I

$\boxed{6.4}$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \dots$

$y = \frac{1-z}{1+z}$, $z^m = \frac{1+x}{z}$

$\ln x = m\ln 2 - \underbrace{2\left(y + \frac{y^3}{3} + \dots + \frac{y^{2k-1}}{2k-1} + \dots\right)}_{\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$

$\ln x = \ln 2^m - \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) =$

$= \ln\left(\frac{1+x}{z} \cdot \frac{1-y}{1+y}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{z} \cdot \frac{\frac{1+z-1+z}{1+z}}{\frac{1+z+1-z}{1+z}}\right) =$

$= \ln\left(\frac{1+x}{z} \cdot \frac{2z}{2}\right) = \ln(1+x)$

$\ln(x) = \ln(1+x)$

а) $\delta_a = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\varepsilon \ln(1-x)$; $\delta_a \to \infty$ при $x \to 1$ - плохо

$\delta_a \to 0$ при $x \to 0$ - хорошо

б) $\delta_б = \varepsilon \cdot \left(m\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k-1}}{2k-1}\right) = \varepsilon\left(m\ln 2 + \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) \le$

$\le \varepsilon(m\ln 2 + \ln 2) = \varepsilon \ln 2(m+1) \le \varepsilon \ln 2 \cdot m$

$\delta_б \geq \varepsilon m \ln 2 \geq 0$

$\boxed{6.5}$ Отн. погр. $\delta(x) \geq \left|\frac{(x - x^*)}{x}\right|$, где x^* − точное значение

$$\frac{\left|\operatorname{sign} a \cdot 2^q \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}\right)\right|}{\operatorname{sign} a \cdot 2^q \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^k}}$$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_{k}}{2^k} \Rightarrow 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^k}} \to \min \to \frac{1}{2^p} = 2^{-p}$$

$\boxed{8.3}$ $a = 3{,}14$, π

$|a - \pi| = \Delta$ − абс. погр.

$\Delta a \geq \Delta$ − пред. абс. погр.

$\Delta a + a \geq \pi \geq \Delta a - a$

$\Delta a = 0{,}01$

$\boxed{8.4}$ $a = 8$ см, $\Delta_a = 0{,}02$, $n = 12$

$V = a^3 = 512$

$V_{max} = (8{,}02)^3 = 515{,}8496$

$|V - V_{max}| = 3{,}8496$

Округляем − $\Delta V = \pm 4$ см^3

$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = 0{,}0078125$

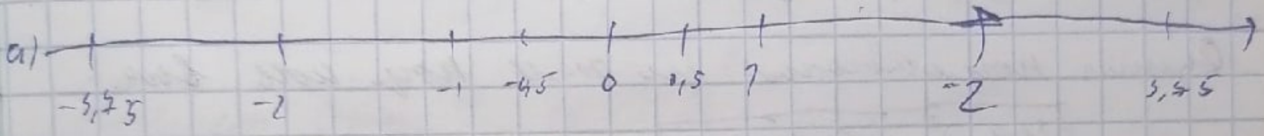
$\boxed{8.18}$ $S = \{\pm b_0, b_1 b_2 b_3 \cdot 2^{\pm a}\}$, $a, b_1, b_2, b_3 \in \{0,1\}$

$$b_0 = \begin{cases} 1, \\ 0, ; \ a = b_1 = b_2 = b_3 = 0 \end{cases}$$

Количество чисел:

$1 + 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = \underline{\underline{49}}$

а)



б) $\varepsilon_{max} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(-p)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(-3)} = \frac{1}{16}$

$UFL = 0$, $OFL = 3,75$

$\boxed{8.19}$ $|u - u^*| = \left| \frac{u^{(n+1)}(\xi) \cdot t^{n+1}}{(n+1)!} \right|$, $\xi \in (0, t)$ $\Delta t = 10^{-3}$

Ост. член в форме Лагр.

