

MATERI GEOMETRI KELAS MATEMATIKA E 2022

Anggota Kelompok

1. Anisah Daffa Citra Nareswari (22305141044/sub bab 1 dan 2)
2. Abigail Dianingtyas Paramitha (22305141018/sub bab 3 dan 10)
3. Aulina Mafazaturrahmah (22305144043/sub bab 4)
4. Shinta Nailil Mufida Rahayu (22305141006/sub bab 5)
5. Rizqi Amallia Rahma Dani (22305141035/sub bab 6 dan 7)
6. Muhammad Nurcahyo Eko Saputra (22305141043/sub bab 8 dan 11)
7. Hilyatun Nafida Badari (22305144035/sub bab 9)

Materi 1

Memanggil Program "geometry.e" untuk Menggunakan Perintah-perintah

atau Fungsi-fungsi Geometri

Pada Euler kita dapat melakukan visualisasi dan perhitungan geometri secara numerik dan secara analitik dengan menggunakan Maxima.

Untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, kita harus memanggil program "geometry.e" terlebih dahulu agar perhitungan dan visualisasi dapat tereksekusi.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

Terdapat fungsi-fungsi geometri pada Euler sebagai berikut:

Fungsi-fungsi Geometri

Berikut adalah fungsi-fungsi untuk menggambar objek geometri:

Fungsi yang digunakan untuk membuat bidang koordinat adalah sebagai berikut:

```
setPlotRange(x1,x2,y1,y2) : menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat. Keterangan:

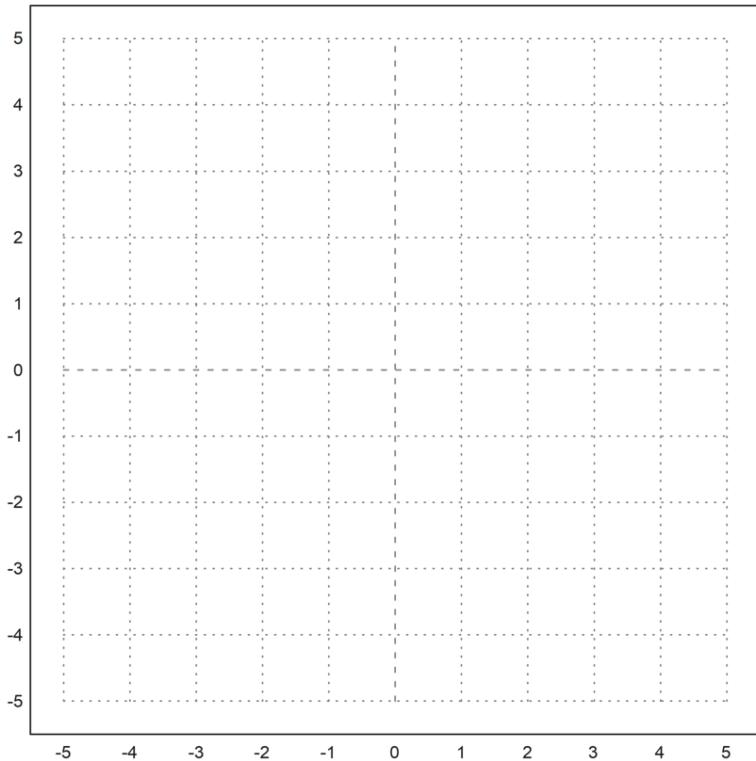
```
x1 adalah batas terkecil sumbu-x  
x2 adalah batas terbesar sumbu-x  
y1 adalah batas terkecil sumbu-y  
y2 adalah batas terbesar sumbu-y  
setPlotRange(m) : pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan sumbu-y adalah -m sampai dengan m.

```
>setPlotRange (-4,5,0,5)
```

```
[-4, 5, 0, 5]
```

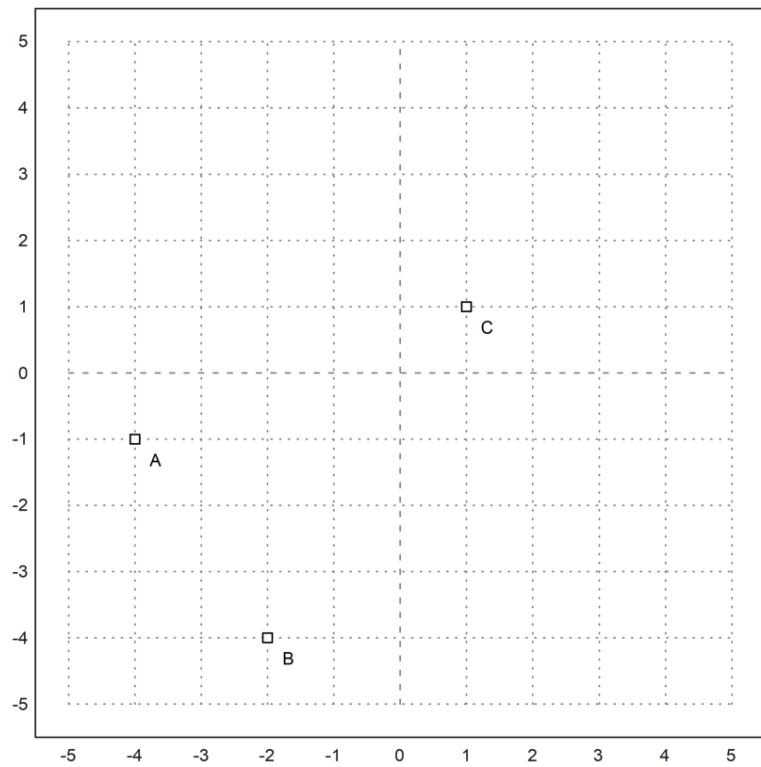
```
>setPlotRange (5) :
```



plotPoint (A, "A") : menggambarkan titik P dan diberi label "A".

Sebelum itu, kita harus mendefinisikan A sebagai suatu titik koordinat terlebih dahulu atau dapat dituliskan dengan A=[x,y]

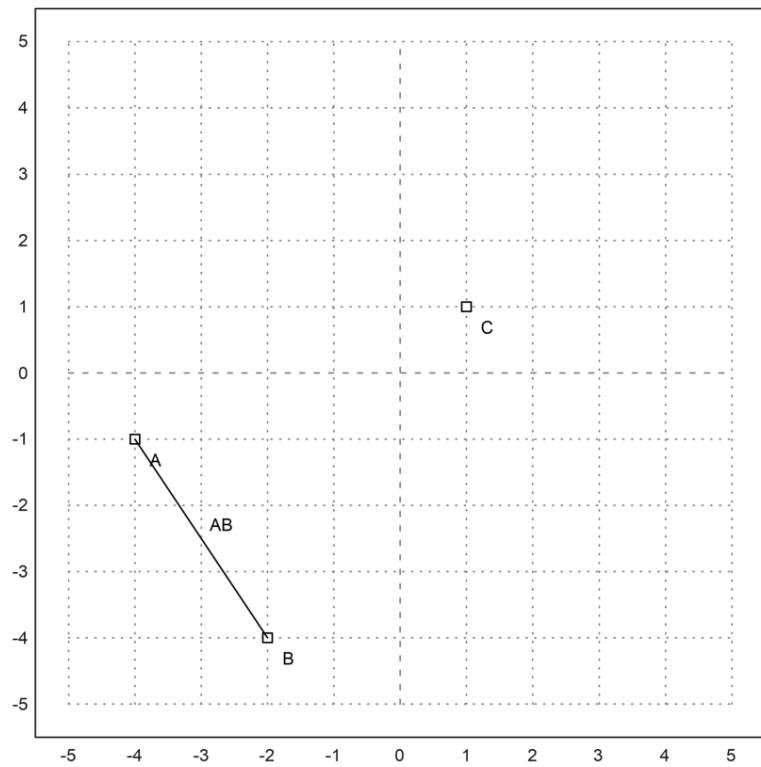
```
>A=[-4,-1]; B=[-2,-4]; C=[1,1];
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C");
```



```
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

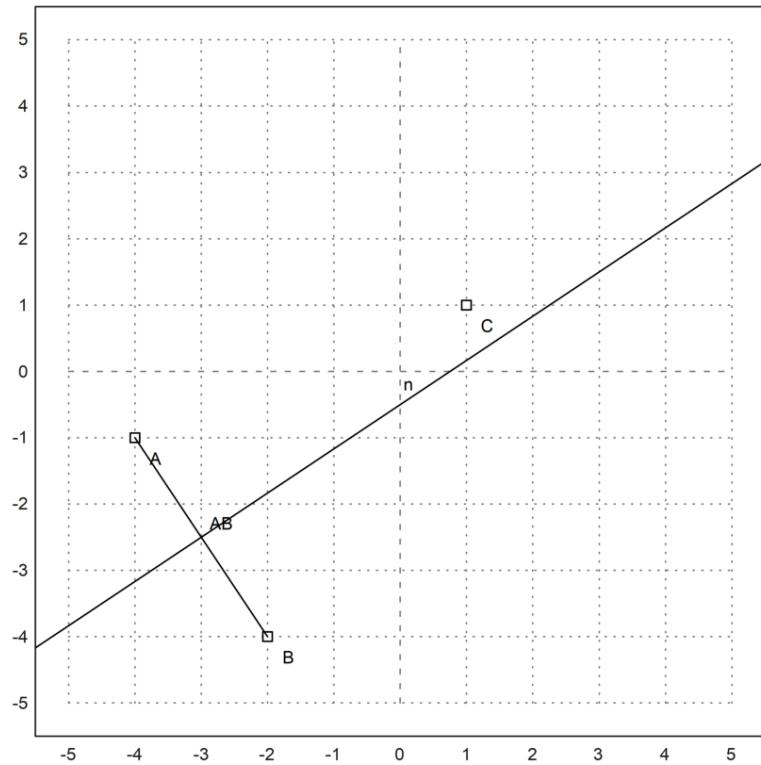
"AB" sejauh nilai d. Sebelum menggambar ruas garis AB, kita harus mendefinisikan titik A dan B terlebih dahulu.

```
>plotSegment (A,B, "AB", 30):
```



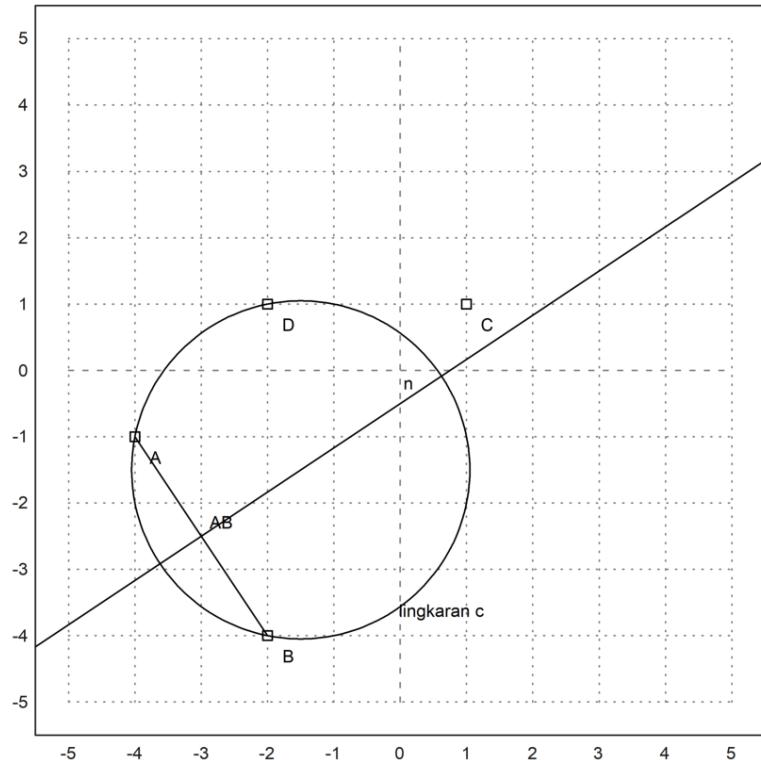
`plotLine (n, "n", d): menggambar garis n diberi label "n" sejauh d`

```
>n=middlePerpendicular(A,B);
>plotLine(n, "n", 15):
```



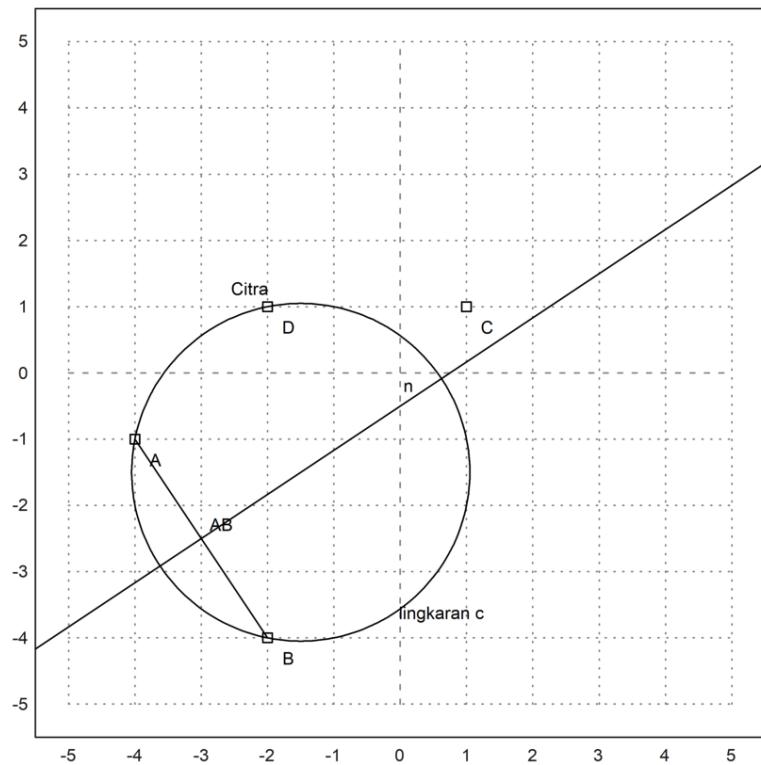
```
plotCircle (c, "c", v, d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
```

```
>D=[-2,1]; plotPoint(D, "D");
>c=circleThrough(A,B,D);
>plotCircle(c, "lingkaran c"):
```



```
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

```
>plotLabel("Citra", D, [-2,2], 30):
```



Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik)

`norm(A-B)`: jarak antara titik A dan titik B

`turn(v, phi)`: memutar vektor v sejauh phi

`turnLeft(v)`: memutar vektor v ke kiri

`turnRight(v)`: memutar vektor v ke kanan

`normalize(v)`: normal vektor v

`crossProduct(v, w)`: hasil kali silang vektor v dan w.

`lineThrough(A, B)`: garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. $ax+by=c$.

`lineWithDirection(A,v)`: garis melalui A searah vektor v

```
>norm(A-C)
```

5.38516480713

```
>sqrt(29)
```

5.38516480713

```
>lineThrough(A,D)
```

[-2, 2, 6]

```
>v=[-1,-1]
```

```
[-1, -1]
```

```
>lineWithDirection(A,v)
```

```
[1, -1, -3]
```

getLineDirection(v): vektor arah (gradien) garis v
getNormal(v): vektor normal (tegak lurus) garis v

```
>getLineDirection(v)
```

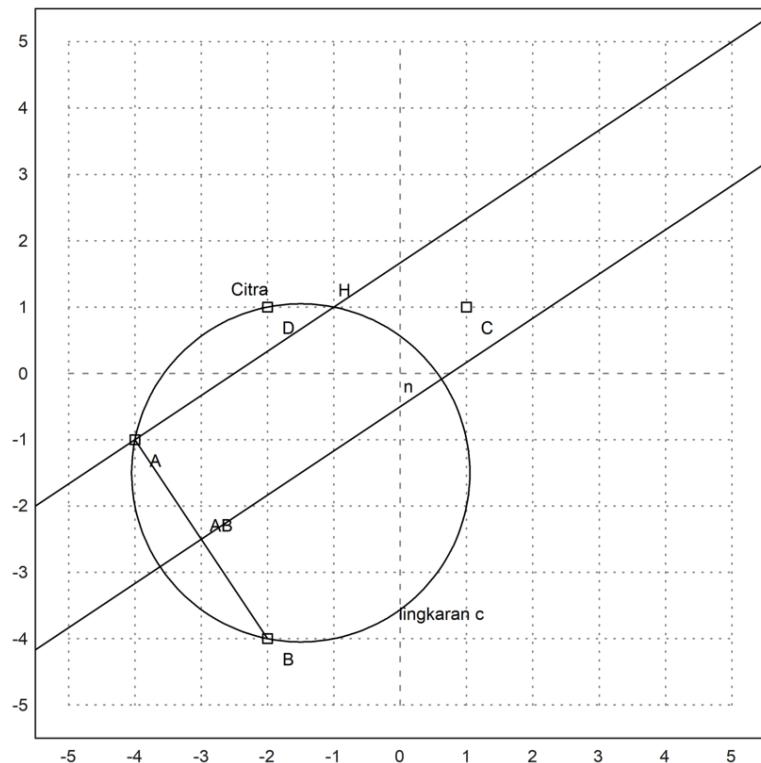
```
[-1, 1]
```

```
>getNormal(v)
```

```
-1
```

getPointOnLine(g): titik pada garis g
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g
parallel(A, g): garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h

```
>h=perpendicular(A, lineThrough(A,B)); // garis melalui A dan tegak lurus AB  
>plotLine(h, "H", 10):
```



```
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g  
distance(A, B): jarak titik A dan B  
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B  
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
```

```
>distance(A, C)
```

5.38516480713

```
>distanceSquared(A, C)
```

29

```
>quadrance(A, C)
```

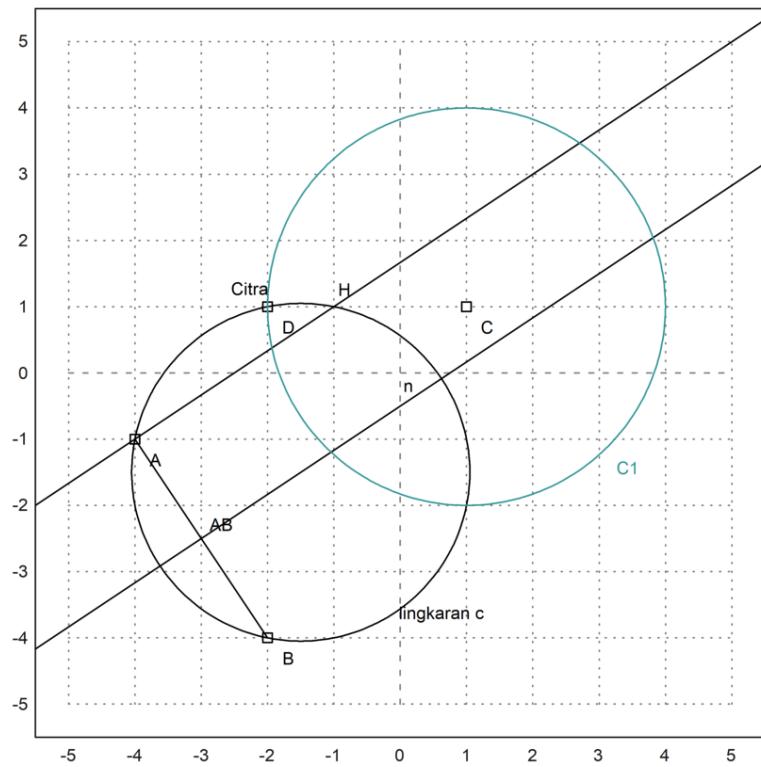
29

```
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC  
computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC  
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC  
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
```

```
>areaTriangle(A, B, C)
```

9.5

```
>c1=circleWithCenter(C, 3);  
>color(5); plotCircle(c1, "C1");
```



```

getCircleCenter(c): pusat lingkaran c
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C

```

```
>getCircleCenter(c1)
```

```
[1, 1]
```

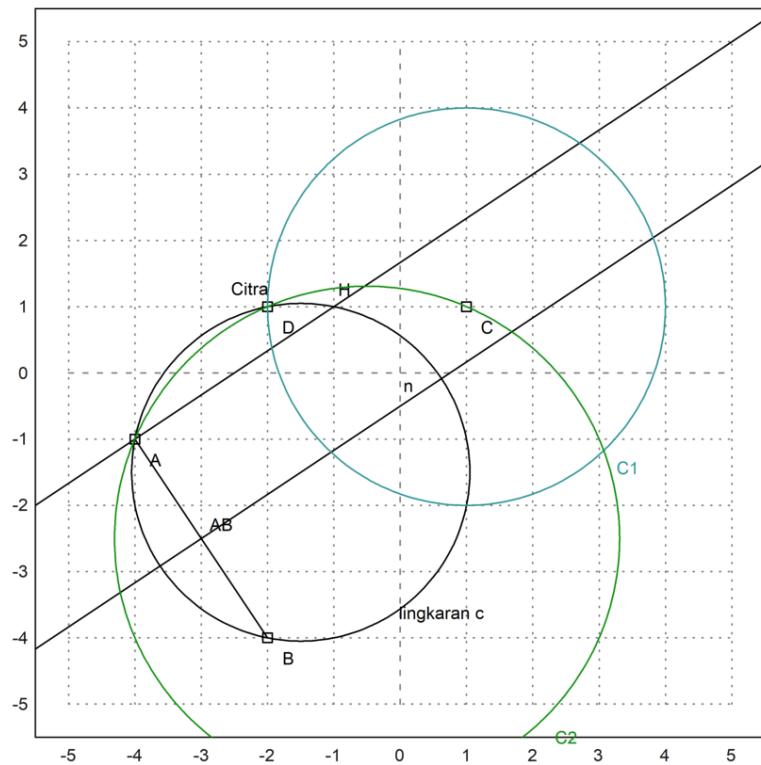
```
>getCircleRadius(c1)
```

```
3
```

```

>c2=circleThrough(A, D, C);
>color(3); plotCircle(c2, "C2");

```



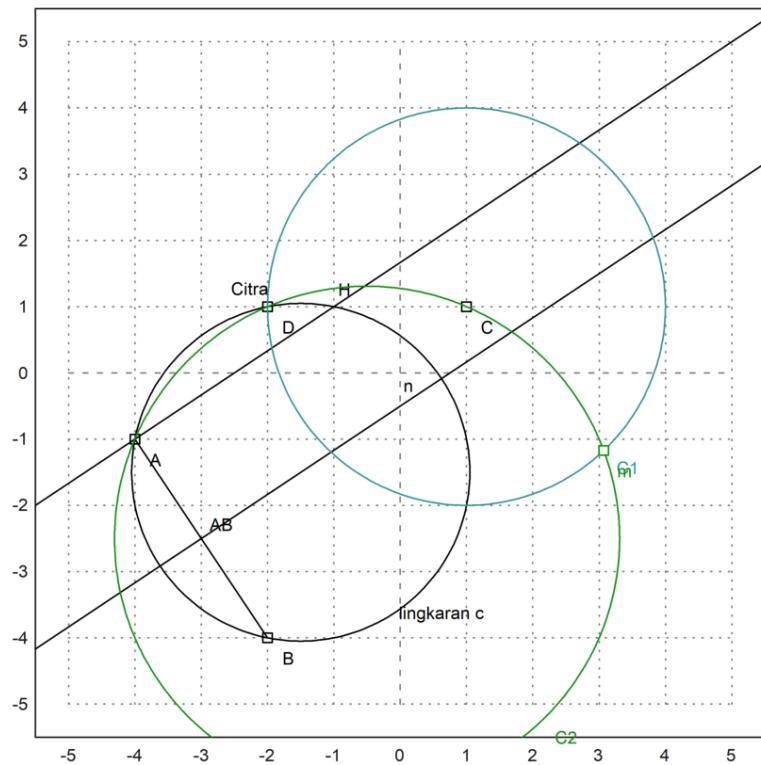
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB

lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c
 circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan

c2

planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C

```
>m=circleCircleIntersections(c1,c2);
>plotPoint(m,"m");
```



Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

`getLineEquation (g,x,y)`: persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
`getHesseForm (g,x,y,A)`: bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atasi) garis. Bentuk hesse garis merupakan cara untuk menyatakan garis dalam bentuk matematika yang lebih umum.

```
>M &= [1,1]; N &= [2,2];
>g &= lineThrough(M,N)
```

[- 1, 1, 0]

```
>&getLineEquation(g,x,y)
```

y - x = 0

`quad(A,B)`: kuadrat jarak AB
`spread(a,b,c)`: Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni

$\sin(\alpha)^2$ dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.

`crosslaw(a,b,c,sa)`: persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.

`triplespread(sa,sb,sc)`: persamaan 3 spread sa, sb, sc yang memebntuk suatu segitiga

`doublespread(sa)`: Spread sudut rangkap Spread 2ϕ , dengan $sa = \sin(\phi)^2$ spread a.

```
>a &= 8^2; b &= 15^2; c &= 17^2; &a+b=c
```

289 = 289

```
>&spread(a,b,c)
```

64

289

Materi 2 ** Mengatur Luas Bidang Koordinat untuk Menggambar

Objek-objek Geometri

Untuk menggambarkan objek geometri yang diinginkan pada Euler, kita harus menggambarkan luas bidang koordinat dengan menentukan rentang sumbu-sumbu koordinatnya terlebih dahulu. Seluruh objek geometri yang kita gambarkan, nantinya dapat muncul pada satu bidang koordinat yang sama sampai kita mendefinisikan bidang koordinat yang baru.

Untuk mengatur luas bidang koordinat dapat menggunakan fungsi `setPlotRange`.

setPlotRange(n):

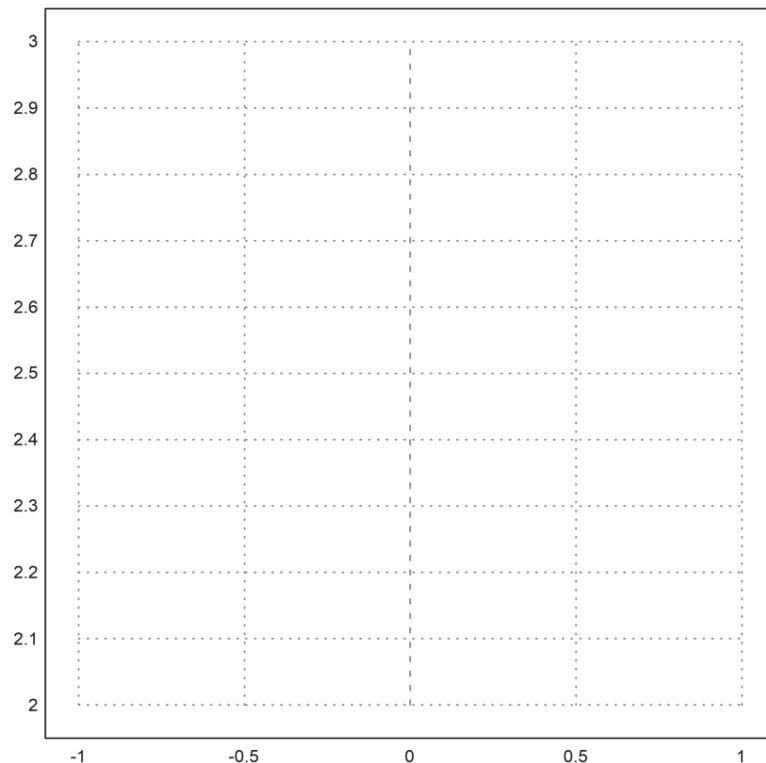
merupakan fungsi yang menggambarkan luas bidang koordinat dengan pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan sumbu-y adalah -n sampai dengan n.

setPlotRange(x1,x2,y1,y2):

Keterangan:

x1 adalah batas terkecil sumbu-x
x2 adalah batas terbesar sumbu-x
y1 adalah batas terkecil sumbu-y
y2 adalah batas terbesar sumbu-y

```
>setPlotRange(5);  
>setPlotRange(-1,1,2,3):
```



Bonus alias Latihan!

Latihan soal berisi dari penggabungan

Materi 1 dan Materi 2

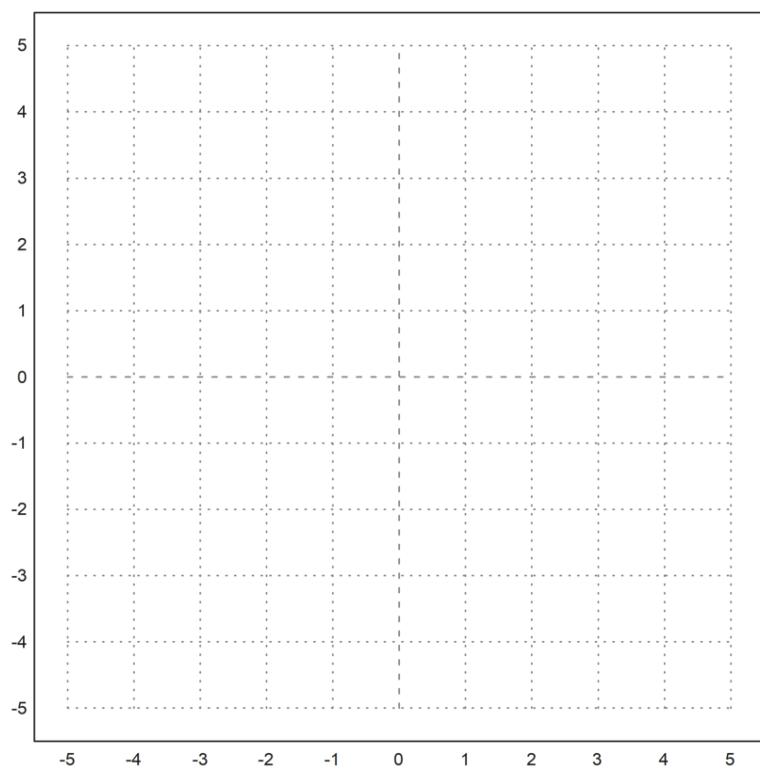
Kita akan menghitung luas segitiga ABC dan lingkaran luar ABC. Sebelum itu, kita perlu menggambarkan objek segitiga ABC pada bidang koordinat terlebih dahulu.

Berikut adalah langkah-langkah menggambarkan segitiga siku-siku.

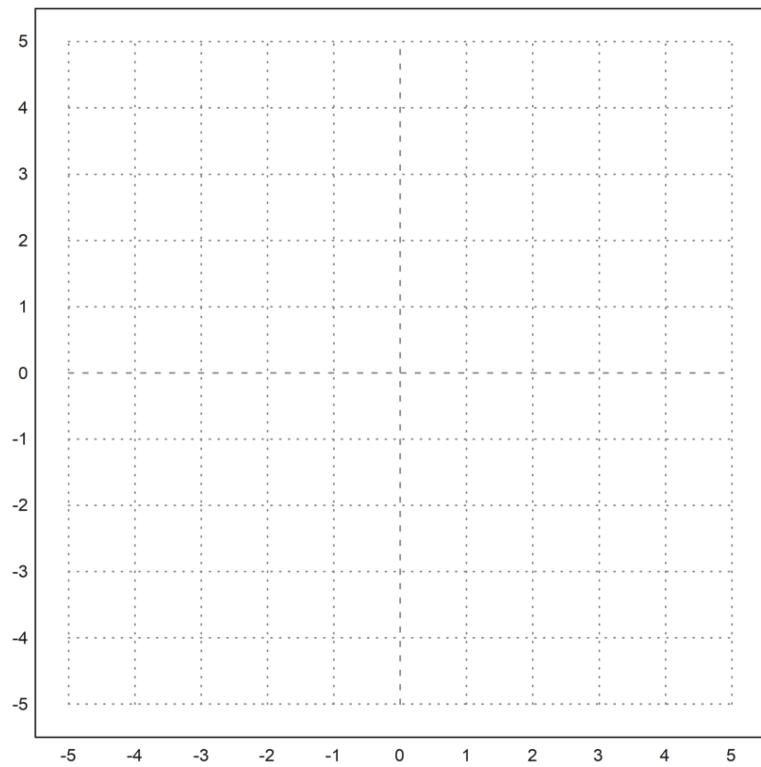
Langkah 1: Menentukan luas bidang koordinat

Langkah 1: Menghitung panjang ruas garis BC sebagai alas segitiga

```
>setPlotRange(5):
```

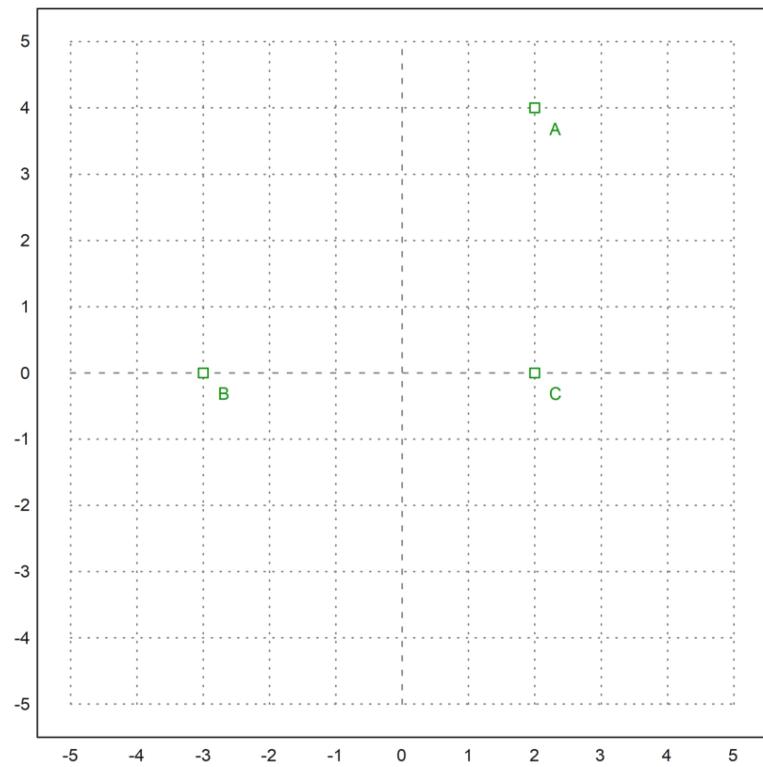


```
>setPlotRange(5):
```



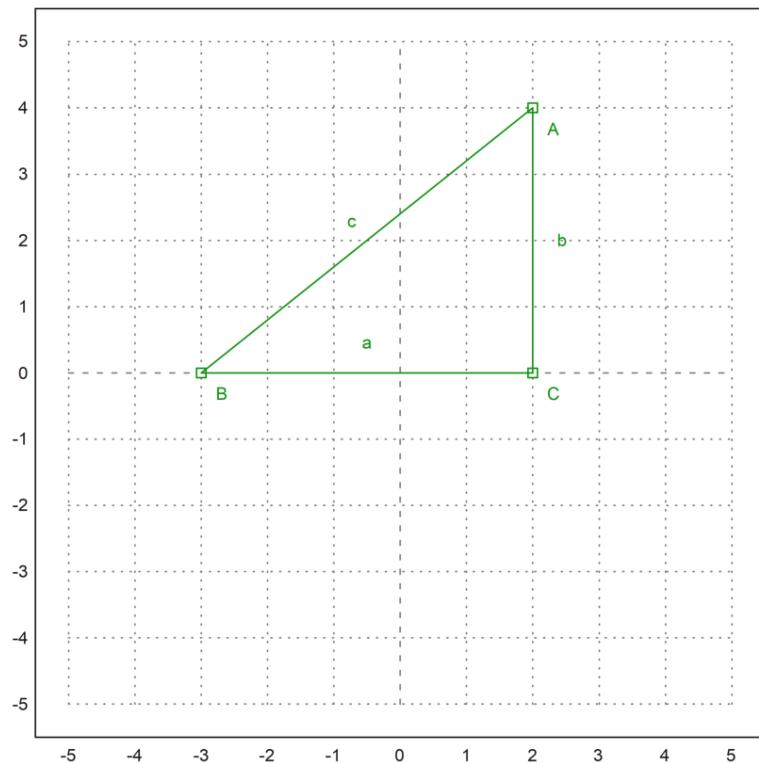
Langkah 2: Menentukan titik-titik pada bidang koordinat

```
>A=[2,4]; plotPoint(A, "A");
>B=[-3,0]; plotPoint(B, "B");
>C=[2,0]; plotPoint(C, "C");
```



Langkah 3: Menggambarkan ruas garis pada titik A, B, dan C

```
>plotSegment(A,B,"c",-30);  
>plotSegment(B,C,"a");  
>plotSegment(A,C,"b"):
```



Setelah menggambarkan objek geometri yang diinginkan, kita akan menghitung luas dari segitiga siku-siku tersebut menggunakan fungsi geometri yang terdapat pada Euler.

```
>areaTriangle(A,B,C)
```

10

Untuk membuktikan hitungan menggunakan fungsi geometri Euler bernilai benar, kita akan membandingkannya dengan hasil luas segitiga siku-siku yang dihitung secara manual.

Rumus Luas Segitiga:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC$$

```
>norm(B-C)
```

5

Langkah 2: Menghitung panjang ruas garis AC sebagai tinggi segitiga

```
>norm(A-C)
```

4

Langkah 3: Menghitung luas segitiga siku-siku menggunakan rumus luas segitiga

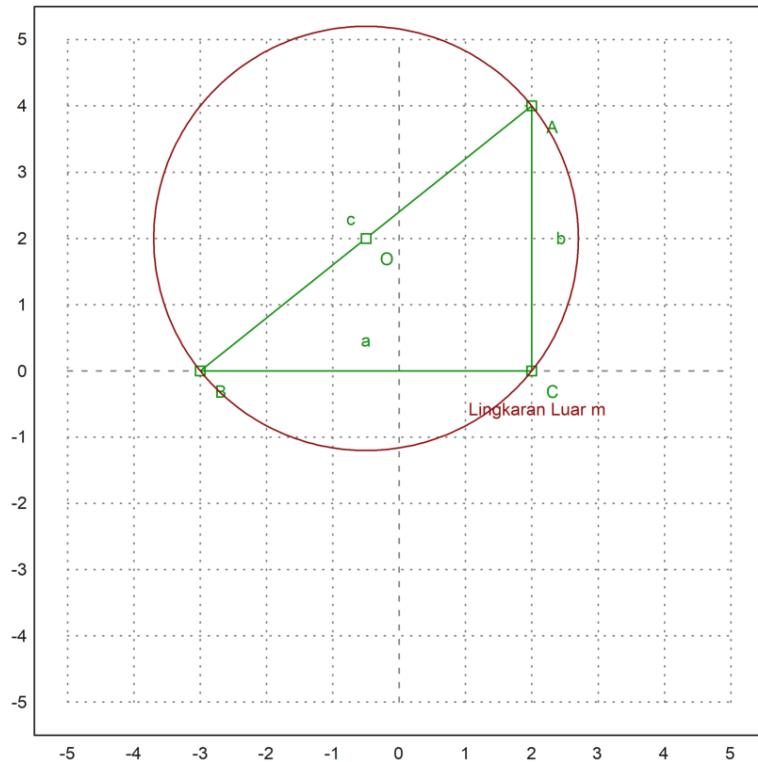
```
>norm(B-C)*norm(A-C)/2
```

10

Jadi, hasil dari perhitungan secara manual dan menggunakan fungsi areaTriangle(A,B,C) bernilai sama. Luas segitiga ABC bernilai 10 satuan.

Selanjutnya, kita akan menggambarkan suatu lingkaran yang mengelilingi segitiga siku-siku ABC. Lingkaran tersebut kita beri nama lingkaran luar m.

```
>m=circleThrough(A,B,C);  
>R=getCircleRadius(m);  
>O=getCircleCenter(m);  
>plotPoint(O,"O");  
>color(2); plotCircle(m,"Lingkaran Luar m");
```



Untuk menghitung luas lingkaran, kita akan mencari jari-jari dari lingkaran luar m.

```
>O, R
```

```
[-0.5, 2]  
3.20156211872
```

Selanjutnya, kita akan menghitung luas lingkaran luar m secara manual menggunakan rumus:

$$L_m = \pi \times r^2$$

```
>pi*(3.20156211872)^2
```

32.2013246994

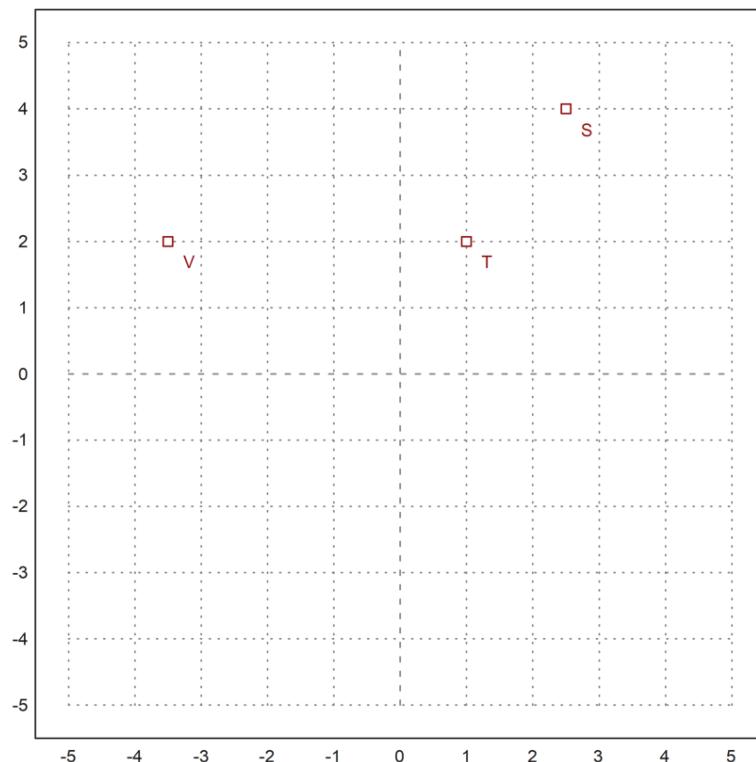
Materi 3

Menggambar titik, ruas garis, garis, segi banyak, lingkaran,

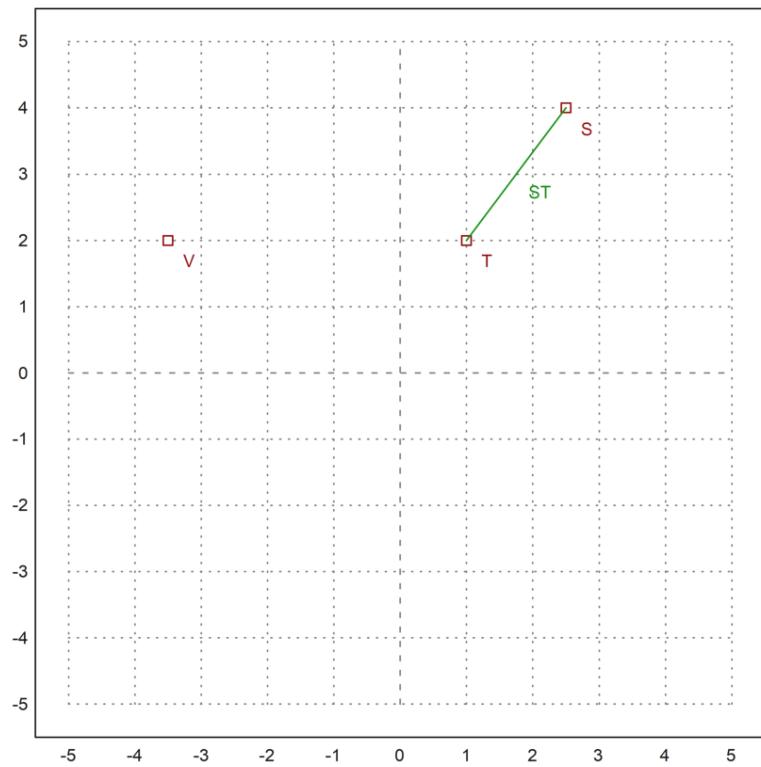
ellips, parabola, hiperbola, dll.

Menggambarkan titik pada bidang koordinat.

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);  
>S=[2.5,4]; plotPoint(S,"S");  
>V=[-3.5,2]; plotPoint(V,"V");  
>T=[1,2]; plotPoint(T,"T");
```

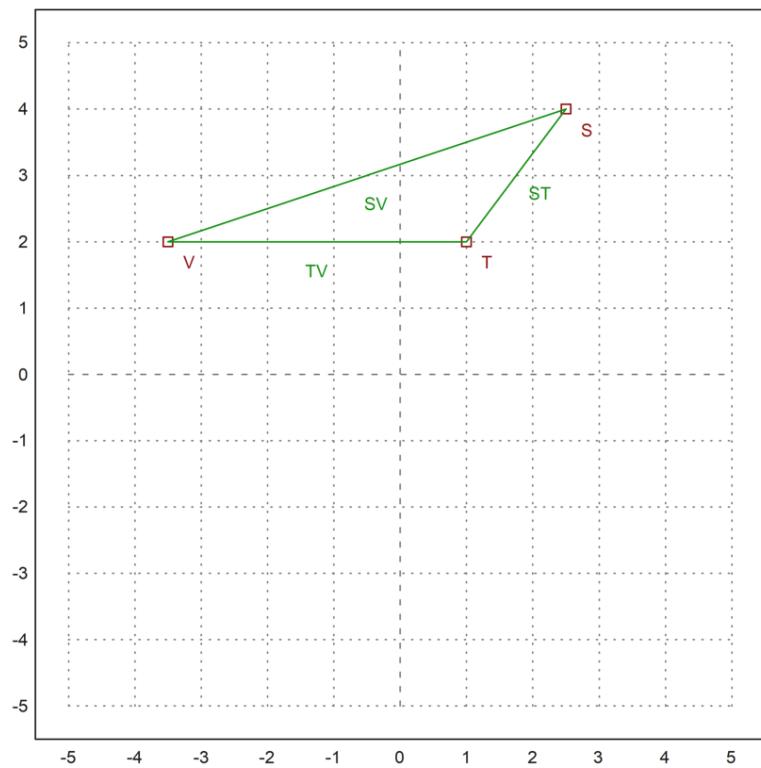


```
>color(3); plotSegment(S,T,"ST");
```

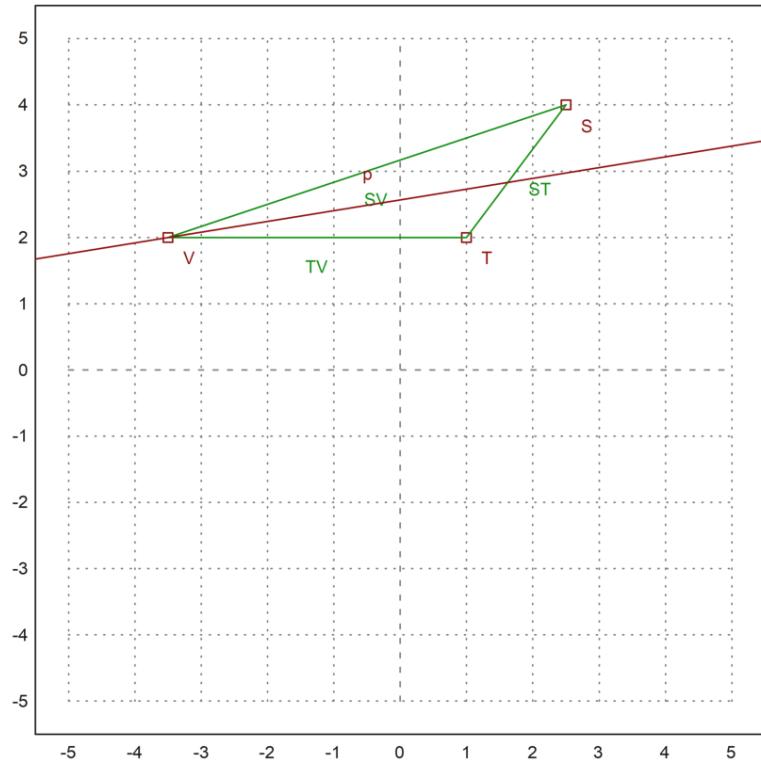


Menggambar ruas garis.

```
>color(3); plotSegment(S,V,"SV");
>color(3); plotSegment(T,V,"TV"):
```

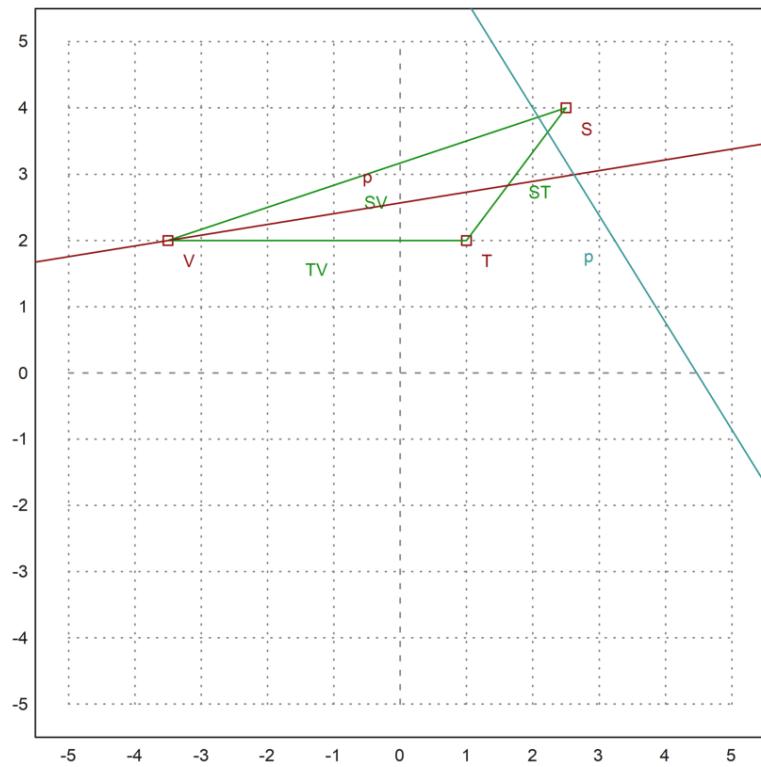


```
>u=angleBisector(S,V,T); color(2); plotLine(u):
```



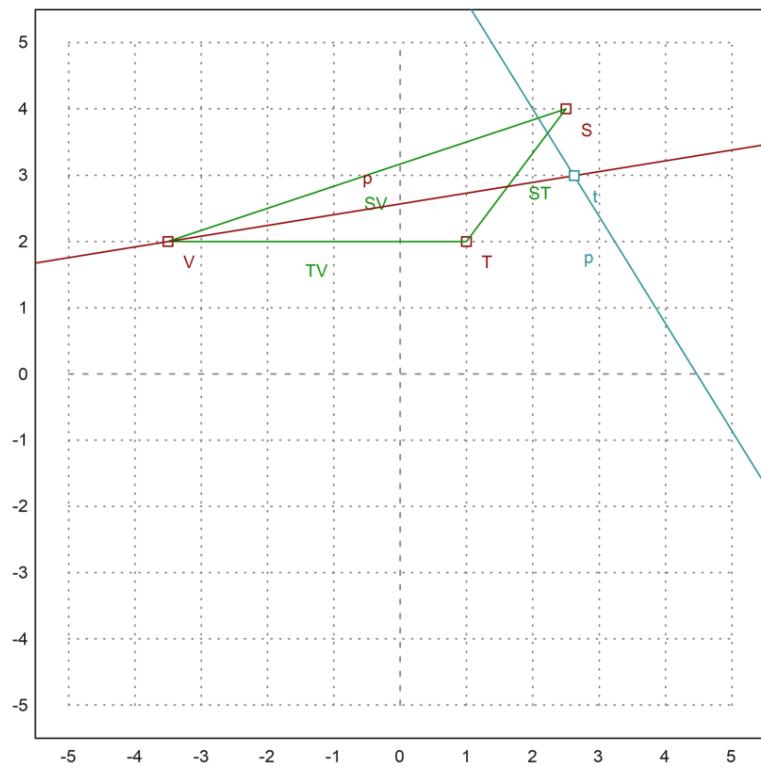
Menggambar garis.

```
>n=angleBisector(T,A,S); color(5); plotLine(n):
```



Menggambarkan titik potong garis u dan garis n.

```
>t=lineIntersection(u,n); plotPoint(t);
```



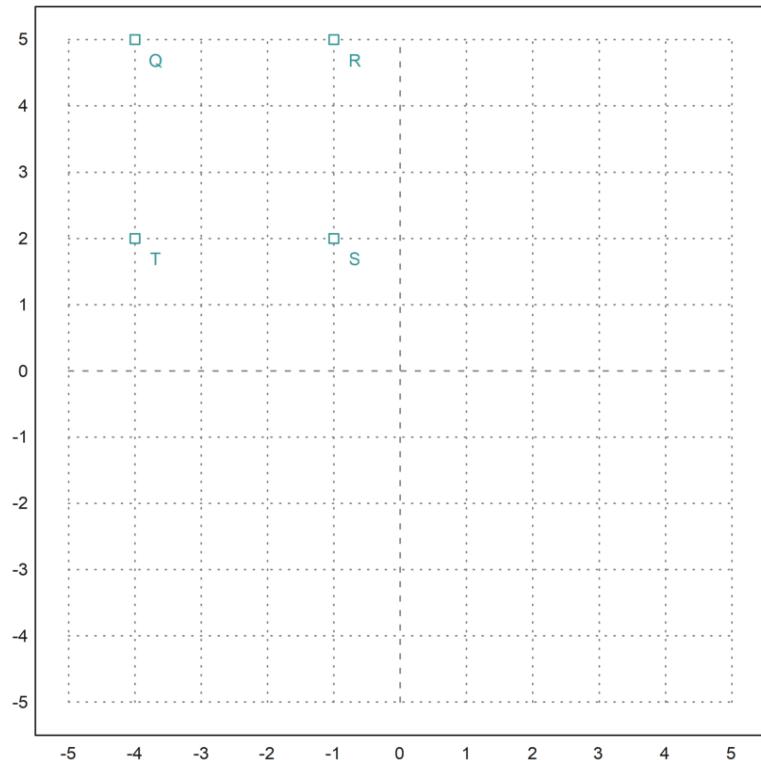
Menggambar segibanyak.

Berikut ini adalah penggambaran objek geometri berupa segi-4:

Perseg

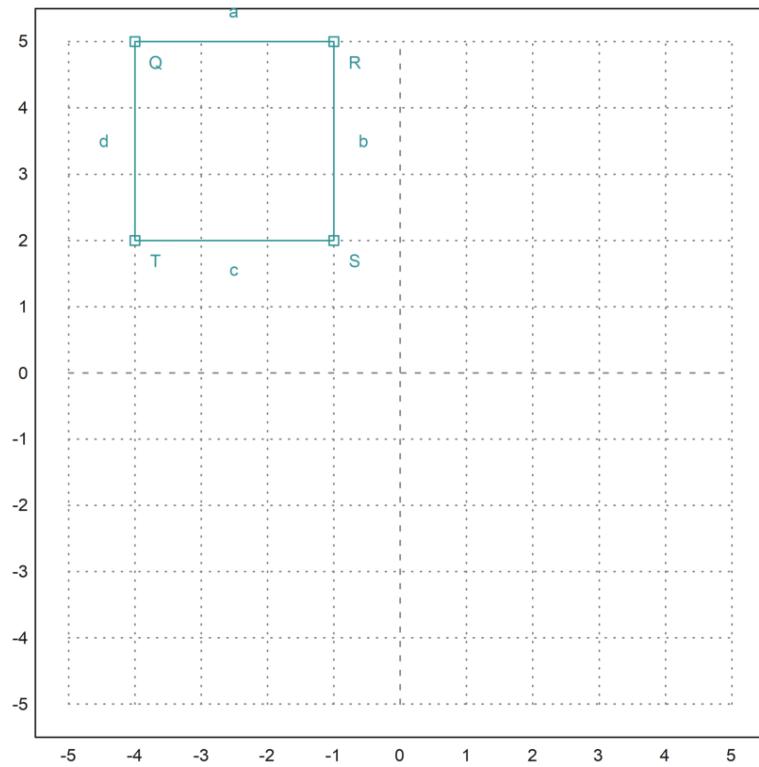
Langkah 1: Menggambarkan titik-titik koordinat Q, R, S, T.

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);  
>Q=[-4,5]; plotPoint(Q, "Q");  
>R=[-1,5]; plotPoint(R, "R");  
>S=[-1,2]; plotPoint(S, "S");  
>T=[-4,2]; plotPoint(T, "T");
```



Menghubungkan titik-titik koordinat Q, R, S, T dengan ruas garis.

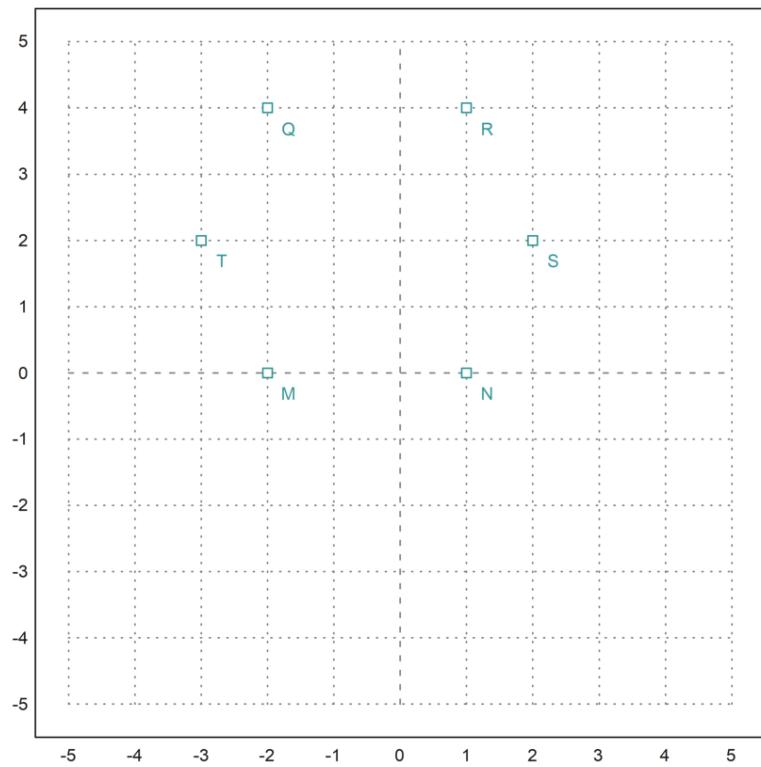
```
>plotSegment(Q,R, "a");  
>plotSegment(R,S, "b");  
>plotSegment(S,T, "c");  
>plotSegment(T,Q, "d");
```



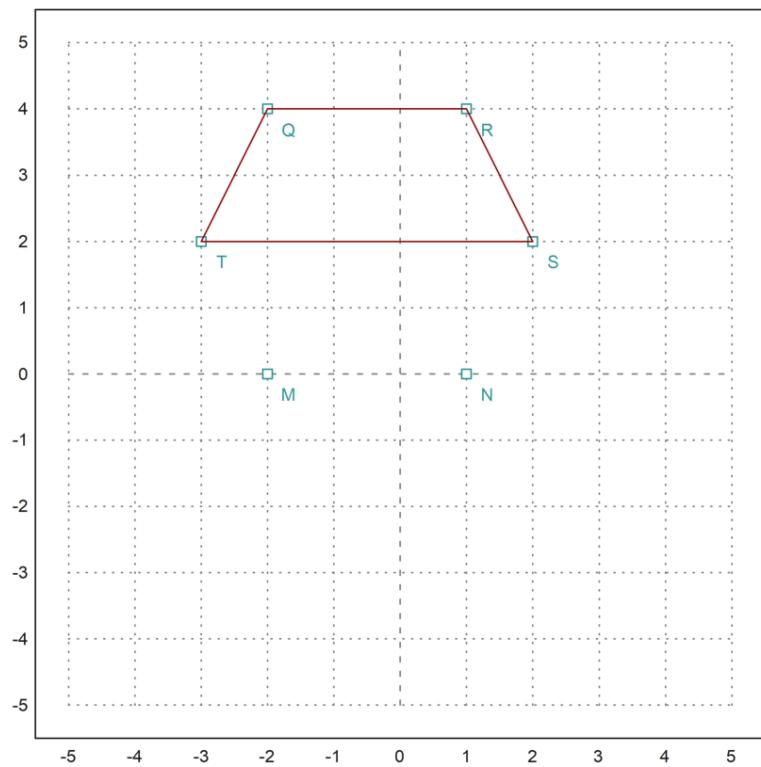
Trapesium Sama Kaki

Digambarkan enam titik, yaitu Q, R, S, T, M, N. Keenam titik ini jika dihubungkan dapat membentuk dua bangun datar, yaitu trapesium sama kaki dan segienam.

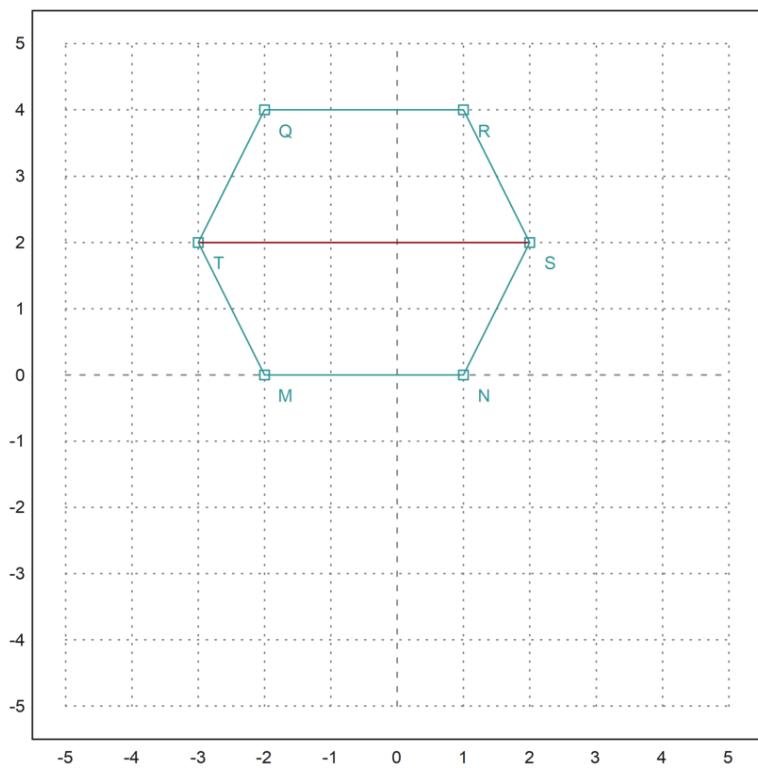
```
>setPlotRange (-5, 5, -5, 5);
>Q=[-2,4]; plotPoint(Q, "Q");
>R=[1,4]; plotPoint(R, "R");
>S=[2,2]; plotPoint(S, "S");
>T=[-3,2]; plotPoint(T, "T");
>M=[-2,0]; plotPoint(M, "M");
>N=[1,0]; plotPoint(N, "N");
```



```
>color(2); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(S,R," "); plotSegment(S,T," "); plotSegment
```



```
>color(5); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(R,S," "); plotSegment(S,N," "); plotSegment(N,T," ");
```

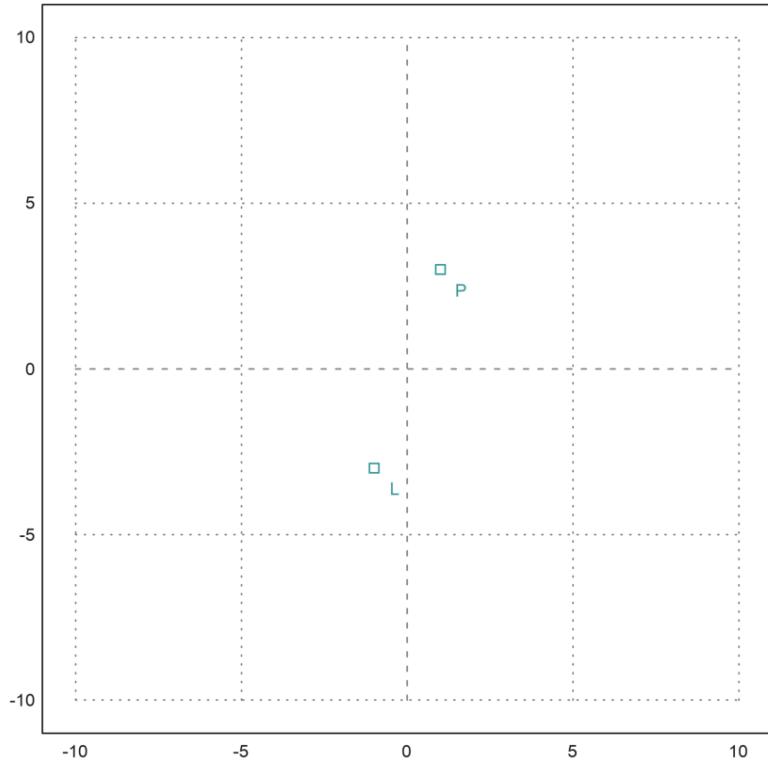


Menggambarkan lingkaran dengan pusat titik P. (Lingkaran akan digambar menggunakan fungsi geometri yang disediakan oleh Euler)

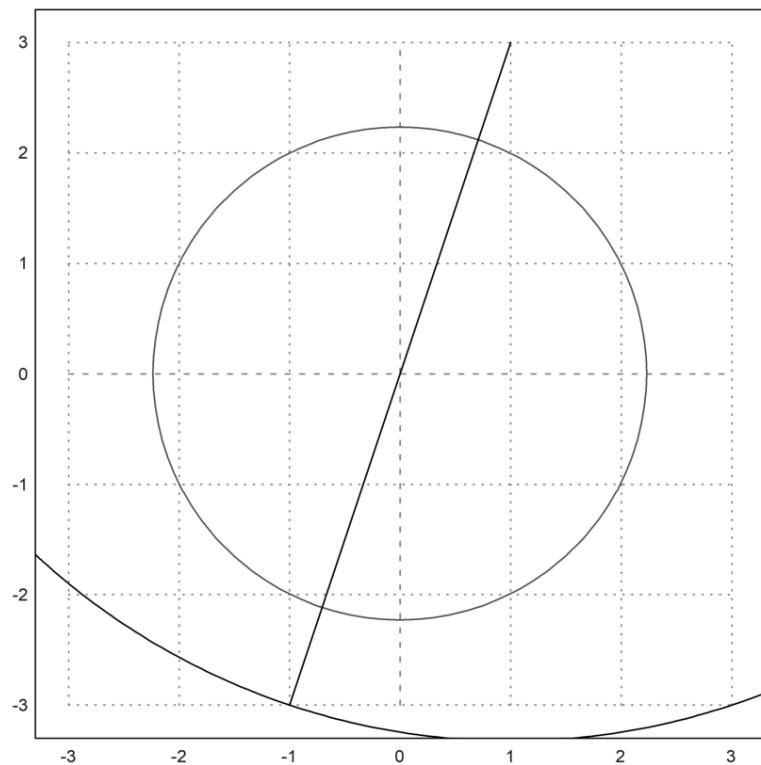
P adalah titik pusat lingkaran.

