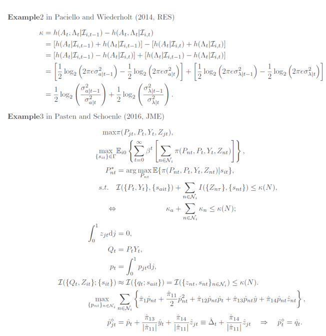
高级宏观经济学 0

数理基础与解析初步



编著：邓燕飞

单位：浙江财经大学

时间：2023 年 4 月 13 日

版本：1.0

合抱之木，生于毫末；九层之台，起于累土；千里之行，始于足下。——《老子》

目录

前言

考虑到高级宏观经济学是比较复杂的一套知识体系，近些年在教学科研的探索过程中，逐步萌发编写高级宏观经济学系列教材的设想，并正按计划推进。

高级宏观经济学 0，或命名为数理经济学。主要介绍现代宏观经济学中经典模型构造与分析时常用的数理知识与演绎方法。由于现代宏观建立在微观基础之上，因而宏观就包含了微观。

高级宏观经济学 I，主题是经济增长。

高级宏观经济学 II，主题是经济波动。聚焦新凯恩斯理论。用古典、凯恩斯模型开篇，也介绍 Solow、Ramsey 和 RBC 模型，但都考虑货币的引入及其作用。

高级宏观经济学 III，主题是实证方法。

配套录播课程将适时在个人主页发布：https://idengyf.github.io/

引言

第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题

1.1 静态最优问题

1.1.1 无约束最优化

I. 单变量

II. 双变量

III. 多变量

1.1.2 有约束最优化

I. 等式约束

$$
\begin{aligned}
\max \text{ 或 } \min z &= f(x,y),\\
\text{s.t. } 0 &= g(x,y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&& 0 &= g(x,y),\\
&\Rightarrow & \mathrm{d}y &= -\frac{g_x}{g_y}\mathrm{d}x, \quad g_y \neq 0\\
&\Rightarrow & y &= h(x),\\
&\Rightarrow & z &= f[x,h(x)],\\
\Rightarrow \quad f[x,h(x)] - f[x_0,h(x_0)] &= (f_{x_0} + f_{y_0}h_{x_0})(x-x_0) \\
&\quad + \frac{(f_{x_0x_0} + f_{x_0y_0}h_{x_0}) + [(f_{y_0x_0} + f_{y_0y_0}h_{x_0})h_{x_0} + f_{y_0}h_{x_0x_0}]}{2}(x-x_0)^2.
\end{aligned}
$$

满足等式约束的一阶必要条件：

$$
\left.\begin{matrix} 0 = f_{x_0} + f_{y_0}h_{x_0} \\ 0 = g(x_0,y_0) \end{matrix}\right\} \xRightarrow{h_{x_0} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0} = -\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}} \left\{\begin{matrix} f_{x_0} - f_{y_0}\dfrac{g_{x_0}}{g_{y_0}} = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{matrix}\right. \xRightarrow{\frac{f_{y_0}}{g_{y_0}} \equiv -\lambda} \left\{\begin{matrix} f_{x_0} + \lambda g_{x_0} = 0 \\ f_{y_0} + \lambda g_{y_0} = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{matrix}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}|_{x=x_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}|_{y=y_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}|_{x=x_0,y=y_0} = 0 \end{matrix}\right\} \Leftarrow \mathcal{L} = f(x,y) + \lambda g(x,y).
$$

满足等式约束的二阶充分条件：

$$
\begin{aligned}
&(f_{x_0x_0} + f_{x_0y_0}h_{x_0}) + [(f_{y_0x_0} + f_{y_0y_0}h_{x_0})h_{x_0} + f_{y_0}h_{x_0x_0}] \neq 0,\\
&\qquad\text{i.e. } f_{x_0x_0} + 2f_{x_0y_0}h_{x_0} + f_{y_0y_0}h_{x_0}^2 + f_{y_0}h_{x_0x_0} \neq 0,\\
&\xRightarrow[h_{x_0x_0}=?]{h_{x_0} = -\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}} f_{x_0x_0} + 2f_{x_0y_0}h_{x_0} + f_{y_0y_0}h_{x_0}^2 + f_{y_0}h_{x_0x_0} = f_{x_0x_0} - 2f_{x_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}} + f_{y_0y_0}\left(\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right)^2 + f_{y_0}h_{x_0x_0},\\
&\qquad = f_{x_0x_0} - 2f_{x_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}} + f_{y_0y_0}\left(\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right)^2 + f_{y_0}\left(-\frac{g_{x_0x_0}}{g_{y_0}} + 2\frac{g_{x_0y_0}g_{x_0}}{g_{y_0}^2} - \frac{g_{y_0y_0}g_{x_0}^2}{g_{y_0}^3}\right),\\
&\qquad = f_{x_0x_0} - 2f_{x_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}} + f_{y_0y_0}\left(\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right)^2 - \lambda\left(-g_{x_0x_0} + 2\frac{g_{x_0y_0}g_{x_0}}{g_{y_0}} - \frac{g_{y_0y_0}g_{x_0}^2}{g_{y_0}^2}\right),\\
&\qquad = \left(f_{x_0x_0}g_{y_0}^2 - 2f_{x_0y_0}g_{x_0}g_{y_0} + f_{y_0y_0}g_{x_0}^2 + \lambda g_{x_0x_0}g_{y_0}^2 - 2\lambda g_{x_0y_0}g_{x_0}g_{y_0} + \lambda g_{y_0y_0}g_{x_0}^2\right)\cancel{\frac{1}{g_{y_0}^2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(f_{x_0x_0} + \lambda g_{x_0x_0}\right) g_{y_0}^2 - 2\left(f_{x_0y_0} + \lambda g_{x_0y_0}\right) g_{x_0} g_{y_0} + \left(f_{y_0y_0} + \lambda g_{y_0y_0}\right) g_{x_0}^2,\\
&= \mathcal{L}_{x_0x_0} g_{y_0}^2 - 2\mathcal{L}_{x_0y_0} g_{x_0} g_{y_0} + \mathcal{L}_{y_0y_0} g_{x_0}^2,\\
&= -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_0} & g_{y_0}\\ g_{x_0} & \mathcal{L}_{x_0x_0} & \mathcal{L}_{x_0y_0}\\ g_{y_0} & \mathcal{L}_{y_0x_0} & \mathcal{L}_{y_0y_0}\end{vmatrix} \gtrless 0 \quad\Leftrightarrow\quad f[x,h(x)] - f[x_0,h(x_0)] \gtrless 0.
\end{aligned}
$$

注 1：

$$
\begin{cases}
\dfrac{f_{y_0}}{g_{y_0}} \equiv -\lambda \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{L} = f(x,y) + \lambda g(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad 0 = g(x,y);\\
\dfrac{f_{y_0}}{g_{y_0}} \equiv \lambda \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{L} = f(x,y) - \lambda g(x,y) \quad\Leftrightarrow\quad g(x,y) = 0.
\end{cases}
$$

注 2：

$$
\begin{aligned}
f(x|_{x=x_0}) &= f[x_0, h(x_0)],\\
f_{x_0} &= f_{x_0}[x_0,h(x_0)] + f_{y_0}[x_0,h(x_0)]h_{x_0};\\
h_{x_0} &= -\frac{g_{x_0}[x_0,h(x_0)]}{g_{y_0}[x_0,h(x_0)]},\\
\Rightarrow\quad h_{x_0x_0} &= -\frac{1}{g_{y_0}}(g_{x_0x_0} + g_{x_0y_0}h_{x_0}) + (-g_{x_0})[-g_{y_0}^{-2}(g_{y_0x_0} + g_{y_0y_0}h_{x_0})],\\
&= -\frac{1}{g_{y_0}}\left(g_{x_0x_0} - g_{x_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right) + (-g_{x_0})\left[-g_{y_0}^{-2}\left(g_{y_0x_0} - g_{y_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right)\right],\\
&= -\frac{1}{g_{y_0}}\left(g_{x_0x_0} - g_{x_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right) + g_{x_0}g_{y_0}^{-2}\left(g_{y_0x_0} - g_{y_0y_0}\frac{g_{x_0}}{g_{y_0}}\right),\\
&= -\frac{g_{x_0x_0}}{g_{y_0}} + \frac{g_{x_0y_0}g_{x_0}}{g_{y_0}^2} + \frac{g_{x_0}g_{y_0x_0}}{g_{y_0}^2} - \frac{g_{y_0y_0}g_{x_0}^2}{g_{y_0}^3},\\
&= -\frac{g_{x_0x_0}}{g_{y_0}} + 2\frac{g_{x_0y_0}g_{x_0}}{g_{y_0}^2} - \frac{g_{y_0y_0}g_{x_0}^2}{g_{y_0}^3}.
\end{aligned}
$$

注 3：

$$
\begin{aligned}
dy &= -\frac{g_x}{g_y}dx.\\
\Rightarrow\quad d^2z &= \mathcal{L}_{xx}dx^2 - 2\mathcal{L}_{xy}\frac{g_x}{g_y}dx^2 + L_{yy}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2 dx^2,\\
&= (\mathcal{L}_{xx}g_y^2 - 2\mathcal{L}_{xy}g_xg_y + \mathcal{L}_{yy}g_x^2)\frac{dx^2}{g_y^2},\\
&= \left[(f_{xx}+\lambda g_{xx})g_y^2 - 2(f_{xy}+\lambda g_{xy})g_xg_y + (f_{yy}+\lambda g_{yy})g_x^2\right]\frac{dx^2}{g_y^2}.
\end{aligned}
$$

II. 非负约束

III. 不等式约束

1.2 动态最优问题

TBA

1.3 宏观经济学的微观基础

参看 [**ObstfeldRogoff1997**, **HeerMaußner2009**, **Edmond2019**, **GLS2021**]

