
& = \frac{P_1P_2U_{21}^o - P_1^2U_{22} - P_2^2U_{11}^o + P_1P_2U_{12}^o}{U_2^oP_2^2}, \\
& = \frac{2P_1P_2U_{12}^o - P_1^2U_{22} - P_2^2U_{11}^o}{U_2^oP_2^2}, \\
& = \frac{|\bar{H}| \gtreqless 0?}{U_2^oP_2^2 > 0} \gtreqless 0?
\end{aligned}
$$

当 $\frac{\mathrm{d}^2C_2}{\mathrm{d}C_1^2} > 0$ 时，无差异曲线严格凸，此时二阶条件也大于 0，目标函数有极大值。故此，等式约束的目标函数有极大值要求无差异曲线严格凸，但此为必要条件，因为二阶条件等于 0（无差异曲线与预算约束线相交于一条线段），此时有多个相交点，但也都是极值。

稍需留意的是，如果消费品 1 和消费品 2 的价格同时上涨或下跌相同幅度（相应地，收入也以相同幅度上涨或下跌），这对合意的消费结果不会有丝毫影响，因为预算约束本质上没有任何变化：

$$
\begin{aligned}
& (\lambda P_1)C_1 + (\lambda P_2)C_2 = \lambda(PQ), \\
\Rightarrow \quad & \cancel{\lambda}(P_1C_1 + P_2C_2) = \cancel{\lambda}(PQ), \\
\Rightarrow \quad & P_1C_1 + P_2C_2 = PQ.
\end{aligned}
$$

这意味着：

$$
\begin{cases}
\lambda^0C_1^* = C_1^*(P_1,P_2,M) = (\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda PQ); \\
\lambda^0C_2^* = C_2^*(P_1,P_2,M) = (\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda PQ).
\end{cases}
$$

上述最优消费需求方程具有零次齐次的特征；不妨将货币收入 PQ 等同于货币供给（原理可参考货币数量论：$MV = PQ$），这说明该消费需求方程指向了“货币中性”的经济学含义，即货币供给的增加，只带来同等幅度的价格上涨，但并没有对实际经济活动产生实际质影响。

若对本章的**例** 1 稍作修改，则得到与本例相似的双变量等式约束最优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{Q_{s1},Q_{s2}} \ & \Pi \equiv \mathcal{R}(Q_{s1},Q_{s2}) - C(Q_{s1},Q_{s2}), \\
\text{s.t.} \quad & Q_{s1} + Q_{s2} = \bar{Q}.
\end{aligned}
$$

因为了施加了生产配额 $\bar{Q}$ 的约束，选择变量 Q_{s1} 和 Q_{s2} 不再独立无关，自由最优转向约束最优。

例 8. 完全竞争市场环境下的消费需求和劳动供给

“代表性”家庭部门的效用函数为：

$$
\max_{C,L_s} \longleftrightarrow
\begin{cases}
\text{类型 1：} \quad U \equiv U(C, 1-L_s), & \begin{cases} U^o_C > 0,\ U^o_{1-L_s} > 0, \\ U^o_{CC} < 0,\ U^o_{1-L_s,1-L_s} < 0, \\ U^o_{C,1-L_s} > 0,\ U^o_{1-L_s,C} > 0. \end{cases} \\[2ex]
\text{类型 2：} \quad U \equiv U(C, L_s), & \begin{cases} U^o_C > 0,\ U^o_{L_s} < 0, \\ U^o_{CC} < 0,\ U^o_{L_s L_s} < 0, \\ U^o_{C L_s} < 0,\ U^o_{L_s C} < 0. \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \underbrace{P_e C}_{\text{预期支出}} = \underbrace{W L_s}_{\text{工资收入}},
$$

其中，C 表示消费需求，注意它与前面表示成本符号 C 的区别，此外，它没有像其他供需变量一样的下标 d，因为无需用类似 C_s 的符号来区分源自产出的消费供给；L_s 是为劳动供给，或者让休闲 $1-L_s$ 进入效用函数 U，P_e 是关于价格的瞬时预期或点预期，W 是名义工资，下标 C 和 L 表示效用函数对相应元素的一阶、二阶或交叉偏导（其或正或负的假设就是目标函数取得极大值的“近似”充分条件）。类型 1 和类型 2 的目标函数稍有不同，前者进入效用函数的是劳动后者是休闲，标准化劳动时间后，$1-L_s$ 即为休闲，它与消费一样，会带来正效用。

求解此两个选择变量一个等式约束的最优化问题，可用消元法或 Lagrange 乘数法。

i) 由于目标函数和约束条件都极为简单，因此消元法更便捷。以类型 1 的目标函数为例，代入由等式约束解出的的消费需求变量 $C = \frac{W}{P_e} L_s$，则转换为无约束的单变量最优化问题：

$$
\max_{L_s} U \equiv U\left(\overbrace{\underbrace{\frac{W}{P_e} L_s}}^{C}, 1 - L_s\right).
$$

一阶必要条件为：

$$
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}L_s} = U^o_C \frac{W}{P_e} - U^o_{1-L_s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\overbrace{\frac{U^o_{1-L_s}(C, 1-L_s)}{U^o_C(C, 1-L_s)}}}_{\text{边际替代率}} = \underbrace{\overbrace{\frac{W}{P_e}}}_{\text{预期实际工资}}.
$$

二阶充分条件为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}U/\mathrm{d}L_s)}{\mathrm{d}L_s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L_s}\left[\frac{W}{P_e} U_C\left(\overbrace{\underbrace{\frac{W}{P_e} L_s}}^{C}, 1 - L_s\right) - U_{1-L_s}\left(\overbrace{\underbrace{\frac{W}{P_e} L_s}}^{C}, 1 - L_s\right)\right], \\
&= \frac{W}{P_e}\left(\frac{W}{P_e} U^o_{CC} - U^o_{C,1-L_s}\right) - \left(\frac{W}{P_e} U^o_{1-L_s,C} - U^o_{1-L_s,1-L_s}\right), \\
&= \left(\frac{W}{P_e}\right)^2 U^o_{CC} + U^o_{1-L_s,1-L_s} - 2\frac{W}{P_e} U^o_{C,1-L_s} > 0.
\end{aligned}
$$

请读者注意并稍作思考：转化为无约束单个选择变量的最优问题时，根据此前分析的结论，二阶导大于 0 有极小值，为何此处二阶导大于 0 仍确定的是极大值？

ii) Lagrange 乘数法将得到相同结果。引入乘子 λ 构造新函数：

$$
\max_{C,L_s,\lambda} \mathcal{L} \equiv U(C, 1-L_s) + \lambda\left(\frac{W}{P_e} L_s - C\right).
$$

一阶必要条件为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C}&=U_C^o-\lambda=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L_s}&=-U_{1-L_s}^o+\lambda\frac{W}{P_e}=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}&=\frac{W}{P_e}L_s-C=0.\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned}\frac{U_{1-L_s}^o(C,1-L_s)}{U_C^o(C,1-L_s)}&=\frac{W}{P_e},\\ C&=\frac{W}{P_e}L_s.\end{aligned}\right.$$

根据构造的 Lagrange 函数及约束条件 $g(C,L_s)\equiv(W/P_e)L_s-C=0$，二阶充分条件为：

$$\begin{aligned}\overbrace{\begin{vmatrix}0 & g_C^o & g_L^o\\ g_C^o & \mathcal{L}_{CC}^o & \mathcal{L}_{CL}^o\\ g_L^o & \mathcal{L}_{LC}^o & \mathcal{L}_{LL}^o\end{vmatrix}}^{\text{Hessian 加边行列式}}&=\begin{vmatrix}0 & -1 & \frac{W}{P_e}\\ -1 & U_{CC}^o & -U_{C,1-L_s}^o\\ \frac{W}{P_e} & -U_{1-L_s,C}^o & U_{1-L_s,1-L_s}^o\end{vmatrix},\\ &=0+\frac{W}{P_e}U_{C,1-L_s}^o+\frac{W}{P_e}U_{1-L_s,C}^o-0-U_{1-L_s,1-L_s}^o-\left(\frac{W}{P_e}\right)^2U_{CC}^o,\\ &=2\frac{W}{P_e}U_{C,1-L_s}^o-\left(\frac{W}{P_e}\right)^2U_{CC}^o-U_{1-L_s,1-L_s}^o>0.\end{aligned}$$

注意：

(1) 效用函数为凹因此极值亦为最值。

(2) 无差异线曲线严格凸最值为最大值。

(3) 无约束条件时单变量最优化的二阶条件与等式约束条件下双变量最优化的二阶条件正负相反。

为便利看出**例** 7 和**例** 8 中的二阶条件在形式上完全一致，前者的下标还原成相关变量，后者的二阶条件两边同时乘以 P_e^2，列示如下：

$$\begin{cases}2P_1P_2U_{C1,C2}^o-P_1^2U_{C2,C2}^o-P_2^2U_{C1,C1}^o>0;\\ 2WP_eU_{C,1-L}^o-W^2U_{C,C}^o-P_e^2U_{1-L_s,1-L_s}^o>0.\end{cases}$$

不管选择两种不同消费品还是选择消费休闲，我们沿用 [**ChiangWainwright2005**] 的思路对此进行了详细讨论。一言以蔽之，它可确保无差异曲线严格凸向原点，从而与预算约束线有唯一交点，因此在约束条件下目标函数取得唯一最大值。

(4) 结合一阶条件和等式约束可求解选择变量（消费需求和劳动供给）的最优值，显式解依赖于具体形式的效用函数。

II. 多变量单个等式约束

设两个以上的多变量但只有单个等式约束的目标函数和约束条件分别为：

$$\begin{aligned}&\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ O=f(x_1,x_2,\ldots,x_m),\\ &\text{s.t.}\quad g(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0.\end{aligned}$$

当有 m 个选择变量一个等式约束时，最优化的充要条件的推导过程与两个选择变量一个等式约束时类似。现在可直接构造 Lagrange 函数，即

$$\mathcal{L}\equiv f(x_1,x_2,\ldots,x_m)+\lambda[0-g(x_1,x_2,\ldots,x_m)].$$

不算所加的这个“边”的维度，对于 $m\times m$ 维 Hessian 加边行列式的各阶领导主子式皆为正有极小值，即

$$
\text{极小值}\left\{\begin{array}{ll}
\text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o \end{vmatrix} < 0, \\
\text{且} & \\
\text{三阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o & g_{x_3}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o & \mathcal{L}_{x_1x_3}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_3}^o \\ g_{x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_1}^o & \mathcal{L}_{x_3x_2}^o & \mathcal{L}_{x_3x_3}^o \end{vmatrix} < 0, \\
\text{且} & \\
\text{四阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o & g_{x_3}^o & g_{x_4}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o & \mathcal{L}_{x_1x_3}^o & \mathcal{L}_{x_1x_4}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_3}^o & \mathcal{L}_{x_2x_4}^o \\ g_{x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_1}^o & \mathcal{L}_{x_3x_2}^o & \mathcal{L}_{x_3x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_4}^o \\ g_{x_4}^o & \mathcal{L}_{x_4x_1}^o & \mathcal{L}_{x_4x_2}^o & \mathcal{L}_{x_4x_3}^o & \mathcal{L}_{x_4x_4}^o \end{vmatrix} < 0, \\
\text{且} & \\
\vdots &
\end{array}\right\}\text{正定}
$$

不算所加的这个“边”的维度，对于 $m\times m$ 维 Hessian 加边行列式的各阶领导主子式先负再正又负有极大值，即

$$
\text{极大值}\left\{\begin{array}{ll}
\text{二阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o \end{vmatrix} > 0, \\
\text{且} & \\
\text{三阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o & g_{x_3}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o & \mathcal{L}_{x_1x_3}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_3}^o \\ g_{x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_1}^o & \mathcal{L}_{x_3x_2}^o & \mathcal{L}_{x_3x_3}^o \end{vmatrix} < 0, \\
\text{且} & \\
\text{四阶领导主子式:} & \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}^o & g_{x_2}^o & g_{x_3}^o & g_{x_4}^o \\ g_{x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_1}^o & \mathcal{L}_{x_1x_2}^o & \mathcal{L}_{x_1x_3}^o & \mathcal{L}_{x_1x_4}^o \\ g_{x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_1}^o & \mathcal{L}_{x_2x_2}^o & \mathcal{L}_{x_2x_3}^o & \mathcal{L}_{x_2x_4}^o \\ g_{x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_1}^o & \mathcal{L}_{x_3x_2}^o & \mathcal{L}_{x_3x_3}^o & \mathcal{L}_{x_3x_4}^o \\ g_{x_4}^o & \mathcal{L}_{x_4x_1}^o & \mathcal{L}_{x_4x_2}^o & \mathcal{L}_{x_4x_3}^o & \mathcal{L}_{x_4x_4}^o \end{vmatrix} > 0, \\
\text{且} & \\
\vdots &
\end{array}\right\}\text{负定}
$$

观察后不难发现：

(1) 多变量单个等式约束的 Hessian 加边行列式沿主对角线对称分布；

(2) 因等式约束有意义的起点是两个选择变量，故从 Hessian 加边行列式的二阶领导主子式开始看起。各阶领导主子式为负，是为正定，有极小值（与无约束时的情况相反，因为 Hessian 加边行列式除所加边之外，另带有一个负号）；

(3) 各阶 Hessian 加边行列式的领导主子式交替正负，更确切地说，是偶数阶 Hessian 加边行列式的领导主子式为正而奇数阶领导主子式为负，谓之负定，有极大值。

例 9. 产品市场垄断竞争环境下一篮子消费选择和总价格水平

注意，是企业部门在产品市场具有垄断竞争力，而家庭部门只能根据预算约束选择消费需求以最优化一篮子消费品的目标。关于消费总和的目标函数可以是连续加总，也可以是离散加总。

i) 连续加总

垄断竞争之下不同消费品之间并非完全可替代，存在一定的替代弹性（在比较静态分析章节的例题中对此术语将详细推导和进一步介绍），此处仅令其为 ϵ。消费者需要选择一篮子消费品，由于这篮子消费品是对称的，实际上给定预算约束求解单个变量的最优化问题。为了更好地比较，这里用到了最优化问题的对偶性质，即给定预算约束使一篮子商品尽可能多与给定一篮子商品使支出尽可能少将同等推出最优化的一阶条件。这组对偶的最优化问题分别为：

$$
\begin{aligned}
&\max_{C_i} \ \overbrace{C \equiv \left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}^{\text{Dixit-Stiglitz 加总的 CES 函数}}, \quad \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} \quad && \min_{C_i} \ \overbrace{PQ = PC}^{Q=C+\cancel{I+G+\delta K}} = \textstyle\int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i, \\
&\text{s.t.} \quad \textstyle\int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i \le PQ = PC. && \text{s.t.} \quad \left(\textstyle\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \ge C.
\end{aligned}
$$

CES 指的是常替代弹性，即不同消费品之间的替代弹性 ϵ 为常数，对其更细致全面的介绍留待第三章。产品市场的均衡条件（亦即国民收入恒等式）为 $Q = C$，总收入 Q 是给定的资源禀赋，投资、政府支出和折旧等被省略，但在稍后介绍古典模型和 Keynes 模型时将一定程度的恢复。这里似乎提前遇到了不等式约束问题。但经济学中有 Inada 假设，这可确保 $C_i > 0$，排除了角点解，因此预算约束取等号（约束是紧的）。关于不等式约束转换成等式约束的详细讨论留待稍后，此处读者略有印象即可。是故，直接用 Lagrange 乘子法求解：

$$
\mathcal{L}^{\min} = \int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i + P\left[C - \left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right].
$$

$$
\begin{aligned}
\xRightarrow{\text{一阶条件}} \quad & 0 = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}^{\min}}{\mathrm{d}C_i}, \\
\Rightarrow \quad & P_i = P\frac{\epsilon}{\epsilon-1}\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}-1} \frac{\epsilon-1}{\epsilon} C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}-1}, \\
\Rightarrow \quad & P_i = P\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}-1} C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}-1}, \\
\Rightarrow \quad & P_i = P\left[\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}} C_i^{\frac{-1}{\epsilon}}, \\
\Rightarrow \quad & \frac{P_i}{P} = \left(\frac{C_i}{C}\right)^{\frac{-1}{\epsilon}}, \\
\Rightarrow \quad & C_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} C.
\end{aligned}
$$

如此可得垄断竞争市场环境下对消费品 i 的需求曲线。将其代入目标函数可得总价格水平与单个商品 i 的价格的函数关系：

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i = PC, \\
\Rightarrow \quad & \int_0^1 P_i \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} C\right] \mathrm{d}i = PC, \\
\Rightarrow \quad & \int_0^1 P_i \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} \mathrm{d}i = P, \\
\Rightarrow \quad & P = \left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon} \mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}.
\end{aligned}
$$

以上求解的是支出最小化问题，依托 Lagrange 乘子的特定含义（一篮子消费 C 的价格），可以较快速地得

到对消费品 i 的需求曲线及总价格指数。假设预算为 M，也可以最大化一篮子消费品的视角求解对篮子中某种异质性产品 i 的需求函数：

$$\mathcal{L}^{\max}=\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+\lambda\left(M-\int_0^1 P_iC_i\mathrm{d}i\right).$$

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow{\text{一阶条件}} && \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}^{\max}}{\mathrm{d}C_i}=0,\\
&\Rightarrow && \frac{\epsilon}{\epsilon-1}\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}-1}\frac{\epsilon-1}{\epsilon}C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}-1}-\lambda P_i=0,\\
&\Rightarrow && \left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}}C_i^{-\frac{1}{\epsilon}}-\lambda P_i=0,\\
&\Rightarrow && \left[\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}C_i^{-\frac{1}{\epsilon}}-\lambda P_i=0,\\
&\Rightarrow && C^{\frac{1}{\epsilon}}C_i^{-\frac{1}{\epsilon}}-\lambda P_i=0,\\
&\Rightarrow && C_i^{-\frac{1}{\epsilon}}=\lambda P_iC^{-\frac{1}{\epsilon}} \quad \xLeftrightarrow{\text{对称}} \quad C_j^{-\frac{1}{\epsilon}}=\lambda P_jC^{-\frac{1}{\epsilon}},\\
&\Rightarrow && \left(\frac{C_i}{C_j}\right)^{-\frac{1}{\epsilon}}=\frac{P_i}{P_j},\\
&\Rightarrow && {\color{red}C_i}=\left(\frac{P_i}{P_j}\right)^{-\epsilon}C_j.
\end{aligned}$$

这是任意两种商品 i 和 j 之间的关联。在紧约束下，预算 M 为各消费品的支出总额：

$$\begin{aligned}
M&=\int_0^1 P_iC_i\mathrm{d}i,\\
&=\int_0^1 P_i{\color{red}\left(\frac{P_i}{P_j}\right)^{-\epsilon}C_{jt}}\mathrm{d}i,\\
&=CjP_j^{\epsilon}\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad C_j=\frac{MP_j^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i}\quad\xLeftrightarrow{\text{对称}}\quad C_i=\frac{MP_i^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i}.$$

$$\begin{aligned}
C&=\left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=\left(\int_0^1 C_j^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}j\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},\\
&=\left[\int_0^1\left(\frac{MP_j^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i}\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=M\left[\int_0^1\left(\frac{P_j^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i}\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=M\left[\int_0^1\frac{P_j^{1-\epsilon}}{\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}\mathrm{d}j\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},\\
&=M\left[\frac{\left(\int_0^1 P_j^{1-\epsilon}\mathrm{d}j\right)}{\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=M\left[\frac{\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)}{\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=M\left[\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{1-\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},\\
&=M\left[\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}=M\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}}.
\end{aligned}$$

定义一篮子消费的全部支出为总价格指数 $P\equiv M|_{C=1}$，则有：

$$C=M\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}},$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
1 &= P\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}},\\
\Rightarrow\quad P &= \left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& M = \int_0^1 P_i C_{id}\mathrm{d}i = \int_0^1 P_i\left(\frac{P_i}{P_j}\right)^{-\epsilon} C_j\mathrm{d}i,\\
& \quad = C_j P_j^{\epsilon}\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i = C_j P_j^{\epsilon}\left[\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}\right]^{1-\epsilon},\\
& \quad = C_j P_j^{\epsilon} P^{1-\epsilon},\\
\Rightarrow\quad & C_j = \frac{M}{P_j^{\epsilon}P^{1-\epsilon}} \quad \overset{\text{对称}}{\Longleftrightarrow} \quad C_i = \frac{M}{P_i^{\epsilon}P^{1-\epsilon}}.\\
& C = \left(\int_0^1 C_{id}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = \left[\int_0^1\left(\frac{M}{P_i^{\epsilon}P^{1-\epsilon}}\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = \frac{M}{P^{1-\epsilon}}\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},\\
& \quad = \frac{M}{P^{1-\epsilon}}\left[\left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}\right]^{-\epsilon} = \frac{M}{P^{1-\epsilon}}P^{-\epsilon} = \frac{M}{P},\\
\Rightarrow\quad & M = PC,\\
& \Updownarrow\\
\Rightarrow\quad & \int_0^1 P_i C_i\mathrm{d}i = PC;\\
& C_i = \frac{M}{P_i^{\epsilon}P^{1-\epsilon}} = \frac{PC}{P_i^{\epsilon}P^{1-\epsilon}} = \frac{C}{P_i^{\epsilon}P^{-\epsilon}},\\
\Rightarrow\quad & C_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon} C.
\end{aligned}
$$

这也得到了垄断竞争市场环境下消费品 i 的需求曲线。还有一种便捷的思路，即对偶问题的 Lagrange 乘子互为倒数 [**ChiangWainwright2005**]。如此一来，Lagrange 函数写为：

$$
\mathcal{L}^{\max} = \left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + \frac{1}{P}\left(M - \int_0^1 P_i C_i\mathrm{d}i\right).
$$

ii) 离散加总

一篮子商品或总价格水平可以是如上所示的连续加总，也可是离散加总，同样是根据经济学假设不等式约束转化成等式约束的最优问题：

$$
\begin{aligned}
&\max_{C_i}\ C \equiv \left(\tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda}, && \overset{\text{对偶}}{\Longleftrightarrow} && \min_{C_i}\ PC \equiv \textstyle\sum_{i=1}^{I} P_i C_i,\\
&\text{s.t.}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{I} P_i C_i \le PQ \equiv M. && && \text{s.t.}\quad \left(\tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda} \ge C.
\end{aligned}
$$

这是离散加总情形下关于最优消费选择的对偶问题，Lagrange 函数分别为：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\max} &= \left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda} + \frac{1}{P}\left(M - \sum_{i=1}^{I} P_i C_i\right);\\
&\Updownarrow\\
\mathcal{L}^{\min} &= \sum_{i=1}^{I} P_i C_i + P\left[C - \left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda}\right],
\end{aligned}
$$