1) $u(t) = \sin t$ $\quad |u - u^*| \le \frac{1 \cdot t^{n+1}}{(n+1)!}$

а) $t \in [0, 1]$ $\quad |u - u^*| \le \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow n = 6$

б) $t \in [10, 11]$ $\quad |u - u^*| \le \frac{11^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow n = 42$

2) $u(t) = e^t$ $\quad |u - u^*| \le \frac{e^t t^{n+1}}{(n+1)!}$

а) $t \in [0, 1]$ $\quad |u - u^*| \le \frac{e \cdot 1^{max}}{(n+1)!} \Rightarrow n = 6$

б) $t \in [10, 11]$ $\quad |u - u^*| \le \frac{e^{11} t^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow n = 53$

$\boxed{8.23}$ $ay^3 + by^2 + d = 0$; $a = 1$, $b = 2$, $d = -3$

Используем ф-лу Кардано:

$y = x - \frac{b}{3a}$

Введем параметры: $p = -\frac{b^2}{3a^2}$, $q = \frac{2b^3 + 27a^2 d}{27a^3}$

Тогда ур. примет вид $x^3 + px + q = 0$,

где $p = -\frac{4}{3}$, $q = -\frac{65}{27}$

Оценим погрешность по ф-ле погр. косв. выч.

$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{2\Delta a}{27a^3}\right)^2 + \left(\frac{2b\Delta b}{3\,7^2}\right)^2} = 0{,}07764$

$\Delta q = \quad = 0{,}044$

$Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 1{,}3611 \Rightarrow 1$ действ. корень

$\Delta Q = 0{,}2432$

Действ. корень: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \frac{5}{3}$

$\Delta x = 0{,}49$

Обратная замена:

$y = x - \frac{b}{3a} = 1$

$\Delta y = 0{,}49$

$\boxed{8.32}$ …

$\Delta = \Delta$ …

Оценим …

Δ выч …

Найд…

$= 5\ 7$ …

$\boxed{9.6}$

Возь…

$1 + 0,$ …

корен…

1) $a =$ …

x^1 …

$x^2 =$ …

$x^3 =$ …

$x^4 =$ …

$\boxed{8.32}$ $u'(t) \approx \dfrac{u(t-2\tau) - 8u(t-\tau) + 8u(t+\tau) - u(t+2\tau)}{12\tau}$

$\Delta = \Delta_{выч.} + \Delta_{метода}$

$\Delta_{метода}$ для 4 порядка апр. $= \dfrac{M_5 \tau^4}{30}$

$\Delta_{выч} = \dfrac{18\varepsilon}{12\tau} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon}{\tau}$

$\Delta = \dfrac{M_5 \tau^4}{30} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon}{\tau}$

Найдем опт. τ: $\dfrac{2}{15} M_5 \tau^3 - \dfrac{3\varepsilon}{2\tau^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau = \sqrt[5]{\dfrac{45\varepsilon}{4M_5}}$

IV

$\boxed{9.6}$ $x + 0,5\sin x + a = 0$

Возьмём производную:

$1 + 0,5\cos x = 0$ — всегда больше нуля, значит корень есть и он !

1) $a = \pm 1$ $\quad x^* = -1$

$x^1 = x^* - \left(\dfrac{1 + 0,5\cos x^*}{x^* + 0,5\sin x^* + 1}\right)^{-1} = -0,99418$

$x^2 = -0,688$

$x^3 = -0,684$

$x^4 = -0,684$

Для $a = -1$ будет $x = 0,684$

2) $a = \pm 2 \quad x_0 = -1$

$x_1 = -1,450 \qquad x_4 = -1,501$

$x_2 = -1,5007 \qquad \underline{x_5 = -1,501}$

Для $a = -2 \quad x = 1,501$

3) $a = \pm 3 \quad x_0 = -2,5$

$x_1 = -2,8349 \qquad \underline{x_4 = -2,8620}$

$x_2 = -2,8619 \qquad$ Для $a = -3 \quad x = 2,862$

$x_3 = -2,8620$

$\boxed{9.9}$ $g'(x) = \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2}$

$V = x^n - \frac{f}{f'} \cdot \frac{(f')^2}{(f')^2 - ff''} = x^n - \frac{ff'}{(f')^2 - ff''}$

$x^{n+1} = 0,5\left(x^n - \frac{f}{f'} + x^n - \frac{ff'}{(f')^2 - ff''}\right) = x^n - \frac{f}{f'} 0,5 - \frac{ff' \cdot 0,5}{(f')^2 - ff''}$