PL adalah jari-jari lingkaran.

```
>setPlotRange(-10,10,-10,10);
>P=[1,3]; plotPoint(P,"P");
>L=[-1,-3]; plotPoint(L,"L");
```



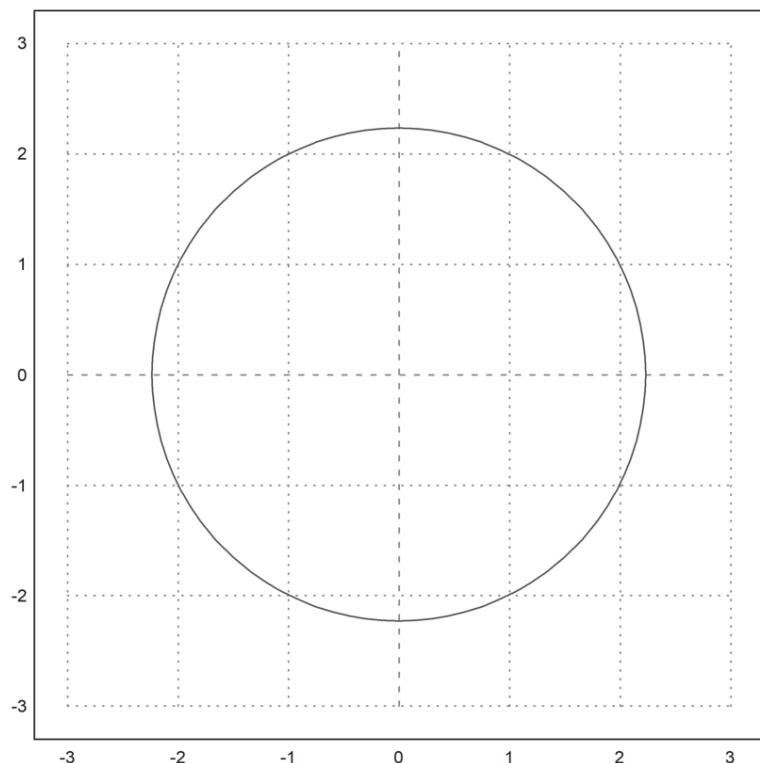
```
>c1=circleWithCenter(P,distance(P,L)); plotCircle(c1);
>plotSegment(P,L," "):
```



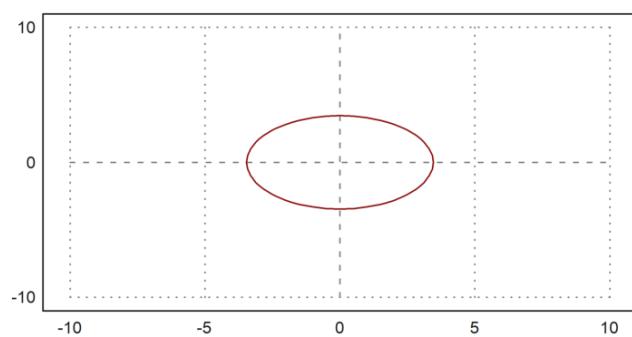
Sekarang kita akan menggambarkan lingkaran menggunakan Plot 2D dengan menggunakan rumus umum lingkaran, yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

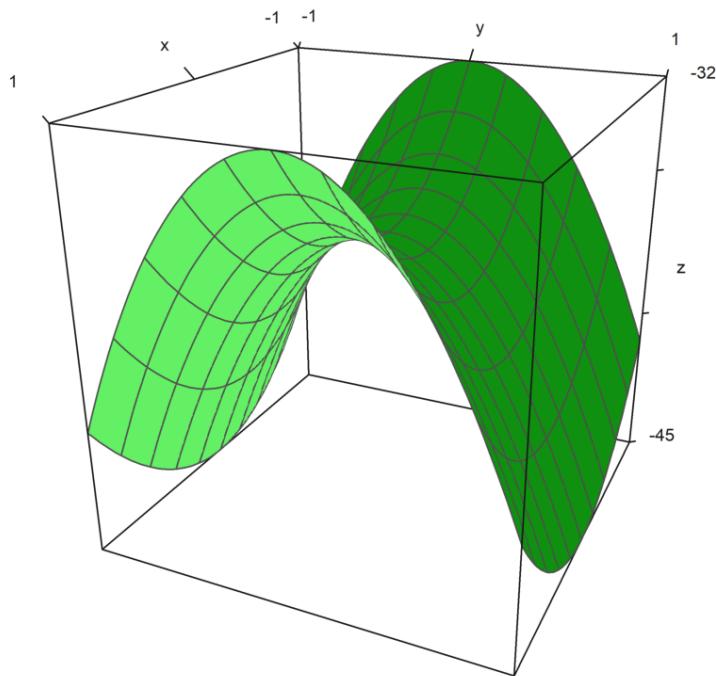
```
>aspect(1);  
>plot2d("x^2+y^2-4", r=3, level=1):
```



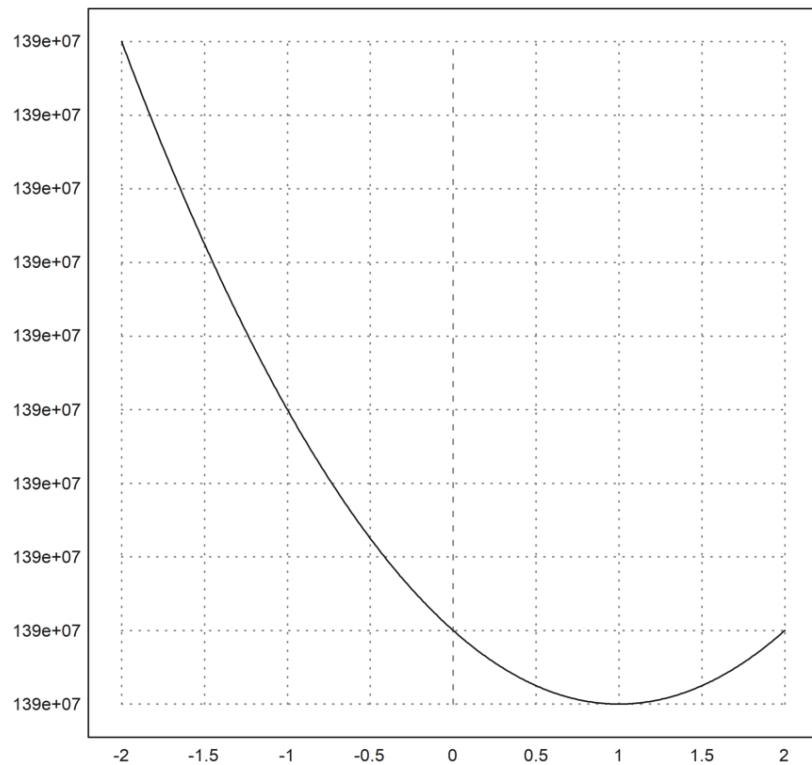
```
>aspect(2);  
>plot2d("((x^2)/4)+((y^2)/4)-1", r=10, level=2, contourcolor=red):
```



```
>aspect(1);  
>plot3d("4x^2-9y^2-36": //hiperbola
```



```
>aspect(1);  
>plot2d("x^2-2x-2y+5": //parabola
```



Materi 4

- a. Menentukan titik tengah suatu ruas garis
- b. Menentukan titik potong dua garis
- c. Menentukan titik potong garis dan lingkaran
- d. Menentukan titik potong dua lingkaran

Menentukan Titik Tengah Suatu Ruas Garis

Titik tengah suatu garis adalah titik yang berada tepat di tengah garis tersebut, sehingga jarak dari titik ini ke ujung-ujung garis tersebut adalah sama. Dalam Matematika, untuk menemukan titik tengah suatu garis, kita dapat menggunakan formula berikut:

Jika kita memiliki dua koordinat ujung garis (x_1, y_1) maka koordinat titik tengahnya (x, y) dapat dihitung sebagai berikut:

$$(x, y)$$

dengan

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

dan

$$y = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

maka dapat dituliskan

$$\left(\frac{(x_1 + x_2)}{2}, \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right)$$

Ini berarti Kita menjumlahkan koordinat x dari kedua ujung garis dan kemudian membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat x titik tengah.

Demikian juga, Kita menjumlahkan koordinat y dari kedua ujung garis dan membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat y titik tengah.

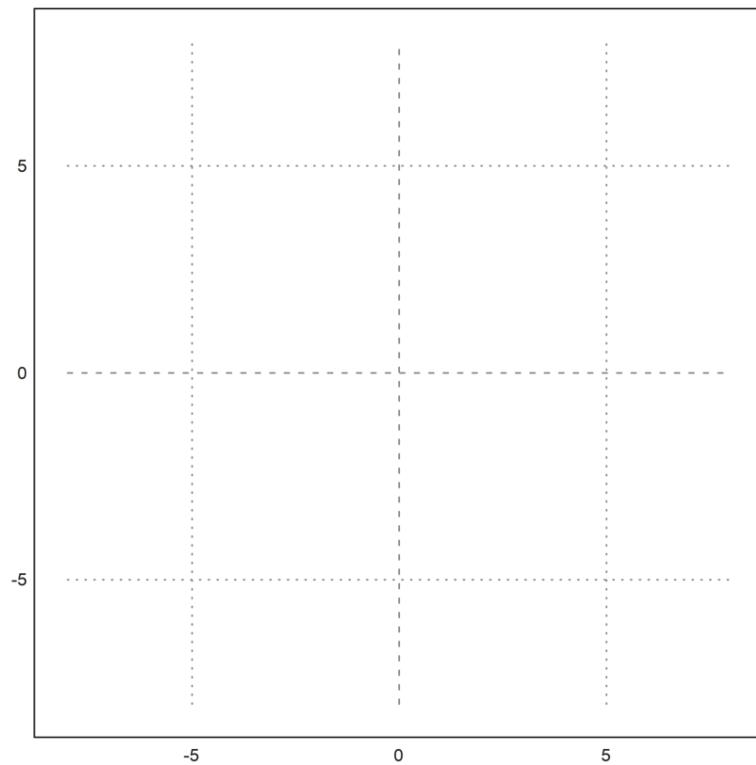
Titik tengah suatu garis juga dapat ditemukan dengan metode geometri. Kita dapat menggambar dua garis diagonal dari sudut-sudut yang berlawanan pada segiempat yang dibentuk oleh garis tersebut. Titik pertemuan kedua diagonal ini adalah titik tengah garis.

Jadi, titik tengah suatu garis adalah titik yang terletak persis di tengah garis tersebut, dengan jarak yang sama dari kedua ujung garisnya. Ini adalah konsep dasar dalam geometri dan matematika yang sering digunakan dalam berbagai konteks, seperti pembuatan grafik, pemodelan geometri, dan banyak aplikasi lainnya.

CONTOH :

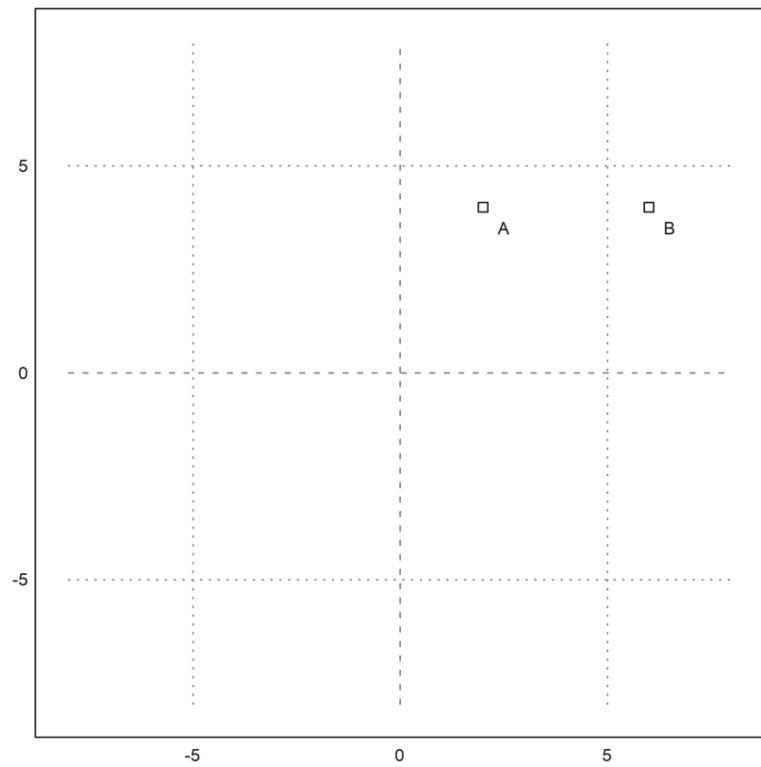
Diberikan ruas garis AB yang melalui dua titik A dan titik B. Dengan koordinat titik A dan titik B berturut-turut (2,4) dan (6,4). Tentukan koordinat titik tengah ruas garis AB

```
>setPlotRange (8) :
```

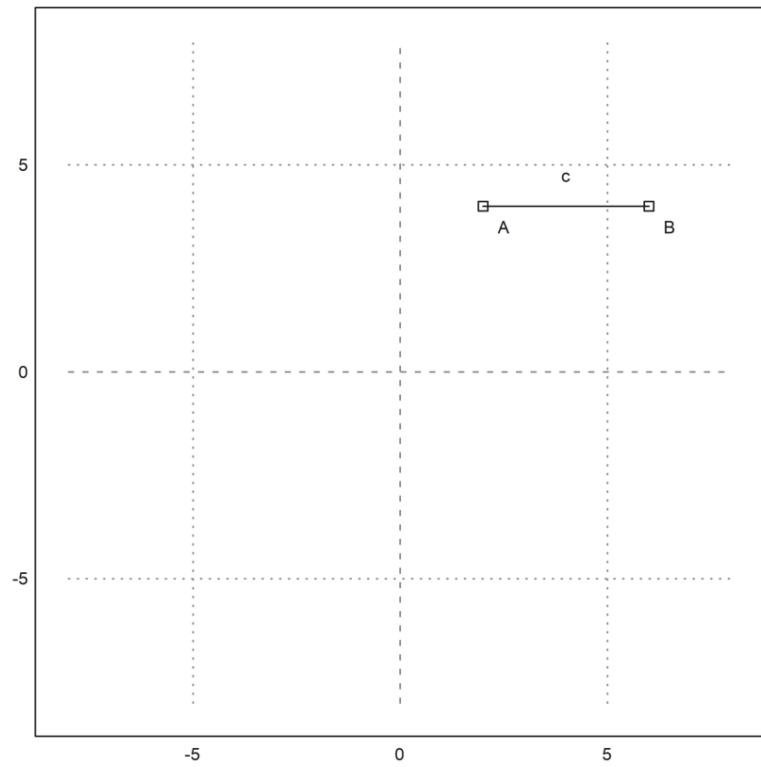


Selanjutnya buat ruas garis yang melalui 2 titik A dan B yang akan kita cari titik tengahnya pada bidang kartesius

```
>A=[2,4]; plotPoint(A,"A");
>B=[6,4]; plotPoint(B,"B"):
```

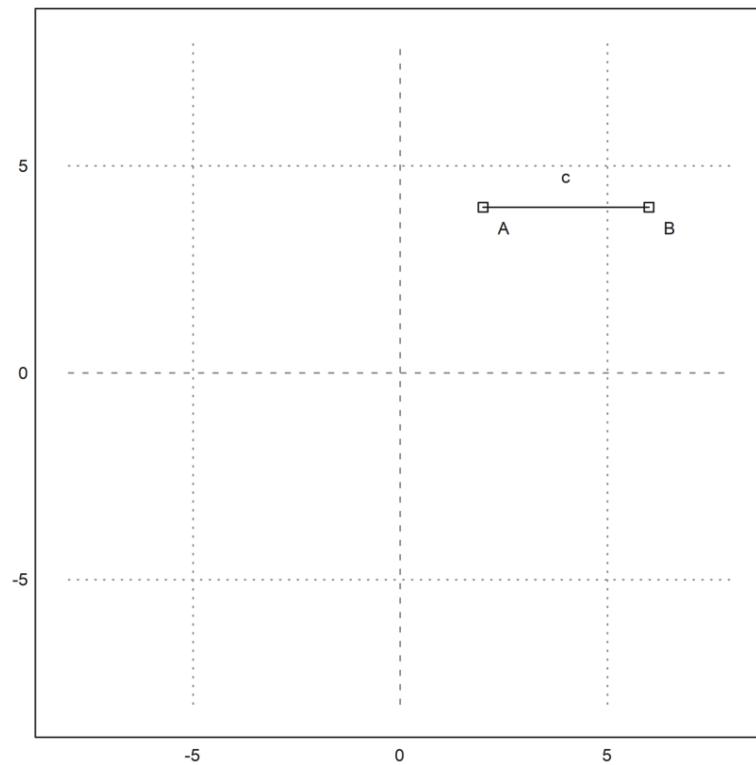


```
>plotSegment(A, B, "c") :
```



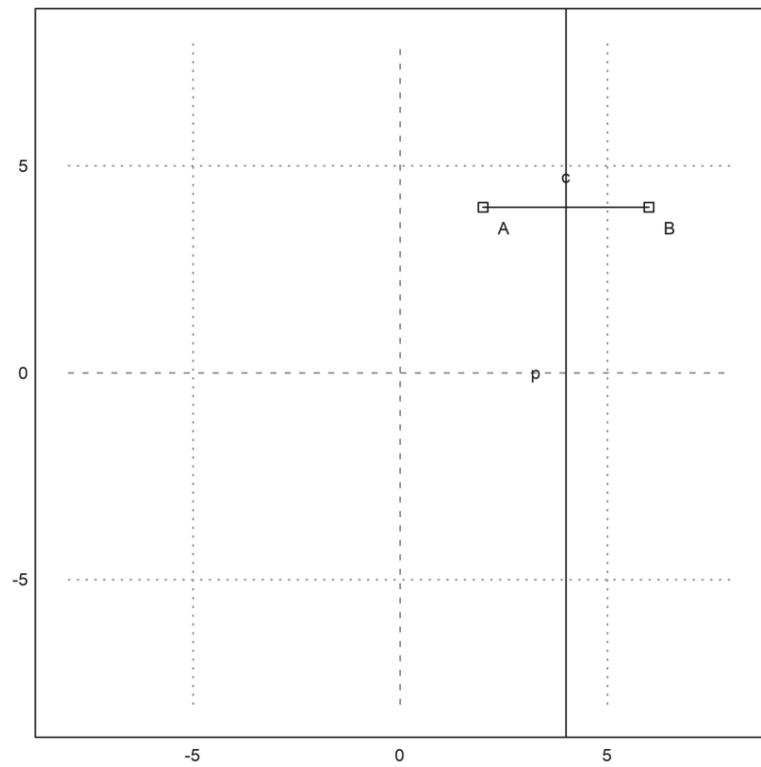
Berikutnya buat garis h yang tegak lurus ruas garis AB dan memotong tepat di tengah ruas garis AB

```
>h = middlePerpendicular(A,B):
```

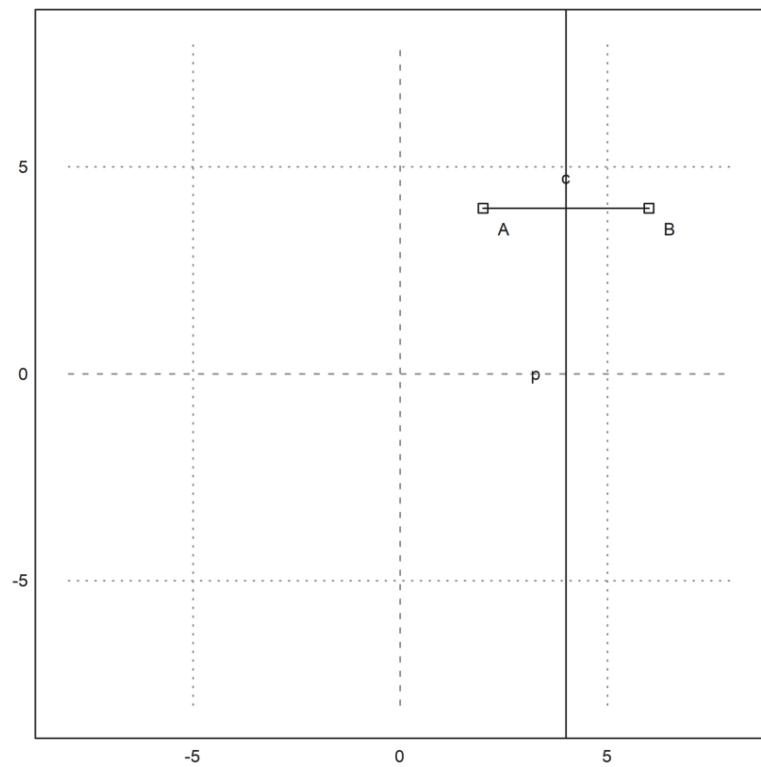


kemudian kita menentukan koordinat titik D yaitu perpotongan garis h dan ruas garis AB. titik D adalah titik tengah ruas garis AB

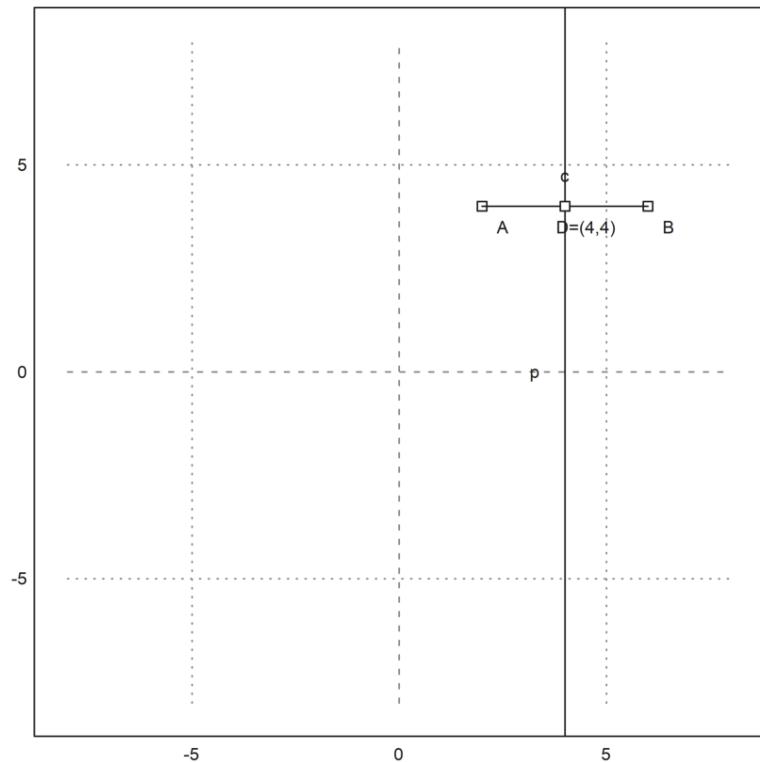
```
>plotLine(h):
```



```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(A,B)):
```



```
>plotPoint(D,value=1) :
```



Pembuktian menggunakan rumus matematika

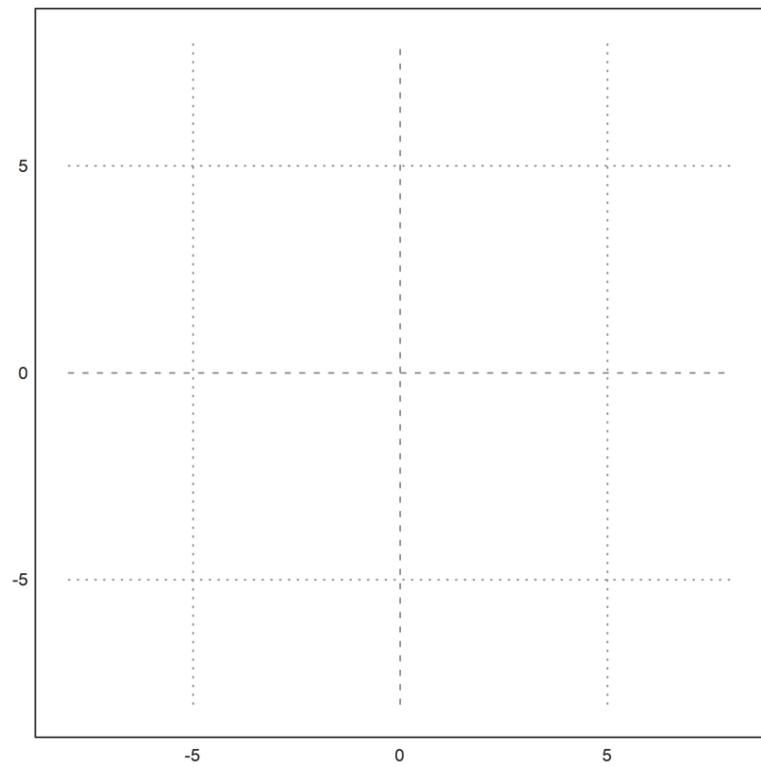
$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \\ & = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+4}{2} \right) \\ & = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2} \right) \\ & = (4, 4) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa titik tengah ruas garis AB adalah(4,4)

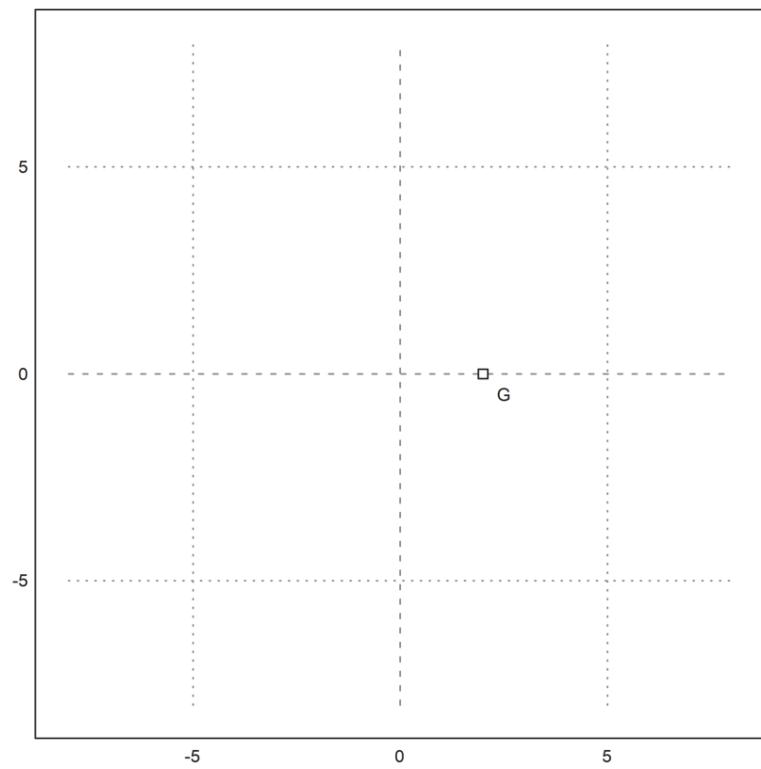
Latihan

1. Diberikan ruas garis l yang melalui dua titik F dan titik G. Dengan koordinat titik F dan titik G berturut-turut (2,0) dan (2,6). tentukan koordinat titik tengah ruas garis l

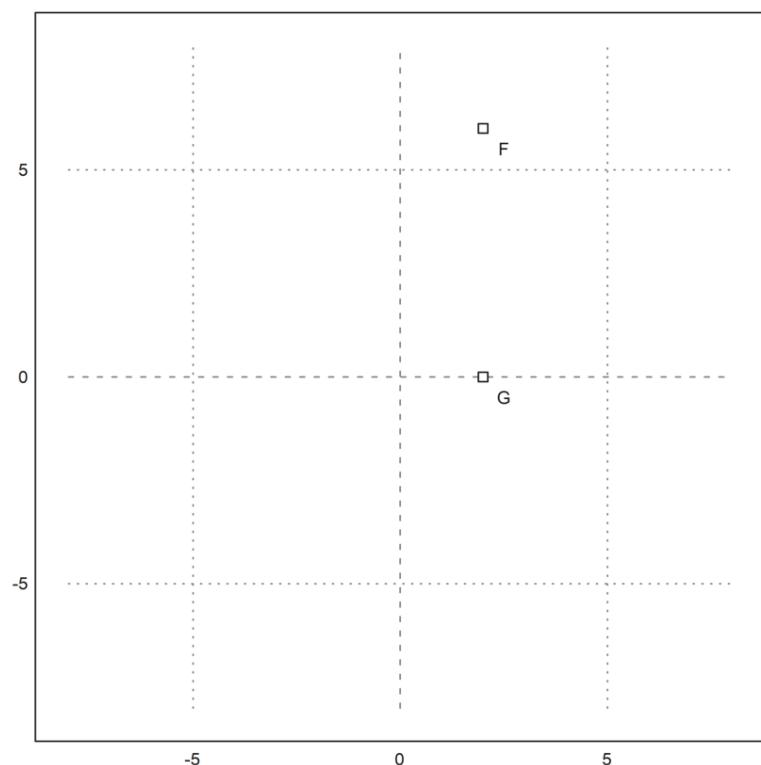
```
>  
>setPlotRange (8) :
```



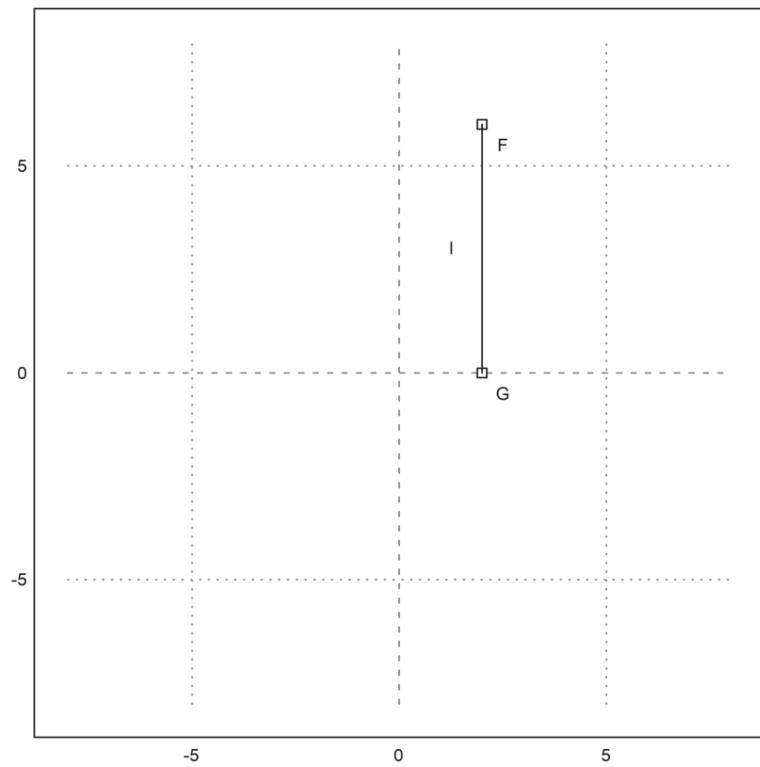
```
>G=[2,0]; plotPoint(G,"G");
```



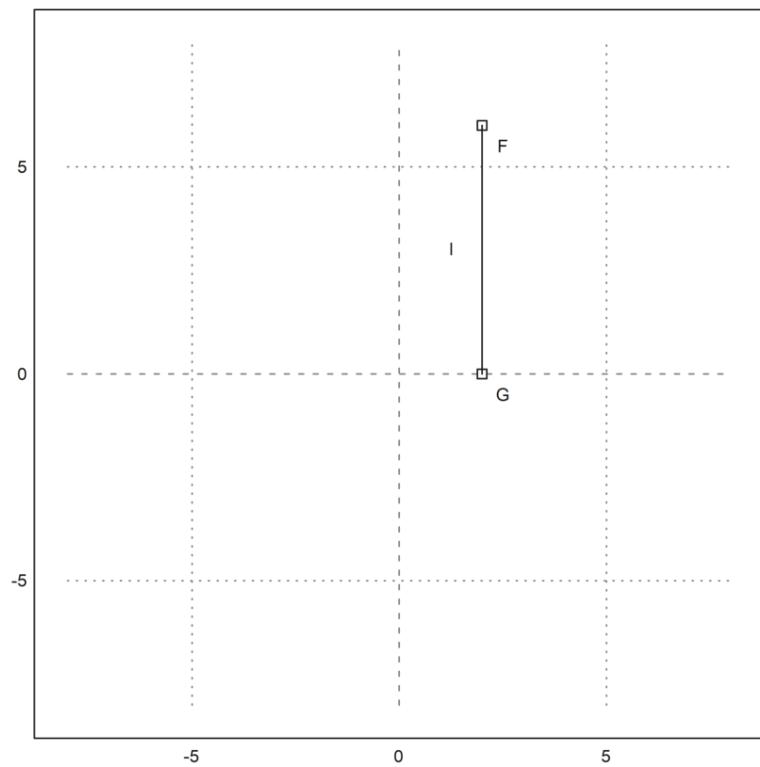
```
>F=[2,6]; plotPoint(F,"F"):
```



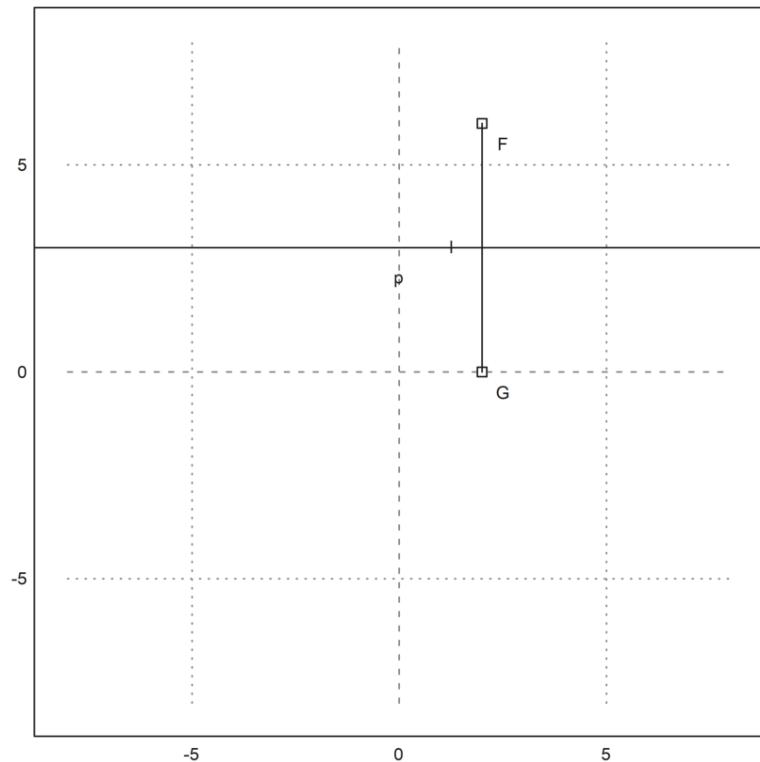
```
>plotSegment(G,F,"l"):
```



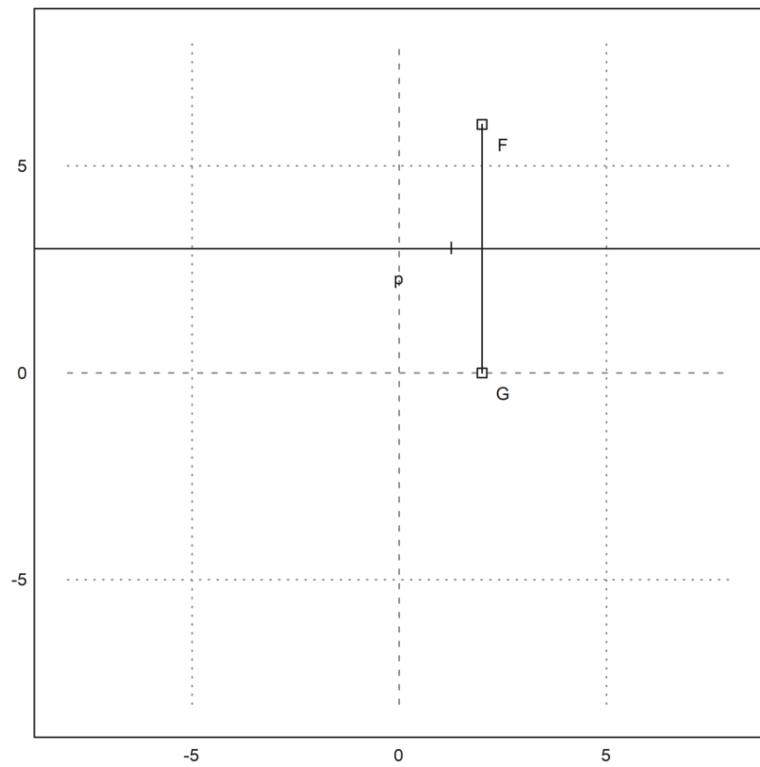
```
>h= middlePerpendicular(G,F) :
```



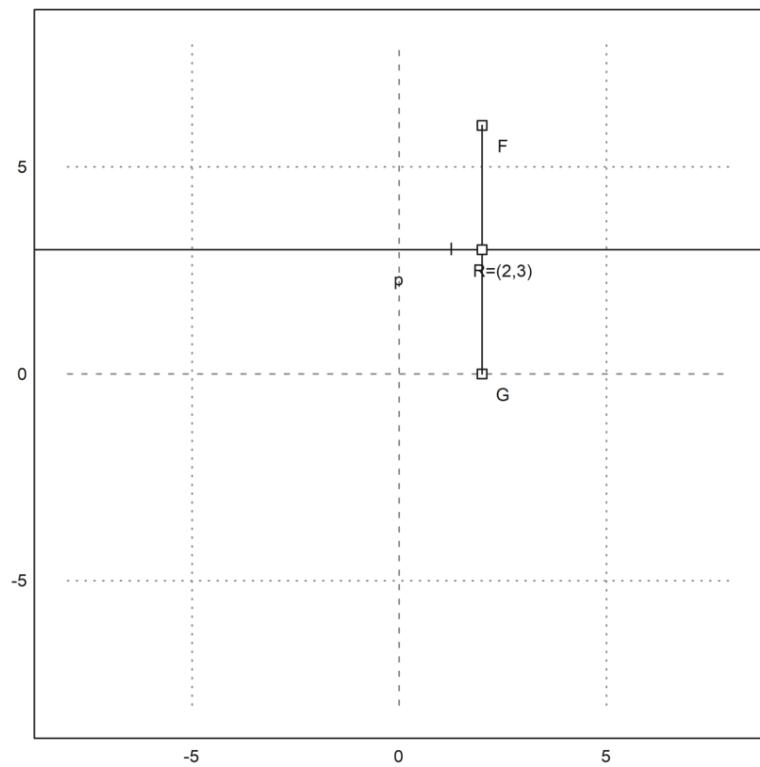
```
>plotLine(h) :
```



```
>R=lineIntersection(h, lineThrough(G,F)) :
```



```
>plotPoint (R,value=1) :
```



Pembuktian menggunakan rumus matematika

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+6}{2} \right)$$

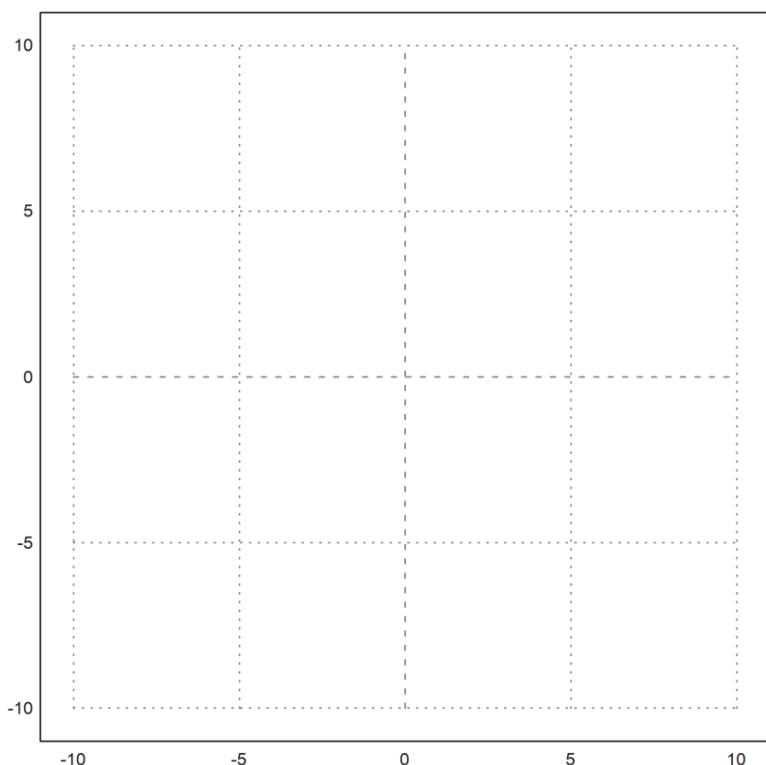
$$= \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2} \right)$$

$$= (2, 3)$$

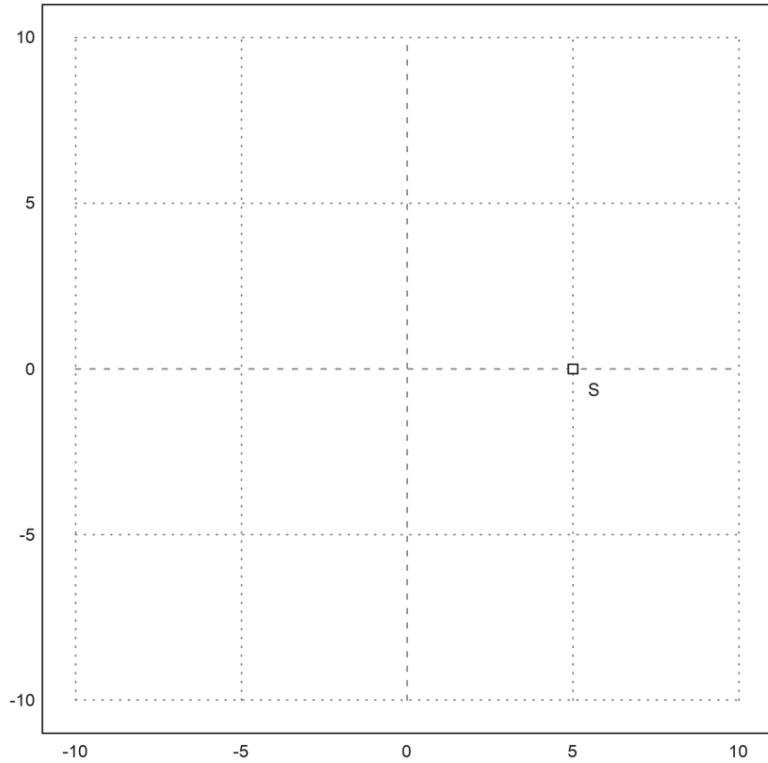
Jadi, terbukti benar bahwa titik tengah ruas garis FG adalah(2,3)

2. Diberikan ruas garis k yang melalui dua titik S dan titik R. Dengan koordinat titik S dan titik R berturut-turut (5,0) dan (3,6). Tentukan koordinat titik tengah ruas garis k

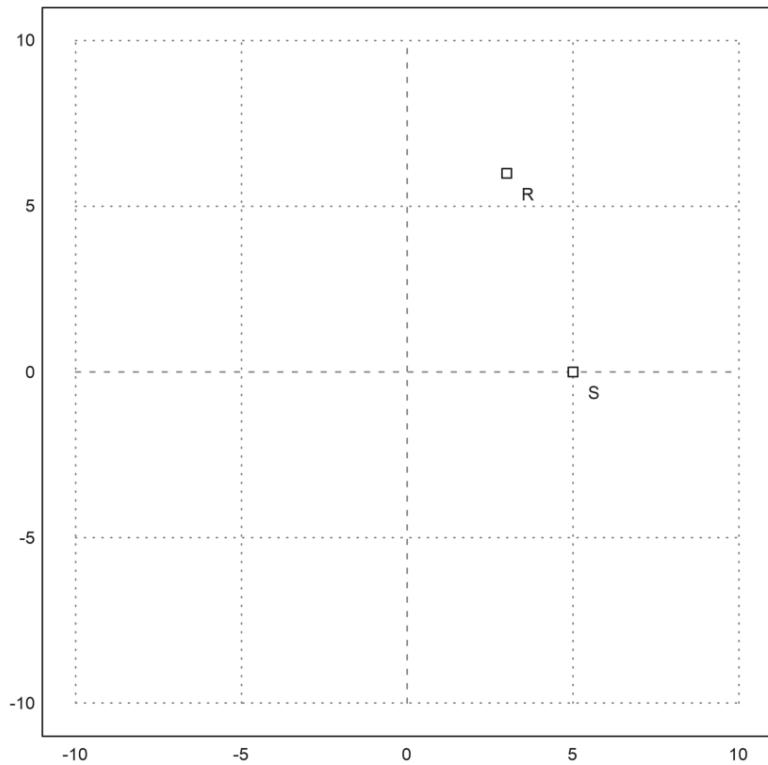
```
>setPlotRange(10) :
```



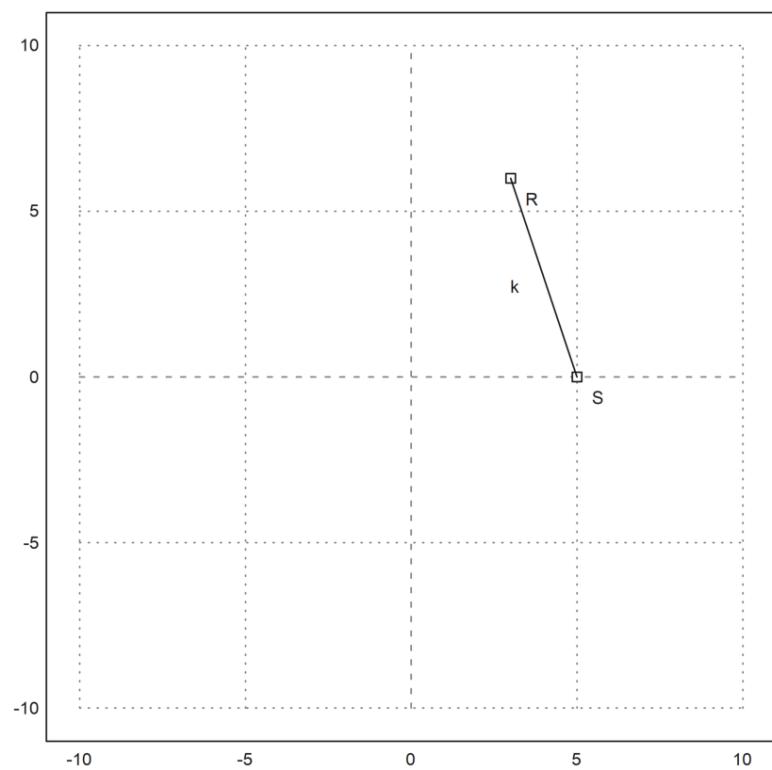
```
>S=[5,0]; plotPoint(S,"S") :
```



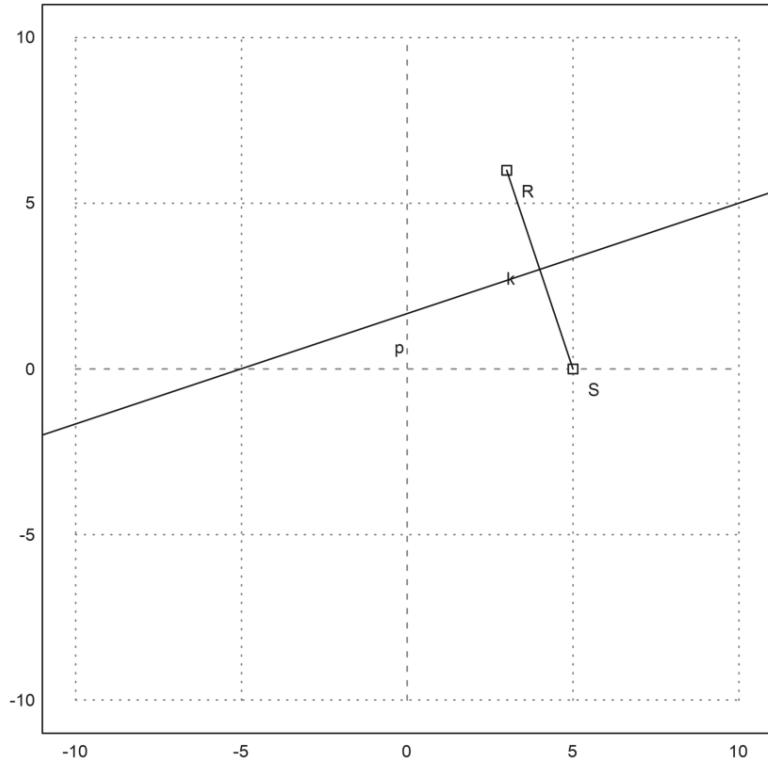
```
>R=[3,6]; plotPoint(R,"R"):
```



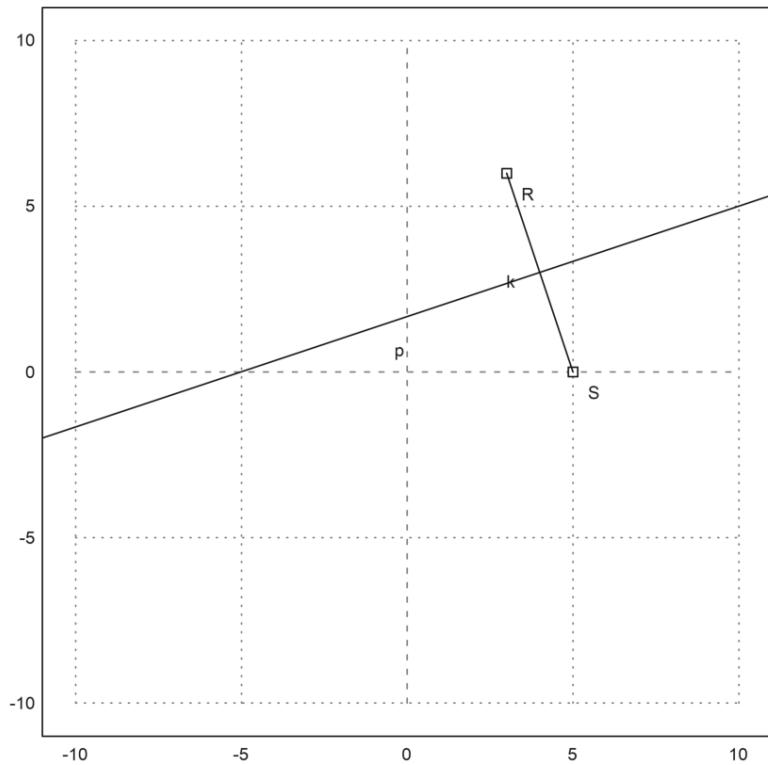
```
>plotSegment(S,R,"k"):
```



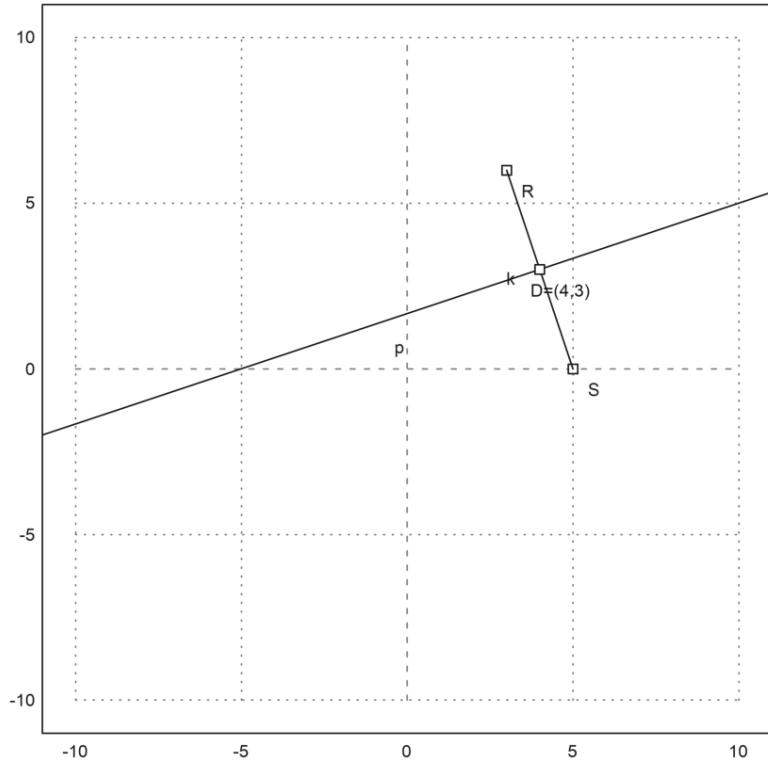
```
>h = middlePerpendicular(S,R);  
>plotLine(h):
```



```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(S,R)):
```



```
>plotPoint(D,value=1):
```



Pembuktian menggunakan rumus matematika

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{5+3}{2}, \frac{0+6}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{6}{2} \right)$$

$$= (4, 3)$$

Jadi, terbukti benar bahwa titik tengah ruas garis SR adalah(4,3) **Menentukan titik potong dua garis**

Titik potong dua garis adalah titik dimana dua garis lurus berpotongan satu sama lain. Dalam konteks geometri atau matematika, dua garis yang berpotongan akan memiliki satu titik potong, yang merupakan titik yang terletak pada kedua garis tersebut. Titik potong ini memiliki koordinat yang spesifik dalam sistem koordinat yang digunakan.

Dalam geometri Euclidean, jika dua garis sejajar(paralel), maka mereka tidak akan memiliki titik potong. Namun, jika dua garis tidak sejajar, maka mereka akan memiliki satu titik potong yang dapat dihitung atau ditentukan.

Secara matematis, untuk menemukan titik potong dua garis, kita dapat menggunakan sistem persamaan linier. Jika kita memiliki dua persamaan linier yang mewakili dua garis, Kita dapat menyelesaikan sistem persamaan

ini untuk menemukan nilai koordinat titik potong. Biasanya, kita akan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau grafik untuk menemukan titik potongnya.

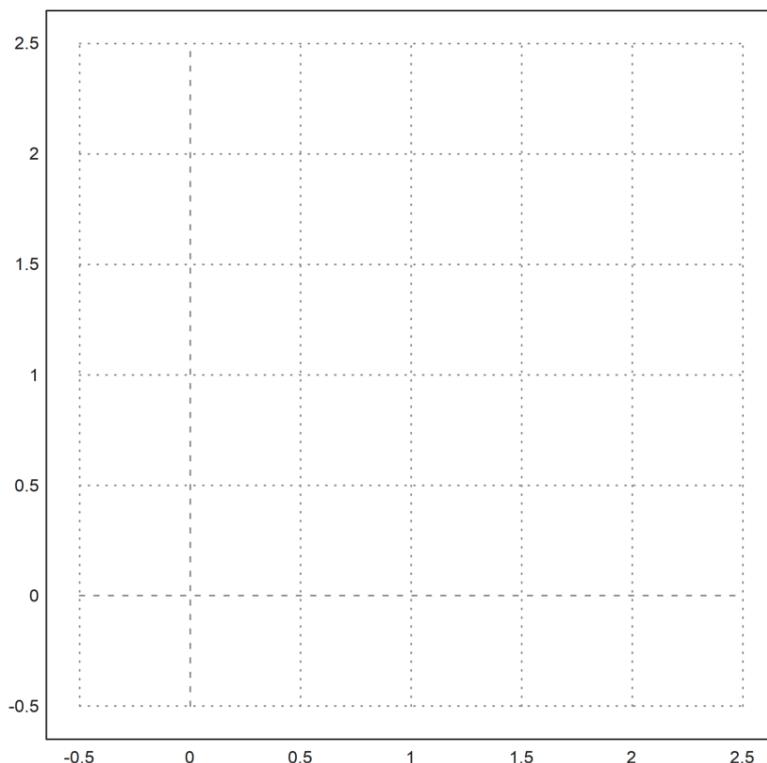
CONTOH :

Diberikan titik A(0,2), B(2,0), C(0,0), dan D(2,2). c merupakan ruas garis AB dan b merupakan Ruas garis CD. tentukan koordinat titik potong dua ruas garis tersebut!

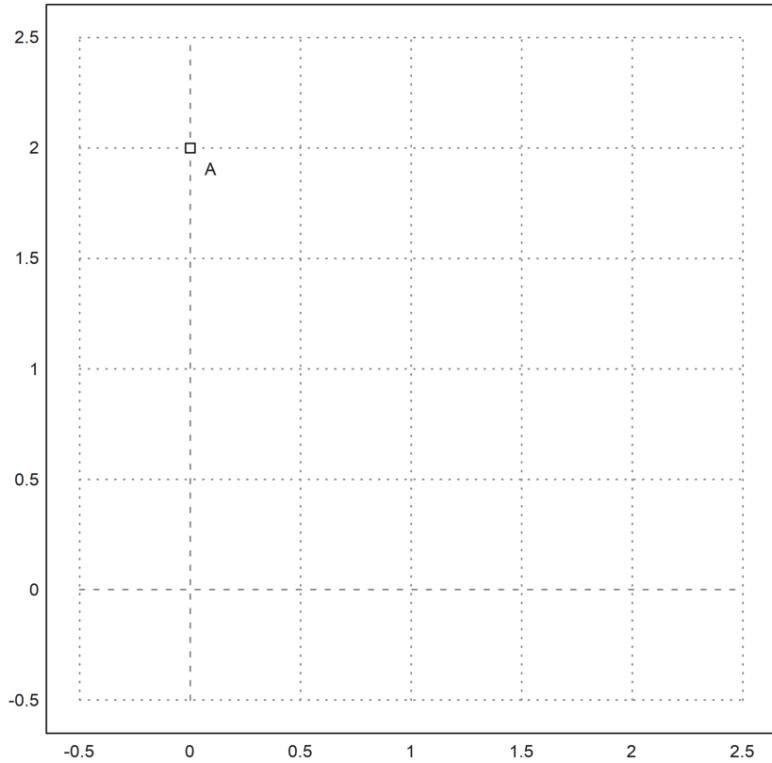
Jawab:

langkah pertama kita menentukan luas bidang kartesius terlebih dahulu

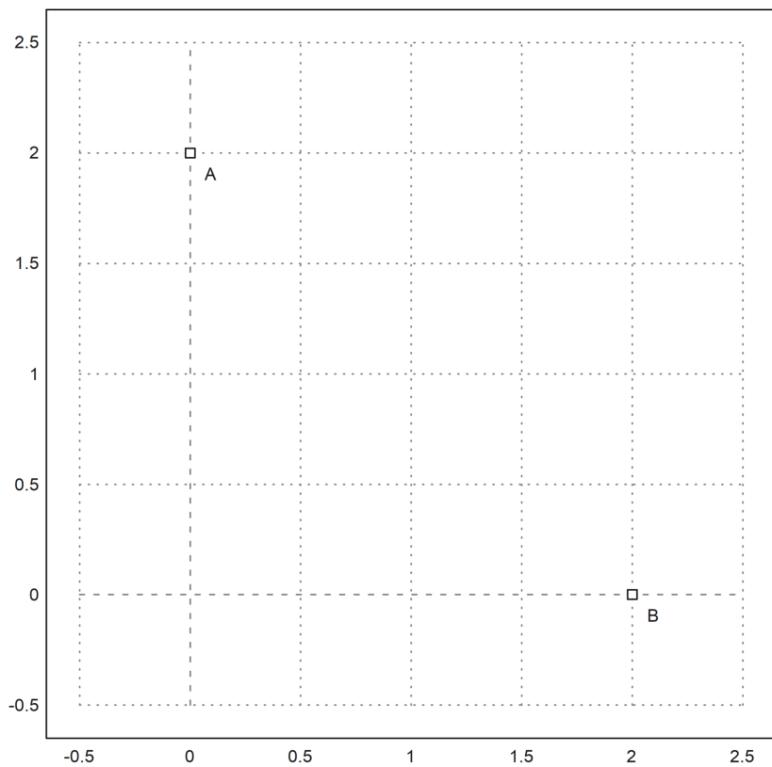
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```



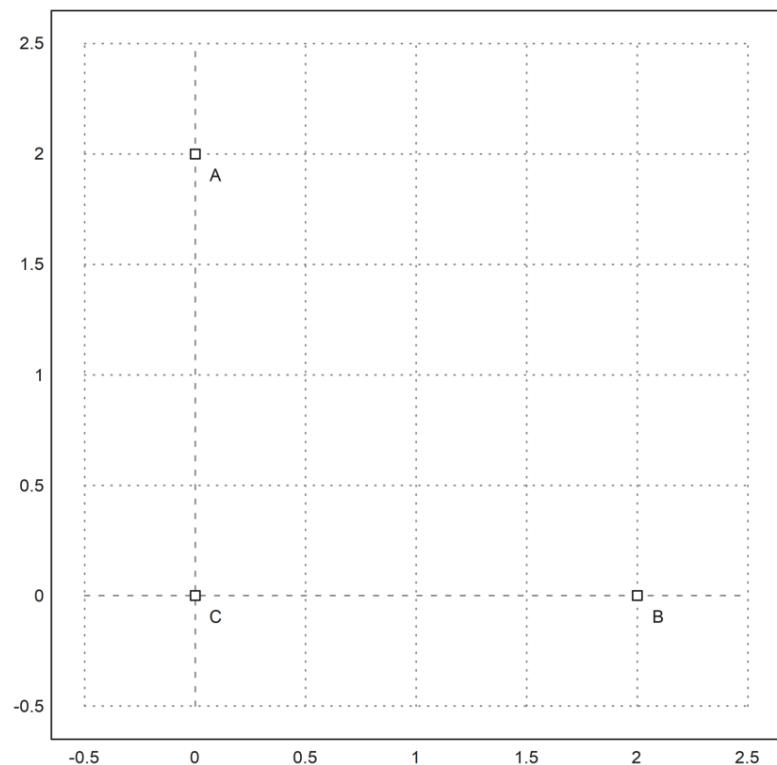
```
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
```



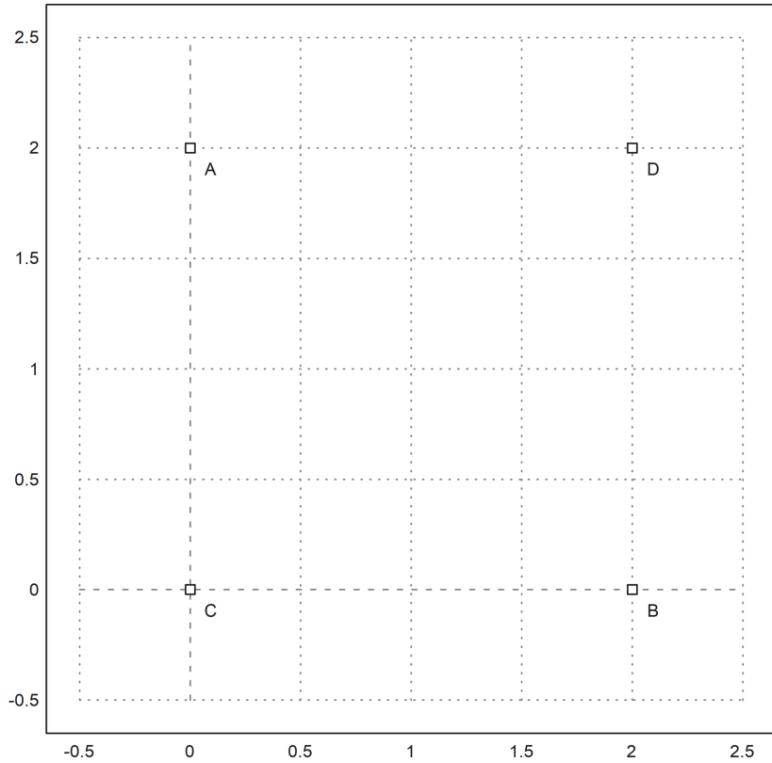
```
>B=[2,0]; plotPoint(B,"B"):
```



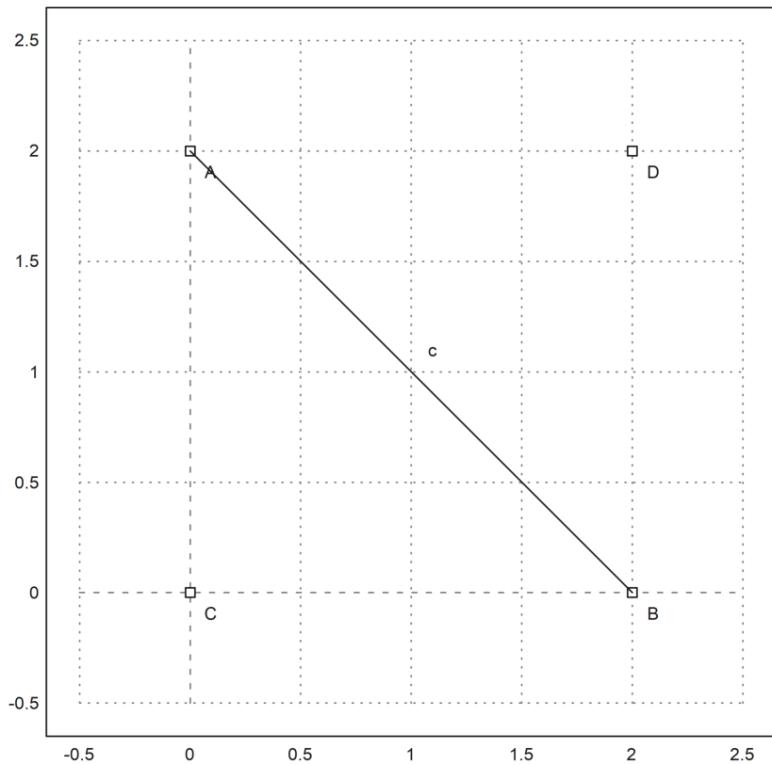
```
>C=[0,0]; plotPoint(C,"C"):
```



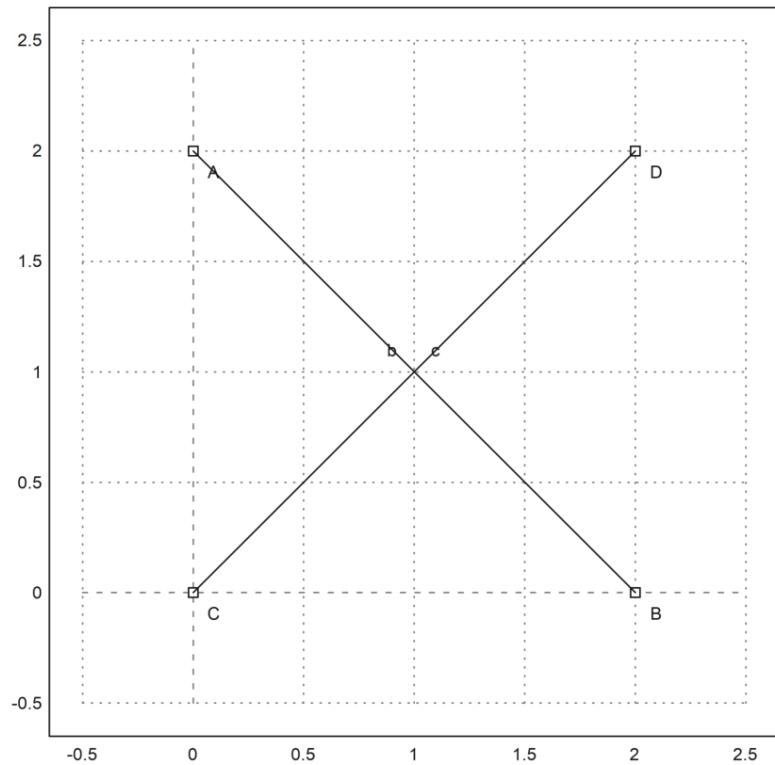
```
>D=[2,2]; plotPoint(D,"D"):
```



```
>plotSegment(A, B, "c") : // c=AB
```

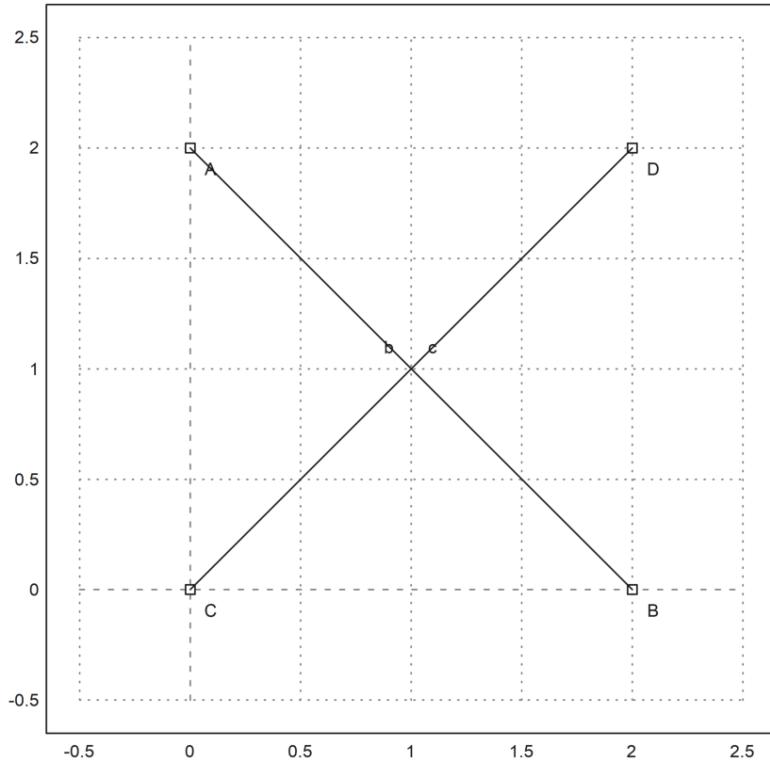


```
>plotSegment(C,D,"b") : // b=CD
```

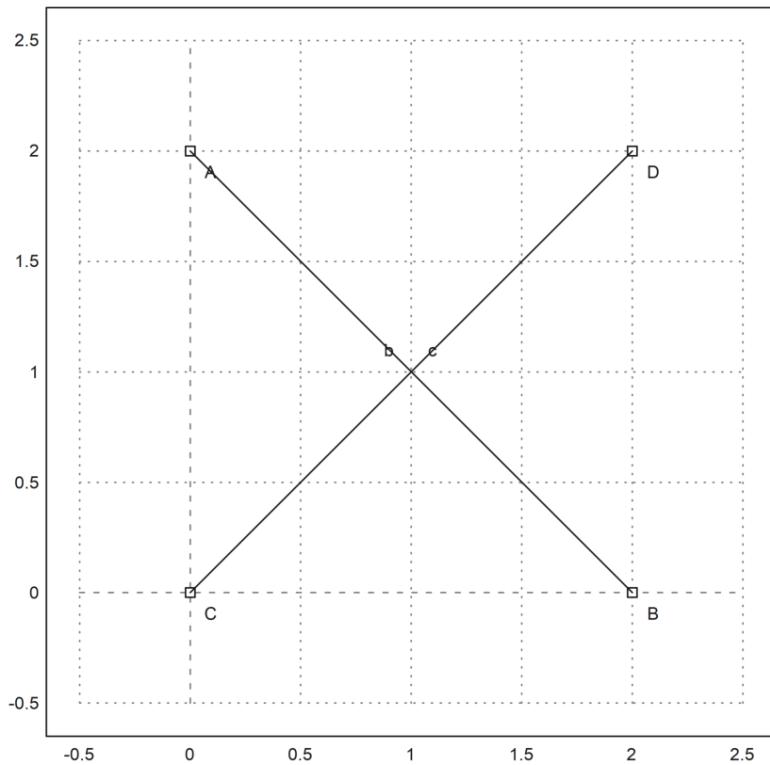


berikutnya kita akan menentukan koordinat titik potongnya

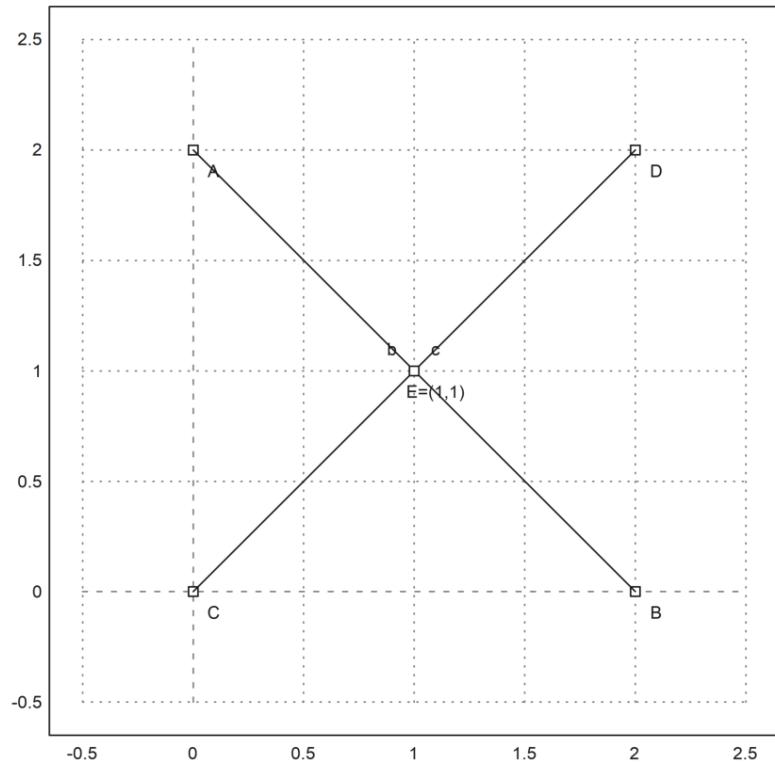
```
>lineThrough(A,B) : // garis yang melalui A dan B
```



```
>lineThrough(C,D): // garis yang melalui C dan D
```



```
>E=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D)); // E adalah titik potong c dan b
>plotPoint(E,value=1); // koordinat E ditampilkan
```



Pembuktian dengan rumus matematika:

1. Mencari persamaan garis AB

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 0}{2 - 0}$$

$$\frac{y - 2}{-2} = \frac{x}{2}$$

$$2y - 4 = -2x$$

$$y = -x + 2$$

2. Mencari persamaan garis CD

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 0}{2 - 0}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{2}$$

$$2y = 2x$$

$$y = x$$

3. Subsitusi y pada CD dengan $-x+2$ pada AB

$$y = -x + 2$$

$$x = -x + 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

4. Subsitusi $x=1$ ke persamaan CD

$$y = x$$

$$y = 1$$

Jadi, titik koordinatnya (1,1)

Terbukti

Latihan

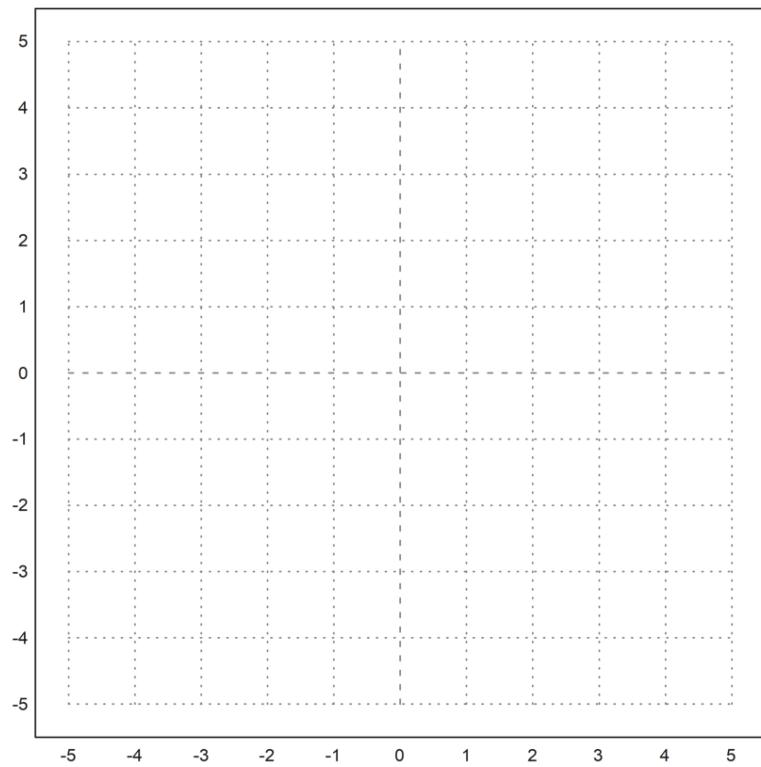
1. Diberikan dua garis yang melewati titik koordinat sebagai berikut:

garis AB : titik A(2,3) dan titik B(0,1)

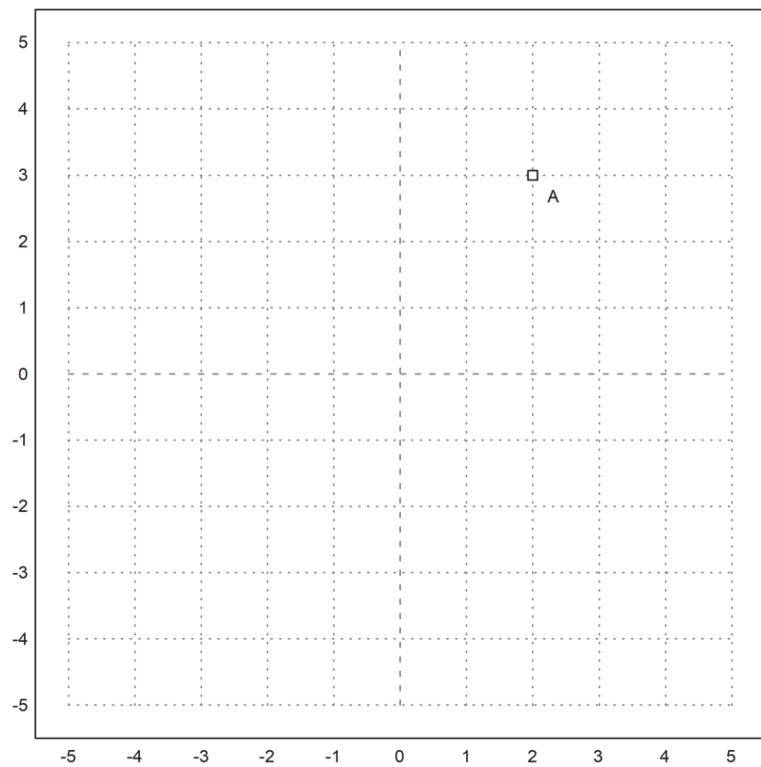
garis CD : titik C(0,3) dan titik D(3,0)

tentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut!