注意此对偶问题中互为倒数的 Lagrange 乘子。仍用后者推演：

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad P_i &= P(1+\Lambda)\left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda-1} \frac{1}{1+\Lambda} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}-1}\frac{1}{I},\\
\Rightarrow \quad I\times P_i &= P\left[\left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} C_i^{\frac{1}{1+\Lambda}}\right)^{1+\Lambda}\right]^{\frac{\Lambda}{1+\Lambda}} C_i^{\frac{-\Lambda}{1+\Lambda}},\\
\Rightarrow \quad I\times P_i &= PC^{\frac{\Lambda}{1+\Lambda}} C_i^{\frac{-\Lambda}{1+\Lambda}},\\
\Rightarrow \quad I\times \frac{P_i}{P} &= \left(\frac{C_i}{C}\right)^{\frac{-\Lambda}{1+\Lambda}},\\
\Rightarrow \quad C_i &= \left(I\times\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{1+\Lambda}{-\Lambda}} C;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I} P_i C_i &= PC,\\
\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{I} P_i\left[\left(I\times\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{1+\Lambda}{-\Lambda}} C\right] &= PC,\\
\Rightarrow \quad I^{\frac{1+\Lambda}{-\Lambda}}\sum_{i=1}^{I} P_i^{1-\frac{1+\Lambda}{\Lambda}} &= P^{1-\frac{1+\Lambda}{\Lambda}},\\
\Rightarrow \quad P &= I^{1+\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{I} P_i^{\frac{1}{-\Lambda}}\right)^{-\Lambda},\\
\Rightarrow \quad P &= I\left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} P_i^{\frac{1}{-\Lambda}}\right)^{-\Lambda}.
\end{aligned}
$$

这便得到本质上相同、形式上稍有差异的消费需求曲线及总价格水平函数。其中 I 种不同商品之间的替代弹性是 $1+\frac{1}{\Lambda}$，Λ 是合意的成本加成 [**PW2014**]。

例 10. **集中规划生产环境下的消费需求、劳动供给和实际货币余额需求**

货币具有计价、交易和储藏等功能，用于交易时，会节约搜索匹配的劳动时间而增加休闲时间，这使其有正效用。[**Gali2015**] 讨论古典模型的最优货币政策时，介绍了以下货币进入效用函数 (Money in the Utility Function, MIU) 的最优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max_{C,M_d/P,L_s} \quad & U \equiv U\left(C,\frac{M_d}{P},L_s\right),\\
\text{s.t.} \quad & Q_s = AL_d^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

其中约束条件是总资源约束；选择变量除了消费需求和劳动力供给外，还有实际货币余额。

当货币市场、产品市场和劳动力市场出清时，有以下均衡条件：

$$
\begin{cases}
M_s = M_d = M,\\
Q_s = Q_d \;= C,\\
L_s = L_d \;= L.
\end{cases}
$$

故此，三变量最优化问题实为：

$$
\begin{aligned}
\max_{C,M/P,L} \quad & U \equiv U\left(C,\frac{M}{P},L\right),\\
\text{s.t.} \quad & C = AL^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

构造 Lagrange 函数：

$$\mathcal{L} \equiv U\left(C, \frac{M}{P}, L\right) + \lambda(AL^{1-\alpha} - C).$$

对选择变量依次求导可得四个一阶必要条件：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} &= U_C - \lambda = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= U_L + (1-\alpha)\lambda A L^{-\alpha} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M/P} &= U_{M/P} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= AL^{1-\alpha} - C = 0.
\end{aligned}$$

最后一个一阶条件即社会预算约束。稍作整理：

$$\begin{aligned}
\overbrace{-U_L/U_C}^{\text{边际替代率}} &= \overbrace{(1-\alpha)AL^{-\alpha}}^{\text{边际产出}}; \\
\underbrace{U_{M/P}}_{\text{边际效用}} &= \underbrace{0}_{\text{边际成本}}.
\end{aligned}$$

劳动和消费的边际替代率等于劳动的边际产出，这本质上同于**例** 8 中分散竞争经济体的一阶条件，即分散竞争均衡配置是 Pareto 最优的（第一福利定理）；反之，对于不同的市场安排亦能找到支撑 Pareto 最优的均衡价格（第二福利定理）。另者，上述一阶条件表明实际货币余额的边际效用等于货币“生产”的社会边际成本。

以上未给出具体的效用函数形式，常见的是可分可加型和分合一体型：

$$\left.\begin{aligned}
U &\equiv U\left(C, \frac{M}{P}, L\right), \\
&= f^1(C) + f^2\left(\frac{M}{P}\right) + f^3(L), \\
\xrightarrow[\nu\neq1]{\sigma\neq1}\quad &= \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}} + \frac{(M/P)^{1-\frac{1}{\nu}}-1}{1-\frac{1}{\nu}} - \frac{L^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}, \\
\xRightarrow[\nu=1]{\sigma=1}\quad &= \underbrace{\log C + \log\frac{M}{P} - \frac{L^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}}_{\text{可分可加}}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{vs.} \quad \left\{\begin{aligned}
U &\equiv U\left(C, \frac{M}{P}, L\right), \\
&= f^1\left(C, \frac{M}{P}\right) + f^2(L), \\
&\overset{\sigma\neq1}{=} \frac{\left\{\left[(1-\alpha)C^{1-\frac{1}{\nu}} + \alpha\left(\frac{M}{P}\right)^{1-\frac{1}{\nu}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\nu}}}\right\}^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1-\frac{1}{\sigma}} - \frac{L^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}, \\
&\overset{\sigma=1}{=} \underbrace{C^{1-\alpha}\left(\frac{M}{P}\right)^{\alpha} - \frac{L^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}.}_{\text{分合一体}}
\end{aligned}\right.$$

在可分可加的效用函数中，$1/\sigma$ 表示常相对风险规避系数而 $\sigma \equiv -\frac{U_C(\cdot)}{CU_{CC}(\cdot)}$ 表示消费的跨期替代弹性，ν 表示货币需求弹性，φ 表示劳动供给的 Frisch 弹性；在分合一体的效用函数中，ν 表示消费和实际货币余额之间的替代弹性，α 表示实际货币余额的相对权重。这些参数，多表达的是比较分析的内涵，第三章将一步探究，包括常替代弹性 (CES) 或常跨期替代弹性 (CIES) 的函数缘何转化成对数形式或 Cobb-Douglas 形式。

III. 多变量多个等式约束

设两个以上的多变量（设 m 个）且有多个等式约束（设 n 个）的目标函数和约束条件分别为：

$$\begin{aligned}
&\xleftrightarrow[\min]{\max} O = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\
\text{s.t.}\quad &g^1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\
&g^2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

$$g^n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

针对 n 个约束条件，可以引入 n 个 Lagrange 乘子构造函数（注意应令 $n \leq m - 1$ 以使约束条件有意义）：

$$\mathcal{L} \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j [0 - g^j(x_1, x_2, \ldots, x_m)].$$

此时 Hessian 加边行列式为：

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & g^1_{x_1} & g^1_{x_2} & \cdots & g^1_{x_m} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & g^2_{x_1} & g^2_{x_2} & \cdots & g^2_{x_m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & g^n_{x_1} & g^n_{x_2} & \cdots & g^n_{x_m} \\
g^1_{x_1} & g^2_{x_1} & \cdots & g^n_{x_1} & \mathcal{L}^o_{x_1x_1} & \mathcal{L}^o_{x_1x_2} & \cdots & \mathcal{L}^o_{x_1x_m} \\
g^1_{x_2} & g^2_{x_2} & \cdots & g^n_{x_2} & \mathcal{L}^o_{x_2x_1} & \mathcal{L}^o_{x_2x_2} & \cdots & \mathcal{L}^o_{x_2x_m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
g^1_{x_m} & g^2_{x_m} & \cdots & g^n_{x_m} & \mathcal{L}^o_{x_mx_1} & \mathcal{L}^o_{x_mx_2} & \cdots & \mathcal{L}^o_{x_mx_m}
\end{vmatrix}$$

观察后不难发现：

(1) 多变量多个等式约束 Hessian 加边行列式沿主对角线对称分布；

(2) 因多个等式约束增加的是 Hessian 行列式之边的维度，因此判断其正定负定或极小极大与多变量单个等式约束的情形相同，Hessian 行列式之二阶领导主子式开始的各阶领导主子式皆为负、正定、有极小值，偶数阶 Hessian 加边行列式的领导主子式为正而奇数阶领导主子式为负、负定、有极大值。

1.1.2.2 决策变量之间的不等式约束

在 m 个选择变量 n 个等式约束的最优化问题中，我们曾指出，欲使约束条件切实增加对选择变量的约束，应使 $n < m$。以 $m = 2, n = 1$ 为例，等式约束与不等式约束分别为：

$$\left.\begin{aligned} &\xleftrightarrow[\min]{\max} O = f(x,y), \\ &\text{s.t.} \quad g(x,y) = 0. \end{aligned}\right\} \overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} &\xleftrightarrow[\min]{\max} O = f(x,y), \\ &\text{s.t.} \quad g(x,y) \leq 0. \end{aligned}\right\} \overset{\text{恒等变换}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} &\xleftrightarrow[\min]{\max} O = f(x,y), \\ &\text{s.t.} \quad g(x,y) + z = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad z \geq 0. \end{aligned}\right.$$

不等式约束 $g(x,y) \leq 0$ 通过施加一个非负参数 z 可变成等式约束，若不是 $z \geq 0$ 的干扰，则用等式约束最优化问题中探讨的 Lagrange 乘数法即可求解，即一阶必要条件为：

$$\mathscr{L} = f(x,y) + \lambda[0 - z - g(x,y)] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

但现在增加了 $z \geq 0$ 这个不等式约束，则对 z 的一阶条件应有所变化。

如何变化？

以最大化问题为例，不妨设一个仅包含非负参数 z 的目标函数：

$$\max_z O = f(z),$$
$$\text{s.t.} \quad z \geq 0.$$

若不是非负约束，$f(\cdot)$ 应是一个凹或拟凹函数，此时，最大值应位于 O-z 二维坐标系的第一象限内或纵坐

标轴上；但凸或拟凸函数在此非负约束下仍可能在纵坐标轴上取得最大值。这可用以下数学表达式来归结：

$$\left.\begin{aligned} z>0\text{时},\quad f'(z)=0;\\ z=0\text{时},\quad f'(z)=0;\\ z=0\text{时},\quad f'(z)<0. \end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{z\geq 0}_{\text{非负约束}},\ \underbrace{f'(z)\leq 0,}_{\text{一阶条件}}\ \text{且}\ \underbrace{zf'(z)=0}_{\text{互补松弛条件}}.$$

回到 2 个选择变量 1 个等式约束再加一个非负约束的最优化问题：

$$\left.\begin{aligned} \overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ O=f(x,y),\\ \text{s.t.}\quad g(x,y)+z=0,\\ z\geq 0. \end{aligned}\right\} \xLeftrightarrow{\text{恒等变换}} \left\{\begin{aligned} &\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ O=f(x,y),\\ &\text{s.t.}\quad g(x,y)\leq 0. \end{aligned}\right.$$

对带有辅助参数 z 和不带辅助参数 z 的最优化问题分别构造 Lagrange 函数：

$$\begin{aligned} &\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ \mathscr{L}\equiv f(x,y)+\lambda[0-z-g(x,y)], &&\text{vs.}\qquad \overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ \mathcal{L}\equiv f(x,y)+\lambda[0-g(x,y)],\\ &\text{s.t.}\quad z\geq 0. \end{aligned}$$

取得极值的条件分别为（左右两端完全等价）：

$$\underbrace{\overbrace{\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}=0,\\ z\geq 0,\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\leq 0,\ z\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}=0. \end{aligned}\right\}}^{z\text{非负约束下}\mathscr{L}\text{函数的一阶条件}} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}=0,\\ z\geq 0,\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}=-\lambda\leq 0,\ z(-\lambda)=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}=0-z-g(x,y)=0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}=0,\\ &\left.\begin{aligned} z\geq 0,\ \lambda\geq 0,\ z\lambda=0,\\ z=0-g(x,y). \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}=0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x},\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}=0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x},\\ &\left.\begin{aligned} 0-g(x,y)\geq 0,\ \lambda\geq 0,\ [0-g(x,y)]\lambda=0,\\ \overbrace{\cancel{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}=0}}\quad\text{vs.}\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=0-g(x,y) \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right. \xLeftrightarrow{\text{vs.}} \overbrace{\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\geq 0,\ \lambda\geq 0,\ \lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=0. \end{aligned}\right.}^{\text{无约束下}\mathcal{L}\text{函数的一阶条件}}}_{\text{左右两端完全等价}}$$

对于上述两个 Lagrange 函数而言，关于暂未施加约束的选择变量 x 和 y 而言，一阶偏导的结果完全相同。左端第三行是函数 $\mathscr{L}(z)=f(x,y)+\lambda[0-z-g(x,y)]$ 关于非负约束 z 最优化的一阶条件，将此条件与不等式转化成的等式约束条件合并，可得到右端第三行关于 Lagrange 乘子 λ 的互补松弛条件。

若上述最优化问题中两个选择变量也要求非负，即

$$\left.\begin{aligned} \overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ O=f(x,y),\\ \text{s.t.}\quad g(x,y)+z=0,\\ x,y,z\geq 0. \end{aligned}\right\} \xLeftrightarrow{\text{恒等变换}} \left\{\begin{aligned} &\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ O=f(x,y),\\ &\text{s.t.}\quad g(x,y)\leq 0,\\ &\qquad\qquad x,y\geq 0. \end{aligned}\right.$$

对带有辅助参数 z 和不带辅助参数 z 的最优化问题分别构造 Lagrange 函数：

$$\begin{aligned} &\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ \mathscr{L}\equiv f(x,y)+\lambda[0-z-g(x,y)], &&\text{vs.}\qquad \overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ \mathcal{L}\equiv f(x,y)+\lambda[0-g(x,y)],\\ &\text{s.t.}\quad x,y,z\geq 0. &&\qquad\qquad \text{s.t.}\quad x,y\geq 0. \end{aligned}$$

由此，选择变量为非负且有一个不等式约束的最优化问题的条件为：

$$\left.\begin{aligned} x\geq 0,\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}\leq 0,\ x\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x}=0,\\ y\geq 0,\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}\leq 0,\ y\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y}=0,\\ z\geq 0,\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}\leq 0,\ z\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\lambda}=0. \end{aligned}\right\} \xLeftrightarrow{\text{vs.}} \left\{\begin{aligned} x\geq 0,\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\leq 0,\ x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0,\\ y\geq 0,\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\leq 0,\ y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0,\\ \lambda\geq 0,\ &\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\geq 0,\ \lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=0. \end{aligned}\right.$$

这就是非负和不等式约束最优化问题的非线性规划方法中得到的类似于一阶条件的 Kuhn-Tucker 条件。不等式约束在经济学中的应用分析涉及相当数量的试错，再版时或将结合前沿论文的具体案例补充讨论。

此前无约束最优与等式约束最优分别应用于完全竞争和垄断竞争的市场环境，似乎相互割裂。但具体应用时完全竞争与垄断竞争（或多个垄断竞争之间）各市场应统筹考虑。以下三小例是现代宏观奠定微观基础的静

态方面，用其展示静态最优的综合应用再合适不过。

例 11-1. 最终品买卖市场完全竞争而中间品卖方市场垄断竞争

i) 产品买卖市场完全竞争下最终品生产部门的最优化问题

最终品无差异，代表性生产部门作出合意决策的分析框架为：

$$\max_{Q_{id}\rightleftarrows Q_s}\ \Pi \equiv \overbrace{P\underbrace{\left(\int_0^1 Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}}}_{Q_s}}^{\text{收益}\mathcal{R}[Q_s(Q_{id})]} - \overbrace{\int_0^1 P_iQ_{id}\mathrm{d}i}^{\text{成本}C[Q_s(Q_{id})]} \quad \underset{\text{例2}}{\overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow}} \quad \overbrace{\underbrace{\max_{L_d\rightleftarrows Q_s}\ \Pi \equiv \overbrace{PQ_s}^{\text{即时收益}} - \overbrace{WL_d}^{\text{可变成本}}}_{\text{实际工资=边际产出}}}^{\text{边际收益=边际成本}}.$$

选择中间品投入要素 Q_{id} 是为了选择最终品供给 Q_s 以使利润最大化，其中最终品是将中间品进行 Dixit-Stiglitz 的 CES 加总，ϵ_m 是一篮子中间投入品之间的替代弹性。

一阶必要条件为：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}Q_{id}} &= 0 = P\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}\left(\int_0^1 Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}-1}\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}-1} - P_i,\\
\Rightarrow\quad P_i &= P\left(\int_0^1 Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}-1} Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}-1},\\
\Rightarrow\quad P_i &= P\left[\left(\int_0^1 Q_{id}^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon_m}} Q_{id}^{\frac{-1}{\epsilon_m}},\\
\Rightarrow\quad \frac{P_i}{P} &= \left(\frac{Q_{id}}{Q_s}\right)^{\frac{-1}{\epsilon_m}},\\
\Rightarrow\quad Q_{id} &= \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m} Q_s.
\end{aligned}$$

如此可得完全竞争市场环境下对中间品 i 的需求曲线。将其代入目标函数可得总价格水平与单个中间品 i 的价格的函数关系：

$$\begin{aligned}
PQ_s - \int_0^1 P_iQ_{id}\mathrm{d}i &= \overbrace{\Pi = 0}^{\text{完全竞争}},\\
\Rightarrow\quad \int_0^1 P_iQ_{id}\mathrm{d}i &= PQ_s,\\
\Rightarrow\quad \int_0^1 P_i\left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m}Q_s\right]\mathrm{d}i &= PQ,\\
\Rightarrow\quad \int_0^1 P_i\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m}\mathrm{d}i &= P,\\
\Rightarrow\quad P &= \left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon_m}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon_m}}.
\end{aligned}$$

不难发现，所求的消费需求曲线及总价格水平指数与**例 9** 一致。

ii) 产品卖方市场垄断竞争下中间品生产部门的最优化问题

中间品有差异，异质性中间品生产厂商 i 作出合意决策的依据是：

$$\begin{aligned}
&\max_{P_i}\Pi_i \equiv P_iQ_{id} - WL_{id},\\
\text{s.t.}\quad &Q_{id} = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m}Q_s,\\
&Q_{is} = AL_{id},
\end{aligned}$$

$$Q_{id} = Q_{is} = Q_i.$$

简化的生产函数（资本投入要素外生且劳动产出份额为 1）会在第三章详述。将约束条件及均衡条件代入目标函数可以转化关于产品 i 的需求量的无约束最优化问题：

$$\max_{Q_{id}} \Pi_i \equiv \left(P_i - \frac{W}{A}\right) Q_{id} \quad \xleftarrow[\begin{array}{l} \text{或} \min\limits_{Q_{is}} C_i = W L_{id} \\ \text{s.t. } Q_{is} = A L_{id} \end{array} \Rightarrow \mathrm{MC}_i \equiv \frac{\mathrm{d}C_i}{\mathrm{d}Q_{is}} = \frac{\mathrm{d}\left(W\frac{Q_{is}}{A}\right)}{\mathrm{d}Q_{is}} = \frac{W}{A} \equiv \mathrm{MC}]{\begin{array}{l} \min\limits_{L_{id}} M_i = W L_{id} \\ \text{s.t. } A L_{id} \geq Q_{is} \end{array} \Rightarrow \min\limits_{L_{id}} \mathcal{L} \equiv W L_{id} + \mathrm{MC}(Q_{is} - A L_{id})} \quad \max_{Q_{id}} \Pi_i \equiv (P_i - \mathrm{MC})\, Q_{id}.$$

再通过反需求函数 $P_i = \left(\frac{Q_{id}}{Q_s}\right)^{-\frac{1}{\epsilon_m}} P$ 求出产品 i 的最优价格决策。

或者直接转化为关于产品 i 的最优价格决策问题：

$$\max_{P_i} \Pi_i \equiv \left(P_i - \frac{W}{A}\right) \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m} Q_s\right] \quad \overset{\text{或}}{\Longleftrightarrow} \quad \max_{P_i} \Pi_i \equiv (P_i - \mathrm{MC}) \left[\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m} Q_s\right].$$

不难发现，这是**例** 3 的重现，而**例** 3 中直接给定的需求曲线就出自**例** 9。本例是换个视角呈现**例** 9 和**例** 3 的紧密联系。因此，求解结果仍是边际成本（一次齐次的生产函数使得异质性企业的边际成本相同）之外有成本加成来体现垄断竞争下的最优定价决策。

iii) 劳动力买卖市场完全竞争下家庭部门的最优化问题

代表性家庭部门在最终品买方市场和劳动力卖方市场都不具有垄断竞争力的决策分析框架是：

$$\max_{C, L_s} U \equiv U(C, L_s),$$
$$\text{s.t.} \quad \underbrace{\int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i}_{PC} = \underbrace{\int_0^1 W_i L_{is} \mathrm{d}i}_{WL_s} + \underbrace{\int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i}_{\bar{\Pi}_i}.$$

注意，垄断竞争下中间品厂商的利润（之和）$\bar{\Pi}_i \neq 0$，而完全竞争下最终品厂商的利润（之和）$\Pi = 0$。这又回到了**例** 8，只是此前家庭的预期总价格水平简化成瞬时总价格水平且遗漏了家庭作为企业股份持有者的利润分红收入，求解结果仍是合意消费需求及最优劳动供给。

基于相同的市场环境，最终品生产部门和家庭部门都假设是代表性的，因此家庭部门对一篮子消费品中的产品 i 的需求恰对应于市场出清时最终品部门对一篮子中间品中产品 i 的需求，即为**例** 9 所求。可见，代表性家庭、代表性最终品厂商与异质性中间品厂商三位一体的层次结构与代表性家庭与异质性厂商两部门一体化的层次结构有完全相同的建模结果。

因此，不妨重回家庭和厂商两部门结构，但除考虑厂商生产异质性产品外，还可考虑家庭有异质性劳动力。

例 11-2. 产品卖方市场和劳动力卖方市场都存在垄断竞争

此类模型出自 [**EHL2000**]，名著 [**Gali2015**] 及 [**Walsh2017**] 阐释，但都同时考虑垄断竞争与名义刚性而成动态形式。

i) 产品卖方市场垄断竞争下生产部门的最优化问题

厂商 i 的决策行为分两步。

第一步，给定劳务支出最大化一篮子劳动力需求，或给定一篮子劳动力需求最小化劳务支出，即又回到**例** 9

中类似的问题：

$$\left.\begin{aligned} &\min_{L_{ild}} \int_0^1 W_l L_{ild}\mathrm{d}l \equiv \underbrace{M_i}_{\text{厂商的劳务预算给定}}, \\ &\text{s.t.} \quad \left(\int_0^1 L_{ild}^{\frac{\epsilon_h-1}{\epsilon_h}}\mathrm{d}l\right)^{\frac{\epsilon_h}{\epsilon_h-1}} \geq \overbrace{L_{id}=L_{is}=L_i}^{\text{一篮子劳务供需}}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} L_{ild} &= \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} L_i, \\ W &= \left(\int_0^1 W_l^{1-\epsilon_h}\mathrm{d}l\right)^{\frac{1}{1-\epsilon_h}}. \end{aligned}\right\} \Leftarrow WL_i = \int_0^1 W_l L_{ild}\mathrm{d}l.$$