Найдём производную:

$F' = 1 - \left(\frac{f}{f'} \cdot 0,5\right)' - \left(\frac{ff'}{(f')^2 - ff''} \cdot 0,5\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{ff''}{f'^2} + \frac{1}{2}\frac{f'^2 + ff''}{f'^2 - ff''} +$

$+ \frac{1}{2}\frac{ff'(2f'f'' - f'f'' - ff''')}{(f'^2 - ff'')^2}$

$F'|_{x = x^*} = 0$ – минимум второй порядок

$F''|_{x = x^*} = 0$ – минимум третий

$\boxed{11.7}$ г) $f(x) = a\,\text{arctg}(bx) + c$

Для сходимости $|f'| < 1$

$a \cdot \frac{b}{1+(bx)^2} < 1 \Leftrightarrow$ ~~$ab < 1+b^2x^2$~~

$\left|\frac{ab}{1+b^2x^2}\right| \leq |ab| < 1$, $c - \forall$

д) $f(x) = a e^{-b^2x^2} + c$ $\exists\, x_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x e^{-x^2}_{max} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$

$|f'| = |-2b^2 x \cdot a e^{-b^2x^2}| \leq A$

$|ab| < \sqrt{\frac{e}{2}}$

$\boxed{11.9}$ $\begin{cases} xy - x^2 = 1{,}03 \\ -2x^3 + y^2 = 1{,}98 \end{cases}$ $x^0 = 1,\ y^0 = 2$

$x^{k+1} = \sqrt[3]{(y^{2^k} - 1{,}98)/2}$, $y^{k+1} = x^k + 1{,}03/x^k$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{3\sqrt[3]{\left(\frac{y^2-1{,}98}{2}\right)^2}} \\ 1 - \frac{1{,}03}{x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\|J\|_1 = \max(0{,}03;\ 0{,}662) = 0{,}662 < 1$

Значит МПИ сходится

$\|J^*\| \leq q < 1$

$\|J^*\| \leq 0{,}662 \Rightarrow q = 0{,}662$ $\left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln q} + 1\right] = n = 25$

$\boxed{11.13}$ а) $e^x = \frac{1}{x}$

$f' = e^x + \frac{1}{x^2}$ $\quad f' > 0 \ \forall x^0 > 0$ и огр. снизу

$f'' = e^x - \frac{2}{x^3}$ $\quad f''$ ограничена на $x \in (0; A), A > 0$

Значит сходится

б) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$

$f' = -e^{-x} + 2x = 0$ $\quad f'' > 0 \ \forall x^0 > 0$ и огр сверху

$f'' = +e^{-x} + 2 = 0$ $\quad f'$ огр. снизу в окр. реш

Значит сх-ся

в) $\ln x - \frac{1}{x} = 0$ $\quad$ огр. снизу

$f' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ $\quad f' > 0, f'' < 0 \ \forall x^0 > 0$

огр. сверху

$f'' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

$\boxed{11.17}$ $\ln(x+1) - 2x^2 + 1 = 0$ $\quad x^* \in [0{,}5; 0{,}9] \in [0{,}0; 1]$

1) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{\ln(x_n+1)+1}{2}}$

$|\varphi'| = \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\ln(x_n+1)+1}}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}(x_n+1)\sqrt{\ln(x_n+1)+1}}\right|$

< 1 при $x_n > e^{-1} - 1$

2) $x_{n+1} = e^{2x_n^2 - 1} - 1$

$|\varphi'| = \left|4x_n e^{2x_n^2-1}\right| < 1$ $\quad -0{,}45 < x_n < 0{,}45$

3) $x_{n+1} = \frac{(\ln(x_n+1)+1)}{2x_n}$; $|f'| = \left|\frac{\frac{1}{x_n+1}\cdot 2x_n - (\ln(x_n+1)+1)\cdot 2}{4x_n^2}\right| =$

$= \left|\frac{1}{(x_n+1)2x_n} - \frac{\ln(x_n+1)+1}{2x_n^2}\right| < 1$

$x > 0{,}75$

4) $x_{n+1} = x_n + \ln(x_n+1) - 2x_n^2 + 1$

$\left|1 + \frac{1}{x+1} - 4x\right| < 1$

$x \in (0{,}22;\ 0{,}65)$

С помощью 1 можно найти оба корня

С помощью 2 только левый

С помощью 3 только правый

С помощью 4 никакой

$\boxed{11.24}$ а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ (y-1)^3 - x + 1 = 0 \end{cases}$