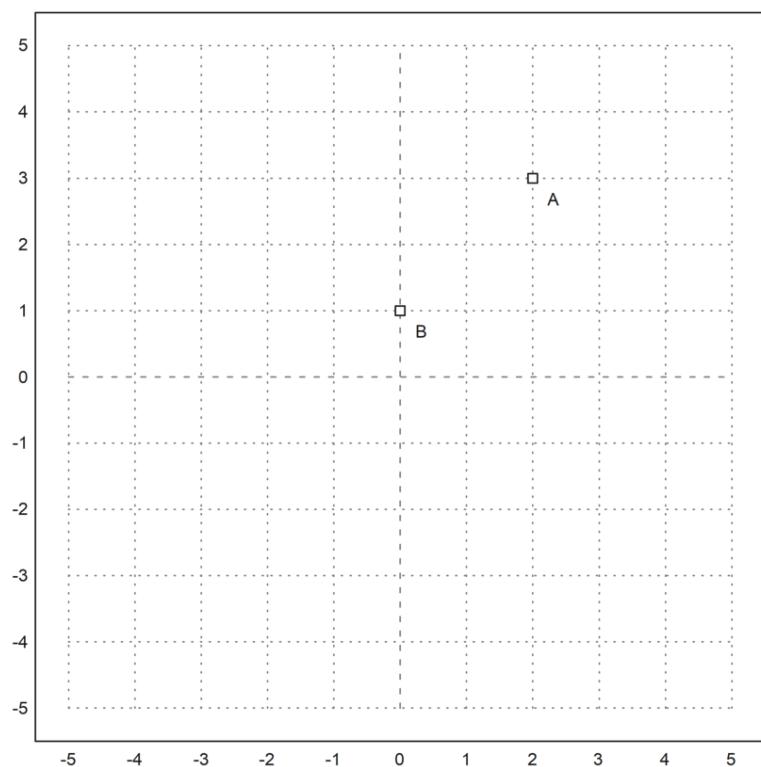
```
>setPlotRange(5):
```



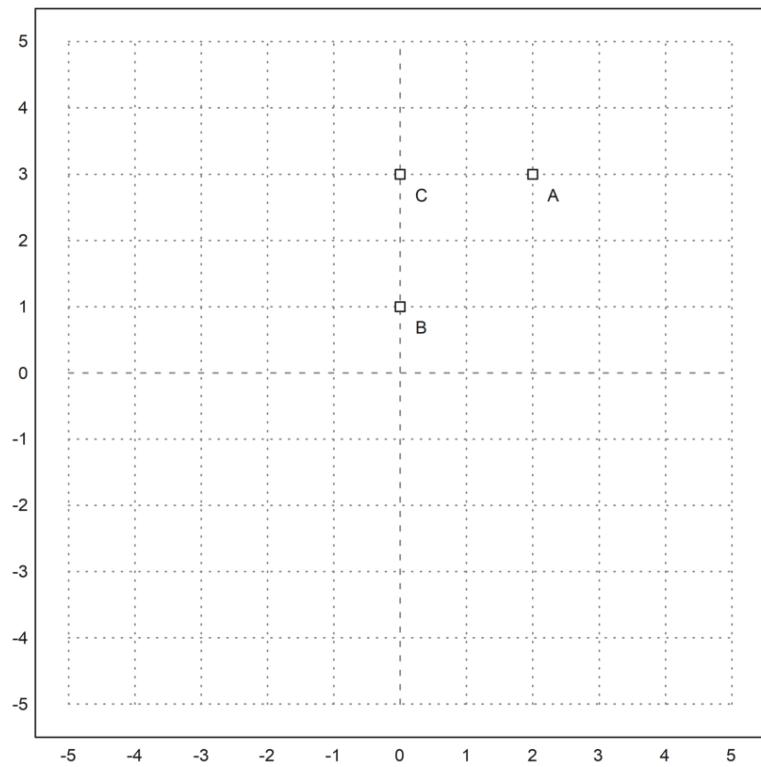
```
>A=[2, 3]; plotPoint(A, "A");
```



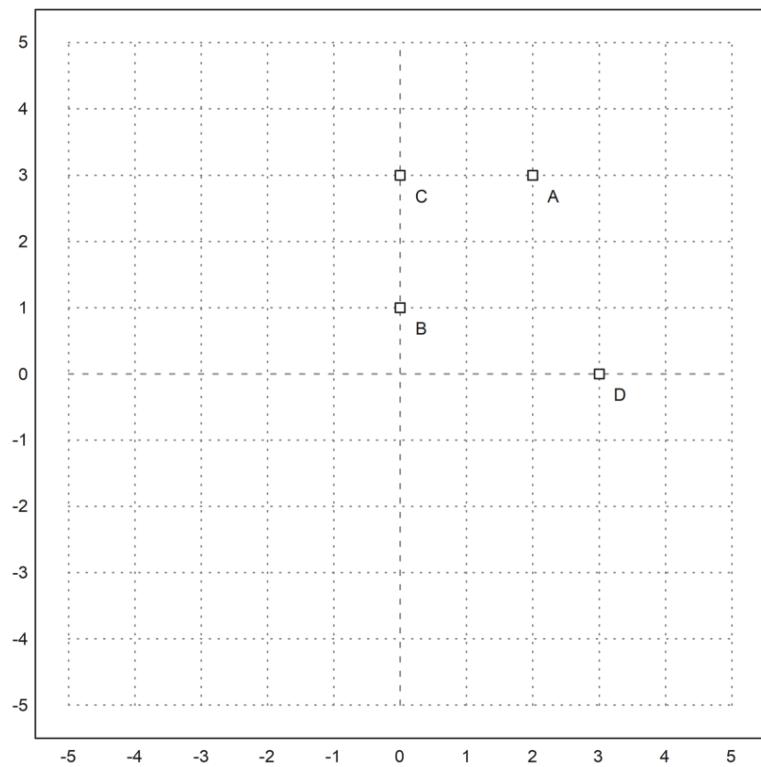
```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B"):
```



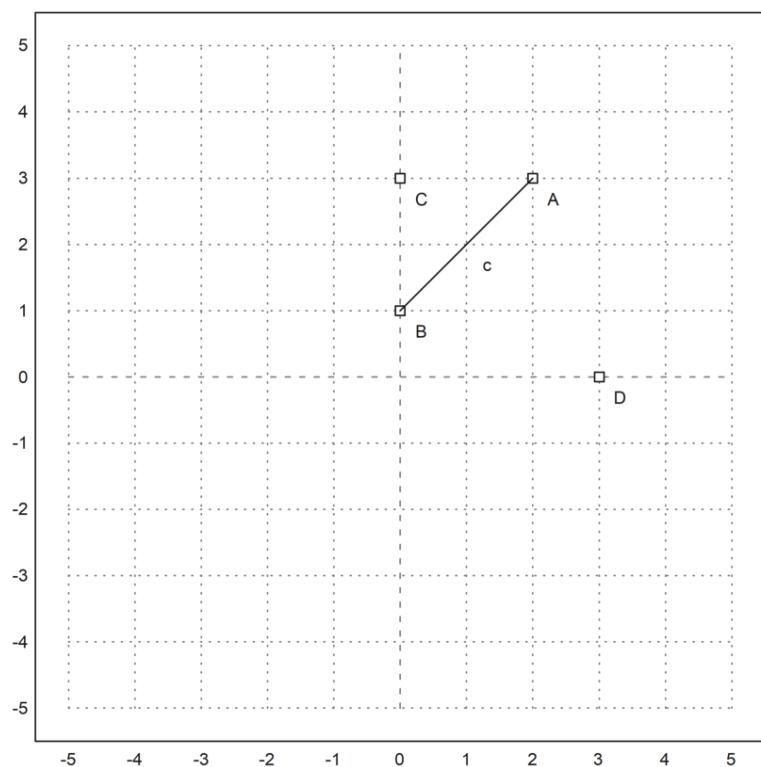
```
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C"):
```



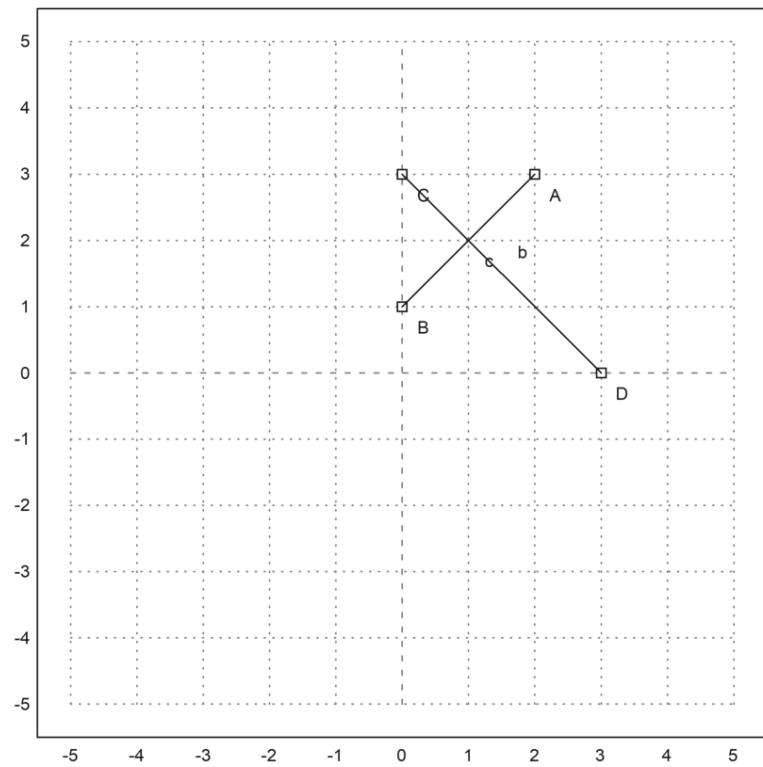
```
>D=[3,0]; plotPoint(D,"D");
```



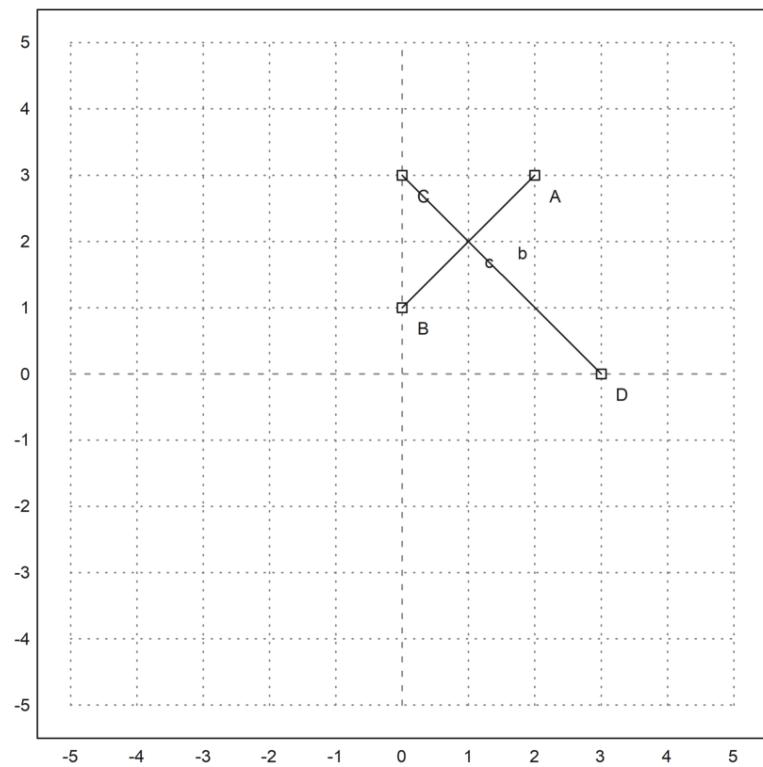
```
>plotSegment (A, B, "c") : // c=AB
```



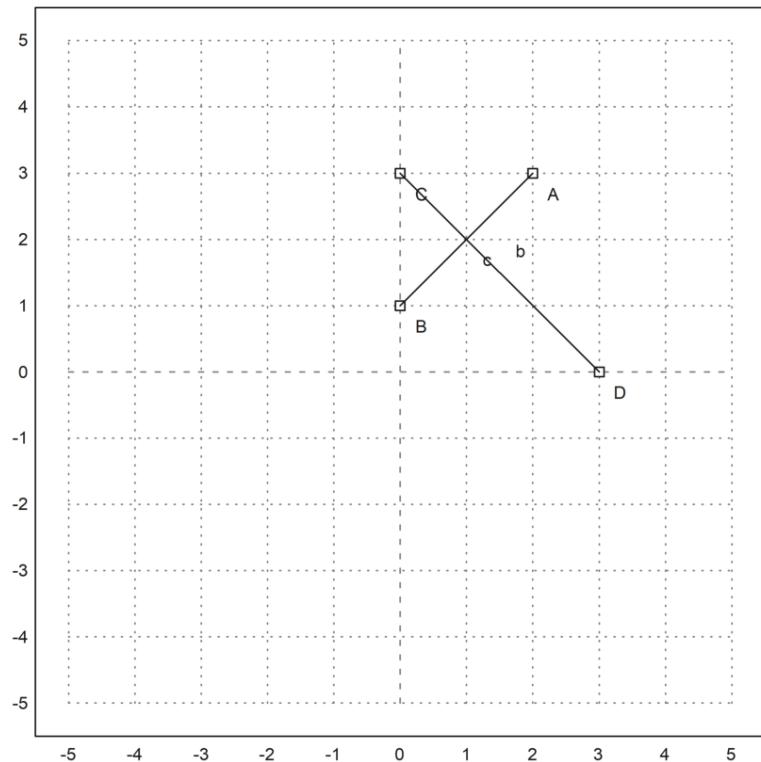
```
>plotSegment (C, D, "b") : // b=CD
```



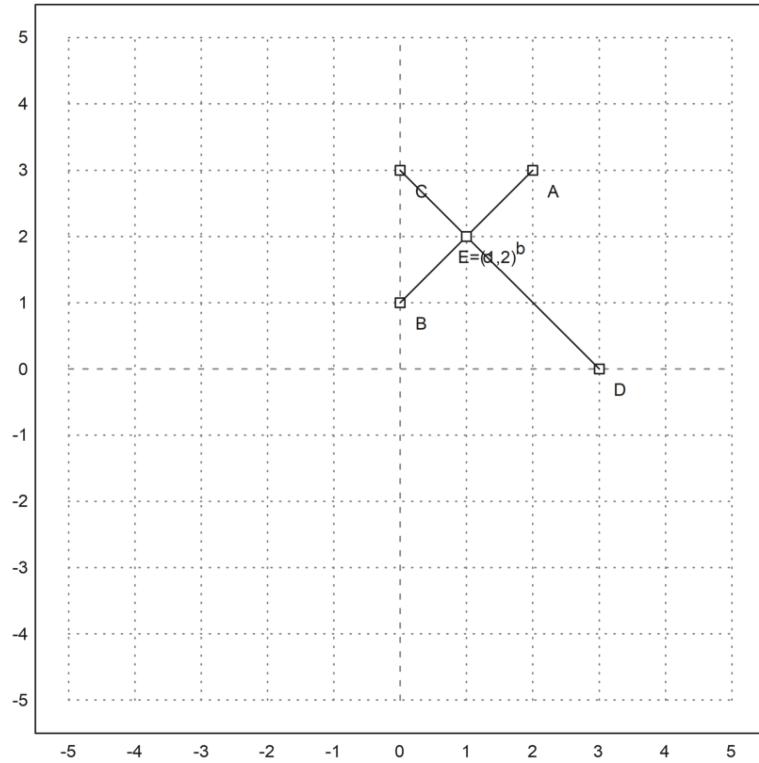
```
>lineThrough(A,B):
```



```
>lineThrough(C,D) :
```



```
>E=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D)) ;  
>plotPoint(E,value=1) :
```



Menentukan titik potong garis dan lingkaran

Titik potong antara garis dan lingkaran adalah titik di mana sebuah garis lurus memotong lingkaran. Untuk memahami konsep ini secara lengkap, perlu dipahami beberapa hal terkait dengan garis dan lingkaran.

Garis: Garis adalah himpunan tak terbatas titik yang terletak sepanjang jalur yang sama, dan garis ini dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk persamaan matematis, seperti persamaan linier. Sebuah garis memiliki kemiringan (gradien) dan titik potong sumbu y (intersep) yang memungkinkan kita untuk menggambarkannya atau menganalisisnya dalam sistem koordinat.

Lingkaran: Lingkaran adalah himpunan semua titik yang berjarak sama dari satu titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran. Jarak ini disebut sebagai jari-jari lingkaran. Persamaan matematis dari lingkaran adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

di mana (a, b) adalah koordinat pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran.

Ketika kita berbicara tentang titik potong antara garis dan lingkaran, ada beberapa kemungkinan:

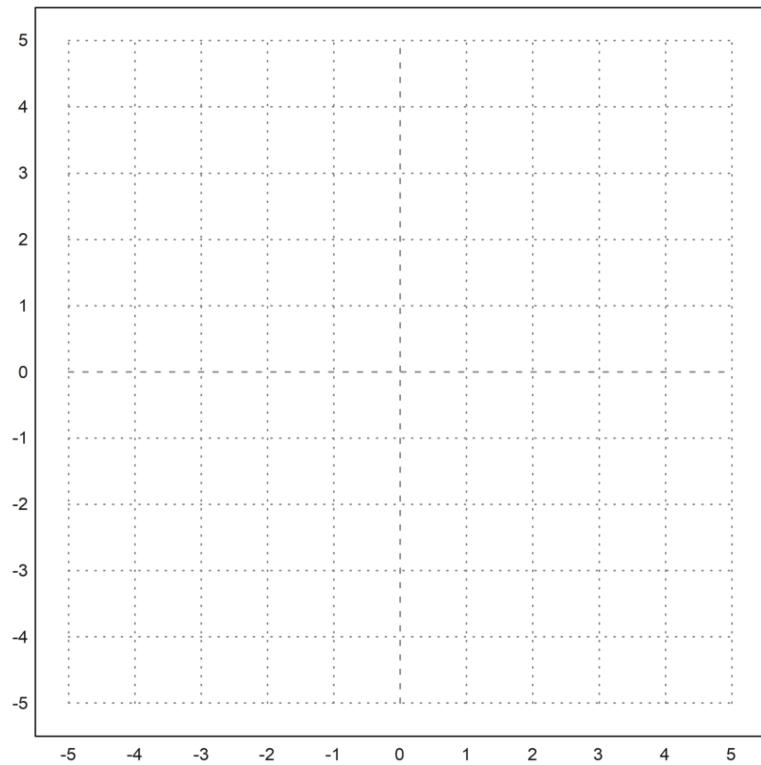
Tidak Ada Titik Potong: Garis tersebut mungkin tidak memotong lingkaran sama sekali jika jarak antara garis dan pusat lingkaran lebih besar dari jari-jari lingkaran.

Satu Titik Potong: Garis mungkin hanya memotong lingkaran di satu titik jika garis tersebut menyentuh lingkaran secara tepat pada satu titik, dengan jarak antara garis dan pusat lingkaran sama dengan jari-jari lingkaran.

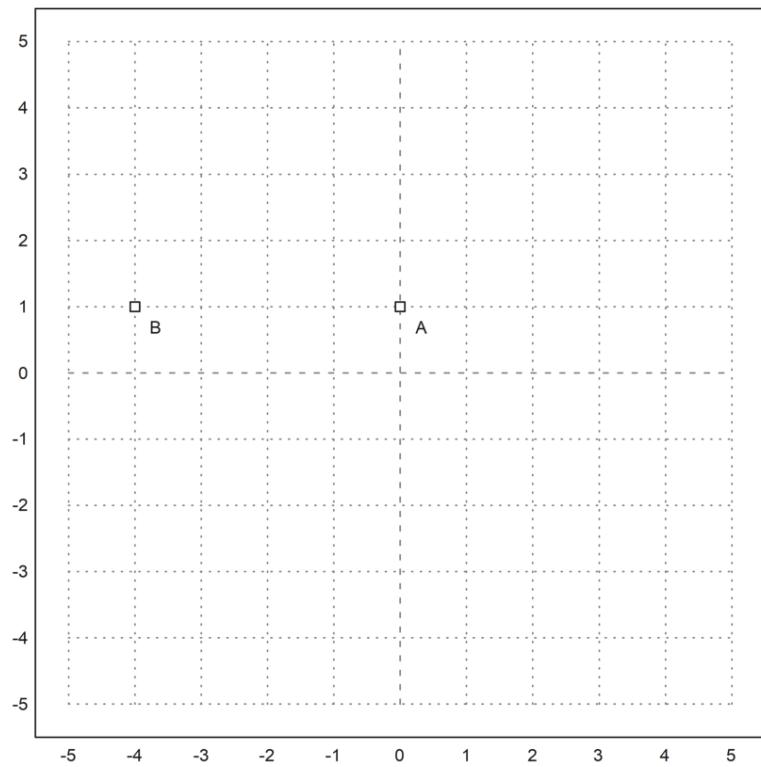
Dua Titik Potong: Garis bisa memotong lingkaran di dua titik berbeda jika garis melintasi lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, kita perlu menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan garis (yang bisa berupa persamaan linier) dan persamaan lingkaran. Ini bisa menghasilkan titik potong yang merupakan koordinat di mana garis memotong lingkaran. Dalam kasus lingkaran, ini sering digunakan dalam masalah geometri dan trigonometri untuk menemukan titik potong dan berbagai sifat lainnya dari bangun geometri.

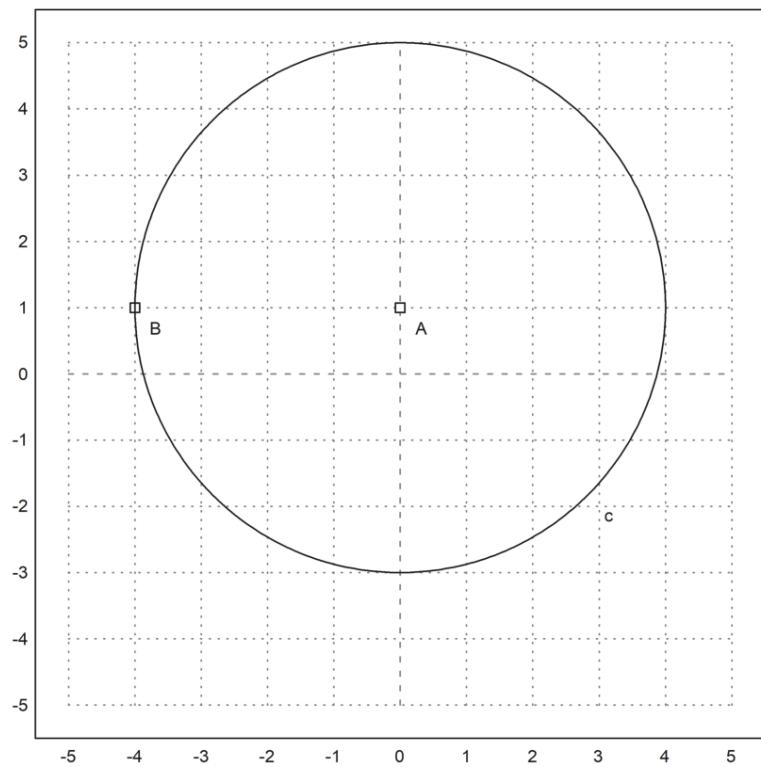
```
>setPlotRange(5):
```



```
>A=[0,1]; plotPoint(A,"A"); B=[-4,1]; plotPoint(B,"B");
```



```
>c=circleWithCenter(A,distance(A,B)); plotCircle(c);
```



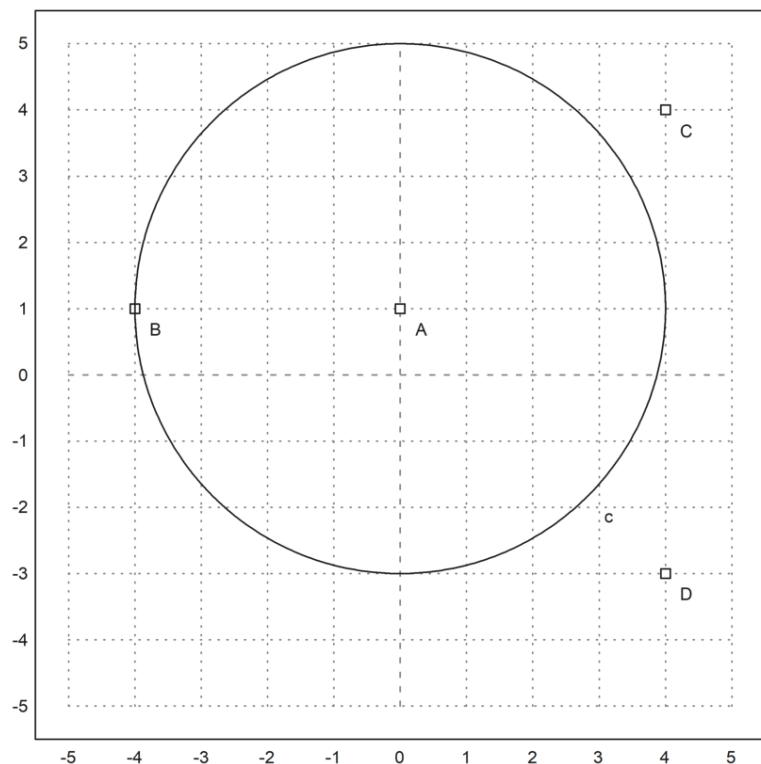
```
>A
```

```
[ 0, 1 ]
```

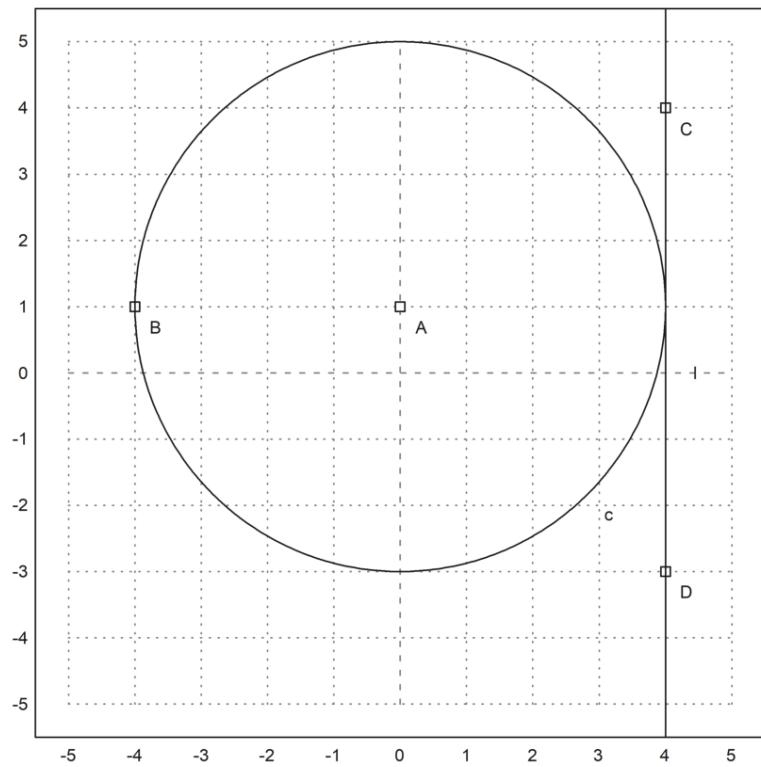
```
>distance(A,B)
```

```
4
```

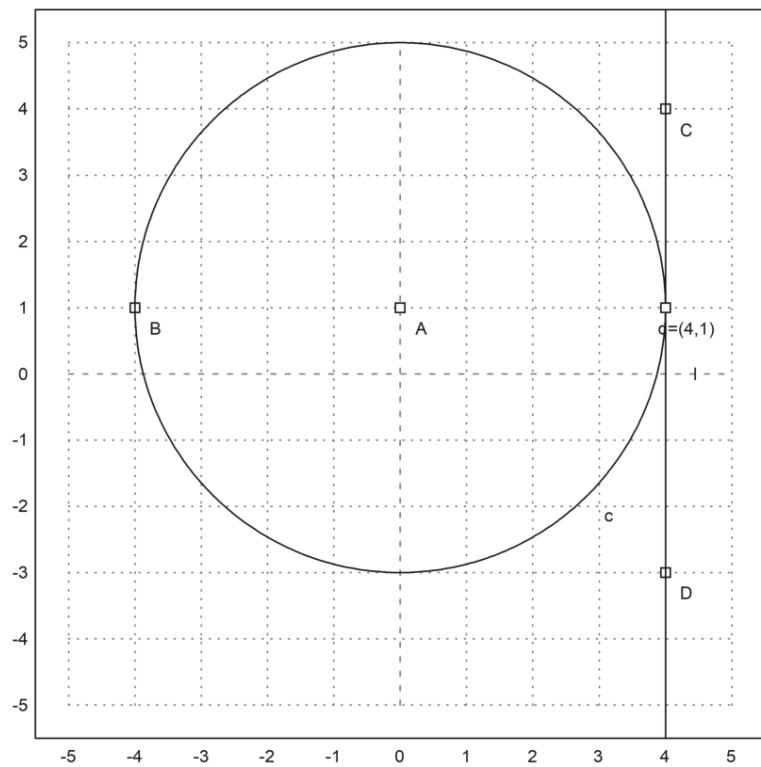
```
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C"); D=[4,-3]; plotPoint(D,"D"):
```



```
>l=lineThrough(C,D); plotLine(l,"l"):
```



```
>q=lineCircleIntersections(l,c); plotPoint(q, value=1):
```



>C&=[4 , 4]

[4 , 4]

>D&=[4 , -3]

[4 , -3]

Pembuktian dengan matematika:

Diketahui:

$$r = 4, A(0, 1),$$

$$C(4, 4), D(4, -3)$$

Penyelesaian:

1. Cari persamaan lingkarannya

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$$

2. Cari persamaan garis

$$\frac{y - 4}{(-3) - 4} = \frac{x - 4}{4 - 4}$$

$$\frac{y - 4}{-7} = \frac{x - 4}{0}$$

$$-7x + 28$$

$$x = 4$$

3. Subsitusi x=4 ke persamaan lingkaran

$$(4)^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$16 + y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(y - 1)(y - 1) = 0$$

$$y = 1$$

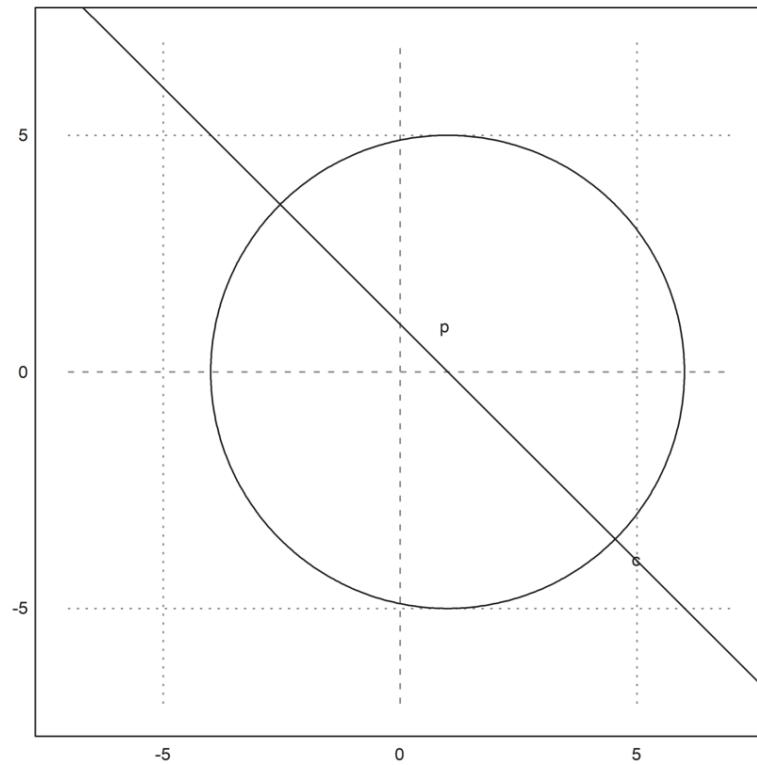
Jadi, titik koordinat perpotongan garis dengan lingkarannya (4,1)

Terbukti

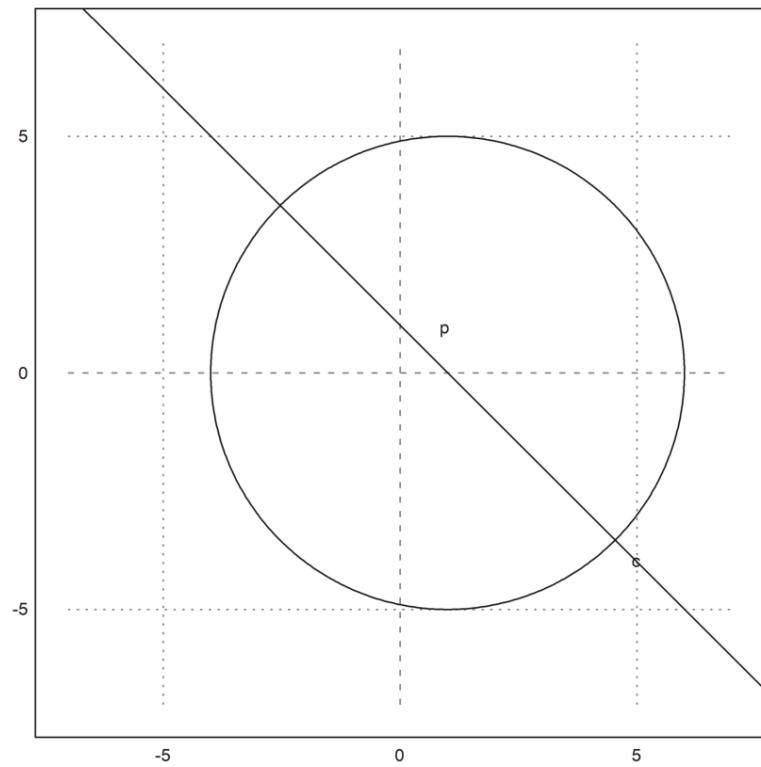
Latihan

1. Diberikan lingkaran berjari-jari 5 dengan titik pusat di J(1,0). Diberikan dua titik M dan N dengan koordinat berturut-turut (-1,2) dan (3,-2). Apabila dibuat garis yang melalui titik M dan N serta memotong lingkaran, tentukan koordinat titik potong tersebut!

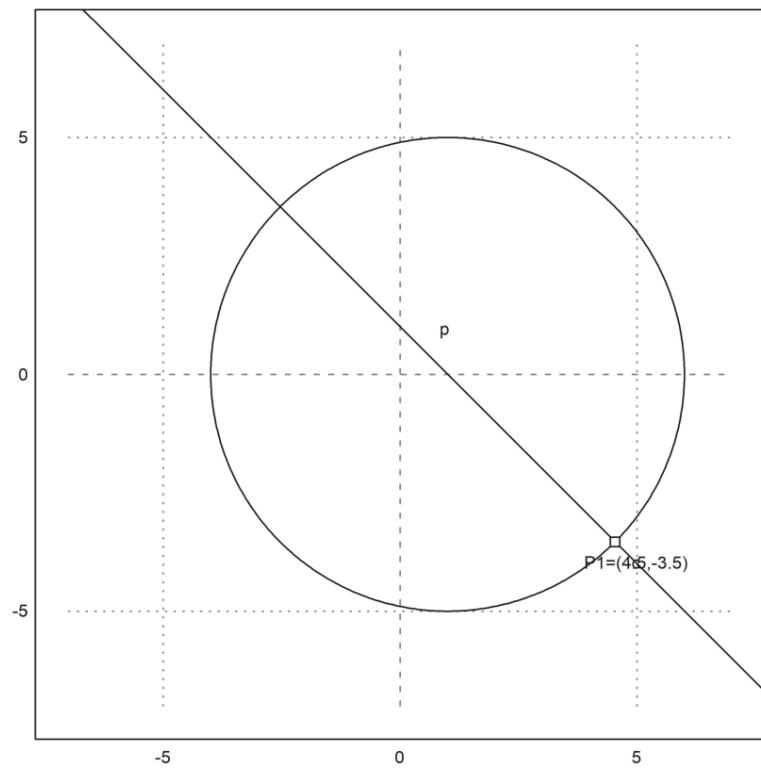
```
>J &:= [1,0]; plotPoint(J,"J"); c=circleWithCenter(J,5);
>M &:= [-1,2]; N &:= [3,-2]; l=lineThrough(M,N);
>setPlotRange(7); plotCircle(c); plotLine(l):
```



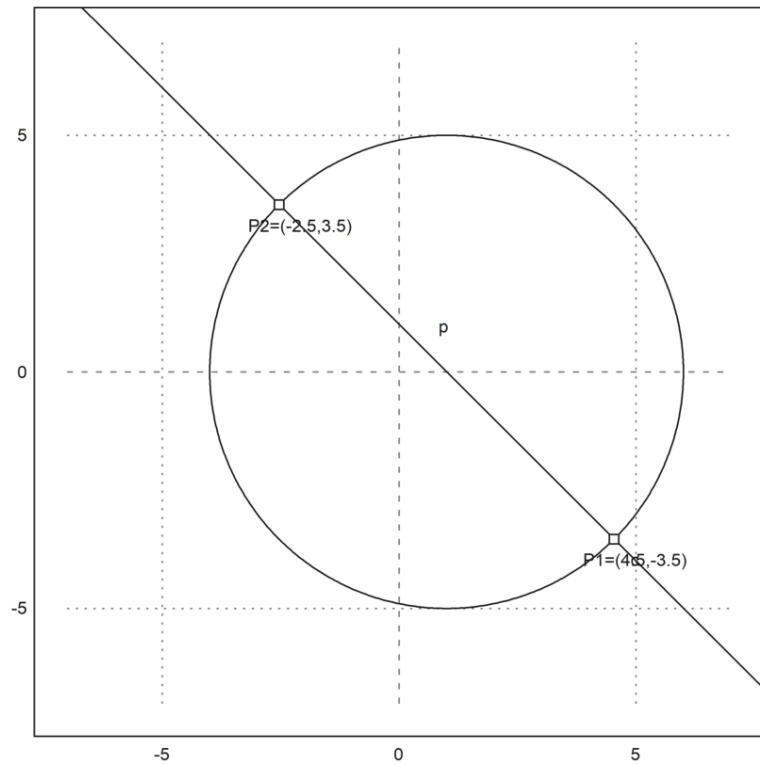
```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c):
```



```
>P1; P2;
>plotPoint(P1, value=1):
```



```
>plotPoint(P2, value=1):
```



Menentukan titik potong dua lingkaran

Titik potong dua lingkaran adalah titik atau titik-titik di mana dua lingkaran berpotongan, yang berarti bahwa titik-titik tersebut terletak pada kedua lingkaran sekaligus. Titik potong ini dapat ditemukan jika dua lingkaran saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan satu sama lain.

Dalam kasus titik potong dua lingkaran, ada beberapa skenario yang mungkin terjadi:

Dua Lingkaran Saling Bersilangan: Ini berarti bahwa dua lingkaran sepenuhnya tumpang tindih satu sama lain, dan titik potongnya akan ada di setiap titik tumpang tindih.

Dua Lingkaran Saling Menyilangi: Dalam situasi ini, dua lingkaran saling melintasi satu sama lain, tetapi tidak sepenuhnya tumpang tindih. Oleh karena itu, akan ada dua titik potong yang berbeda di mana kedua lingkaran berpotongan.

Dua Lingkaran Bersinggungan: Jika dua lingkaran bersinggungan, maka mereka hanya memiliki satu titik potong yang merupakan titik sentuh antara kedua lingkaran. Jika lingkaran tersebut bersinggungan di dalam, maka mereka akan memiliki satu titik potong di dalam satu lingkaran, dan jika bersinggungan di luar, maka titik potongnya berada di luar kedua lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara dua lingkaran, kita dapat menggunakan prinsip geometri dan aljabar. Secara matematis, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan lingkaran pertama dan lingkaran kedua. Persamaan umum lingkaran adalah

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

di mana (h, k) adalah pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggabungkan persamaan lingkaran pertama dan kedua, kita dapat menemukan titik potongnya.

Dalam beberapa kasus, bisa tidak ada titik potong jika kedua lingkaran berada pada posisi yang tidak saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan. Pemahaman tentang titik potong dua lingkaran penting dalam berbagai aplikasi matematika dan ilmu pengetahuan, terutama dalam geometri dan rekayasa.

CONTOH:

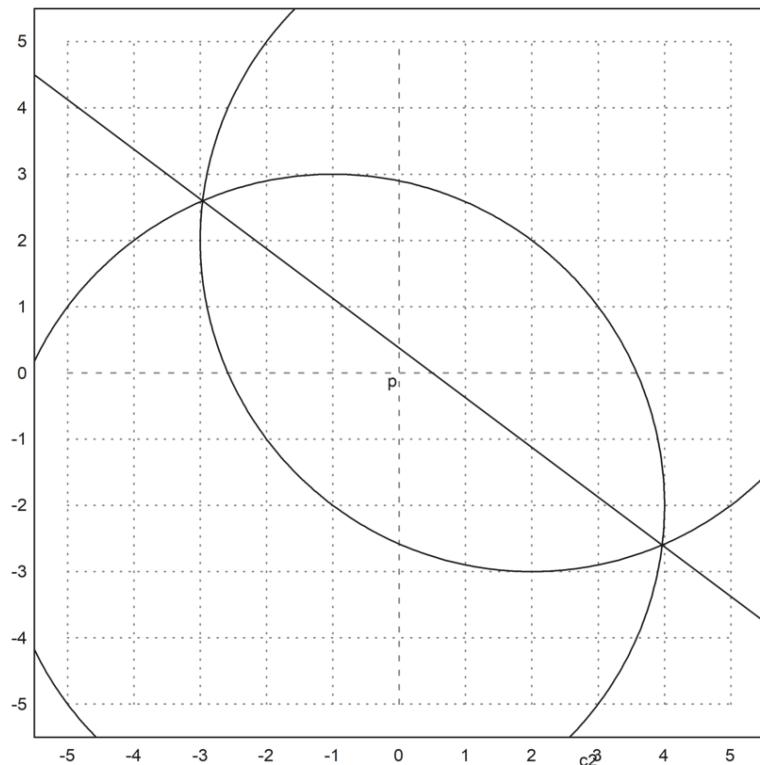
Diberikan 2 lingkaran berjari-jari sepanjang ruas garis AB dengan titik A(2,2) merupakan titik pusat lingkaran pertama dan titik B (-1,-2) merupakan titik pusat lingkaran kedua. kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. tentukan koordinat p1 dan p2!

langkah pertama, kita membuat 2 lingkaran tersebut

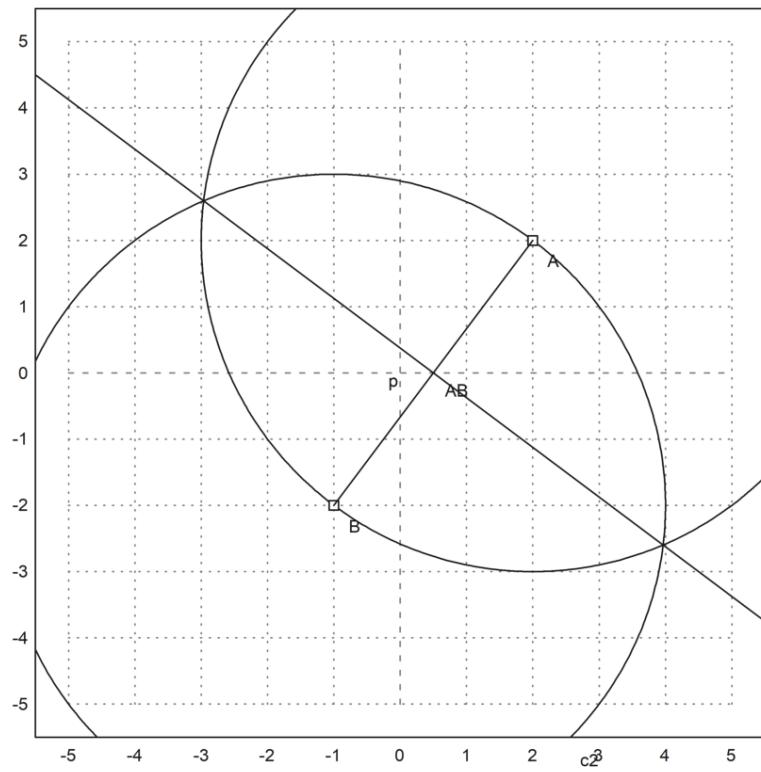
```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //lingkaran 1 dengan titik pusat di A dan berjari-jari
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B)); // lingkaran 2 dengan titik pusat di B dan berjari-
```

Berikutnya kita menggambar garis yang melalui perpotongan dua lingkaran tersebut

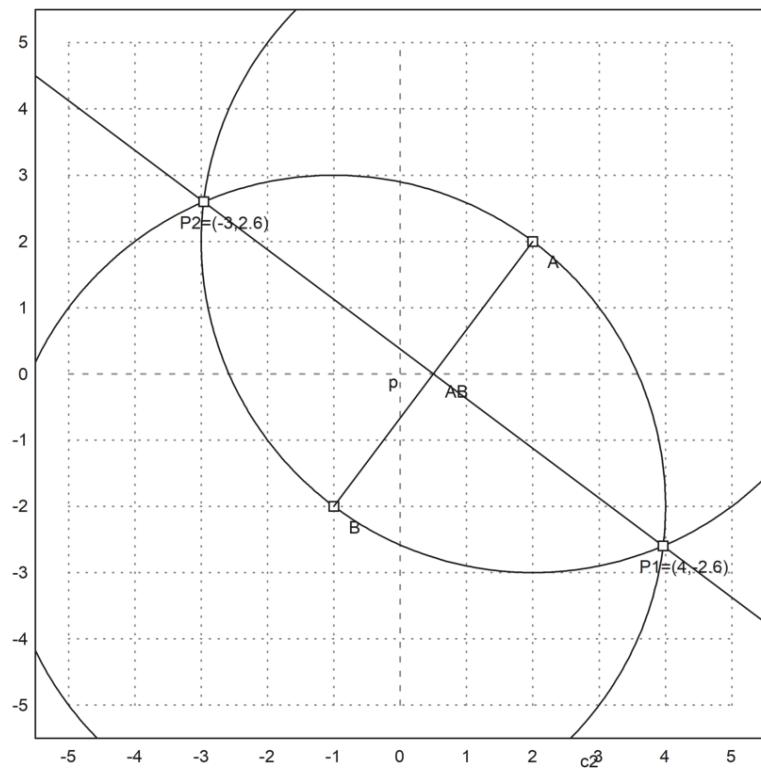
```
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotLine(l):
```



```
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



```
>plotPoint(P1,value=1); plotPoint(P2,value=1): // koordinat titik potong 2 lingkaran
```



```
>distance(A,B)
```

5

Pembuktian dengan rumus matematika:

1. Cari persamaan lingkaran 1

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

2. Cari persamaan lingkaran 2

(-1,-2)

$$(x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 = 5^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$$

3. Mengurangkan persamaan lingkaran 1 dengan lingkaran 2

$$(x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0) - (x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0)$$

$$-6x - 8y + 3 = 0$$

$$x = -\frac{8}{6}y + \frac{1}{2}$$

4. Subsitusi x ke persamaan lingkaran 2

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

$$\left(-\frac{8}{6}y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2\left(-\frac{8}{6}y + \frac{1}{2}\right) + 4y - 20 = 0$$

$$\frac{64}{36}y^2 - \frac{16}{12}y + \frac{1}{4} + y^2 + \frac{8}{3}y - 1 + 4y - 20 = 0$$

$$64y^2 - 48y + 9 + 36y^2 + 96y - 36 + 144y - 20 = 0$$

$$100y^2 + 192y - 47 = 0$$

dengan menggunakan rumus ABC:

$$\frac{b_{-}^{+}\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{192_{-}^{+}\sqrt{192^2 - 4(100)(-47)}}{2(100)}$$

$$\frac{192_{-}^{+}\sqrt{36864 + 18800}}{200}$$

$$\frac{192_{-}^{+}\sqrt{55664}}{200}$$

$$\frac{192_{-}^{+}235,9}{200}$$

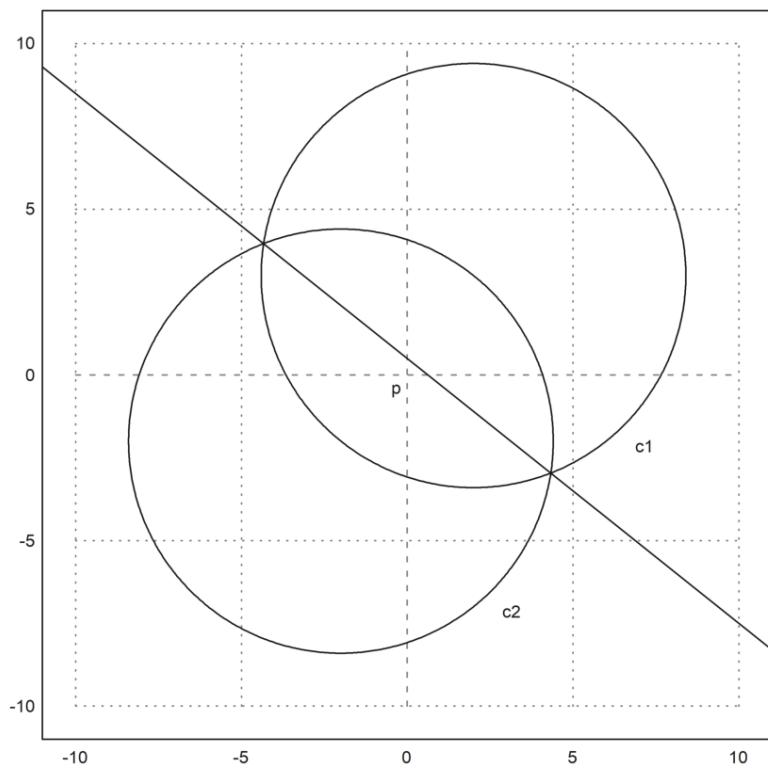
$$\left[y1 = \frac{192 + 235,9}{200}, y2 = \frac{192 - 235,9}{200} \right]$$

$$\left[y1 = \frac{427,9}{200}, y2 = \frac{-43,9}{200} \right]$$

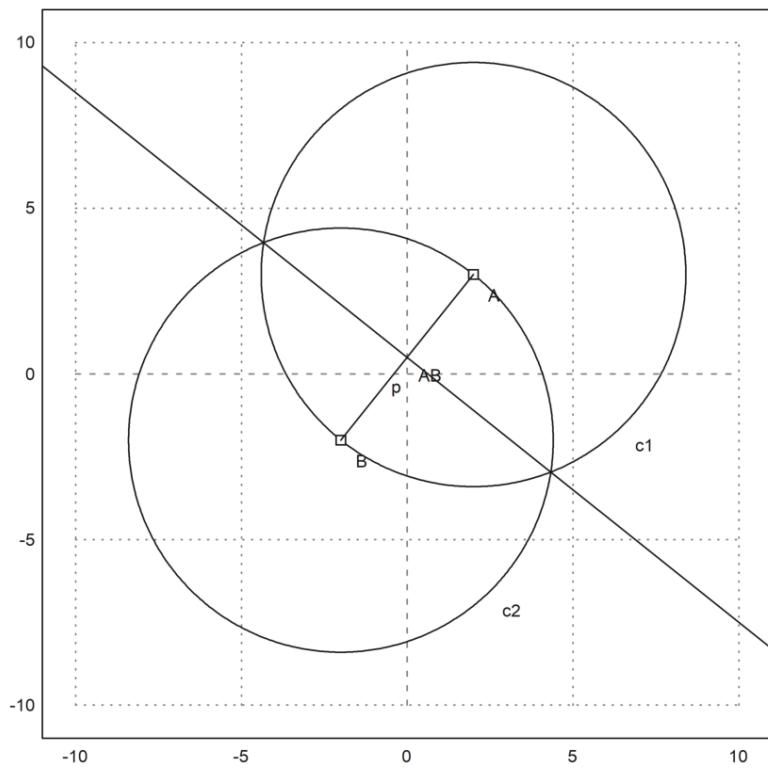
Latihan

1. Diberikan 2 lingkaran berjari jari sepanjang ruas garis AB dengan titik A(2,3) dan titik B (-2,-2).kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. tentukan koordinat p1 dan p2!

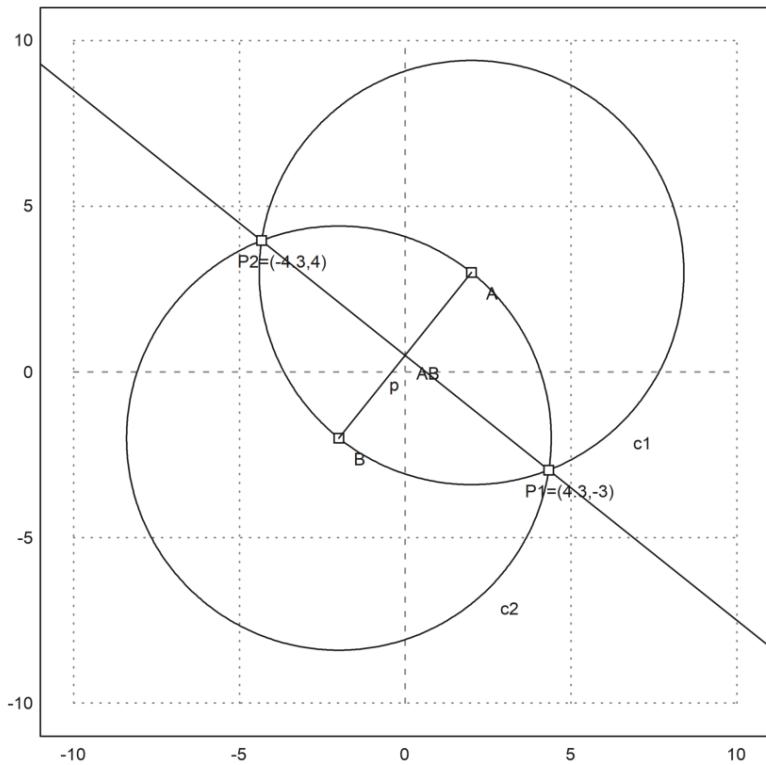
```
>A=[2,3]; B=[-2,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //lingkaran 1 dengan titik pusat di A dan berjari-jari sepanjang AB
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B)); // lingkaran 2 dengan titik pusat di B dan berjari-jari sepanjang AB
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(10); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotLine(l);
```



```
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



```
>plotPoint(P1,value=1); plotPoint(P2,value=1); // koordinat titik potong 2 lingkaran
```



MATERI 5

- a. Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik
- b. Menentukan persamaan Garis Sumbu suatu ruas garis
- c. Menentukan persamaan Garis Bagi sudut
- d. Menentukan persamaan Garis Berat
- e. Menentukan persamaan Garis Tinggi

Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik

Dengan konsep matematika, persamaan garis yang diketahui dua titiknya misalnya titik

$$P_1(x_1, y_1) \text{ dan } P_2(x_2, y_2).$$

Akan dicari persamaan garis l yang melalui dua titik tersebut. Ambil sebarang titik $P(x, y)$ pada l. Maka persamaan garis l dapat ditentukan dari

$$mPP_1 = mP_1P_2$$

yaitu:

$$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

atau

$$\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Dengan EMT persamaan garis yang melalui dua titik dapat dicari dengan cara mendefinisikan kedua titik koordinat kemudian menggunakan fungsi lineThrough(titik1, titik2), lalu menggunakan fungsi perintah getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y).