其中厂商 i 生产所需的是从代表性家庭部门购买的一篮子异质性劳动力，由于给定技术水平，且假设劳动的产出份额是 1，因此也可理解产品 i 是异质性劳动力的 CES 加总，即 $Q_{is}=A_iL_{id}=A_i\left(\int_0^1 L_{ild}^{\frac{\epsilon_h-1}{\epsilon_h}}\mathrm{d}l\right)^{\frac{\epsilon_h}{\epsilon_h-1}}$。由于现在设定厂商 i 的技术水平更有千秋，因此边际成本也将各不相同。

第二步，给定其劳动力需求由供给决定，异质性厂商 i 作出合意决策的依据是：

$$\begin{aligned} &\max_{P_i} \Pi_i \equiv (P_i-\mathrm{MC}_i)Q_{id}, \\ &\text{s.t.} \quad Q_{id}=\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m} Q. \end{aligned}$$

对产品 i 的需求曲线来自给定一篮子异质性消费品而最小化消费支出（结合产品市场均衡条件），稍后介绍家庭部门的决策行为时还将回顾。

厂商 i 的最优定价仍为：

$$P_i^{\circ}=\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}\mathrm{MC}_i.$$

通过最小化成本以确定厂商 i 的边际成本：

$$\left.\begin{aligned} &\min_{L_{ild}} M_i \equiv \overbrace{\int_0^1 W_l L_{ild}\mathrm{d}l}^{\text{劳动力投入的支出}}, \\ &\text{s.t.} \quad \underbrace{A_i\left(\int_0^1 L_{ild}^{\frac{\epsilon_h-1}{\epsilon_h}}\mathrm{d}l\right)^{\frac{\epsilon_h}{\epsilon_h-1}}}_{\text{有效劳动力的投入}} \geq Q_{is}. \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\min_{L_{is}} M_i \equiv \overbrace{WL_{id}}^{\text{劳动力投入的支出}}, \\ &\text{s.t.} \quad \underbrace{A_iL_{id}}_{\text{有效劳动力的投入}} \geq Q_{is}. \end{aligned}\right.$$

Lagrange 乘子即为边际成本：

$$\mathcal{L} \equiv WL_{id}+\mathrm{MC}_i(Q_{is}-A_iL_{id}).$$

厂商 i 的最优定价遂为：

$$\begin{aligned} &\underbrace{P_i^{\circ}}_{\text{名义价格}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}}}_{\text{成本加成}} \underbrace{\overbrace{\frac{W}{A_i}}}_{\text{名义边际成本}}, \\ \Rightarrow\ &\underbrace{\overbrace{\frac{P_i^{\circ}}{P}}^{\text{实际价格}}}_{\text{相对价格}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}}^{\text{成本加成}} \overbrace{\frac{W/P}{A_i}}^{\text{实际边际成本}}}_{\text{垄断竞争}} \quad \text{vs.} \quad \underbrace{\frac{W}{P}=F_L^o}_{\text{完全竞争}}. \end{aligned}$$

若技术水平 $A_i=A$，则边际成本 $\mathrm{MC}_i=\mathrm{MC}$。

ii) 劳动力卖方市场垄断竞争下家庭部门的最优化问题

具有异质劳动力的代表性家庭的决策行为分两步。

第一步，给定消费支出最大化一篮子消费品，或给定一篮子消费品最小化消费支出，即回到**例 9**：

$$\left.\begin{aligned} \min_{C_i} \int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i &\equiv M, \\ \text{s.t.} \quad \left(\int_0^1 C_i^{\frac{\epsilon_m-1}{\epsilon_m}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m-1}} &\geq C. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_i &= \left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\epsilon_m} C, \\ P &= \left(\int_0^1 P_i^{1-\epsilon_m} \mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\epsilon_m}}. \end{aligned}\right\} \Leftarrow \quad PC = \int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i.$$

第二步，家庭选择工资决定异质性劳动 l 的供给后，再根据效用最大化选择消费总量和劳动总供给：

$$\begin{aligned} &\max_{C,W_l} U \equiv U\left(C, \underbrace{\overbrace{\int_0^1 L_{ls} \mathrm{d}l}^{\text{供给之和}}}_{\text{代表性家庭能够提供的所有劳动力}}\right), && \max_{C,W_l} U \equiv U\left(C, \underbrace{\overbrace{\int_0^1 \int_0^1 L_{ild} \mathrm{d}l \mathrm{d}i}^{\text{需求之和}}}_{\text{代表性家庭愿意提供的所有劳动力}}\right), \\ &\text{s.t.} \quad \underbrace{\int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i}_{=PC} = \underbrace{\int_0^1 W_l L_{ls} \mathrm{d}l}_{=\int_0^1 W L_i \mathrm{d}i} + \underbrace{\int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i}_{\bar{\Pi}_i}, \quad \xLeftrightarrow[\text{由需决供}]{\text{两侧等价}} && \text{s.t.} \quad \underbrace{\int_0^1 P_i C_i \mathrm{d}i}_{=PC} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 W_l L_{ild} \mathrm{d}l \mathrm{d}i}_{=\int_0^1 W L_i \mathrm{d}i} + \underbrace{\int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i}_{\bar{\Pi}_i}, \\ &L_{ls} = L_{ld} = \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \int_0^1 L_i \mathrm{d}i. && \int_0^1 \int_0^1 L_{ild} \mathrm{d}l \mathrm{d}i = \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \int_0^1 L_i \mathrm{d}i. \end{aligned}$$

可从约束条件中解出选择变量 C，连同劳动需求曲线一起代入目标函数转化成无约束最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{W_l} U \equiv\ & U\left[\frac{1}{P}\left(\int_0^1 \int_0^1 W_l L_{ild} \mathrm{d}l \mathrm{d}i + \int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i\right), \int_0^1 \int_0^1 L_{ild} \mathrm{d}l \mathrm{d}i\right], \\ =\ & U\left\{\frac{1}{P}\left[W_l \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \int_0^1 L_i \mathrm{d}i + \int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i\right], \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \int_0^1 L_i \mathrm{d}i\right\}, \\ =\ & U\left\{\underbrace{\frac{1}{P}\left[W_l \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \bar{L}_i + \bar{\Pi}_i\right]}_{C}, \underbrace{\left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \bar{L}_i}_{\{L_{ls}\}}\right\}. \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \quad 0 = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}W_l} = (1-\epsilon_h) U_C \frac{1}{P} \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \bar{L}_i - \epsilon_h U_L \left(\frac{W_l}{W}\right)^{-\epsilon_h} \bar{L}_i W_l^{-1},$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\overbrace{W_l^o}^{\text{实际工资}}}{P}}_{\text{相对工资}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\epsilon_h}{\epsilon_h - 1}}^{\text{工资成本加成}} \overbrace{\left(\frac{-U_L}{U_C}\right)}^{\text{边际替代率}}}_{\text{垄断竞争}} \quad \text{vs.} \quad \frac{W_l}{P} = \underbrace{\frac{W}{P} = \frac{-U_L^o}{U_C^o}}_{\text{完全竞争}}.$$

本例的重点是呈现在产品市场和劳动力市场兼具垄断竞争力的联动环境下如何得到价格和工资的最优决策。

下一小例仍回三位一体的层次结构来作类似设定，改为家庭部门的劳动力市场仍是完全竞争，但除中间品生产部门外，最终品生产部门也身处垄断竞争的市场环境。考虑产品市场和劳动力市场都是垄断竞争与考虑最终品和中间品两个生产阶段皆是垄断竞争异曲同工。

例 11-3. 最终品卖方市场和中间品卖方市场都是垄断竞争

此例改自 **[HuangLiu2001, HuangLiu2004, HuangLiu2005]**，具体应用上 **[Deng2018, DDZ2022]** 有所拓展。原论文都是时间序列分析，即考虑了名义刚性或信息摩擦引起的动态决策，而本书作为高宏系列丛书的第 1 部，故仅先考虑最终品卖方市场和中间品卖方市场都是垄断竞争市场环境下的静态决策问题。

i) 劳动力买卖市场完全竞争下代表性家庭部门的最优化问题

家庭部门作出合意决策的依据是：

$$\max_{C,L_s} U \equiv U(C, L_s),$$

$$\text{s.t.}\quad \underbrace{\int_0^1 P_j C_j \mathrm{d}j}_{P_f C} = \underbrace{\overbrace{\int_0^1 W L_{is}\mathrm{d}i}^{\text{中间品生产阶段的工资收入}} + \overbrace{\int_0^1 W L_{js}\mathrm{d}j}^{\text{最终品生产阶段的工资收入}}}_{W L_s} + \underbrace{\overbrace{\int_0^1 \Pi_i \mathrm{d}i}^{\text{中间品厂商利润分红}} + \overbrace{\int_0^1 \Pi_j \mathrm{d}j}^{\text{最终品厂商利润分红}}}_{\Pi}.$$

由此照常可得合意的消费需求和最优劳动供给，通过联立劳动供给曲线和预算约束（依赖于给出具体的效用函数）：

$$\begin{cases} \dfrac{W}{P_f} = \dfrac{-U_{L_s}(C, L_s)}{U_C(C, L_s)}, \\ P_f C = W L_s + \Pi. \end{cases}$$

最终品部门具有垄断竞争力，对异质性最终品 j 的消费需求来自家庭部门给定支出的最大化一篮子最终品或给定一篮子最终品最小化支出：

$$\max_{C_j} C \equiv \overbrace{\left(\int_0^1 C_j^{\frac{\epsilon_f - 1}{\epsilon_f}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_f}{\epsilon_f - 1}}}^{\text{Dixit-Stiglitz 加总的 CES 函数}}, \quad \overset{\text{vs.}}{\iff} \quad \min_{C_j} \overbrace{P_f Q_f \equiv M_f \equiv P_f C}^{Q_f = Q_{fd} = Q_{fs} = C + \cancel{I + G + \delta K}} = \int_0^1 P_j C_j \mathrm{d}j,$$

$$\text{s.t.}\quad \int_0^1 P_j C_j \mathrm{d}j \le P_f Q_f \equiv M_f. \qquad \text{s.t.}\quad \left(\int_0^1 C_j^{\frac{\epsilon_f - 1}{\epsilon_f}} \mathrm{d}j\right)^{\frac{\epsilon_f}{\epsilon_f - 1}} \ge C.$$

由此可得异质性最终品 j 的需求曲线及最终品总价格指数：

$$C_j = \left(\frac{P_j}{P_f}\right)^{-\epsilon_f} C \quad \xLeftrightarrow[C_j = Q_{jd};\quad C = Q_f]{P_f = \left(\int_0^1 P_j^{1-\epsilon_f}\mathrm{d}j\right)^{\frac{1}{1-\epsilon_f}}} \quad Q_{jd} = \left(\frac{P_j}{P_f}\right)^{-\epsilon_f} Q_f.$$

ii) 产品卖方市场垄断竞争下最终品生产部门的最优化问题

最终品有差异，异质性最终品生产厂商 j 作出理想决策的分析框架是：

$$\begin{aligned}
\max_{P_j} \Pi_j &\equiv (P_j - \mathrm{MC}_j) \overbrace{Q_{jd}}^{\text{代表性家庭对最终品 j 的需求}}, \\
\text{s.t.}\quad Q_{jd} &= \left(\frac{P_j}{P_f}\right)^{-\epsilon_f} Q_f, \\
Q_{js} &= Q_{md}^{\alpha}[A_j L_{jd}]^{1-\alpha}, \\
Q_{ms} &= \left(\int_0^1 Q_{jis}^{\frac{\epsilon_m - 1}{\epsilon_m}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m - 1}}, \\
Q_{jid} &= \left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m} Q_m, \\
Q_{jid} &= Q_{jis}, \quad \underbrace{Q_{md} = Q_{ms} = Q_m}_{\text{市场出清的一篮子中间品}}, \\
Q_{jd} &= Q_{js}, \quad \overbrace{Q_{fd} = Q_{fs} = Q_f}^{\text{市场出清的一篮子最终品}}.
\end{aligned}$$

给定边际成本，无须考虑供给端，最优决策简化为：

$$\max_{P_j \rightleftarrows Q_{jd}} \Pi_j \equiv \left[\left(\frac{Q_{jd}}{Q_f}\right)^{-\frac{1}{\epsilon_f}} P_f - \mathrm{MC}_j\right] Q_{jd}.$$

这就是**例** 3 中介绍的求解方法一，沿用类似步骤，先求解家庭部门对异质性最终品的需求，再根据反需求

函数可知最终品生产部门 j 的最优定价为：

$$\underbrace{P_j^{\circ}}_{\text{名义价格}} = \underbrace{\overbrace{\frac{\epsilon_f}{\epsilon_f - 1}}}_{\text{成本加成}} \underbrace{\mathrm{MC}_j}_{\text{名义边际成本}} .$$

下面要通过最小化总成本以确定最终品生产厂商 j 的边际成本：

$$\min_{Q_{jid}, L_{jd}} M_j \equiv \overbrace{\underbrace{\int_0^1 P_i Q_{jid} \mathrm{d}i}_{\text{中间品投入的支出}} + \underbrace{W L_{jd}}_{\text{劳动力投入的支出}}}^{\text{总支出}},$$

$$\text{s.t.} \quad \underbrace{\left[\left(\int_0^1 Q_{jid}^{\frac{\epsilon_m - 1}{\epsilon_m}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_m - 1}}\right]^{\alpha}}_{\text{一篮子异质性中间品的投入}} \underbrace{(A_j L_{jd})^{1-\alpha}}_{\text{有效劳动力的投入}} \geq Q_{js}.$$

$$\overset{\text{等价}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\min_{Q_{md}, L_{jd}} M_j \equiv \overbrace{\underbrace{P_m Q_{md}}_{\text{中间品投入的支出}} + \underbrace{W L_{jd}}_{\text{劳动力投入的支出}}}^{\text{总支出}},$$

$$\text{s.t.} \quad \underbrace{Q_{md}^{\alpha}}_{\text{一篮子异质性中间品的投入}} \underbrace{(A_j L_{jd})^{1-\alpha}}_{\text{有效劳动力的投入}} \geq Q_{js}.$$

Lagrange 乘子即为边际成本：

$$\mathcal{L}_j \equiv (P_m Q_{md} + W L_{jd}) + \mathrm{MC}_j \left[Q_{js} - Q_{md}^{\alpha} (A_j L_{jd})^{1-\alpha} \right].$$

关于中间品这一要素需求的一阶条件为：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial Q_{md}} = 0, \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{P_m}_{\text{中间品价格指数}} = \alpha \mathrm{MC}_j Q_{md}^{\alpha - 1} (A_j L_{jd})^{1-\alpha}, \\
& = \alpha \mathrm{MC}_j \underbrace{Q_{md}^{\alpha} (A_j L_{jd})^{1-\alpha}} Q_{md}^{-1}, \\
& = \alpha \mathrm{MC}_j \overbrace{Q_{js}} Q_{md}^{-1}, \\
\Rightarrow \quad & \overbrace{Q_{md}}^{\text{生产最终品}j\text{所需的一篮子中间品}} = \alpha \frac{\mathrm{MC}_j}{P_m} Q_{js}, \\
\Rightarrow \quad & Q_{jid} \left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{\epsilon_m} = \alpha \frac{\mathrm{MC}_j}{P_m} Q_{js}, \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{Q_{jid}}_{\text{最终品生产厂商}j\text{对于中间品}i\text{的需求}} = \alpha \frac{\mathrm{MC}_j}{P_m} \left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m} Q_{js}; \\
\Rightarrow \quad & \overbrace{Q_{id}}^{\text{全部最终品厂商对中间品}i\text{的需求总和}} \equiv \int_0^1 Q_{jid} \mathrm{d}j = \alpha \frac{\mathrm{MC}_j}{P_m} \left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m} \int_0^1 Q_{js} \mathrm{d}j.
\end{aligned}$$

关于劳动力这一要素需求的一阶条件为：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_{jd}} = 0, \\
\Rightarrow \quad & W = (1-\alpha) \mathrm{MC}_j Q_{md}^{\alpha} (A_j L_{jd})^{-\alpha} A_j, \\
& = (1-\alpha) \mathrm{MC}_j Q_{md}^{\alpha} (A_j L_{jd})^{1-\alpha} \frac{1}{L_{jd}}, \\
& = (1-\alpha) \mathrm{MC}_j \frac{Q_{js}}{L_{jd}},
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{L_{jd}}_{\text{最终品生产厂商}j\text{对劳动力的需求}} = (1-\alpha)\frac{\mathrm{MC}_j}{W}Q_{js},$$

$$\Rightarrow \quad \overbrace{\bar{L}_{jd}}^{\text{全部最终品生产厂商的劳动力需求总和}} \equiv \int_0^1 L_{jd}\mathrm{d}j = (1-\alpha)\frac{\mathrm{MC}_j}{W}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j.$$

结合以上推导过程中的两个方程进一步确立边际成本：

$$\begin{aligned}
P_m &= \alpha \mathrm{MC}_j Q_{js} Q_{md}^{-1}, \\
W &= (1-\alpha)\mathrm{MC}_j \frac{Q_{js}}{L_{jd}}, \\
\Rightarrow \quad \frac{W}{P_m} &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{Q_{md}}{L_{jd}}, \\
\Rightarrow \quad \frac{Q_{md}}{L_{jd}} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{W}{P_m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_m &= \alpha \mathrm{MC}_j Q_{js} Q_{md}^{-1}, \\
\Rightarrow \quad \mathrm{MC}_j &= \frac{1}{\alpha}\frac{P_m Q_{md}}{Q_{js}}, \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{P_m Q_{md}}{Q_{md}^{\alpha}(A_j L_{jd})^{1-\alpha}}, \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{P_m Q_{md}^{1-\alpha}}{(A_j L_{jd})^{1-\alpha}}, \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{P_m}{A_j^{1-\alpha}}\left(\frac{Q_{md}}{L_{jd}}\right)^{1-\alpha}, \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{P_m}{A_j^{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{W}{P_m}\right)^{1-\alpha}, \\
&= \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}P_m^{\alpha}\left(\frac{W}{A_j}\right)^{1-\alpha}, \\
\xRightarrow{\bar{\alpha}\equiv\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}} \quad \mathrm{MC}_j &= \bar{\alpha}P_m^{\alpha}\left(\frac{W}{A_j}\right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

最终品生产部门 j 的最优定价遂为：

$$P_j^{\circ} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_f - 1}\bar{\alpha}P_m^{\alpha}\left(\frac{W}{A_j}\right)^{1-\alpha}.$$

iii) 产品卖方市场垄断竞争下中间品生产部门的最优化问题

中间品有差异，异质性中间品生产厂商 i 合意决策依据的是：

$$\begin{aligned}
\max_{P_i} \Pi_i &\equiv (P_i - MC_i)\overbrace{Q_{id}}^{\text{所有最终品厂商对中间品}i\text{的需求}}, \\
\text{s.t.} \quad Q_{id} &= \alpha\frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m}\underbrace{\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j}_{\text{所有最终品供给总和}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{Q_{is}}^{\text{中间品 i 的总供给}} &= AL_{id}, \\
Q_{id} &= Q_{is}.
\end{aligned}$$

给定边际成本 $\mathrm{MC}_i = \frac{W}{A_i}$，无须关注供给，等式约束最优解转化为无约束最优解：

$$
\begin{aligned}
&\max_{P_i} \Pi_i \equiv (P_i - MC_i)\alpha \frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j.\\
\xrightarrow{\text{F.O.C.}}\quad & 0 = \frac{\mathrm{d}\Pi_i}{\mathrm{d}P_i} = (1-\epsilon_m)\alpha\frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j + \epsilon_m MC_i\alpha\frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m-1}\frac{1}{P_m}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j,\\
\Rightarrow\quad & 0 = (\epsilon_m - 1)\alpha\frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j - \epsilon_m MC_i\alpha\frac{\mathrm{MC}_j}{P_m}\left(\frac{P_i}{P_m}\right)^{-\epsilon_m-1}\frac{1}{P_m}\int_0^1 Q_{js}\mathrm{d}j,\\
\Rightarrow\quad & P_i = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m - 1}MC_i = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m - 1}\frac{W}{A_i}.
\end{aligned}
$$

如此便得到了同为垄断竞争市场环境的最终品及中间品厂商的合意定价方程。

上述三小例将不同生产阶段的生产部门及家庭部门连成一体，但仍是局部求解结果。结合价格指数和定价方程，可以进一步推导出总供给曲线或 Phillips 曲线；结合总供给与总需求曲线，还可进行货币政策分析，这将在 [**Deng2026**] 一书中呈现。此外，若考虑部分名义刚性，则静态最优问题将转化为动态最优问题。

1.2 动态最优问题

动态模型的显著特征是有描述处在不同时间上变量之间关系的部分。直观上看，动态模型中的变量皆有表示时间的变量 t，但反过来并不一定成立，重点是变量之间有跨期联系。

首先应注意到，动态模型有离散时间和连续时间之分。

(1) 离散时间动态指变量在某一时段有变化，因此 $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$，比如：

$$
\begin{aligned}
&\text{储蓄增长率: } S_{t+1} = (1+r)S_t &&\Leftrightarrow && S_{t+1} - S_t = rS_t &&\Leftrightarrow && \frac{\Delta S_t/\Delta t}{S_t} = r,\\
&\text{技术增长率: } A_{t+1} = (1+g_a)A_t &&\Leftrightarrow && A_{t+1} - A_t = g_a A_t &&\Leftrightarrow && \frac{\Delta A_t/\Delta t}{A_t} = g_a,\\
&\text{劳力增长率: } L_{t+1} = (1+g_l)L_t &&\Leftrightarrow && L_{t+1} - L_t = g_l L_t &&\Leftrightarrow && \frac{\Delta L_t/\Delta t}{L_t} = g_l,\\
&\text{资本运动律: } K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t &&\Leftrightarrow && K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t &&\Leftrightarrow && \frac{\Delta K_t/\Delta t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta.
\end{aligned}
$$

(2) 连续时间动态指变量在每一时点有变化，$0, \delta, 2\delta, \ldots$，其中 $\delta > 0$，仍用 Δt 表示任意（小）的时间间隔：

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{连续复利增长}\begin{cases} S_{t+\Delta t} = e^{r\Delta t}S_t,\\ A_{t+\Delta t} = e^{g_a\Delta t}A_t,\\ L_{t+\Delta t} = e^{g_l\Delta t}L_t,\end{cases}\\
&\text{连续投入增长} K_{t+\Delta t} - K_t = \Delta t I_t - \Delta t\delta K_t.
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} = \dfrac{e^{r\Delta t} - 1}{\Delta t}S_t,\\
\dfrac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t} = \dfrac{e^{g_a\Delta t} - 1}{\Delta t}A_t,\\
\dfrac{L_{t+\Delta t} - L_t}{\Delta t} = \dfrac{e^{g_l\Delta t} - 1}{\Delta t}L_t,\\
\dfrac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} = I_t - \delta K_t.
\end{cases}
\xrightarrow{\Delta t\to 0}
\begin{cases}
\dot{S}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}S(t)/\mathrm{d}t}{S(t)} = r,\\
\dot{A}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}A(t)/\mathrm{d}t}{A(t)} = g_a,\\
\dot{L}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}L(t)/\mathrm{d}t}{L(t)} = g_l,\\
\dot{K}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}K(t)/\mathrm{d}t}{K(t)} = \dfrac{I(t)}{K(t)} - \delta.
\end{cases}
$$