Графически получили два корня

$x_1 \approx -2{,}943,\ y_1 \approx -0{,}58$

$x_2 \approx 2{,}185,\ y_2 \approx 2{,}050$

Области: $x_1 [-3; -2{,}8]$

$y_1 [-0{,}6; -0{,}5]$

$y_2 [2; 2{,}1]$

$x_2 [2{,}2; 2{,}1]$

$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - J^{-1}\vec{F}(\vec{x})$, $J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 3(y-1)^2 \end{pmatrix}$, $\det J = 6x(y-1)^2 + 2y$

$$J^{-1} = \frac{1}{6x(y-1)^2+2y}\begin{pmatrix}3(y-1)^2 & -2y\\ 1 & 2x\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{n+1} = x_n - \frac{1}{6x(y-1)^2+2y}\begin{pmatrix}3(y-1)^2 & -2y\\ 1 & 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n^2+y_n^2-9\\ (y_n-1)^3-x_n+1\end{pmatrix}$$

f_1 и $f_2 \in C^2(\mathbb{R})$ $\det J = 0$ при $x = -\frac{y}{(y-1)^2}$, которые не лежит в обл. корней => $\exists$ окр, где сх-сть квадрат.

б) $\begin{cases} x^2+y^2-25=0\\ (x+1)^3-y+1=0\end{cases}$ Области:

$x_1 \in [-0,9; -0,8]$ $y_1 \in [-5; -4,9]$

$x_2 \in [2,4; 2,5]$ $y_2 \in [4,3; 4,4]$

$J = \begin{pmatrix}2x & 2y\\ 3(x+1)^2 & -1\end{pmatrix}$ $\det J = -2x-2y-3(x+1)^2$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{2x+2y+3(x+1)^2}\begin{pmatrix}-1 & -2y\\ -3(x+1)^2 & 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2+y^2-25\\ (x+1)^3-y+1\end{pmatrix}$$

f_1 и $f_2 \in C^2(\mathbb{R})$. $\det J = 0$ при $y = -\frac{x}{3(x+1)^2}$

не лежит в области лок. корней → сход. кв.

$\boxed{22.6}$ б) $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \geq 0$

Найдем x_{max}! $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot e}}$

$\tilde{f}(x) = xe^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{2e}}$ $|\varphi'| = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{2e}} < 1$ на левом пр. $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$x^{n+1} = \frac{e^{x_n^2}}{2\sqrt{2\cdot e}}$ $x_0 = 0$, $x_1 = 0,2144$, $x_2 = 0,2245$,

$x_3 = 0,22533$, $\underline{x_4 = 0,22563}$

Для ~~пр~~ правой точки возьмём:

$x_{n+1} = \sqrt{\ln(x_n + 2\sqrt{2e})}$ $\quad |f'| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\ln(x_n + 2\sqrt{2e})}} - \frac{1}{4}\right| < 1$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}2903;\ x_2 = 1{,}3496;\ x_3 = 1{,}34948,$

$x_4 = 1{,}35026;\ x_5 = 1{,}3511;\ x_6 = 1{,}3516$

$\ell = 1{,}359 - 0{,}226 = 1{,}133$

[redacted]

[redacted] T_1 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \operatorname{tg} x \end{cases}$ Область корней:

$x_1 \in [-1; -0{,}5] \quad y_1 \in [-1; -0{,}5]$

$\varepsilon = 10^{-6}$

$x_2 \in [0{,}5; 1] \quad y_2 \in [0{,}5; 1]$

Используем метод Ньютона:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - J^{-1}\vec{F}(\vec{x})$$

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & +1 \end{pmatrix} \qquad \det J = +2x + \frac{2y}{\cos^2 x}$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \frac{1}{2x^n + \frac{2y^n}{\cos^2 x^n}} \begin{pmatrix} 1 & -2y^n \\ \frac{1}{\cos^2 x^n} & 2x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ y - \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2x^n + \frac{2y^n}{\cos^2 x^n}} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 - 2y^2 + \operatorname{tg} x \cdot 2y \\ \frac{x^2 + y^2 - 1}{\cos^2 x^n} + 2xy - 2x\operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