1.3.1 静态最优

1.3.1.1 厂商决策

给定技术为常数和资本外生，代表性厂商选择劳动需求以使利润最大化。处于完全竞争状态的厂商而言，销售价格 P 和支付的工资 W 或实际工资 $\frac{W}{P}$ 也都是外生。因此，这是一个简单的单选择变量的最优化问题：

$$\max_{L^D} \Pi \equiv PY - WL^D, \quad \text{其中} \quad Y = F(A, K, L^D) \left\{ \begin{aligned} & \mu^m Y = F(A, \mu K, \mu L^D),\ m = 1(\text{规模报酬不变}), \\ & \left. \begin{aligned} F_K,\ F_L > 0, \\ F_{KK},\ F_{LL} < 0. \end{aligned} \right\} \Leftarrow \text{严格凹函数} \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{N^D} \Pi \equiv PF(A, K, L^D) - WL^D.$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \quad \frac{W}{P} = F_N(A, K, L^D).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\left(\frac{W}{P}\right) = F_{LK}\mathrm{d}K + F_{LL}\mathrm{d}L^D,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}L^D = \frac{1}{F_{LL}}\mathrm{d}\left(\frac{W}{P}\right) - \frac{F_{LK}}{F_{LL}}\mathrm{d}K.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L^D}{\mathrm{d}\left(\frac{W}{P}\right)} &= \frac{1}{F_{LL}} < 0, \quad \text{给定外生资本不变;} \\ \frac{\mathrm{d}L^D}{\mathrm{d}K} &= -\frac{F_{LK}}{F_{LL}} > 0, \quad \text{给定实际工资不变.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad L^D = L^D(\underbrace{W/P}_{-}, \underbrace{K}_{+}).$$

通过全微分的方法，容易发现实际工资对劳动需求有负效应，而技术和资本都对劳动需求有正效应。

1.3.1.2 家庭决策

给定预算约束，代表性家庭选择消费和劳动供给以使效用最大化。处于完全竞争状态的家庭而言，预期价格 P^e 和收到的工资 W 或实际工资 $\frac{W}{P}$ 都是外生。故此，这是一个不等式约束因为凹效用函数转化成等式约束的双选择变量的最优化问题：

$$\max_{C, L^S} U(C, L^S),$$

$$\text{s.t.} \quad P^e C \leq WL^S \quad \Leftrightarrow \quad P^e C = WL^S.$$

【解法一】有约束变成无约束

$$\Rightarrow \quad \max_{L^S} U\left(C = \frac{W}{P^e}L^S,\ L^S\right),$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \quad \frac{W}{P^e} = \frac{-U_{L^S}}{U_C}.$$

$$\overset{\text{或}}{\Rightarrow} \quad \max_{C} U\left(C,\ L^S = \frac{C}{W/P^e}\right),$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \quad \frac{W}{P^e} = \frac{-U_{L^S}}{U_C}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{W}{P^e} &= \frac{-U_L}{U_C}, \\ C &= \frac{W}{P^e}L^S. \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{d}\frac{W}{P^e} = -\frac{1}{U_C^2}[U_C(\underbrace{U_{LC}\mathrm{d}C + U_{LL}\mathrm{d}L^S}_{\mathrm{d}U_L}) - U_L(\underbrace{U_{CC}\mathrm{d}C + U_{CL}\mathrm{d}L^S}_{\mathrm{d}U_C})]; \\ & \mathrm{d}C = L^S\mathrm{d}\frac{W}{P^e} + \frac{W}{P^e}\mathrm{d}L^S. \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}C = f\left(\mathrm{d}\dfrac{W}{P^e}\right), \\ \mathrm{d}L^S = g\left(\mathrm{d}\dfrac{W}{P^e}\right). \end{cases}$$

【解法二】全微分

$$\left.\begin{aligned} U_C\mathrm{d}C + U_N\mathrm{d}L^S = 0, \\ P^e\mathrm{d}C - W\mathrm{d}L^S = 0. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{P^e} = \frac{-U_L}{U_C}.$$

1.3.2 动态最优

1.3.2.1 禀赋经济体

聚焦家庭决策行为。

I. 交易买卖

i. 仅两期

$$\max_{\{C_1,C_2\}} U(C_1,C_2), \quad \begin{cases} U_{C1}, U_{C2} > 0, \\ U_{C1C1}, U_{C2C2} < 0. \end{cases}$$

$$\text{s.t. } P_1C_1 + P_2C_2 \le P_1Y_1 + P_2Y_2 \xRightarrow{\text{凹效用函数}} P_1C_1 + P_2C_2 = P_1Y_1 + P_2Y_2.$$

通过对效用函数的假设条件，能将不等式约束变成等式约束；也可用互补松弛条件等直接求解不等式约束的最优化问题。

A. 最优问题求解

【解法一】有约束变成无约束

$$\begin{aligned} & P_2(C_2 - Y_2) = P_1(Y_1 - C_1), \\ \Rightarrow \quad & C_2 = \frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2. \\ \Rightarrow \quad & \max_{C_1} U(C_1, \underbrace{\frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2}_{C_2}), \\ \Rightarrow \quad & U_{C1} = \frac{P_1}{P_2}U_{C2}. \end{aligned}$$

【解法二】构造 Lagrange 函数

$$\max_{\{C_1,C_2,\lambda\}} \mathcal{L} = U(C_1,C_2) + \lambda(P_1Y_1 + P_2Y_2 - P_1C_1 - P_2C_2),$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \begin{cases} \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{C1} = \lambda P_1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{C2} = \lambda P_2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{U_{C1}}{U_{C2}} = \frac{P_1}{P_2}. \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1C_1 + P_2C_2 = P_1Y_1 + P_2Y_2. \end{cases}$$

【解法三】全微分

双选择变量可借助几何图形判断给定预算约束的效用最大化的点即为效用曲线与预算约束线的切点，此时斜率相同，是故：

$$\left.\begin{aligned} U_{C1}\mathrm{d}C_1 + U_{C2}\mathrm{d}C_2 = 0, \\ P_1\mathrm{d}C_1 + P_2\mathrm{d}C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{C1}}{U_{C2}} = \frac{P_1}{P_2}.$$

B. 消费欧拉方程

上述动态最优问题的解即为消费-储蓄问题的最优条件：

$$\underbrace{\frac{U_{C1}}{U_{C2}}}_{\text{边际代替率}} = \underbrace{\frac{P_1}{P_2}}_{\text{相对价格}} \equiv \underbrace{R = 1 + r}_{\text{总利率与净利率}} .$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{U_{C1}}_{\text{第 1 期少消费 1 单位的边际成本}} = \underbrace{(P_1/P_2)U_{C2}}_{\text{第 1 期少消费 1 单位的边际收益}} .$$

最优条件表达的是边际替代率等于相对价格，亦可理解为：当前（第 1 期）减少 1 单位消费（增加 1 单位储蓄）损失的边际效用（边际成本）将在第 2 期增加相应的边际效用（边际收益）；换言之，欲增加额外 1 单位第 1 期的消费需要放弃 $\frac{P_1}{P_2}$ 单位第 2 期消费。

若假设效用函数可分可加：

$$U(C_1, C_2) \equiv u(C_1) + \beta u(C_2),$$

其中 $\beta \in (0,1)$，谓之主观贴现因子或效用贴现因子；$\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$，而 ρ 为纯效用贴现率。

则消费欧拉方程为：

$$u'(C_1) = \beta(P_1/P_2)u'(C_2).$$

消费欧拉方程并非消费函数，它并没表达处于最优行为状态的家庭部门的当前消费和未来消费状态，只是描述了当前视角下的相对消费 $\frac{\beta u'(C_2)}{u'(C_1)}$ 是相对价格 $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1}$ 的函数。

C. 跨期消费动态

$$\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{\beta}{P_2/P_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{1+r}{1+\rho}.$$

由于 $u''() < 0$，则

$$u'(C_1) > u'(C_2) \quad \Leftrightarrow \quad \beta > P_2/P_1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 > C_1.$$

稍后将会看到，消费的跨期价格 $\frac{P_1}{P_2}$ 即为实际总利率 R，即 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{R}$。可见，当主观贴现因子高于资产贴现因子（即净资产贴现率 r 高于纯主观贴现率 ρ）时，下期（第 2 期）消费会高于当期（第 1 期）消费。

假设即期效用函数是对数形式，即 $u(C_i) = \log C_i$, $i = 1, 2$，则消费欧拉方程变为：

$$\frac{C_2}{C_1} = \underbrace{\underbrace{\beta}_{<1} \underbrace{(P_1/P_2)}_{>1}}_{=1}.$$

不难发现，（完美预期下的）消费增长率（C_2/C_1）是主观贴现因子（β）和相对价格（P_1/P_2）的增函数。给定相对价格，主观贴现因子越大，表示越有耐心；而给定主观贴现因子，相对价格越大，说明下期价格越便宜。这两种情况，都容易抑制当前消费而增加未来消费；这两种影响在 $\beta\frac{P_1}{P_2} = 1$ 的条件下相互抵消，此时 $C_2 = C_1$。问题是，若效用函数不是对数形式的呢？这将引出边际效用弹性或跨期替代弹性的定义，并牵涉到替代效应、收入效应和财富效应。

D. 比较动态分析

就一般形式的效应函数而言，如何判断外生变量之第 1 期禀赋、第 2 期禀赋、相对价格的变动如何影响各期消费？（以第 1 期消费为例）

还从消费欧拉方程出发，结合跨期预算约束有：

$$u'(C_1) = \beta\frac{P_1}{P_2}u'(\underbrace{\frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2}_{C_2}),$$

$$
\Rightarrow \quad F(C_1, Y_1) \equiv u'(C_1) - \beta \frac{P_1}{P_2} u'(\overbrace{\frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2}) = 0,
$$

$$
\Rightarrow \quad F_{C1} \mathrm{d}C_1 + F_{Y1} \mathrm{d}Y_1 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\xRightarrow[\text{边际消费倾向}]{\text{需求冲击}} \quad \frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}Y_1} &= -\frac{F_{Y1}}{F_{C1}}, \\
&= -\frac{-\beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 u''(C_2)}{u''(C_1) + \beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 u''(C_2)}, \\
&= \frac{\beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 u''(C_2)}{u''(C_1) + \beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 u''(C_2)} \in (0, 1];
\end{aligned}
$$

$$
F(C_1, Y_2) \equiv u'(C_1) - \beta \frac{P_1}{P_2} u'(\overbrace{\frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2}^{C_2}) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\xRightarrow{\text{需求冲击}} \quad & F_{C1} \mathrm{d}C_1 + F_{Y2} \mathrm{d}Y_2 = 0, \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}Y_2} &= -\frac{F_{Y2}}{F_{C1}}, \\
&= \frac{\beta \frac{P_1}{P_2} u''(C_2)}{u''(C_1) + \beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 u''(C_2)} \in (0, 1].
\end{aligned}
$$