以上推导用到 Taylor 一阶近似或用 l’HÔpital 法则，即

$$
f(\Delta t) = e^{x\Delta t} \approx f(0) + f'(0)\frac{\mathrm{d}(x\Delta t)}{\mathrm{d}\Delta t}(\Delta t - 0) = 1 + x\Delta t \qquad \text{或} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{x\Delta t} - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Delta t}e^{x\Delta t}}{(\Delta t)'} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x}{1} = x.
$$

离散时间中的 $\Delta X_t \equiv X_{t+1} - X_t$，$\Delta t \equiv (t+1) - t = 1$，$\Delta$ 表示差分算子。也可用 Δt 表示任意的时间间隔，$\Delta t \to 0$ 转为连续时间，即 $\dot{X}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta X_t}{\Delta t}$，d 表示微分算子。离散时间中的 t 常以右下标形式出现，连续时间中的 t 习惯以括号表示。

再者不难想见，动态模型的约束有端点约束和过程约束之分。

(1) 端点约束主要指决策的初始条件和终结条件，皆可为常数（固定），亦皆可作参数（可变）。终结条件可

依时间而横截，也可依状态而横截。简单起见，接下来所介绍的动态最优问题中给定初始条件和终结条件，更具体地，常令初始状态和终结状态皆为 0。

(2) 过程约束可能发生在决策变量与状态变量之间、决策变量之间或是状态变量之间。稍后会看到，从建立多元静态最优与离散动态最优紧密联系的角度看，多个静态决策变量之间的约束形式上可转化成动态决策变量与状态变量之间的约束，所以这类约束最优问题可直接套用 Lagrange 函数法求解，只是连续时间借用 Hamilton 函数的最优控制法更为方便。若在动态最优中仍似静态中有不同决策变量之间的约束，则在 Hamilton 函数法的基础上再用 Lagrange 函数法。以下阐述离散时间和连续时间的动态最优解法各有侧重，前者着眼决策变量从两期到多期，后者聚焦状态变量之间从无约束到有约束。

1.2.1 离散时间

1.2.1.1 完美预期下的两期决策

在双变量等式约束的静态最优化问题中，用 x 和 y 来表示这两个选择变量，为与两期离散时间更好地比较，不妨在静态最优化问题中，将 x 和 y 改成 x_1 和 x_2 分别表示静态时的两个选择变量。动态时，沿用 x_1 和 x_2 表示两个选择变量，但下标多了“时间”这层意思，表示的是在时间 $t=1$ 时及 $t=2$ 时的选择变量。

$$\left.\begin{array}{rl}\xleftrightarrow[\min]{\max} & O=f(x_1,x_2),\\ \text{s.t.} & g(x_1,x_2)=z.\end{array}\right\}\text{同期离散状态}\quad\overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow}\quad\text{两期离散动态}\left\{\begin{array}{rl}\xleftrightarrow[\min]{\max} & O=f(x_1,x_2),\\ \text{s.t.} & g(x_1,x_2)=z.\end{array}\right.$$

比较后不难发现，尽管符号下标的含义不同，但离散时间的两期动态最优化问题与双变量等式约束的静态最优化问题在形式上完全一致。因此，此前介绍的消元法、全微分法和 Lagrange 乘数法依然奏效。

例 12-1. 禀赋经济体的两期消费决策

$$\max_{C_1,C_2} U=u(C_1)+\beta u(C_2),$$

$$\text{s.t.}\quad\left.\begin{array}{l}\overbrace{C_1+S_1}^{\text{当期支出}}\le\overbrace{[r+(1-\delta)]S_0+Q_1}^{\text{当期收入}},\\ \underbrace{\underbrace{C_2+S_2}_{\text{下期支出}}\le\underbrace{[r+(1-\delta)]S_1+Q_2}_{\text{下期收入}}.}_{\text{各期流动预算约束}}\end{array}\right\}\xRightarrow[C_1,C_2>0]{S_0=0=S_2}\underbrace{\overbrace{C_1+\frac{C_2}{1+r}}^{\text{终身支出}}=\overbrace{Q_1+\frac{Q_2}{1+r}}^{\text{终身收入}}}_{\text{两期终身预算约束}}.$$

说明：

(1) 效用函数假设为可分可加的形式，即 $U(C_1,C_2)=u(C_1)+u(C_2)$；

(2) 不同时间的效用对不同时刻而言有差异，第 2 期的效用通过主观贴现因子 $0<\beta\equiv\frac{1}{1+\rho}<1$ 作为第 1 期衡量的对象，$\rho>0$ 是主观贴现率。考虑主观贴现率的可分可加的效用函数为 $U(C_1,C_2)=u(C_1)+\beta u(C_2)$；

(3) U 表示以期初（此处是第 1 期）为衡量基准的终身效用函数；$u(\cdot)$ 表示即期凹效用函数，即 $u'(\cdot)>0$, $u''(\cdot)<0$。

(4) 禀赋经济体意味着两期的收入给定，故 Q_1 和 Q_2 皆外生，用灰色标示。站在第 1 期来看，Q_2 尚未发生，这里隐含了完美预期的假设，即 $\mathbb{E}_1 Q_2=Q_2$。$\mathbb{E}$ 表示预期算子，下标 1 表示第 1 期的信息集（若有多期则表示截止第 1 期的信息集）。

(5) 假设满足 Inada 条件，即每期总会有所消费，不会浪费任何资源，这意味着各期预算约束的不等式约束皆是紧的，不等式约束转为等式约束（在稍后介绍的不等式约束最优化问题中这将更明晰）。

(6) 由于仅考虑两期，第 1 期不会有上一期的储蓄，第 2 期不储蓄，故 $S_0=0=S_2$，此亦为初始条件和终结条件。但第 2 期除禀赋收入外，第 1 期储蓄在第 2 期经折旧后产生的本息将一并被消费，实际利率为 r，它由市场决定，对家庭部门而言，相当于一个外生变量，同样用灰色标示。简化起见，假设储蓄并无折旧，即 $\delta=0$。若以第 1 期 1 单位消费品为衡量尺度，则第 2 期消费品的实际价格为 $\frac{1}{1+r}$；若以第 2 期 1 单位消费品为衡量尺度，

则第 1 期消费品的实际价格为 $1+r$。换个角度来理解这两组相对实际价格，因为不同时间的消费品价值不宜直接比较，因此可选定某个时间作为比较的基准，若选用第 1 期为基准，假设第 1 期消费品的实际价格为 1，则第 2 期消费的实际价格站在第 1 期来看，相当于 $\frac{1}{1+r}$，即金融学上的现值一说；若选用第 2 期为基准，假设第 2 期消费品的实际价格为 1，则第 1 期消费品的实际价格到第 2 期时应为 $(1+r)$。上述模型中，C_1 和 Q_1 的实际价格设为 1，C_2 和 Q_2 的实际价格为 $\frac{1}{1+r}$。

(7) 通过 S_1 这个中间纽带合并第 1 期和第 2 期的流动预算约束（左），得到跨期终身预算约束（右）。

(8) 在此两期最优化问题中：选择变量可以是 C_1，即确定了 C_1，根据第 1 期的预算约束能确定 S_1，再根据第 2 期预算约束能确定 C_2；选择变量可以是 C_2，即确定了 C_2，根据第 2 期的预算约束能确定 S_1，再根据第 1 期预算约束能确定 C_1；选择变量还可以是 S_1，即确定了 S_1，根据第 1 期预算约束能确定 C_1，根据第 2 期预算约束能确定 C_2。选择变量也被称为控制变量，而控制变量 S_1 还可被称为内生状态变量，S_0 被称为初始状态变量或前定状态变量。

i) 消元法

消元法 1。根据终身预算约束消掉目标函数中的 C_2，选择变量只剩 C_1，变成无约束最优化问题：

$$\max_{C_1} U = u(C_1) + \beta u\,\underbrace{\left[(1+r)(Q_1 - C_1) + Q_2\right]}_{C_2}.$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}C_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\overbrace{\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}}}_{\text{边际替代率}} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{1+r}}}_{\text{相对价格}}.$$

二阶充分条件为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}C_1^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C_1}\left[u'(C_1) - \beta(1+r)u'(C_2)\right] = u''(C_1) + \beta^2(1+r)^2 u''(C_2) < 0.$$

可见，为了确保效用函数取得极大值，应使 $u''(C_1) < 0$ 和 $u''(C_2) < 0$，二阶导处处小于 0，因此即期效用函数为凹函数，终身效用函数是即期效用函数的线性相加，也为凹函数，故而，极大值亦为最大值。

消元法 2。根据终身预算约束消掉目标函数中的 C_1，选择变量只剩 C_2，变成无约束最优化问题：

$$\max_{C_2} U = u\underbrace{\left(Q_1 + \frac{Q_2}{1+r} - \frac{C_2}{1+r}\right)}_{C_1} + \beta u(C_2).$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}C_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\overbrace{\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}}}_{\text{边际替代率}} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{1+r}}}_{\text{相对价格}}.$$

消元法 3。既然有流动预算约束和终身预算约束两种形式，根据一个终身预算约束的消元法求解之外，也可根据两个流动预算约束求解：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \cancel{[r + (1-\delta)]S_0} + Q_1 - S_1, \\ C_2 &= [r + (1-\delta)]S_1 + Q_2 - \cancel{S_2}. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \max_{S_1} U = u\,\overbrace{(Q_1 - S_1)}^{C_1} + \beta u\,\overbrace{([r + (1-\delta)]S_1 + Q_2)}^{C_2}.$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}S_1}=0 \xRightarrow{-u'(C_1)+(1+r)\beta u'(C_2)=0} \overbrace{\underbrace{\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}}_{\text{边际替代率}}}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{1+r}}_{\text{相对价格}}}.$$

消元法 2 和 3 的二阶条件分别对相应选择变量求二阶导即可。

ii) **微分法**

在 C_1-C_2 平面上，无差异曲线或等效用曲线 ($\mathrm{d}U=0$) 的斜率为：

$$0=u'(C_1)\mathrm{d}C_1+\beta u'(C_2)\mathrm{d}C_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1}=-\frac{u'(C_1)}{\beta u'(C_2)}.$$

在 C_1-C_2 平面上，每期收入固定时 ($\mathrm{d}Y_1=0=\mathrm{d}Y_2$) 动态预算约束线的斜率为：

$$\mathrm{d}C_1+\frac{1}{1+r}\mathrm{d}C_2=0+0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}C_1}=-(1+r).$$

极大值或最大值时两者相等，从而得到相同的一阶必要条件：

$$\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}=\frac{1}{1+r}.$$

iii) **乘数法**

构造 Lagrange 函数，最优化问题中的选择变量增加了 Lagrange 乘子 λ：

$$\max_{C_1,C_2,\lambda}\mathcal{L}\equiv[u(C_1)+\beta u(C_2)]+\lambda\left[\left(Q_1+\frac{Q_2}{1+r}\right)-\left(C_1+\frac{C_2}{1+r}\right)\right].$$

一阶必要条件为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1}&=u'(C_1)-\lambda=0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2}&=\beta u'(C_2)-\lambda\frac{1}{1+r}=0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}&=\left(Q_1+\frac{Q_2}{1+r}\right)-\left(C_1+\frac{C_2}{1+r}\right)=0.
\end{aligned}$$

第三个一阶条件就是动态预算约束，前两个一阶条件消掉 λ 合并为：

$$\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}=\frac{1}{1+r} \quad\Leftrightarrow\quad u'(C_1)=\beta(1+r)u'(C_2).$$

这便是动态宏观中耳熟能详的跨期 Euler 方程，它表示第 1 期少消费 1 单位使第 1 期的边际效用减少 $u'(C_1)$，但减少的消费改为储蓄后会使第 2 期增加收入 $1+r$ 而带来仍以第 1 期为基期的边际效用的增加 $\beta(1+r)u'(C_2)$，达到最优时这两者相等（边际成本等于边际收益）。

也可根据对偶问题通过 Lagrange 乘子 μ 构造 Lagrange 函数：

$$\begin{aligned}
&\min_{C_1,C_2}E=C_1+\frac{C_2}{1+r},\\
\text{s.t.}\quad & u(C_1)+\beta u(C_2)\geq U \xRightarrow{\text{Inada 条件}} u(C_1)+\beta u(C_2)=U.\\
\Rightarrow\quad & \min_{C_1,C_2,\mu}\mathcal{L}\equiv\left(C_1+\frac{C_2}{1+r}\right)+\mu\{U-[u(C_1)+\beta u(C_2)]\}.
\end{aligned}$$

一阶必要条件是：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1}&=1-\mu u'(C_1)=0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2}&=\frac{1}{1+r}-\mu\beta u'(C_2)=0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = U - [u(C_1) + \beta u(C_2)] = 0.$$

第三个一阶条件就是固定效用水平，前两个一阶条件消掉 μ 合并为：

$$\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)} = \frac{1}{1+r}.$$

原问题和对偶问题的一阶条件完全相同。但通过第一个或第二个一阶条件容易发现 Lagange 乘子 λ 和 μ 互为倒数，即 $\lambda\mu = 1$。

例 12-2. 生产经济体的两期消费决策[5]

$$\max_{C_1,C_2} U = u(C_1) + \beta u(C_2),$$

$$\text{s.t.}\quad \underbrace{\overbrace{\left.\begin{aligned} C_1 + K_2 &\le A_1 K_1,\\ C_2 + K_3 &\le A_2 K_2.\end{aligned}\right\}}^{\text{各期流动预算约束}}}_{K_2=I_1+(1-\delta)K_1 \overset{\delta=1}{\Rightarrow} K_2=I_1} \xRightarrow[C_1,C_2>0]{K_1\text{给定}, K_3=0} \left\{\begin{aligned} C_1 + K_2 &= A_1 K_1,\\ C_2 + 0 &= A_2 K_2.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{C_1 + \frac{C_2}{A_2}}^{\text{终身支出}} = \overbrace{A_1 K_1}^{\text{终身收入}}}_{\text{两期终身预算约束}}.$$

构造 Lagrange 函数，最优化问题中的选择变量增加了 Lagrange 乘子 λ：

$$\max_{C_1,C_2,\lambda} \mathcal{L} \equiv [u(C_1) + \beta u(C_2)] + \lambda\left(A_1 K_1 - C_1 - \frac{C_2}{A_2}\right).$$

一阶必要条件为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} &= u'(C_1) - \lambda = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} &= \beta u'(C_2) - \lambda\frac{1}{A_2} = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= A_1 K_1 - C_1 - \frac{C_2}{A_2} = 0.
\end{aligned}$$

稍作整理：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta u'(C_2^\circ)}{u'(C_1^\circ)} &= \frac{1}{A_2},\\ C_1 + \frac{C_2}{A_2} &= A_1 K_1.\end{aligned}\right\} \xRightarrow[u(C_t)=\log C_t]{u(C_t)=\frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}}} \begin{cases}
\text{CES}\left\{\begin{aligned} \left(\frac{C_2^\circ}{C_1^\circ}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} &= \frac{1}{\beta A_2},\\ A_2 C_1 + C_2 &= A_1 A_2 K_1.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} C_1^\otimes &= \frac{\left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^\sigma A_2}{1+\left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^\sigma A_2} A_1 K_1,\\ C_2^\otimes &= \frac{A_2}{1+\left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^\sigma A_2} A_1 K_1.\end{aligned}\right.\\ &\xRightarrow{Y_1=A_1K_1} \left\{\begin{aligned} I_1^\otimes &= A_1 K_1 - C_1^\otimes = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^\sigma A_2} A_1 K_1,\\ K_2^\otimes &= I_1^\otimes,\\ Q_2^\otimes &= A_2 K_2^\otimes = \frac{A_2}{1+\left(\frac{1}{\beta A_2}\right)^\sigma A_2} A_1 K_1.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\\[2ex]
\text{对数}\left\{\begin{aligned} C_2^\circ &= \beta A_2 C_1^\circ,\\ A_2 C_1 + C_2 &= A_1 A_2 K_1.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} C_1^\otimes &= \frac{1}{1+\beta} A_1 K_1,\\ C_2^\otimes &= \frac{\beta A_2}{1+\beta} A_1 K_1.\end{aligned}\right.\\ &\xRightarrow{Q_1=A_1K_1} \left\{\begin{aligned} I_1^\otimes &= A_1 K_1 - C_1^\otimes = \frac{\beta}{1+\beta} A_1 K_1,\\ K_2^\otimes &= I_1^\otimes,\\ Q_2^\otimes &= A_2 K_2^\otimes = \frac{\beta A_2}{1+\beta} A_1 K_1.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.
\end{cases}.$$

以上分列了跨期替代弹性不为 1（CES）及为 1（对数）时的即期效用函数所对应的一阶条件，结合约束条件（也可以说是一阶条件的组成部分）可解出第 1 期最优消费 C_1、第 2 期最优消费 C_2、第 1 期最优投资 I_1、第 2 期最优资本 K_2 以及第 2 期最优产出 Y_2。由于第 1 期资本 K_1 给定，第 1 期产出 Y_1 直接给出。但总归，它们皆为外生技术变量 A_1 和（或）A_2 的函数。

[5] 本例借鉴了 Moll (2023)，但增加了对数效用函数情形，以更简单明了。

注意，最优化的解是均衡的一种，谓之目标均衡。因此本章的内容是下一章“均衡求解”的特例。此外，这些最优解是显示解（或称之分析解、解析解），其特点为每个内生变量全由给定的初始状态变量 K_1 或外生变量（A_1, A_2）或参数（σ, β）决定。初始状态变量、外生变量或参数可统归为外生变量，这种形式的解也称为“简型方程”。若目标均衡是简型方程且相应函数连续可微，则通过微积分方法可分析外生变量变动（也可笼统地称之为“冲击”）对内生变量的影响（即“比较分析”）。关于均衡求解和比较分析的系统介绍，留待本章之后。

1.2.1.2 完美预期下的多期决策

动态时，由两期拓展至多期，离散时间时多期仍有可数有限期和数不尽无穷期之分。有限期用 m 或 T 来表示，$m \to \infty$ 或 $T \to \infty$ 即为无穷期。

I. 有限期

在多变量单个等式约束及多变量多个等式约束的静态最优化问题中，用 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 来表示 m 个选择变量。离散时间 m 期动态最优化问题中，沿用 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 表示 m 个选择变量，但下标表示的是在时间 $t = 1, t = 2, \ldots, t = m$。由此不难发现，多变量离散静态与多期离散动态有较大相似性，为不至于混淆，不妨将符号 m 改成 T。

$$
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} O = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\
\text{s.t.} \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = z.
\end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} O = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\
\text{s.t.} \quad g^1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = z_1, \\
g^2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = z_2, \\
\vdots \\
g^n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = z_n.
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \text{多变量离散状态} \quad \text{vs.} \quad \text{多期离散动态}
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} O = f(x_1, x_2, \ldots, x_T), \\
\text{s.t.} \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_T) = z.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} O = f(x_1, x_2, \ldots, x_T), \\
\text{s.t.} \quad g^1(x_1, x_2) = z_1, \\
g^2(x_2, x_3) = z_2, \\
\vdots \\
g^{T-1}(x_{T-1}, x_T) = z.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

尽管符号下标的含义不同，但离散时间的 T 期动态最优化问题与 m 个变量单个或多个等式约束的静态最优化问题在形式上仍颇为相似。不同的是，静态模型中单个等式约束和多个等式约束是两类不同的最优化问题，而动态模型中单个等式约束和多个等式约束有可能写成一个约束，具体看以下**例**题。

例 13-0. 禀赋经济体的有限期消费决策[6]

$$
\left.\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} U = u(\mathbf{C}), \\
\text{s.t.} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \leq \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}, \\
\mathbf{C} \geq 0.
\end{array}\right\} \text{同期离散状态} \quad \overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{多期离散动态}
\left\{\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} U = u(\mathbf{C}), \\
\text{s.t.} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \leq \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}, \\
\mathbf{C} \geq 0.
\end{array}\right.
$$

其中：$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为外生价格向量和外生收入向量。根据前述 Inada 条件，消费向量 $\mathbf{C}$ 总为正，故可先规避不等式约束问题：

$$
\left.\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} U = u(\mathbf{C}), \\
\text{s.t.} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}.
\end{array}\right\} \text{同期离散状态} \quad \overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{多期离散动态}
\left\{\begin{array}{r}
\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}} U = u(\mathbf{C}), \\
\text{s.t.} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}.
\end{array}\right.
$$

无论是同期静态 ($\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_i\}, \mathbf{X} = \{\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}\}, i = 1, 2, \ldots, m$)，还是多期动态 ($\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t\}, \mathbf{X} = \{\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}\}, t = 1, 2, \ldots, T$)，此为标准的等式约束最优化问题，可通过构造 Lagrange 函数求解：

$$
\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{C}} \mathcal{L} \equiv u(\mathbf{C}) + \lambda \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{C}). \\
\xrightarrow{\text{F.O.C.}} \quad & \nabla u(\mathbf{C}) = \lambda \mathbf{P}, \\
\Rightarrow \quad & \mathbf{C} = \mathbf{C}(\lambda \mathbf{P}),
\end{aligned}
$$

[6] 本例改编自 Edmond (2019)。

$$
\begin{aligned}
&\xRightarrow{\text{将其代入预期约束}} \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}(\lambda\mathbf{P}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q},\\
&\Rightarrow \qquad \lambda = \lambda(\mathbf{P},\mathbf{Q}),\\
&\Rightarrow \qquad \mathbf{C}^{\circ} = \mathbf{C}^{\circ}[\lambda(\mathbf{P},\mathbf{Q})\mathbf{P}] = \mathbf{C}^{\circ}(\mathbf{P},\mathbf{Q}).
\end{aligned}
$$

其中价格水平对消费既有替代效应这一直接影响，又有收入效应（动态中还有财富效应）这一通过 Lagrange 乘子 λ 产生的间接效应。价格变动的替代效应、收入效应、财富效应等本质上是比较分析的主题，将在第三章进一步阐述。

对于动态离散时间而言，一阶条件还可表述为：

$$u'(C_t) = \lambda \mathbf{P}, \quad t = 1, 2, \ldots$$

连续两期的边际效用之比表示边际替代率，最优化时的边际替代率等于相邻两期的价格比（相对价格）：

$$\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t}.$$

它是关于消费的一阶差分方程（又被称为跨期消费 Euler 方程）。

沿用可分可加的终身效用函数，上式改写为：

$$
\begin{aligned}
U_1(\mathbf{C}) &= \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(C_t),\\
\Rightarrow \quad \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} &= \frac{P_{t+1}}{P_t}.
\end{aligned}
$$