VI

$\boxed{8.6}$ $f(x) = \sin x$, $h = 0{,}1$

$$f(x) = f(x_n) + \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n)$$

По ф-ле Тейлора

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{h} + \frac{f''(x_k)}{2}h^2$$

Подставим в выражение для мн. интер.

$$\frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2 - \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)h + f'(x_k)(x - x_k) -$$

$$- f'(x_k)(x - x_k) - \frac{f''(x_{k+1})}{2}h(x - x_k)$$

$$\frac{f''(x_k) - f''(x_{k-1})}{h} \cdot h \approx f'''(x_k) \cdot h$$

$$\delta_{мет} = \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)(h - (x - x_k)) \leq \frac{M}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Mh^2}{8}$$

$$\delta_{окр} = \varepsilon\left(1 + \frac{2}{h} \cdot h\right) \leq 3\varepsilon$$

$$\delta = \frac{h^2}{8} + 3\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \sim \frac{0{,}01}{24} = \underline{4 \cdot 10^{-4}}$$

$\boxed{8.10}$ а) Из прошлого номера $\delta = \frac{h^2}{8} + 3\varepsilon = 10^{-4}$

$$h = \sqrt{8 \cdot 10^{-4} - 24\varepsilon} \Rightarrow h \approx 0{,}014$$

$\delta)$ $f(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k, \; x \in (x_{k-1}, x_k)$

Зная ф-ия на узлах:

$$\begin{cases} a_k x_{k-1}^2 + b_k x_{k-1}^2 + c_k = f(x_{k-1}) \\ a_k x_k^2 + b_k x_k^2 + c_k = f(x_k) \\ a_k x_{k+1}^2 + b_k x_{k+1}^2 + c_k = f(x_{k+1}) \end{cases}$$

Получим:

$$f(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}) +$$

$$+ \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})}(x - x_{k-1})(x - x_k)$$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(x_{k-1} - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_{k-1} - x_k)^2$$

Подставим в $f(x)$ и зная, что $|x - x_k| \le \frac{h}{2}$, $|x_k - x_{k-1}| \le h$ получим оценку:

$$\delta_{мет} = \frac{f''(x_k)}{2}\left(-\frac{h^3}{4} + h^3 - \frac{h^3}{2} + \frac{h^3 \cdot \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}{h^2} + \frac{h^2}{h}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\right) +$$

$$+ f'(x_k)\cdot\frac{h\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}{h^2} - f'(x_k)\cdot\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}}{4} \le \frac{1}{2}\left(\frac{h^3}{8}\cdot 2\right)$$

$$\delta = 10^{-4} \Rightarrow 10^{-4} \le \frac{h^3}{8} \Rightarrow h = 0{,}09$$

$\boxed{8.13}$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin x$	0	$0{,}5$	$0{,}71$	$0{,}87$

Погрешность оценив. инт.: $\|R_s(t)\| \le \frac{\|f^{(s+1)}(t)\|}{(s+1)!}\prod_{i=0}^{s}$

$S=3 \quad \|\sin^{(4)}(t)\| = \sin\frac{\pi}{3} = 0{,}87$

$\delta_{мет} \leq \frac{0{,}87}{4!} \|(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\|$

максимум нормы достиг при $x \approx 0{,}646407$

$\omega = 0{,}0044222$

Получим $\delta_{мет} = \frac{0{,}87}{24} \cdot 0{,}0044222 \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$

$f(x) \approx \sum_{k=0}^{3} f_k(x) \cdot f(x) = f(x_0) \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{-\frac{\pi}{6}(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{3})} +$

$f(x_1) \frac{x(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{6}(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})} + f(x_2) \frac{x(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} +$

$+ f(x_3) \frac{x(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{3}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})}$

Тогда $\delta_{онк} = 0{,}07 \cdot (?)$

$\delta = \delta_{мет} + \delta_{онк} = 1{,}6 \cdot 10^{-4} + 0{,}07 \approx 0{,}07$