可见，第 1 期和第 2 期禀赋的增加，都会增加第 1 期消费。

同理，根据隐函数法则可求

$$
F(C_1, P_1/P_2) \equiv u'(C_1) - \beta \frac{P_1}{P_2} u'(\overbrace{\frac{P_1}{P_2}(Y_1 - C_1) + Y_2}^{C_2}) = 0,
$$

$$
\Rightarrow \quad F_{C1} \mathrm{d}C_1 + F_{P1/P2} \mathrm{d}(P_1/P_2) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}(P_1/P_2)} &= -\frac{F_{P1/P2}}{F_{C1}}, \\
&= -\frac{-[\beta u'(C_2) + \beta(P_1/P_2) u''(C_2)(Y_1 - C_1)]}{u''(C_1) + \beta (P_1/P_2)^2 u''(C_2)}, \\
&= \frac{\frac{\beta u'(C_2) + \beta(P_1/P_2) u''(C_2)(Y_1 - C_1)}{u'(C_2)/C_2}}{\frac{u''(C_1) + \beta(P_1/P_2)^2 u''(C_2)}{u'(C_2)/C_2}}, \\
&= \frac{\beta C_2 + \beta \frac{P_1}{P_2} \frac{C_2 u''(C_2)}{u'(C_2)} (Y_1 - C_1)}{C_2 \frac{u''(C_1)}{u'(C_2)} + \beta (P_1/P_2)^2 \frac{C_2 u''(C_2)}{u'(C_2)}},
\end{aligned}
$$

注：$u'(C_1) = \beta \frac{P_1}{P_2} u'(C_2) \ \Rightarrow \ \frac{1}{u'(C_2)} = \beta \frac{P_1}{P_2} \frac{1}{u'(C_1)}$

$$
= \frac{\beta C_2 - \beta \frac{P_1}{P_2} [\overbrace{-\frac{C_2 u''(C_2)}{u'(C_2)}}^{\text{边际效用弹性}}] (Y_1 - C_1)}{-\frac{C_2}{C_1} \beta \frac{P_1}{P_2} \underbrace{[-\frac{C_1 u''(C_1)}{u'(C_1)}]}_{\sigma_1^{-1} > 0} - \beta \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 \underbrace{[-\frac{C_2 u''(C_2)}{u'(C_2)}]}_{\sigma_2^{-1} > 0}},
$$

$$= \frac{-\beta\left[\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{\sigma}(Y_1 - C_1) - C_2\right]}{-\beta\left[\frac{C_2}{C_1}\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{\sigma} + \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2\frac{1}{\sigma}\right]},$$

$$= \frac{\overbrace{(Y_1 - C_1)}^{\lesseqgtr 0} - \frac{\sigma}{P_1/P_2}C_2}{\frac{C_2}{C_1} + \frac{P_1}{P_2}} \lesseqgtr 0.$$

上述推导过程中假设第 1 期和第 2 期的边际效用弹性不变（$\epsilon_{u1} = \epsilon_{u2} = \epsilon_u$），也即其倒数——跨期替代弹性——为常数（$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \equiv \frac{1}{\epsilon_u}$）。

第 1 期或第 2 期的边际效用弹性定义为：

$$\epsilon_{ui} \equiv -\frac{\mathrm{d}u'(C_i)/u'(C_i)}{\mathrm{d}C_i/C_i} = -\frac{\mathrm{d}u'(C_i)/\mathrm{d}C_i}{u'(C_i)/C_i} = -\frac{C_i u''(C_i)}{u'(C_i)}, \quad i = 1, 2.$$

边际效用弹性小，表示边际效用变化对消费的变化不敏感。

第 1 期和第 2 期的跨期替代弹性定义为：

$$\sigma_{12} \equiv \frac{\mathrm{d}\log(C_2/C_1)}{\mathrm{d}\log(P_2/P_1)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}(C_2/C_1)}{C_2/C_1}}{\frac{\mathrm{d}(P_2/P_1)}{P_2/P_1}} = -\frac{\frac{\mathrm{d}(C_2/C_1)}{C_2/C_1}}{\frac{\mathrm{d}[u'(C_2)/(\beta u'(C_1))]}{u'(C_2)/(\beta u'(C_1))}}.$$

当两期无限靠近时，可以得到第 1 期或第 2 期的瞬时跨期替代弹性：

$$\sigma_1 \equiv \lim_{2\to 1}\sigma_{12} = -\frac{u'(C_1)}{C_1 u''(C_1)}, \quad \sigma_2 \equiv \lim_{1\to 2}\sigma_{12} = -\frac{u'(C_2)}{C_2 u''(C_2)}.$$

边际效用弹性小，则跨期替代弹性大，表示跨期消费安排对相对价格变化的反应大。

显见，当 $Y_1 \leq C_1$ 时（借贷或持平），$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}(P_1/P_2)} < 0$，即 $\frac{P_1}{P_2}$ 的提高会抑制 C_1；然而，当 $Y_1 > C_1$（储蓄）时，$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}(P_1/P_2)}$ 的符号不定，即 $\frac{P_1}{P_2}$ 的提高对 C_1 的影响不确定。

相对价格 $\frac{P_1}{P_2}$ 上升时，意味着当前消费品价格较之未来消费品价格变高，给定收入，会减少当前消费而增加未来消费。但还有收入效应：若初始借债，则利率提高会增加借债成本，这对当前消费也有抑制力（替代效应和收入效应的作用力方向相同）；若初始存储，利率提高会增加未来收益，有助提高当前消费（替代效应和收入效应的作用力方向相反）。

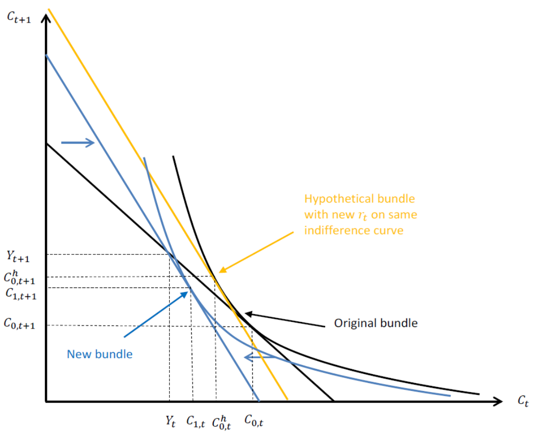


图 1.1: 借贷之后同向的替代效应和收入效应[1]

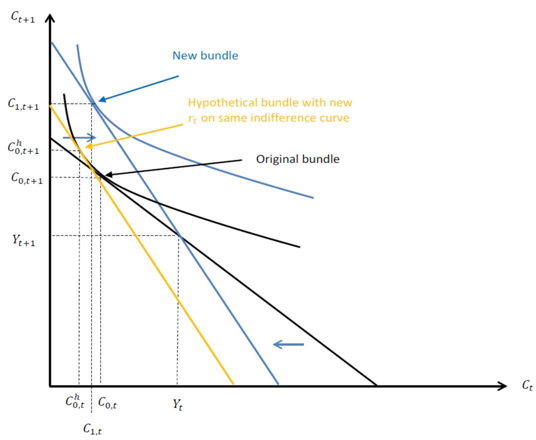


图 1.2: 存储之后反向的替代效应和收入效应[1]

为何出现不确定性的情况，有待求出消费需求方程以进一步分析。

E. 消费需求曲线

[1]Source: [**GLS2021**]

根据定义的常跨期替代弹性 σ，进一步假设具有常相对风险厌恶 (CRRA) 性质的可分可加的即期效用函数为：

$$u(C_i)=\frac{C_i^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}},\qquad \begin{cases} i=1,2. \\ \sigma>0 \end{cases}$$

则可得到具有显性表达式的消费欧拉方程。其与预期约束结合，一起决定第 1 期和第 2 期的消费需求方程：

$$\begin{aligned}
\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)}&=\beta\frac{P_1}{P_2},\\
\Rightarrow\quad \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}&=\beta\frac{P_1}{P_2},\\
\Rightarrow\quad \frac{C_1}{C_2}&=\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{-\sigma},\\
\Rightarrow\quad C_2&=\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}C_1,\\
\Rightarrow\quad \frac{P_1}{P_2}(Y_1-C_1)+Y_2&=\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}C_1,\\
\Rightarrow\quad \frac{P_1}{P_2}Y_1-\frac{P_1}{P_2}C_1+Y_2&=\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}C_1,\\
\Rightarrow\quad \left[\frac{P_1}{P_2}+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}\right]C_1&=\frac{P_1}{P_2}Y_1+Y_2,\\
\Rightarrow\quad \frac{P_1}{P_2}\left[1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}\right]C_1&=\frac{P_1}{P_2}Y_1+Y_2,\\
\Rightarrow\quad \left[1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}\right]C_1&=Y_1+\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1}Y_2,\\
\Rightarrow\quad C_1&=\left[1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}\right]^{-1}\left[Y_1+\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1}Y_2\right];\\
\Rightarrow\quad C_2&=\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}C_1=\frac{\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}}{1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}}\left[Y_1+\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1}Y_2\right].
\end{aligned}$$

整理为：

$$\left.\begin{aligned} u'(C_1)&=\beta\frac{P_1}{P_2}u'(C_2),\\ C_2-Y_2&=\frac{P_1}{P_2}(Y_1-C_1).\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}}\left[Y_1+\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{-1}Y_2\right],\\[2ex] C_2=\dfrac{\left(\beta\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma}}{1+\beta^{\sigma}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\sigma-1}}\left[Y_1+\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{-1}Y_2\right].\end{cases}$$

当 $\sigma=1$ 时，用 L'Hôpital 法则[1]，可分可加的即期效用函数即为对数效用函数：$u(C)=\log C$，则两期的消费需求方程更简洁：

$$\left.\begin{aligned} u'(C_1)&=\beta\frac{P_1}{P_2}u'(C_2),\\ C_2-Y_2&=\frac{P_1}{P_2}(Y_1-C_1).\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{1+\beta}\left(Y_1+\dfrac{P_2}{P_1}Y_2\right),\\[2ex] C_2=\dfrac{\beta}{1+\beta}\left(\dfrac{P_1}{P_2}Y_1+Y_2\right).\end{cases}$$

F. 跨期替代弹性

从上述消费需求函数中，不易看出“相对价格的变化如何影响相对消费的变化”（此即为跨期替代弹性的定

[1] Cf.[**GLS2021**]

义），有必要对此进一步讨论。从消费欧拉方程入手：

$$
\begin{aligned}
&& \frac{C_2}{C_1} &= \left(\frac{1}{\beta}\frac{P_2}{P_1}\right)^{-\sigma}, \\
\Rightarrow && \log\frac{C_2}{C_1} &= -\sigma\log\frac{1}{\beta} - \sigma\log\frac{P_2}{P_1}, \\
\Rightarrow && \mathrm{d}\log\frac{C_2}{C_1} &= -\sigma\mathrm{d}\log\frac{P_2}{P_1}, \\
\Rightarrow && -\frac{\mathrm{d}\log(C_2/C_1)}{\mathrm{d}\log(P_2/P_1)} &= \sigma > 0.
\end{aligned}
$$