加入主观贴现因子 β 后，总效用是未来效用贴现至当前（第 1 期）的加总 (i.e., U_1)。

同样得到了跨期消费 Euler 方程，经济学含义与两期消费决策中相同，只是第 1 期与第 2 期之间消费储蓄的平衡变成了任意两期之间消费储蓄的平衡。

例 13-1. 禀赋经济体的有限期消费决策

有限期目标函数仍假设为可分可加型，各期流动预算约束可写成跨期终身预算约束。由此，有限期最优化问题为：

$$\max_{C_1, C_2, \ldots, C_T} U_1 = u(C_1) + \beta u(C_2) + \cdots + \beta^{T-1} u(C_T),$$

$$
\text{s.t.} \quad \underbrace{\overbrace{\left.\begin{aligned}
C_1 + S_1 &\le (1+r)S_0 + Q_1,\\
C_2 + S_2 &\le (1+r)S_1 + Q_2,\\
&\vdots\\
C_T + S_T &\le (1+r)S_{T-1} + Q_t,\\
0 &\le C_1, C_2, \ldots, C_T.
\end{aligned}\right\}}}_{\text{各期流动预算约束}}
\xRightarrow[C_1,\ldots,C_T>0]{S_0=0=S_T}
\underbrace{\overbrace{C_1 + \frac{C_2}{1+r} + \cdots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}}^{\text{终身支出}} = \overbrace{Q_1 + \frac{Q_2}{1+r} + \cdots + \frac{Q_t}{(1+r)^{T-1}}}^{\text{终身收入}}}_{\text{有限期终身预算约束}}.
$$

上述多个流动预算约束可类似于两期情形改写成单个跨期终身预算约束，解出 C_T 代入目标函数，等式约束的有限期动态最优问题变成了无约束最优化问题，对 $C_1, C_2, \ldots, C_{T-1}$ 求偏导，可得到 $T-1$ 个一阶条件。但变量较多时构造 Lagrange 函数求解或更为简便：

$$\max_{C_1, C_2, \ldots, C_T, \lambda} \mathcal{L} \equiv \overbrace{\left[u(C_1) + \beta u(C_2) + \cdots + \beta^{T-1} u(C_T)\right]}^{\text{终身效用}} + \lambda \overbrace{\left[\left(Q_1 + \frac{Q_2}{1+r} + \cdots + \frac{Q_t}{(1+r)^{T-1}}\right) - \left(C_1 + \frac{C_2}{1+r} + \cdots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}\right)\right]}^{\text{跨期终身预算约束}}.$$

一阶必要条件为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = u'(C_1) - \lambda = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} &= \beta u'(C_2) - \lambda \frac{1}{1+r} = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} &= \beta^2 u'(C_3) - \lambda \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 = 0,\\
&\vdots\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_T} &= \beta^{\beta-1} u'(C_T) - \lambda \left(\frac{1}{1+r}\right)^{T-1} = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \left(Q_1 + \frac{Q_2}{1+r} + \cdots + \frac{Q_m}{(1+r)^{T-1}}\right) - \left(C_1 + \frac{C_2}{1+r} + \cdots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

最后一个即为终身预期约束的重复。前面 m 个一阶条件任意相邻两期合并后成为消费 Euler 方程：

$$
\frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(t)} = \frac{1}{1+r}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.
$$

既然已经用 t 来表示某一离散时刻，不妨将目标函数和流动预算约束也都换成 t 来表示：

$$
\left.\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=1}^T} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(C_t),\\
&\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} C_t + S_t &\le (1+r)S_{t-1} + Q_t,\\ 0 &\le C_t. \end{aligned}\right\} t = 1, 2, \ldots, T.\\
&\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = S_T.
\end{aligned}\right\}
\xRightarrow[\lim_{C_t \to \infty} \frac{\partial u(\cdot)}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow C_t < \infty]{\lim_{C_t \to 0} \frac{\partial u(\cdot)}{\partial C_t} = \infty \Rightarrow C_t > 0}
\left\{\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=1}^T} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(C_t),\\
&\text{s.t.} \quad \left\{\begin{aligned} C_t + S_t &= (1+r)S_{t-1} + Q_t,\\ t &= 1, 2, \ldots, T. \end{aligned}\right.\\
&\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = S_T.
\end{aligned}\right.
$$

这本是非负约束和不等式约束叠加的最优化问题，但基于 Inada 条件，可使不等式为紧约束而排除角点解。于是，可直接重新构造 Lagrange 函数：

$$
\max_{\{C_t, S_t, \lambda_t\}_{t=1}^T} \mathcal{L} \equiv \sum_{t=1}^{T} \left\{ \beta^{t-1} \overbrace{u(C_t)}^{\text{即期效用}} + \lambda_t \overbrace{[(1+r)S_{t-1} + Q_t - (C_t + S_t)]}^{\text{即期流动预算约束}} \right\}.
$$

一阶必要条件为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} &= \beta^{t-1}[u'(C_t) - \lambda_t] = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_t} &= -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1+r) = 0,\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} &= (1+r)S_{t-1} + Q_t - (C_t + S_t) = 0.
\end{aligned}
$$

第三个条件即为流动预算约束。第一个条件前置一期:

$$
u'(C_t) = \lambda_t \quad \Rightarrow \quad u'(C_{t+1}) = \lambda_{t+1}.
$$

两期合并，结合第二个一阶条件可得到熟悉的消费 Euler 方程：

$$
\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{\beta(1+r)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{1}{1+r} \quad \text{vs.} \quad \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t}.
$$

注意，此处用的是 m 期流动预算约束故而用了 T 个 Lagrange 乘子 $\{\lambda_t\}_{t=1}^T$。若根据相关假设将关于储蓄的差分方程 $S_t = (1+r)S_{t-1} + (Q_t - C_t)$，结合初始条件 $S_0 = 0$ 和终结条件 $S_T = 0$，得到单个跨期终身预期约束后仍可只用一个乘子 λ 构造 Lagrange 函数求解。另外，本例中任一期的价格都是 1，第 $t+1$ 期贴现到第 t 期的价格是 $\frac{1}{1+r}$，因此第 $t+1$ 期与第 t 期的价格之比（即相对价格）为 $\frac{\frac{1}{1+r}}{1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$。

换言之：

$$
\underbrace{\overbrace{u'(C_t)}^{\text{第}t\text{期的边际成本}}}_{\text{第}t\text{期少消费 1 单位损失边际效用}} = \underbrace{\overbrace{\beta(1+r)u'(C_{t+1})}^{\text{贴现到第}t\text{期的边际收益}}}_{\text{第}t+1\text{期因储蓄增加消费而多有边际效用}}.
$$

II. 无穷期

例 13-2. 禀赋经济体的无穷期消费决策

沿用下标 t 来表示无穷期动态最优化问题也更方便，$t = 1 \to T \to \infty$ 从而有 $t = 1 \to \infty$ 表示有限期转至无穷期：

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(C_t), \\
&\text{s.t.} \quad \left\{\begin{aligned} C_t + S_t \le (1+r)S_{t-1} + Q_t, \\ 0 \le C_t. \end{aligned}\right\} t = 1, 2, \ldots, \infty. \\
&\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} S_t.
\end{aligned}\right\} \xRightarrow[C_t<\infty]{C_t>0} \left\{\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(C_t), \\
&\text{s.t.} \qquad C_t + S_t = (1+r)S_{t-1} + Q_t, \\
&\qquad\qquad t = 1, 2, \ldots, \infty. \\
&\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} S_t.
\end{aligned}\right.$$

其中，$0 < C_t < \infty$ 源自前述 Inada 条件。

i) 乘数法

为从静态模型平滑过渡到动态模型，变量下标曾一一对应。以上是给定 S_0，最优化问题始于 $t = 1$。不妨给定 S_{-1}，让最优化问题问题始于 $t = 0$，即：

$$\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} U_0 \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t} u(C_t), \\
&\text{s.t.} \quad C_t + S_t = (1+r)S_{t-1} + Q_t, \\
&\qquad \text{给定 } S_{-1} = 0 = \lim_{t\to\infty} S_t.
\end{aligned}$$

微调后，构造 Lagrange 函数为：

$$\max_{\{C_t, S_t, \lambda_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathcal{L} \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \left\{\beta^t u(C_t) + \lambda_t [(1+r)S_{t-1} + Q_t - (C_t + S_t)]\right\}.$$

分别对选择变量 C_t, S_t, λ_t 求导，结果与有限期动态最优化中相同。结合消费 Euler 方程与流动预算约束可得各期的消费需求方程。若要得到消费需求函数的显性表达式，有待定义即期效用函数。

ii) 规划法

较静态最优化问题的不同之处在于，除了 Lagrange 等常用方法外，还有动态规划方法可选。

步骤 1) 根据预算约束，可求解：

$$C_t = (1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t.$$

代入目标函数，等式约束的动态最优化问题变成无约束：

$$\max_{\{S_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t], \qquad \beta \in (0,1).$$

步骤 2) 换用 $V(S_{-1}, Y_0)$ 表示给定初始状态欲使目标函数最优的值函数：

$$\begin{aligned}
V(S_{-1}, Q_0) &\equiv \max_{\{S_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[\overbrace{(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t}^{C_t}], \\
&= \max_{\{S_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{u[(1+r)S_{-1} + Q_0 - S_0] + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u[(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t]\right\}, \\
&= \max_{\{S_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{u[(1+r)S_{-1} + Q_0 - S_0] + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t]\right\}, \\
&= \max_{S_0} \left\{u[(1+r)S_{-1} + Q_0 - S_0] + \beta \max_{\{S_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u[(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t]\right\},
\end{aligned}$$

$$= \max_{S_0}\left\{u[\underbrace{(1+r)S_{-1}+Q_0-S_0}_{C_0}]+\beta V(S_0,Q_1)\right\}.$$

不失一般性，也可令 S_{t-1} 作为初始状态变量，S_t 作为控制变量以实现跨期终身最优：

$$\underbrace{V(S_{t-1},Q_t)=\max_{S_t}\left\{\overbrace{u[\overbrace{(1+r)S_{t-1}+Q_t-S_t}^{C_t}]+\beta\overbrace{\underbrace{V(S_t,Q_{t+1})}_{S_t\text{视为状态变量欲使后续阶段最优}}}^{S_{t+1}\text{被选择以实现包括新的初始阶段的全部阶段最优}}}^{S_t\text{被选择以实现包括初始阶段的全部阶段最优}}\right\}}_{S_{t-1}\text{作为状态变量欲使后续阶段最优}}.$$

上述递归泛函形式的动态最优化问题被称为 Bellman 方程。[7]现在要求解的不是可赋具体值的变量，而是一个路径函数，即给定外生的 $u(C_t),Q_t,\beta$ 去求解内生的函数 $V(S_{t-1})$。

步骤 3) 观察 Bellman 方程的右侧。若已知$V(S_t,Q_{t+1})$，则其相当于一个**两期**动态最优化问题，易求一阶条件，并通过其解出控制变量从而得到策略函数：

$$\max_{S_t}\left\{u[\overbrace{(1+r)S_{t-1}+Q_t-S_t}^{C_t}]+\beta V(S_t,Q_{t+1})\right\},$$

$$\xRightarrow{\text{一阶条件}}\quad u'(C_t)\frac{\partial C_t}{\partial S_t}+\beta\frac{\mathrm{d}V(S_t,Q_{t+1})}{\mathrm{d}S_t}=0,$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial C_t}{\partial S_t}=-1}\quad \beta\frac{\mathrm{d}V(S_t,Q_{t+1})}{\mathrm{d}S_t}=u'(C_t).$$

注意，$u'(C_t)$ 是 S_{t-1},S_t,Q_t 的函数，即 $u'(C_t)=u'(C_t)(S_{t-1},S_t,Q_t)$。

上述一阶条件的含义为，给定第 $t+1$ 期的目标函数已实现最优，则选择 S_t 使得从第 t 期开始是为最优，从而形成一个递归选择的结构。换言之，若 $V(S_t,Q_{t+1})$ 可知，则其关于 S_t 的导数可算，由此可求解出策略函数或决策规划 $S_t=g(S_{t-1})=\arg\max\limits_{S_t}[u(S_{t-1},S_t)+\beta V(S_t)]$。问题来到如何求解 $\frac{\mathrm{d}V(S_t,Q_{t+1})}{\mathrm{d}S_t}$。

步骤 4) 观察 Bellman 方程的左侧。前置一期有：

$$\underbrace{\overbrace{V(S_t,Q_{t+1})}^{\text{值函数}}=\max_{S_{t+1}}\left\{\overbrace{u[\overbrace{(1+r)S_t+Q_{t+1}-S_{t+1}}^{C_{t+1}}]+\beta\overbrace{\underbrace{V(S_{t+1},Q_{t+2})}_{S_{t+1}\text{视为状态变量欲使后续阶段最优}}}^{S_{t+2}\text{被选择以实现包括新的初始阶段的全部阶段最优}}}^{S_{t+1}\text{被选择以实现包括初始阶段的全部阶段最优}}\right\}}_{S_t\text{作为状态变量欲使后续阶段最优}}\xLeftrightarrow[\text{初始状态不同}]{\text{结构完全等价}}V(S_{t-1},Q_t).$$

前置一期后继续选择 S_{t+1} 得到的条件与上一步骤无异，但上一步骤的待解之处在于前置一期的值函数对状态变量 S_t 求导上。基于值函数的策略函数为 $S_{t+1}=g(S_t)$，故前置一期的 Bellman 方程还可写作：

$$\overbrace{V(S_t,Q_{t+1})}^{\text{最优值函数}}=u[(1+r)S_t+Q_{t+1}-S_{t+1}(S_t)]+\beta\overbrace{V[S_{t+1}(S_t),Q_{t+1}]}^{\text{最优值函数}}.$$

[7]根据该形式的发现者美国数学家 Richard Bellman (1920-1984) 命名。

根据包络定理（值函数关于状态变量的比较分析）可计算：[8]

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(S_t, Q_{t+1})}{\mathrm{d}S_t} &= \frac{\mathrm{d}u(\cdot)}{\mathrm{d}C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_t} + \frac{\mathrm{d}u(\cdot)}{\mathrm{d}C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_{t+1}}\frac{\mathrm{d}S_{t+1}}{\mathrm{d}S_t} + \beta\frac{\mathrm{d}V(\cdot)}{\mathrm{d}S_{t+1}}\frac{\mathrm{d}S_{t+1}}{\mathrm{d}S_t},\\
&= \frac{\mathrm{d}u(\cdot)}{\mathrm{d}C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_t} + \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}u(\cdot)}{\mathrm{d}C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_{t+1}} + \beta\frac{\mathrm{d}V(\cdot)}{\mathrm{d}S_{t+1}}\right]}_{\text{关于选择变量的一阶导为 0}}\frac{\mathrm{d}S_{t+1}}{\mathrm{d}S_t},\\
&= u'(C_{t+1})\frac{\mathrm{d}C_{t+1}}{\mathrm{d}S_t} + 0\times g'(S_t),\\
&= u'(C_{t+1})(1+r).
\end{aligned}
$$

步骤 5) 将应用包络定理的上述结果代入一阶条件得到与 Lagrange 方法相同的 Euler 方程：

$$
\frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{1}{1+r}.
$$

从思想上来看，动态规划似将动态最优问题转为静态最优问题，Bellman 方程可重新表述为：

$$
V(x) = \max_y [u[f(x) - y] + \beta V(y)].
$$

上式中 x 是状态变量（即 S_{t-1}），y 是作为选择变量的内生状态变量（i.e., S_t），根据预算约束可知另一选择变量（控制变量）可表示为 $f(x) - y$（相当于前述中的 $(1+r)S_{t-1} + Q_t - S_t$）。根据值函数中的包络定理：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = u'[f(x) - y]f'(x),\\
\xRightarrow[y=g(x)]{\text{策略函数}}\quad & V'(x) = u'[f(x) - g(x)]f'(x),\\
\xRightarrow[\text{内生状态变量成状态变量}]{\text{前置一期}}\quad & V'(y) = u'[f(y) - g(y)]f'(y).
\end{aligned}
$$

对 Bellman 方程求最优化的一阶必要条件为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}y} = 0 = -u'[f(x) - y] + \beta V'(y),\\
\Rightarrow\quad & u'[f(x) - y] = \beta V'(y),\\
\Rightarrow\quad & u'[f(x) - y] = \beta\overbrace{u'[f(y) - g(y)]f'(y)}^{V'(y)},\\
\xRightarrow[g(x)\equiv\arg\max_y u(f(x)-y)+\beta V(y)]{\text{代入策略函数}y=g(x)}\quad & u'[f(x) - g(x)] = \beta u'[f[g(x)] - g[g(x)]f'[g(x)]],\\
\xRightarrow{\text{i.e.,}}\quad & u'[f(x_{t-1}) - g(x_{t-1})] = \beta u'[f[g(x_{t-1})] - g[g(x_{t-1})]f'[g(x_{t-1})]],\\
\xRightarrow[x_{t+1}=g(x_t)=g(g(x_{t-1}))]{x_t=g(x_{t-1})}\quad & u'[f(x_{t-1}) - x_t] = \beta u'[f(x_t) - x_{t+1}]f'(x_t),\\
\Rightarrow\quad & \frac{\beta u'[f(x_t) - x_{t+1}]}{u'[f(x_{t-1}) - x_t]} = \frac{1}{f'(x_t)}.
\end{aligned}
$$

省略禀赋收入，约束条件还可表述为：

$$
C_t + \frac{1}{1+r}S_{t+1} = S_t,
$$

[8] 动态中的包络定理与静态中的包络定理同曲同工。设状态变量为 x_t，控制变量为 y_t，状态转移方程设为 $x_{t+1} = g(x_t, y_t)$，目标函数为 $\max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t F(x_t, y_t)$，据此 Bellman 方程为 $V(x_t) = \max\{F(x_t, y_t) + \beta V(x_{t+1})\}$。将作为约束条件的状态转移方程代入 Bellman 方程后为 $V(x_t) = \max\{F(x_t, y_t) + \beta V[g(x_t, y_t)]\}$。给定最优解 y_t° 的 Bellman 方程为 $V(x_t) = F(x_t, y_t^\circ) + \beta V[g(x_t, y_t^\circ)]$。包络定理意味着 $\underbrace{\frac{\mathrm{d}V(x_t)}{\mathrm{d}x_t}}_{\text{影子价格}} = \frac{\partial F(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t} + \frac{\partial F(x_t,y_t^\circ)}{\partial y_t^\circ}\frac{\mathrm{d}y_t^\circ}{\mathrm{d}x_t} + \beta\frac{\mathrm{d}V(x_{t+1})}{\mathrm{d}x_{t+1}}\left[\frac{\partial g(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t} + \frac{\partial g(x_t,y_t^\circ)}{\partial y_t^\circ}\frac{\mathrm{d}y_t^\circ}{\mathrm{d}x_t}\right] = \frac{\partial F(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t} + \underbrace{\left[\frac{\partial F(x_t,y_t^\circ)}{\partial y_t^\circ} + \beta\frac{\mathrm{d}V(x_{t+1})}{\mathrm{d}x_{t+1}}\frac{\partial g(x_t,y_t^\circ)}{\partial y_t^\circ}\right]}_{\text{一阶条件}=0}\frac{\mathrm{d}y_t^\circ}{\mathrm{d}x_t} + \beta\frac{\mathrm{d}V(x_{t+1})}{\mathrm{d}x_{t+1}}\frac{\partial g(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t} = \frac{\partial F(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t} + \beta\frac{\mathrm{d}V(x_{t+1})}{\mathrm{d}x_{t+1}}\frac{\partial g(x_t,y_t^\circ)}{\partial x_t}$。包络定理表明，在最优策略下，参数（如初始状态）的微小变化对值函数的影响只需要考虑该参数的直接影响，而忽略通过控制变量调整的间接影响。这是因为在最优时，控制变量的调整已经使得边际收益与边际成本相等，间接影响的净效应为零。

即下一期储蓄被贴现至当前期。

给定相同的初始条件及终结条件，该最优问题又为：

$$\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} U_0 \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t),$$
$$\text{s.t.} \quad S_{t+1} = (1+r)(S_t - C_t).$$

将预算约束（状态转移方程）代入 Bellman 方程：

$$V(S_t) = \max_{C_t}\{u(C_t) + \beta V[\overbrace{(1+r)(S_t - C_t)}^{S_{t+1}}]\}.$$

给定最优解（策略函数）$C_t^\circ = C_t^\circ(S_t)$，Bellman 方程为：

$$V(S_t) = u[C_t^\circ(S_t)] + \beta V\{(1+r)[S_t - C_t^\circ(S_t)]\}.$$

将一阶条件用于包络定理同样可得消费 Euler 方程：

$$\begin{aligned}
V'(S_t) &= u'(C_t^\circ)\frac{\mathrm{d}C_t^\circ}{\mathrm{d}S_t} + \beta V'(S_{t+1})(1+r)\left(1 - \frac{\mathrm{d}C_t^\circ}{\mathrm{d}S_t}\right), \\
&= \underbrace{\left[u'(C_t^\circ) - \beta(1+r)V'(S_{t+1})\right]}_{\text{一阶条件}=0}\frac{\mathrm{d}C_t^\circ}{\mathrm{d}S_t} + \beta(1+r)V'(S_{t+1}), \\
\Rightarrow \quad V'(S_t) &= \beta(1+r)V'(S_{t+1}), \\
\Rightarrow \quad u'(C_t) &= \beta(1+r)u'(C_{t+1}).
\end{aligned}$$

例 14. 生产经济体的无穷期消费决策

A) 分散竞争

a. 代表性厂商

给定实际工资和实际利率，厂商选择资本和劳动以实现利润最优化：

$$\max_{K_t} F(K_t, L_t, A_t) - (r+\delta)K_t - WL_t.$$

这本质上是个单变量无约束的静态最优化问题，一阶必要条件为：

$$F_K(K_t, L_t, A_t) = r + \delta \equiv R.$$

折旧率 $\delta \in [0,1]$：$\delta = 0$ 时完全不折旧，$\delta = 1$ 完全折旧。

b. 代表性家庭

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t),$$
$$\text{s.t.} \quad \underbrace{C_t + K_{t+1} + (1-\delta)K_t}_{I_t = S_t} = \underbrace{WL_t + RK_t}_{Y_t} + \underbrace{D_t}_{0},$$
$$\text{给定 } K_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} K_{t+1}.$$

其中 D_t 可视为家庭的资产收入，源自家庭拥有股权的企业的经济利润，完全竞争时企业经济利润为 0，所以 $D_t = 0$。若有必要，还可加上政府转移支付或一次性总付税以平衡预算约束。

B) 统一安排

禀赋经济体中假设每期有一个“从天而降”的收入，另外储蓄利息所得作为消费跨期配置的收益。本例考虑储蓄转化为投资，若资本完全折旧 ($\delta = 1$)，投资即为新增的全部资本，将其用于生产，产出亦为收入。产出除了资本要素投入外，还应有劳动要素和技术投入。简单起见，劳动和技术假设外生且为常数。故此，本例中主