$\boxed{8.16}$ а) $P_3(t) = \sum_{0}^{3} a_i t^i$

$f(t_0) = P(t_0)$, $f'(t_0) = P'(t_0)$, $f(t_1) = P(t_1)$, $f'(t_1) = P'(t_1)$

$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 = P(t)$

$P' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

Имеем систему:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + a_3 t_0^3 = f(t_0) \\ a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 = f(t_1) \\ 0 + a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2 = f'(t_0) \\ 0 + a_1 + 2a_2 t_1 + 3a_3 t_0^2 = f'(t_1) \end{cases}$$

После преобр. получим:

$$a_3 = \frac{(f'(t_1) - f'(t_0))(t_1 + t_0) - 2(f(t_1) - f(t_0))}{3(t_1 + t_0)(t_1^2 - t_0^2) - 2(t_1^3 - t_0^3)}$$

$$a_2 = \frac{f'(t_0)(t_1 - t_0) - f(t_1) + f(t_0) - (3t_0^2(t_1 - t_0) - t_1^3 + t_0^3)a_3}{(t_1 - t_0)(t_0 - t_1)}$$

$$a_1 = \frac{f(t_1) - f(t_0) - (t_1^3 - t_0^3)a_3 - (t_1^2 - t_0^2)a_2}{t_1 - t_0}$$

$$a_0 = f(t_0) - a_3 t_0^3 - a_2 t_0^2 - a_1 t_0$$

б) $P(t) = (a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 + a_3 t_0^3) + (a_1 + 2a_2 t_0 + 3a_3 t_0^2)(t - t_0) +$
$+ \frac{(2a_2 + 6a_3 t_0)}{2}(t - t_0)^2$

$$R = \left(\frac{f''(t_0)}{2} - a_2 - 3a_3 t_0\right)(t - t_0)^2$$

$\boxed{8.17}$ $L, M, N: \{1, 1\}, \{3, 3\}, \{2, 4\}$

$f_i = f(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ $\quad F(2, 4) - ?$

а) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix} t_2$

Это лин. интерп.

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$t_1 = \frac{(3x - y - 2)}{4}$, $t_2 = \frac{y - x}{2}$

$f(x,y) = f_0 + t_1 (f_1 - f_0) + t_2 (f_2 - f_0) =$

$= f_0 + (f_1 - f_0) \frac{1}{4}(3x - y - 2) + (f_2 - f_0) \frac{y - x}{2}$

б) (x_n, y_m), (x_{n+1}, y_m), (x_n, y_{m+1}), (x_{n+1}, y_{m+1})

$f_{n,m}$ $\quad f_{n+1,m}$ $\quad f_{n,m+1}$ $\quad f_{n+1,m+1}$

$f(x, y_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2$

$f(x, y_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f_4 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_3$ — лин. интерп. по O_x

По O_y:

$f(x,y) = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2) = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \cdot$

$\cdot (x_2 - x, x - x_1) \begin{pmatrix} f_1 & f_4 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{pmatrix}$

$\boxed{8.18\ a)}$

$f(x) = xe^{-x}$ Выч. аппрок. Паде [2/2]

$f(x) = xe^{-x} = x(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4))$

$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x + b_2 x^2} = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + O(x^5)$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^5) = (1 + b_1 x + b_2 x^2)(x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6})$

Приравнивая коэф. при степенях x, получим

$x^0: a_0 = 0$ $\qquad a_0 = 0$

$x^1: a_1 = 1$ $\qquad a_1 = 1$

$x^2: a_2 = -1 + b_1$ $\qquad \Rightarrow \qquad b_1 = \frac{2}{3}$

$x^3: 0 = \frac{1}{2} - b_1 + b_2$ $\qquad a_2 = -\frac{1}{3}$

$x^4: 0 = -\frac{1}{6} + \frac{b_1}{2} - b_2$ $\qquad b_2 = \frac{1}{6}$

Таким образом:

$[2/2] = \frac{x - \frac{x^2}{3}}{1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6}} = \frac{6x - 2x^2}{6 + 4x + x^2}$

$\boxed{VII}$

$\boxed{6.4}$ $S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$ – трап.