跨期替代弹性指的是给定其他参数或其他外生变量不变，“相对价格的变化”对“相对消费变化”的影响，因此全微分时已视其他参数或其他外生变量为固定不变的常数。

G. 同期替代弹性

假设家庭部门的篮子里有**两种**消费品 C_1 和 C_2，价格分别是 P_1 和 P_2。给定禀赋 PY 的总收入，家庭需要选择 C_1 和 C_2 的最优配置。

$$
\begin{gathered}
\max_{C_1,C_2} U(C_1,C_2), \\
\text{s.t. } P_1C_1 + P_2C_2 \le PY \quad \Leftrightarrow \quad P_1C_1 + P_2C_2 = PY. \\
\Rightarrow \quad \max_{C_1,C_2,\lambda} \mathcal{L} = U(C_1,C_2) + \lambda(PY - P_1C_1 - P_2C_2). \\
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad U_{C1} = \lambda P_1, \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad U_{C2} = \lambda P_2,
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{U_{C1}}{U_{C2}} = \frac{P_1}{P_2}. \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1C_1 + P_2C_2 = PY.
\end{cases}
\end{gathered}
$$

进一步假设效用函数的显性表达式为：$U(C_1,C_2) \equiv \left(C_1^{\chi} + C_2^{\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}}$，则

$$
\frac{U_{C1}}{U_{C2}} = \frac{P_1}{P_2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\chi-1} = \frac{P_1}{P_2} \quad \Rightarrow \quad (\chi-1)\log(C_1/C_2) = \log(P_1/P_2) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}\log(C_1/C_2)}{\mathrm{d}\log(P_1/P_2)} = \frac{1}{1-\chi} > 0.
$$

若有 m 种商品标准化后分布在单位 1 之内，则 $U(C_1,C_2,\ldots,C_m) \equiv \left(\int_0^1 C_{it}^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$，则

$$
-\frac{\mathrm{d}\log(C_i/C_j)}{\mathrm{d}\log(P_i/P_j)} = \frac{1}{1-\chi} = \epsilon.
$$

II. 存储借贷

i. 仅两期

A. 最优化问题求解

$$
\max_{\{C_t,C_{t+1}\}} U(C_t,C_{t+1}),
$$

$$
\text{s.t.} \left.\begin{aligned}
C_t + (\overbrace{\underbrace{S_t}_{\text{存量}} - 0}^{\text{流量}}) &\le Y_t, \\
C_{t+1} + (\underbrace{\overbrace{S_{t+1}} - \overbrace{S_t}}_{\text{流量}}) &\le r_tS_t + Y_{t+1}.
\end{aligned}\right\}
\xLeftrightarrow[\text{预算流}]{\text{各期}}
\left\{\begin{aligned}
C_t + S_t &= Y_t, \\
C_{t+1} + S_{t+1} &= (1+r_t)S_t + Y_{t+1}.
\end{aligned}\right\}
\xRightarrow[S_{t+1}=0]{\text{跨期}}
C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}.
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\max_{C_t} U(C_t, \underbrace{(1+r_t)(Y_t - C_t) + Y_{t+1}}_{C_{t+1}}),
$$

$$\overset{\text{F.O.C.}}{\Longrightarrow} \quad U_{C,t} = (1+r)U_{C,t+1},$$
$$\Rightarrow \quad \frac{U_{C,t+1}}{U_{C,t}} = \frac{1}{1+r_t} = \frac{1}{R_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t}.$$

B. 具有一般函数形式的跨期替代弹性

沿用可分可加的效用函数 $U(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta u(C_{t+1})$，基于消费欧拉方程，重新推导跨期替代弹性，过程如下：

$$\begin{aligned}
& u'(C_t) = \beta(1+r_t)u'(C_{t+1}),\\
\Rightarrow \quad & \log u'(C_t) - \log u'(C_{t+1}) = \log\beta + \log(1+r_t),\\
\Rightarrow \quad & \mathrm{d}\log u'(C_t) - \mathrm{d}\log u'(C_{t+1}) = \mathrm{d}\log(1+r_t),\\
\Rightarrow \quad & \frac{u''(C_t)}{u'(C_t)}\mathrm{d}C_t - \frac{u''(C_{t+1})}{u'(C_{t+1})}\mathrm{d}C_{t+1} = \mathrm{d}\log(1+r_t),\\
\Rightarrow \quad & \frac{C_t u''(C_t)}{u'(C_t)}\mathrm{d}\log C_t - \frac{C_{t+1}u''(C_{t+1})}{u'(C_{t+1})}\mathrm{d}\log C_{t+1} = \mathrm{d}\log(1+r_t),\\
\Rightarrow \quad & \underbrace{-\frac{1}{\sigma}}_{\frac{C_t u''(C_t)}{u'(C_t)}}\mathrm{d}\log C_t + \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{-\frac{C_{t+1}u''(C_{t+1})}{u'(C_{t+1})}>0}\mathrm{d}\log C_{t+1} = \mathrm{d}\log(1+r_t),\\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\sigma}(\mathrm{d}\log C_{t+1} - \mathrm{d}\log C_t) = -\mathrm{d}\log\frac{1}{1+r_t},\\
\Rightarrow \quad & \mathrm{d}\log\frac{C_{t+1}}{C_t} = -\sigma\mathrm{d}\log\frac{1}{1+r_t},\\
\Rightarrow \quad & -\frac{\mathrm{d}\log\frac{C_{t+1}}{C_t}}{\mathrm{d}\log\frac{1}{1+r_t}} = \sigma > 0.
\end{aligned}$$

如前所述，实际总利率即为跨期相对价格，即 $\frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{1}{1+r_t}$，故此前后推导的跨期替代弹性是一致的。

C. 替代效应、收入效应和财富效应

$$\left.\begin{aligned}
u'(C_t) &= \beta(1+r_t)u'(C_{t+1})\\
C_{t+1} - Y_{t+1} &= (1+r_t)(Y_t - C_t)
\end{aligned}\right\}
\begin{cases}
\overset{\sigma=1}{\Longrightarrow}\begin{cases}
C_t = \dfrac{1}{1+\beta}\left(Y_t + \dfrac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) \Rightarrow \begin{cases}
\dfrac{\partial C_t}{\partial Y_t} = \dfrac{1}{1+\beta} > 0,\\
\dfrac{\partial C_t}{\partial Y_{t+1}} = \dfrac{1}{1+\beta}\dfrac{1}{1+r_t} > 0,\\
\dfrac{\partial C_t}{\partial r_t} = -\dfrac{Y_{t+1}}{(1+\beta)(1+r_t)^2} < 0.
\end{cases}\\
C_{t+1} = \dfrac{\beta}{1+\beta}\left(Y_t + \dfrac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right)
\end{cases}\\
\overset{\sigma\neq1}{\Longrightarrow}\begin{cases}
C_t = \dfrac{1}{1+\beta^\sigma(1+r_t)^{\sigma-1}}\left(Y_t + \dfrac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right) \Rightarrow \begin{cases}
\dfrac{\partial C_t}{\partial Y_t} = \dfrac{1}{1+\beta^\sigma(1+r_t)^{\sigma-1}} > 0,\\
\dfrac{\partial C_t}{\partial Y_{t+1}} = \dfrac{1}{1+\beta^\sigma(1+r_t)^{\sigma-1}}\dfrac{1}{1+r_t} > 0,\\
\dfrac{\partial C_t}{\partial r_t} \lesseqgtr 0.
\end{cases}\\
C_{t+1} = \dfrac{\beta^\sigma(1+r_t)^\sigma}{1+\beta^\sigma(1+r_t)^{\sigma-1}}\left(Y_t + \dfrac{Y_{t+1}}{1+r_t}\right).
\end{cases}
\end{cases}$$

观察发现，当期消费函数中有两部分含有利率，分别是 $\frac{1}{1+\beta^\sigma(1+r_t)^{\sigma-1}}$ 和 $Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1+r_t}$。第一部分关乎利率升高对当期消费在替代效应和收入效应之间的权衡，第二部分因为财富效应而对当期消费产生影响。

（1）替代效应。利率提高 $\rightarrow$ 储蓄增加 $\rightarrow$ 当期消费减少；或者回到实际总利率为跨期相对价格，即 $1+r_t = \frac{P_t}{P_{t+1}}$，这也可以说明利率提高后，当期消费因价格更高更有所减少。

（2）收入效应。利率提高，给定 $(1+r_t)S_t$ 不变，意味着当期储蓄可减少，而增加当期消费。

替代效应和收入效应孰强孰弱取决于 $(1+r_t)^{\sigma-1}$。当 $\sigma>1$ 时，替代效应为主，减少当期消费；在 $\sigma<1$ 时，收入效应占优，增加当期消费；当 $\sigma=1$ 时，两种效应抵补。

（3）财富效应。利率提高 $\to$ 贴现到当前的终身禀赋收入减少 $\to$ 当期消费降低。

ii. 更多期

$$\max_{C_t,C_{t+1},\ldots,C_{t+T}} U=u(C_t)+\beta u(C_{t+1})+\beta^2 u(C_{t+2})+\cdots+\beta^T u(C_{t+T}),$$

$$\text{s.t.}\quad \left.\begin{aligned} C_t+S_t&\le Y_t,\\ C_{t+1}+S_{t+1}&\le Y_{t+1}+(1+r_t)S_t,\\ C_{t+2}+S_{t+2}&\le Y_{t+2}+(1+r_{t+1})S_{t+1},\\ &\vdots\\ C_{t+T}+S_{t+T}&\le Y_{t+T}+(1+r_{t+T-1})S_{t+T-1}.\end{aligned}\right\} \xLeftrightarrow[S_{t+T}=0]{r_{t+j}=r} C_t+\frac{C_{t+1}}{1+r}+\frac{C_{t+2}}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C_{t+T}}{(1+r)^T}=Y_t+\frac{Y_{t+1}}{1+r}+\frac{Y_{t+2}}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{Y_{t+T}}{(1+r)^T}.$$

$$\xRightarrow[\text{T 个}]{\text{F.O.C.}} \begin{cases} u'(C_t)=\beta(1+r)u'(C_{t+1}),\\ u'(C_{t+1})=\beta(1+r)u'(C_{t+2}),\\ u'(C_{t+2})=\beta(1+r)u'(C_{t+3}),\\ \quad\vdots\\ u'(C_{t+T-1})=\beta(1+r)u'(C_{t+T}).\end{cases}$$

iii. 无穷期

（1）如果资产 $B_t>0$，利息收入 $rB_t>0$ 将使禀赋资源增加；

（2）如果资产 $B_t<0$，债务负担 $rB_t<0$ 将使禀赋资源减少。

第 t 期的预算约束流（单期预算约束）：

$$C_t+B_{t+1}\le(1+r)B_t+Y_t \xRightarrow[\text{非 Ponzi 对策}]{\text{效用函数严格增}} C_t+B_{t+1}=(1+r)B_t+Y_t.$$