要有资本市场和产品市场，市场出清时供需相等。故有：

$$\left.\begin{aligned} C_t + S_t &= Q_{dt}, \\ Q_{st} &= F(K_t^d, L_t, A_t), \\ K_{s,t+1} &= I_t, \end{aligned}\right\} \text{行为方程} \qquad \text{均衡条件} \left\{\begin{aligned} I_t &= S_t, \\ K_{dt} &= K_{st} = K_t, \\ Q_{dt} &= Q_{st} = Q_t. \end{aligned}\right.$$

合并上述行为方程和均衡条件，可得：

$$C_t + K_{t+1} = F(K_t, L_t, A_t) = (1+r)K_t + WL_t.$$

上述第二个等式源自分散经济体。比较此前禀赋经济体中与此处生产经济体中的预算约束：

$$\begin{cases} C_t + S_t &= (1+r)S_{t-1} + Q_t; \\ C_t + K_{t+1} &= (1+r)K_t \quad + WL_t. \end{cases}$$

在前述禀赋经济体中，也暗含了 $\delta = 1$ 的假设；K_{t+1} 和 K_t 这相邻的两期也可记为 K_t 和 K_{t-1}，如此生产函数 $Y = F(K_{t-1}, L_t)$；分属两个模型的禀赋收入 Q_t 和劳动 WL_t 都外生。对比之下，两个预算约束形式上可以高度一致，本质含义上也基本相同。

由此可得以下预算约束条件的效用最优化问题：

$$\begin{aligned} &\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t), \\ \text{s.t.} \quad & C_t + K_{t+1} = F(K_t, L_t, A_t), \\ & \text{给定 } K_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} K_{t+1}. \end{aligned}$$

简单起见，令外生变量生产技术和劳动力为常数并进一步标准化为 1，即 $A_t = A = 1 = L = L_t$。由预算约束解出 C_t 代入目标函数后写成 Bellman 方程：

$$\begin{aligned} V(K_0) &\equiv \max_{\{K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u[F(K_t) - K_{t+1}], \\ \Rightarrow \quad V(K_0) &= \max_{K_1} \{u[f(K_0) - K_1] + \beta V(K_1)\}, \\ \Rightarrow \quad V(K_t) &= \max_{K_{t+1}} \{u[F(K_t) - K_{t+1}] + \beta V(K_{t+1})\}, \\ \Rightarrow \quad V(K) &= \max_{X} \{u[F(K) - X] + \beta V(X)\}, \end{aligned}$$

上述倒数第二个 Bellman 方程是从始于第 0 期到始于任意第 t 期的推广；最后一个 Bellman 方程表达的是这种递归结构与具体的时期无关，总归是给定此前的物质资本 K（状态变量）以选择下一期物质资本 X 最优，X 即控制变量。

最优化的一阶条件为：

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}u[F(K) - X]}{\mathrm{d}X} + \beta \frac{\mathrm{d}V(X)}{\mathrm{d}X} = 0, \\ \Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}u[F(K) - X]}{\mathrm{d}[F(K) - X]} \frac{\mathrm{d}[F(K) - X]}{\mathrm{d}X} + \beta \frac{\mathrm{d}V(X)}{\mathrm{d}X} = 0, \\ \Rightarrow \quad & -u'[F(K) - X] + \beta \frac{\mathrm{d}V(X)}{\mathrm{d}X} = 0, \\ \Rightarrow \quad & u'[F(K) - X] = \beta \frac{\mathrm{d}V(X)}{\mathrm{d}X} \qquad \text{vs.} \qquad u'(C_t) = \lambda_t. \end{aligned}$$

若已知 $V(X)$，则可知 $\mathrm{d}V(X)/\mathrm{d}X$，由此可得策略函数或决策规则或反馈规则 $X = f(K)$。另外比较后易知 Lagrange 乘子 $\lambda_t \equiv \beta(\mathrm{d}V(K_{t+1})/\mathrm{d}K_{t+1})$，即为新生产的有形资本（或投资支出）的影子价格，亦即额外 1 单位有形资本所增加的终身效用的现值。

将其代入上式有：

$$u'[F(K) - f(K)] = \beta \frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)}.$$

将其代入 Bellman 方程，根据包络定理可推导：

$$
\begin{aligned}
& & V(K) &= u[F(K)-f(K)]+\beta V[f(K)],\\
&\Rightarrow & \frac{\mathrm{d}V(K)}{\mathrm{d}K} &= \frac{\partial}{\partial K}\{u[F(K)-f(K)]+\beta V[f(K)]\},\\
& & &= u'[F(K)-f(K)][F'(K)-f'(K)]+\beta\frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)}f'(K),\\
& & &= u'[F(K)-f(K)]F'(K)-u'[F(K)-f(K)]f'(K)+\beta\frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)}f'(K),\\
& & &= u'[F(K)-f(K)]F'(K)-\beta\frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)}f'(K)+\beta\frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)}f'(K),\\
& & &= u'[F(K)-f(K)]F'(K),\\
&\Rightarrow & \frac{\mathrm{d}V[f(K)]}{\mathrm{d}f(K)} &= u'\{F[f(K)]-f[f(K)]\}F'[f(K)],\\
&\Rightarrow & u'[F(K)-f(K)] &= \beta u'\{F[f(K)]-f[f(K)]\}F'[f(K)],\\
&\xrightarrow[K_{t+2}=f(f(K_t))]{K_{t+1}=f(K_t)} & u'[\underbrace{F(K_t)-K_{t+1}}_{C_t}] &= \beta u'[\underbrace{F(K_{t+1})-K_{t+2}}_{C_{t+1}}]F'(K_{t+1}).
\end{aligned}
$$

此亦为代入预算约束后的 Euler 方程，是关于有形资本的二阶差分方程；初始条件是给定非负的资本存量 (i.e., $K_0 \geq 0$)，横截性条件是 $\lim_{t\to\infty}\beta^t u'(C_t)K_{t+1}=0$。

可见，无论是求解 Lagrange 函数得到 Euler 方程，还是通过 Bellman 方程求解值函数，都可以得到策略函数。如果目标函数不太复杂，前者求解相对方便快速；尤其当目标函数有完全信息理性预期或不完全信息理性预期时（见第五章），后者更稳健可靠。

线性二次动态规划是动态规划的另一形式，指的是目标函数二次型而约束条件线性。

问题 1：如何得到二次型的目标函数？[9]

从双向量 Taylor 展开出发，

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t) \approx{}& F(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})+\overbrace{\begin{bmatrix}F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})' & F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'\end{bmatrix}}^{\text{梯度向量}}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t-\mathbf{x}^{\odot}\\ \mathbf{y}_t-\mathbf{y}^{\odot}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\mathbf{x}_t-\mathbf{x}^{\odot})' & (\mathbf{y}_t-\mathbf{y}^{\odot})'\end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{F_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2} & \frac{F_{\mathbf{xy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2}\\ \frac{F_{\mathbf{yx}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2} & \frac{F_{\mathbf{yy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2}\end{bmatrix}}^{\frac{1}{2}\text{Hessian 矩阵}}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t-\mathbf{x}^{\odot}\\ \mathbf{y}_t-\mathbf{y}^{\odot}\end{bmatrix},\\
={}& F(x_1^{\odot},x_2^{\odot},\cdots,x_k^{\odot},y_1^{\odot},y_2^{\odot},\cdots,y_l^{\odot})\\
&+F_{x1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(x_{1t}-x_1^{\odot})+F_{x2}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(x_{2t}-x_2^{\odot})+\cdots+F_{y1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(y_{1t}-y_1^{\odot})+F_{y2}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(y_{2t}-y_2^{\odot})+\cdots,\\
&+\frac{1}{2}\Big[F_{x1x1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(x_{1t}-x_1^{\odot})^2+F_{x1x2}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(x_{1t}-x_1^{\odot})(x_{2t}-x_2^{\odot})+\cdots+F_{x1y1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(x_{1t}-x_1^{\odot})(y_{1t}-y_1^{\odot})+\cdots\\
&+\ F_{y1y1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(y_{1t}-y_1^{\odot})^2+F_{y1y2}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(y_{1t}-y_1^{\odot})(y_{2t}-y_2^{\odot})+\cdots+F_{y1x1}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})(y_{1t}-y_2^{\odot})(x_{1t}-x^{\odot})+\cdots\Big],\\
={}& F(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'\mathbf{x}^{\odot}-F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'\mathbf{y}^{\odot}\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{x}^{\odot}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{\mathbf{xy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}+\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{\mathbf{yx}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{x}^{\odot}+\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{\mathbf{yy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}\\
&+(\cdot)\mathbf{x}_t+(\cdot)\mathbf{y}_t+\mathbf{x}_t'(\cdot)\mathbf{x}_t+\mathbf{x}_t'(\cdot)\mathbf{y}_t+\mathbf{y}_t'(\cdot)\mathbf{y}_t,\\
={}& F(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'\mathbf{x}^{\odot}-F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'\mathbf{y}^{\odot}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{x}^{\odot}+\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{\mathbf{xy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}+\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{\mathbf{yy}}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}\\
&+(\cdot)\mathbf{x}_t+(\cdot)\mathbf{y}_t+\mathbf{x}_t'(\cdot)\mathbf{x}_t+\mathbf{x}_t'(\cdot)\mathbf{y}_t+\mathbf{y}_t'(\cdot)\mathbf{y}_t.
\end{aligned}
$$

Taylor 展开的二次项就是二次型，为将稳态点和一次项也纳入二次型，须重新定义向量 $\mathbf{z}_t=[1\ \ \mathbf{x}_t\ \ \mathbf{y}_t]'$ 及其

[9] **[KydlandPrescott1982]** 用二次型表达目标函数，**[McCandless2008]** 在书中作了简明介绍，本节部分内容对此有所借鉴。

稳态 $\mathbf{z}^{\odot}=[1\ \ \mathbf{x}^{\odot}\ \ \mathbf{y}^{\odot}]'$，两者的等价性为：

$$F(\underbrace{\mathbf{x}_t}_{k\times k},\underbrace{\mathbf{y}_t}_{l\times l})\approx\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \mathbf{x}_t & \mathbf{y}_t\end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_t'}\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13}\\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{d}_{23}\\ \mathbf{d}_{31} & \mathbf{d}_{32} & \mathbf{d}_{33}\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{x}_t\\ \mathbf{y}_t\end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_t}=\underbrace{d_{11}}_{1\times 1}+(\mathbf{d}_{12}+\mathbf{d}_{21}')\mathbf{x}_t+(\mathbf{d}_{13}+\mathbf{d}_{31}')\mathbf{y}_t+\mathbf{x}_t'\underbrace{\mathbf{d}_{22}}_{k\times k}\mathbf{x}_t+\mathbf{x}_t'(\mathbf{d}_{23}+\mathbf{d}_{32}')\mathbf{y}_t+\mathbf{y}_t'\underbrace{\mathbf{d}_{33}}_{l\times l}\mathbf{y}_t.$$

其中系数矩阵被定义为：

$$\begin{aligned}
d_{11}&=F(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-\mathbf{x}^{\odot\prime}F_x(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-\mathbf{y}^{\odot\prime}F_y(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})+\frac{\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{xx}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{x}^{\odot}}{2}+\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{xy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}+\frac{\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{yy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})\mathbf{y}^{\odot}}{2},\\
d_{22}&=\frac{F_{xx}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2},\\
d_{33}&=\frac{F_{yy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2},\\
d_{12}=d_{21}'&=\frac{F_x(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'-\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{xx}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{yx}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2},\\
d_{13}=d_{31}'&=\frac{F_y(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})'-\mathbf{x}^{\odot\prime}F_{xy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})-\mathbf{y}^{\odot\prime}F_{yy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2},\\
d_{23}=d_{32}'&=\frac{F_{xy}(\mathbf{x}^{\odot},\mathbf{y}^{\odot})}{2}.
\end{aligned}$$

无穷期最优化的目标函数因此可用二次型表达。

问题 2：如何得到线性二次型的约束最优？

令 $\mathbf{y}_t$ 为选择变量（包括控制变量和内生状态变量），将 1 纳入状态向量 $\mathbf{x}_t$ 成增广状态向量 $\mathbf{x}_t^1$（增加一个维度），重新定义 $\mathbf{z}_t\equiv[\mathbf{x}_t^1\ \ \mathbf{y}_t]'$，结合线性约束，线性二次型为：

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{y}_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{F(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mathbf{z}_t'\mathbf{D}\mathbf{z}_t\right\} &&\Leftrightarrow\quad \max_{\mathbf{y}_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{\mathbf{z}_t'\mathbf{D}\mathbf{z}_t=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t' & \mathbf{y}_t'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{W}'\\ \mathbf{W} & \mathbf{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t'\\ \mathbf{y}_t'\end{bmatrix}\right\} &&\Leftrightarrow\quad \max_{\mathbf{y}_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\mathbf{x}_t^{1\prime}\mathcal{R}\mathbf{x}_t^1+\mathbf{y}_t'\mathcal{Q}\mathbf{y}_t+2\mathbf{y}_t'\mathcal{W}\mathbf{x}_t^1],\\
&\text{s.t. }\mathbf{x}_{t+1}=G(\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t)=\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{y}_t &&\Leftrightarrow\quad \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{x}_{t+1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{t+1}^1}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}}\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{x}_t\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}}_{\mathcal{B}}\mathbf{y}_t &&\Leftrightarrow\quad \mathbf{x}_{t+1}^1=\mathcal{A}\mathbf{x}_t^1+\mathcal{B}\mathbf{y}_t.
\end{aligned}$$

为表述方便，还将 $\mathbf{x}_t^1$ 写作 $\mathbf{x}_t$，$\mathcal{A}$ 写作 $\mathbf{A}$，$\mathcal{B}$ 写作 $\mathbf{B}$，但读者现在已清楚若 $\mathbf{x}_t$ 是包含元素 1 的增广向量，则矩阵 $\mathbf{A}$ 第一行除第一列元素为 1 外其余元素为 0，而 $\mathbf{B}$ 第一行所有元素为 0，Hessian 矩阵也作相应调整。线性二次型重新表述为：

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{y}_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t+2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t],\\
&\text{s.t.}\quad \underbrace{\mathbf{x}_{t+1}}_{(k+1)\times 1}=\underbrace{\mathbf{A}}_{(k+1)\times(k+1)}\underbrace{\mathbf{x}_t}_{(k+1)\times 1}+\underbrace{\mathbf{B}}_{(k+1)\times l}\underbrace{\mathbf{y}_t}_{l\times 1}
\end{aligned}$$

Bellman 方程：

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}_t)&=\max_{\mathbf{y}_t}[\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t+2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t+\beta V(\mathbf{x}_{t+1})],\\
&=\max_{\mathbf{y}_t}[\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t+2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t+\beta V(\mathbf{A}\mathbf{x}_t+\mathbf{B}\mathbf{y}_t)].
\end{aligned}$$

问题 3：如何得到线性二次型最优化的解？

作如下猜想，

$$\begin{cases}\overbrace{V(\mathbf{x}_t)=\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t}^{\text{值函数}};\\ \Rightarrow\ \underbrace{\mathbf{y}_t=-\mathbf{F}\mathbf{x}_t}_{\text{策略函数}}.\end{cases}$$

为何值函数有此猜想，回忆静态模型中的值函数，它总归是外生变量（包括参数）的函数，动态模型中的值函数，总归是外生变量（包括状态变量）的函数。

将猜想的值函数代入 Bellman 方程：

$$
\begin{aligned}
& V(\mathbf{x}_t) = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{y}_t)'\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{y}_t)]\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\{[(\mathbf{A}\mathbf{x}_t)' + (\mathbf{B}\mathbf{y}_t)']\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{y}_t)\}\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}' + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}')\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{y}_t)]\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P})(\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{y}_t)]\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t]\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{H}\mathbf{x}_t + \beta[\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + {\color{blue}(\mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t)'} + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t]\},\\
&\qquad = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t]\},\\
\Rightarrow\quad & V(\mathbf{x}_t) = \max_{\mathbf{y}_t}\{\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t]\}.\\
\Rightarrow\quad & \frac{\partial V(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{y}_t} = (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}')\mathbf{y}_t + 2\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\{2(\mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B})' + [(\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}) + (\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})']\mathbf{y}_t\},\\
&\qquad = (\mathbf{Q} + \mathbf{Q})\mathbf{y}_t + 2\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta[2\mathbf{B}'\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{x}_t + (\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{y}_t], \qquad \leftarrow \mathbf{Q}\text{是对称阵}\\
&\qquad = 2\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{W}\mathbf{x}_t + 2\beta(\mathbf{B}'\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t),\\
\Rightarrow\quad & 0 = 2\mathbf{Q}\mathbf{y} + 2\mathbf{W}\mathbf{x}_t + 2\beta(\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t), \qquad \leftarrow \mathbf{P}\text{是对称阵}\\
\Rightarrow\quad & 0 = \mathbf{Q}\mathbf{y}_t + \mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t,\\
\Rightarrow\quad & 0 = (\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{y}_t + (\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}_t,\\
\Rightarrow\quad & \mathbf{y}_t = -\underbrace{(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})}_{\mathbf{F}}\mathbf{x}_t.
\end{aligned}
$$

将以上推导得到的策略函数代入 Bellman 方程以确定系数矩阵 $\mathbf{P}$：

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{x}_t) &= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{y}_t'\mathbf{Q}\mathbf{y}_t + 2\mathbf{y}_t'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\left(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{y}_t\right),\\
&= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + (-\mathbf{F}\mathbf{x}_t)'\mathbf{Q}(-\mathbf{F}\mathbf{x}_t) + 2(-\mathbf{F}\mathbf{x}_t)'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\left[\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t + 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}(-\mathbf{F}\mathbf{x}_t) + (-\mathbf{F}\mathbf{x}_t)'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}(-\mathbf{F}\mathbf{x}_t)\right],\\
&= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{F}'\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{x}_t + \beta\left(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\mathbf{F}'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{x}_t\right),\\
&= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]'\mathbf{Q}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\\
&\quad - 2\mathbf{x}_t'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]'\mathbf{W}\mathbf{x}_t\\
&\quad + \beta\left(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\right.\\
&\quad \left. + \mathbf{x}_t'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]'\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\right),\\
&= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\left\{(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\right]'\right\}\mathbf{Q}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\\
&\quad - 2\mathbf{x}_t'\left\{(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\right]'\right\}\mathbf{W}\mathbf{x}_t\\
&\quad + \beta\left(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\right.\\
&\quad \left. + \mathbf{x}_t'\left\{(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})'\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\right]'\right\}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\right),\\
&= \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t'\left[(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})'(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\right]\mathbf{Q}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\\
&\quad - 2\mathbf{x}_t'\left[(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})'(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\right]\mathbf{W}\mathbf{x}_t\\
&\quad + \beta\left(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\left[(\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})\right]\mathbf{x}_t\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A})' (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \Big), \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{Q} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta \Big(\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&+ \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \Big), \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{Q} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{Q} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] (\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{Q} \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&+ \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] (\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] (\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] (\mathbf{Q} + \beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' \left[(\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \right] \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) \left[(\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \right] \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{W}\mathbf{x}_t \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{W}\mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t, \\
&+ \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t + \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t \\
&- 2\left[\mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{W}\mathbf{x}_t \right]' - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t + \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t \\
&- 2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}' (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t - 2\beta\mathbf{x}_t' (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t, \\
= {}& \mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t' (\mathbf{W}' + \beta \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{Q} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{W} + \beta \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}) \mathbf{x}_t + \beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -2\mathbf{x}_t'\mathbf{W}'\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t-2\mathbf{x}_t'\left(\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t,\\
&=\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t+\mathbf{x}_t'\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t+\beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t\\
&\quad -2\mathbf{x}_t'\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t,\\
&=\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t-\mathbf{x}_t'\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t+\beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t,\\
\Rightarrow\quad &\mathbf{x}_t'\mathbf{P}\mathbf{x}_t=\mathbf{x}_t'\mathbf{R}\mathbf{x}_t-\mathbf{x}_t'\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}_t+\beta\mathbf{x}_t'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}_t,\\
\Rightarrow\quad &\mathbf{P}=\mathbf{R}-\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A}\right)+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

这便得到了 Riccati 方程，数值迭代可求解矩阵 $\mathbf{P}$（关于矩阵 $\mathbf{R},\mathbf{Q},\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的函数）。[10]对线性二次型确定动态规划的认识有助了解线性二次型随机动态规划，本书第五章将进一步介绍。

1.2.2 连续时间

上节静态部分有重点讨论**不同选择变量**之间的等式约束和不等式约束的最优化问题，上一小节离散时间部分基本上处理的是**同一选择变量**不同时间存在约束但重点是从两期到多期的动态最优化问题，连续时间自然也会有**同一选择变量不同时间**及**不同选择变量**之间存有约束，但连续时间部分另将对尚未提及的**不同状态变量**之间有约束的动态最优稍作介绍。

这就引出一个概念问题，什么是状态变量？[**McCandless2008**] 定义的是，在某个时间 t（决策期），状态变量指那些要么由过去的决策行动、要么由诸如天然运动过程已确定值的变量。[**Wälde2012**] 定义得更为宽泛，认为除参数外一切能决定控制变量的变量即为状态变量，换言之，控制变量应可表示为状态变量的函数。

1.2.2.1 状态变量之间的无约束

I. 单个状态变量

单个状态变量时可能有单个控制变量，也可能有多个控制变量。

i. 单个控制变量

单个状态变量和单个控制变量在时间轴上形成约束。

例 15. 禀赋经济体的有界消费决策

本例是**例** 12 的连续时间版本。最优化问题的目标函数和约束条件分别改写成连续时间版本：

$$
\left.\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=0}^{T}}\ U_0\equiv\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t),\\
\text{s.t.}\quad &C_t+S_t-S_{t-1}=rS_{t-1}+Q_t,\\
&\text{给定 } S_{-1}=0=S_T.
\end{aligned}\right\}\text{离散时间}\quad\text{vs.}\quad\text{连续时间}\left\{\begin{aligned}
&\max_{C(t)}U\equiv U(0)=\int_{t=0}^{T}e^{-\rho t}u[C(t)]\mathrm{d}t,\\
\text{s.t.}\quad &C(t)+\dot{S}(t)=rS(t)+Q(t),\\
&\text{给定 } S(0)=0=S(T).
\end{aligned}\right.
$$

几点说明：

(1) 离散时间用的是求和算子 $\sum$ 加总，连续时间用的是积分符号 $\int$（和微分符号 $\mathrm{d}t$）加总。

(2) 离散多期动态最优化问题，用的是贴现因子 $\beta\equiv1/(1+\rho)$，ρ 是主观贴现率，与连续时间中所用的 ρ 含义相同。

(3) 连续时间的贴现因子为何是 $e^{-\rho t}$？e 的定义与计算连续复利有关。

步骤一，假设伊始本金为 1 单位货币，期利率为 100%，1 期计息 1 次，1 期后本息和为：$v=1+100\%=1+1/1=2$ 单位；若改成半期计息，半期利率为 50%，半期后的本息作为后半期生息的本金，1 期计息 2 次，则 1 期后本