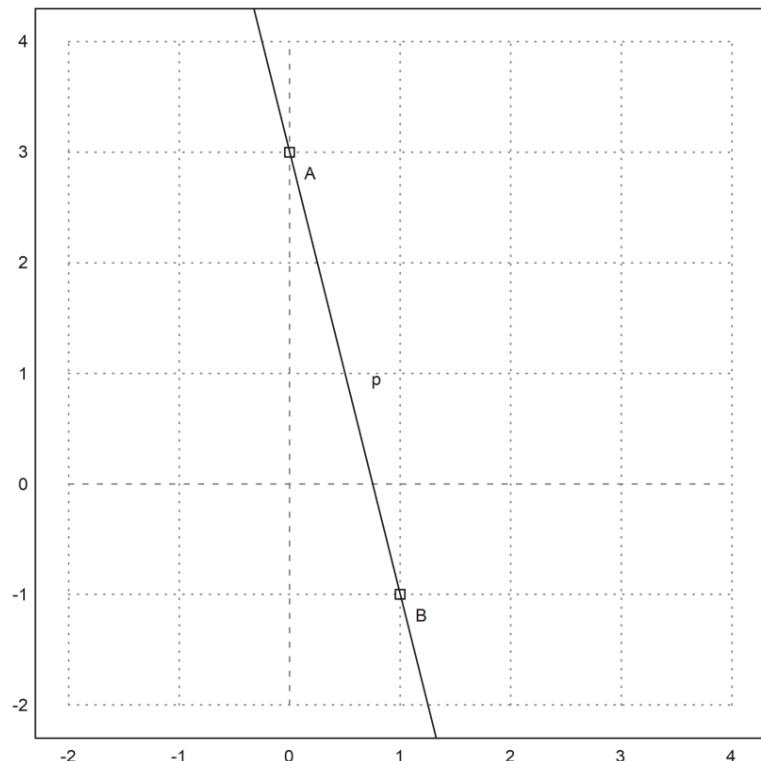
Contoh soal :

1. tentukan persamaan garis yang melalui titik A(0,3) dan B(1,-1)

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-2,4,-2,4); // mendefinisikan bidang koordinat baru  
>A=[0,3]; plotPoint(A,"A");  
>B=[1,-1]; plotPoint(B,"B");  
>AB=lineThrough(A,B); plotLine(AB);
```



Mencari persamaan garis AB

```
>A=[0,3]; B=[1,-1];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

$$y + 4x = 3$$

```
>$solve(%,y)|expand
```

$$[y = 3 - 4x]$$

Untuk membuktikan hasil tersebut kita dapat menghitung dengan rumus:

$$\frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

maka didapatkan

$$\frac{(y - 3)}{(-1 - 3)} = \frac{(x - 0)}{(1 - 0)}$$

$$\frac{(y - 3)}{(-4)} = \frac{(x)}{(1)}$$

$$(y - 3)(1) = (-4)(x)$$

$$y - 3 = -4x$$

$$4x + y = 3$$

$$y + 4x = 3$$

jadi terbukti bahwa persamaan garisnya

$$y + 4x = 3$$

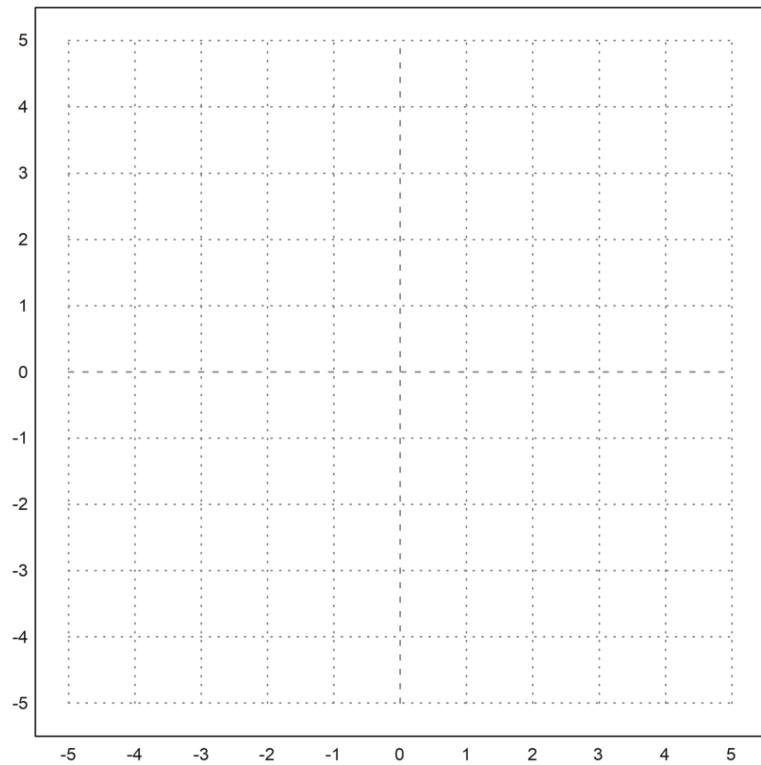
Latihan A

1. Tentukan persamaan garis yang melalui P[-3,2] dan Q[4,1]!

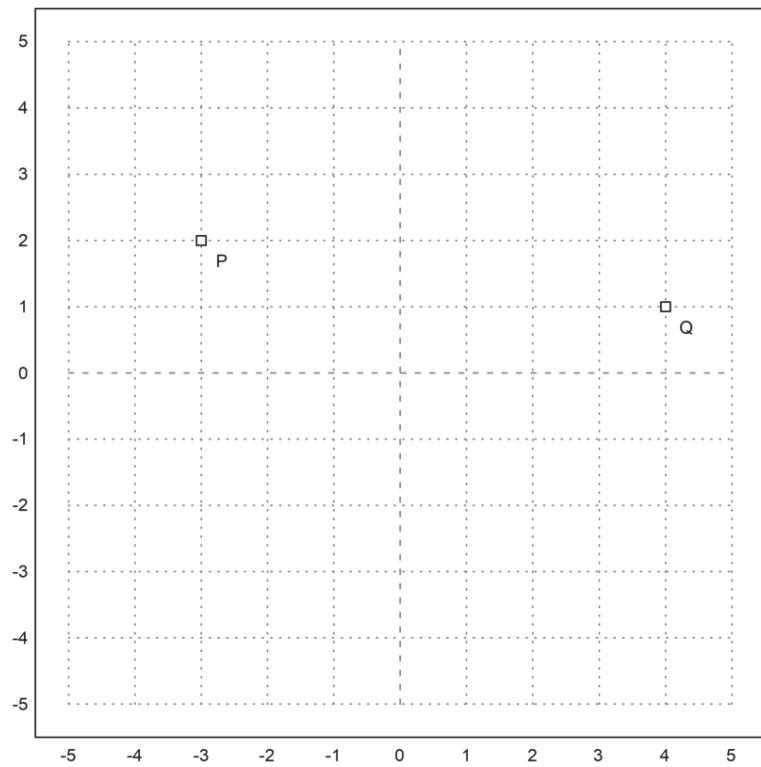
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

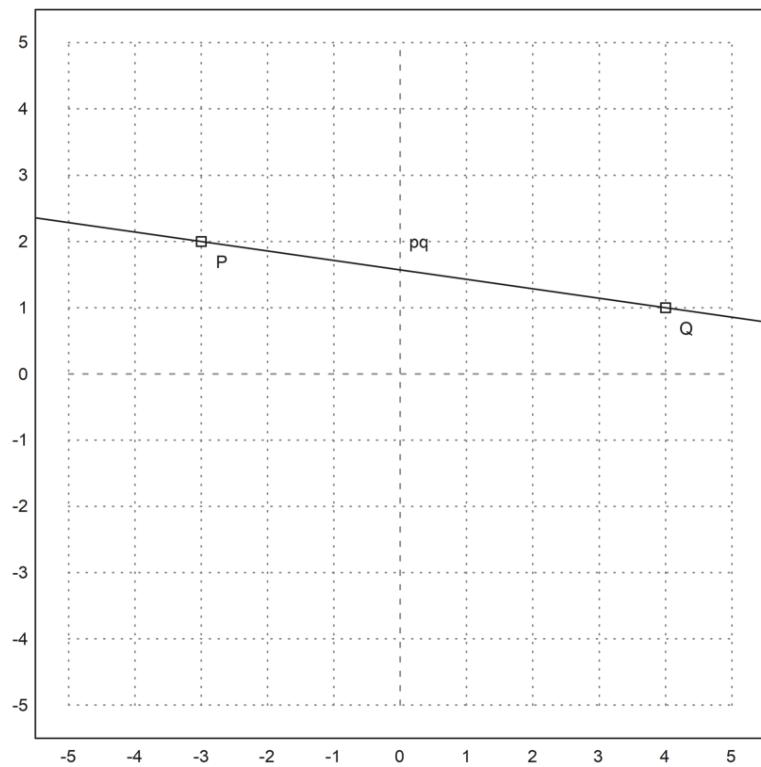
```
>setPlotRange(5):
```



```
>P=[-3,2]; Q=[4,1]; plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q");
```



```
>plotLine(lineThrough(P,Q), "pq") :
```



```
>P&=[-3,2]
```

[- 3, 2]

```
>Q&=[4,1]
```

[4, 1]

```
>$getLineEquation(lineThrough(P,Q),x,y)
```

$$7y + x = 11$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{11}{7} - \frac{x}{7} \right]$$

2. Tentukan persamaan garis yang melalui

$$A(5, 1) \text{ dan } B(-2, -7)$$

```
>A&=[5,1]
```

[5, 1]

```
>B&=[-2,-7]
```

[- 2, - 7]

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

$$8x - 7y = 33$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{8x}{7} - \frac{33}{7} \right]$$

3. Tentukan persamaan garis RS dan TU dengan

$$R(-5, 6) S(6, 8) T(2, 0) U(8, 9)$$

Apakah kedua garis tersebut sejajar?

```
>R&=[-5, 6]
```

$$[-5, 6]$$

```
>S&=[6, 8]
```

$$[6, 8]$$

```
>T&=[2, 0]
```

$$[2, 0]$$

```
>U&=[8, 9]
```

$$[8, 9]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(R, S), x, y)
```

$$11y - 2x = 76$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{2x}{11} + \frac{76}{11} \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(S,T),x,y)
```

$$8x - 4y = 16$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$[y = 2x - 4]$$

karena

$$m(RS) = \frac{2x}{11}$$

$$m(TU) = 2x$$

maka, garis RS dan garis TU tidak sejajar.

Jadi, persamaan garis RS:

$$y = \frac{2x}{11} + \frac{76}{11}$$

persamaan garis TU:

$$y = 2x - 4$$

dan garis RS dan garis TU tidak sejajar. **Menentukan persamaan Garis sumbu suatu ruas garis**

Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.

Dengan menggunakan EMT kita dapat mencari persamaan garis sumbu suatu garis dengan cara mendefinisikan titik koordinat, menghubungkan titik sehingga membentuk segitiga, menggunakan middlePerpendicular untuk mencari titik tengah lalu mendefinisikan titik tengah tersebut menjadi garis sumbu kemudian mencari persamaan garis sumbu dengan perintah \$getLineEquation(garis sumbu,x,y).

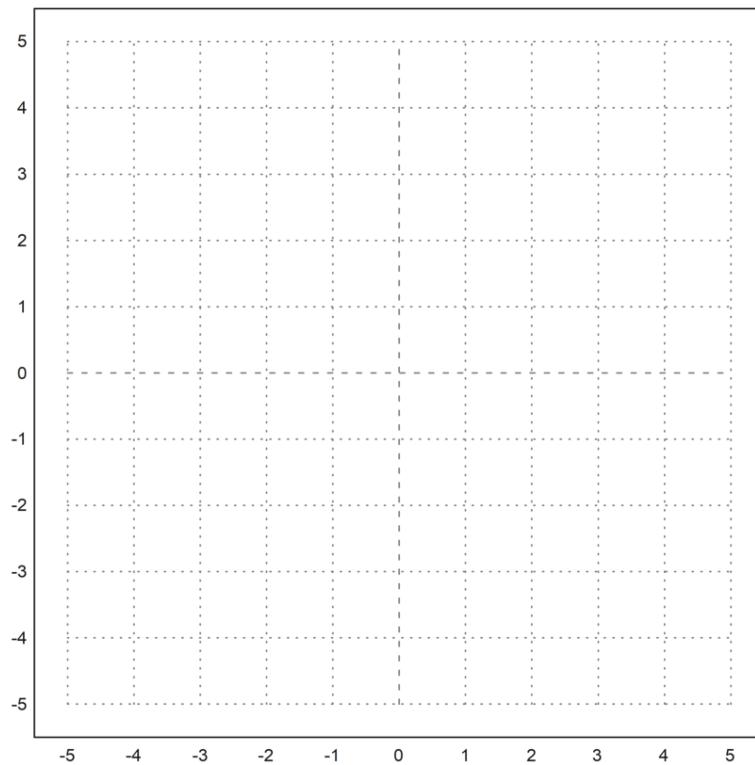
Dengan rumus/konsep matematika, kita dapat memperoleh persamaan Garis sumbu dengan cara mencari persamaan dan gradien garis yang berlawanan, mencari koordinat titik potong, lalu mencari persamaan garis sumbu dengan gradien dan titik koordinatnya.

Contoh terdapat

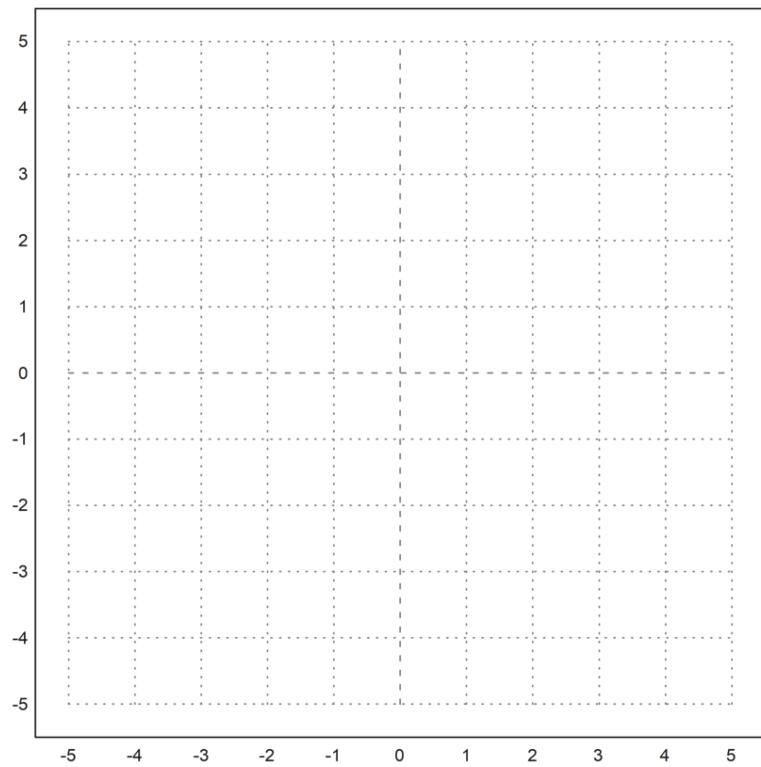
$\triangle ABC$, dengan $A(2, 5)$; $B(-5, -4)$; dan $C(4, -4)$,

Tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC!

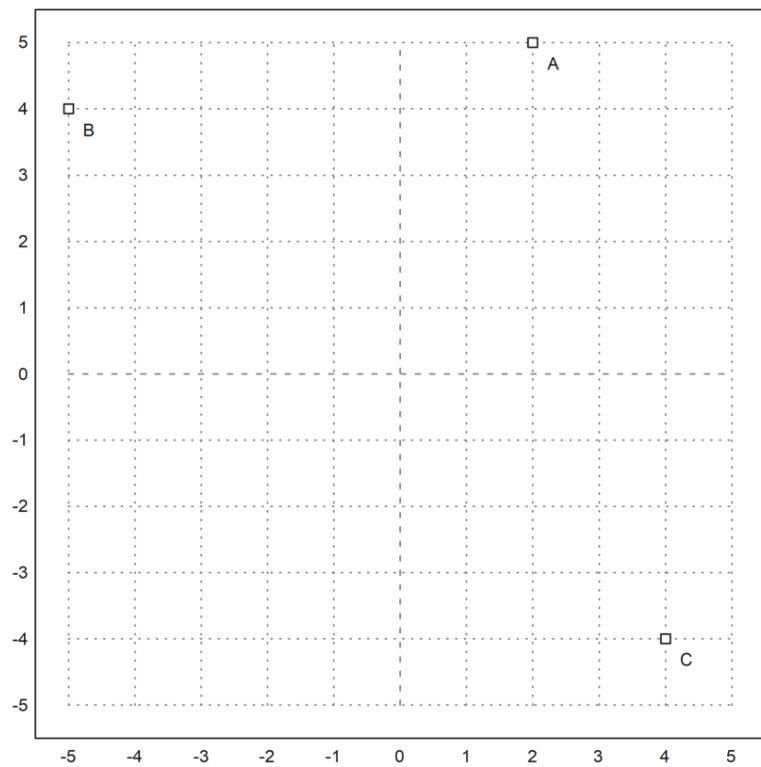
```
>setPlotRange(5):
```



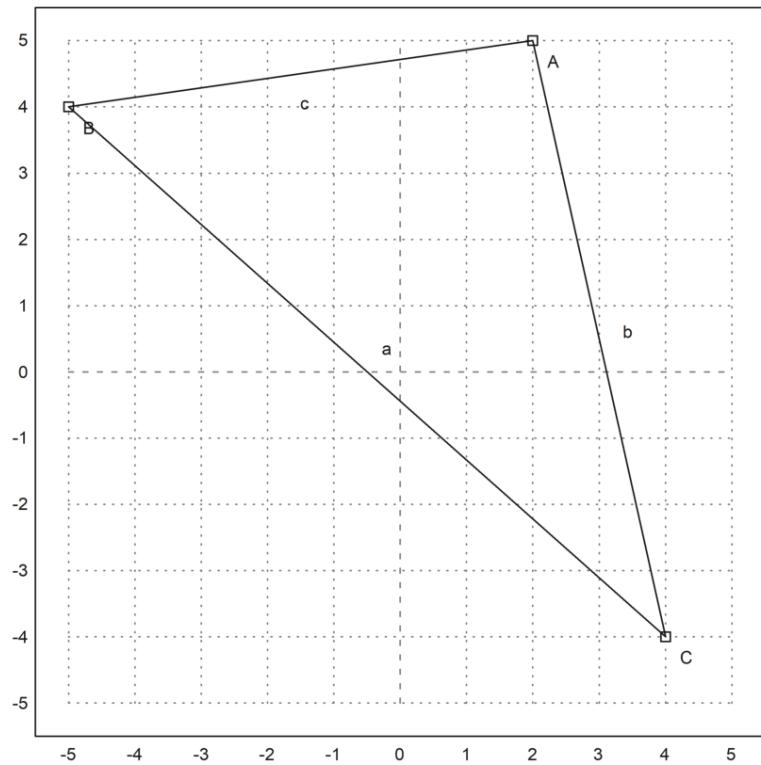
```
>A=[2,5]; B=[-5,4]; C=[4,-4]:
```



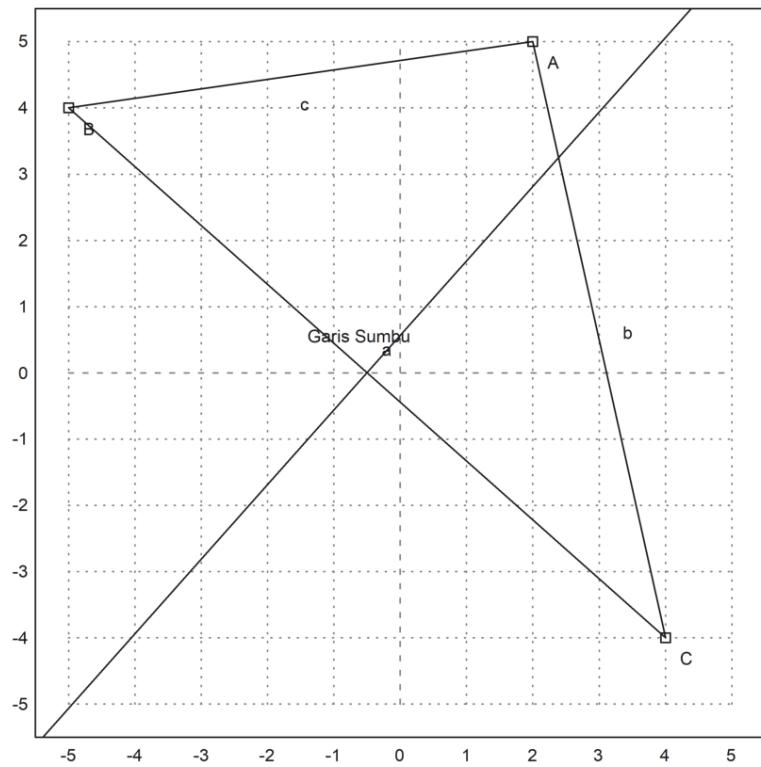
```
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C");
```



```
>plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(B,C,"a"); plotSegment(A,C,"b"):
```



```
>s=middlePerpendicular(B,C); plotLine(s,"Garis Sumbu"):
```



```
>B&=[-5, 4]
```

$$[-5, 4]$$

```
>C&=[4, -4]
```

$$[4, -4]$$

```
>s&=middlePerpendicular(B,C)
```

$$\begin{matrix} 9 \\ [-9, 8, -] \\ 2 \end{matrix}$$

```
>$getLineEquation(s,x,y)
```

$$8y - 9x = \frac{9}{2}$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{9x}{8} + \frac{9}{16} \right]$$

Pembuktian dengan menggunakan rumus matematika:

1. Mencari persamaan garis BC

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{(-4) - 4} = \frac{x - (-5)}{4 - (-5)}$$

$$\frac{y - 4}{-8} = \frac{x + 5}{9}$$

$$9y - 36 = -8x - 40$$

$$9y = -8x - 4$$

$$y = \frac{-8x}{9} - \frac{4}{9}$$

maka gradiennya

$$m = \frac{-8}{9}$$

karena tegak lurus dengan garis sumbu, maka gradien garis sumbu:

$$m = \frac{9}{8}$$

2. Mencari titik koordinat dari titik potong

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{(-5) + 4}{2}, \frac{4 + (-4)}{2}$$

$$\frac{-1}{2}, 0$$

Jadi, titik koordinatnya

$$\left(\frac{-1}{2}, 0 \right)$$

3. Mencari persamaan garis sumbu dengan gradien:

$$m = \frac{9}{8}$$

dan melalui titik:

$$\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 0) = \frac{9}{8}(x - \frac{-1}{2})$$

$$y = \frac{9x}{8} - \frac{9}{16}$$

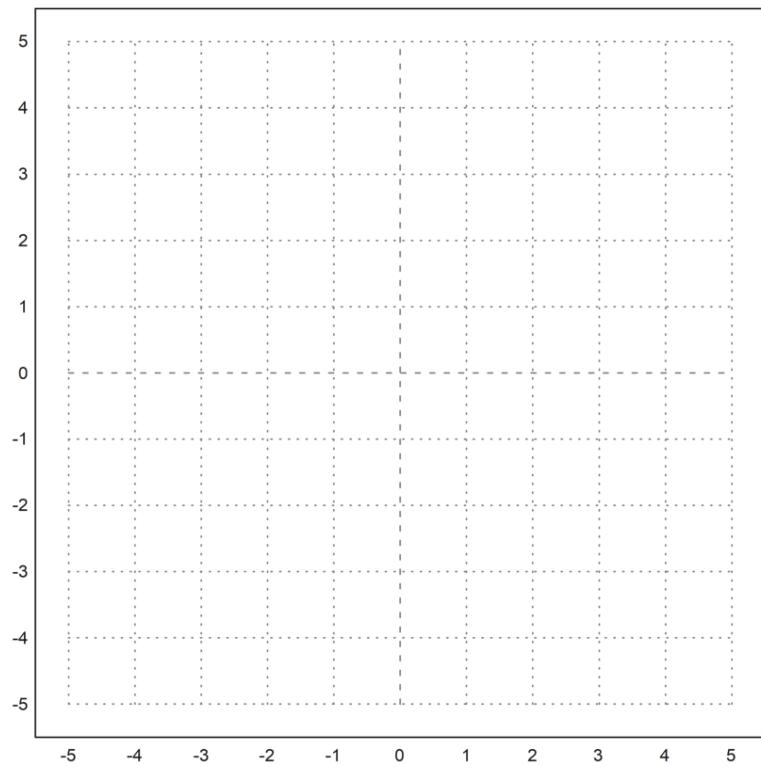
Terbukti

Latihan B

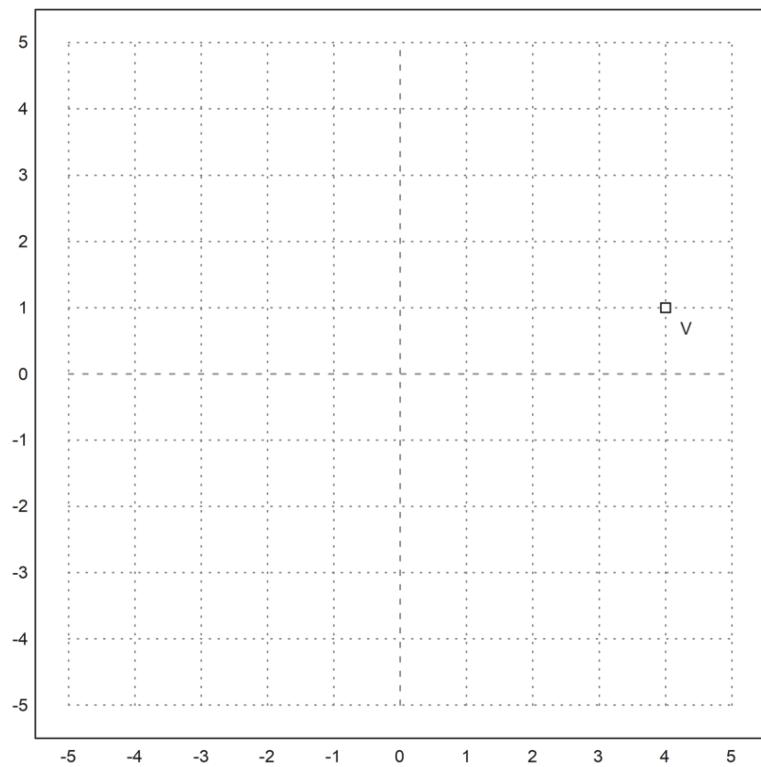
1. Tentukan persamaan garis sumbu

$$V(4, 1)W(-3, 5)$$

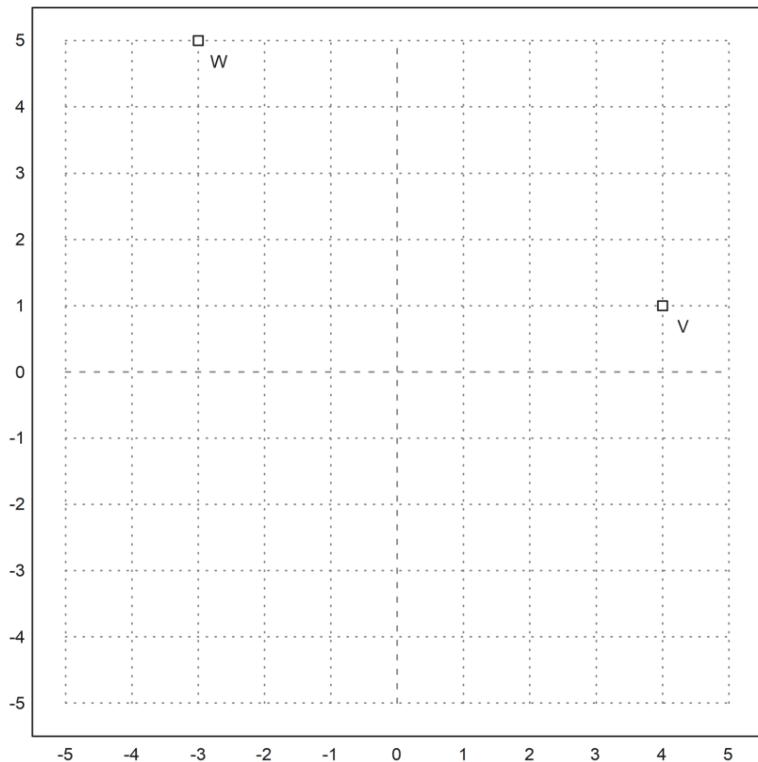
```
>setPlotRange(5) :
```



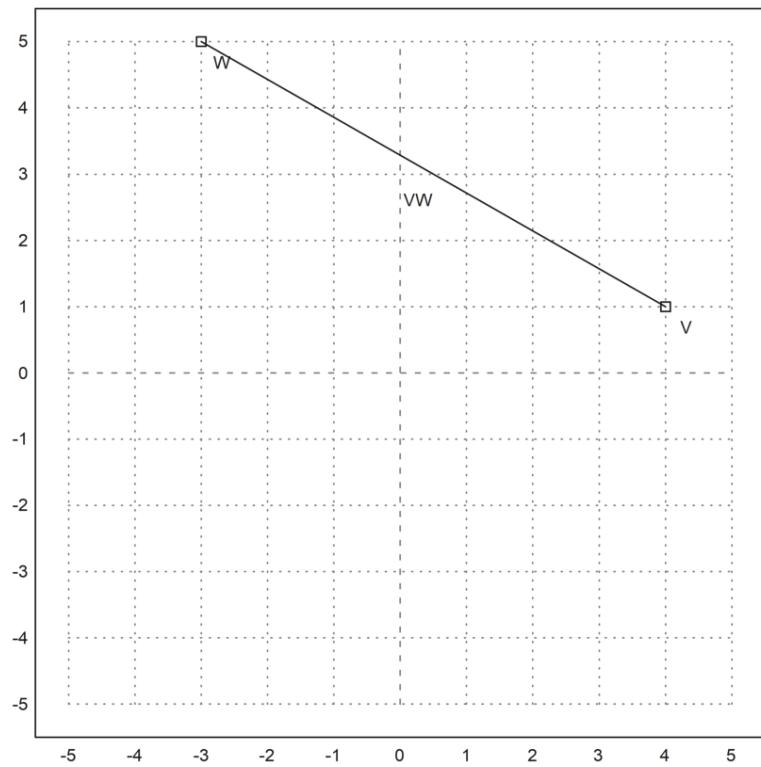
```
>V=[4,1]; plotPoint(V):
```



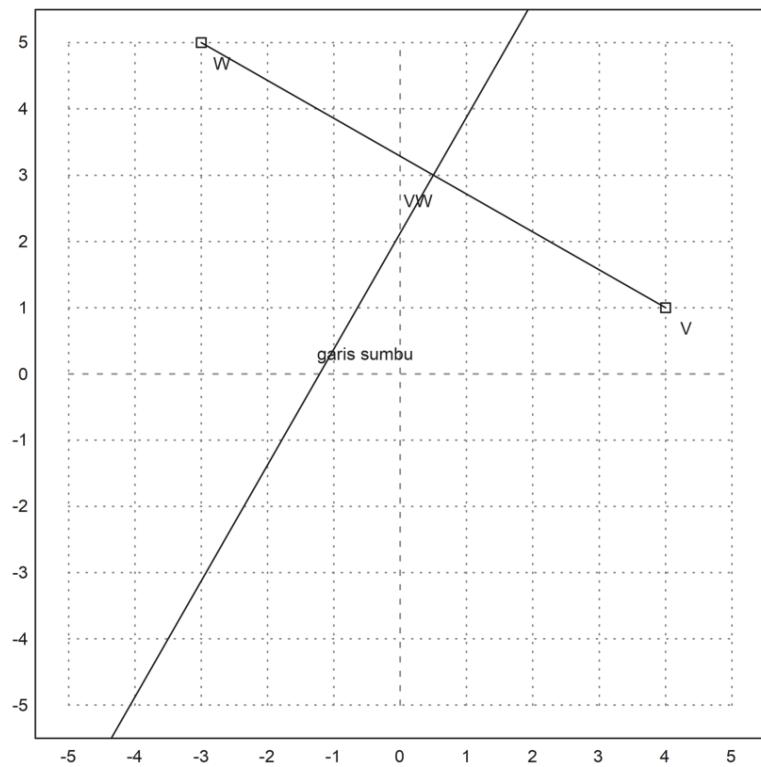
```
>W=[-3,5]; plotPoint(W);
```



```
>plotSegment(V,W,"vw"):
```



```
>p=middlePerpendicular(V,W); plotLine(p,"garis sumbu");
```



```
>V&=[4,1]
```

```
[4, 1]
```

```
>W&=[-3,5]
```

```
[- 3, 5]
```

```
>p&=middlePerpendicular(V,W)
```

$$[7, -4, -\frac{17}{2}]$$

```
>$getLineEquation(p,x,y); $solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{7x}{4} + \frac{17}{8} \right]$$

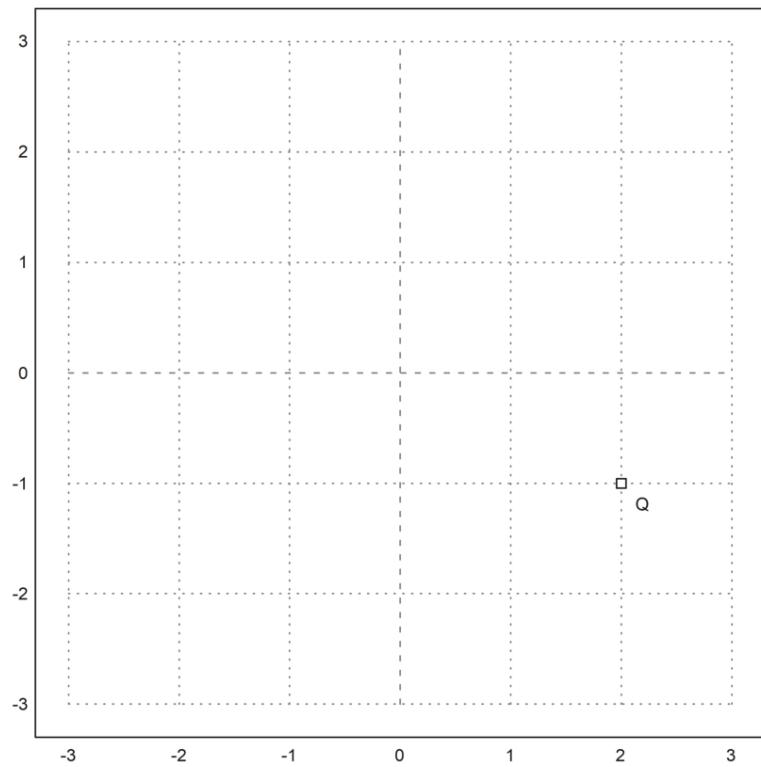
2. Tentukan garis sumbu dari

$$Q(2, -1)R(-1, 2)$$

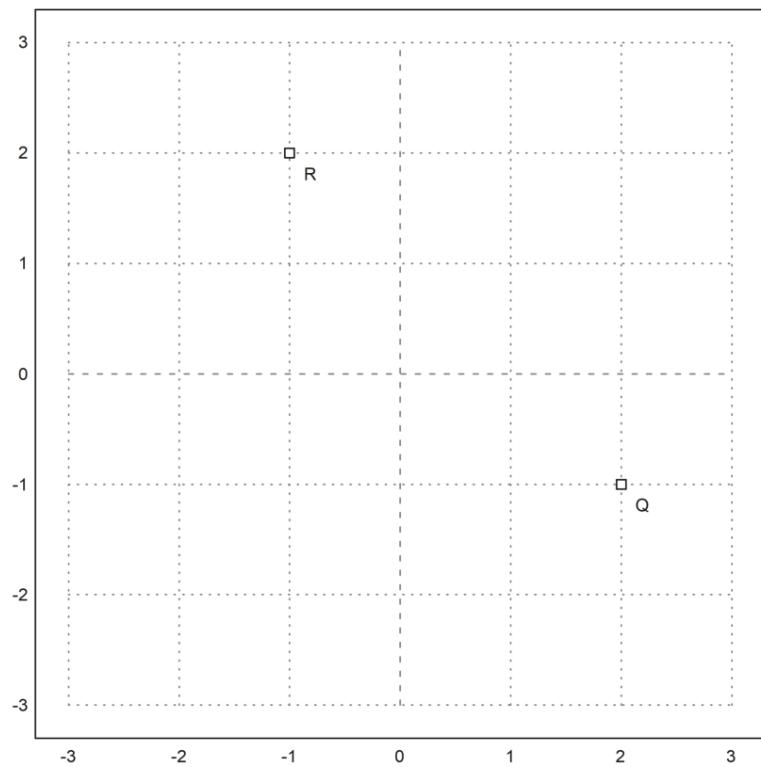
Apakah garis sumbu tersebut sejajar dengan

$$y = 3x + \frac{19}{7}$$

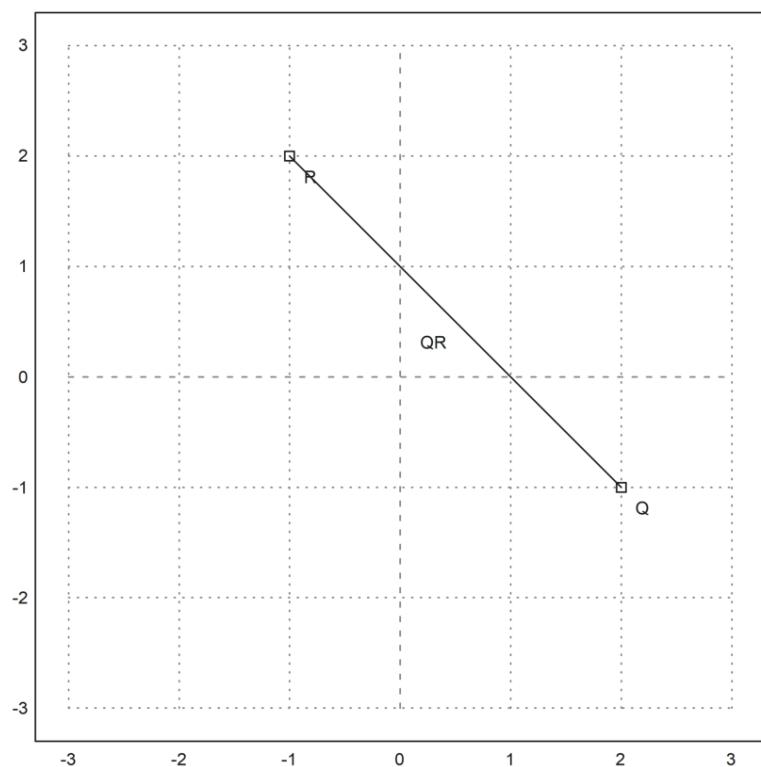
```
>setPlotRange(3);  
>Q=[2,-1]; plotPoint(Q):
```



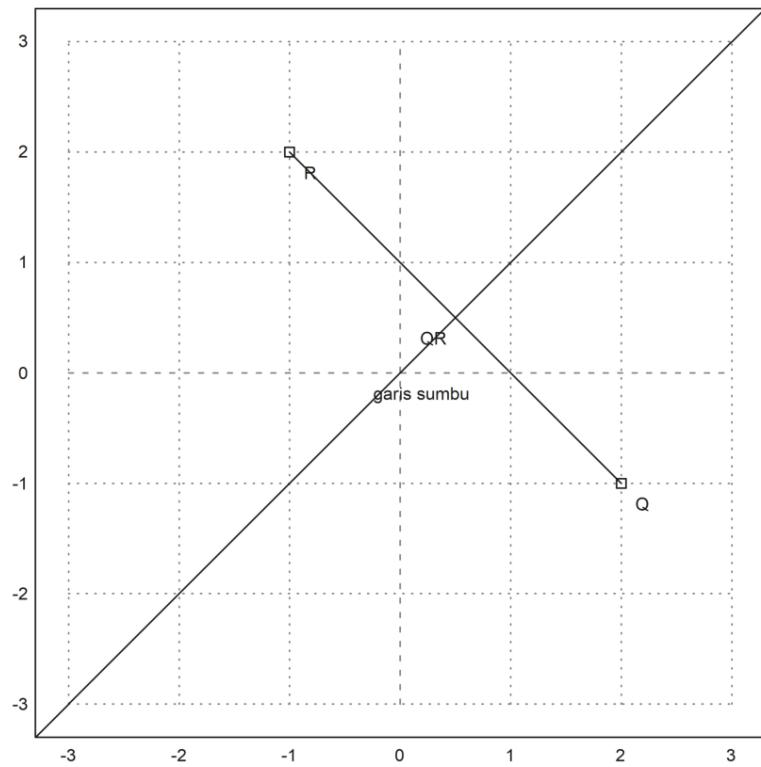
```
>R=[-1,2]; plotPoint (R) :
```



```
>plotSegment(Q,R,"QR") :
```



```
>p=middlePerpendicular(Q,R); plotLine(p,"garis sumbu") :
```



```
>Q&=[2,1]
```

[2, 1]

```
>R&=[-1,2]
```

[- 1, 2]

```
>p&=middlePerpendicular(Q,R)
```

[3, - 1, 0]

```
>$getLineEquation(p,x,y); $solve(% ,y) | expand
```

$[y = 3x]$

Jadi,persamaan garis sumbunya

$$y = 3x$$

dan sejajar dengan

$$y = 3x + \frac{19}{7}$$

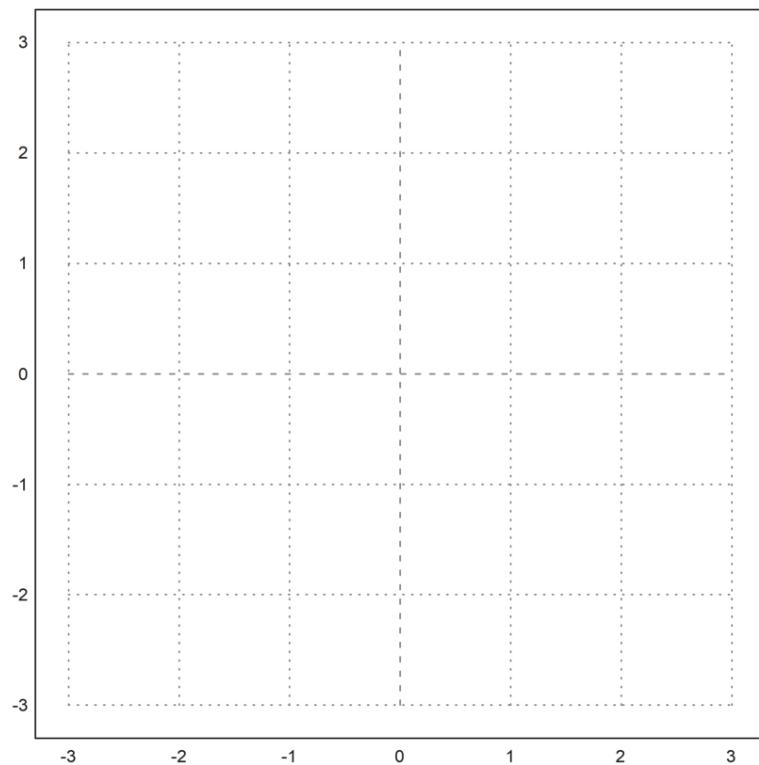
3. Tentukan garis sumbu dari

$$A(2, 5)B(3, -2)$$

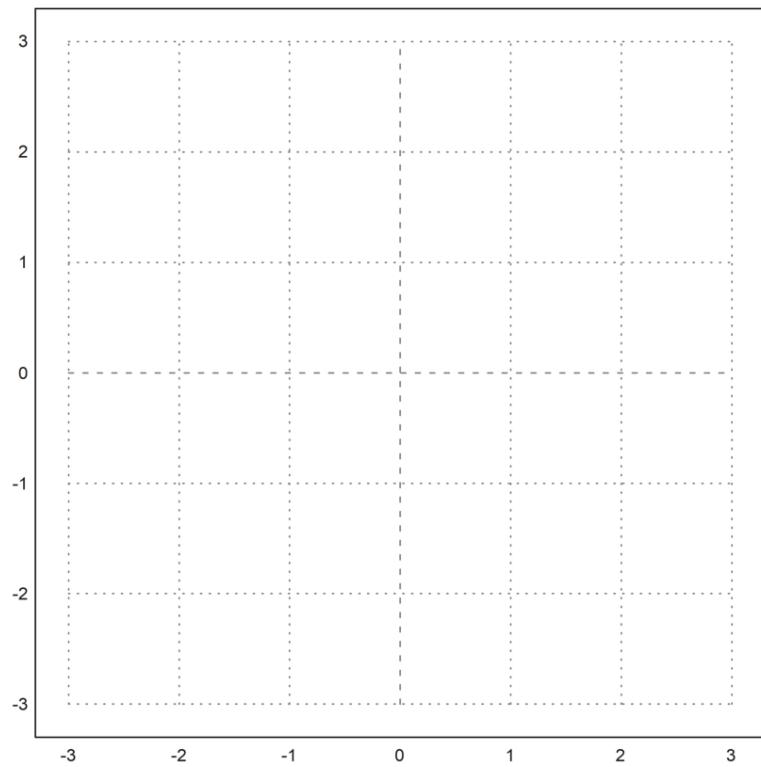
dan tunjukkan hubungan garis sumbu tersebut dengan garis

$$y = -7x + 23$$

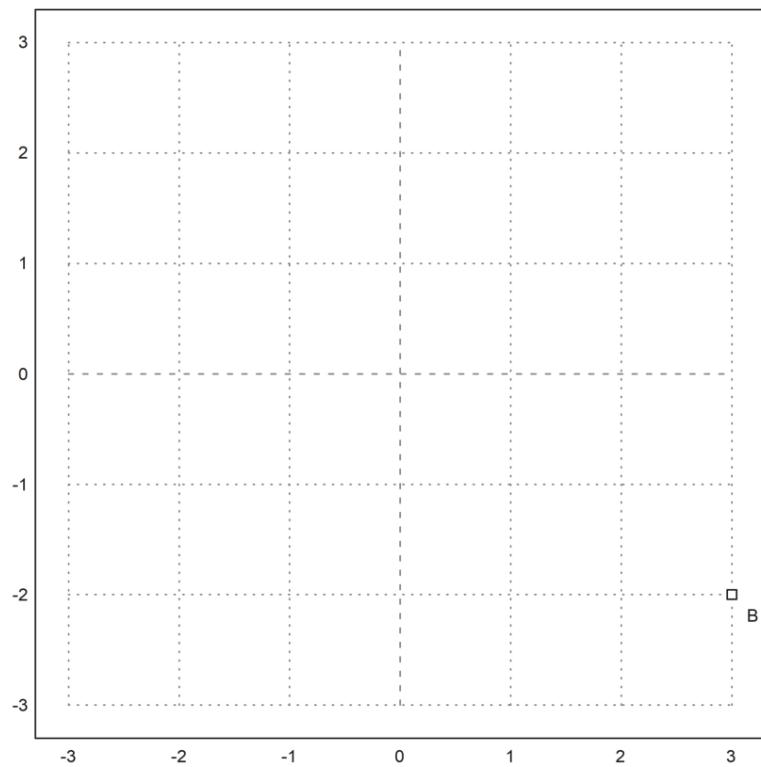
```
>setPlotRange(3) :
```



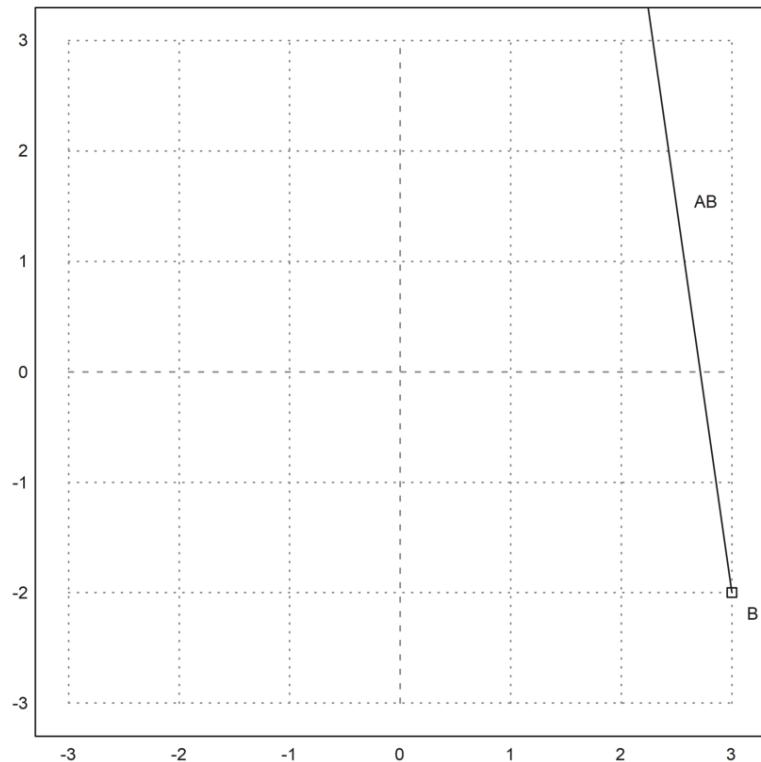
```
>A=[2,5]; plotPoint(A) :
```



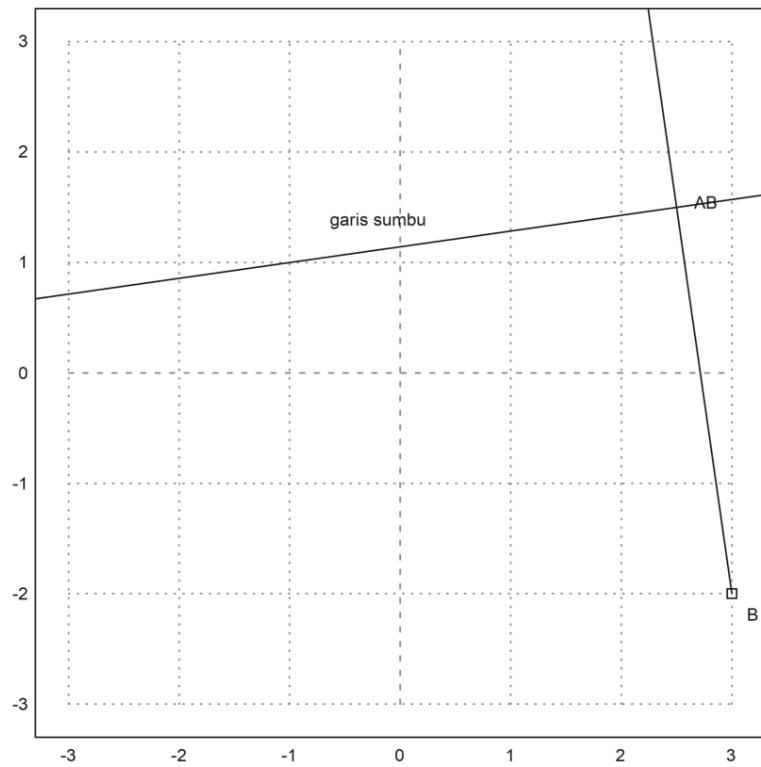
```
>B=[3,-2]; plotPoint(B):
```



```
>plotSegment(A,B,"AB") :
```



```
>p=middlePerpendicular(A,B); plotLine(p,"garis sumbu") :
```



```
>A&=[2, 5]
```

[2, 5]

```
>B&=[3, -2]
```

[3, -2]

```
>p&=middlePerpendicular(A,B)
```

[- 1, 7, 8]

```
>$getLineEquation(p,x,y); $solve(% ,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{x}{7} + \frac{8}{7} \right]$$

Jadi, persamaan garis sumbunya

$$y = \frac{x}{7} + \frac{8}{7}$$

dan tegak lurus dengan

$$y = -7x + 23$$

Menentukan persamaan garis bagi sudut

Garis bagi adalah garis yang membagi suatu sudut menjadi dua sudut yang sama besar. Dalam bahasa Inggris, garis bagi disebut angle bisector.

Untuk mencari persamaan garis bagi sudut dalam EMT kita dapat menemukan cara-cara berikut:

1. Mendefinisikan titik-titik koordinat
2. Menggunakan perintah angleBisector(titik1,titik2,titik3)
3. Menggunakan getLineEquation

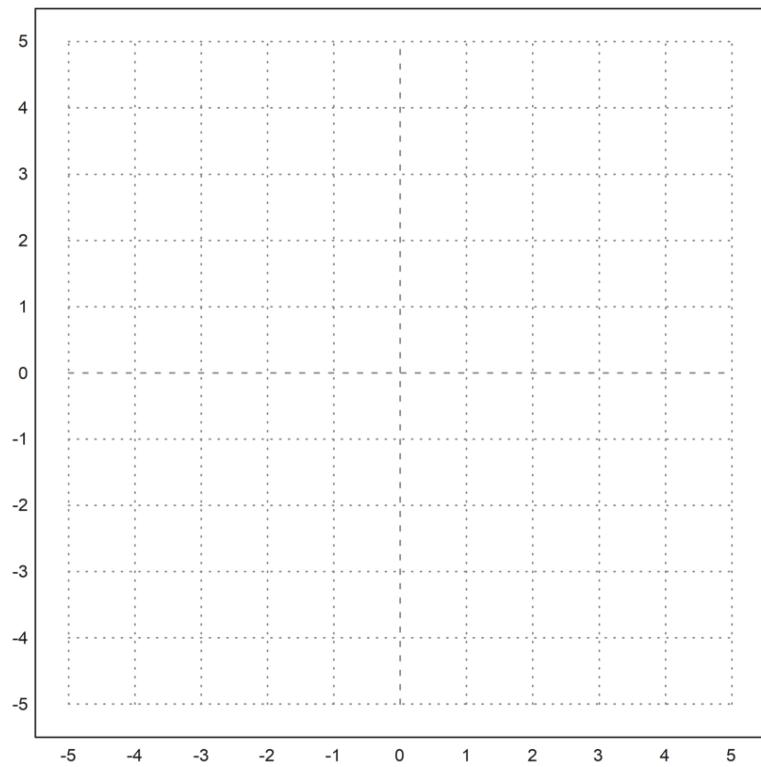
Contoh:

$$\triangle ABC, A(-1, 2); B(3, 1); C(-2, -4)$$

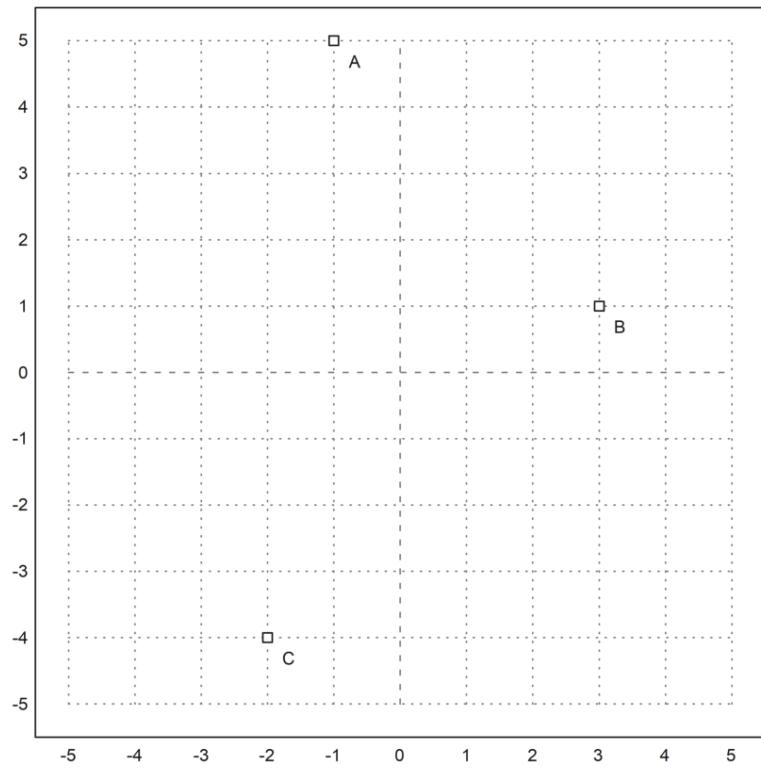
Tentukan garis bagi dari

$$\angle ABC$$

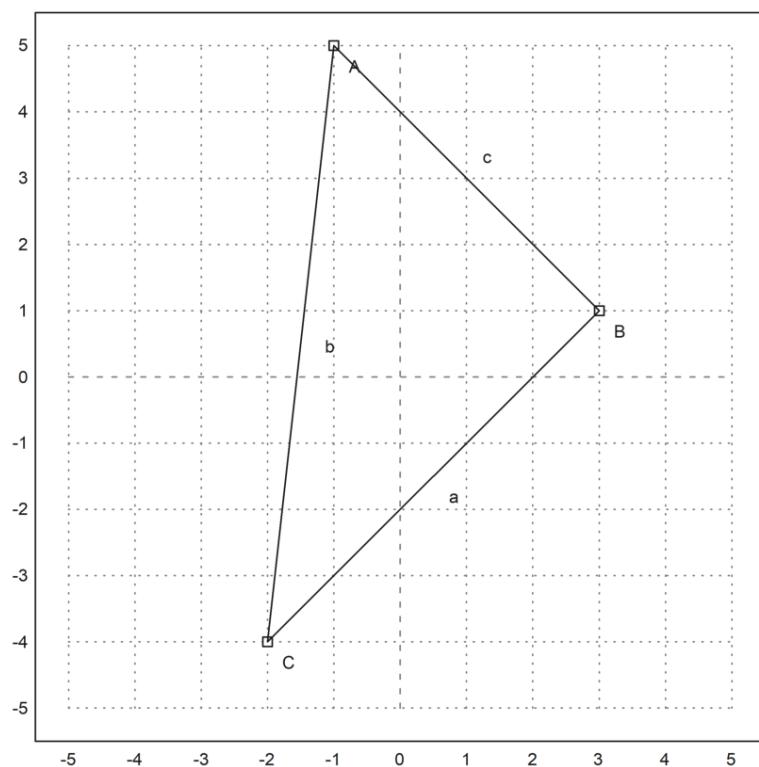
```
>setPlotRange(5):
```



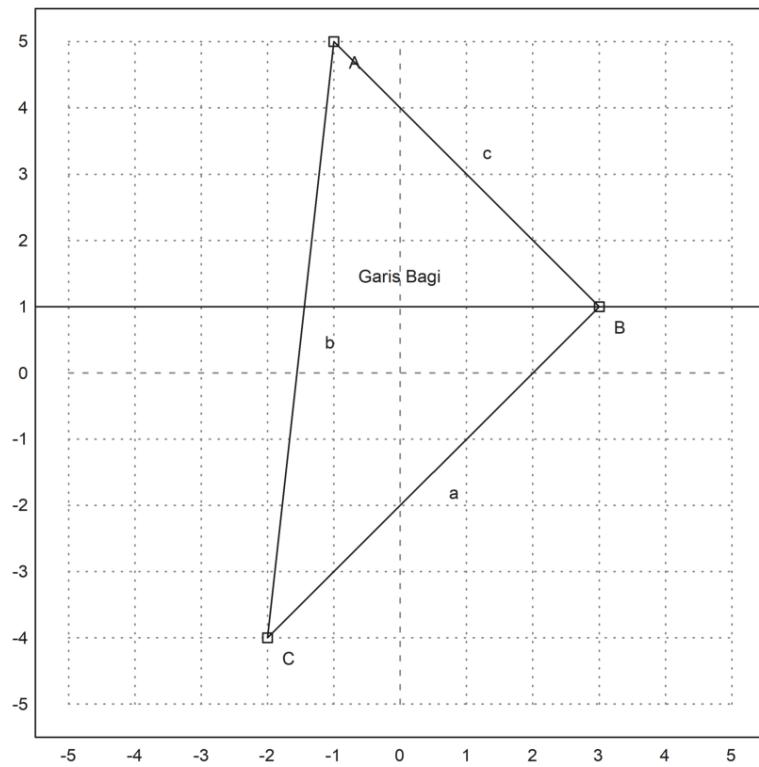
```
>A=[-1,5]; B=[3,1]; C=[-2,-4];
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C"):
```



```
>plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(B,C,"a"); plotSegment(A,C,"b"):
```



```
>w=angleBisector(A,B,C); plotLine(w,"Garis Bagi"):
```



```
>A&=[-1, 5]
```

$[-1, 5]$

```
>B&=[3, 1]
```

$[3, 1]$

```
>C&=[-2, -4]
```

$[-2, -4]$

```
>w&=angleBisector(A,B,C)
```

$[0, 8, 8]$

```
>$getLineEquation(w, x, y)
```

$$8y = 8$$

```
>$solve(%, y) | expand
```

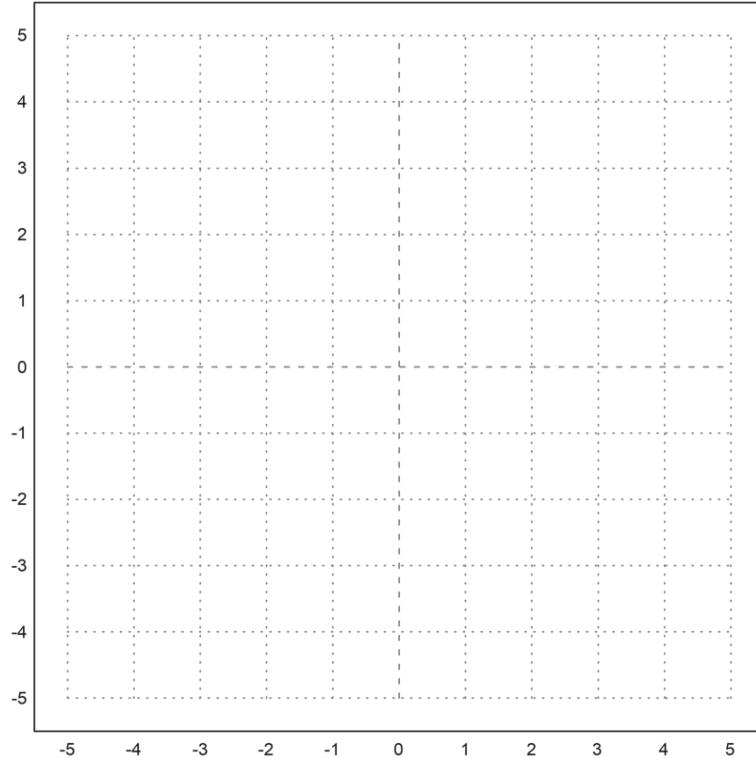
$$[y = 1]$$

Latihan C

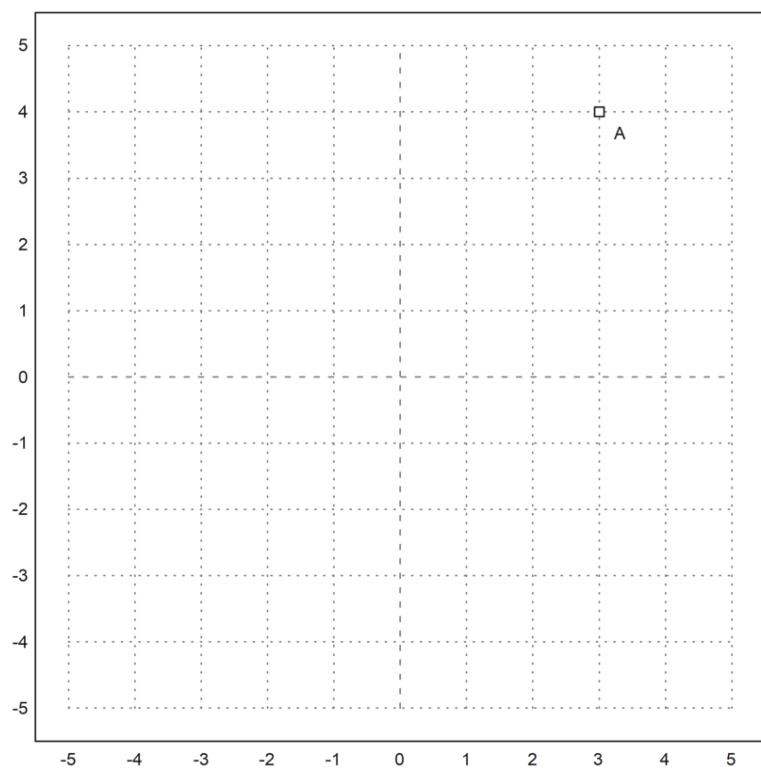
1. Tentukan persamaan garis bagi sudut BCA jika

$$A(3, 4)B(-2, 4)C(1, 3)$$

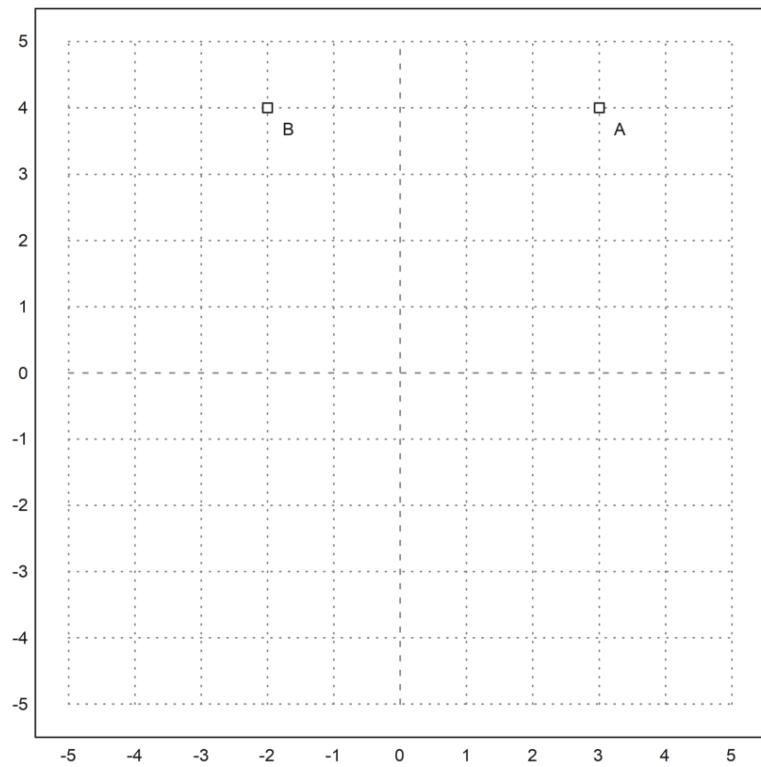
```
>setPlotRange(5) :
```



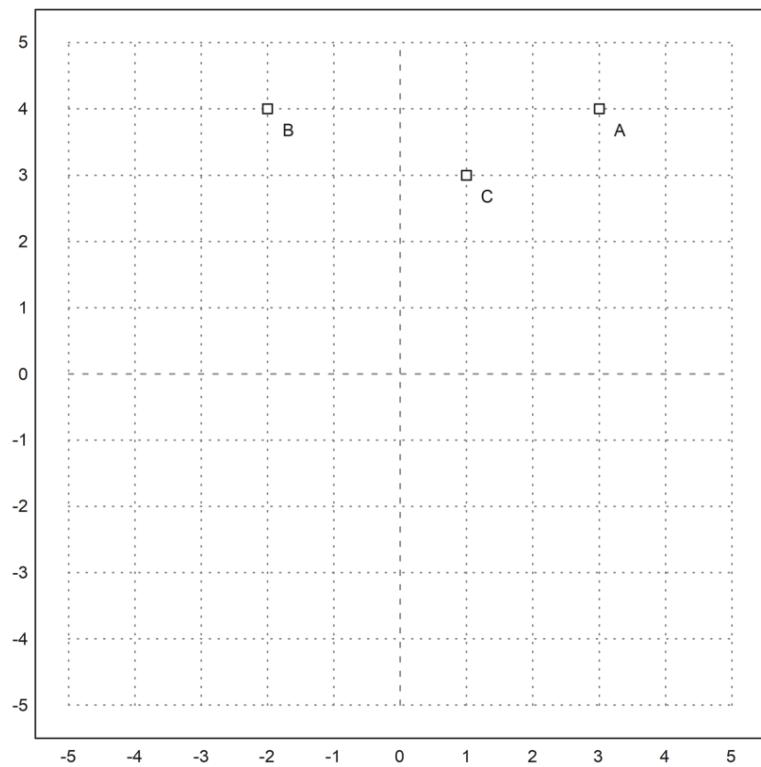
```
>A=[3,4]; plotPoint (A, "A") :
```



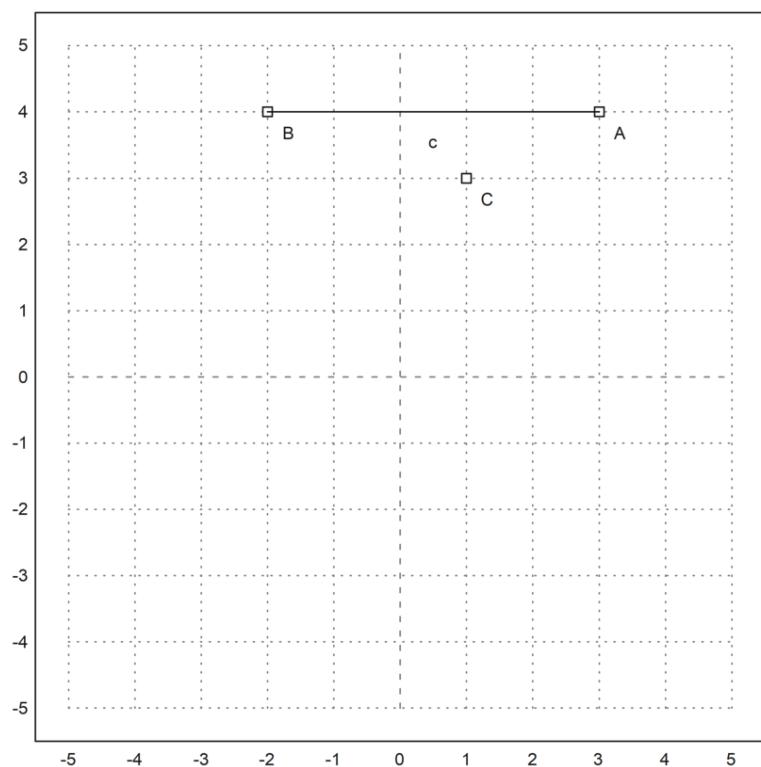
```
>B=[-2,4]; plotPoint (B, "B") :
```



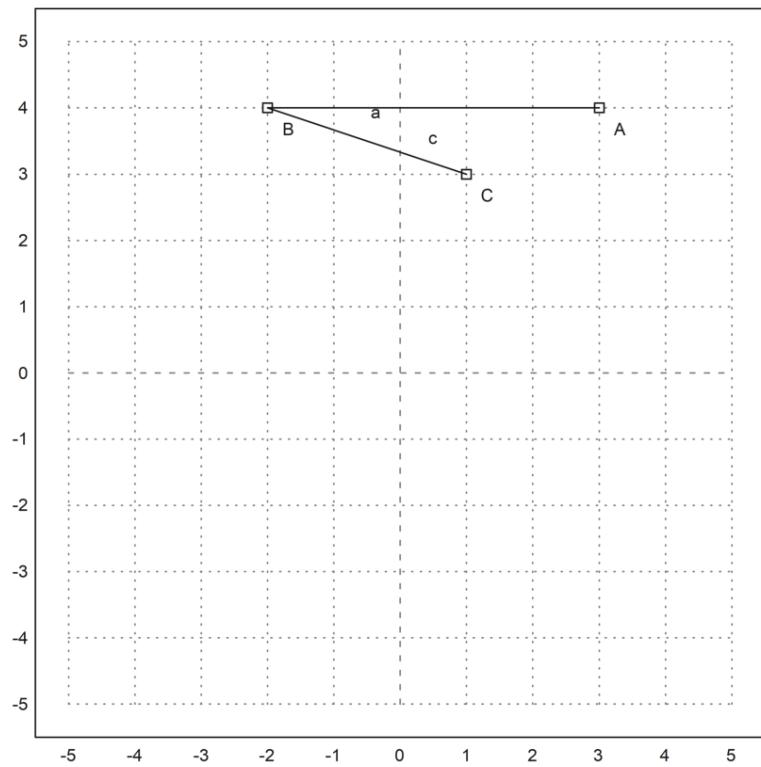
```
>C=[1,3]; plotPoint(C,"C"):
```



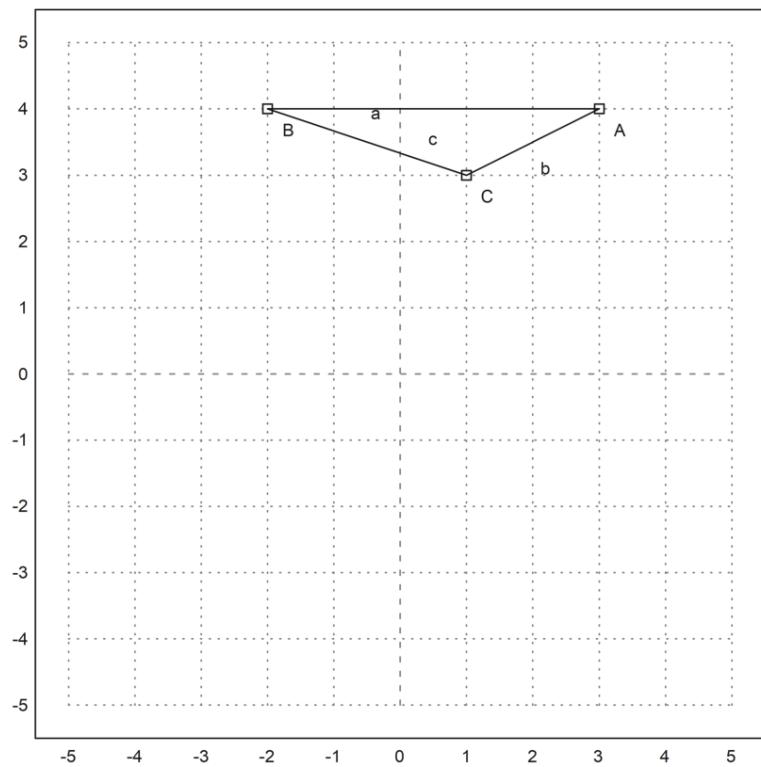
```
>plotSegment (A, B, "c") : // c=AB
```