当 $t=0$ 时，$C_0+B_1=0+Y_0$,

当 $t=1$ 时，$C_1+B_2=R\underbrace{(Y_0-C_0)}_{B_1}+Y_1 \quad\Leftrightarrow\quad RC_0+C_1+B_2=RY_0+Y_1$，

当 $t=2$ 时，$C_2+B_3=R\underbrace{[R(Y_0-C_0)+(Y_1-C_1)]}_{B_2}+Y_2 \quad\Leftrightarrow\quad R^2C_0+RC_1+C_2+B_3=R^2Y_0+RY_1+Y_2$，

当 $t=T,T>2$ 时，$R^TC_0+R^{T-1}C_1+R^{T-2}C_2+\cdots+C_T+B_{T+1}=R^TY_0+R^{T-1}Y_1+R^{T-2}Y_2+\cdots+Y_T$，

两边同除以 R^T，可得 $C_0+R^{-1}C_1+R^{-2}C_2+\cdots+R^{-T}C_T+R^{-T}B_{T+1}=Y_0+R^{-1}Y_1+R^{-2}Y_2+\cdots+R^{-T}Y_T$，

写成紧凑的形式为：$\sum_{t=0}^{T}R^{-t}C_t+R^{-T}B_{T+1}=\sum_{t=0}^{T}R^{-t}Y_t$。

当 $T\to\infty$，$\lim_{T\to\infty}R^{-T}B_{T+1}=0$，则上式变为：

$$\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}C_t=\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}Y_t,$$

此即为终身预算约束。其中，跨期相对价格 P_{t+1}/P_t 与实际利率的关系为：

$$\frac{P_{t+1}}{P_t}=R_{t+1}^{-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_t}{P_0}=\prod_{s=0}^{t}R_s^{-1},\ t\ge1 \quad\xRightarrow{\text{R}}\quad \frac{P_t}{P_0}=R^{-t} \quad\Rightarrow\quad \frac{P_{t+1}}{P_t}=\frac{R^{-(t+1)}P_0}{R^{-t}P_0}=R^{-1}.$$

【视角一】基于终身预期约束的最优化问题

$$\max_{\mathbf{C}} U(\mathbf{C}),$$

$$\text{s.t.}\quad C_t = Y_t \quad \overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Y} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty} P_t C_t = \sum_{t=0}^{\infty} P_t Y_t.$$

$$\mathcal{L} = U(\mathbf{C}) + \lambda \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{C}), \quad \lambda \geq 0$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \quad \nabla U(\mathbf{C}) = \lambda \mathbf{P},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\lambda, \mathbf{P}).$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}(\lambda,\mathbf{P}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Y},$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{P},\mathbf{Y}),$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{C}^*(\mathbf{P},\mathbf{Y}) = \mathbf{C}(\underbrace{\overbrace{\lambda(\mathbf{P},\mathbf{Y})}^{\text{间接效应}}}_{\text{收入效应\&财富效应}}, \underbrace{\overbrace{\mathbf{P}}^{\text{直接效应}}}_{\text{替代效应}}),$$

其中，$\mathbf{P} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\} = \{P_t\}$。

一阶条件系统 $\nabla U(\mathbf{C}) = \lambda \mathbf{P}$ 的各元素为：

$$U_{C,t}(\mathbf{C}) \equiv \frac{\partial}{\partial C_t} U(\mathbf{C}) = \lambda P_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

边际替代率 (MRS) 为：

$$\underbrace{\frac{U_{C,t+1}(\mathbf{C})}{U_{C,t}(\mathbf{C})}}_{\text{边际替代率}} = \underbrace{\frac{P_{t+1}}{P_t}}_{\text{相对价格}}.$$

假设效用函数可分可加 $U(\mathbf{C}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$，其中 β 为主观贴现因子；即期效用函数为严格凹，即 $u'(C) > 0, u''(C) < 0$。则第 t 期消费的边际效用为 $U_{C,t} = \beta^t u'(C_t)$，边际替代率遂为：

$$\frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \frac{P_{t+1}}{P_t} \equiv \frac{1}{R_{t+1}}.$$

也即跨期消费欧拉方程：

$$\underbrace{u'(C_t)}_{\text{当前少消费 1 单位的当前边际成本}} = \underbrace{\beta R_{t+1} u'(C_{t+1})}_{\text{当前少消费 1 单位的当前边际收益}}.$$

【视角二】基于流动预期约束的最优化问题

$$\max_{C_t, B_{t+1}} U(\mathbf{C}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t),$$

$$\text{s.t.}\quad C_t + B_{t+1} = RB_t + Y_t.$$

$$\Rightarrow \quad \max_{C_t, B_{t+1}, \lambda_t} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (RB_t + Y_t - C_t - B_{t+1}).$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}} \left\{ \begin{array}{llllll} \left. \begin{array}{lllll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 & \Rightarrow & \beta^t u'(C_t) - \lambda_t = 0 & \Rightarrow & \lambda_t = \beta^t u'(C_t), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}} = 0 & \Rightarrow & -\lambda_t + \lambda_{t+1} R = 0 & \Rightarrow & \lambda_t = R\lambda_{t+1}. \end{array} \right\} \Rightarrow u'(C_t) = \beta R u'(C_{t+1}). \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad RB_t + Y_t - C_t - B_{t+1} = 0. \end{array} \right.$$

消费动态：

$$u''(C) < 0 \quad \Rightarrow \quad C_{t+1} > C_t \quad \Leftrightarrow \quad u'(C_{t+1}) < u'(C_t) \quad \Leftrightarrow \quad \beta R_{t+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1}) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_{t+1} > \rho.$$

定性上看，净实际利率高于主观贴现率时，消费将增加；定量上看，此效应的强度取决于边际效用曲率中的

对跨期替代的态度（跨期替代弹性）：$\mathrm{d}\log(C_{t+1}/C_t)/\mathrm{d}\log(P_{t+1}/P_t) \Leftrightarrow \mathrm{d}\log(C_{t+1}/C_t)/\mathrm{d}\log(1/R_{t+1})$：

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{U}(\mathbf{C}) \overset{\text{CES}}{=} \left(\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t C_t^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad \sigma>0 & \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}\log\frac{C_{t+1}}{C_t}}{\mathrm{d}\log\frac{P_{t+1}}{P_t}} = -\dfrac{1}{\sigma}; \\ U(\mathbf{C}) \overset{\text{CES}}{=} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \underbrace{\dfrac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}}_{u(C_t)}, \quad \sigma>0 & \Rightarrow \quad \dfrac{\log\frac{C_{t+1}}{C_t}}{\log(\beta R)} = \dfrac{1}{\sigma} \approx \dfrac{r-\rho}{\sigma}.\end{array}\right\} \begin{cases}\log\frac{C_{t+1}}{C_t}\text{对利率 r 的变化很敏感,} & \sigma=0;\\ \log\frac{C_{t+1}}{C_t}\text{与利率 r 一对一的变化,} & \sigma=1;\\ \log\frac{C_{t+1}}{C_t}\text{对利率 r 的变化不敏感,} & \sigma=0.\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}u'(C_t)=\beta R_{t+1}u'(C_{t+1}),\\ \sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}C_t=\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}Y_t.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{C_{t+1}}{C_t}=(\beta R)^{\frac{1}{\sigma}},\\ \downarrow\\ \sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}\underbrace{\left[(\beta R)^{\frac{t}{\sigma}}C_0\right]}_{C_t}=\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}Y_t.\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}C_0=\left[1-\left(\beta R^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right]\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}Y_t}_{\text{终身收入}},\\ \quad\Downarrow\\ C_t=(\beta R)^{\frac{t}{\sigma}}\underbrace{\left[1-\left(\beta R^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right]\sum_{t=0}^{\infty}R^{-t}Y_t}_{C_0}.\\ \quad\Downarrow\\ B_{t+1}=RB_t+Y_t-C_t.\end{array}\right.$$

可见，消费不随禀赋资源的短暂变化而变化，只会随终身收入（或称之为永久收入）之变而变。

1.3.2.2 生产经济体

I. 自耕农

i. 仅两期

ii. 更多期

完美预期下，假设劳动力供给为常数，家庭部门在预算约束下最大化 T 期消费的效用：

$$\max_{C_0,\ldots,C_T} U(C_0,C_1,\ldots,C_T),$$

$$\text{s.t. } C_t+S_t\le f(K_t,N) \Leftrightarrow C_t+I_t\le f(K_t,N) \xrightarrow[\delta=1,\ K_0\text{给定},\ t=0,\ldots,T]{K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t} K_{t+1}+C_t\le f(K_t,N) \Leftrightarrow K_{t+1}+C_t=f(K_t,N).$$

【解法一】构造 Lagrange 函数

$$\max_{\{C_t\},K_{t+1}} \mathcal{L}=U(C_0,C_1,\ldots,C_T)+\lambda_t[f(K_t,N)-K_{t+1}-C_t],$$

$$\xRightarrow{\text{F.O.C.}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\mathcal{L}(\{C_t\},K_t,K_{t+1})}{\partial C_t}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial U(C_0,\ldots,C_T)}{\partial C_t}=\lambda_t,\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\{C_t\},K_t,K_{t+1})}{\partial K_{t+1}}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_t=\lambda_{t+1}f'(K_{t+1},N).\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\partial U(C_0,\ldots,C_T)/\partial C_t}{\partial U(C_0,\ldots,C_T)/\partial C_{t+1}}=f'(K_{t+1},N).$$

其中 K_0 给定，λ_t, $t=1,2,\ldots,T$。

iii. 无穷期

$$\max_{\{C_t,K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U(\{C_t\})=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t), \quad \begin{cases}\beta\in(0,1)\\ u'(C)>0,\ u''(C)<0\end{cases}$$

$$\text{s.t.}\quad C_t+K_{t+1}=F(K_t,L)+(1-\delta)K_t \quad\Leftarrow\quad \begin{cases}Y_t=F(K_t,L),\\ C_t+I_t=Y_t,\\ K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t.\end{cases}$$

【解法一】拉格朗日函数法

一阶条件即消费欧拉方程为：

$$u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})[F'(K_{t+1}, L) + (1-\delta)].$$