[10] 以上推导用到了高维微分法则 $\frac{\partial\mathbf{A}'\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{x}_t}=\mathbf{A}$；$\frac{\partial\mathbf{x}_t'\mathbf{A}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{x}_t}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}')\mathbf{x}_t$，$\frac{\partial^2\mathbf{x}_t'\mathbf{A}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{x}_t\partial\mathbf{x}_t'}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}')$，$\frac{\partial\mathbf{x}_t'\mathbf{A}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{A}}=\mathbf{x}_t'\mathbf{x}_t$；$\frac{\partial\mathbf{y}_t'\mathbf{B}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{x}_t}=\mathbf{B}'\mathbf{y}_t$，$\frac{\partial\mathbf{y}_t'\mathbf{B}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{y}_t}=\mathbf{B}\mathbf{x}_t$，$\frac{\partial\mathbf{y}_t'\mathbf{B}\mathbf{x}_t}{\partial\mathbf{B}}=\mathbf{y}_t'\mathbf{x}_t$。[**LjungqvistSargent2000**] 提供了求解 Ricatti 方程的 Matlab 代码 olrp.m，[**McCandless2008**] 亦有呈现，即通过如下构造用数值方法逼近求解待定系数矩阵 $\mathbf{P}_{k+1}=\mathbf{R}-\left(\mathbf{W}'+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}_k\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{Q}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}_k\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}+\beta\mathbf{B}'\mathbf{P}_k\mathbf{A}\right)+\beta\mathbf{A}'\mathbf{P}_k\mathbf{A}$，其中 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{P}_k=\mathbf{P}$，$\mathbf{P}_0$ 给定。

息和为：$v=(1+50\%)(1+50\%)=(1+1/2)^2$；依此类推，改成 1 期内计息 m 次，则利率为 $1/m$，1 期后本息和为：$v=(1+1/m)^m$；当 m 逼近无穷大时，1 期后本息和为：$v=\lim_{m\to\infty}[1+1/m]^m\equiv e=e^1=e^x|_{x=1}=[1+x+(1/2!)x^2+(1/3!)x^3+\cdots]_{x=1}=1+1+1/(2!)+1/(3!)+\cdots\approx 2.71828$。

步骤二，连续计算复利 1 单位本金第 1 期后是 e 单位货币，令其为下一期的新本金，则第 2 期后 e 单位中每 1 单位又变是 e 单位货币，因此总共为 $v=e\times e=e^2$ 单位；再次类推，第 t 期期末本息和为 $v=e^t$ 单位。

步骤三，若期利率不是 100%，而是任意的名义利率 i，则第 1 期后的本息和为 $v=\lim_{m\to\infty}(1+i/m)^m=\lim_{m\to\infty}[(1+i/m)^{m/i}]^i=e^i$，第 t 期后按复利计算的本息和为 $v=e^{it}$。

步骤四，若初始本金不是 1，而是任意的 d，则第 t 期后按复利计算的本息和为 $v=de^{it}$。

步骤五，若知道第 t 期后根据连续复利计算的本息和为 $v=de^{it}$，则初始本金 $d=ve^{-it}$。

步骤六，名义利率 i 换成主观贴现率 ρ，则未来消费的当期效用根据 $e^{-\rho t}$ 来贴现。

步骤七，对于离散时间而言，期利率为 i，第 1 期后本息和为：$v=d(1+i)$，第 2 期后为 $v=d(1+i)^2$，第 t 期后为 $v=d(1+i)^t$。若知道第 t 期后根据离散复利计算的本息和为 $v=d(1+i)^t$，则初始本金 $d=v(1+i)^{-t}$，名义利率换成主观贴现率 ρ，则未来消费的当期效用根据 $(1+\rho)^{-t}$ 也即 β^t 来贴现。

步骤八，离散时间的贴现因子与连续时间的贴现因子可建立起等价联系：

$$\underbrace{\beta^t=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t}_{\text{离散时间}}\qquad\text{vs.}\qquad\underbrace{e^{-\rho t}=(e^\rho)^{-t}=[(e^\rho)^{-1}]^t=[(1+\rho)^{-1}]^t=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t}_{\text{连续时间}}.$$

i) 从 **Lagrange** 函数到 **Hamilton** 函数

若 $S(t)$ 连续可微，则可用变分法；若 $S(t)$ 有尖折点，则可用最优控制。

(1) 前身：古典变分

通过预算约束求解选择变量 C_t，代入目标函数后得到一个仅含状态变量及其变动的最基础的连续时间动态最优化问题：

$$\left.\begin{aligned}&\max_{C(t)} U=\int_{t=0}^T e^{-\rho t}u[C(t)]\mathrm{d}t,\\ \text{s.t.}\quad &C(t)+\dot S(t)=rS(t)+Q(t),\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\text{转化为选择变量之间的无约束}]{\text{选择变量之间的等式约束}}\left\{\begin{aligned}&\max_{S(t)} U=\int_{t=0}^T e^{-\rho t}u[rS(t)+Q(t)-\dot S(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right.$$

除了外生变量 r 和 $Q(t)$ 外，此连续时间动态最优化的最基本问题包括的主要元素是时间 t、状态变量 $S(t)$ 及其关于时间导数 $\dot S(t)$，换成一般表达形式的目标泛函是：

$$\left.\begin{aligned}&\max_{S(t)} U[S(t)]=\int_{t=0}^T e^{-\rho t}U[t,S(t),\dot S(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{先不考虑贴现}}\left\{\begin{aligned}&\max_{S(t)} U[S(t)]=\int_{t=0}^T \cancel{e^{-\rho t}}U[t,S(t),\dot S(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right.$$

之所为称其为泛函，是因 U 并非关于 t 的复合函数，而是关于整条路径 $S(t)$ 的函数；换言之，U 是关于 S 的函数，而非关于 t 的函数。另外，注意起始条件和终结条件的时间和状态都固定了，排除了可变性。**[Chiang1992]** 介绍了可变终结点的几种情形：固定时间（垂直终结线）、固定状态（水平终结线）、固定时间状态关系（曲线或曲面终结）；也一并简单提到了可变起始点。

由于 S 不是一个数，而是一个关于时间 t 函数，而 U 又不是关于 t 的函数，因此关于 $U(S)$ 的最优化问题对 S 或对 t 求导都无助于找到最优路径。从微积分思想出发，一个可行的思路是，可否将目标函数转换成值对值而非函数对值的问题，如此一来，又可直接用微积分方法求解连续时间动态最优化问题了。如何转化呢？

假设已知最优曲线 $S^\circ(t)$，并且知道最优曲线的领近路径为 $\xi(t)$，那么，任意的状态路径及其随时间的变化可表示为：

$$S(t)=S^\circ(t)+a\xi(t),$$

$$\dot{S}(t)=\dot{S}^{\circ}(t)+a\dot{\xi}(t).$$

于是，U 关于 S 的目标泛函转换成 U 关于 a 的目标函数：

$$\begin{aligned}
&\max_{a} U(a)=\int_{t=0}^{T} u[t,\overbrace{S^{\circ}(t)+a\xi(t)}^{S(t)},\overbrace{\dot{S}^{\circ}(t)+a\dot{\xi}(t)}^{\dot{S}(t)}]\mathrm{d}t,\\
&\text{给定 } S(0)=0=S(T),\\
&\text{并且 } \xi(0)=0=\xi(T).
\end{aligned}$$

这已变成了单变量无约束的静态最优化问题，一阶必要条件自然是（简便起见，积分下限直接写起始点 0）：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\right|_{a=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left\{\int_{0}^{T} u[t,S^{\circ}(t)+a\xi(t),\dot{S}^{\circ}(t)+a\dot{\xi}(t)]\mathrm{d}t\right\}=0,\\
\xRightarrow{\text{Leibniz 法则}}\quad &= \int_{0}^{T}\left(\frac{\partial u}{\partial S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial u}{\partial \dot{S}}\frac{\mathrm{d}\dot{S}}{\mathrm{d}a}\right)\mathrm{d}t=0,\\
&= \int_{0}^{T} u_{S}\xi(t)\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{0}^{T} u_{\dot{S}}\dot{\xi}_{t}\mathrm{d}t}_{}=0,\\
&= \int_{0}^{T} u_{S}\xi(t)\mathrm{d}t+\overbrace{\underbrace{\left[u_{\dot{S}}\xi(t)\right]_{0}^{T}}_{=0-0}-\int_{0}^{T}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\dot{S}}\right)\xi(t)\mathrm{d}t}^{ab=a'b+ab'\xRightarrow{\text{分部积分}}ab'=(ab)'-a'b}=0,\\
&= \int_{0}^{T}\xi(t)\left(u_{S}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\dot{S}}\right)\mathrm{d}t=0,\\
&= \overbrace{u_{S}-\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\dot{S}}[t,S(t),\dot{S}(t)]}_{}=0}^{\text{Euler 方程}}\quad \text{或}\quad \overbrace{\int u_{S}\mathrm{d}t-u_{\dot{S}}=0}^{\text{Euler 方程}},\\
&= u_{S}-\overbrace{\left(\frac{\partial u_{\dot{S}}}{\partial t}+\frac{\partial u_{\dot{S}}}{\partial S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u_{\dot{S}}}{\partial \dot{S}}\frac{\mathrm{d}\dot{S}}{\mathrm{d}t}\right)},\\
&= u_{S}-\left[u_{t\dot{S}}+u_{S\dot{S}}\dot{S}(t)+u_{\dot{S}\dot{S}}\ddot{S}(t)\right]=0,\\
&= \underbrace{u_{\dot{S}\dot{S}}\ddot{S}(t)+u_{S\dot{S}}\dot{S}(t)+u_{t\dot{S}}-u_{S}=0}_{\text{(二阶非线性微分)Euler 方程}}.
\end{aligned}$$

原目标泛函中含有贴现因子，被积函数应为 $e^{-\rho t}u$，故上述 Euler 方程进一步可表示为：

$$e^{-\rho t}u_{\dot{S}\dot{S}}\ddot{S}(t)+e^{-\rho t}u_{S\dot{S}}\dot{S}(t)+(-\rho)e^{-\rho t}u_{t\dot{S}}-e^{-\rho t}u_{S}=0.$$

二阶条件不会因贴现因子而有实质性变化，可简化：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{2}u}{\mathrm{d}a^{2}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\right),\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_{0}^{T}\left[u_{S}\xi(t)+u_{\dot{S}}\dot{\xi}(t)\right]\mathrm{d}t,\\
\xRightarrow{\text{Leibniz 法则}}\quad &= \int_{0}^{T}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}u_{S}\right)}_{}\xi(t)+\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}u_{\dot{S}}\right)}_{}\dot{\xi}(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left\{ \left[\overbrace{\left(u_{SS}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} + u_{\dot{S}S}\frac{\mathrm{d}\dot{S}}{\mathrm{d}a} \right)\xi(t)} \right] + \left[\overbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}u_{\dot{S}} \right)\dot{\xi}(t)} \right] \right\} \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \left\{ \left[u_{SS}\xi(t) + u_{\dot{S}S}\dot{\xi}(t) \right]\xi(t) + \left[u_{S\dot{S}}\xi(t) + u_{\dot{S}\dot{S}}\dot{\xi}(t) \right]\dot{\xi}(t) \right\} \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \left[u_{SS}\xi^2(t) + 2u_{S\dot{S}}\xi(t)\dot{\xi}(t) + u_{\dot{S}\dot{S}}\dot{\xi}^2(t) \right] \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \begin{bmatrix} \xi(t) & \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{SS} & u_{S\dot{S}} \\ u_{\dot{S}S} & u_{\dot{S}\dot{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t; \\
&\overset{或}{=} \int_0^T \left[u_{\dot{S}\dot{S}}\dot{\xi}^2(t) + 2u_{\dot{S}S}\dot{\xi}(t)\xi(t) + u_{SS}\xi^2(t) \right] \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) & \xi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\dot{S}\dot{S}} & u_{\dot{S}S} \\ u_{S\dot{S}} & u_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

(2) 拓展：最优控制

变分法是将最优化问题没有微分方程形式的选择变量消掉转化成只有状态变量及其微分方程形式的最优化问题。求解的思路是将状态路径转化成最优路径和邻近扰动路径的函数，泛函形式的动态最优问题转成了类似普通函数的静态最优问题。作为约束条件一部分的状态微分方程通过变量代换会进入目标函数，原来的选择变量（即最优控制法中的控制变量）被消掉。既然转换成类似于静态最优化问题且用微积分方法求解，自然要求状态转移的微分方程连续可微。

变分法中被消掉的控制变量（i.e., 静态问题中的选择变量，动态问题中一类选择变量）成为主角。目标函数中仍是控制变量，约束条件是包含控制变量的状态微分方程，像静态最优化或离散动态最优问题一样，构造 Lagrange 函数，推导出 Hamilton 函数视角下的一阶必要条件等（最大值原理）。控制变量可连续、可间断；状态变量连续即可（允许尖折点）。

回到原问题：

$$
\left.\begin{aligned}
&\max_{C(t)} U = \int_0^T e^{-\rho t} u[C(t)]\mathrm{d}t, \\
\text{s.t.}\quad &C(t) + \dot{S}(t) = rS(t) + Q(t), \\
&\text{给定 } S(0) = 0 = S(T).
\end{aligned}\right\}
\xRightarrow{\text{先不考虑主观贴现}}
\left\{\begin{aligned}
&\max_{C(t)} U = \int_0^T \cancel{e^{-\rho t}} u[C(t)]\mathrm{d}t, \\
\text{s.t.}\quad &C(t) + \dot{S}(t) = rS(t) + Q(t), \\
&\text{给定 } S(0) = 0 = S(T).
\end{aligned}\right.
$$

像离散时间中一样构造 Lagrange 函数，区别仅在于此前是求和算子，而现在变成了积分算子：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\equiv \int_0^T \left\{ \underbrace{u[C(t)] + \lambda(t)\left[rS(t) + Q(t) - C(t) - \dot{S}(t) \right]}_{\text{即期 Lagrange 函数}} \right\} \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \left\{ \overbrace{u[C(t)] + \lambda(t)\left[rS(t) + Q(t) - C(t) \right]}^{\text{即期 Hamilton 函数，简记为}\mathcal{H}(t)} - \lambda(t)\dot{S}(t) \right\} \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \left\{ \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)] - \lambda(t)\dot{S}(t) \right\} \mathrm{d}t, \\
&\qquad \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \lambda(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \lambda(t)} - \dot{S}(t) = 0 \\
&= \int_0^T \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)]\mathrm{d}t - \int_0^T \underbrace{\lambda(t)\dot{S}(t)}_{\text{分部积分}} \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)]\mathrm{d}t - \left\{ \overbrace{[\lambda(t)S(t)]|_0^T - \int_0^T \dot{\lambda}(t)S(t)\mathrm{d}t}^{ab'=(ab)'-a'b} \right\}, \\
&= \int_0^T \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)] + \dot{\lambda}(t)S(t)\mathrm{d}t - [\lambda(t)S(t)]|_0^T, \\
&= \int_0^T \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)] + \dot{\lambda}(t)S(t)\mathrm{d}t - [\lambda(T)S(T) - \lambda(0)S(0)], \\
&= \int_0^T \mathcal{H}[t, S(t), C(t), \lambda(t)] + \dot{\lambda}(t)S(t)\mathrm{d}t - (0 - 0). \\
&\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial S(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial S(t)} + \dot{\lambda}(t) = 0
\end{aligned}
$$

其中 Lagrange 乘子此时也被称为 Hamilton 函数的共态变量或协变量。一阶必要条件为:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial C(t)} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial S(t)} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial \lambda(t)} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial C(t)} &= 0, \\
\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial S(t)} &= -\dot{\lambda}(t), \\
\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \lambda(t)} &= \dot{S}(t).
\end{aligned}\right.
$$

可见，以 $C(t)$ 为控制变量，构造 Hamilton 函数只需以其为选择变量即可:

$$
\max_{C(t)} \mathcal{H}(t) \equiv u[C(t)] + \lambda(t)[rS(t) + Q(t) - C(t)],
$$

$$
\begin{aligned}
\text{控制变量的一阶条件:} \quad 0 &= \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial C(t)}, \\
\text{共态变量的运动方程:} \ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial S(t)}, \\
\text{状态变量的运动方程:} \ \dot{S}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial \lambda(t)}.
\end{aligned}
$$

考虑主观贴现因子的 Lagrange 函数为:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(0) &\equiv \int_0^T \left\{ e^{-\rho t} u[C(t)] + \lambda(t) \left[rS(t) + Q(t) - C(t) - \dot{S}(t) \right] \right\} \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^T \left\{ \underbrace{e^{-\rho t} u[C(t)] + \lambda(t) \left[rS(t) + Q(t) - C(t) \right]}_{\text{现值 Hamilton 函数，简记为}\mathcal{H}(0)} - \lambda(t)\dot{S}(t) \right\} \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

包含主观贴现因子的现值 (present-value) Hamilton 函数为:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{H}(0) \equiv e^{-\rho t} u[C(t)] + \lambda(t)[rS(t) + Q(t) - C(t)], \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{e^{\rho t}\mathcal{H}(0)}_{\text{即期 (current-value)}} = u[C(t)] + \underbrace{e^{\rho t}\lambda(t)}_{\text{即期 (current-value)}} [rS(t) + Q(t) - C(t)], \\
\Rightarrow \quad & \overbrace{\mathcal{H}(t)}^{\text{即期 Hamilton 函数}} = u[C(t)] + \overbrace{\eta(t)}^{\text{即期 Lagrange 乘子}} [rS(t) + Q(t) - C(t)].
\end{aligned}
$$

最优化的相关条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\max_{C(t)}\mathcal{H}(0)\equiv e^{-\rho t}u[C(t)]+\lambda(t)[rS(t)+Q(t)-C(t)],\\ &\text{控制变量的一阶条件:}\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial C(t)},\\ &\text{共态变量的运动方程:}\ \dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial S(t)},\\ &\text{状态变量的运动方程:}\ \dot{S}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial\lambda(t)}.\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\lambda(t)=e^{-\rho t}\eta(t)]{\mathcal{H}(0)=e^{-\rho t}\mathcal{H}(t)} \left\{\begin{aligned}&\max_{C(t)}\mathcal{H}(t)\equiv u[C(t)]+\eta(t)[rS(t)+Q(t)-C(t)],\\ &\text{控制变量的一阶条件:}\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial C(t)},\\ &\text{共态变量的运动方程:}\ \dot{\eta}(t)=\rho\eta(t)-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial S(t)},\\ &\text{状态变量的运动方程:}\ \dot{S}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\eta(t)}.\end{aligned}\right.$$

上述第一组式子等价，因为取得极值时的时间 t 是固定的，也即：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial C(t)}&=0,\\ \Rightarrow\quad e^{\rho t}\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial C(t)}&=0,\\ \Rightarrow\quad \frac{\partial[e^{\rho t}\mathcal{H}(0)]}{\partial C(t)}&=0,\\ \Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial C(t)}&=0.\end{aligned}$$

上述第二组式子等价，因为：

$$\begin{aligned}&\eta(t)=e^{\rho t}\lambda(t),\\ \Rightarrow\quad &\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}[e^{\rho t}\lambda(t)]}{\mathrm{d}t},\\ \Rightarrow\quad &\dot{\eta}(t)=\rho e^{\rho t}\lambda(t)+e^{\rho t}\dot{\lambda}(t),\\ &\quad\ \ =\rho\eta(t)-e^{\rho t}\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial S(t)},\\ &\quad\ \ =\rho\eta(t)-\frac{\partial[e^{\rho t}\mathcal{H}(0)]}{\partial S(t)},\\ \Rightarrow\quad &\dot{\eta}(t)=\rho\eta(t)-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial S(t)}.\end{aligned}$$

上述第三组式子等价，因为：

$$\begin{aligned}\dot{S}(t)&=\frac{\partial\mathcal{H}(0)}{\partial\lambda(t)},\\ &=\frac{\partial[e^{\rho t}\mathcal{H}(0)]}{\partial[e^{\rho t}\lambda(t)]},\\ \Rightarrow\quad \dot{S}(t)&=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\eta(t)}.\end{aligned}$$

ii) 从 **Bellman 方程到 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程**

[Bellman1957] 创造性提出了离散时间和连续时间动态最优化问题的动态规划思想，后人为纪念 Richard Bellman 在此方面的贡献，将其发现的递归泛函形式的值函数称为 Bellman 方程；连续时间下的 Bellman 方程是经典力学中 Hamilton-Jacobi 方程的拓展，故又称为 Hamilton-Jacobi-Bellman (简写为 HJB) 方程。[11]

[11] 此前介绍了静态最优及离散时间动态最优中的包络定理，连续时间动态最优中也有包络定理。设状态变量为 $x(t)$，控制变量为 $y(t)$，状态转移方程设为 $\dot{x}(t)=g[x(t),y(t),t]$，目标函数为 $\max_{y(\tau)}\int_t^T F[x(\tau),y(\tau),\tau]\mathrm{d}\tau$，HJB 方程为 $-\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=\max_y\{F(x,y,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}g(x,y,t)\}$，给定最优解 y_t° 的 HJB 方程为 $-\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=F(x,y^\circ,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}g(x,y^\circ,t)$，包络定理意味着 $-\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x}=\frac{\partial F(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y^\circ,t)}{\partial y^\circ}\frac{\partial y^\circ}{\partial x}+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}g(x,y^\circ,t)+\frac{\partial V}{\partial x}\left[\frac{\partial g(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,y^\circ,t)}{\partial y^\circ}\frac{\partial y^\circ}{\partial x}\right]=\frac{\partial F(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\underbrace{\left[\frac{\partial F(x,y^\circ,t)}{\partial y^\circ}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial g(x,y^\circ,t)}{\partial y^\circ}\right]}_{\text{一阶条件}=0}\frac{\partial y^\circ}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial g(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}g(x,y^\circ,t)=\frac{\partial F(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial g(x,y^\circ,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}g(x,y^\circ,t)$。这进一步揭示了最优值函数对状态的敏感性，包括直接效应（状态变化直接影响当前收益和未来状态）和间接效应（控制变量最优时已使边际收益等于边际成本因此通过最优控制变量调整产生的间接效应