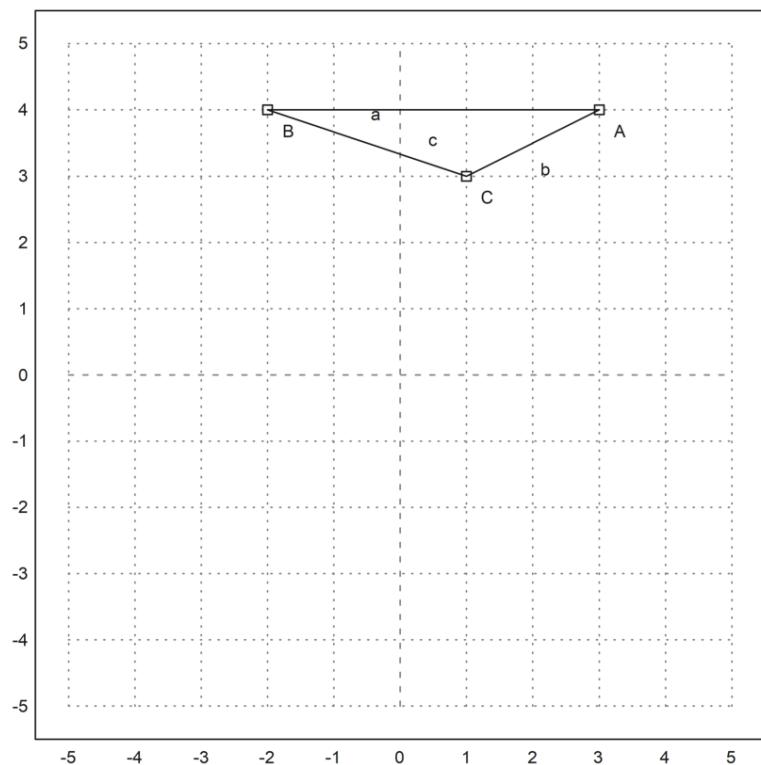
```
>plotSegment (B, C, "a") : // a=BC
```



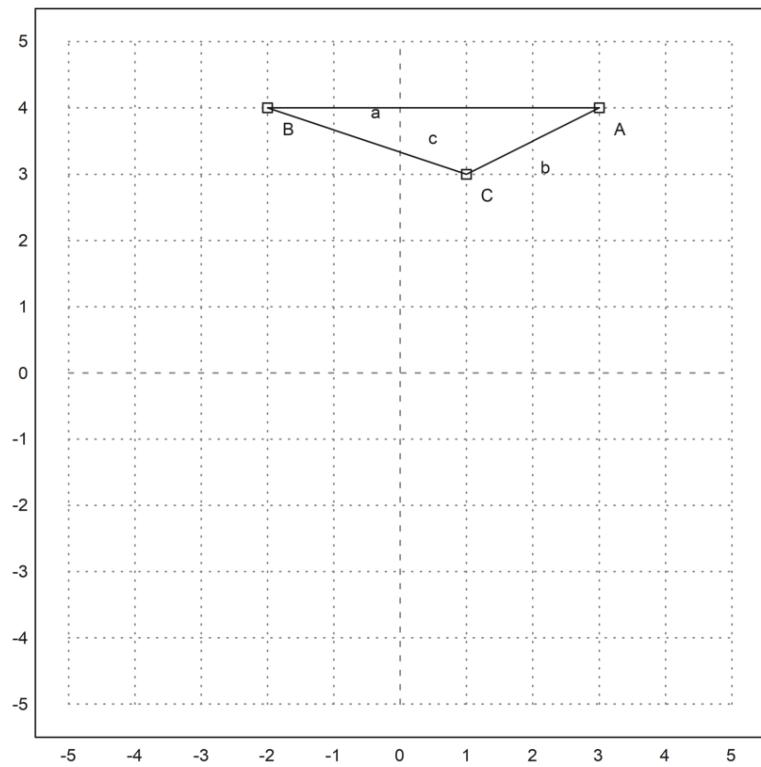
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



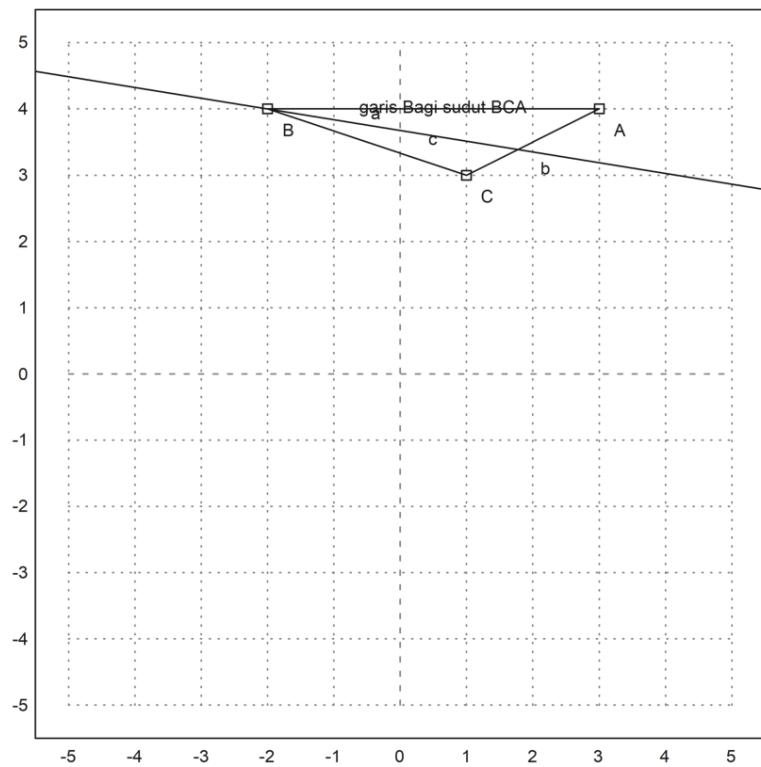
```
>t=angleBisector(A,B,C):
```



```
>o=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)):
```



```
>plotLine(t,"garis Bagi sudut BCA") :
```



```
>A&=[3,4]
```

```
[3, 4]
```

```
>B&=[-2,4]
```

```
[- 2, 4]
```

```
>C&=[1,3]
```

```
[1, 3]
```

```
>t&=angleBisector(B,C,A)
```

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\frac{2 \sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 3}{2}, 1 - \frac{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}}{2}, \right. \\ & \left. \left(-\frac{\frac{2 \sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 3}{2} \right) \left(\frac{\frac{2 \sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} + 7 \right)}{2} \right] \end{aligned}$$

```
>$getLineEquation(t,x,y)
```

$$\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right)y + \left(-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 3\right)x = \frac{\left(\frac{-2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 3\right)\left(\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} - 1\right)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} + 7\right)}{2}$$

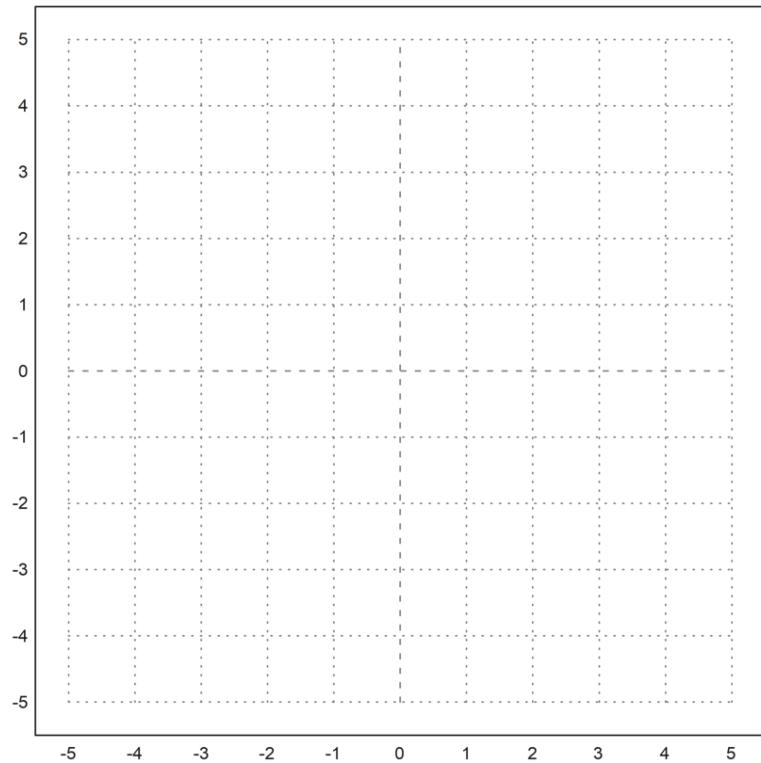
```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = -\frac{2\sqrt{10}x}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{5}x}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} \right]$$

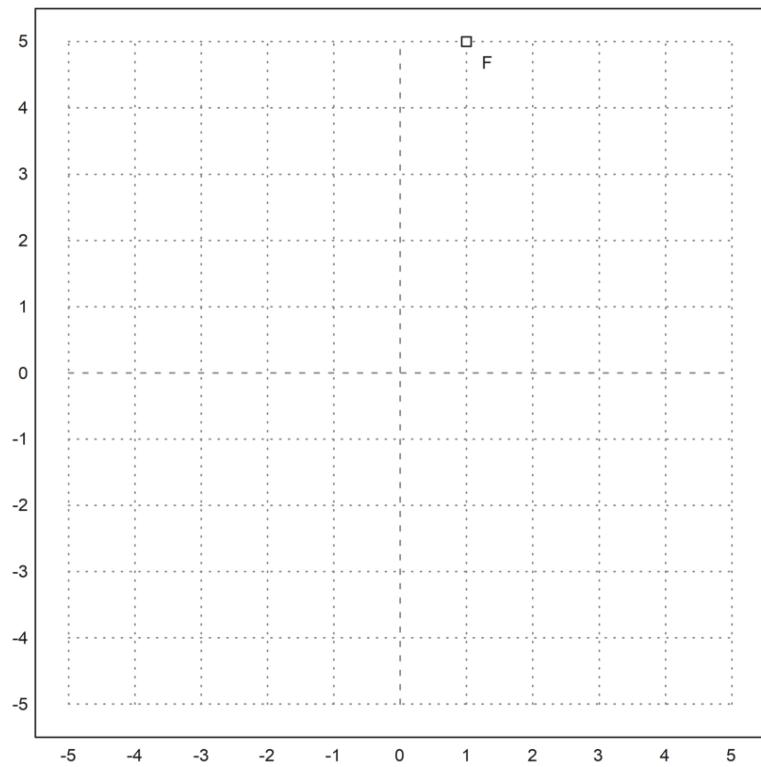
2. Tentukan persamaan garis bagi sudut FHG dengan

$$F(1, 5) G(-4, 3) H(0, -5)$$

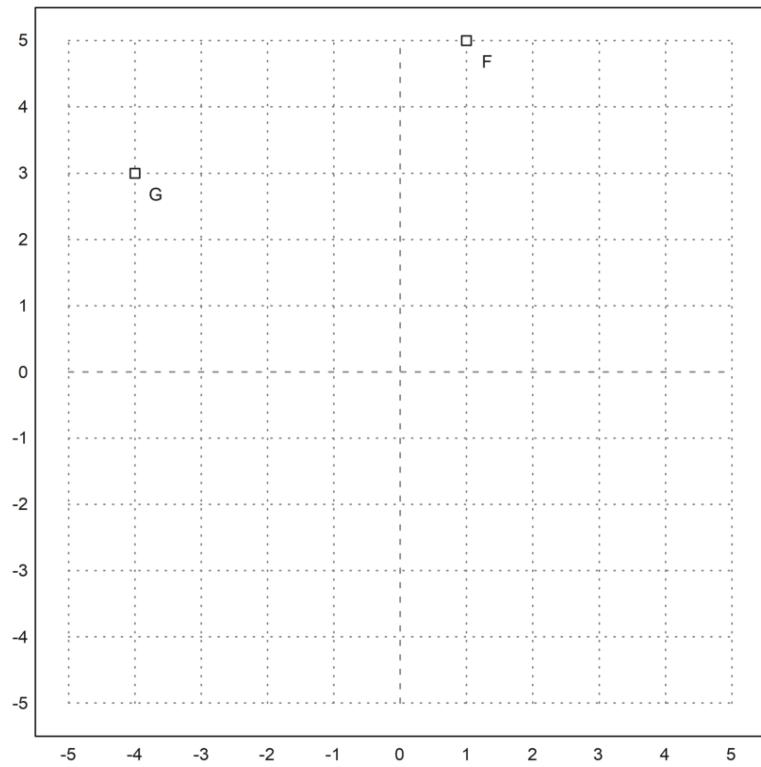
```
>setPlotRange(5):
```



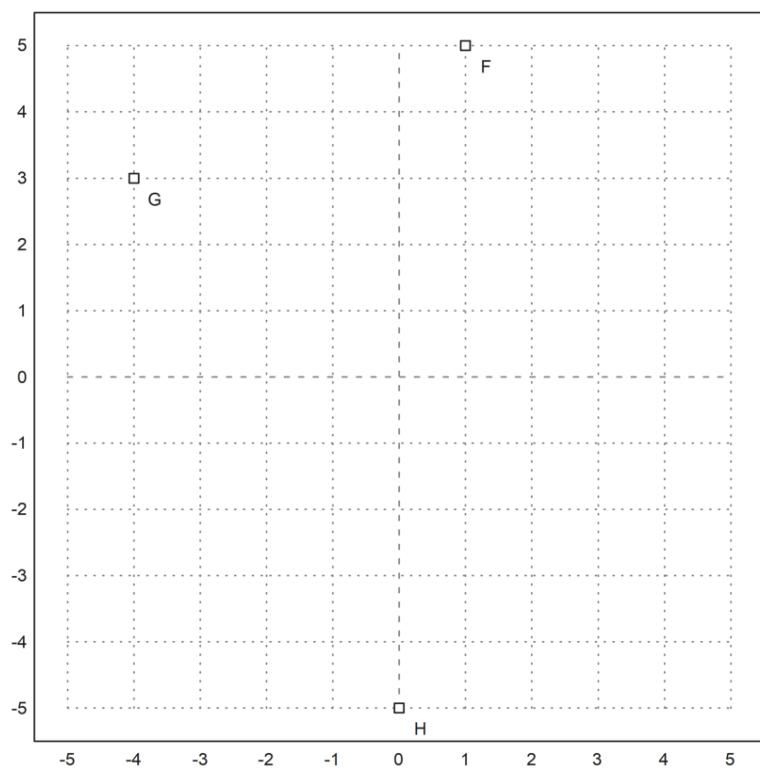
```
>F=[1,5]; plotPoint(F,"F");
```



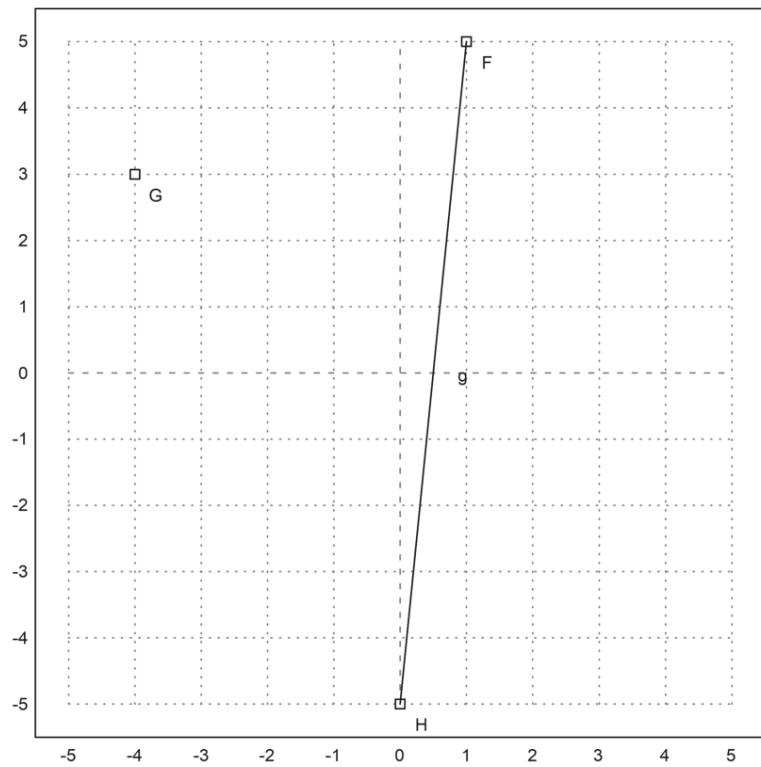
```
>G=[-4,3]; plotPoint(G,"G"):
```



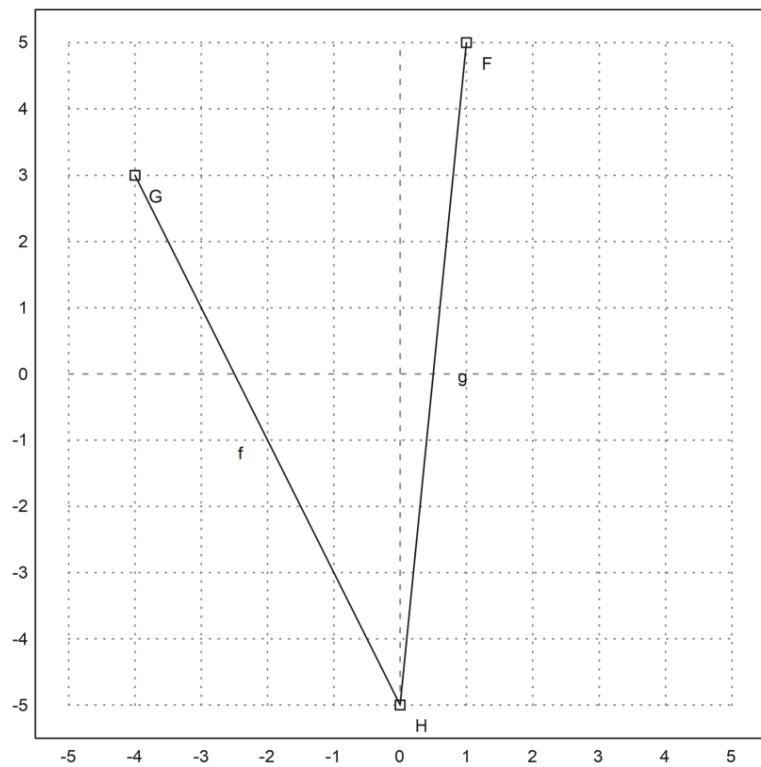
```
>H=[0,-5]; plotPoint(H,"H"):
```



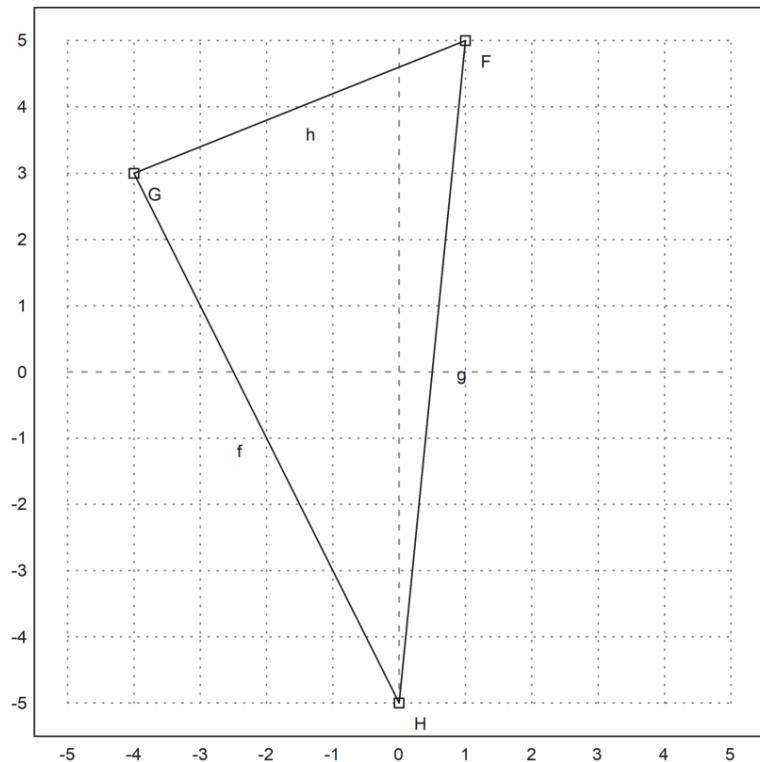
```
>plotSegment(F,H,"g"):
```



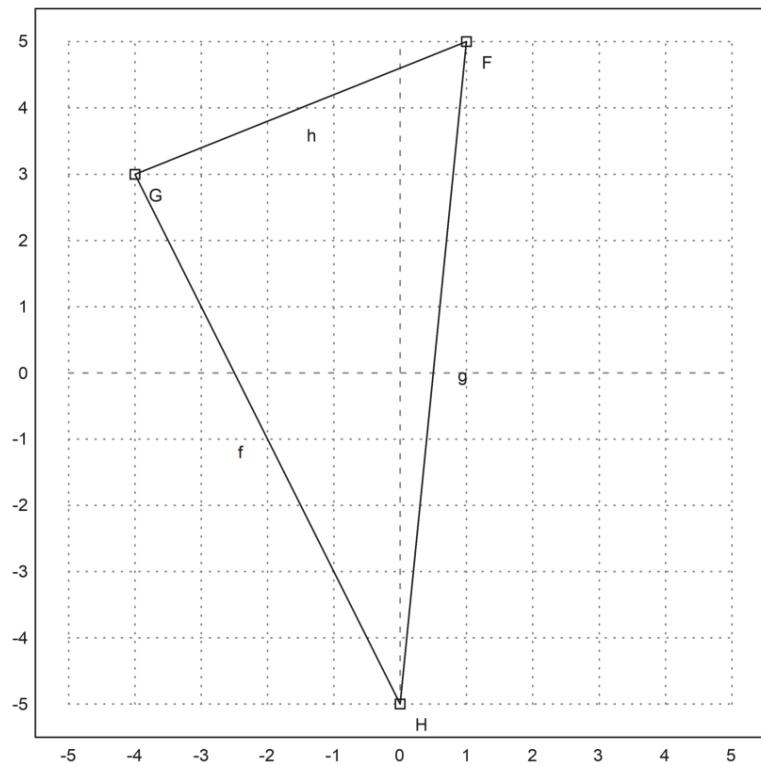
```
>plotSegment(H, G, "f") :
```



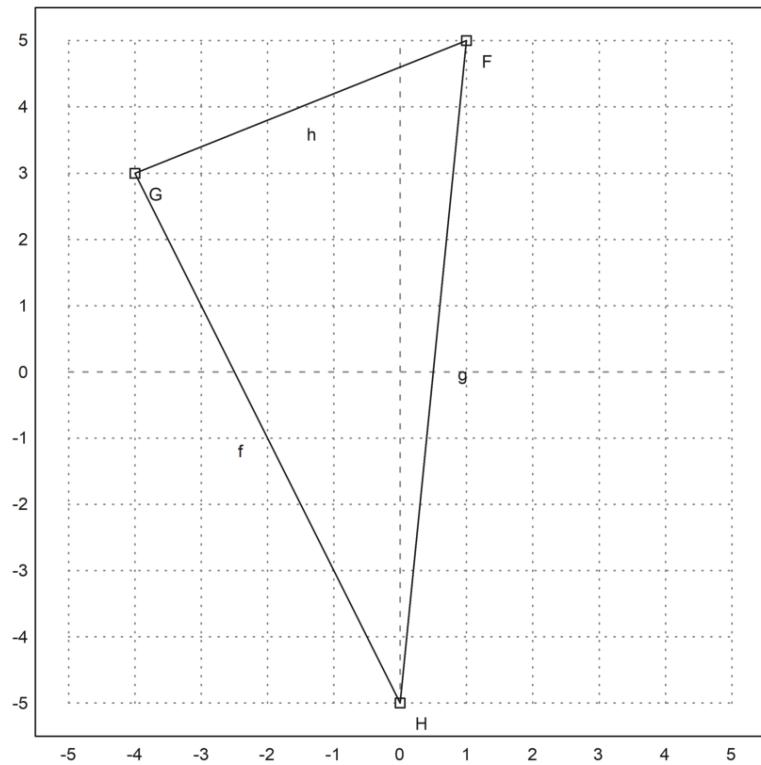
```
>plotSegment(F, G, "h") :
```



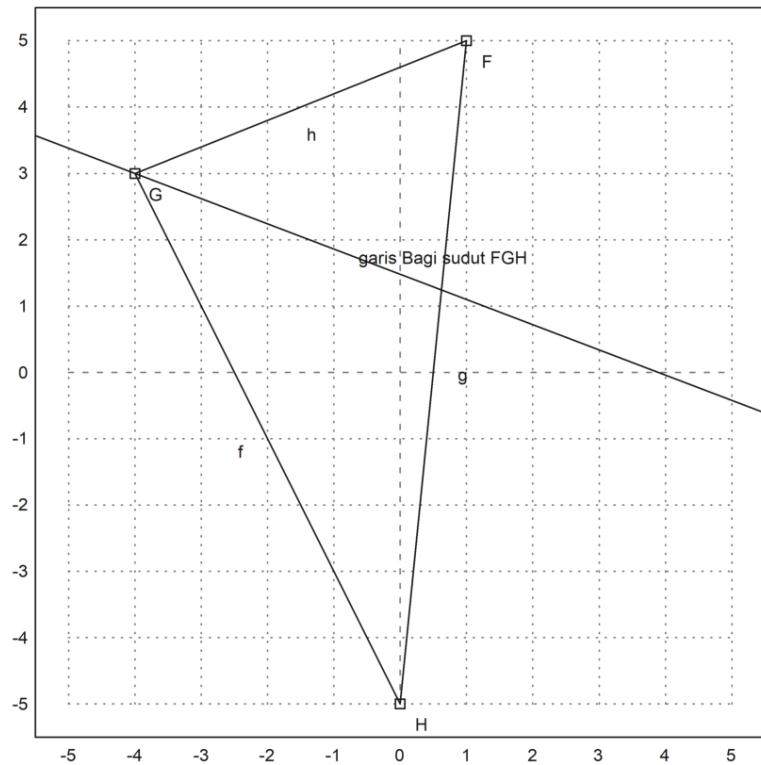
```
>t=angleBisector(F, G, H) :
```



```
>o=lineIntersection(t, lineThrough(F, G)):
```



```
>plotLine(t,"garis Bagi sudut FGH"):
```



```
>F&=[1,5]
```

[1, 5]

```
>G&=[-4,3]
```

[- 4, 3]

```
>H&=[0,5]
```

[0, 5]

```
>t&=angleBisector(F,H,G)
```

$$\left[\frac{2}{\sqrt{5}} + 1, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)}{\sqrt{5}} \right]$$

$$\frac{10 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

```
>$getLineEquation(t,x,y)
```

$$\frac{y}{\sqrt{5}} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \right) x = \frac{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)}{2} + \frac{10 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$[y = -\sqrt{5}x - 2x + 5]$$

Menentukan persamaan garis berat

Garis berat pada sebuah segitiga adalah garis yang menghubungkan salah satu sudut segitiga dengan titik tengah sisi yang berlawanan. Untuk setiap sebuah segitiga, terdapat tiga garis berat yang menghubungkan salah satu sudut segitiga menuju titik tengah sisi yang berlawanan.

Cara mencari persamaan garis berat menggunakan EMT yaitu:

1. Mendefinisikan titik-titik koordinat
2. Menggunakan middlePerpendicular(titik1,titik2) untuk mencari titik tengah pada sisi berlawanan
3. Mendefinisikan titik tengah
4. Menghubungkan titik tengah dengan titik sudut
5. menggunakan getLineEquation

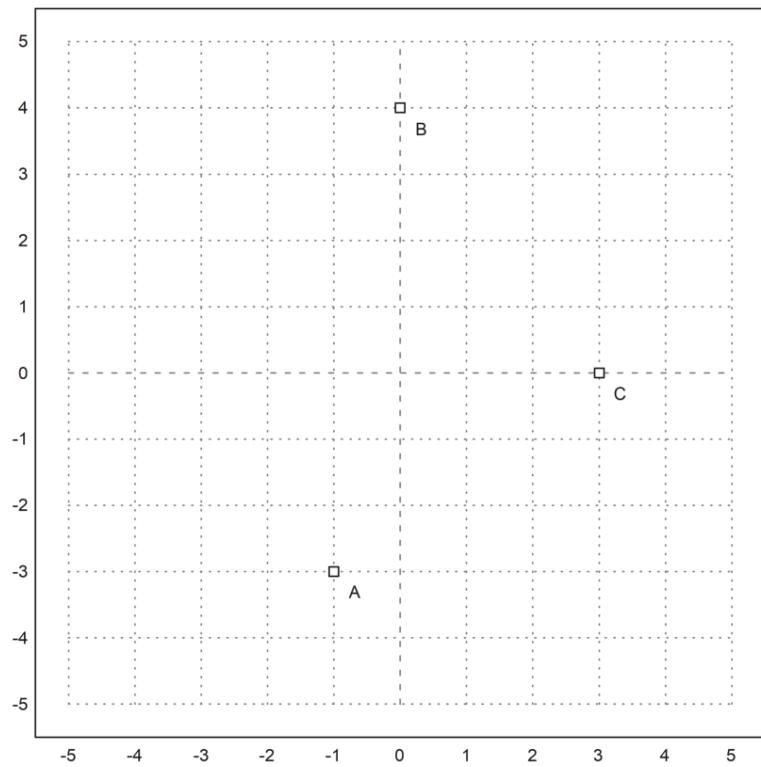
Tentukan garis berat dari

$$\triangle ABC, A(-1, -3); B(0, 4); C(3, 0)$$

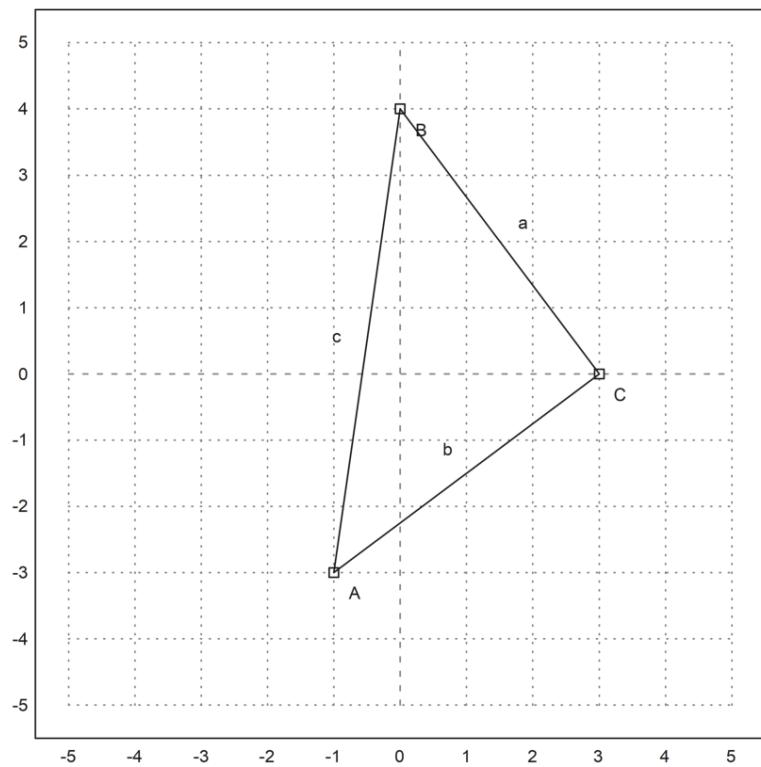
```
>setPlotRange(5)
```

[-5, 5, -5, 5]

```
>A=[-1,-3]; B=[0,4]; C=[3,0];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```



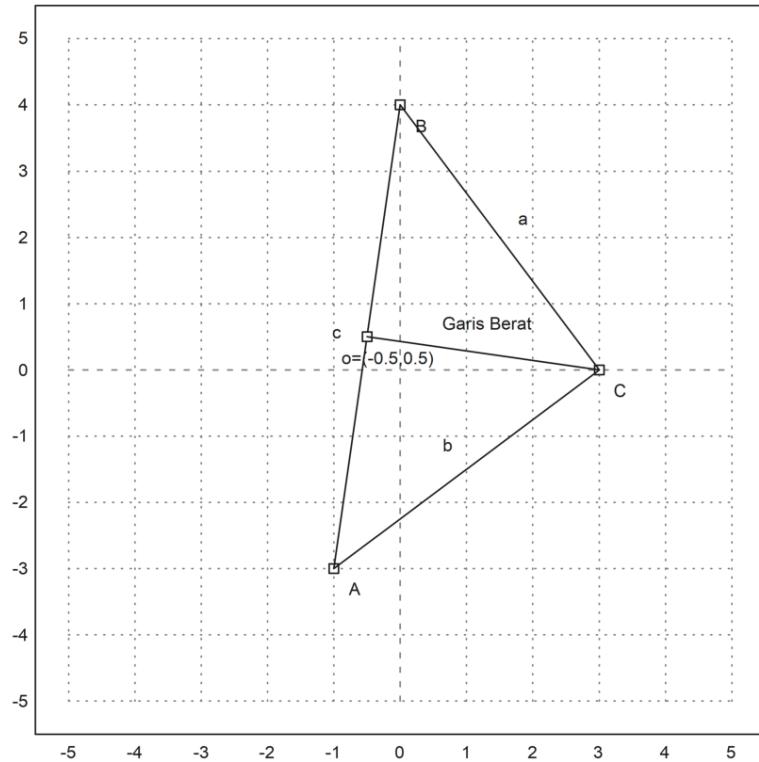
```
>plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(B,C,"a"); plotSegment(A,C,"b");
```



```

>v=middlePerpendicular(A,B);
>o=lineIntersection(v, lineThrough(A,B)); plotPoint(o,value=1);
>plotSegment(o,C,"Garis Berat"):

```



```
>A&=[-1,-3]
```

$[-1, -3]$

```
>B&=[0,4]
```

$[0, 4]$

```
>C&=[3,0]
```

$[3, 0]$

```
>v&=middlePerpendicular(A,B)
```

$$[-1, -7, -3]$$

```
>o&=lineIntersection(v,lineThrough(A,B))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ - & - \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>z&=lineThrough(o,C)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -, -, - \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>$getLineEquation(z,x,y)
```

$$\frac{7y}{2} + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

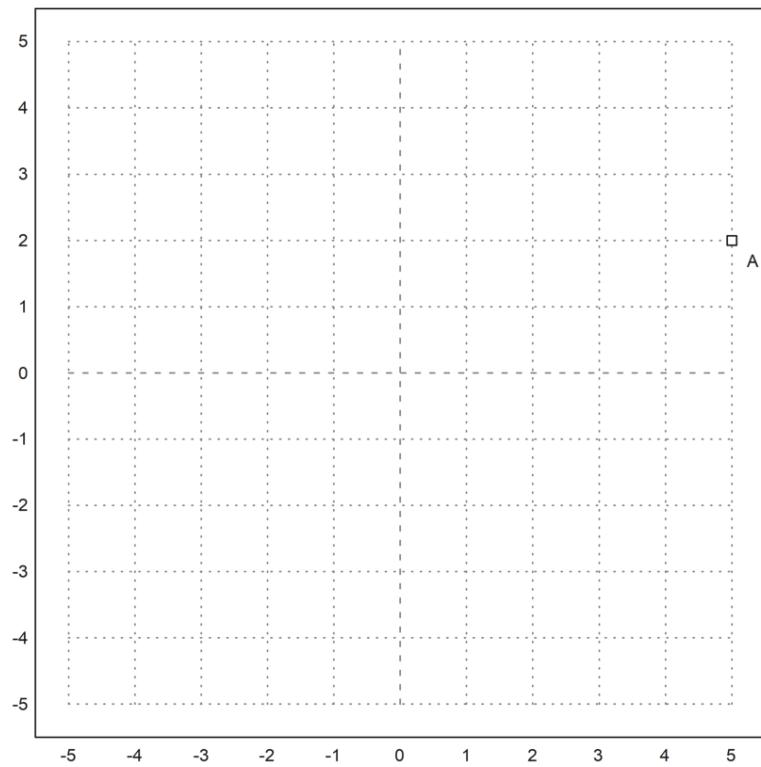
$$\left[y = \frac{3}{7} - \frac{x}{7} \right]$$

Latihan D

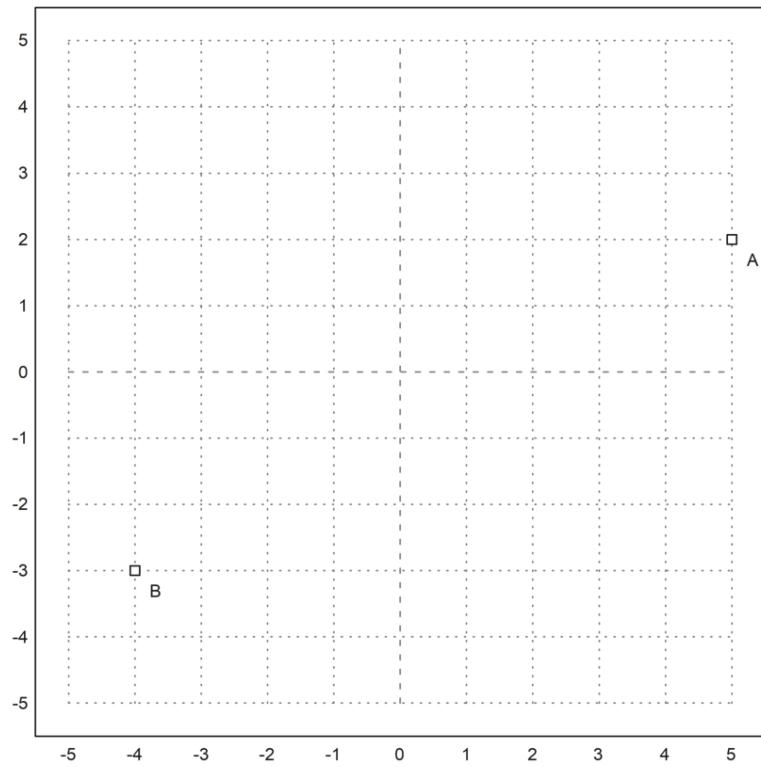
1. Tentukan persamaan garis berat dari titik C dengan

$$A(5, 2), B(-4, -3), C(0, 3)$$

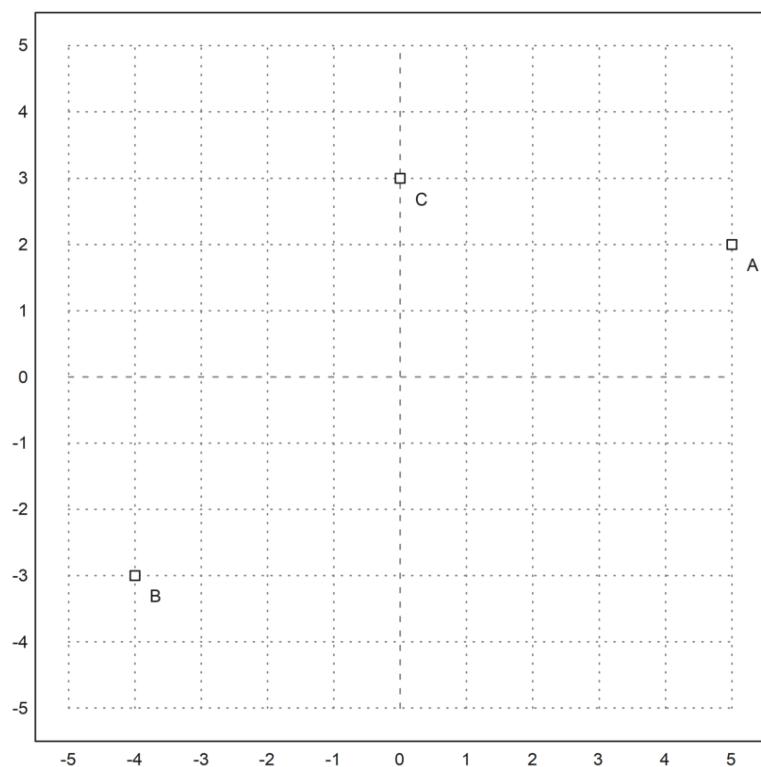
```
>setPlotRange(5);  
>A=[5,2]; plotPoint(A,"A") :
```



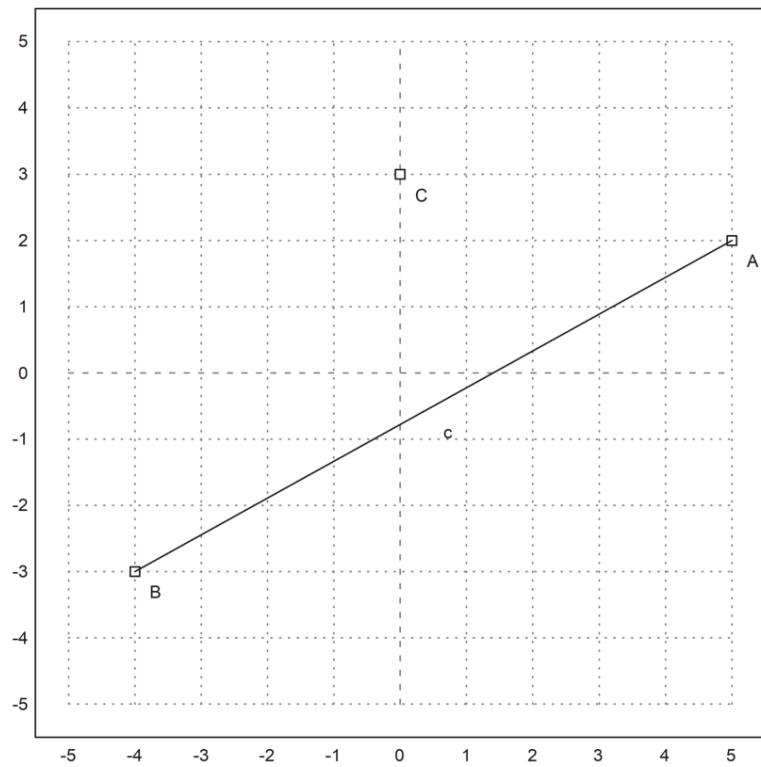
```
>B=[-4,-3]; plotPoint(B,"B"):
```



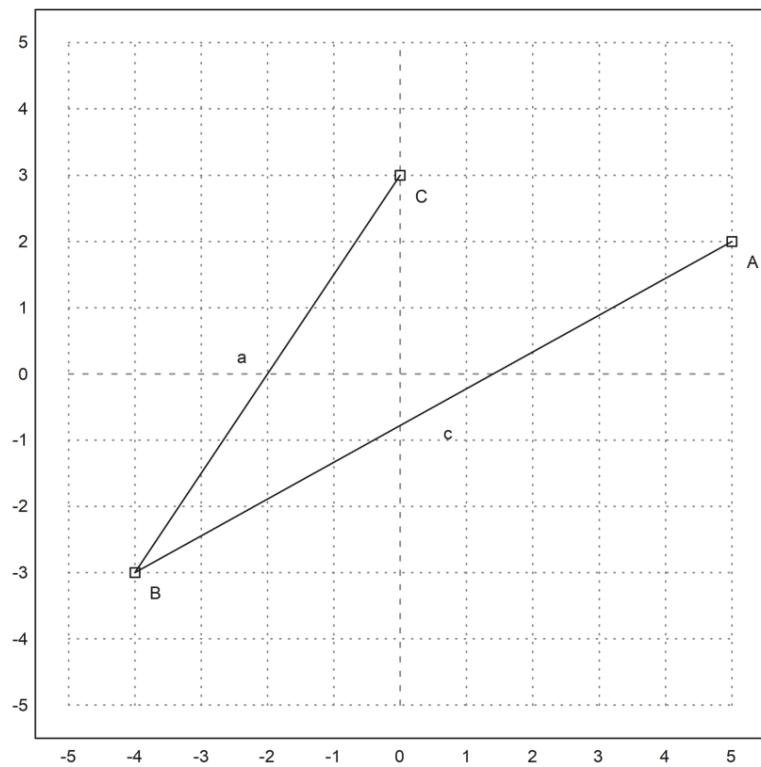
```
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C"):
```



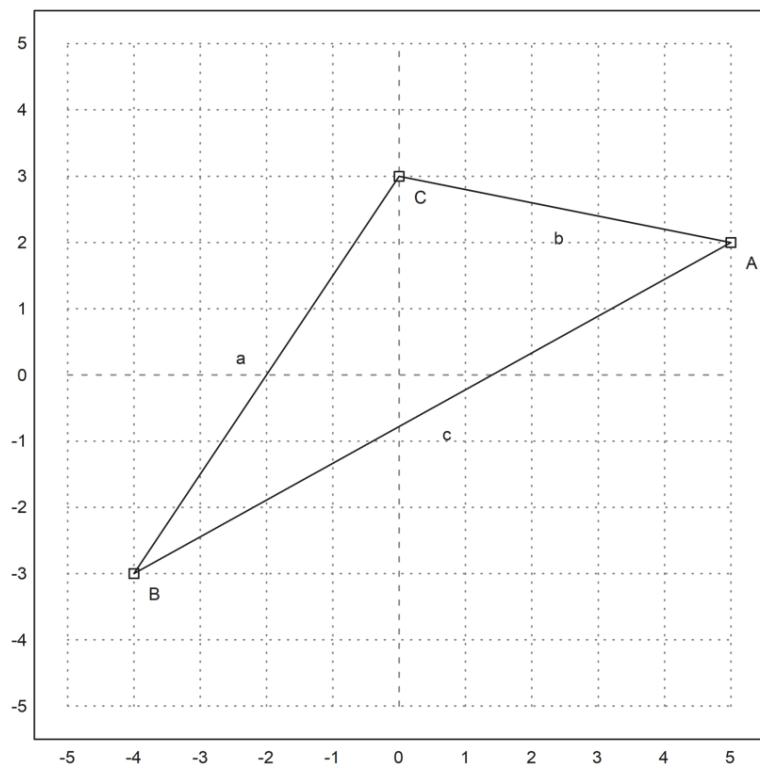
```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
```



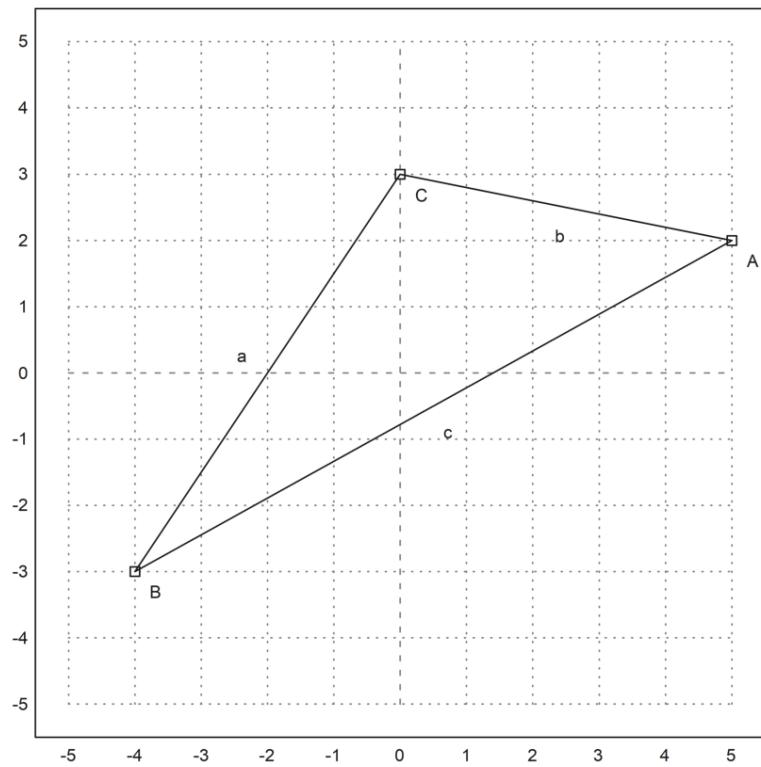
```
>plotSegment(B,C,"a") : // a=BC
```



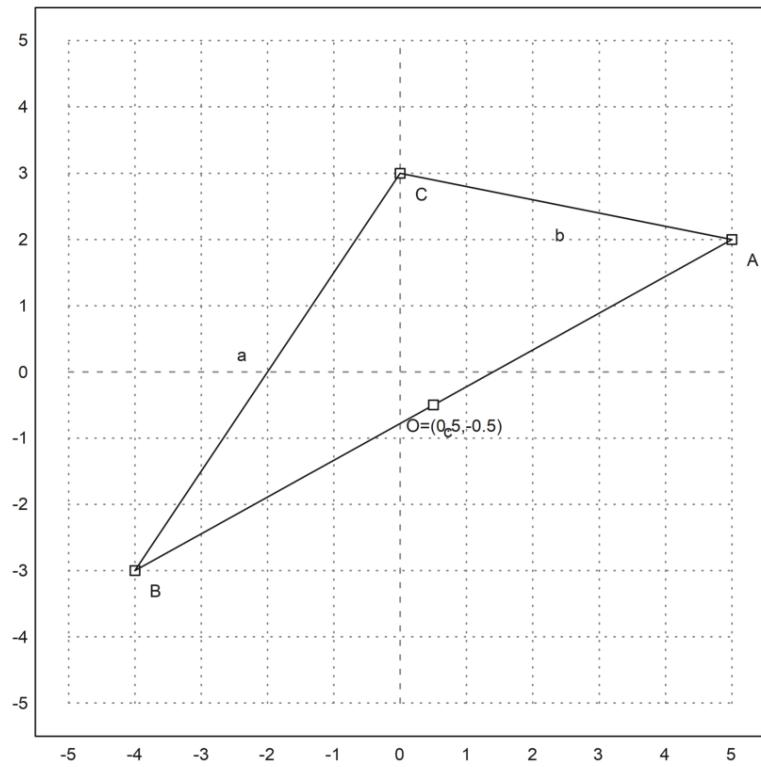
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



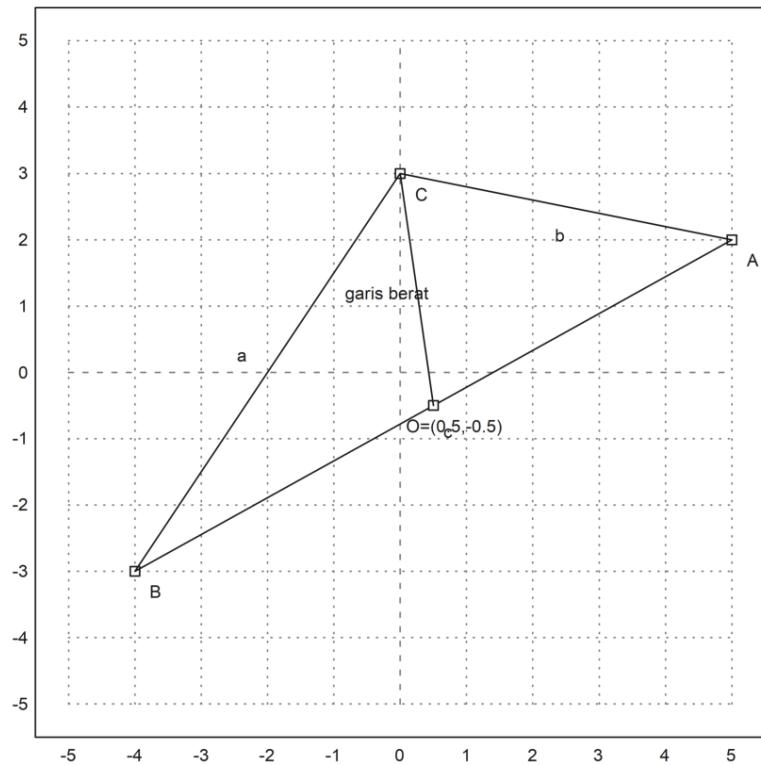
```
>t=middlePerpendicular(A, B) :
```



```
>O=lineIntersection(t, lineThrough(A,B)) ; plotPoint(O,value=1) :
```



```
>plotSegment(O,C,"garis berat"):
```



```
>A&=[5,2]
```

[5, 2]

```
>B&=[-4,-3]
```

[- 4, - 3]

```
>C&=[0,3]
```

[0, 3]

```
>t&=middlePerpendicular(A,B)
```

```
[9, 5, 2]
```

```
>O:=lineIntersection(t, lineThrough(A, B))
```

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ [-, -] \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(O, C), x, y)
```

$$-\frac{y}{2} - \frac{7x}{2} = -\frac{3}{2}$$

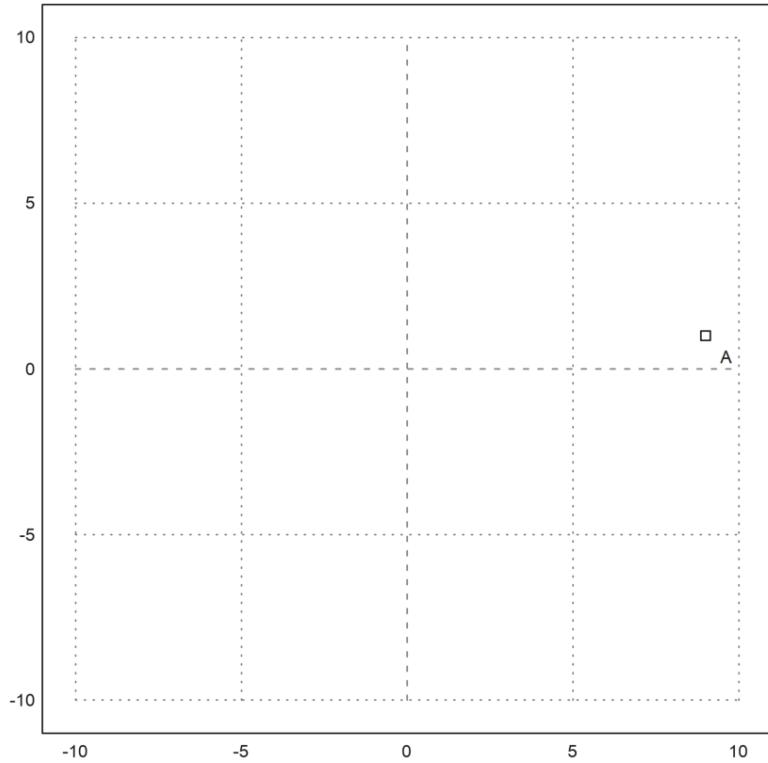
```
>$solve(%, y) | expand
```

$$[y = 3 - 7x]$$

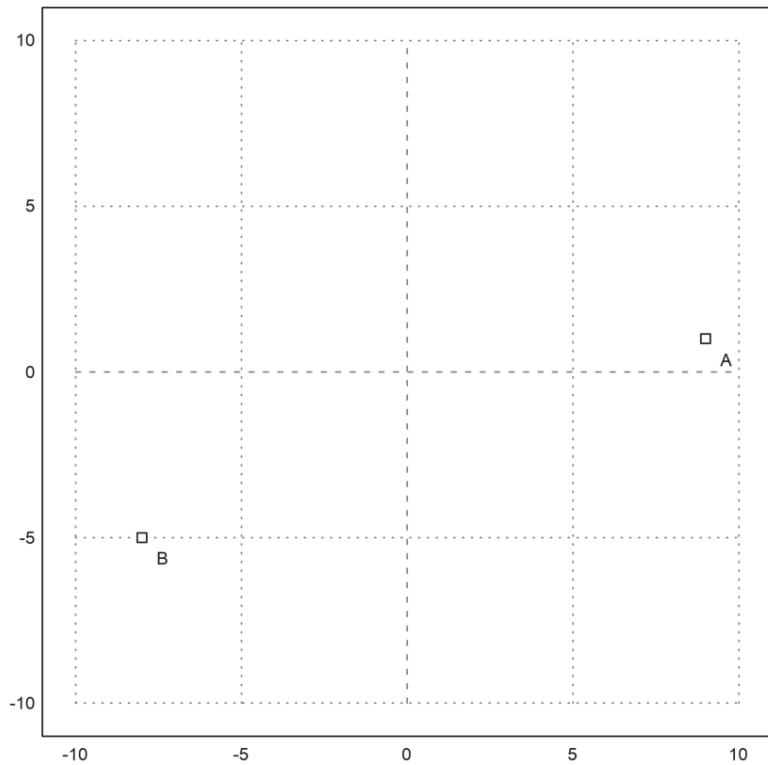
2. Tentukan persamaan garis berat yang melalui ruas garis AC dengan

$$A(9, 1), B(-8, -5), C(0, 5)$$

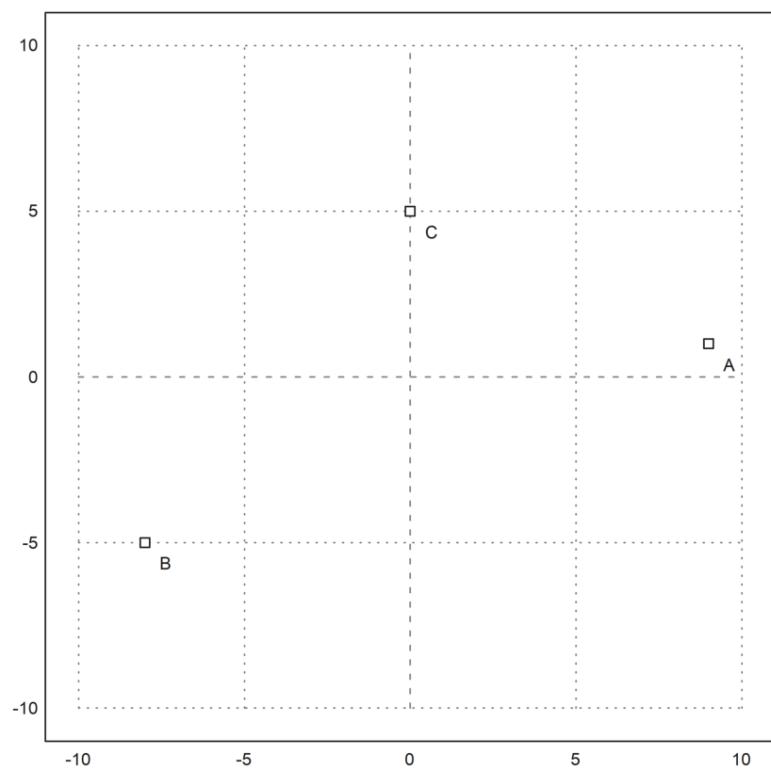
```
>setPlotRange(10);  
>A=[9,1]; plotPoint(A, "A") :
```



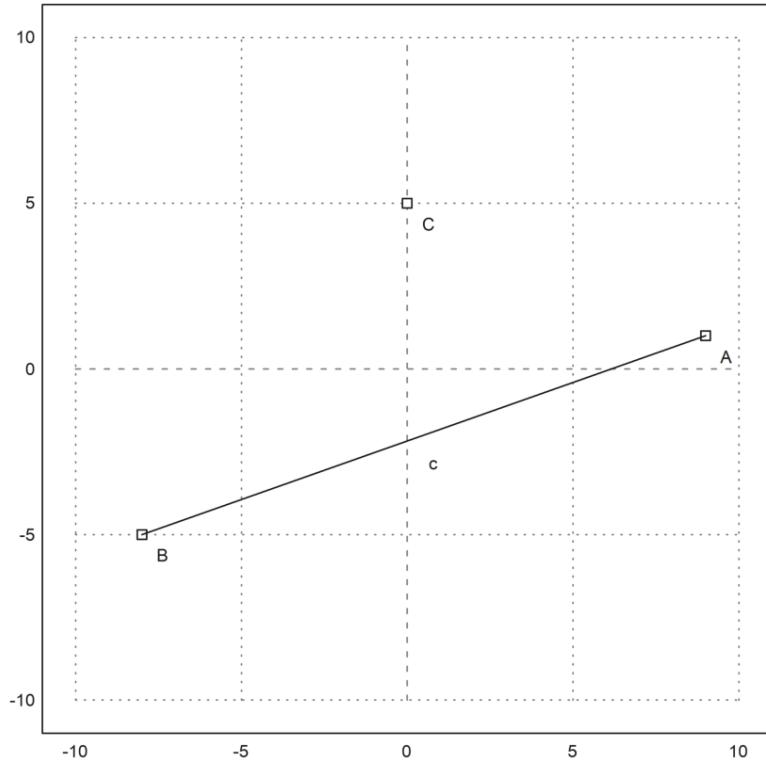
```
>B=[-8,-5]; plotPoint(B,"B"):
```



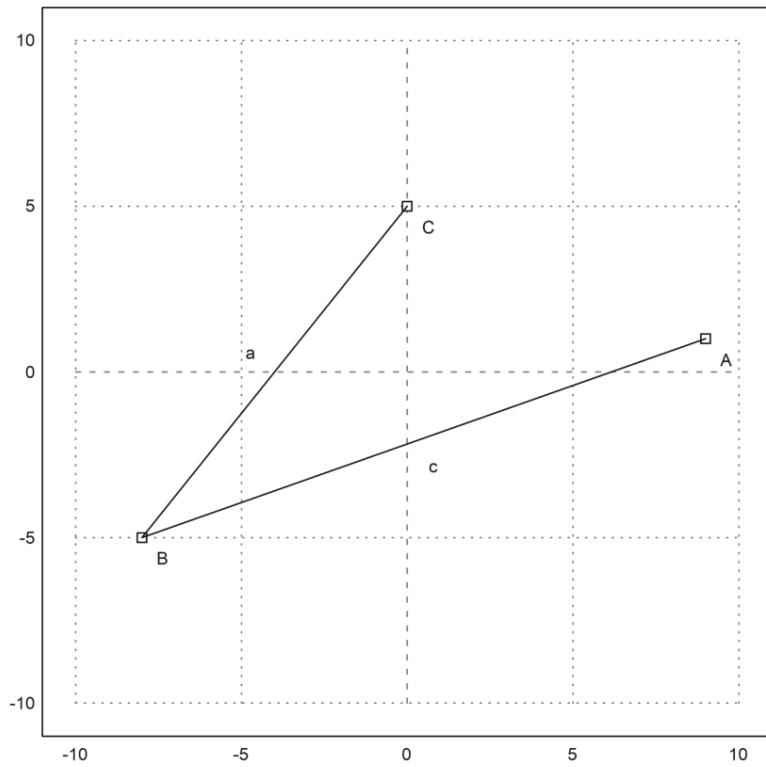
```
>C=[0,5]; plotPoint (C,"C") :
```



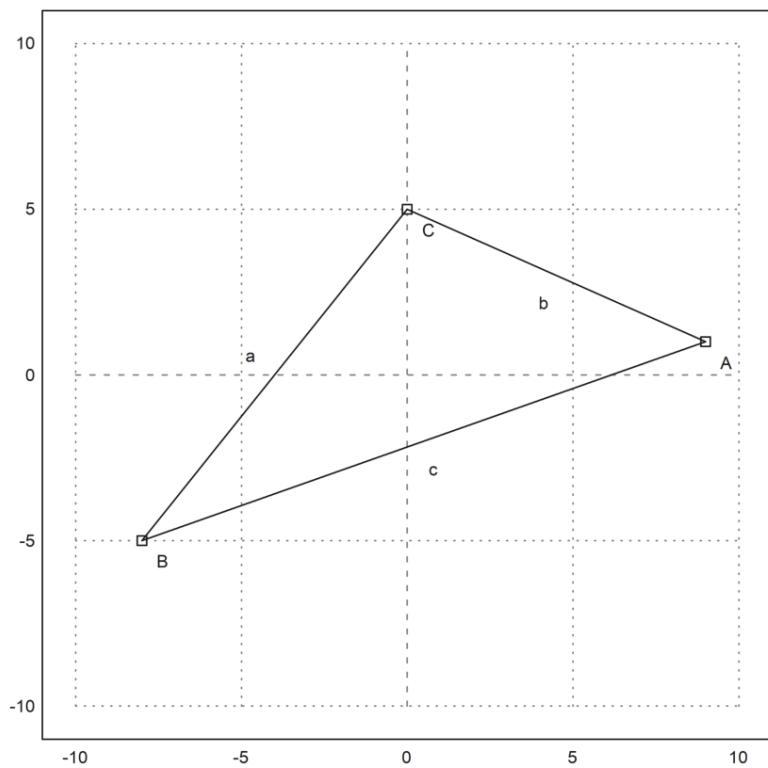
```
>plotSegment (A,B,"c") : // c=AB
```



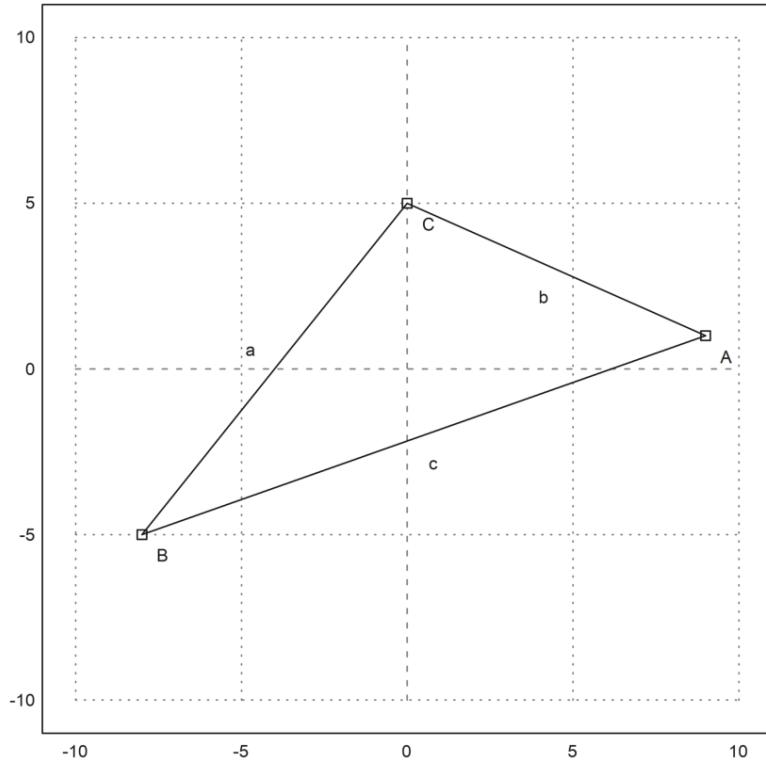
```
>plotSegment(B, C, "a") : // a=BC
```



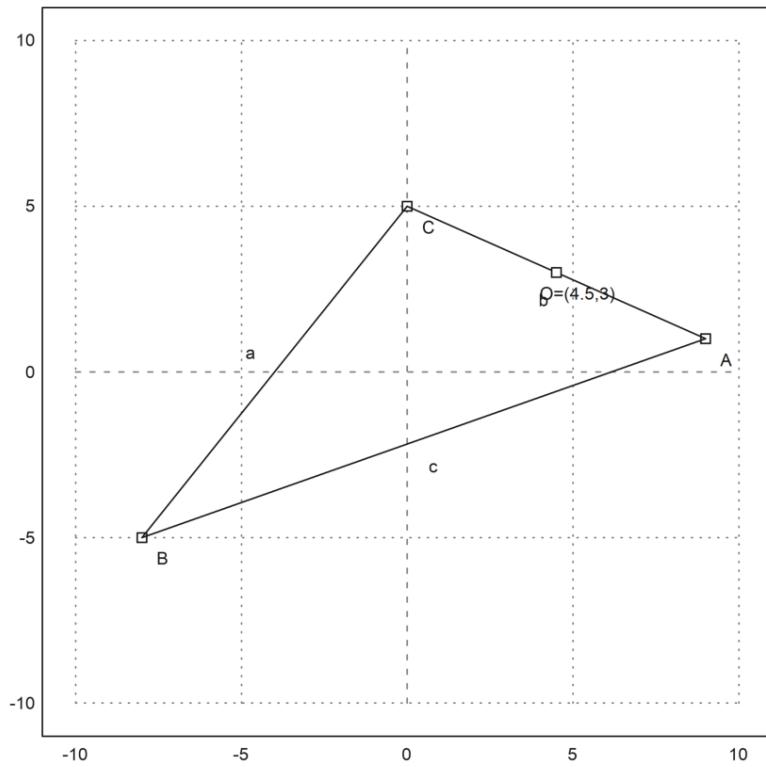
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



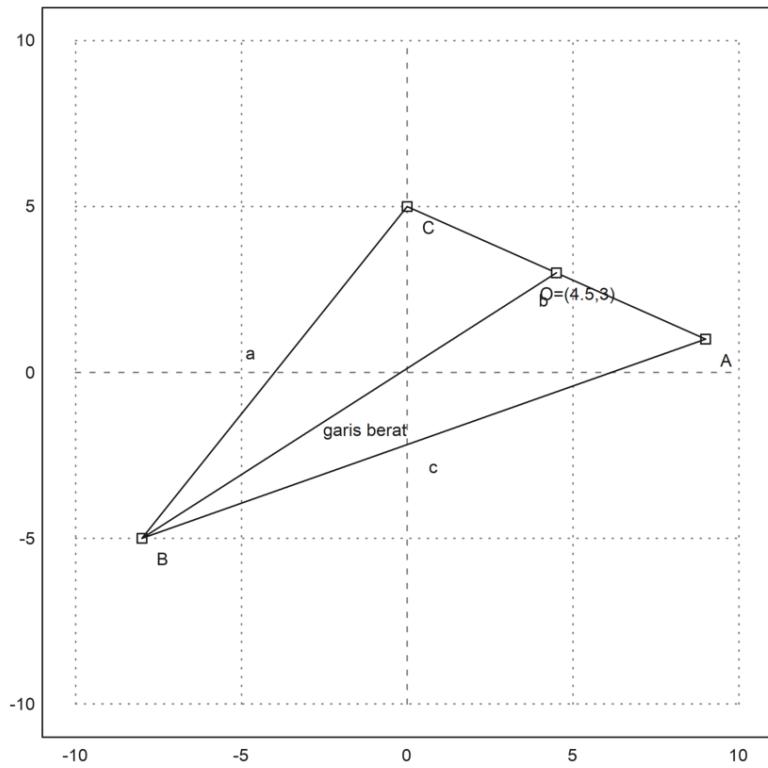
```
>t=middlePerpendicular(A, C) :
```