$S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_{i+1}}{6}(f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1}))$

Правило Рунге:

$$\Delta_{n/2} = \frac{y_{n/2} - y_n}{2^{p}-1}$$

Для трапеции $p=2$

$$y = y_{n/2} + \frac{y_{n/2} - y_n}{3} = \frac{4}{3} y_{n/2} - \frac{1}{3} y_n = \frac{1}{3}\Big(4 \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{f(x_i) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}{2}$$

$$+ \frac{f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})}{2}\Big)\frac{h_i}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h_i$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{f(x_i)}{2} + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{f(x_{i+1})}{2}\Big) \cdot h_i. \text{ Если}$$

$h = const$ то получим что нужно

$\boxed{8.1}$ Шаг выбираем так, чтобы вып-лось усл-ие $|\hat{I}_n - I_n| \approx |I_n^{(n)} - I^{(n+1)}| \leq \frac{\varepsilon h_n}{b-a}$, так что

$$\sum_n \frac{\varepsilon h_n}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_n h_n = \varepsilon$$

Значит выч. инт с точностью ε: $(|\hat{I} - I|$

Способ подсчёта для особенн. ф-ии

$\boxed{8.14\ a)}$ $I = \int_0 \sin(x^2)\,dx$

$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c_{1,2} = \frac{1}{2}$

$$x^{нов} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$I \approx \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= 0{,}3236$

Погрешность $r_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) =$

$= \frac{24}{5 \cdot 24^3} f^{(4)}(\xi)$

$\max|f^{(4)}(x)| \le 29$

$r_n = \frac{1}{69120} \cdot 29 \approx 0{,}4 \cdot 10^{-3}$

$\boxed{8.6}$ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2-a^2}{2} +$

$+ a_2 \frac{b^3-a^3}{3}$

$\int_a^b f(x)\,dx = C_0 f(a) + C_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + C_2 f(b) =$

$= a_0(C_0 + C_1 + C_2) + a_1\left(aC_0 + \frac{a+b}{2}C_1 + bC_2\right) + a_2\left(a^2C_0 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 C_1 + C_2 b^2\right)$

Приравняем коэф.!

$$\begin{cases} b-a = C_0 + C_1 + C_2 \\ \frac{b^2-a^2}{2} = aC_0 + \frac{a+b}{2}C_1 + bC_2 \\ \frac{b^3-a^3}{3} = a^2C_0 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 C_1 + b^2 C_2 \end{cases}$$

Решая, получим:

$c_0 = \frac{b-a}{6}$, $c_1 = (b-a) - \frac{b-a}{3} = \frac{2(b-a)}{3}$, $c_2 = c_0$

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

$\boxed{8.19}$ $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx$

Разобьём на три интеграла: $I = \int_0^\delta + \int_\delta^\gamma + \int_\gamma^1$

$I_1 = \int_0^\delta \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx \le \int_0^\delta \frac{\ln x}{\sqrt{1-\delta}} dx = \left|\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta}}(\ln \delta - 1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\delta \approx 2{,}91 \cdot 10^{-5} \Rightarrow I_1 = -3{,}3 \cdot 10^{-4}$

$|I_3| = \left|\int_\gamma^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx\right| \le |\ln \gamma| \cdot \left|\int_\gamma^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\right| =$

$= |\ln \gamma \cdot 2\sqrt{1-\gamma}| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\gamma \approx 0{,}997$

$I_3 = -3{,}3 \cdot 10^{-4}$

Выч. второй по кв. Гаусса $n=2$

$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\gamma-\delta}{2\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\gamma-\delta}{2\sqrt{3}}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\gamma+\delta}{2} + \frac{\gamma-\delta}{2\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\gamma+\delta}{2} + \frac{\gamma-\delta}{2\sqrt{3}}}} =$$

$$= -1,1364$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \underline{\underline{-1,1367}}$$

$\boxed{8.25}$ $$\int_0^3 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{3x^2 - x^3}}\, dx$$

Можно взять ф-цию $f(x)$ как сумму отрезков Тейлора $\sin\sqrt{x}$ в т. $x=0$ и $x=3$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sin(\sqrt{3}) + \cos(\sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

Тогда можем разложить на три интеграла, 1 обычным методом инт., 2 несобств. аналит.