【解法二】动态规划

简化起见，假设 $\delta = 1 = L$，流动约束条件代入目标函数，最优化问题由有约束变成无约束：

$$\begin{aligned}
\overbrace{\upsilon(\underbrace{K_0}_{\text{给定}}) \equiv \max_{\{K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\underbrace{F(K_t) - K_{t+1}}_{C_t})}^{\text{值函数}}, \quad \beta \in (0,1). \\
&= \max_{\{K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left[\underbrace{u(F(K_0) - K_1)}_{t=0} + \sum_{t=\mathbf{1}}^{\infty} \beta^t u(F(K_t) - K_{t+1}) \right], \\
&= \max_{K_1} \left[u(F(K_0) - K_1) + \boldsymbol{\beta} \max_{\{K_{t+1}\}_{t=\mathbf{1}}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{\mathbf{t-1}} u(F(K_t) - K_{t+1}) \right], \\
&= \max_{K_1} [u(F(K_0) - K_1) + \beta \upsilon(K_1)]; \\
&\Updownarrow \\
\upsilon(K_t) &= \max_{K_{t+1}} [u(F(K_t) - K_{t+1}) + \beta \upsilon(K_{t+1})]; \\
&\Updownarrow \\
\underbrace{\upsilon(K_t) = \max_{K_{t+1}} [u(F(K_t) - K_{t+1}) + \beta \upsilon(K_{t+1})]}_{\text{Bellman 方程} \subseteq \text{泛函}}, &\quad \text{给定} u(C), F(K), \beta.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u(F(K_t) - K_{t+1})}{\partial K_{t+1}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_{Ct} = \beta \upsilon'(K_{t+1}), \\
\upsilon'(K_t) = u_{Ct} F'(K_t) \quad &\Rightarrow \quad \upsilon'(K_{t+1}) = u_{C,t+1} F'(K_{t+1}).
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{u_{Ct}}{\beta u_{C,t+1}} = F'(K_{t+1}).$$

II. 工业化

厂商决策

家庭决策

第二章 静态均衡确定 vs. 动态均衡确定

2.1 静态同期均衡的存在性、唯一性与稳定性

2.1.1

2.1.2

2.2 动态跨期均衡的存在性、唯一性与稳定性

符号简化起见，假设技术和人口皆为常数 1；另需假设初始条件和横截性条件给定，即：$K_0 > 0$、$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(C_T)K_{T+1} = 0$；$\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$，$\rho > 0$；$F(K_t) = K_t^{\alpha}$，$\alpha \in (0,1]$。从 Solow 到 Ramsey 的主体方程分别为：

$$K_{t+1} = sF(K_t) + (1-\delta)K_t.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} C_t + K_{t+1} &= F(K_t) + (1-\delta)K_t, \\ u'(C_t) &= \beta u'(C_{t+1})[F'(K_{t+1}) + (1-\delta)]. \end{aligned}$$

2.2.1 存在性

2.2.2 唯一性

Solow 模型的跨期均衡处有 $K_{t+1} = K_t = K^*$，Ramsey 模型的跨期均衡处有：$K_{t+1} = K_t = K^*$ 且 $C_{t+1} = C_t = C^*$，则

$$\left.\begin{aligned} C^* + K^* = F(K^*) + (1-\delta)K^*, \\ 1 = \beta[F'(K^*) + (1-\delta)]. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & C^* = F(K^*) - \delta K^* && \Rightarrow \quad C^* =, \\ & F'(K^*) = \rho + \delta && \Rightarrow \quad K^* = \left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \end{aligned}\right.$$

修正黄金率：

$$\frac{\partial C^*}{\partial K^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad F'(K^{**}) = \delta \quad < \quad F'(K^*) = \rho + \delta \quad \Leftrightarrow \quad K^* < K^{**}.$$

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \quad \Rightarrow \quad I^{**} = \delta K^{**} \quad \Rightarrow \quad s^{**} = \frac{\delta K^{**}}{F(K^{**})} = \frac{\delta}{F'(K^{**})}\frac{F'(K^{**})K^{**}}{F(K^{**})} = \frac{F'(K^{**})K^{**}}{F(K^{**})} = \alpha.$$

稳态储蓄率

$$s^* = \frac{\delta K^*}{F(K^*)} = \frac{\delta}{F'(K^*)}\frac{F'(K^*)K^*}{F(K^*)} = \frac{\delta}{\rho+\delta}\frac{F'(K^*)K^*}{F(K^*)} = \frac{\delta}{\rho+\delta}\alpha = \frac{\delta}{\rho+\delta}s^{**}.$$

2.2.3 稳定性

2.2.3.1 几何分析

单变量相位图 vs. 双变量相位图

$$K_{t+1} = sF(K_t) + (1-\delta)K_t \qquad \xLeftrightarrow{\Delta K_{t+1}=0} \qquad \underbrace{K^* = \text{常数}}_{\text{跨期均衡点}}.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} K_{t+1}-K_t &= F(K_t)-\delta K_t - C_t, & \xLeftrightarrow{\Delta K_{t+1}=0} & \quad \overbrace{C_t = F(K_t)-\delta K_t}^{\text{跨期均衡曲线段}}, \\ \frac{u'(C_t)}{u'(C_{t+1})} &= \beta[F'(K_{t+1})+(1-\delta)], & \xLeftrightarrow{\Delta C_{t+1}=0} & \quad \underbrace{K_t = K^*}_{\text{跨期均衡射线}} . \end{aligned}$$

$K_0 \geq 0$ 给定，$0 \leq C_0 \leq F(K_0)+(1-\delta)K_0$。

i. 当 C_t 高于使资本为常数的水平时，$K_{t+1}-K_t = F(K_t)-\delta K_t - C_t < 0$，即 $K_{t+1}-K_t < 0$ 或 $K_{t+1} < K_t$；当 C_t 低于使资本为常数的水平时，$K_{t+1}-K_t > 0$ 或 $K_{t+1} > K_t$。

ii. 当 $K_t < K^*$ 时，由于 $F''() < 0$，$F'()$ 是减函数，因此 $F'(K_t) > F'(K^*)$，这意味着 $\frac{u'(C_t)}{u'(C_{t+1})} > 1$ 或 $u'(C_{t+1}) < u'(C_t)$，又因为 $u'()$ 也是减函数，因而 $C_{t+1} > C_t$；当 $K_t > K^*$ 时，$C_{t+1} < C_t$。

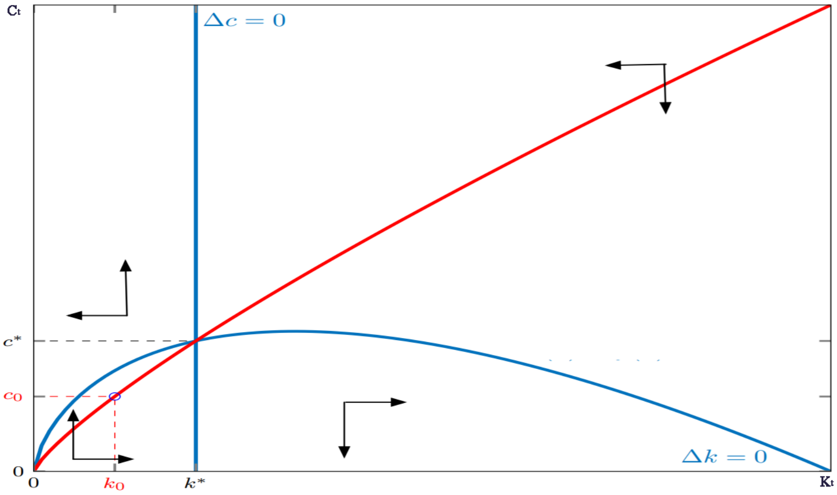


图 2.1: 双变量相位图[1]

2.2.3.2 数理分析

I. 标量

$$z_{t+1} = \phi z_t + c, \quad y_0\text{给定},$$

$$\Rightarrow \quad z_t = \underbrace{z_c}_{\text{余函数}} + \underbrace{z_p}_{\text{特别解}}, \quad \begin{cases} \overbrace{z_{t+1}}^{aA^{t+1}} = \phi \overbrace{z_t}^{aA^t}; \\ \underbrace{z_{t+1} = z_t = z^*}_{\text{稳态}}. \end{cases}$$

$$z_0 = \overbrace{aA^0}^{z_c} + \overbrace{z^*}^{z_p} \quad \Rightarrow \quad a,$$

$$\Rightarrow \quad z_t = (z_0 - \underbrace{\frac{c}{1-\phi}}_{\bar{z}})\phi^t + \underbrace{\frac{c}{1-\phi}}_{\bar{z}}, \quad t \geq 0.$$

[1] Source: [**Edmond2018**]

II. 向量

$$\underbrace{\mathbf{z}_{t+1}}_{\begin{bmatrix} z_{1,t+1} \\ z_{2,t+1} \end{bmatrix}} = \underbrace{\boldsymbol{\phi}}_{\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}} \underbrace{\mathbf{z}_t}_{\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix}} + \underbrace{\mathbf{c}}_{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}, \quad \mathbf{z}_0\text{给定},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{z}_t = \mathbf{z}_c + \mathbf{z}_p,$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_c + \mathbf{z}_p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{z}_t = [\mathbf{z}_0 - \underbrace{(\mathbf{I}-\boldsymbol{\phi})^{-1}\mathbf{c}}_{\bar{\mathbf{z}}}]\boldsymbol{\phi}^t + \underbrace{(\mathbf{I}-\boldsymbol{\phi})^{-1}\mathbf{c}}_{\bar{\mathbf{z}}}.$$

$$\underbrace{\mathbf{z}_{t+1}}_{\begin{bmatrix} z_{1,t+1} \\ z_{2,t+1} \end{bmatrix}} = \overbrace{\underbrace{\boldsymbol{\phi}}_{\begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix}}}^{\text{非耦合系统}}{}_{\text{对角阵，无反馈}} \underbrace{\mathbf{z}_t}_{\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix}} + \underbrace{\mathbf{c}}_{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}},$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}^t \neq \begin{bmatrix} \phi_{11}^t & \phi_{12}^t \\ \phi_{21}^t & \phi_{22}^t \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \phi_{11}^t & 0 \\ 0 & \phi_{22}^t \end{bmatrix}$$