```
>O=lineIntersection(t, lineThrough(A,C)); plotPoint(O,value=1):
```



```
>plotSegment(O,B,"garis berat"):
```



```
>A&=[ 9 , 1 ]
```

[9 , 1]

```
>B&=[ -8 , -5 ]
```

[- 8 , - 5]

```
>C&=[ 0 , 5 ]
```

[0 , 5]

```
>t&=middlePerpendicular(A,C)
```

$$\begin{matrix} & 57 \\ [9, & - 4, & --] \\ & 2 \end{matrix}$$

```
>O:=lineIntersection(t, lineThrough(A, C))
```

$$\begin{matrix} & 9 \\ [-, & 3] \\ & 2 \end{matrix}$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(O, B), x, y)
```

$$8x - \frac{25y}{2} = -\frac{3}{2}$$

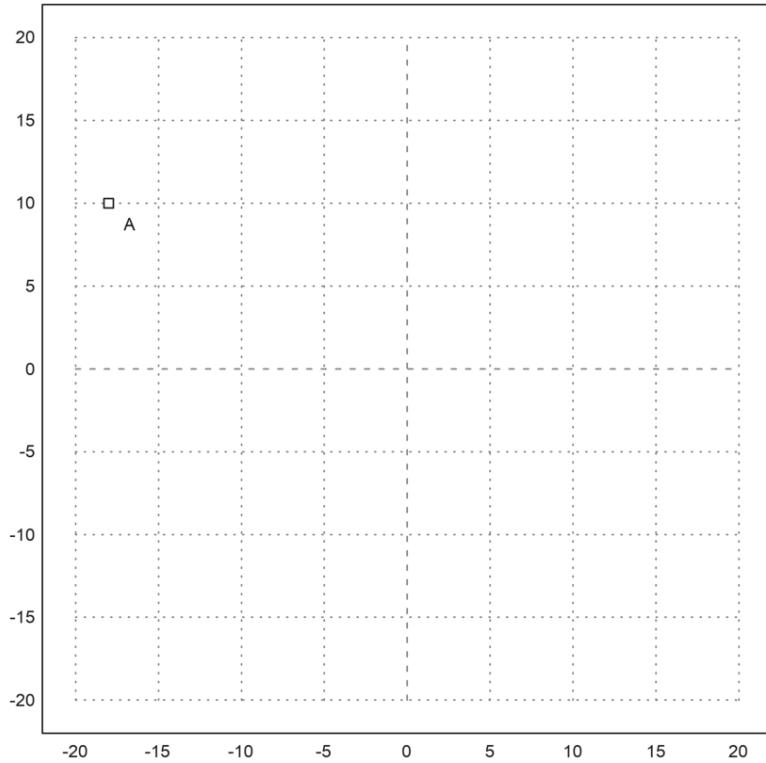
```
>$solve(%, y) | expand
```

$$\left[y = \frac{16x}{25} + \frac{3}{25} \right]$$

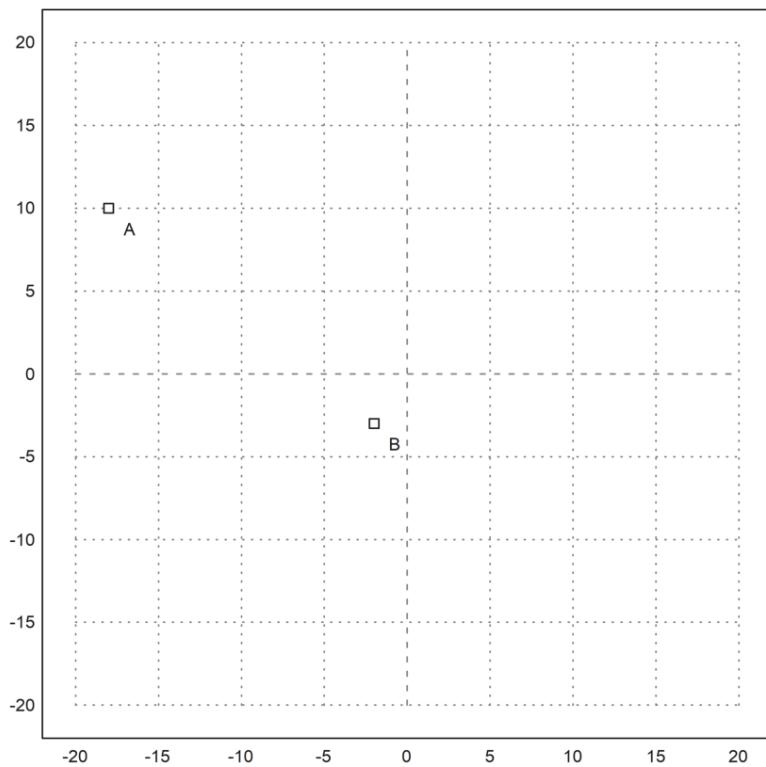
3. Tentukan persamaan garis berat dari semua titik sudut dengan

$$A(-18, 10), B(-2, -3), C(17, 7)$$

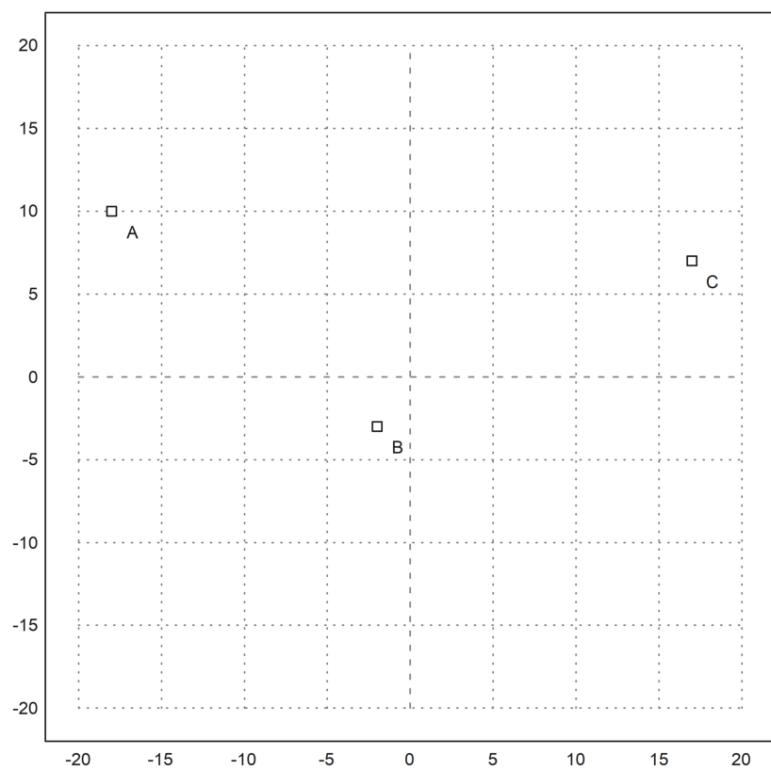
```
>setPlotRange(20);
>A=[-18,10]; plotPoint(A, "A"):
```



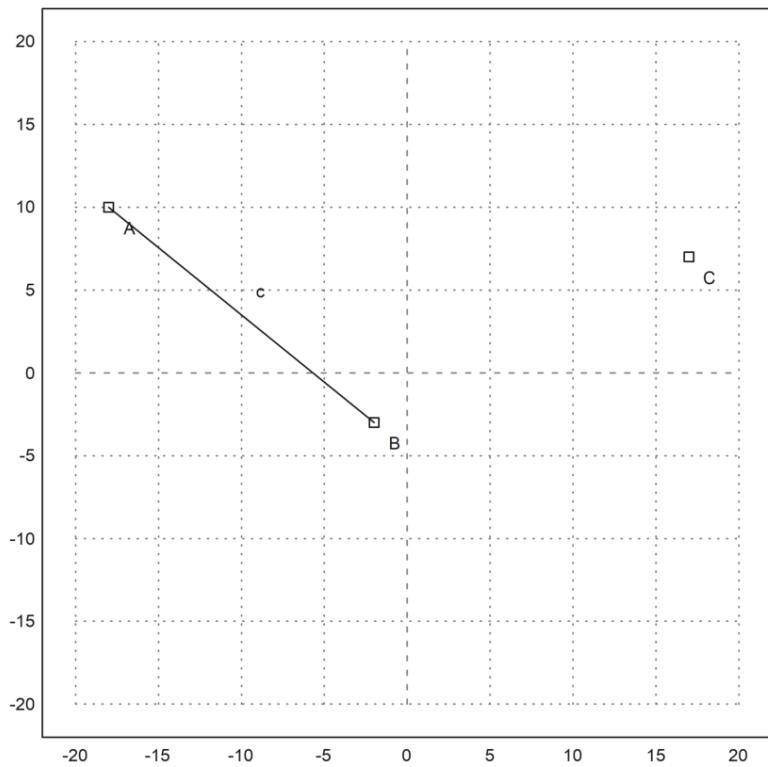
```
>B=[-2,-3]; plotPoint(B,"B"):
```



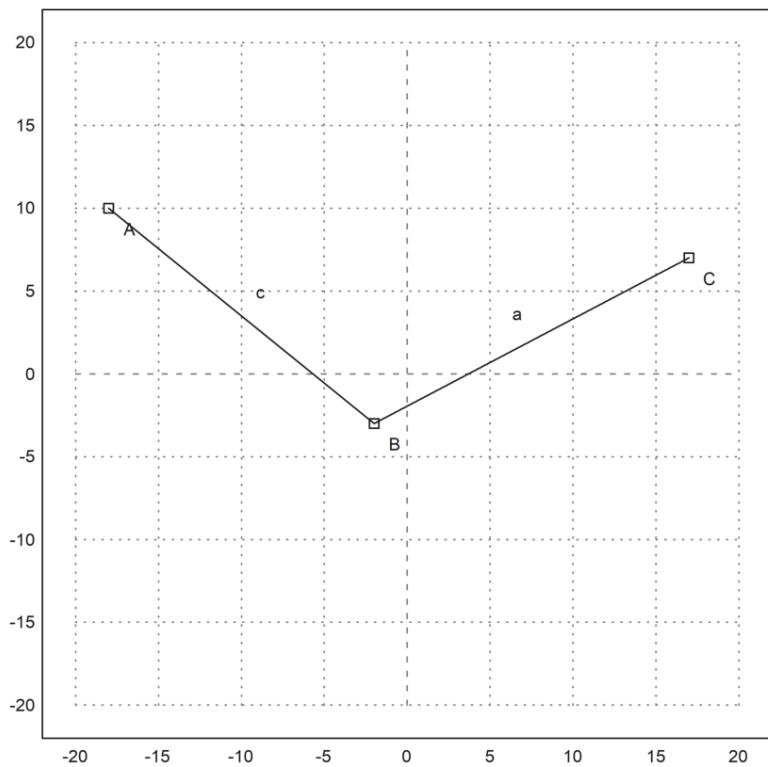
```
>C=[17,7]; plotPoint(C,"C"):
```



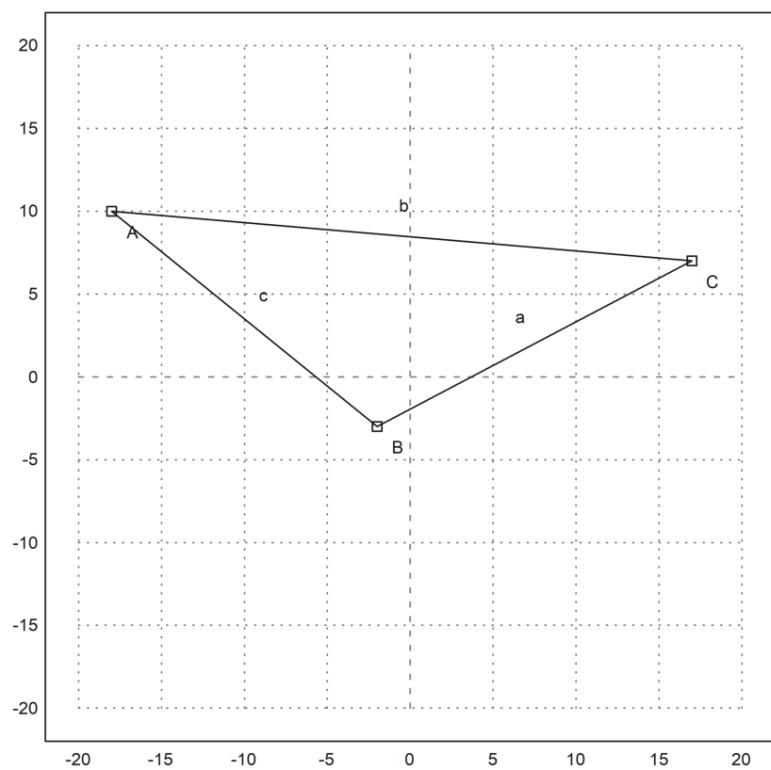
```
>plotSegment(A,B,"c");// c=AB
```



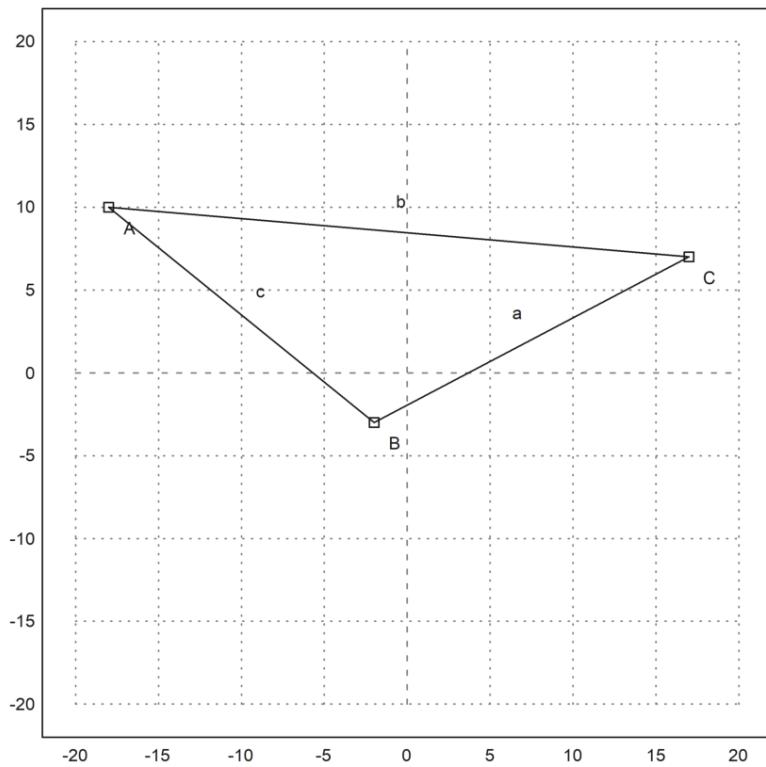
```
>plotSegment(B,C,"a") : // a=BC
```



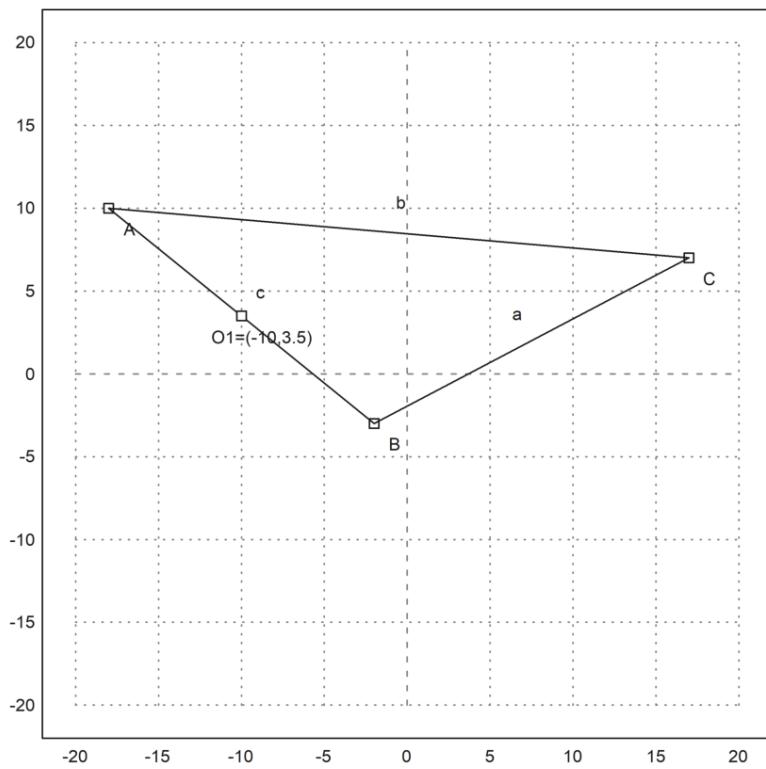
```
>plotSegment(A,C,"b") : // b=AC
```



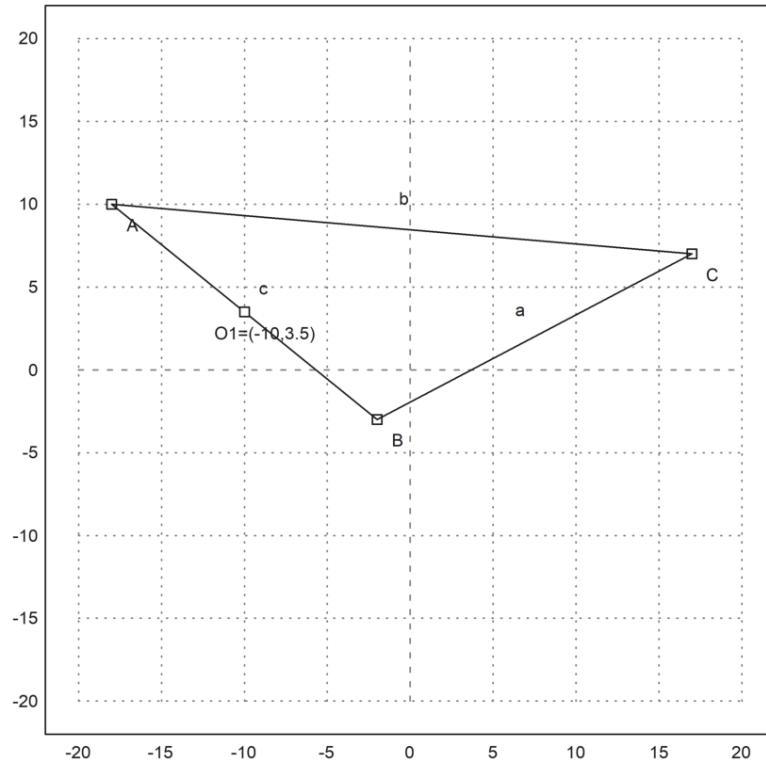
```
>t1=middlePerpendicular(A,B) :
```



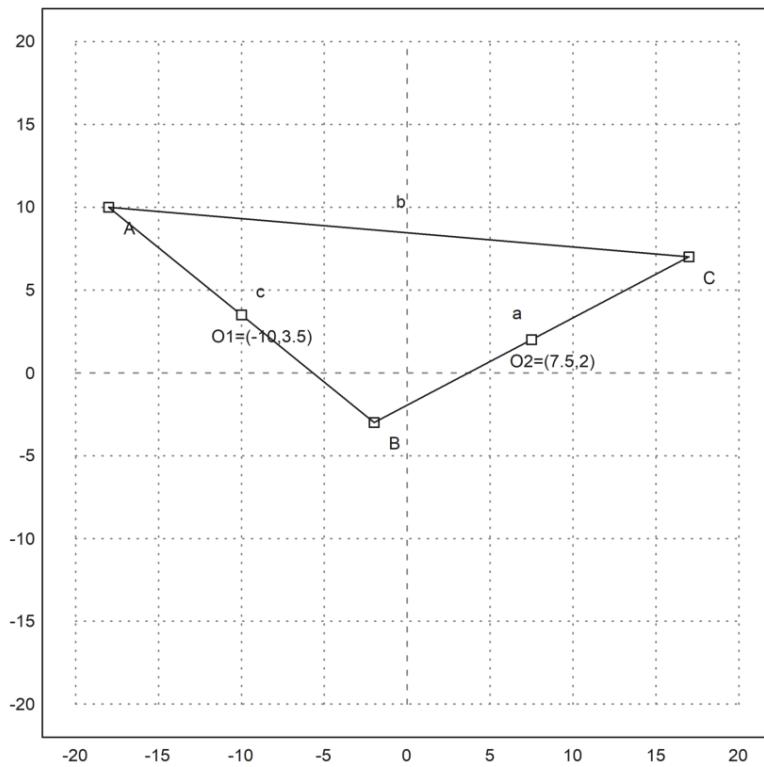
```
>O1=lineIntersection(t1,lineThrough(A,B)); plotPoint(O1,value=1):
```



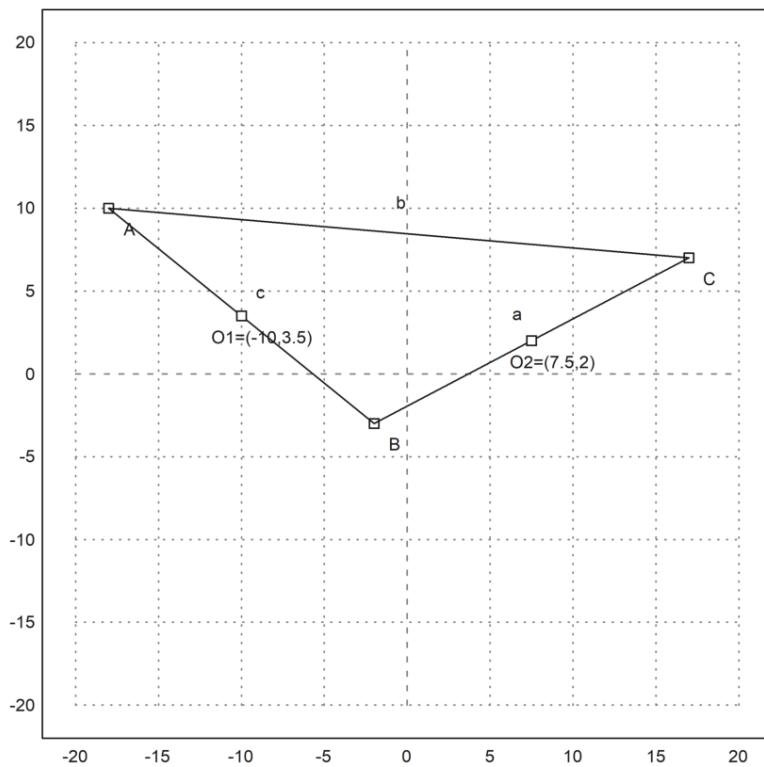
```
>t2=middlePerpendicular(C,B):
```



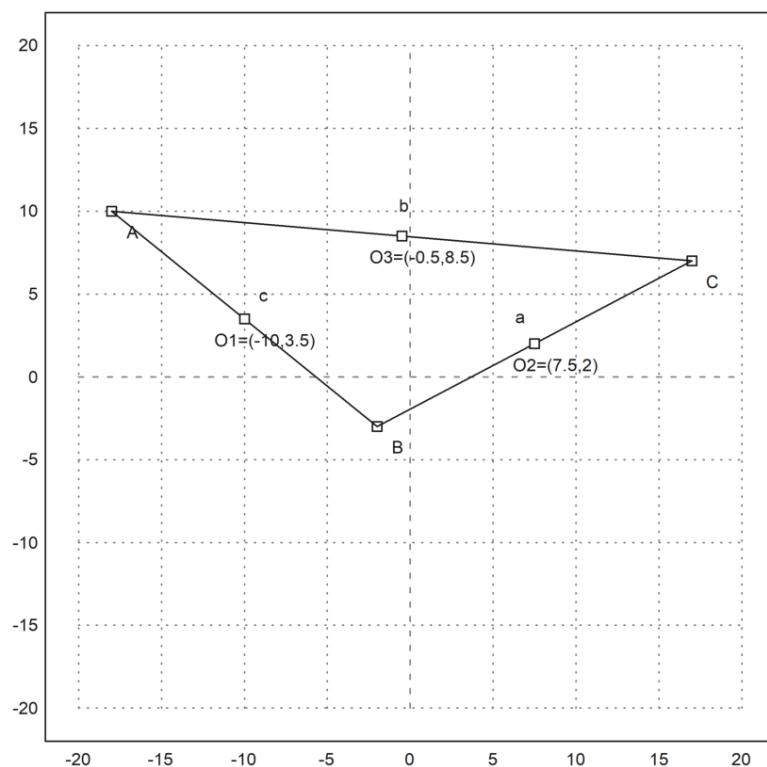
```
>O2=lineIntersection(t2,lineThrough(C,B)); plotPoint(O2,value=1):
```



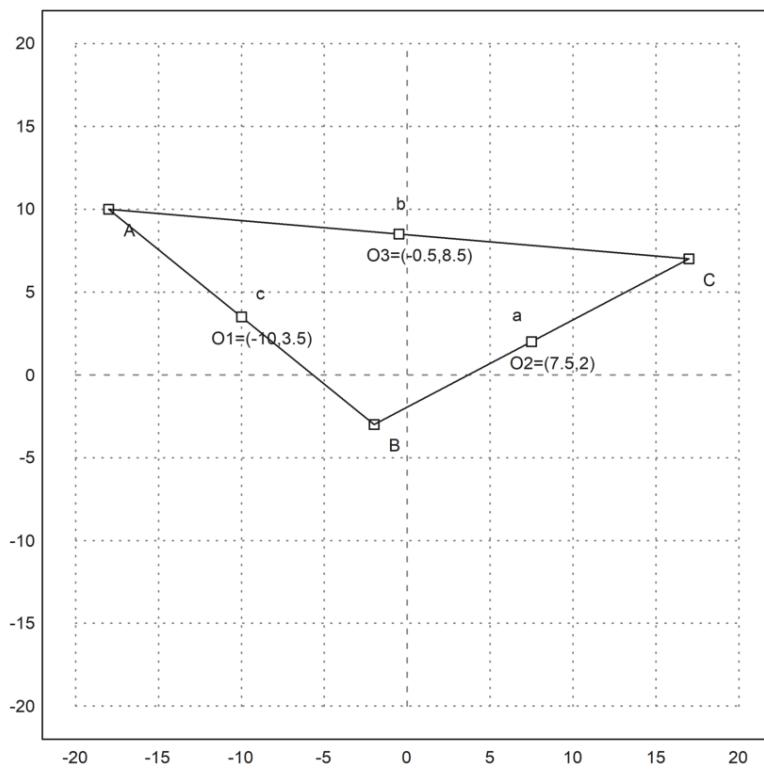
```
>t3=middlePerpendicular(A,C):
```



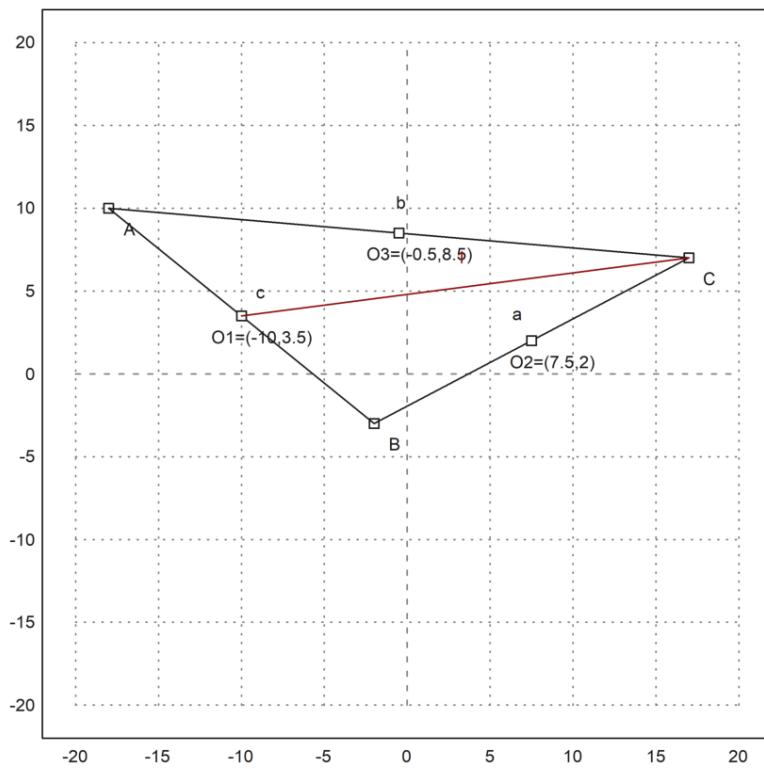
```
>O3=lineIntersection(t3,lineThrough(A,C)); plotPoint(O3,value=1):
```



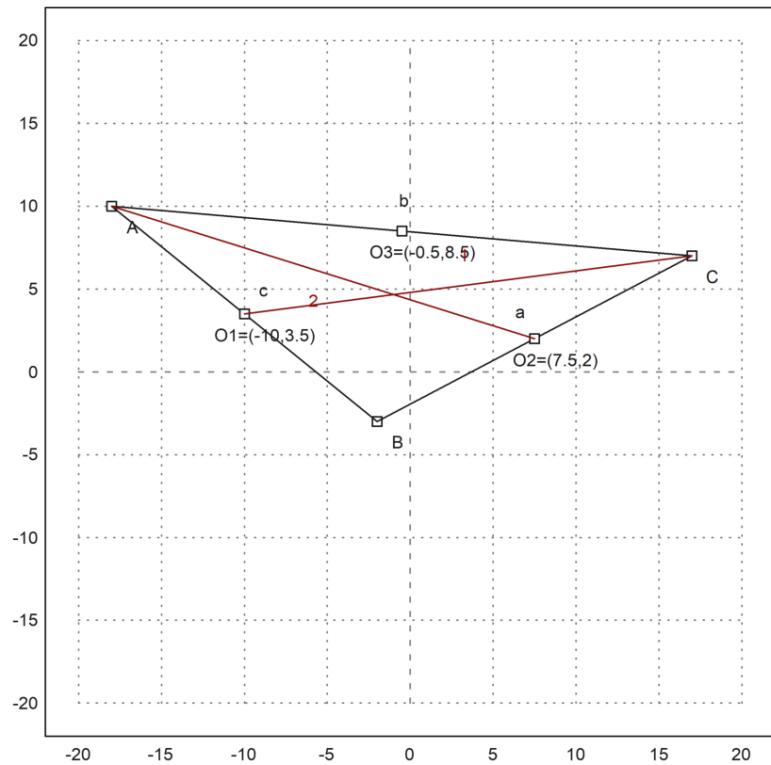
```
>color(2):
```



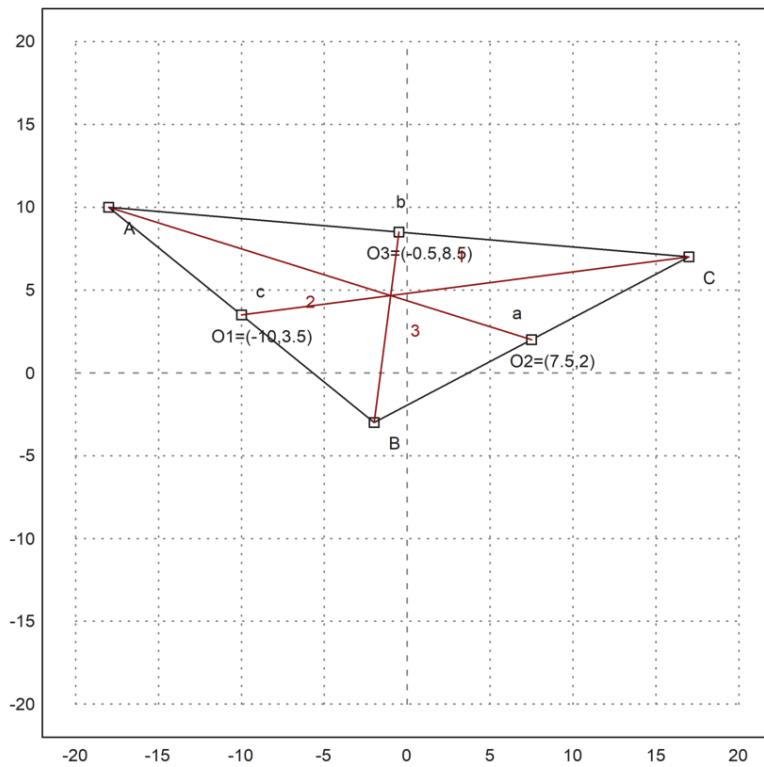
```
>plotSegment(O1,C,"1") :
```



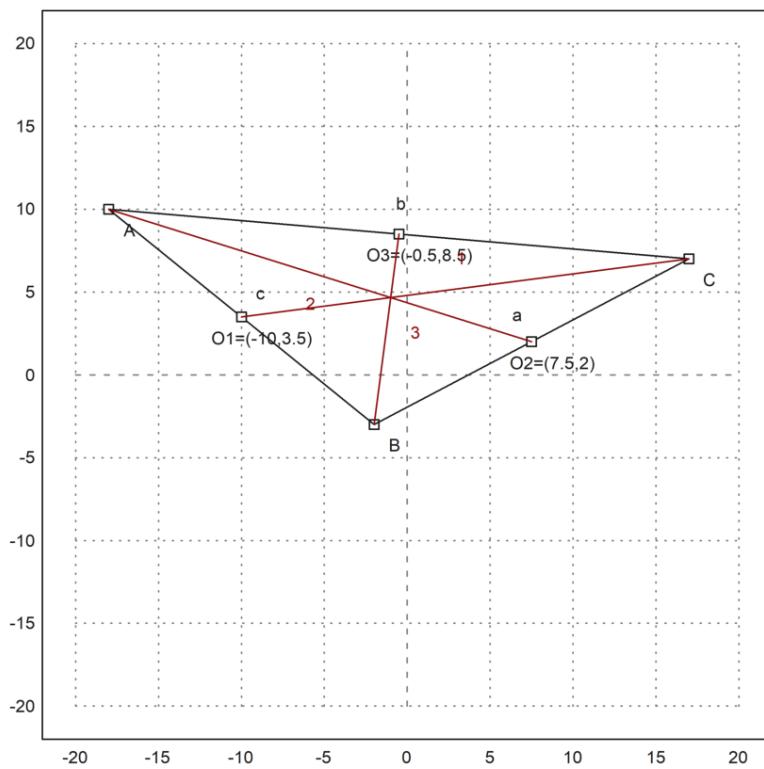
```
>plotSegment(O2,A,"2"):
```



```
>plotSegment(03,B,"3"):
```



```
>color(1):
```



```
>A&=[-18,10]
```

$$[-18, 10]$$

```
>B&=[-2,-3]
```

$$[-2, -3]$$

```
>C&=[5,-16]
```

$$[5, -16]$$

```
>t1&=middlePerpendicular(A,B)
```

$$\frac{411}{2}$$
$$[-16, 13, ---]$$

```
>O1&=lineIntersection(t1,lineThrough(A,B))
```

$$\frac{7}{2}$$
$$[-10, -]$$

```
>t2&=middlePerpendicular(C,B)
```

$$[7, -13, 134]$$

```
>O2&=lineIntersection(t2,lineThrough(C,B))
```

$$\frac{3}{2}$$
$$[-, - \frac{19}{2}, -]$$

```
>t3:=middlePerpendicular(A,C)
```

$$[-\frac{23}{2}, \frac{26}{2}, -\frac{143}{2}]$$

```
>O3:=lineIntersection(t3,lineThrough(A,C))
```

$$[-\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(O1,C),x,y)
```

$$15y + \frac{39x}{2} = -\frac{285}{2}$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = -\frac{13x}{10} - \frac{19}{2} \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(O2,A),x,y)
```

$$-\frac{39y}{2} - \frac{39x}{2} = 156$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$[y = -x - 8]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(O3,B),x,y)
```

$$\frac{9y}{2} = -\frac{27}{2}$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$[y = -3]$$

Mencari persamaan garis tinggi

Garis tinggi pada segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut.

Dengan EMT kita dapat mencari persamaan garis tinggi yaitu dengan cara:

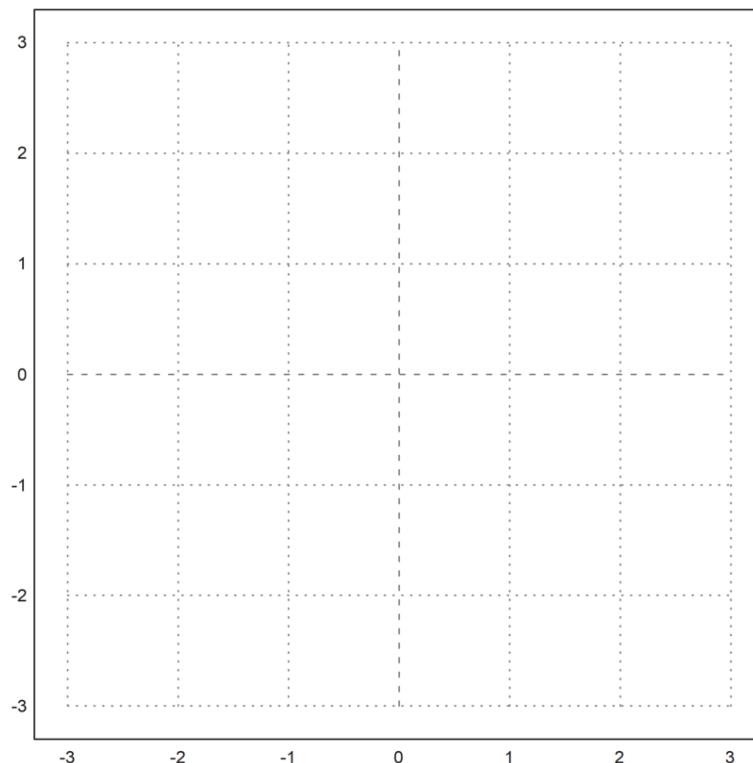
1. Mendefinisikan titik koordinat
2. Mendefinisikan g dan menggunakan perintah lineThrough(B,A)
3. Mendefinisikan h dan menggunakan perintah perpendicular(C,g)
4. Menggunakan perintah getLineEquation(h,x,y)
5. Menggunakan perintah solve(%,y) | expand

Contoh:

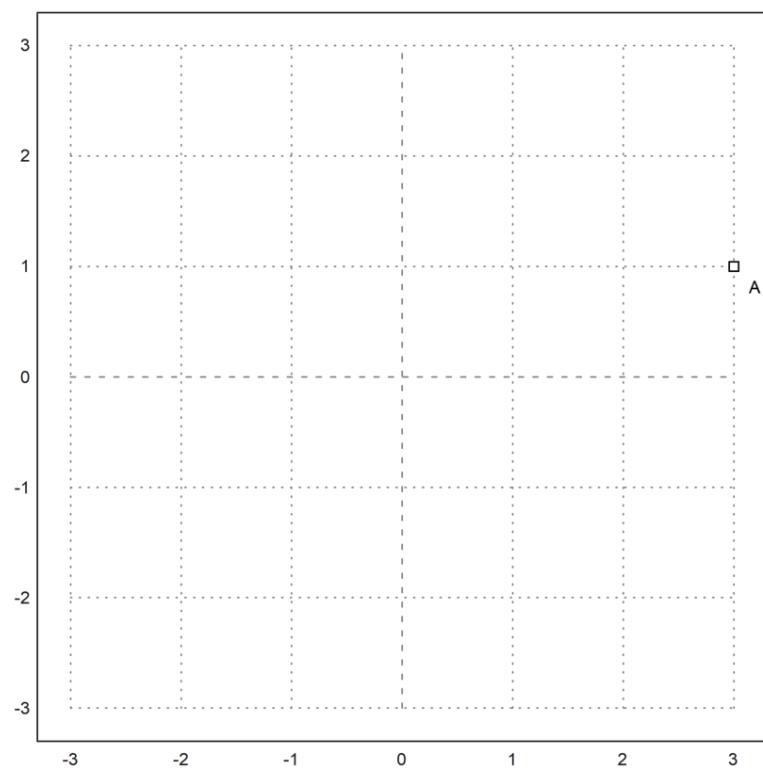
Tentukan garis tinggi dari

$$\triangle ABC, A(3, 1); B(0, 0); C(2, -2)$$

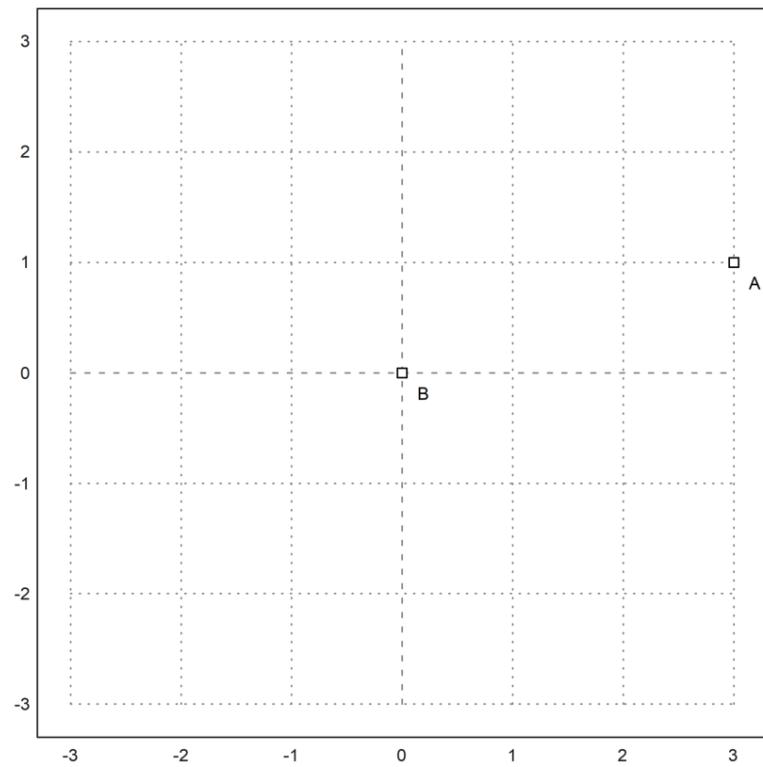
```
>setPlotRange (3) :
```



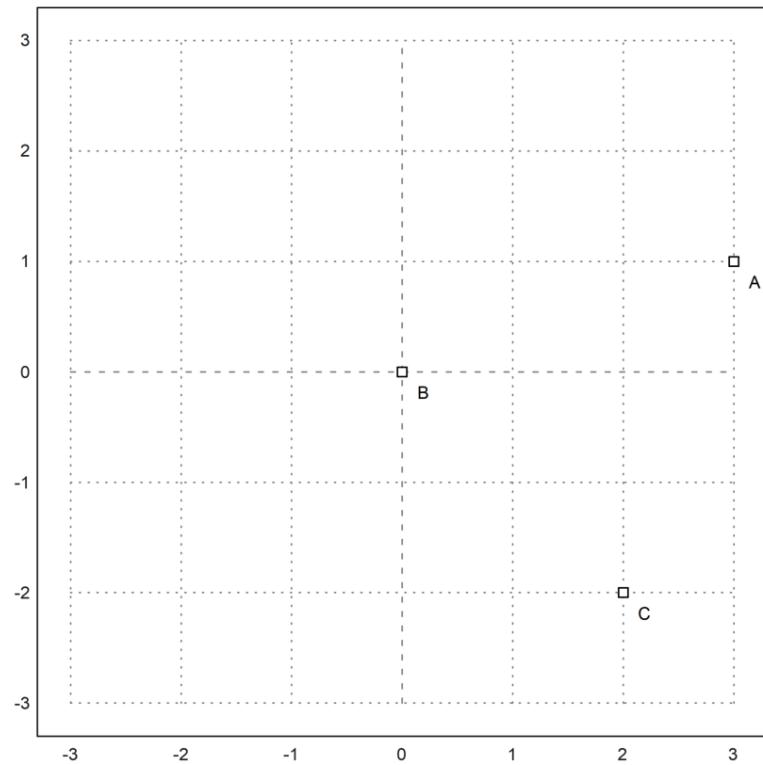
```
>A=[3,1]; plotPoint(A,"A"):
```



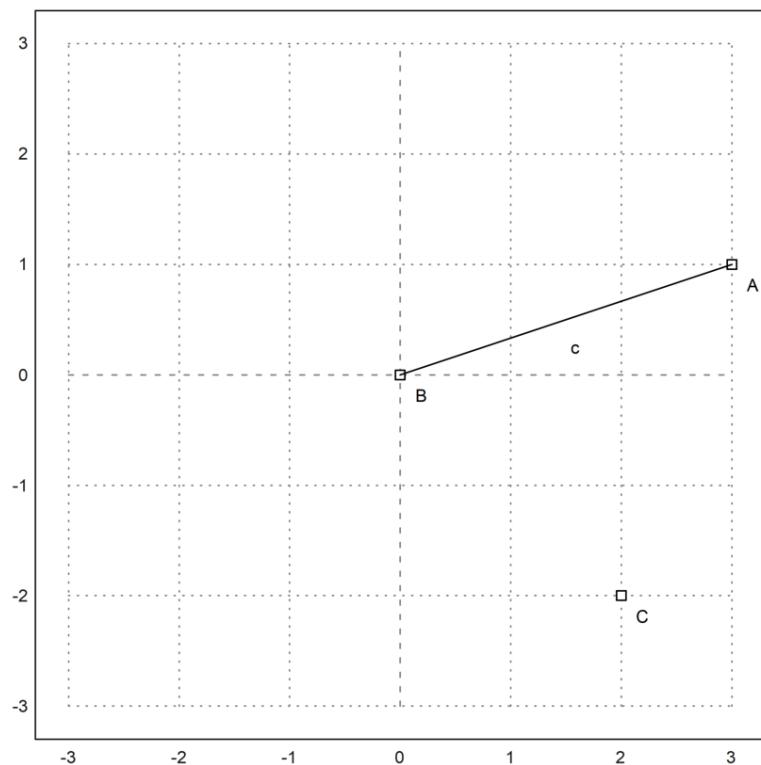
```
>B=[0,0]; plotPoint(B,"B"):
```



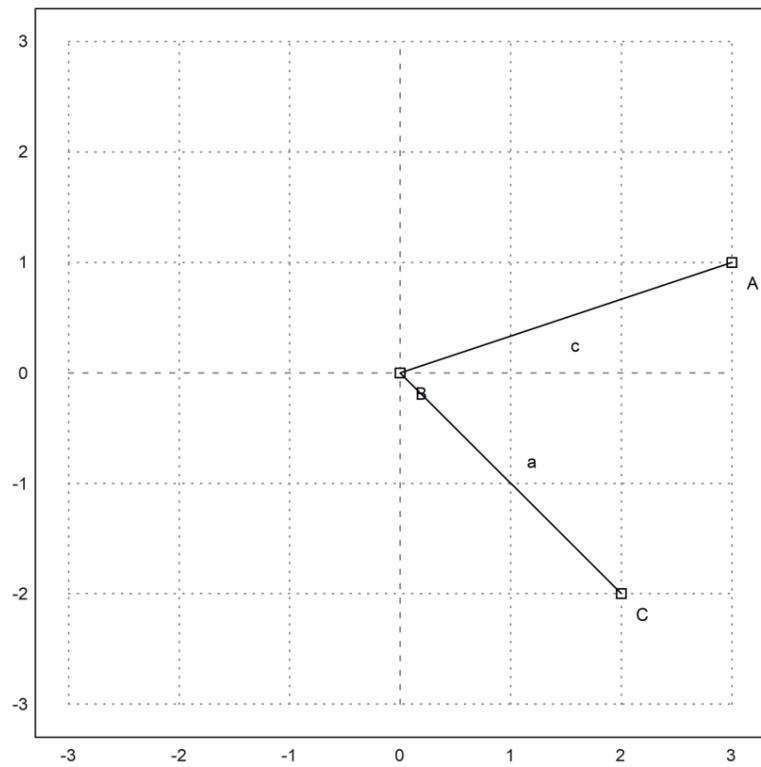
```
>C=[2,-2]; plotPoint(C, "C") :
```



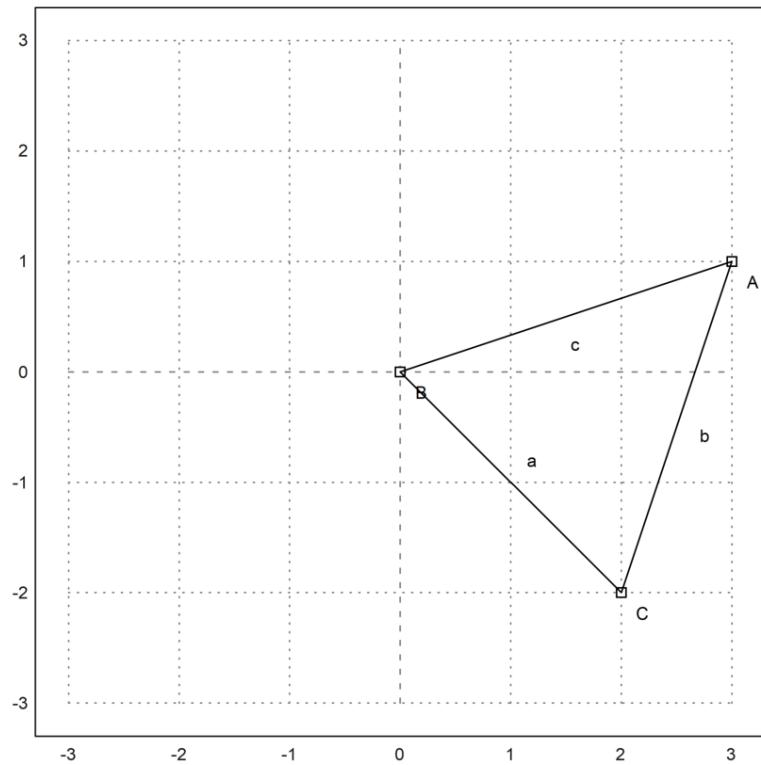
```
>plotSegment (A, B, "c") : // c=AB
```



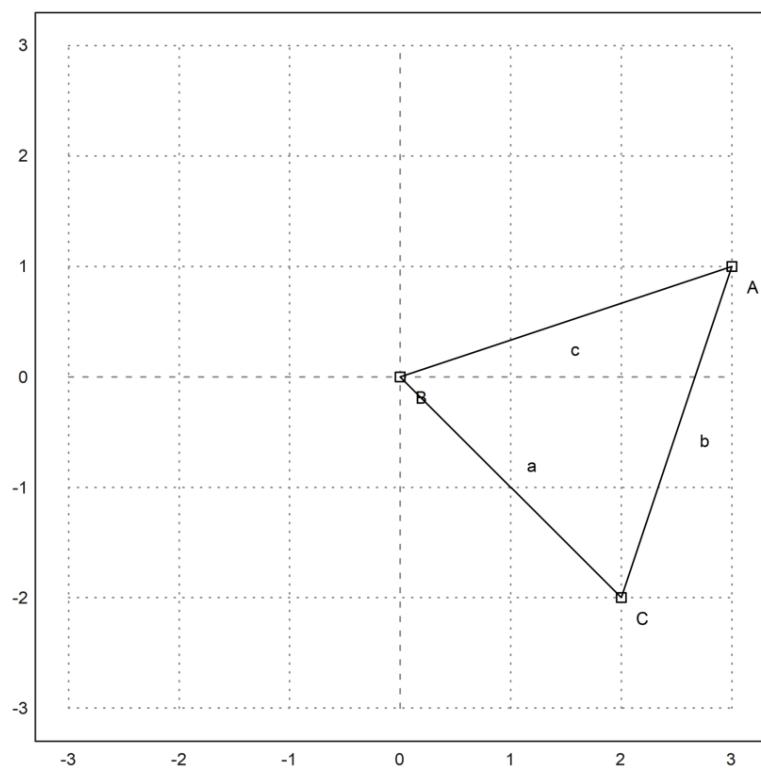
```
>plotSegment (B, C, "a") : // a=BC
```



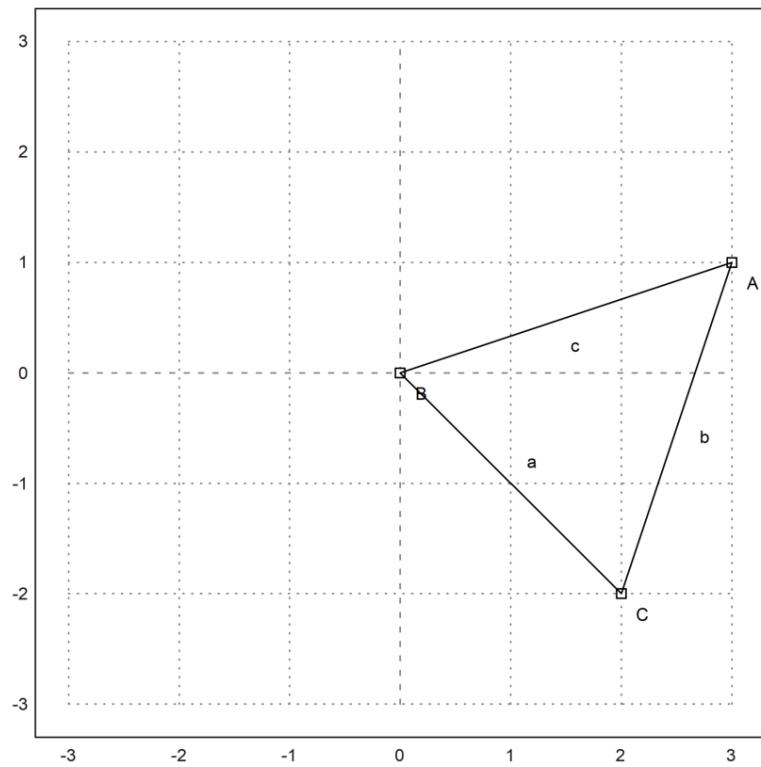
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



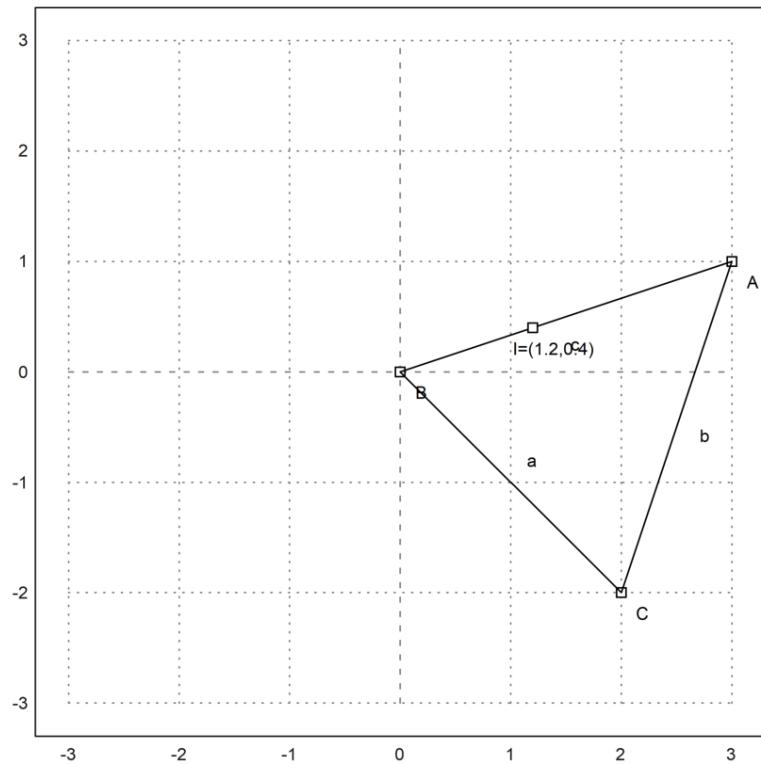
```
>g=lineThrough(B,A) :
```



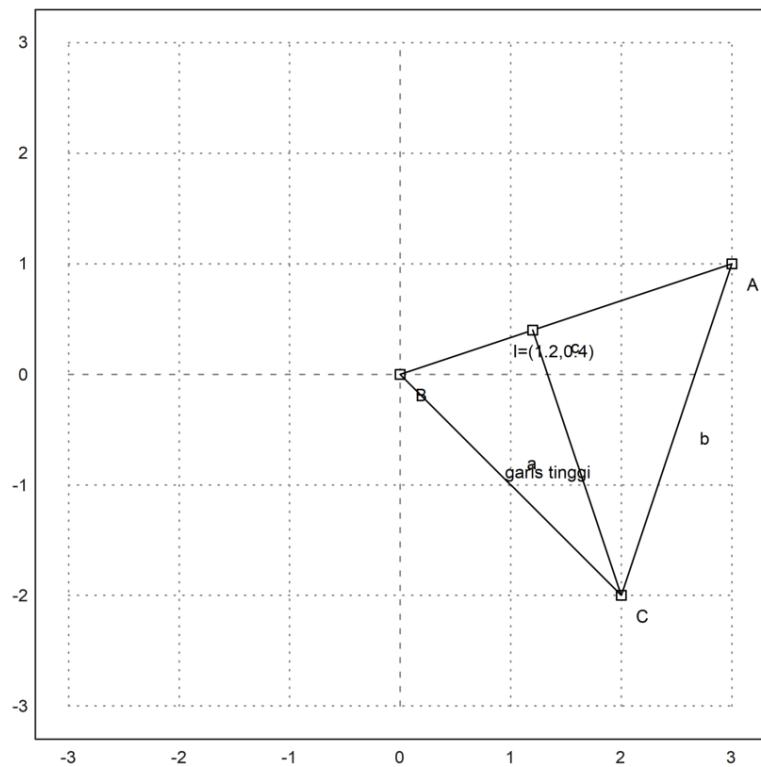
```
>h=perpendicular(C,g) :
```



```
>I = lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1):
```



```
>plotSegment(C,I,"garis tinggi"):
```



```
>A&=[3,1]
```

[3, 1]

```
>B&=[0,0]
```

[0, 0]

```
>C&=[2,-2]
```

[2, - 2]

```
>g&=lineThrough(B,A)
```

$$[-1, 3, 0]$$

```
>h&=perpendicular(C,g)
```

$$[3, 1, 4]$$

```
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$y + 3x = 4$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$[y = 4 - 3x]$$

Pembuktian menggunakan rumus matematika:

Pembuktian dengan menggunakan rumus matematika:

1. Mencari persamaan garis AB

$$\frac{y - 1}{0 - 1} = \frac{x - 3}{0 - 3}$$

$$\frac{y - 1}{-1} = \frac{x - 3}{-3}$$

$$-3y + 3 = -x - +3$$

$$3y = x$$

$$y = \frac{x}{3}$$

maka gradiennya

$$m = \frac{1}{3}$$

karena tegak lurus dengan garis tinggi, maka gradien garis tinggi:

$$m = -3$$

2. Mencari persamaan garis sumbu dengan gradien:

$$m = -3$$

dan melalui titik:

$$(2, -2)$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - (-2)) = -3(x - 2)$$

$$y + 2 = -3x + 6$$

$$y = -3x + 4$$

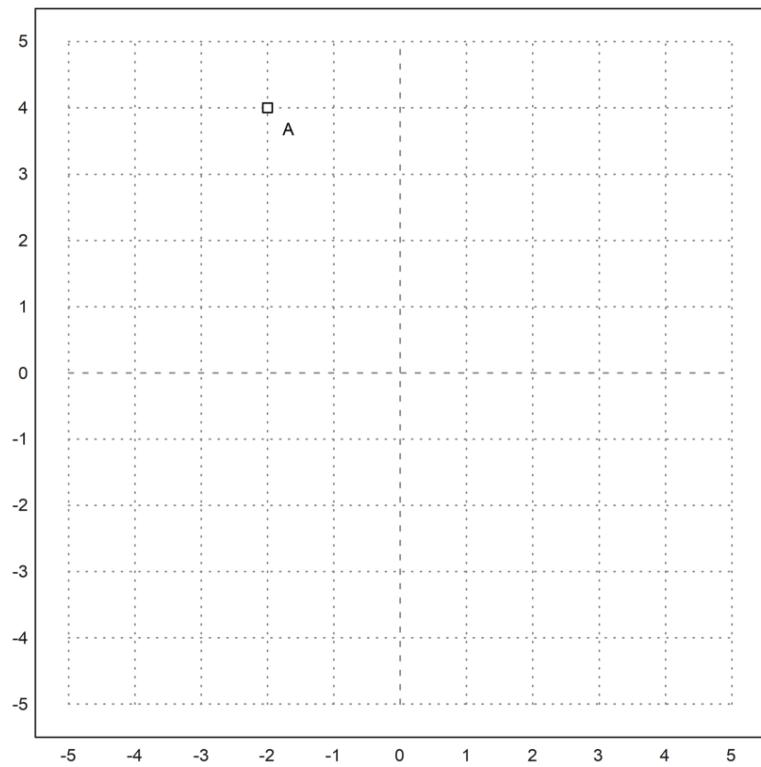
Terbukti

Latihan E

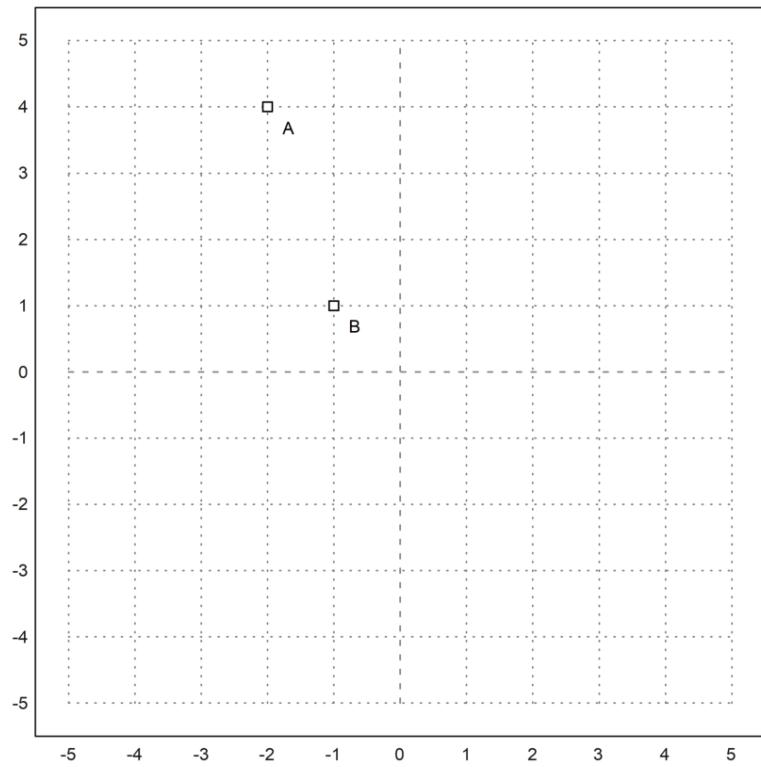
1. Tentukan persamaan tinggi yang diukur dari titik A

$$A(-2, 4), B(-1, 1), C(5, -4)$$

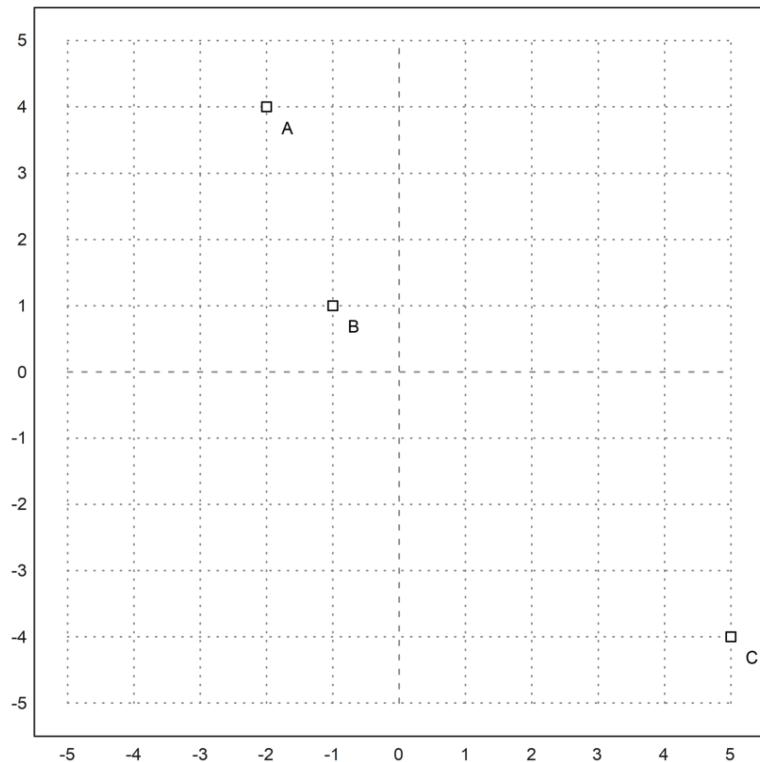
```
>setPlotRange(5);  
>A=[-2,4]; plotPoint(A, "A");
```