从例 13-1 可知，离散时间的 Bellman 方程为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\max_{\{C_t\}_{t=0}^{T}} U_0 \equiv \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t),\\
&\text{s.t.}\quad S_{t+1}-S_t = rS_t + Q_{t+1} - C_{t+1},\\
&\text{给定 } S(0)=0=S(T);\\
&\uparrow \text{从 1 出发} \quad \downarrow \text{从} t+1 \text{出发}\\
&\max_{\{C_{t+h+1}\}_{h=1}^{T}} U_t \equiv \sum_{h=1}^{T} \beta^h u(C_{t+h+1}),\\
&\text{s.t.}\quad S_{t+h+1}-S_{t+h} = rS_{t+h} + Q_{t+h+1} - C_{t+h+1},\\
&\xRightarrow[\begin{cases}\lim\limits_{\Delta\to\infty} \beta(\Delta)=0\\ \lim\limits_{\Delta\to 0} \beta(\Delta)=1\\ \Delta=1,\ \beta(\Delta)=\beta\end{cases}]{\text{Bellman 方程}} V(S_t)=\max_{C_t}[\Delta u(C_t)+\beta(\Delta)V(S_{t+\Delta})],\\
&\text{s.t.}\quad S_{t+\Delta}-S_t = rS_t + \Delta Q_t - \Delta C_t,\\
&\text{给定 } S_t = 0 = S_{t+T}.
\end{aligned}\right\}
\quad \text{vs.} \quad
\left\{\begin{aligned}
&\max_{\{C(t)\}_{t=0}^{T}} U(0) \equiv \int_{t=0}^{T} e^{-\rho t} u[C(t)]\mathrm{d}t,\\
&\text{s.t.}\quad \dot{S}(t) = rS(t) + Q(t) - C(t),\\
&\text{给定 } S(0)=0=S(T);\\
&\uparrow \text{从 0 出发} \quad \downarrow \text{从} t \text{出发}\\
&\max_{\{C(h)\}_{h=t}^{T}} U(t) \equiv \int_{h=t}^{T} e^{-\rho(h-t)} u[C(h)]\mathrm{d}h,\\
&\text{s.t.}\quad \dot{S}(h) = rS(h) + Q(h) - C(h),\\
&\xRightarrow[\begin{cases}\beta(\Delta)=e^{-\rho\Delta}\\ \lim\limits_{\Delta\to 0} e^{-\rho\Delta}=1-\rho\Delta\\ \lim\limits_{\Delta\to 0} (e^{\rho\Delta})^{-1}=(1+\rho\Delta)^{-1}\end{cases}]{\text{HJB 方程}} V[S(t)] = ?\\
&\text{s.t.}\quad \dot{S}(t) = rS(t) + Q(t) - C(t),\\
&\text{给定 } S(t)=0=S(T).
\end{aligned}\right.
$$

在离散时间动态规划中，完整的时间链看上去被分割为 t 和 $t+1$ 两期，但连续时间中没有 $t+1$，故用时间跨度 Δ 来表示，下一期即为 $t+\Delta$，离散时间中 $\Delta=1$ 是为特例。理清符号后，连续时间动态最优的值函数可写为：

$$
\begin{aligned}
V(t) &\equiv \max_{\{C(h)\}_{h=t}^{T}} \int_{h=t}^{T} e^{-\rho(h-t)} u[C(h)]\mathrm{d}h, \quad \text{s.t.}\quad \dot{S}(h) = rS(h) + Q(h) - C(h),\\
&= \max_{\{C(h)\}_{h=t}^{T}} \left\{\int_{h=t}^{t+\Delta} e^{-\rho(h-t)} u[C(h)]\mathrm{d}h + \int_{h=t+\Delta}^{T} e^{-\rho(h-t-\Delta)} u[C(h)]\mathrm{d}h\right\},\\
\Rightarrow \quad V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{\Delta u[C(t)] + \frac{1}{1+\rho\Delta} V[S(t+\Delta)]\right\},\\
\Rightarrow \quad (1+\rho\Delta)V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{(1+\rho\Delta)\Delta u[C(t)] + V[S(t+\Delta)]\right\},\\
\Rightarrow \quad \rho\Delta V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{(1+\rho\Delta)\Delta u[C(t)] + V[S(t+\Delta)] - V[S(t)]\right\},\\
\Rightarrow \quad \rho V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{(1+\rho\Delta) u[C(t)] + \frac{V[S(t+\Delta)] - V[S(t)]}{\Delta}\right\},\\
\xRightarrow[\lim\limits_{\Delta\to 0}\equiv \mathrm{d}t]{\Delta\to 0} \quad \rho V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{u[C(t)] + \frac{\mathrm{d}V[S(t)]}{\mathrm{d}t}\right\},\\
&= \max_{C(t)} \left\{u[C(t)] + \frac{V[S(t)]}{\mathrm{d}S(t)}\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\right\},\\
&= \max_{C(t)} \left\{u[C(t)] + V'[S(t)]\dot{S}(t)\right\},\\
\Rightarrow \quad \rho V[S(t)] &= \max_{C(t)} \left\{u[C(t)] + V'[S(t)][rS(t) + Q(t) - C(t)]\right\}.
\end{aligned}
$$

[**Wälde2012**] 指出，还可换种视角来推导 HJB 方程：

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{C(h)\}_{h=t}^{T}} V(t) \equiv \int_{h=t}^{T} e^{-\rho(h-t)} u[C(h)]\mathrm{d}h,\\
\Rightarrow \quad &\dot{V}(t) = -e^{-\rho(t-t)} u[C(t)] + \int_{h=t}^{T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\rho(h-t)} u[C(h)]\mathrm{d}h,\\
\Rightarrow \quad &\dot{V}(t) = -u[C(t)] + \rho u(t),\\
\Rightarrow \quad &\rho u(t) = u[C(t)] + \dot{V}(t),
\end{aligned}
$$

为 0）两个方面。

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \rho V[S(t)] = u[C(t)] + \dot{V}[S(t)], \\
\Rightarrow\quad & \rho V[S(t)] = u[C(t)] + \underbrace{V'[S(t)]}[rS(t) + Q(t) - C(t)]; \\
\text{vs.}\quad & \mathcal{H}(t) = u[C(t)] + \overbrace{\eta(t)}\,[rS(t) + Q(t) - C(t)].
\end{aligned}
$$

Moll (2012)比较了最优控制的 Hamilton 函数和连续动态规划的 HJB 方程，指出 $\eta(t) = V'[S(t)]$ 是两者连接的纽带，即 Hamilton 函数中的共态变量就是 HJB 方程中的影子价格。

一阶条件是：

$$
\underbrace{u'[C(t)]}_{\text{边际收益}} = \underbrace{V'[S(t)]}_{\text{边际成本}} = \underbrace{\eta(t)}_{\text{影子价格}}.
$$

基于 HJB 方程对状态变量求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S(t)}\{\rho V[S(t)]\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S(t)}\{V'[S(t)]\}[rS(t) + Q(t) - C(t)] + V'[S(t)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S(t)}\{rS(t) + Q(t) - C(t)\}, \\
\Rightarrow\quad \rho V'[S(t)] &= V''[S(t)][rS(t) + Q(t) - C(t)] + rV'[S(t)], \\
\Rightarrow\quad (\rho - r)V'[S(t)] &= V''[S(t)][rS(t) + Q(t) - C(t)], \\
&= \frac{\mathrm{d}V'[S(t)]}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{V}[S(t)], \\
\Rightarrow\quad \rho - r &= \frac{\dot{V}[S(t)]}{V'[S(t)]} = \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}.
\end{aligned}
$$

此为储蓄带来的边际效用（影子价格）也即 Hamilton 乘子这一共态变量的运动方程。

一阶条件对时间 t 求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'[C(t)]}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V'[S(t)]}{\mathrm{d}t}, \\
&= \dot{V}[S(t)], \\
&= (\rho - r)V'[S(t)], \\
&= (\rho - r)u'[C(t)], \\
\Rightarrow\quad \frac{\frac{\mathrm{d}u'[C(t)]}{\mathrm{d}t}}{u'[C(t)]} &= \rho - r = \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}, \\
\Rightarrow\quad \frac{u''[C(t)]\dot{C}(t)}{u'[C(t)]} &= \rho - r, \\
\Rightarrow\quad \overbrace{\underbrace{-\frac{C(t)u''[C(t)]}{u'[C(t)]}}_{1/\sigma}}^{\text{跨期替代弹性}}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} &= r - \rho, \\
\Rightarrow\quad \frac{1}{\sigma}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} &= r - \rho, \\
\Rightarrow\quad \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} &= \sigma(r - \rho).
\end{aligned}
$$

这便是著名的 Keynes-Ramsey 规则，亦即关于消费的跨期 Euler 方程或消费增长率的 Euler 方程。σ 是例 10 出现过的跨期替代弹性，第三章将会更细致地介绍该参数。

ii. 多个控制变量[12]

状态变量和控制变量可能在时间轴上形成约束，或不同控制变量之间也可能在时空上形成约束。回到原问

[12][**Chiang1992**] 和Moll (2016)对此类动态最优问题亦有呈现。

题，增加控制变量并使其相互掣肘：

$$\left.\begin{aligned}&\max_{C(t)} U_0=\int_0^T e^{-\rho t}u[C(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{s.t.}\quad C(t)+\dot S(t)=r(t)S(t)+Q(t),\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right\}\xRightarrow[\text{到两个控制变量}]{\text{由单个控制变量}}\left\{\begin{aligned}&\max_{C(t),L(t)} U_0=\int_0^T e^{-\rho t}u[C(t),L(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{s.t.}\quad C(t)+\dot S(t)=r(t)S(t)+w(t)L(t),\\ &\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right\}\xRightarrow[\text{到名义变量}]{\text{由实际变量}}\left\{\begin{aligned}&\max_{C(t),L(t)} U_0=\int_0^T e^{-\rho t}u[C(t),L(t)]\mathrm{d}t,\\ &\text{s.t.}\quad P(t)C(t)+\dot B(t)=i(t)B(t)+W(t)L(t),\\ &\text{给定 } B(0)=0=B(T).\end{aligned}\right.$$

由单个控制变量到两个控制变量增加的是劳动供给 $L(t)$（实际工资是 $w(t)$），由实际变量到名义变量增加了总价格水平 $P(t)$ 和总工资水平 $W(t)$，储蓄可以表达实际变量，也可是名义变量，也常换作债券 $B(t)$。

Hamilton 函数及最优性条件分别为：

$$\max_{C(t),L(t),B(t),\eta(t)} \mathcal{H}(t)\equiv u[C(t),L(t)]+\eta(t)[i(t)B(t)+W(t)L(t)-P(t)C(t)],$$

$$\begin{aligned}
&\text{控制变量的一阶条件:}\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial C(t)} &&\Rightarrow\quad U_{Ct}=\eta(t)P(t),\\
&\text{控制变量的一阶条件:}\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial L(t)} &&\Rightarrow\quad U_{Lt}=\eta(t)W(t),\\
&\text{共态变量的运动方程:}\ \dot\eta(t)=\rho\eta(t)-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial B(t)} &&\Rightarrow\quad \dot\eta(t)=\rho\eta(t)-\eta(t)i(t),\\
&\text{状态变量的运动方程:}\ \dot B(t)=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\eta(t)} &&\Rightarrow\quad \dot B(t)=i(t)B(t)+W(t)L(t)-P(t)C(t).
\end{aligned}$$

按照**例** 10 中的方式定义即期效用函数：

$$u[C(t),L(t)]=\log C(t)-\frac{L(t)^{1+\frac{1}{\varphi}}}{1+\frac{1}{\varphi}}.$$

由此可得到跨期消费 Euler 方程和劳动供给方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{C(t)}&=\eta(t)P(t)\\ L(t)^{\frac{1}{\varphi}}&=\eta(t)W(t)\end{aligned}\right\}\xRightarrow{\Pi(t)=\frac{\dot P(t)}{P(t)}}\left\{\begin{aligned}\frac{\dot C(t)}{C(t)}&=r(t)-\rho,\\ C(t)L(t)^{\frac{1}{\varphi}}&=\frac{W(t)}{P(t)}.\end{aligned}\right.$$

上述左端第二个方程除以左端第一个方程得到右端第二个方程；右端第一个方程的得到可先对左端第一个方程取对数 $-\log C(t)=\log\eta(t)+\log P(t)$，求其关于时间的导数 $-\frac{\dot C(t)}{C(t)}=\frac{\dot\eta(t)}{\eta(t)}+\frac{\dot P(t)}{P(t)}$，再结合共态变量的运动方程 $\frac{\dot\eta(t)}{\eta(t)}=\rho-i(t)$，并定义实际利率为 $r(t)\equiv i(t)-\Pi(t)$。

控制变量之间另有专项等式约束的动态最优问题（简单起见不考虑主观贴现）：

$$\begin{aligned}
\xleftrightarrow[\min]{\max} U&=\int_0^T u(t,B,C,L)\mathrm{d}t,\\
\text{s.t.}\quad \dot B&=f(t,B,C,L),\\
z&=g(t,B,C,L),\\
B(0)&=0=B(T).
\end{aligned}$$

其中 t 是时间变量，B 是状态变量，C 和 L 是控制变量，f 和 g 是两个函数表达式，z 是常数。

若两个控制变量之间不存在该等式约束，则是最基础的最优控制问题，暂撇开它构造 Hamilton 函数：

$$\max_{B(t),C(t),L(t),\eta(t)} \mathcal{H}(t)\equiv u(t,B,C,L)+\eta(t)f(t,B,C,L).$$

初始问题变成给定等式约束最优化该 Hamilton 函数：

$$\begin{aligned}\max_{B(t),C(t),L(t),\eta(t)}\ &\mathcal{H}(t)\equiv u(t,B,C,L)+\eta(t)f(t,B,C,L),\\ \text{s.t.}\quad &z=g(t,B,C,L).\end{aligned}$$

继而构造 Lagrange 函数寻找最优解：

$$\max_{B(t),C(t),L(t),\eta(t)} \mathcal{L}(t)\equiv\mathcal{H}(t)+\lambda(t)[z-g(t,B,C,L)],$$

$$
\begin{aligned}
&= [u(t,B,C,L)+\eta(t)f(t,B,C,L)]+\lambda(t)[z-g(t,B,C,L)].\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}
\text{Lagrange 一阶条件}\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial C(t)}=0=\dfrac{\partial u(\cdot)}{\partial C(t)}+\eta(t)\dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial C(t)}-\lambda(t)\dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial C(t)},\\
\dfrac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial L(t)}=0=\dfrac{\partial u(\cdot)}{\partial L(t)}+\eta(t)\dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial L(t)}-\lambda(t)\dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial L(t)},\\
\dfrac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial \lambda(t)}=0=z-g(t,B,C,L).
\end{cases}\\
\text{Hamilton 最值原理}\begin{cases}
\dot{\eta}(t)=-\dfrac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial B(t)}=\lambda(t)\dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial B(t)}-\dfrac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial B(t)},\\
\dot{B}(t)=\dfrac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial \eta(t)}=\dfrac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial \eta(t)}.
\end{cases}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

若是不等式约束，则类似静态最优化问题，在等式约束一阶条件的基础上拓宽为 Kuhn-Tucker 条件。

II. 多个状态变量

动态问题中的等式或不等式约束另有可能以积分形式存在，但可将积分约束用新的状态变量来替换，如此一来，状态变量就会增加（不考虑多个控制变量及其约束以及主观贴现）：

$$
\left.\begin{aligned}
&\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ U=\int_0^T u(t,B,C,\cancel{L})\mathrm{d}t,\\
&\text{s.t.}\quad \dot{B}(t)=f(t,B,C,\cancel{L}),\\
&\qquad\quad z=\cancel{g(t,B,C,L)},\\
&\qquad\quad z=\int_0^T g(t,B,C,\cancel{L})\mathrm{d}t,\\
&\qquad B(0)=0=B(T).
\end{aligned}\right\}
\xrightarrow[\substack{\Gamma(t)\equiv-\int_0^t g(t,B,C)\mathrm{d}t\\ \Gamma(0)=-\int_0^0 g(t,B,C)\mathrm{d}t=0\\ \Gamma(T)=-\int_0^T g(t,B,C)\mathrm{d}t=-z}]{\text{将积分约束定义为新状态变量}\Gamma(t)}
\left\{\begin{aligned}
&\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ U=\int_0^T u(t,B,C)\mathrm{d}t,\\
&\text{s.t.}\quad \dot{B}(t)=f(t,B,C),\\
&\qquad\quad \dot{\Gamma}(t)=-g(t,B,C),\\
&\qquad\quad \Gamma(0)=0,\quad \Gamma(T)=-z,\\
&\qquad\quad B(0)=0,\quad B(T)=0.
\end{aligned}\right.
$$

现在转变成有两个状态变量的无约束动态最优问题。Hamilton 函数及最优性条件分别为：

$$
\max_{C(t),B(t),\Gamma(t),\eta(t),\mu(t)}\ \mathcal{H}(t)\equiv u[C(t)]+\eta(t)f(t,B,C)-\mu(t)g(t,B,C),
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{控制变量的一阶条件:}\quad 0=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial C(t)},\\
&\text{共态变量的运动方程:}\ \dot{\eta}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial B(t)},\\
&\text{共态变量的运动方程:}\ \dot{\mu}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial \Gamma(t)},\\
&\text{状态变量的运动方程:}\ \dot{B}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial \eta(t)},\\
&\text{状态变量的运动方程:}\ \dot{\Gamma}(t)=\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial \mu(t)}.
\end{aligned}
$$

稍作说明的是，由于 $\dot{\mu}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\Gamma(t)}=0$，可见 $\mu(t)$ 是个常数 μ。

若保留了主观贴现，则构造现值 Hamilton 函数；若积分等式约束放松为积分不等式约束，则最优条件还要复杂，留给读者在有精力之余进一步探究；两个以上状态变量之间无约束动态最优的求解思路相同，不再赘述。

1.2.2.2 状态变量之间的等式约束

在引出连续时间下状态变量之间的等式约束最优问题之前，回顾**例** 12-1 禀赋经济体的两期消费决策问题，若除消费外实际货币余额也进入效用函数（实物储蓄变成名义储蓄因此实际利率 r 变成名义利率 i）：

$$\max_{C_1,C_2,M_1/P_1,M_2/P_2} U=u\left(C_1,\frac{M_1}{P_1}\right)+\beta u\left(C_2,\frac{M_2}{P_2}\right),$$

$$\text{s.t.}\ \underbrace{\left.\begin{array}{l}\overbrace{P_1C_1+M_1+S_1}^{\text{当期支出与现金持有}}\le\overbrace{[i+(1-\delta)]\cancel{S_0}+\cancel{M_0}+P_1Q_1}^{\text{当期收入}},\\ \underbrace{P_2C_2+M_2+\cancel{S_2}}_{\text{下期支出与现金持有}}\le\underbrace{[i+(1-\delta)]S_1+M_1+P_2Q_2}_{\text{下期收入}}.\end{array}\right\}}_{\text{各期流动（动态）预算约束}}\xRightarrow[C_1,C_2,M_1,M_2>0]{M_0=S_0=0=S_2}\underbrace{\overbrace{P_1C_1+\frac{P_2}{1+i}C_2+\frac{i}{1+i}M_1+\frac{M_2}{1+i}}^{\text{终身支出与终身现金持有}}=\overbrace{P_1Q_1+\frac{P_2}{1+i}Q_2}^{\text{终身收入}}}_{\text{两期终身（跨期）预算约束}}.$$

仍假设最后一期储蓄无意义，因此终结条件 $S_2=0$，但最后一期的货币 M_2 像消费一样同样有以递减的速度递增的效用，因此它不必为 0。合并两个预算约束：

$$\begin{aligned}&M_1+S_1=P_1Q_1-P_1C_1,\\ \xRightarrow{A_1\equiv M_1+S_1}\quad&A_1=P_1Q_1-P_1C_1.\\ &P_2C_2+M_2=(1+i)\big(\overbrace{\underbrace{A_1}\ -M_1}^{S_1}\big)+M_1+P_2Q_2,\\ \Rightarrow\quad&P_2C_2+M_2=(1+i)[\overbrace{(P_1Q_1-P_1C_1)}-M_1]+M_1+P_2Q_2,\\ \Rightarrow\quad&P_2C_2+M_2=(1+i)(P_1Q_1-P_1C_1)-(1+i)M_1+M_1+P_2Q_2,\\ \Rightarrow\quad&P_2C_2+M_2=(1+i)P_1(Q_1-C_1)-iM_1+P_2Q_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad&(1+i)P_1C_1+P_2C_2+iM_1+M_2=(1+i)P_1Q_1+P_2Q_2,\\ \Rightarrow\quad&P_1C_1+\frac{P_2}{1+i}C_2+\frac{i}{1+i}M_1+\frac{M_2}{1+i}=P_1Q_1+\frac{P_2}{1+i}Q_2,\\ \Rightarrow\quad&C_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}C_2+\frac{i}{1+i}\frac{M_1}{P_1}+\frac{1}{1+i}\frac{M_2}{P_1}=Q_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}Q_2,\\ \Rightarrow\quad&C_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}C_2+\frac{i}{1+i}\frac{M_1}{P_1}+\frac{P_2/P_1}{1+i}\frac{M_2}{P_2}=Q_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}Q_2.\end{aligned}$$

这便是终身预算约束的得到。构造 Lagrange 函数：

$$\max\mathcal{L}\equiv\left[u\left(C_1,\frac{M_1}{P_1}\right)+\beta u\left(C_2,\frac{M_2}{P_2}\right)\right]+\lambda\left[\left(Q_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}Q_2\right)-\left(C_1+\frac{P_2/P_1}{1+i}C_2+\frac{i}{1+i}\frac{M_1}{P_1}+\frac{P_2/P_1}{1+i}\frac{M_2}{P_2}\right)\right].$$

一阶必要条件为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1}&=u_{C1}-\lambda=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2}&=\beta u_{C2}-\lambda\frac{P_2/P_1}{1+i}=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{M_1}{P_1}}&=u_{M1/P1}-\lambda\frac{i}{1+i}=0.\end{aligned}$$

以上第一二个一阶条件合并为跨期消费 Euler 方程，第一三个一阶条件合并为第 1 期实际货币余额的需求方程：

$$\begin{aligned}\frac{\beta u_{C2}}{u_{C1}}&=\frac{P_2/P_1}{1+i},\\ \frac{u_{M1/P1}}{u_{C1}}&=\frac{i}{1+i}.\end{aligned}$$

给出即期效用函数，对数线性化后会得到线性化的动态 IS 曲线（核心是给出了产出与实际利率的反向关系）和货币需求曲线（关键是给出了实际货币余额与产出的正向关系、与名义利率的反向关系），留待 [**Deng2026**] 中详述。

需要注意的是，第 1 期的状态变量只是 S_0 和 M_0，简化起见，它们都赋予了 0 值假设，换言之，第 1 期状态变量之间的等式约束 $S_0 + M_0 = 0$ 极大地简化了运算，这使得第 1 期只剩下外生状态变量（当期禀赋收入 Q_1）；第 2 期内生状态变量之间的等式约束为 $S_1 + M_1 = A_1$，另有外生状态变量（当期禀赋收入 Q_2）。

以上两个内生状态变量的出现并未给求解带来额外麻烦，通过变量代换，也即单个内生状态变量的动态最优问题。但单个内生状态变量的不等式约束会给对求解有更复杂的要求，[**Chiang1992**] 和 [**KamienSchwartz2012**] 等已有阐明，本书不再赘述。