耦合系统更常见，$\boldsymbol{\phi}$或$\mathbf{A}$为非对角阵，可行方法之一是对角化：

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \boldsymbol{\Lambda} \quad \text{或} \quad \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\phi}\mathbf{V} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

$$\begin{cases} (\mathbf{z}_{t+1} - \bar{\mathbf{z}}) \equiv \mathbf{V}\overbrace{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_{t+1} - \bar{\mathbf{z}})}^{\mathbf{x}_{t+1}}; \\ (\mathbf{z}_t - \bar{\mathbf{z}}) \equiv \mathbf{V}\underbrace{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_t - \bar{\mathbf{z}})}_{\mathbf{x}_t}. \end{cases}$$

$$\overbrace{\mathbf{V}\mathbf{x}_{t+1}}^{\mathbf{z}_{t+1}-\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\overbrace{\mathbf{V}\mathbf{x}_t}^{\mathbf{z}_t-\bar{\mathbf{z}}},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_t,$$

$$= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{x}_t.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\Lambda}^t\mathbf{x}_0.$$

$$\mathbf{z}_t - \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{V}\underbrace{\mathbf{x}_t}_{},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{z}_t = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{V}\mathbf{x}_t,$$

$$= \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{V}\overbrace{\boldsymbol{\Lambda}^t\mathbf{x}_0}^{},$$

$$= \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}^t\overbrace{\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{z}})}^{}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{z} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}^{-1}\text{不存在} \quad \Leftrightarrow \quad \text{奇异},$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = 0, \\
&\Rightarrow \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\
&\Rightarrow \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\Rightarrow \quad (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{12}A_{21} = 0, \\
&\Rightarrow \quad \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0, \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 = \begin{cases} \frac{(A_{11}+A_{22}) \pm \sqrt{(A_{11}+A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}}{2}, \\ A_{11}, A_{22}, \qquad \text{如果 A 是对角阵}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{z}_t = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{V}\mathbf{x}_t = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{x}_0, \\
\Rightarrow \quad &\begin{cases} z_{1t} = \bar{z}_1 + v_{11}\lambda_1^t x_{10} + v_{12}\lambda_2^t x_{20}, \\ z_{2t} = \bar{z}_2 + v_{21}\lambda_1^t x_{10} + v_{22}\lambda_2^t x_{20}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

若 $|\lambda| < 1$ 则系统稳定，否则不稳定。

第三章 比较静态分析 vs. 比较动态分析

3.1

3.1.1

3.2

第四章 随机静态最优 vs. 随机动态最优

4.1 随机静态最优

从信息完全到信号提取

$$P^e = P \quad \text{vs.} \quad P^e = \bar{P} + \epsilon.$$

4.2 随机动态最优

4.2.1 离散时间系统

$$\mathbb{E}Y_{t+1} = P_r Y_{t+1}^h + (1 - P_r)Y_{t+1}^l;$$

$$\mathbb{E}C_{t+1} = P_r C_{t+1}^h + (1 - P_r)C_{t+1}^l \quad \xLeftrightarrow{C_t + \frac{C_{t+1}^?}{1+r_t} = Y_t + \frac{Y_{t+1}^?}{1+r_t}} \quad \begin{cases} C_{t+1}^h = Y_{t+1}^h + (1 + r_t)(Y_t - C_t), \\ C_{t+1}^l = Y_{t+1}^l + (1 + r_t)(Y_t - C_t). \end{cases}$$

$$u'(C_t) = \beta(1 + r_t)\mathbb{E}[u'(C_{t+1})] > \beta(1 + r_t)u'(\mathbb{E}C_{t+1}).$$

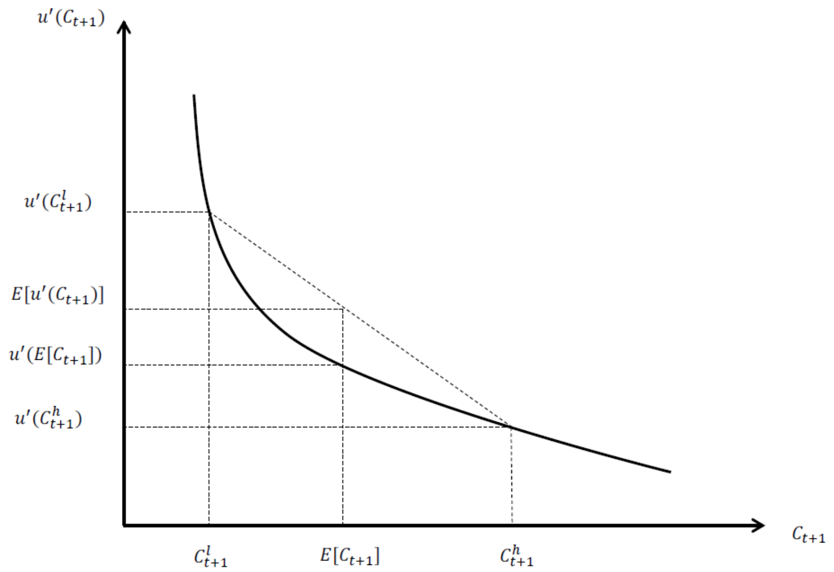


图 4.1: 预期边际效应 vs. 预期消费的边际效用[1]

当 $P_r = 1$ 或 $P_r = 0$ 时，没有不确定性。

家庭部门要为未来制订消费计划。决策的复杂在于，未来的决定依赖于未来的状态，而未来的状态作决策时看来是不确定的。

假设未来的状态有 j 种可能，$i = 1, 2, \ldots, m$；家庭认为状态 i 出现的主观概率为 P_r^i。于是向量 $\mathbf{P}_r = (P_r^1, P_r^2, \ldots, P_r^m)'$ 表示状态 i 的分布规律。

家庭部门拟定一个消费计划 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)'$，相应的效用为 $\mathbf{U} = [U(C_1), U(C_2), \ldots, U(C_m)]'$，假设 $U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$。这意味着，家庭现在就决定，当未来出现状态 i 时，确定地消费 C_i。对应于消费计划 C，

[1] Source: **[GLS2021]**

家庭的期望效用为

$$V=\sum_{i=1}^{j}P_r^iU(C_i)=\mathbf{P}_r'\cdot\mathbf{U}=\mathbb{E}U(\mathbf{C}).$$

给定预算约束，家庭部门不确定性下的最优化问题即为

$$\max_{C_i} V=\sum_{i=1}^{j}P_r^iU(C_i),$$
$$\text{s.t. }\varphi(\mathbf{C})=0.$$

Lagrange 函数法求解

$$\mathcal{L}=V(\mathbf{C})+\lambda\varphi(\mathbf{C}),$$

其中 λ 是 Lagrange 乘子。

最优解的一阶条件为：

$$\nabla\mathcal{L}=\nabla V(\mathbf{C})+\lambda\nabla\varphi(\mathbf{C})=0.$$

一阶条件和约束条件通常可解出 $m+1$ 个未知变量 $C_1,C_2,\dots,C_m,\lambda$，因而确定最优消费计划 $\mathbf{C}=(C_1,C_2,\dots,C_m)'$。

4.2.2 连续时间系统

参看 [**H2006**, **DixitPindyck1994**]。

设家庭部门的未来状态 x 可能取任何实数值，因而 x 是一个实随机变量。家庭的决策问题是：选择一个状态相依的消费计划 $C=C(x)$，以实现期望效用最大化。$C(x)$ 作为随机变量 x 的函数，其自身也是一个随机变量，用 $F(\cdot)$ 记其分布函数，则期望效用为：

$$V=\int_{-\infty}^{\infty}U(C)\mathrm{d}F(C).$$

给定预算约束，家庭部门不确定性下的最优化问题即为

$$\max_{F} V=\int_{-\infty}^{\infty}U(C)\mathrm{d}F(C),$$
$$\text{s.t. } F\in\Phi.$$

记 $f(\cdot)$ 为标准正态分布密度。若 $C\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$，则 $\frac{C-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$。则 C 的密度函数为 $\frac{f(\frac{c-\mu}{\sigma})}{\sigma}$

连续时间随机过程的 Wiener 过程，有三个重要属性：

(i) 首先其为 Markov 过程。这意味着该过程的所有未来值仅取决于当前值而不受该过程的过去值或其他过程当前信息的影响。因此，关于该过程未来值的最优预测也只需知道该过程的当前值。

(ii) 再次其有独立增量。这意味着该过程随着任意时间间隔的变化的概率分布独立于其他时间间隔。因此，其可视为离散时间随机游走的连续时间版本。

(iii) 该过程任意有限时间间隔的变化是方差随此时间间隔线性递增的正态分布。

若 $z(t)$ 是一个 Wiener 过程，则

$$\Delta z=\epsilon_t\sqrt{\Delta t},$$

其中 $\epsilon_t\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$ 且 $\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_s)=0,\ \forall t\neq s}_{\text{有独立增量的 Markov 过程}}$。

$$\text{若}n=\frac{T}{\Delta t},\quad \text{则}z(s+T)-z(s)=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\sqrt{\Delta t},\quad \text{其中}\epsilon_i\text{ 相互独立}.$$

对此求和用中心极限定理可知 $z(s+T)-z(s)$ 是 0 均值、方差为 $n\Delta t=T$ 的正态分布。

Wiener 过程中随时间间隔而变动的方差随时间间隔 T 而线性增长。

Wiener 过程是一个非平稳过程（连续时间版的随机游走），方差将趋于无穷大。

注意

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\epsilon_t\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}=\frac{\epsilon_t}{\sqrt{\Delta t}}\quad\Rightarrow\quad\Delta t\to 0,\quad\frac{\Delta z}{\Delta t}\to\infty.$$

是故，令 Δt 尽可能小，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}z=\epsilon_t\sqrt{\mathrm{d}t}.\\ \Rightarrow\quad&\mathbb{E}(\mathrm{d}z)=\mathbb{E}(\epsilon_t\sqrt{\mathrm{d}t})=\mathbb{E}(\epsilon_t)\sqrt{\mathrm{d}t}=0,\\ \Rightarrow\quad&\mathbb{V}(\mathrm{d}z)=\mathbb{E}\{[\mathrm{d}z-\mathbb{E}(\mathrm{d}z)]^2\}=\mathbb{E}[(\mathrm{d}z)^2]=\mathbb{E}(\epsilon_t^2\mathrm{d}t)=\mathbb{E}(\epsilon_t^2)\mathrm{d}t=\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

假设 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 是两个 Wiener 过程，

$$\begin{cases}\mathrm{d}z_1=\epsilon_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t};\\ \mathrm{d}z_2=\epsilon_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\mathbb{E}(\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2)=\rho_{12}\mathrm{d}t,$$

其中，ρ_{12} 过程 1 和过程 2 的相关系数，也是这两个过程每单位时间的协方差 $\rho_{12}=\frac{\mathrm{cov}(z_1z_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\mathrm{cov}(z_1z_2)$，因为 $\sigma_1=\frac{\mathbb{V}(\mathrm{d}z_1)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbb{E}[(\mathrm{d}z_1)^2]}{\mathrm{d}t}=1$，同理 $\sigma_2=1$。