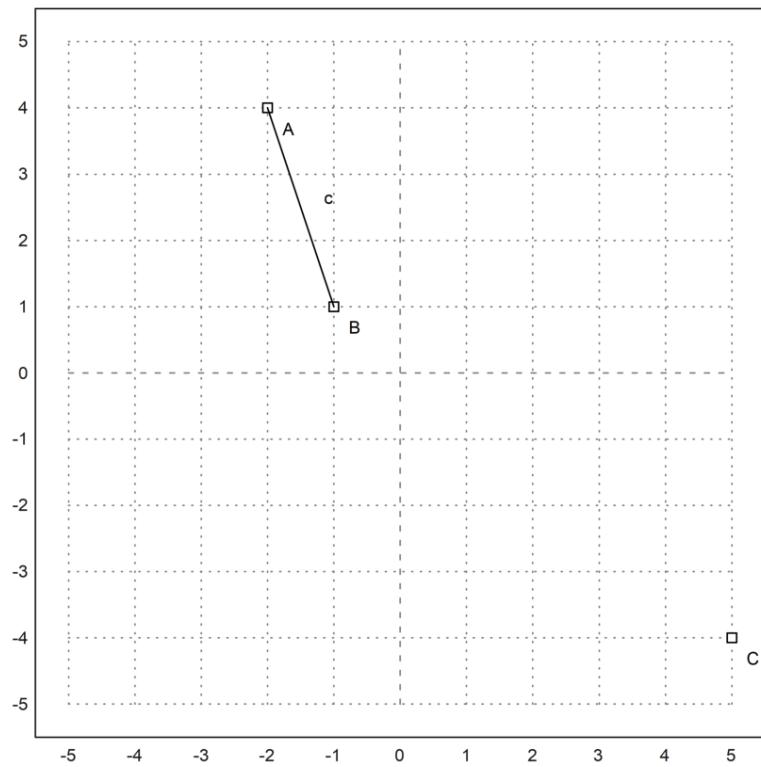
```
>B=[-1,1]; plotPoint(B, "B") :
```



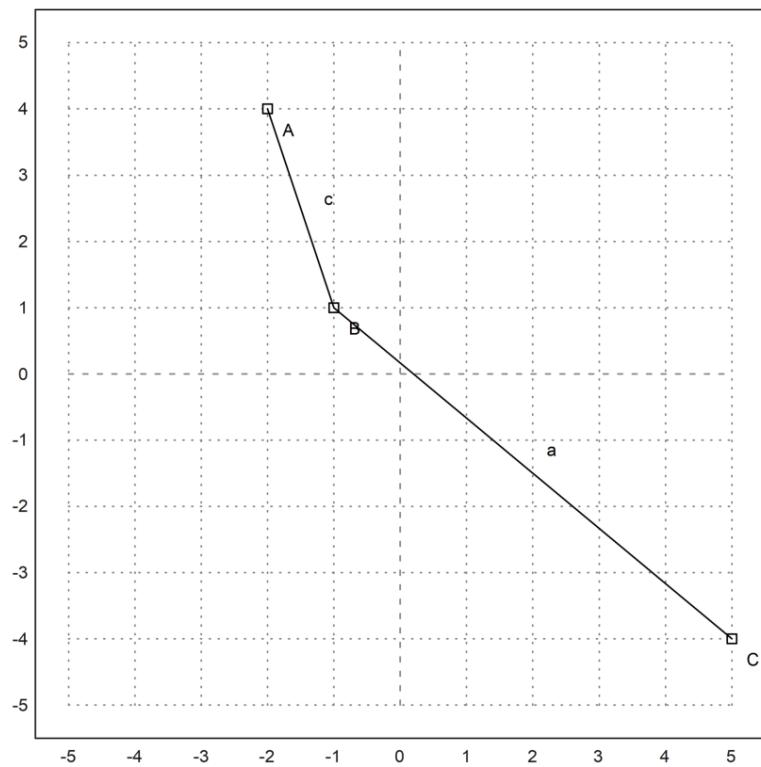
```
>C=[5,-4]; plotPoint(C,"C"):
```



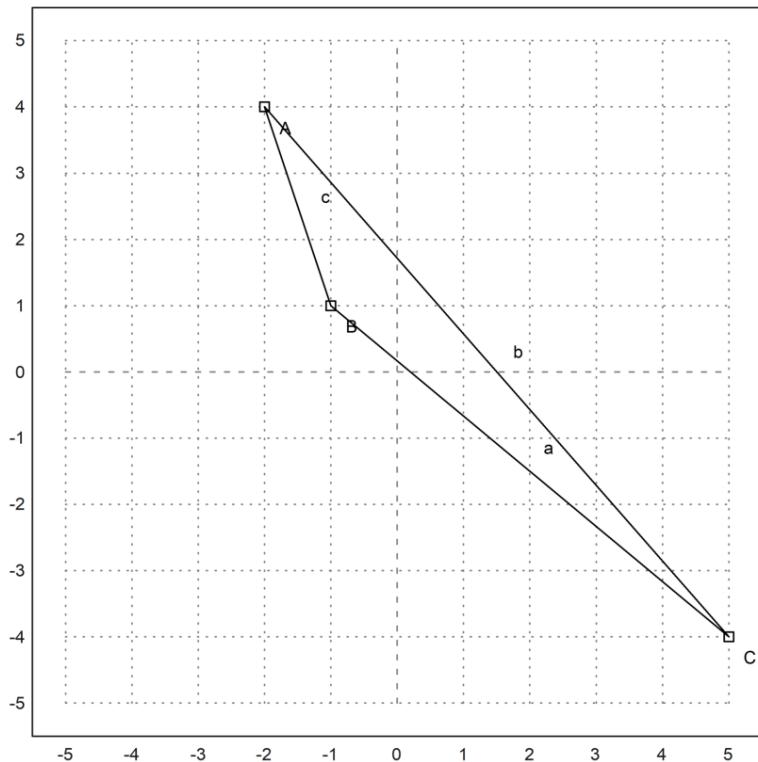
```
>plotSegment(A,B,"c");// c=AB
```



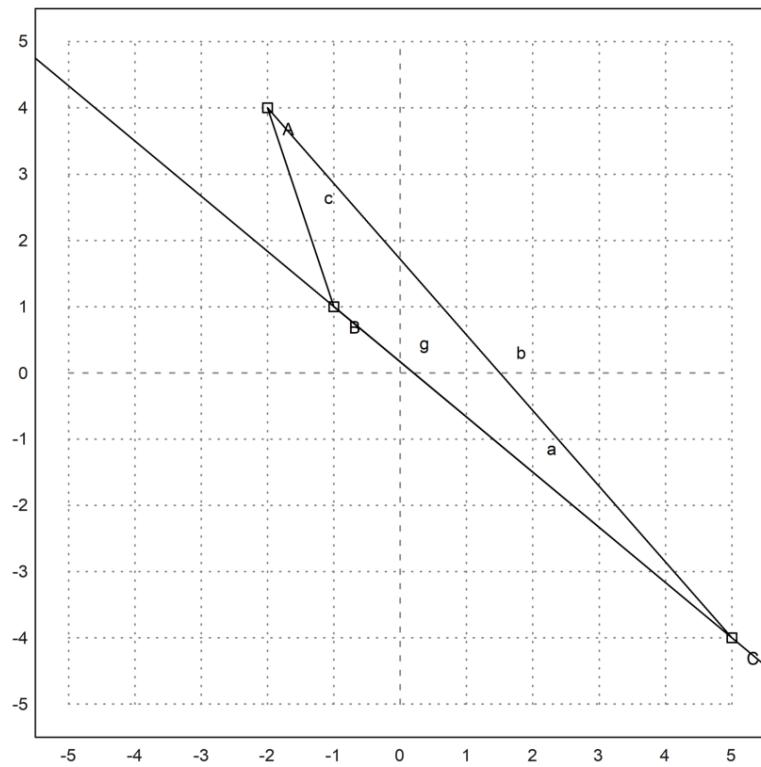
```
>plotSegment(B, C, "a") : // a=BC
```



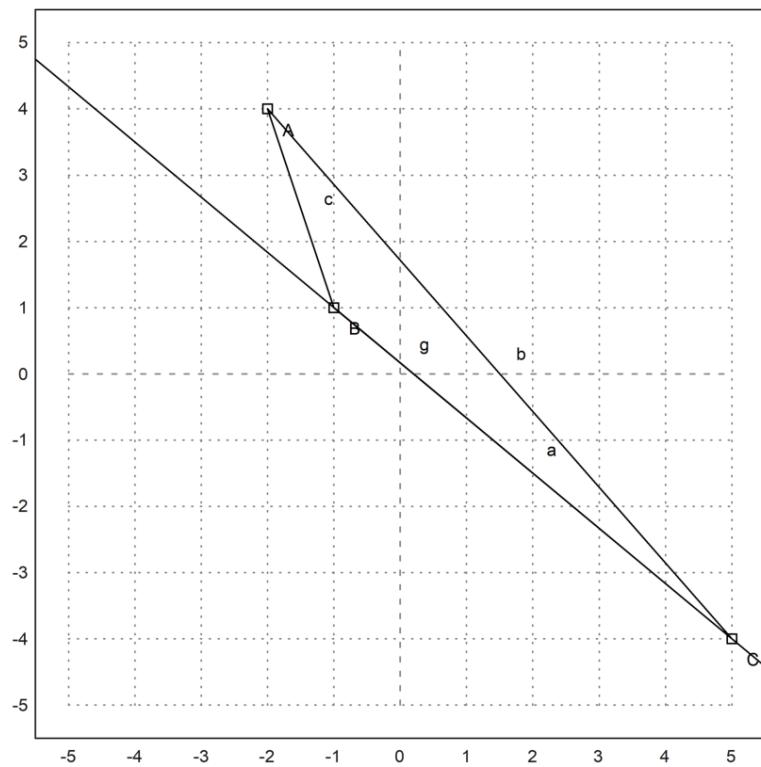
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



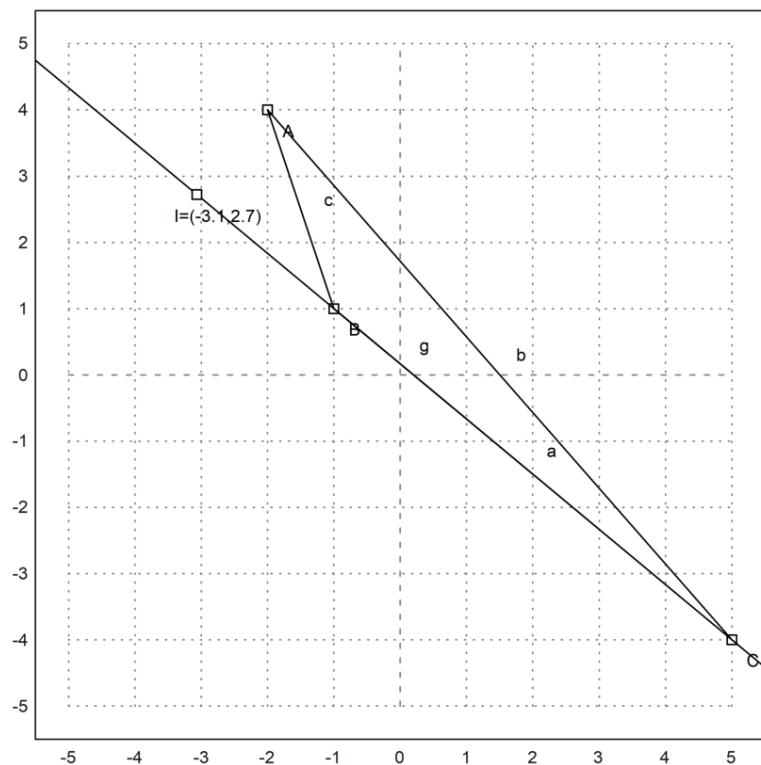
```
>g=lineThrough(B, C); plotLine(g, "g") :
```



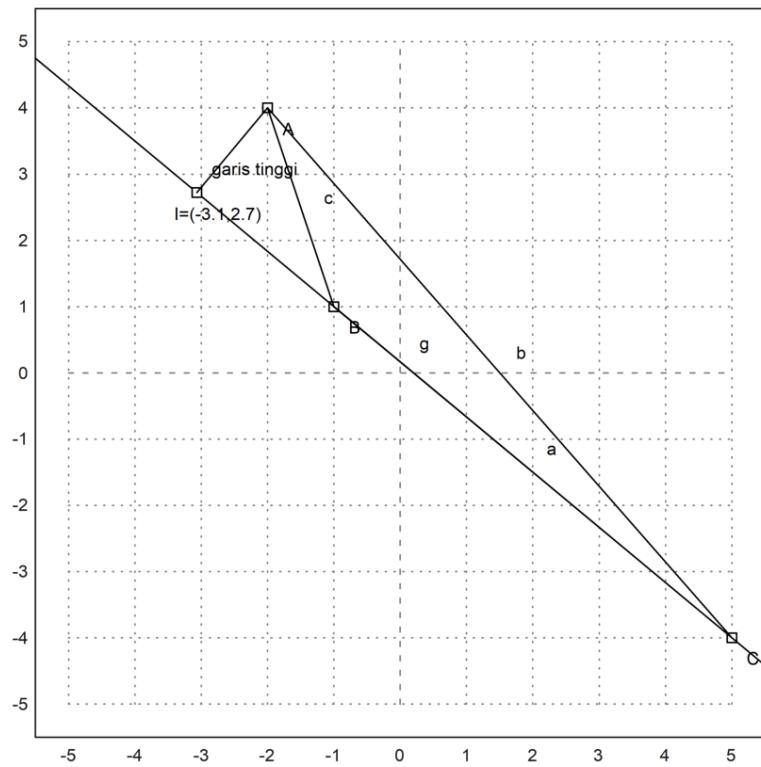
```
>h=perpendicular(A,g):
```



```
>I = lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1):
```



```
>plotSegment(A,I,"garis tinggi"):
```



```
>A&=[-2, 4]
```

$[-2, 4]$

```
>B&=[-1, 1]
```

$[-1, 1]$

```
>C&=[5, -4]
```

$[5, -4]$

```
>g&=lineThrough(B,C)
```

$[5, 6, 1]$

```
>h&=perpendicular(A,g)
```

$$[6, -5, -32]$$

```
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$6x - 5y = -32$$

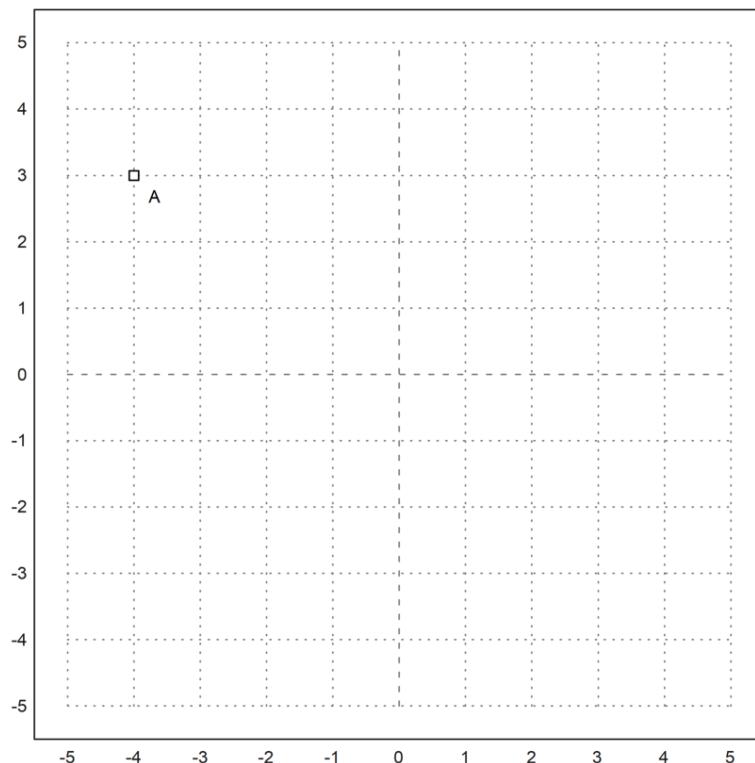
```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{6x}{5} + \frac{32}{5} \right]$$

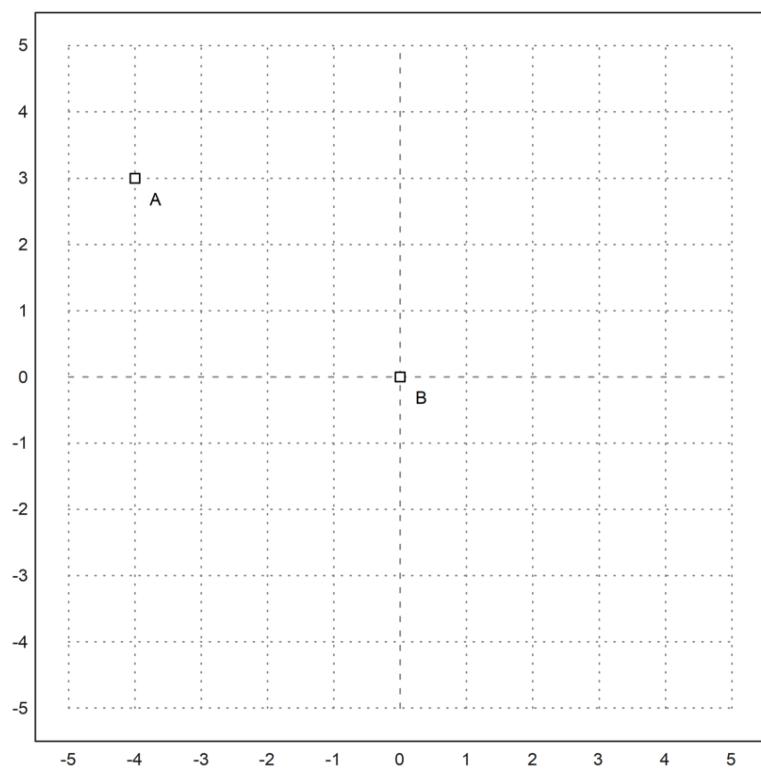
2. Tentukan tinggi segitiga ABC di titik B dengan

$$A(-4, 3), B(0, 0), C(2, 2)$$

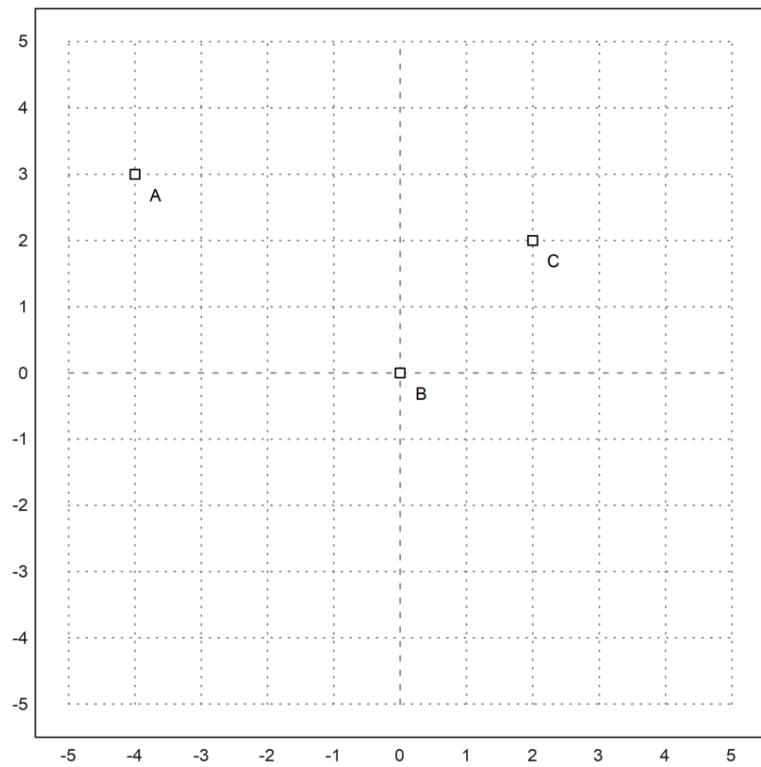
```
>setPlotRange(5);  
>A=[-4,3]; plotPoint(A,"A"):
```



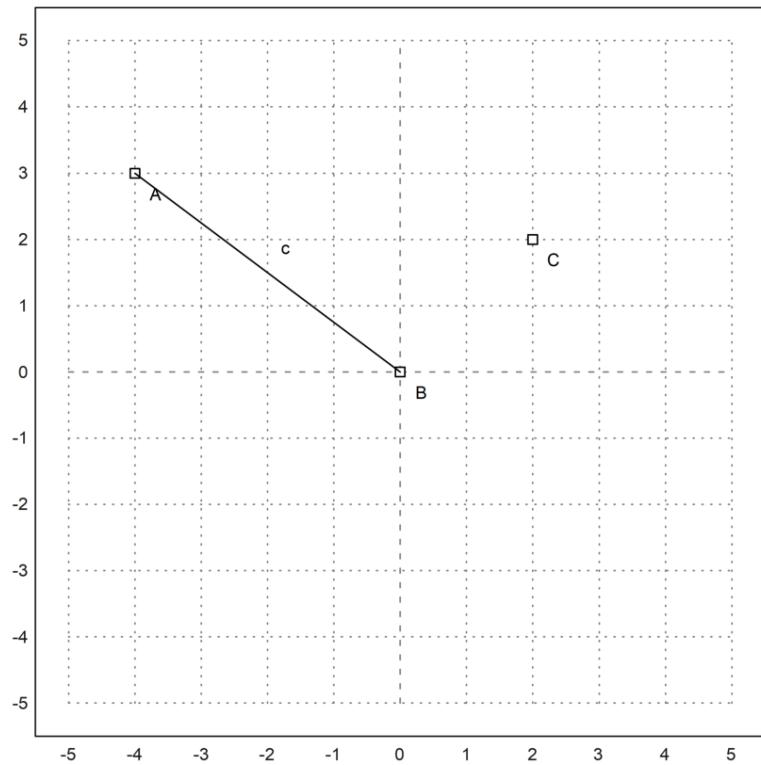
```
>B=[0,0]; plotPoint(B,"B"):
```



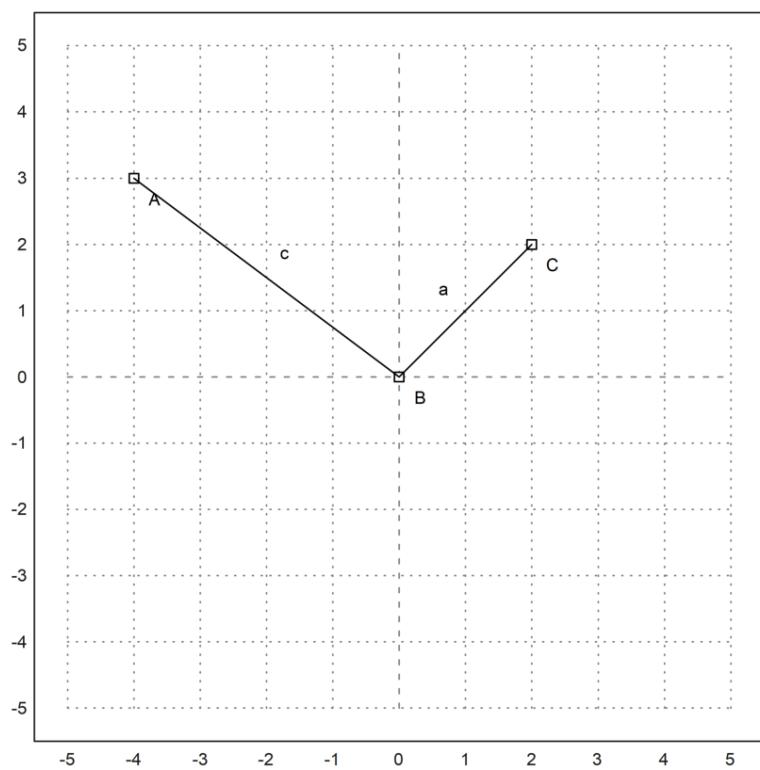
```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```



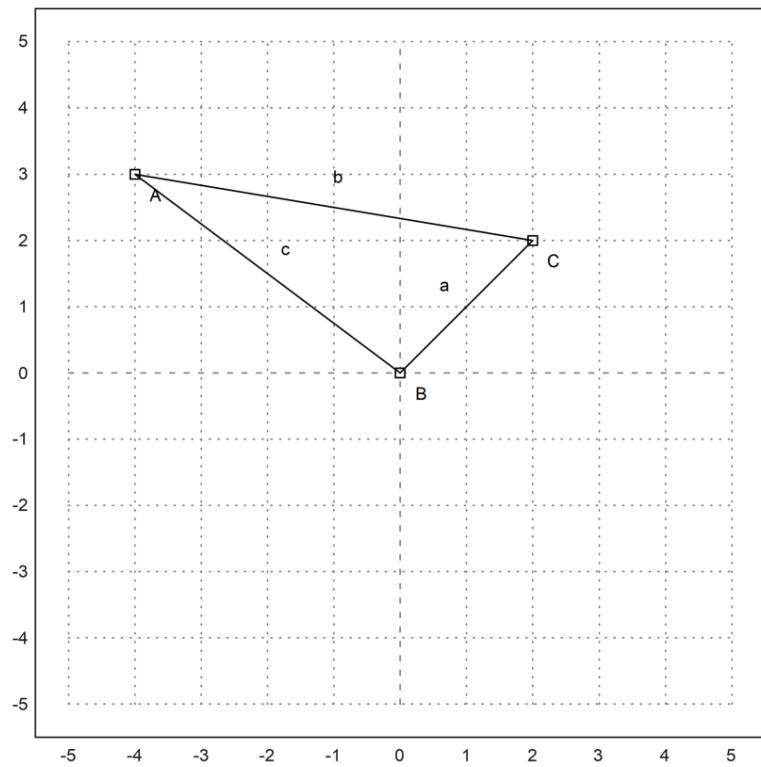
```
>plotSegment(A, B, "c") : // c=AB
```



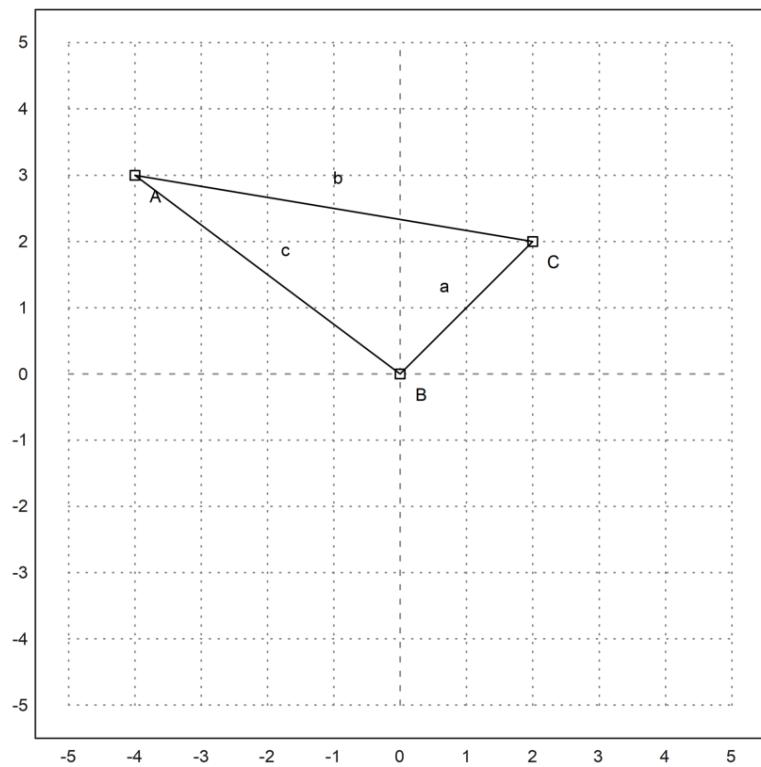
```
>plotSegment (B,C,"a") : // a=BC
```



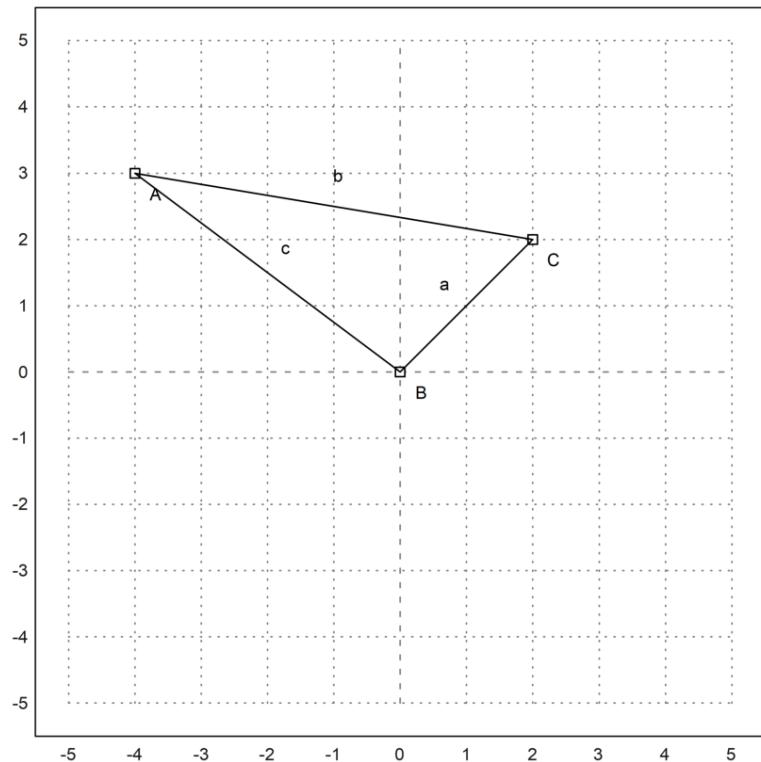
```
>plotSegment (A,C,"b") : // b=AC
```



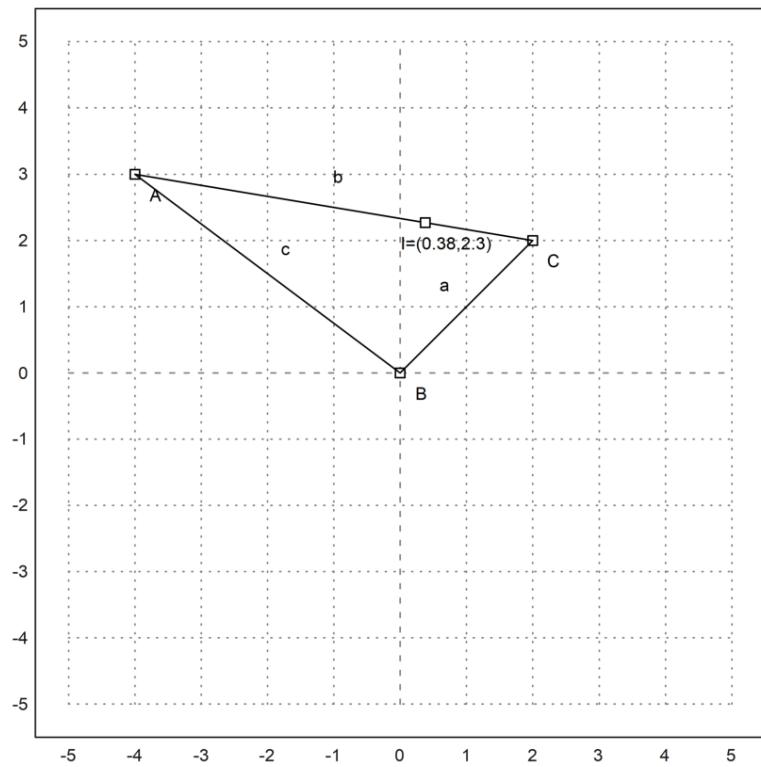
```
>g=lineThrough(A,C) :
```



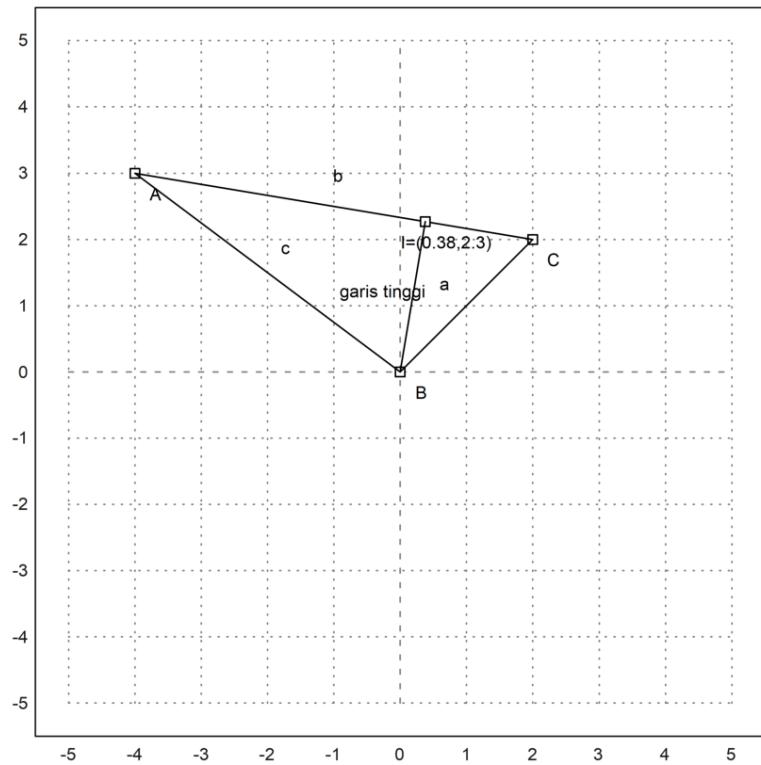
```
>h=perpendicular(B,g):
```



```
>I = lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1):
```



```
>plotSegment(B, I, "garis tinggi"):
```



```
>A&=[-4, 3]
```

$$[-4, 3]$$

```
>B&=[0, 0]
```

$$[0, 0]$$

```
>C&=[2, 2]
```

$$[2, 2]$$

```
>g&=lineThrough(A, C)
```

$$[1, 6, 14]$$

```
>h&=perpendicular(B, g)
```

$$[6, -1, 0]$$

```
>$getLineEquation(h, x, y)
```

$$6x - y = 0$$

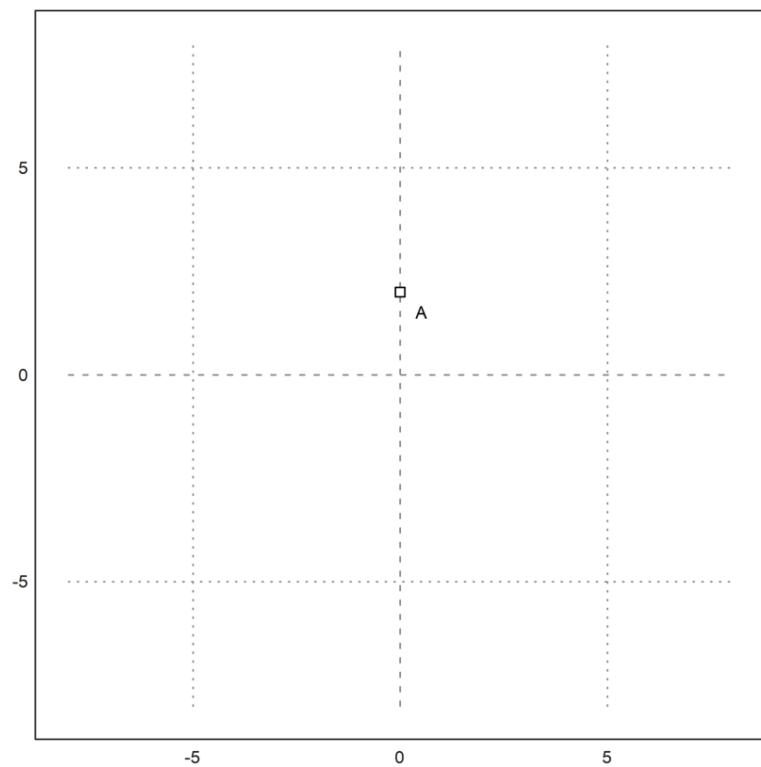
```
>$solve(%, y) | expand
```

$$[y = 6x]$$

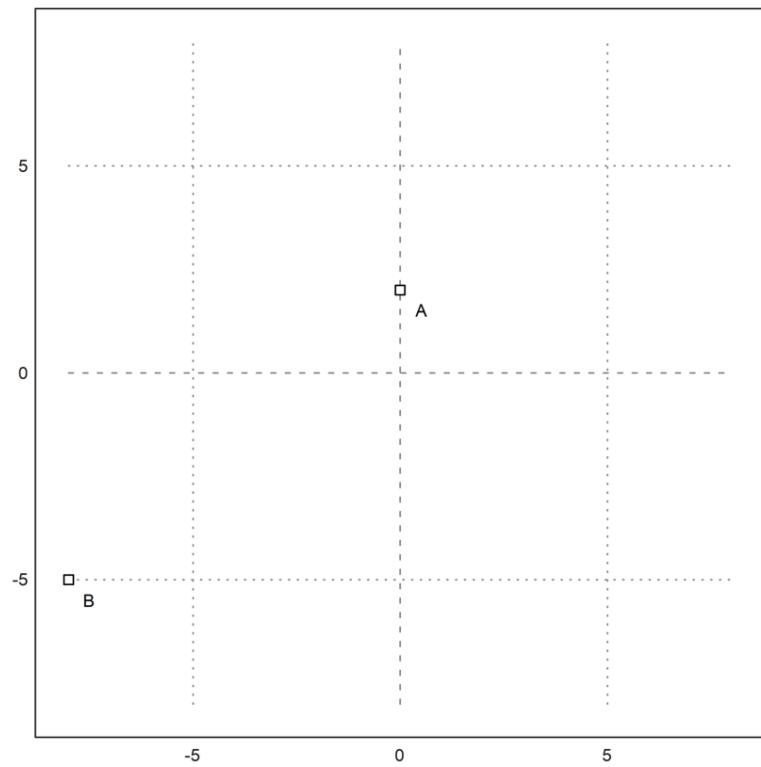
3. Tentukan tinggi segitiga dengan

$$A(0, 2), B(-8, -5), C(6, -7)$$

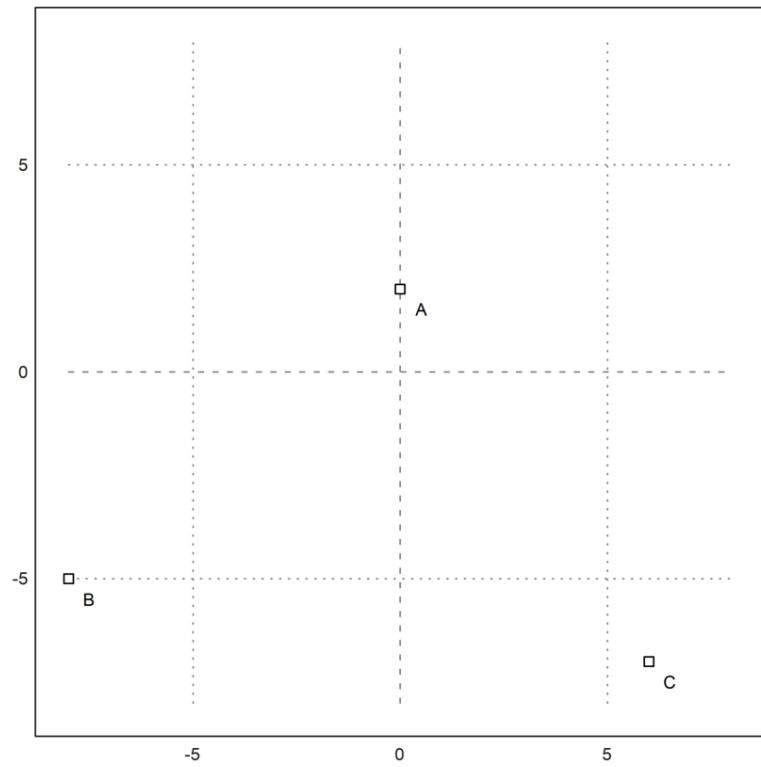
```
>setPlotRange(8);  
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
```



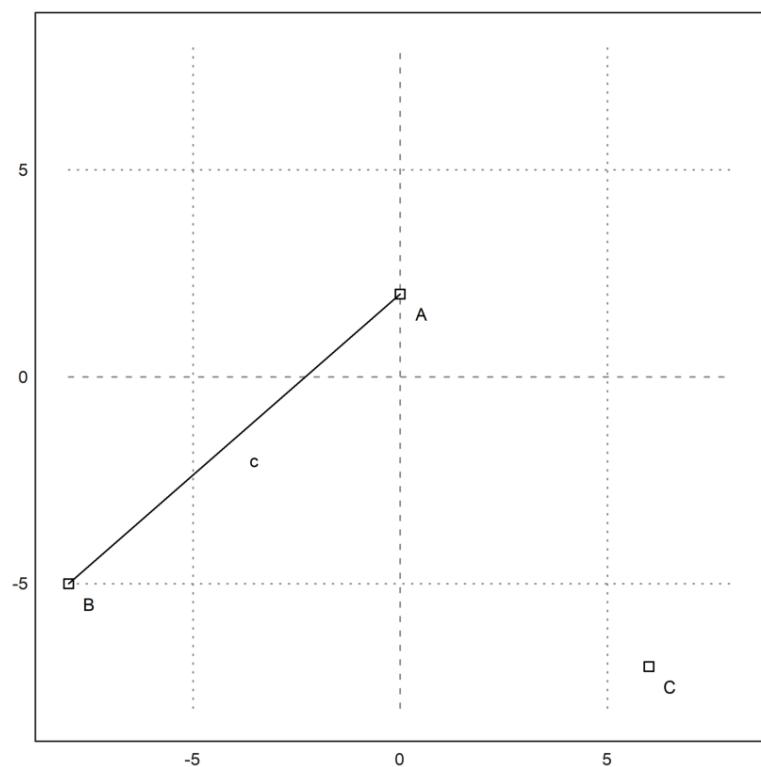
```
>B=[-8,-5]; plotPoint(B,"B");
```



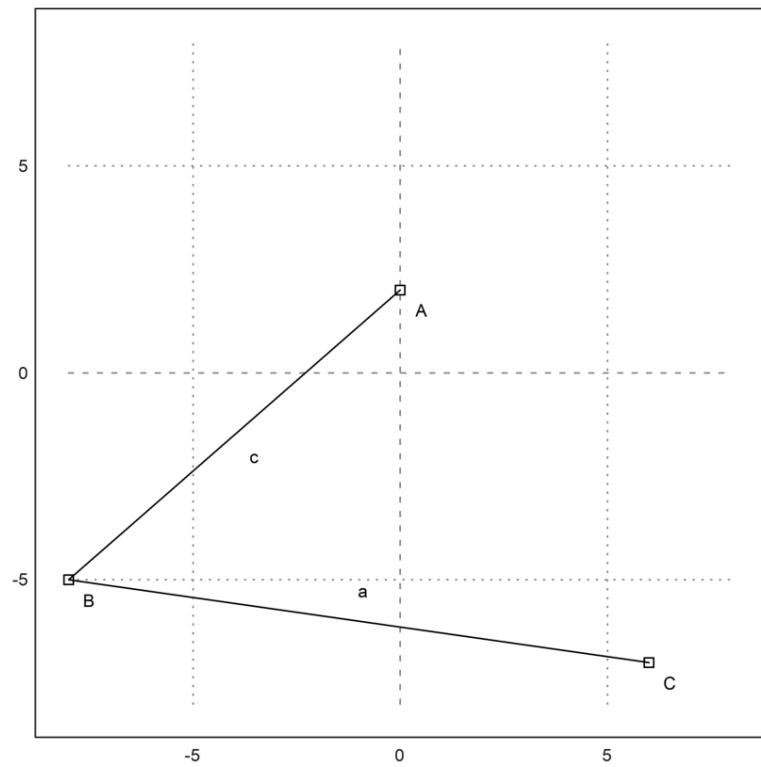
```
>C=[6,-7]; plotPoint(C,"C"):
```



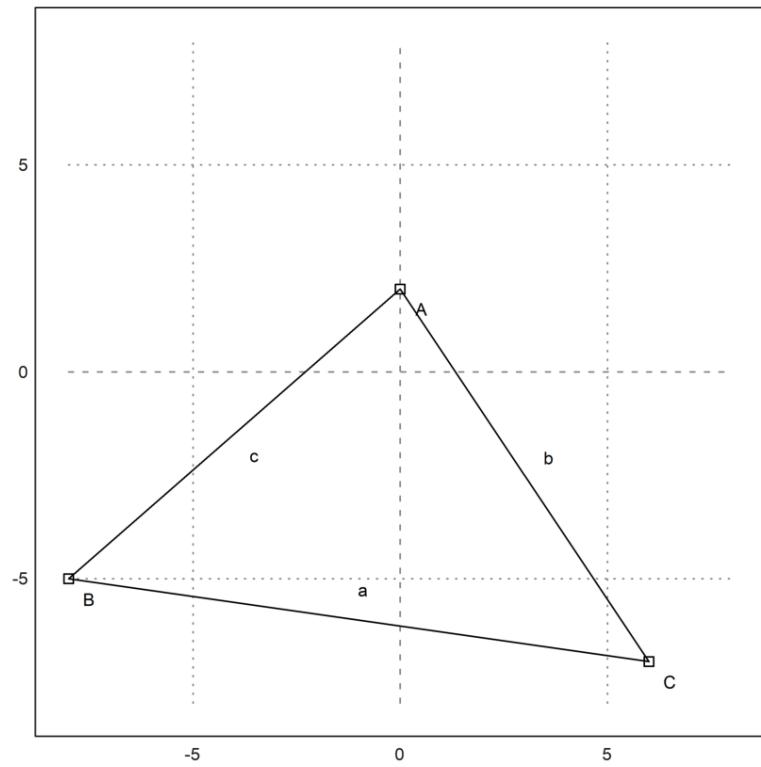
```
>plotSegment(A, B, "c") : // c=AB
```



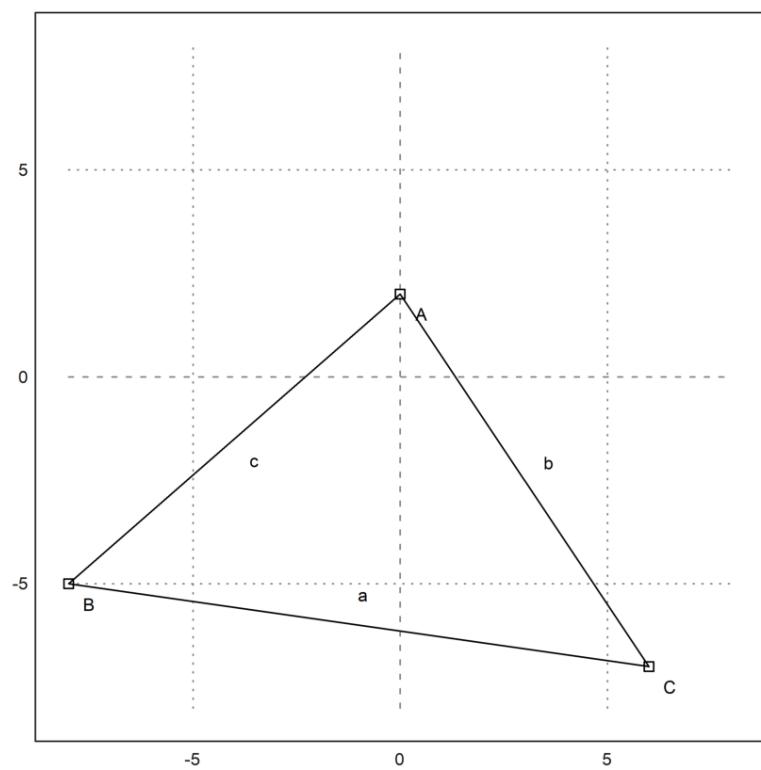
```
>plotSegment(B, C, "a") : // a=BC
```



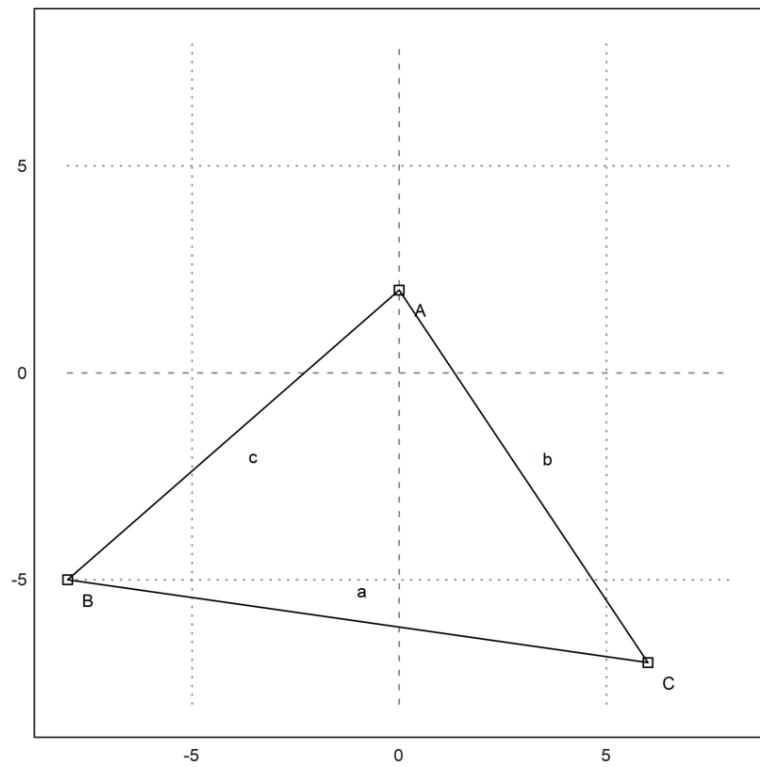
```
>plotSegment(A, C, "b") : // b=AC
```



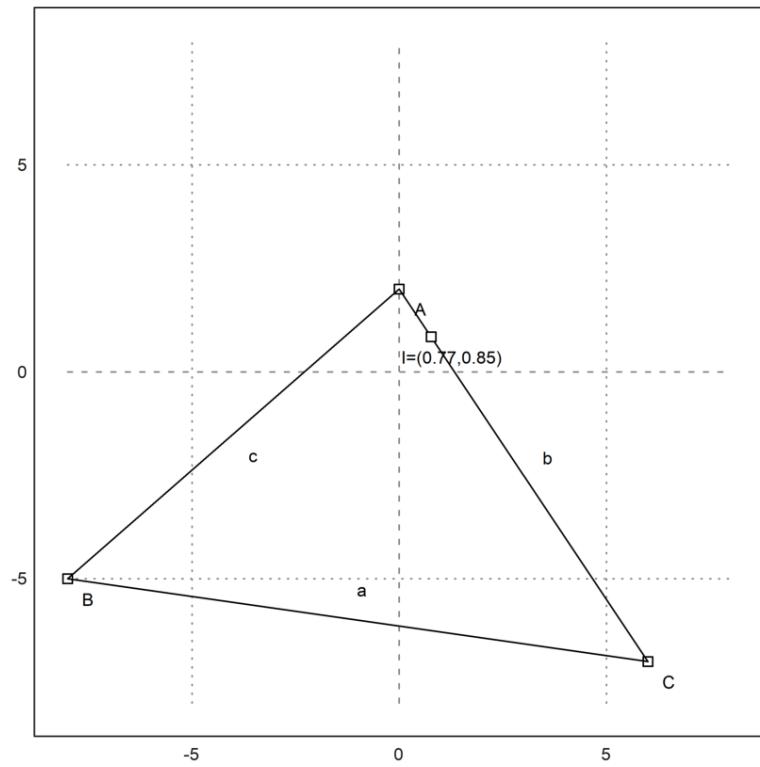
```
>g=lineThrough(A,C) :
```



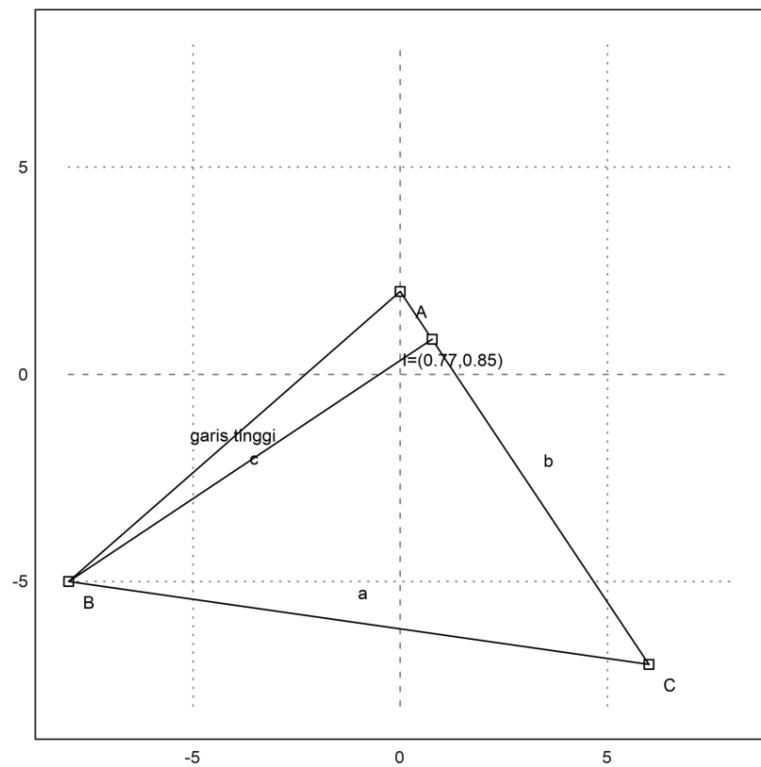
```
>h=perpendicular(B,g) :
```



```
>I = lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1):
```



```
>plotSegment(B,I,"garis tinggi"):
```



```
>A&=[0,2]
```

[0, 2]

```
>B&=[-8,-5]
```

[- 8, - 5]

```
>C&=[6,-7]
```

[6, - 7]

```
>g&=lineThrough(A,C)
```

```
[9, 6, 12]
```

```
>h&=perpendicular(B,g)
```

```
[6, - 9, - 3]
```

```
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$6x - 9y = -3$$

```
>$solve(%,y) | expand
```

$$\left[y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \right]$$

Materi 6

Menentukan titik pusat dan jari-jari suatu lingkaran

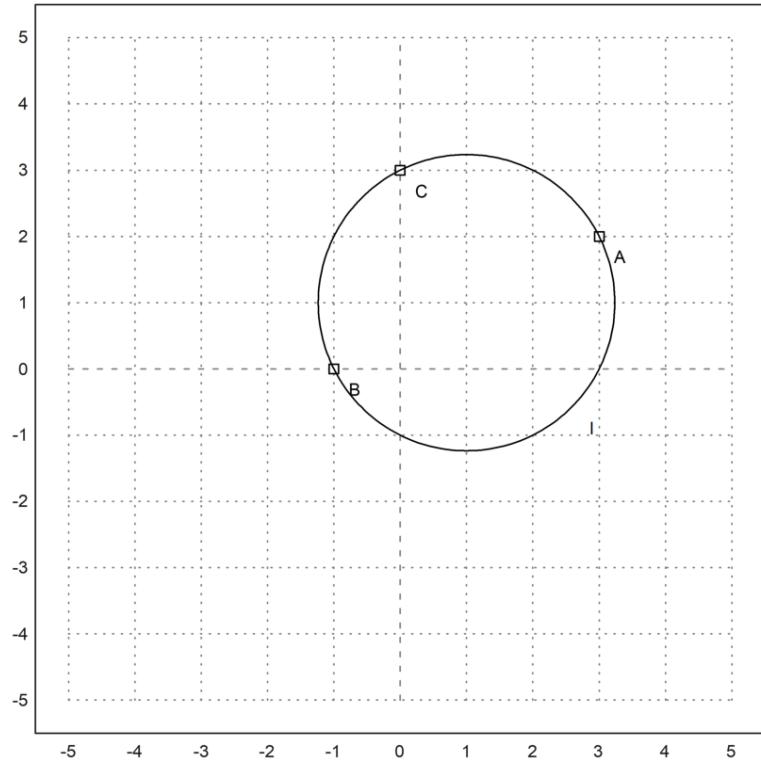
Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak tersebut dinamakan jari-jari lingkaran, sedangkan titik tertentu tersebut dinamakan pusat lingkaran. Dengan kata lain:

- Titik pusat lingkaran adalah titik yang berada di tengah lingkaran
- Jari-jari lingkaran adalah ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dan titik pada lingkaran

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[-1,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
>l=circleThrough(A,B,C); // membuat lingkaran yang melalui titik A,B,C
>plotCircle(l):
```



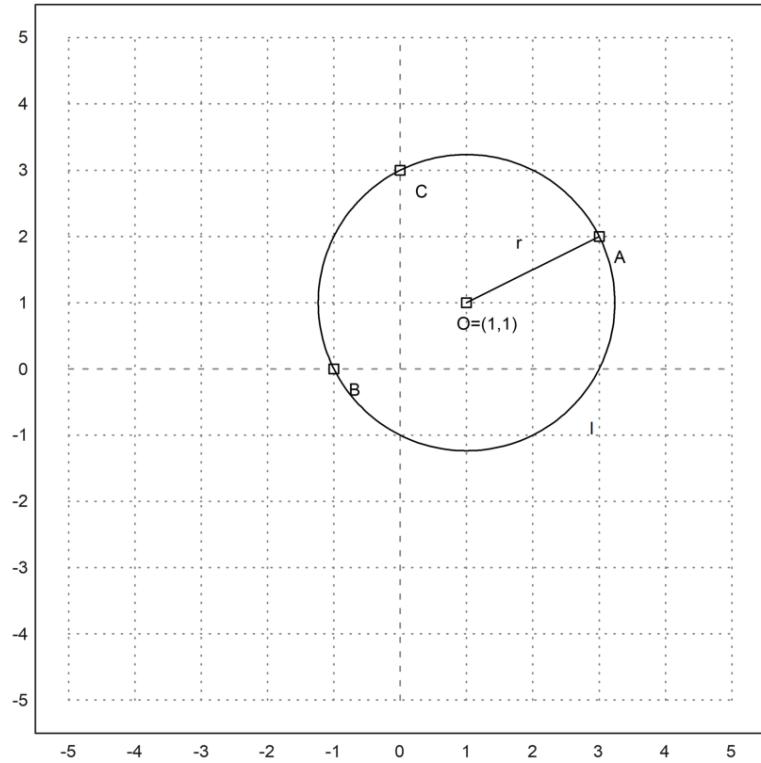
```
>O=getCircleCenter(l); O // menentukan titik pusat lingkaran
```

```
[1, 1]
```

```
>r=getCircleRadius(l); r // menentukan jari-jari lingkaran
```

```
2.2360679775
```

```
>plotPoint(O, value=1); plotSegment(O,A,"r"):
```



Untuk memuktikan hasil tersebut benar dapat kita buktikan sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan lingkaran yang melalui titik tersebut.

Persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Substitusi titik ke persamaan tersebut

A(3,2):

$$3^2 + 2^2 + A(3) + B(2) + C = 0$$

$$9 + 4 + 3A + 2B + C = 0$$

$$3A + 2B + C = -13 \dots\dots (1)$$

B(-1,0):

$$(-1)^2 + (0)^2 + A(-1) + B(0) + C = 0$$

$$1 + 0 - A + C = 0$$

$$-A + C = -1 \dots\dots (2)$$

$C(0,3)$:

$$(0)^2 + (3)^2 + A(0) + B(3) + C = 0$$

$$0 + 9 + 3B + C = 0$$

$$3B + C = -9 \dots\dots(3)$$

Eliminasi C dari persamaan (1) dan (2)

$$3A + 2B + C = -13$$

$$-A + C = -1$$

diperoleh

$$4A + 2B = -12 \dots\dots(4)$$

Eliminasi C dari persamaan (1) dan (3)

$$3A + 2B + C = -13$$

$$3B + C = -9$$

$$3A - B = -4 \dots\dots(5)$$

Eliminasi B dari persamaan (4) dan (5)

$$4A + 2B = -12$$

$$3A - B = -4$$

diperoleh

$$10A = -20$$

$$A = -2$$

Substiusi $A=-2$ ke persamaan (2)

$$-(-2) + C = -1$$

$$C = -3$$

Substitusi $C=-3$ ke persamaan (3)

$$3B + (-3) = -9$$

$$B = -2$$

Jadi diperoleh persamaan lingkaran yang melalui 3 titik tersebut yaitu

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

2. Menghitung titik pusat dengan rumus:

$$\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-2)}{2}\right)$$

$$(1, 1)$$

3. Menghitung jari-jari dengan rumus

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{4}(-2)^2 - (-3)}$$

$$r = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + 3}$$

$$r = \sqrt{5}$$

```
>sqrt(5)
```

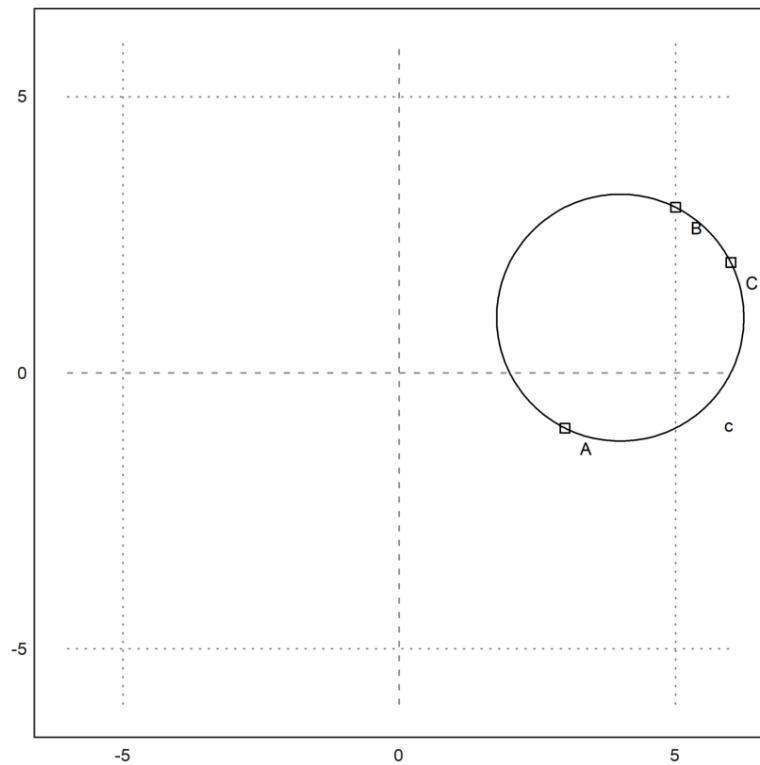
2.2360679775

Jadi terbukti bahwa fungsi tersebut benar

Latihan

Diketahui sebuah lingkaran melalui tiga titik dengan koordinat $(3, -1)$, $(5, 3)$, dan $(6, 2)$. Tentukan pusat lingkaran, dan jari-jari lingkaran!