4.2.3 Brownian 运动

Wiener 过程容易被拓展为更复杂的过程。最简单的拓展形式是带漂移（趋势）的 Brownian 运动：

$$\underbrace{\mathrm{d}z=\epsilon_t\sqrt{\mathrm{d}t}}_{\text{Wiener 过程}}\quad\longrightarrow\quad\underbrace{\mathrm{d}x=\underbrace{\alpha}_{\text{漂移参数}}\mathrm{d}t+\underbrace{\sigma}_{\text{方差参数}}\mathrm{d}z}_{\text{Brownian 运动}}.$$

换言之，

$$\mathrm{d}x=\alpha\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z,\qquad\text{其中 }\mathrm{d}z=\epsilon_t\sqrt{\mathrm{d}t}.$$

注意，任意时间间隔 Δt 内的 x 的变化 Δx 的均值和方差分别为：

$$\begin{cases}\mathbb{E}\Delta x=\mathbb{E}(\alpha\Delta t+\sigma\Delta z)=\alpha\Delta t+\sigma\mathbb{E}(\Delta z)=\alpha\Delta t;\\ \mathbb{V}\Delta x=\mathbb{E}[\Delta x-\mathbb{E}\Delta x]^2=\sigma^2\mathbb{E}[(\Delta z)^2]=\sigma^2\Delta t.\end{cases}$$

1) Brownian 运动的随机游走特征

离散时间随机游走的连续极限即为 Brownian 运动。

$$\begin{aligned}&p+q=1.\\ &\mathbb{E}(\Delta x)=p\Delta h+q(-\Delta h)=(p-q)\Delta h,\\ &\mathbb{E}[(\Delta x)^2]=\mathbb{E}[p(\Delta h)^2+q(-\Delta h)^2]=(\Delta h)^2,\\ &\mathbb{V}(\Delta x)=\mathbb{E}[(\Delta x)^2]-[\mathbb{E}(\Delta x)]^2=(\Delta h)^2-[(p-q)\Delta h]^2=[1-(p-q)^2](\Delta h)^2=[1-(p+q)^2+4pq](\Delta h)^2=4pq(\Delta h)^2.\end{aligned}$$

时间间隔 t 有 $n=\frac{t}{\Delta t}$ 个离散步伐。因为随机游走的相继步伐是相互独立的，x_t-x_0 的累积变化是一个均衡和方差为下述值的二项式随机变量：

$$\begin{cases}\mathbb{E}(x_t-x_0)=n(p-q)\Delta h=n(p-q)\Delta h=\frac{t}{\Delta t}(p-q)\Delta h=t(p-q)\frac{\Delta h}{\Delta t},\\ \mathbb{V}(x_t-x_0)=n[1-(p-q)^2](\Delta h)=n4pq(\Delta h)^2=\frac{t}{\Delta t}4pq(\Delta h)^2=4pqt\frac{(\Delta h)^2}{\Delta t}.\end{cases}$$

[1] Source: [**DixitPindyck1994**]

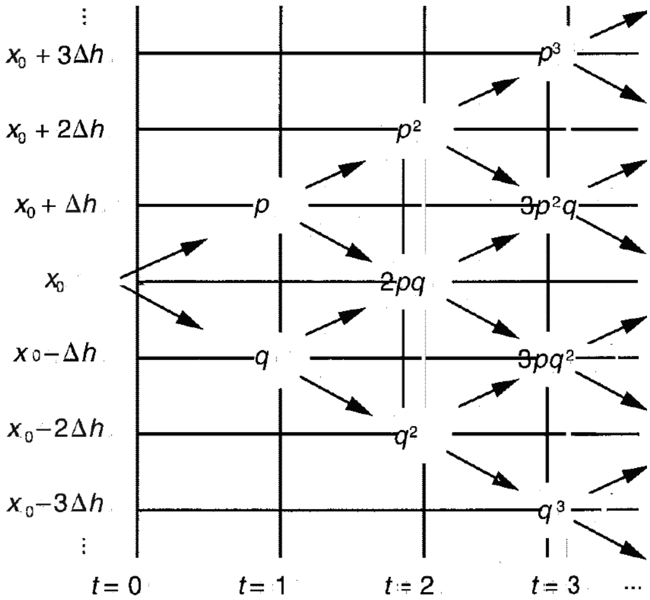


图 4.2: Brownian 运动在离散时间随机游走[1]

2) Brownian 运动的时间路径属性

上述带漂移的 Brownian 运动的一个样本路径，取每年的趋势 $\alpha = 0.2$，每年的标准差 $\sigma = 1$，每个样本路径用每月的间隔基于下述差分方程生成：

$$x_t = x_{t-1} + \overbrace{0.01667}^{0.2/12=} + \overbrace{0.2887}^{\sqrt{1/12}=}\epsilon_t, \qquad \text{给定 } x_{1950} = 0, \quad \epsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

样本路径：1950-1974 年预测路径：1975-2000 年

由于 Markov 属性，预测路径只需基于 x_{1974}，即

$$\begin{cases} \hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.01667T \pm \overbrace{\underbrace{0.2887}_{1\text{ 个标准差}}\sqrt{T}}^{66\%\text{ 的置信区间}}; \\ \hat{x}_{1974+T} = x_{1974} + 0.01667T \pm \overbrace{\underbrace{0.5659}_{1.96\text{ 个标准差}}\sqrt{T}}^{95\%\text{ 的置信区间}}. \end{cases}$$

从下图中会发现，长期而言，Brownian 运动由趋势主导，而短期由波动主导。这是 $\mathbb{E}(x_t - x_0) = \alpha t$ 和 $\mathbb{V}(x_t - x_0) = \sigma\sqrt{t}$ 的含义：

(1) 对于很大的 t（长期），$\sqrt{t} \ll t$；对于很小的 t，$\sqrt{t} \gg t$。

(2) 或者考虑当 $\alpha > 0$ 时 $x_t < x_0$ 的概率：对于很大的 t，$\text{prob}(x_t < x_0)$ 很小；对于很小的 t，$\text{prob}(x_t < x_0) \approx \frac{1}{2}$。

[1] Source: **[DixitPindyck1994]**

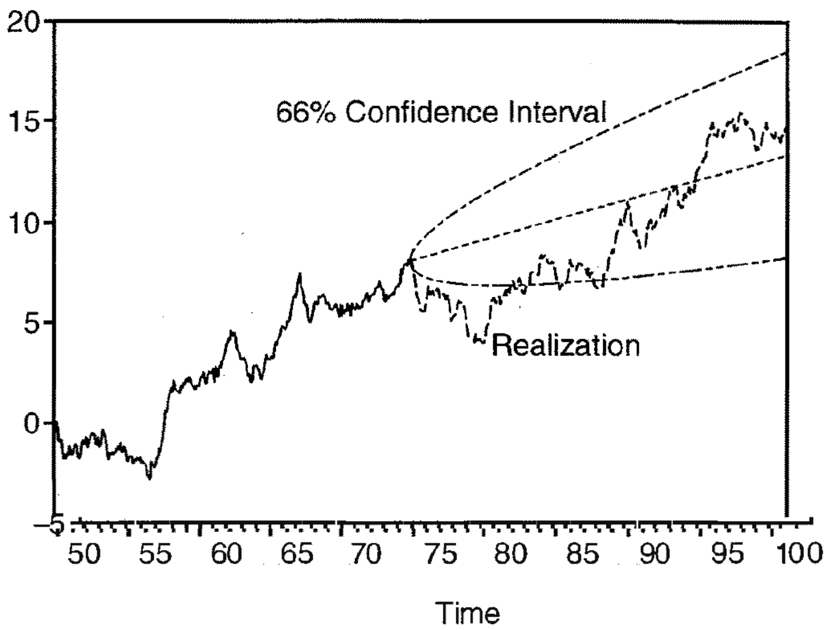


图 4.3: 带漂移的 Brownian 运动的最优预测[1]

$$\left.\begin{aligned} \Delta h &= \sigma\sqrt{\Delta t}, \\ p &= \frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}), \\ q &= \frac{1}{2}(1-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}), \\ p-q &= \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t} = \frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(x_t - x_0) = t\frac{\alpha}{\sigma^2}\Delta h\frac{\Delta h}{\Delta t} = \alpha t, \\ \mathbb{V}(x_t - x_0) = t\left[1-\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2\Delta t\right]\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta t} \to \sigma^2 t. \end{cases}$$

不难发现，当 $\Delta t \to 0$ 时，$x_t - x_0$ 的均值和方差都独立于 Δh 和 Δt。

$$n\Delta h = t\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{t\sigma}{\sqrt{\Delta t}}.$$

4.2.4 Ito 过程

$$\begin{cases} \mathrm{d}z = \epsilon_t\sqrt{\mathrm{d}t}; & \text{Wiener 过程} \\ \mathrm{d}x = \alpha\mathrm{d}t + \sigma\overbrace{\mathrm{d}z}; & \text{Brownian 运动} \\ \mathrm{d}x = \underbrace{a(x,t)}\mathrm{d}t + \underbrace{b(x,t)}\mathrm{d}z; & \text{Ito 过程} \\ \mathrm{d}x = \overbrace{\alpha x}\mathrm{d}t + \overbrace{\sigma x}\mathrm{d}z. & \text{几何 Brownian 运动} \end{cases}$$

Ito 过程的新特征是漂移系数和方差系数是当前状态 x 和时间 t 的非随机（确定的已知的）函数；其中 α 和 σ 是常数。

$$\mathbb{E}(\mathrm{d}z) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\mathrm{d}x) = a(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)\mathbb{E}(\mathrm{d}z) = \overbrace{a(x,t)}^{\text{瞬时飘移率}}\mathrm{d}t,$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}[(\mathrm{d}x)^2] - [\mathbb{E}(\mathrm{d}x)]^2 = \underbrace{b^2(x,t)}_{\text{瞬时方差率}}\ \mathrm{d}t.$$

若给定 $x(0) = x_0$，则

$$\mathbb{E}[x(t)] = x_0 e^{\alpha t},$$
$$\mathbb{V}[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty x(t)e^{-rt}\mathrm{d}t\right] = \int_0^\infty x_0 e^{-(r-\alpha)t}\mathrm{d}t = \frac{x_0}{r-\alpha}, \qquad r > \alpha.$$

令 $L(x) = \log x$，则

$$\mathrm{d}L = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z.$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\mathrm{d}L) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t,$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}(\mathrm{d}L) = \sigma^2 t.$$