```
>A=[3,-1]; B=[5,3]; C=[6,2]; //mendefinisikan titik
>setPlotRange(6);
>plotPoint(A, "A"); plotPoint(B, "B"); plotPoint(C, "C");
>c=circleThrough(A,B,C);
>plotCircle(c);
```



```
>O=getCircleCenter(c); O
```

[4, 1]

```
>r=getCircleRadius(c); r
```

2.2360679775

Jadi, titik pusat lingkaran tersebut terletak pada (4,1) dan panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah 2,236067 atau akar 5

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran yang melalui tiga titik berikut ini O(0, 0), P(-2, 4), dan Q(-1, 7)

```
>O&=[0,0]; P&=[-2,4]; Q&=[-1,7];
>c&=circleThrough(O,P,Q);
>O&=getCircleCenter(c); $O
```

[3, 4]

```
>r&=getCircleRadius(c); $r
```

5

Jadi, titik pusat lingkaran tersebut terletak pada titik (3,4) dan panjang jari-jari lingkara tersebut adalah 5
subtopik 7

Menentukan Persamaan lingkaran yang melalui tiga titik

Untuk menentukan persamaan lingkaran melalui 3 titik, dapat digunakan persamaan lingkaran

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

dimana (a,b) adalah pusat lingkaran dan r jari-jari lingkaran
atau bentuk umum persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

```
> load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>A &= [3,-1]; B &= [5,3]; C &= [6,2]; // menentukan tiga titik A, B, C  
>c &= circleThrough(A,B,C);  
>$getCircleEquation(c,x,y), //mencari persamaan lingkaran
```

$$(y - 1)^2 + (x - 4)^2 = 5$$

```
>$expand(%)
```

$$y^2 - 2y + x^2 - 8x + 17 = 5$$

Jadi, didapatkan persamaan lingkaran yang melalui 3 titik tersebut adalah

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

Untuk membuktikan hasil tersebut persamaan lingkaran melalui 3 titik dapat dicari dengan cara:

1. Memisalkan bentuk umum persamaan lingkaran, yaitu

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

2. Substitusi ketiga titik koordinat pada pemisalan bentuk umum persamaan lingkaran pada langkah pertama

3. Akan diperoleh tiga persamaan dengan tiga variabel

4. Tentukan nilai ketiga variabel (A, B dan C)

5. Substitusikan nilai variabel yang sudah diperoleh ke bentuk umum persamaan lingkaran

6. Diperoleh bentuk umum persamaan lingkaran

Sehingga contoh tersebut dapat diselesaikan sebagai berikut:

1. Substitusi titik (3,-1) pada bentuk umum persamaan lingkaran.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$3^2 + (-1)^2 + A(3) + B(-1) + C = 0$$

$$3A - B + C = -10 \dots\dots (1)$$

2. Substitusi titik (5,3) pada bentuk umum persamaan lingkaran.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$5^2 + (3)^2 + A(5) + B(3) + C = 0$$

$$5A + 3B + C = -34 \dots\dots (2)$$

3. Substitusi titik (6,2) pada bentuk umum persamaan lingkaran.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$6^2 + (2)^2 + A(6) + B(2) + C = 0$$

$$6A + 2B + C = -40 \dots\dots (3)$$

4. Eliminasi C dari persamaan (1) dan (2)

$$3A - B + C = -10$$

$$5A + 3B + C = -34$$

diperoleh

$$-2A - 4B = 24$$

$$A + 2B = -12 \dots\dots (4)$$

5. Eliminasi C dari persamaan (2) dan (3)

$$5A + 3B + C = -34$$

$$6A + 2B + C = -40$$

diperoleh

$$-A + B = 6$$

$$A - B = -6 \dots\dots(5)$$

6. Cari nilai A dan B dengan mengeliminasi persamaan (4) dan (5)

$$A + 2B = -12$$

$$A - B = -6$$

diperoleh

$$3B = -6$$

$$B = -2$$

sehingga,

$$A - (-2) = -6$$

$$A = -8$$

7. Substitusi nilai a dan b ke persamaan 1

$$3(-8) - (-2) + C = -10$$

$$C = 12$$

Diperoleh persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

Karena hasilnya sama, maka terbukti

Mencari persamaan lingkaran dengan mencari titik pusat dan jari-jarinya terlebih dahulu

```
>c &= circleThrough(A,B,C); $c // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran yang melalui A, B
```

$$\left[4, 1, \sqrt{5}\right]$$

Persamaan umum lingkaran adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

dimana (a,b) adalah pusat lingkaran dan r jari-jari lingkaran

Maka diperoleh persamaan lingkaran yang melalui 3 titik tersebut adalah:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

latihan

Carilah persamaan lingkaran yang melalui titik A (0,2), B (3,3) dan C (6,2) !

```
>A &= [0,2]; B &= [3,3]; C &= [6,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
>c &= circleThrough(A,B,C);
>$getCircleEquation(c,x,y), //mencari persamaan lingkaran
```

$$(y + 2)^2 + (x - 3)^2 = 25$$

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (1,1), (2,-1), dan (3,2)!

```
>A &= [1,1]; B &= [2,-1]; C &= [3,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
>c &= circleThrough(A,B,C);
>$getCircleEquation(c,x,y), //mencari persamaan lingkaran
```

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Menentukan persamaan dan menggambar parabola yang ditentukan titik

fokus dan garis arahnya

Parabola adalah kedudukan titik-titik yang jaraknya ke suatu titik tertentu(titik api/titik focus) dan jaraknya ke suatu garis tertentu (direktriks/garis arah) adalah sama.

Untuk menemukan persamaan parabola yang ditentukan titik fokus dan garis arahnya akan diilustrasikan gambar dari kurva parabola. Misal titik fokus($p, 0$), titik puncak $O(0,0)$, garis direktriks(garis arah) yaitu garis g kemudian pilih titik $R(-p, y)$ pada garis y , kemudian pilih sembarang titik $P(x, y)$ yang terdapat dalam parabola. image: Parabola1.JPG

sesuai definisi parabola,jarak titik P ke titik fokus($|PF|$) sama dengan jarak titik P ke titik $R(|PR|)$

$$|PF| = |PR|$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2}$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x - p)^2 + (0)^2}$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x - p)^2}$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x - p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 2px + 2px$$

$$y^2 = 4px$$

sehingga persamaan parabola adalah $y^2 = 4px$ dengan titik puncak $O(0,0)$ dengan titik fokus $F(p,0)$ akan mempresentasikan parabola terbuka ke kanan (arah sumbu x positif).

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>A&=[-1,-1]; B&=[2,0]; C&=[1,2];
>A=[-1,1]; B=[2,0]; C=[1,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r // garis yang melalui A dan B
```

$$[-1, 3, -2]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y) // persamaan garis r yang dinyatakan dalam x dan y
```

$$\left[y = \frac{x - 2}{3} \right]$$

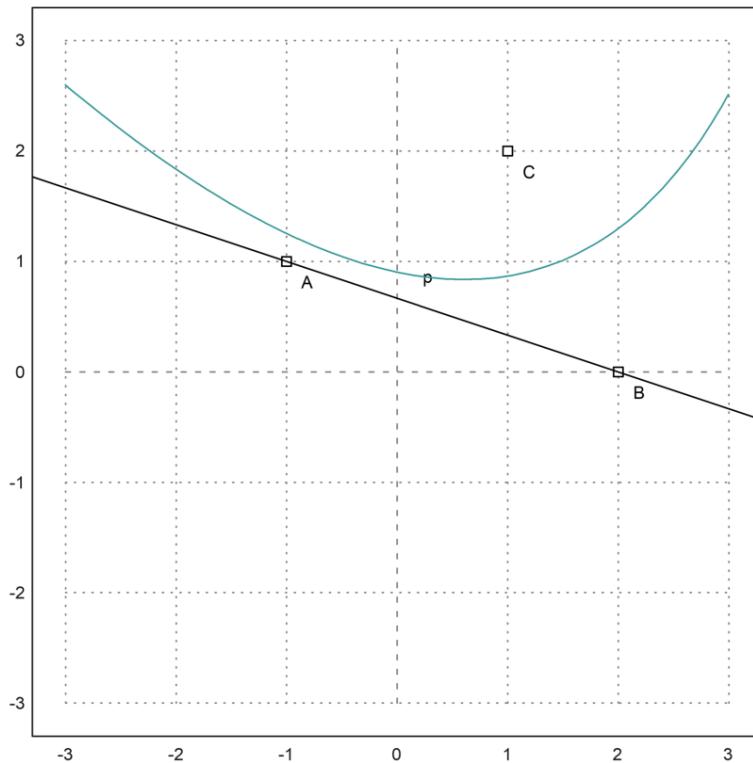
Menentukan persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Selanjutnya kita akan menggambar persamaan tersebut

```
>setPlotRange(3); // mendefinisikan bidang koordinat
>A=[-1,1]; B=[2,0]; C=[1,2];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); // Memplot titik-titik koordinat
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=5); // membuat plot grafik dua dimensi dari data yang
```



```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

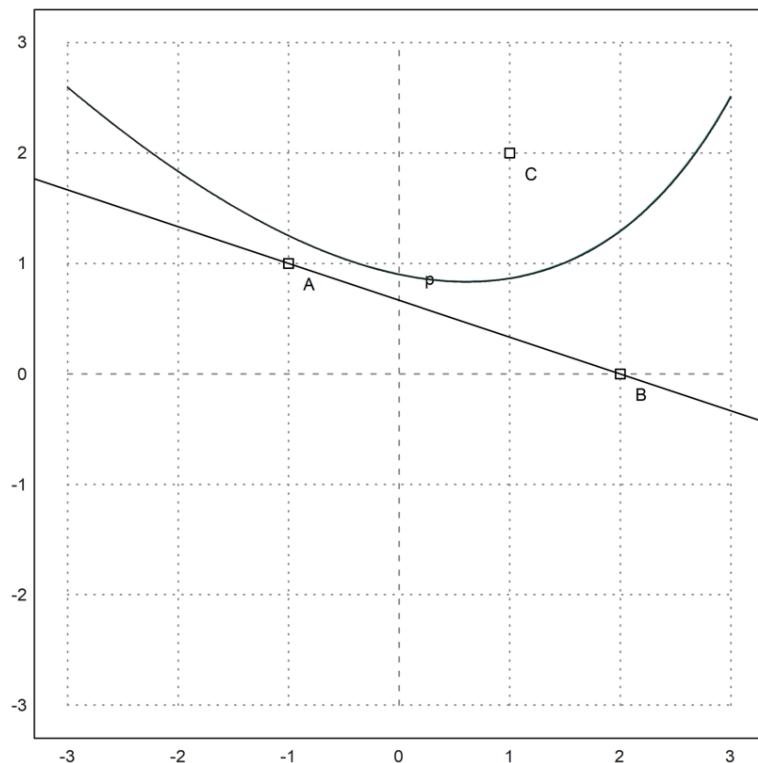
```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusinya adalah

$$y = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26$$

$$y = -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26$$

```
>plot2d(&rhs(akar[1]), add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x) // fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26$$

Untuk membuktikan bahwa persamaan parabola benar, kita dapat mengambil sebarang titik pada kurva tersebut, misal titik T.

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

2.135605779339061

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

2.135605779339061

Dari pembuktian diatas TERBUKTI jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB

Latihan 1

Jika terdapat garis melalui titik A(4,3) dan B(2,-2) dengan titik fokus C(5,2), tentukan persamaan parabola dan parabola yang terbentuk

```
>A&=[4,3]; B=[2,-2]; C=[5,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[5, -2, 14]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(% ,y) // persamaan garis r dinyatakan dalam x dan y
```

$$\left[y = \frac{5x - 14}{2} \right]$$

Menentukan persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{-2y + 5x - 14}{\sqrt{29}} - \sqrt{(2-y)^2 + (5-x)^2} = 0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

$$[y = \frac{-\sqrt{203} \sqrt{10x - 43} - 10x + 86}{25}, \\ y = \frac{\sqrt{203} \sqrt{10x - 43} - 10x + 86}{25}]$$

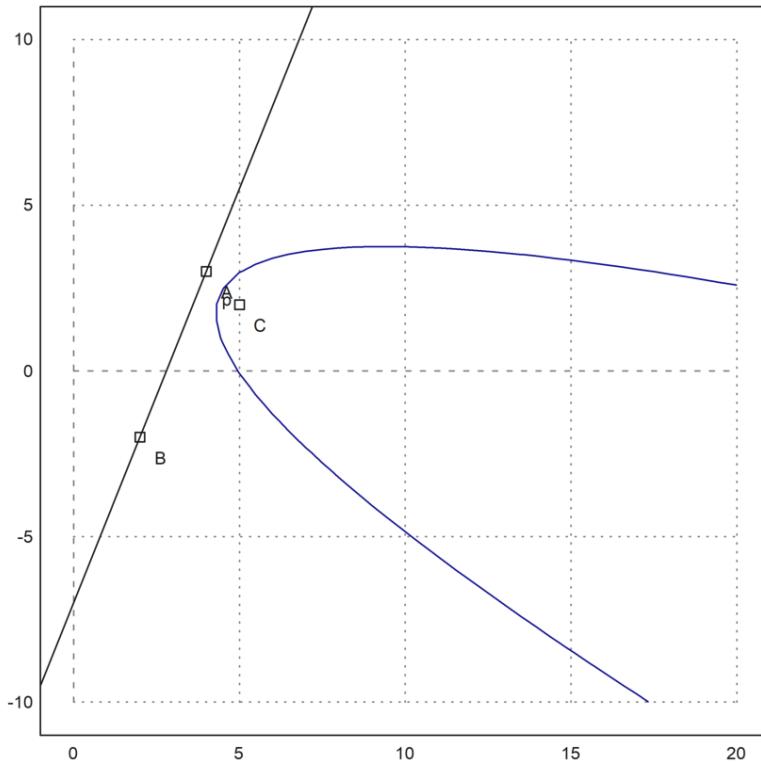
solusinya adalah

$$y = -\frac{\sqrt{203} \sqrt{10x - 43} + 10x - 86}{25}$$

$$y = \frac{\sqrt{203} \sqrt{10x - 43} - 10x + 86}{25}$$

Selanjutnya kita akan menggambar persamaan tersebut

```
>setPlotRange(0,20,-10,10); // mendefinisikan bidang koordinat
>A=[4,3]; B=[2,-2]; C=[5,2];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); // memplot titik-titik koordinat
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=4):
```



Jika terdapat garis melalui titik O(7,0) dan P(-5,3) dengan titik fokus Q(1,-2),tentukan persamaan parabola dan parabola yang terbentuk

```
>O&=[7,0]; P&=[-5,3]; Q&=[1,-2];
>r&=(lineThrough(O,P)); $r
```

$$[-3, -12, -21]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(% ,y) // Persamaan garis r dinyatakan dalam x dan y
```

$$\left[y = \frac{7-x}{4} \right]$$

Menentukan persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik Q dan ke garis OP

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(O,P),x,y,Q)-distance([x,y],Q); $p='0
```

$$\frac{-12y - 3x + 21}{3\sqrt{17}} - \sqrt{(-y - 2)^2 + (1 - x)^2} = 0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(O,P),x,y,Q)^2-distance([x,y],Q)^2,y)
```

$$\begin{aligned} y &= 4x - 2\sqrt{119}\sqrt{8-x} - 62, \\ y &= 4x + 2\sqrt{119}\sqrt{8-x} - 62 \end{aligned}$$

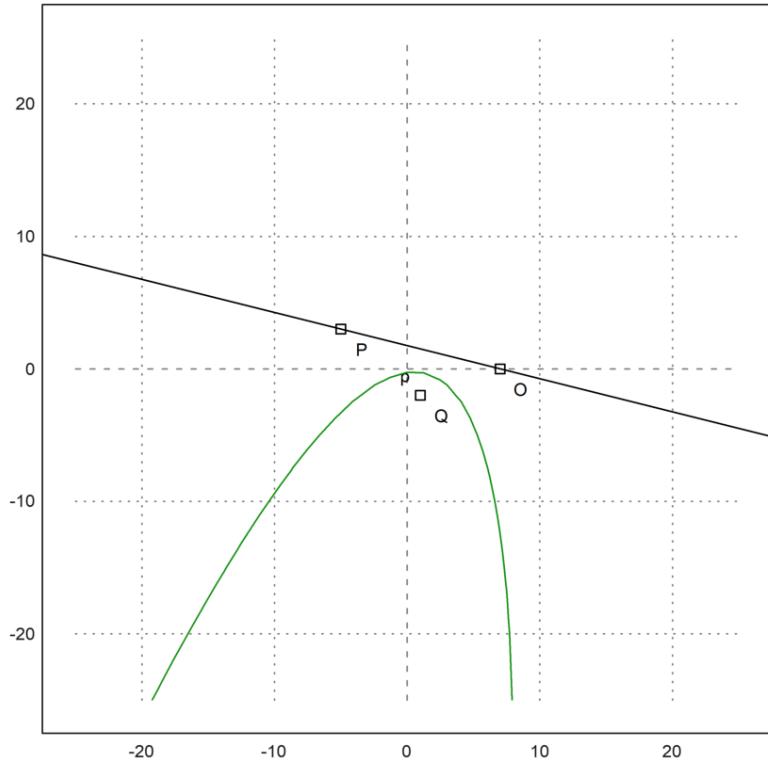
Solusinya adalah

$$y = 4x - 2\sqrt{119}\sqrt{8-x} - 62$$

$$y = 4x + 2\sqrt{119}\sqrt{8-x} - 62$$

Selanjutnya kita akan menggambar persamaan tersebut

```
>setPlotRange(25); // mendefinisikan bidang koordinat
>O=[7,0]; P=[-5,3]; Q=[1,-2];
>plotPoint(O,"O"); plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); // memplot titik-titik koordinat
>plotLine(lineThrough(O,P));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=3);
```



Materi 10

Menentukan Persamaan dan Menggambar Ellips yang

Diketahui Titik Fokusnya

Ellips merupakan salah satu bagian dari kerucut yang dihasilkan ketika sebuah bidang memotong kerucut secara miring, tapi tidak sampai memotong alasnya

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

Mencari persamaan ellips, dengan cara menghitung luas segitiga dengan panjang sisi a , b , dan c , pertama kita meletakkan titik-titik pada $(0,0)$, $(a,0)$, dan (x,y) .

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c$$

untuk x dan y

```
>Hasil &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y])
```

$$\begin{aligned}
 & [x = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, y = \\
 & \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4)}}{2a}], \\
 & [x = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, y = \\
 & \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4)}}{2a}]
 \end{aligned}$$

2. Menjabarkan hasil y

```
>Hasily &= y with Hasil[2][2]
```

$$\frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4)}}{2a}$$

3. Mendapatkan Rumus Heron

Rumus Heron pertama kali ditemukan oleh Heron dari Alexandria. Rumus Heron digunakan untuk menentukan luas segitiga jika panjang semua sisinya atau untuk mencari luas segi empat. Rumus mencari luas ini tidak bergantung pada sudut suatu segitiga tetapi bergantung pada panjang semua sisi segitiga.

```
>function F(a,b,c) &= sqrt(factor((Hasily*a/2)^2))
```

$$\frac{\sqrt{((-c + b + a)(c - b + a)(c + b - a)(c + b + a))}}{4}$$

```
>$solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c = -\sqrt{b^2 + a^2}, c = \sqrt{b^2 + a^2}, c = 0 \right]$$

4. Mencari himpunan semua titik di mana $b+c=d$ untuk d adalah konstanta.

```
>p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2]) // substitusi kan  $b=d-c$  di hasil 2
```

$$[x = \frac{(d - c)^2 - c^2 + a^2}{2a}, y = \frac{\sqrt{-(d - c)^4 + 2c^2(d - c)^2 + 2a^2(d - c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a}]$$

5.Membuat fungsi

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(p1[1]); $fx(a,c,d)// rhs = ambil hasil di ruas kanan
```

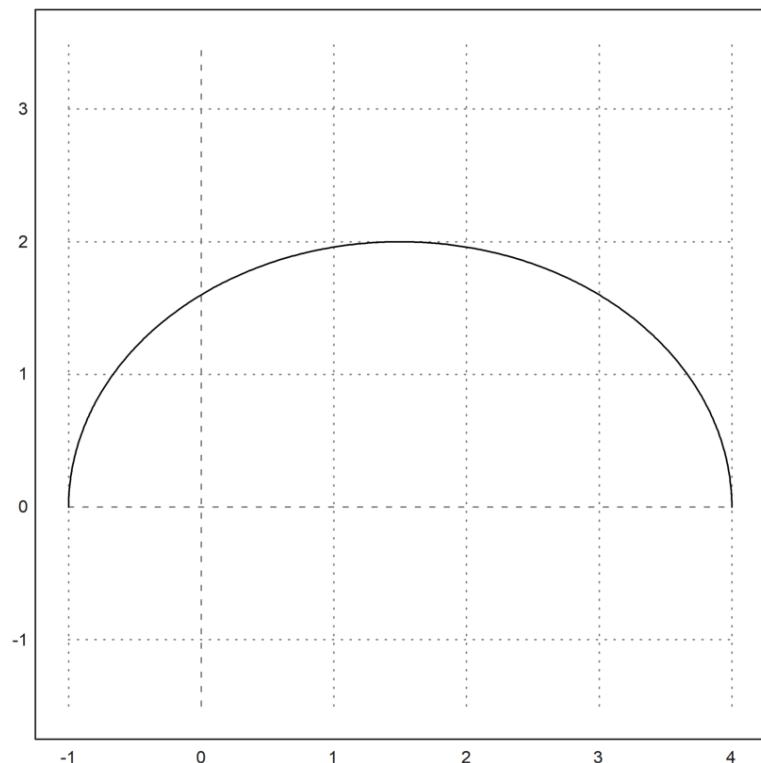
$$\frac{(d - c)^2 - c^2 + a^2}{2a}$$

```
>function fy(a,c,d) &= rhs(p1[2]); $fy(a,c,d)// rhs = ambil hasil di ruas kanan
```

$$\frac{\sqrt{-(d - c)^4 + 2c^2(d - c)^2 + 2a^2(d - c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a}$$

6.Menggambar himpunan tersebut. (mendapatkan sebuah ellips)

```
>plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



```
>\$((fx(a,c,d)-a/2)^2/a^2+fy(a,c,d)^2/b^2 with [a=d/2,b=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{4 \left(\frac{(d-c)^2+\frac{d^2}{4}-c^2}{d}-\frac{d}{4}\right)^2}{d^2} + \frac{4 \left(-(d-c)^4+\frac{d^2 (d-c)^2}{2}+2 c^2 (d-c)^2-\frac{d^4}{16}+\frac{c^2 d^2}{2}-c^4\right)}{d^2 (d^2-a^2)}$$

```
>$ratsimp(%)//menyederhanakan
```

$$\frac{7 d^4 - 16 c d^3 + (16 c^2 - 16 a^2) d^2 + 64 a^2 c d - 64 a^2 c^2}{4 d^4 - 4 a^2 d^2}$$

7.Mendapatkan persamaan umum untuk ellips, yaitu

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2} + \frac{(y-y_p)^2}{b^2} = 1,$$

Di mana (xp, yp) adalah titik pusat, dan a dan b adalah setengah dari sumbu-sumbunya.

```
>reset();
```

Cara mendapatkan rumus ellips dengan pembutian secara matematis

Misal kedua titik tetap tersebut F1(-c,0) dan F2(c,0) dan jumlah jarak yang tetap tersebut 2a. Maka untuk sembarang titik P(x,y) pada tepat kedudukan memenuhi:

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + y^2) = (x+c)^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx = 2cx$$

$$4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2ca^2x + c^2a^2 + a^2y^2 = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - c^2a^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dengan memisalkan

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Diperoleh:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Menggambar Ellips Jika Diketahui Dua Titik Fokus

Untuk menggambar ellips , langkah pertama yaitu dengan menggunakan "load(draw)"

```
>$load(draw):
```

"Draw" adalah sistem antarmuka dari Maxima-Gnuplot.

Ada tiga fungsi utama yang digunakan pada tingkat Maxima, yaitu: "draw2d", "draw3d", dan "draw".

Perintah "ellipse (<xp>, <yp>, <a>, , <ang1>, <ang2>)" menggambar sebuah elips yang berpusat di "[<xp>, <yp>]" dengan sumbu semi horizontal dan vertikal sebesar <a> dan , berturut-turut, dimulai dari sudut <ang1> sejauh sudut <ang2>.

Soal 1

Sebuah elips memiliki fokus di (0,-2) dan (0,2) serta melalui titik (0, 6). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus

$$F_1 = (-c, 0) = (2, 0)$$

$$F_2 = (c, 0) = (2, 0)$$

Melalui titik $(0, 6)$

$$d_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

```
>d1 &= sqrt((0+(2))^2+(6)^2); $d1 // d1 = jarak F1 ke titik (0,6)
```

$$2\sqrt{10}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

```
>d2 &= sqrt((0-2)^2+(6)^2); $d2 // d2 = jarak F2 ke titik (0,6)
```

$$2\sqrt{10}$$

Diketahui

$$d_1 + d_2 = 2a$$

```
>a &= (d1+d2)/2; $a // menentukan nilai a
```

$$2\sqrt{10}$$

```
>xp &= (2+2)/2 // titik pusat ellips xp
```

$$2$$

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

$$0$$

Titik pusat ellips $(xp, yp) = (2, 0)$

```
>c &= (2+2)/2 // jarak fokus ke pusat
```

2

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

6

```
>$ (x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{y^2}{36} + \frac{(x - 2)^2}{40} = 1$$

Selanjutnya, kita akan menggambar ellips menggunakan fungsi "draw2d"

```
>$draw2d(ellipse(2, 0, 6, 6, 360, -360)); // menggambar ellips  
>reset();
```

Materi 11

Melakukan Berbagai Perhitungan Geometris, seperti Jarak Dua Titik

(Panjang Ruas Garis), Luas Segitiga, Keliling Segitiga,

Luas Lingkaran, Keliling Lingkaran, dan sebagainya.

Pada Sub bab kali ini akan dibahas:

1. jarak dua titik (panjang ruas garis)
2. luas segitiga dan keliling segitiga
3. luas lingkaran dan keliling lingkaran
4. perhitungan geometri lainnya

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

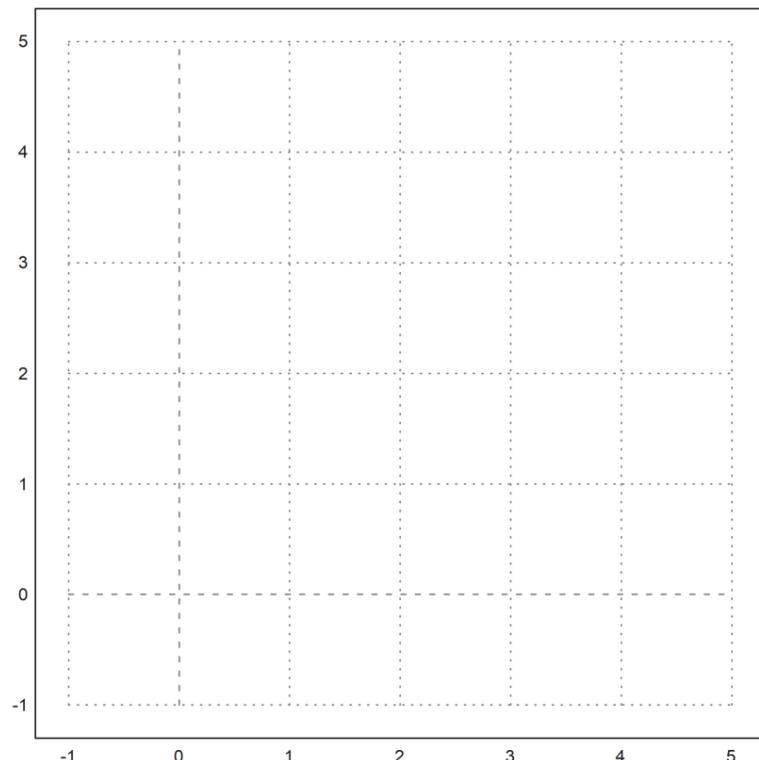
Jarak dua titik

Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.
Jika diketahui dua titik pada koordinat kartesius, misal A(x₁,y₁) dan B(x₂,y₂), maka jarak antara titik A dan B adalah

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

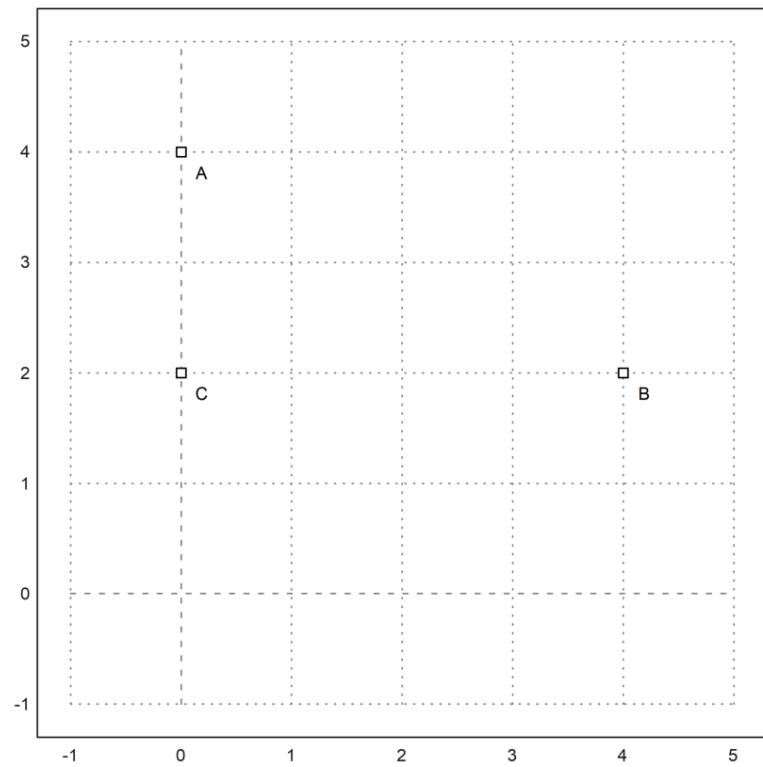
sebagai contoh digambar suatu bidang koordinat

```
>setPlotRange (-1,5,-1,5):
```



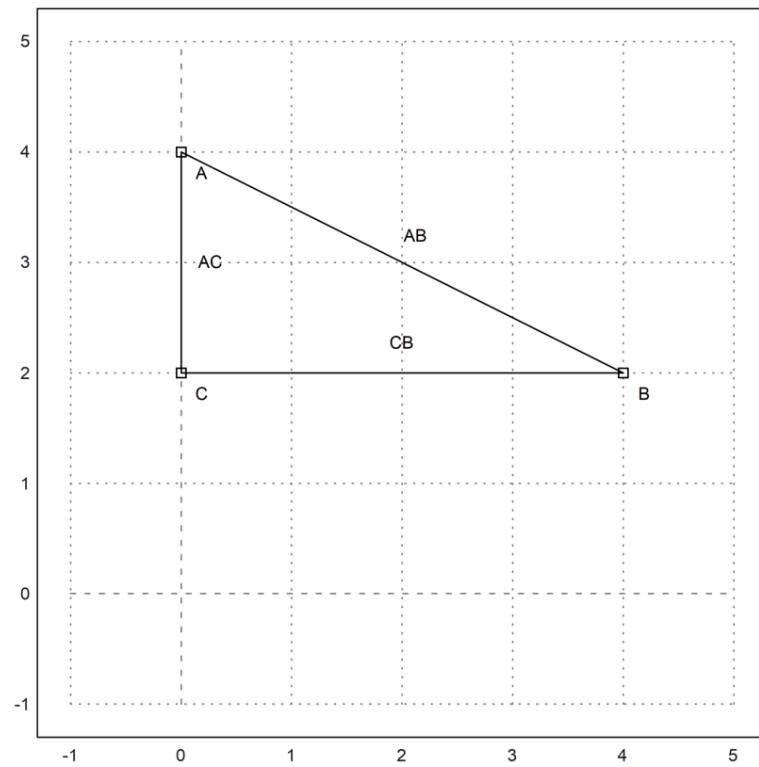
kemudian tentukan dua titik yang akan dihitung jaraknya

```
>A=[0,4]; plotPoint (A,"A");
>B=[4,2]; plotPoint (B,"B");
>C=[0,2]; plotPoint (C,"C");
```



hitung jarak antara titik A dan titik B

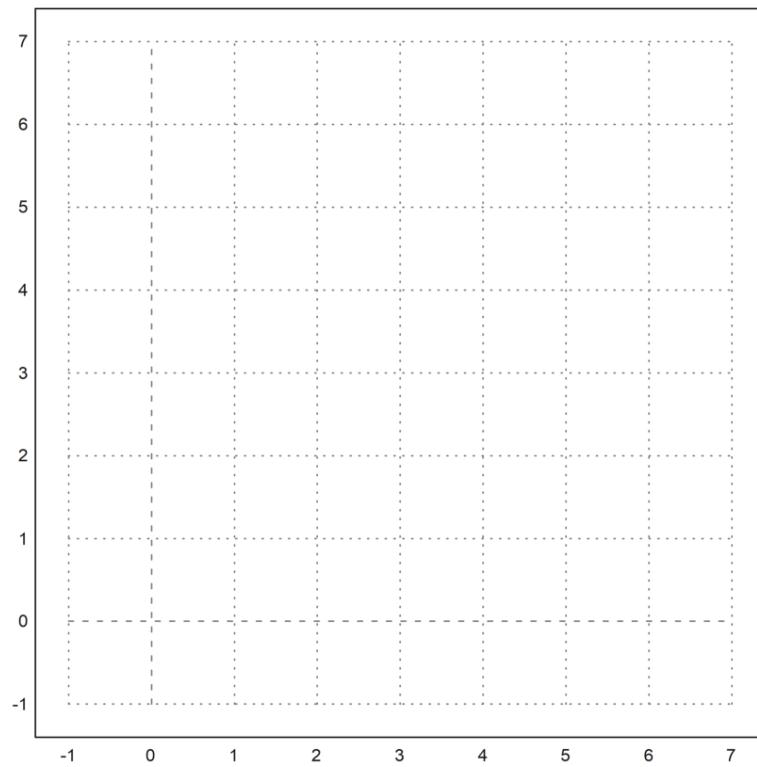
```
>plotSegment(A,B);  
>plotSegment(A,C);  
>plotSegment(C,B):
```



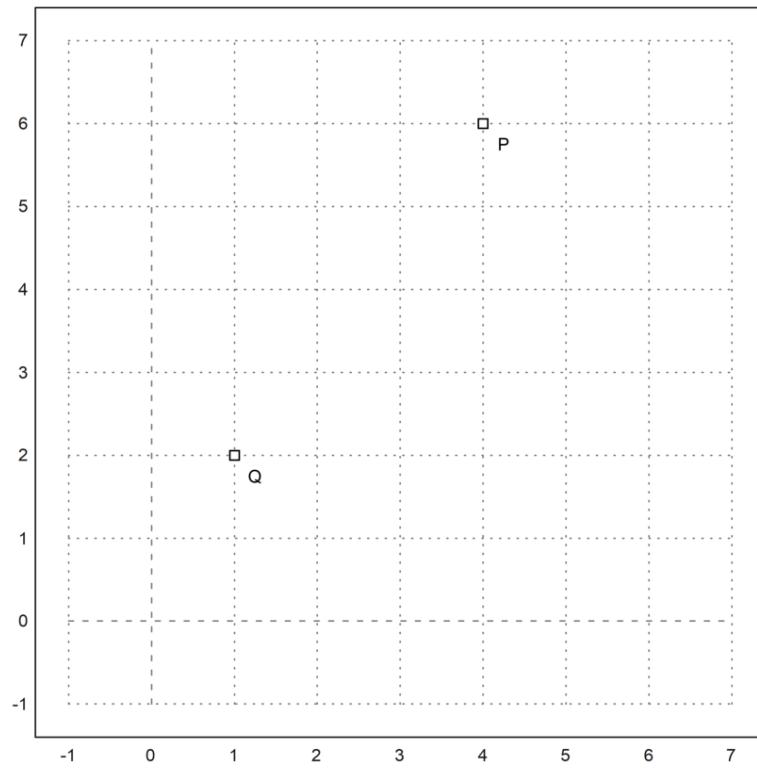
Latihan

- Diketahui dua buah titik P(2,4) dan Q(1,3). Tentukanlah panjang garis PQ.

```
>setPlotRange (-1,7,-1,7):
```



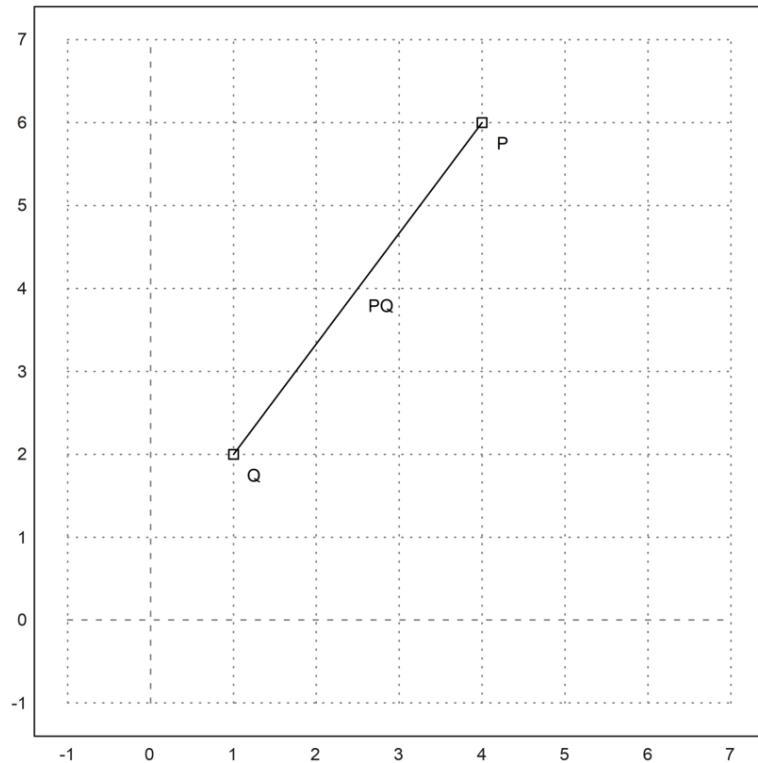
```
>P=[4,6]; plotPoint(P,"P");
>Q=[1,2]; plotPoint(Q,"Q"):
```



```
>distance(P, Q)
```

5

```
>plotSegment(P, Q) :
```

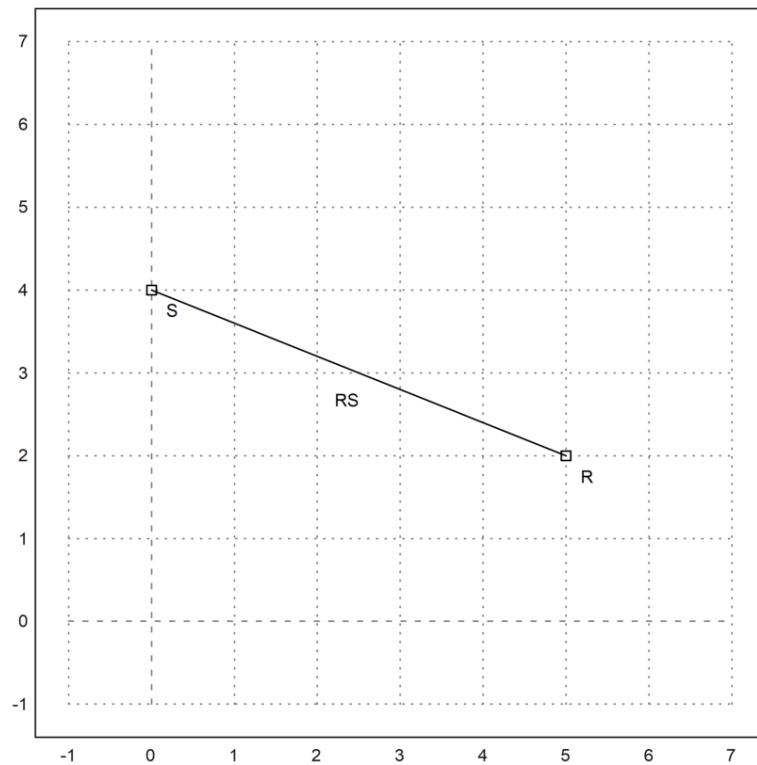


2. Diketahui dua buah titik R(5,2) dan S(0,4). Tentukanlah panjang garis RS.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);  
>R=[5,2]; plotPoint(R,"R");  
>S=[0,4]; plotPoint(S,"S");  
>distance(R, S)
```

5.38516480713

```
>plotSegment(R, S) :
```



Luas dan Keliling Segitiga

Terdapat cukup banyak bangun datar yang bisa dihitung luasnya namun

pada kesempatan kali ini kita akan mempelajari luas dari bangun datar sedderhana yaitu segitiga. Segitiga dipilih menjadi topik kali ini bukan tanpa alasan namun karena bangun datar dengan sisi-n teratur paling tidak terbentuk dari segitiga sama sisi.

Selanjutnya sebelum kita ke rumus dari kedua bangun datar tersebut kita akan mencari tahu dulu apa itu luas. Luas adalah sebuah ukuran yang digunakan untuk mengukur seberapa besar atau seberapa banyak ruang atau wilayah yang ditempati oleh suatu objek atau bentuk dalam ruang dua atau tiga dimensi dan kali ini akan berfokus pada ruang dua dimensi terlebih dahulu. Maka dari itu ketika disediakan sebuah persegi atau segiempat kita bisa mengukur luasnya dengan:

Segitiga memiliki beberapa jenis, ada segitiga siku-siku, segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.

Untuk menghitung luas dari segitiga siku-siku, segitiga sama sisi dan segitiga sama kaki menggunakan rumus :

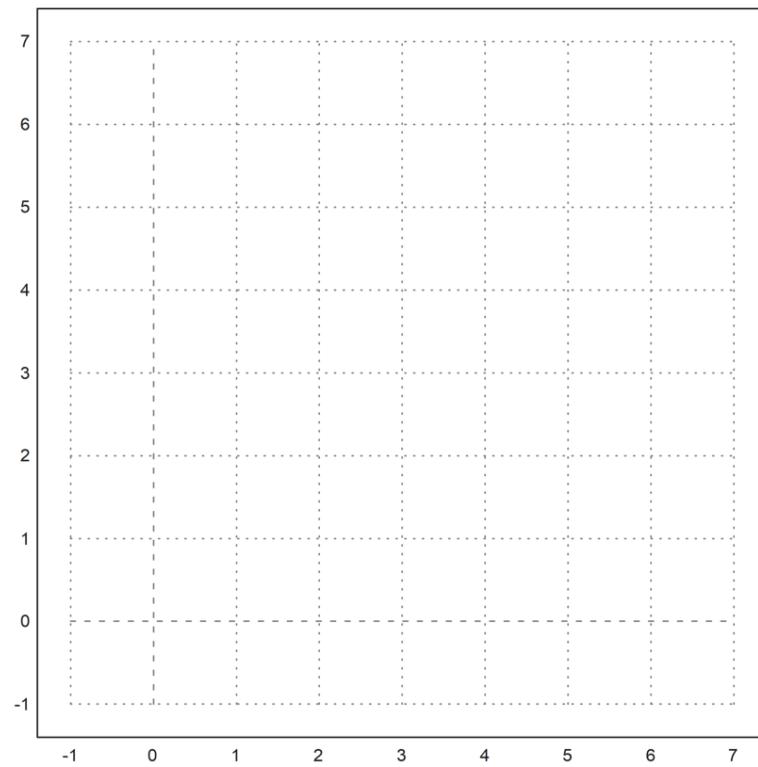
$$L_{\triangle} = \frac{1}{2} \text{alas.tinggi}$$

Sedangkan untuk mencari luas dari segitiga sembarang dapat menggunakan rumus :

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

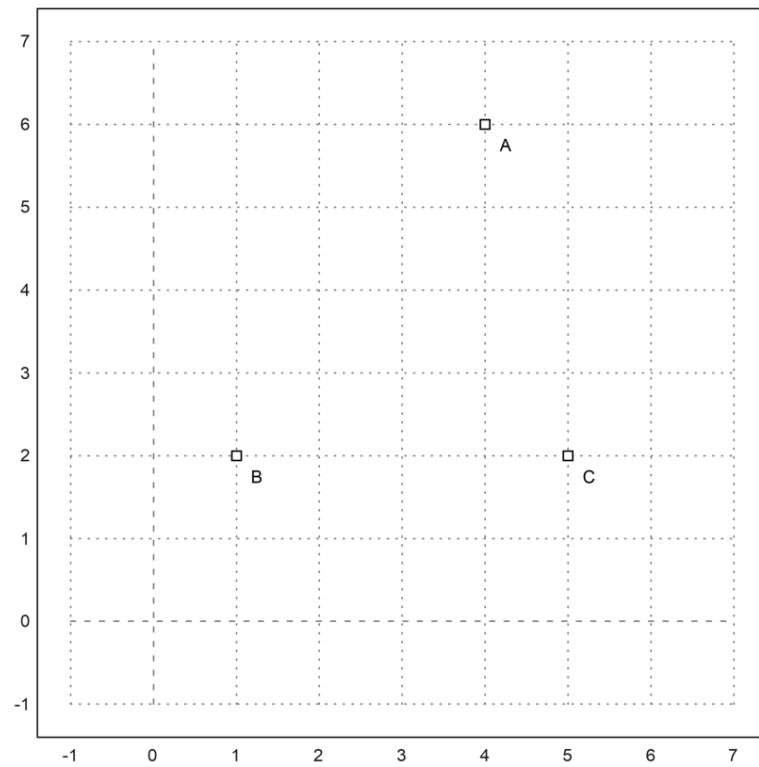
Sebagai contoh digambar sebuah segitiga sembarang.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7):
```



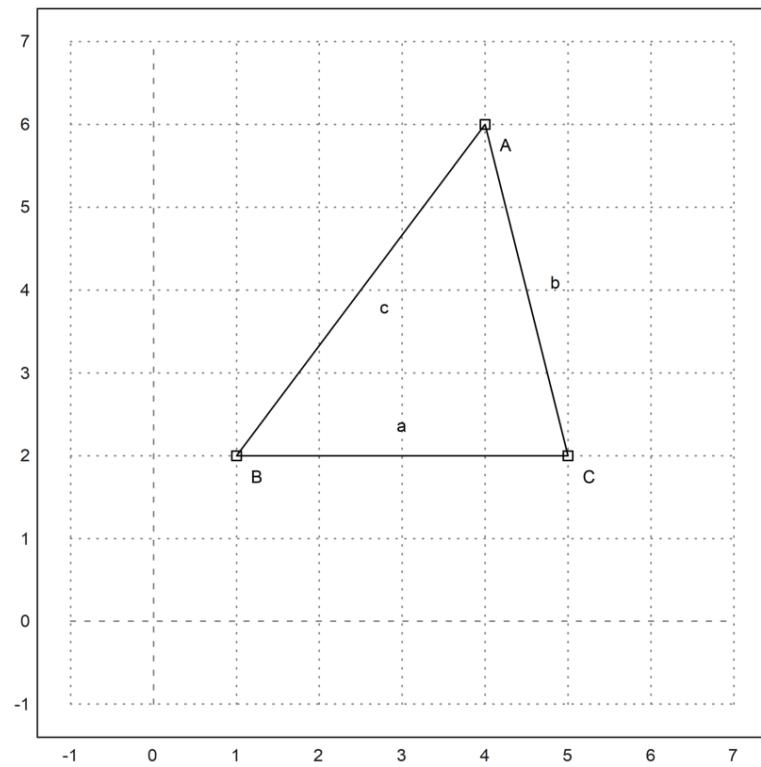
dipilih tiga titik sembarang.

```
>A=[4,6]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
```



kemudian menentukan tiga segmen garis.

```
>plotSegment(A,B, "c"); // c=AB  
>plotSegment(B,C, "a"); // a=BC  
>plotSegment(A,C, "b"); // b=AC
```



menentukan masing-masing panjang dari a, b, dan c.

```
>distance (B, C)
```

4

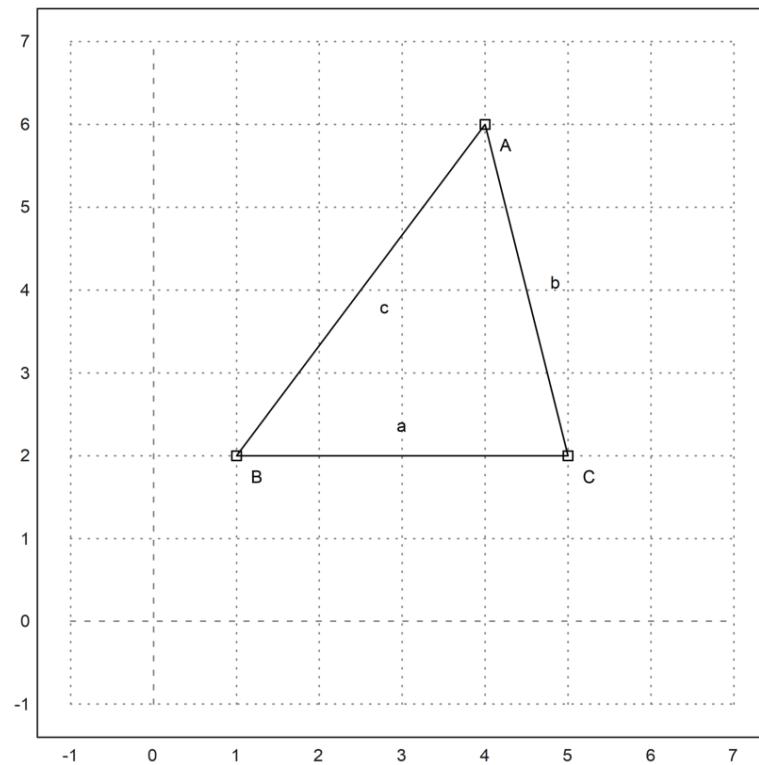
```
>distance (A, C)
```

4.12310562562

```
>distance (A, B)
```

5

```
>areaTriangle(A,B,C) :
```



```
>areaTriangle(A,B,C)
```

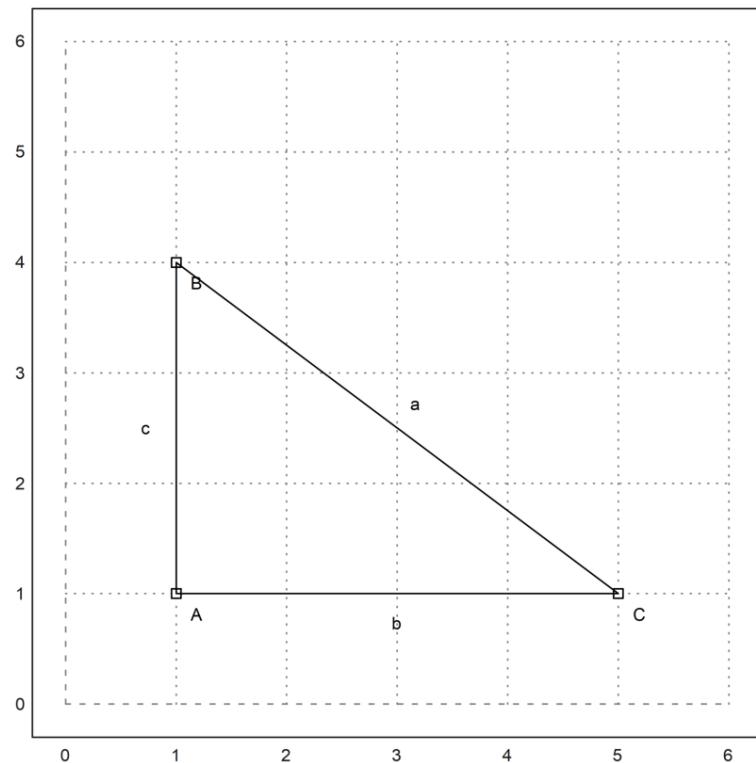
8

```
>setPlotRange(0,6,0,6) // mendefinisikan bidang koordinat
```

[0, 6, 0, 6]

Segitiga Siku-Siku

```
>A=[1,1]; plotPoint (A,"A");
>B=[1,4]; plotPoint (B,"B");
>C=[5,1]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"); // b=CD
```



```
>b=distance (A, C)
```

4

```
>c=distance (A, B)
```

3

```
>a=distance (B, C)
```

5

```
>Luas:=(distance (A, C)*distance (A, B))/2
```

6

```
>areaTriangle (A,B,C)
```

6

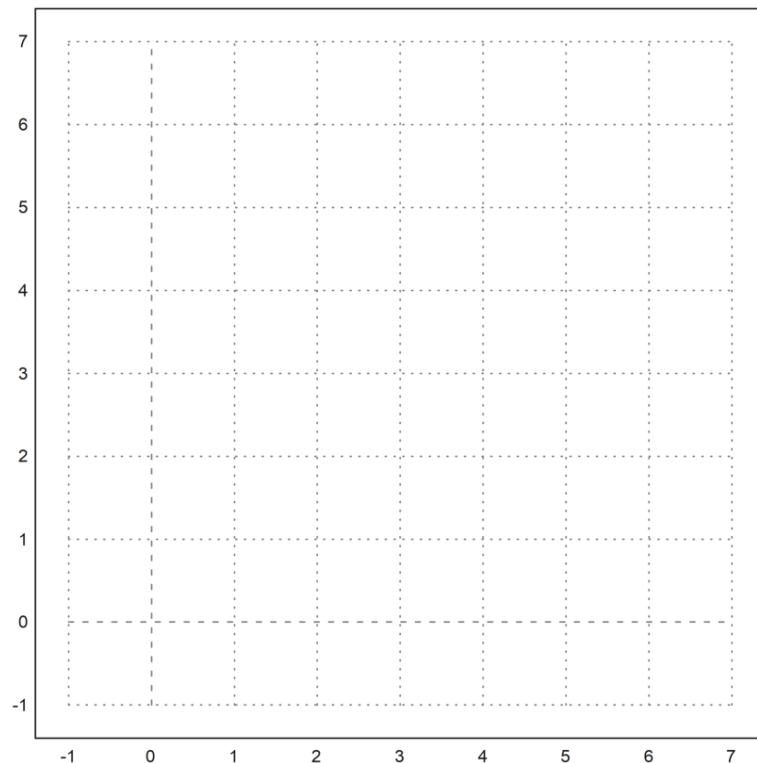
```
>KelilingSegitiga:= b+c+a
```

12

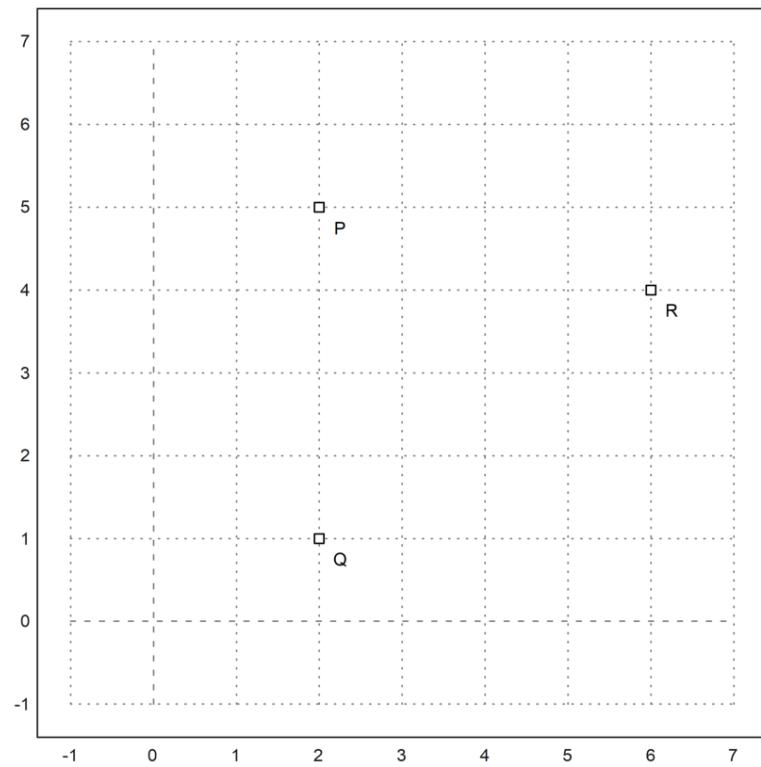
Latihan

1. Diketahui sebuah segitiga PQR dengan titik P(2,5), Q(2,1), dan R(6,4)
Hitunglah luas dari segitiga PQR tersebut.

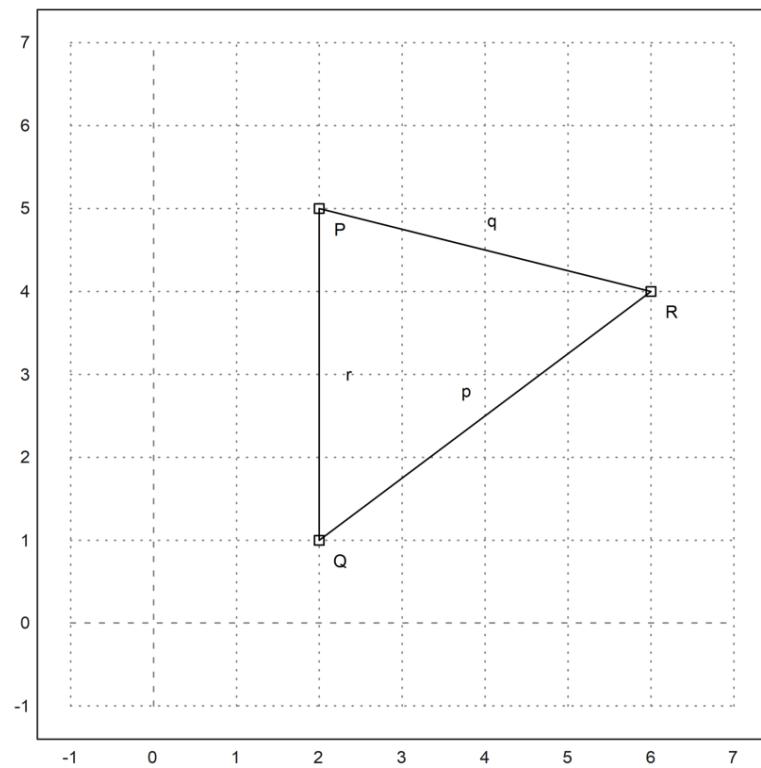
```
>setPlotRange(-1,7,-1,7):
```



```
>P=[2,5]; plotPoint(P,"P");
>Q=[2,1]; plotPoint(Q,"Q");
>R=[6,4]; plotPoint(R,"R"):
```



```
>plotSegment(P,Q,"r"); // r=PQ
>plotSegment(Q,R,"p"); // p=QR
>plotSegment(P,R,"q"); // q=PR
```



```
>distance (Q, R)
```

5

```
>distance (P, Q)
```

4

```
>distance (R, P)
```

4.12310562562

```
>areaTriangle(R,Q,P)
```

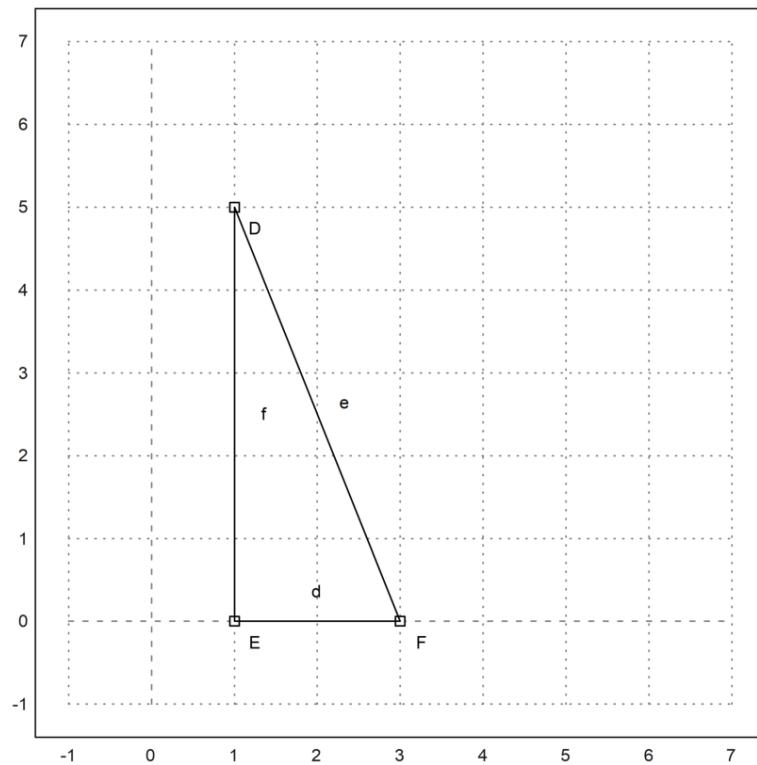
8

```
>Luas:=(distance (R, P)*distance(Q, R))/2
```

10.307764064

2. Diketahui sebuah segitiga DEF dengan titik D(1,5), E(1,0), dan F(3,0)
Hitunglah luas dari segitiga DEF tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>D=[1,5]; plotPoint(D,"D");
>E=[1,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[3,0]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f"); // f=DE
>plotSegment(E,F,"d"); // d=EF
>plotSegment(D,F,"e"); // e=DF
```



```
>distance (D, E)
```

5

```
>distance (E, F)
```

2

```
>areaTriangle(D,E,F)
```

5

Luas dan keliling lingkaran

Luas lingkaran adalah luasan daerah pada lingkaran tersebut.

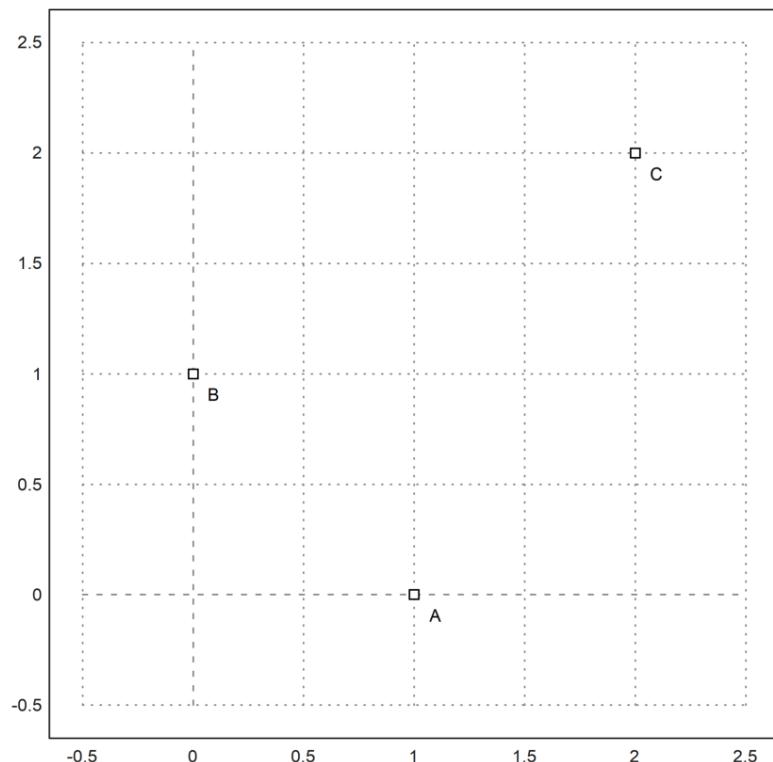
Luas pada sebuah lingkaran memiliki rumus :

$$L = \pi \cdot r^2$$

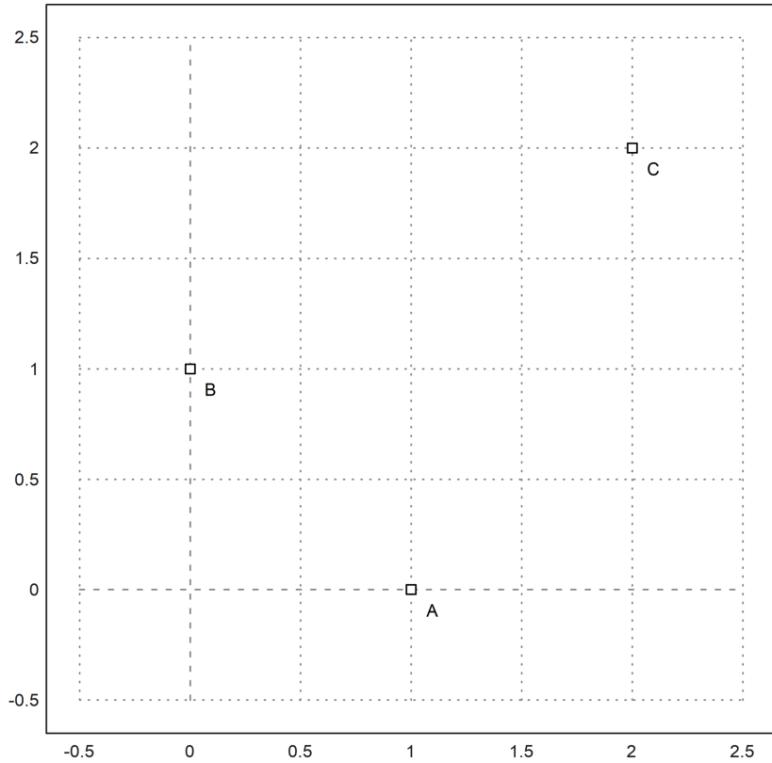
sedangkan untuk keliling lingkaran memiliki rumus :

$$K = 2\pi r$$

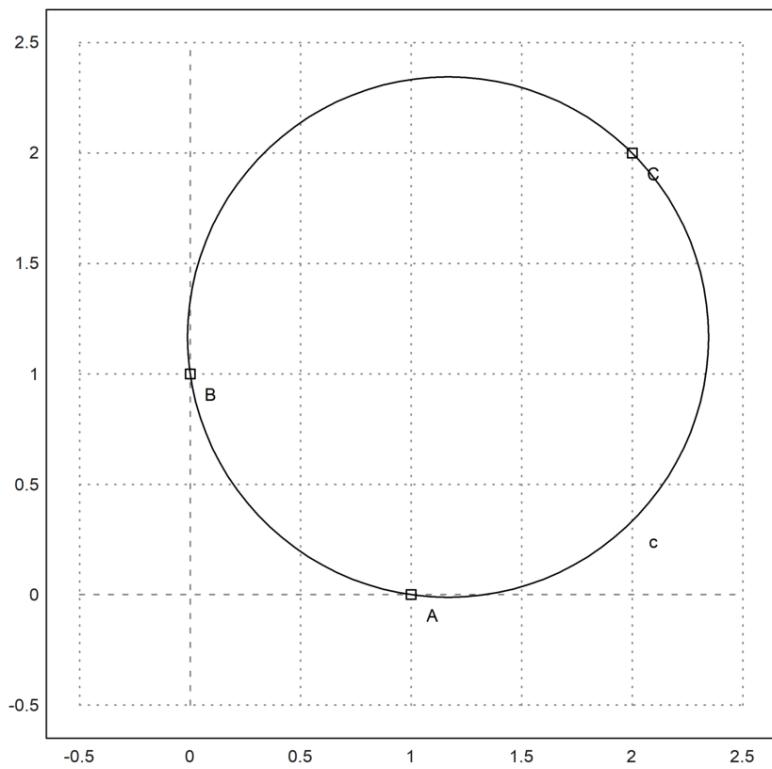
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);  
>A=[1,0]; plotPoint(A, "A");  
>B=[0,1]; plotPoint(B, "B");  
>C=[2,2]; plotPoint(C, "C");
```



```
>c=circleThrough(A,B,C);
```



```
>plotCircle(c) :
```



```
>r=getCircleRadius(c)
```

```
1.17851130198
```

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

```
4.36332312999
```

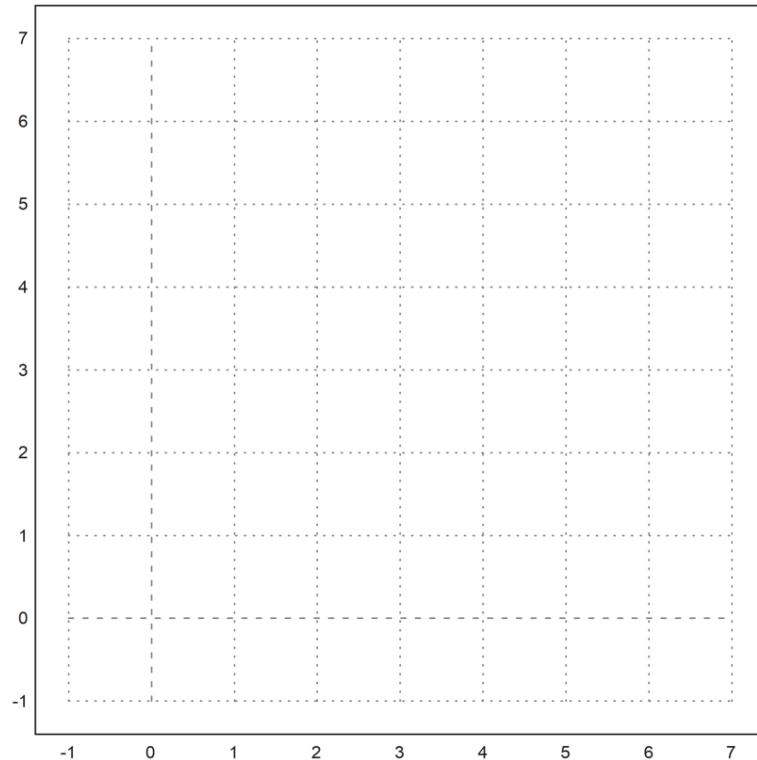
```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

```
7.40480489693
```

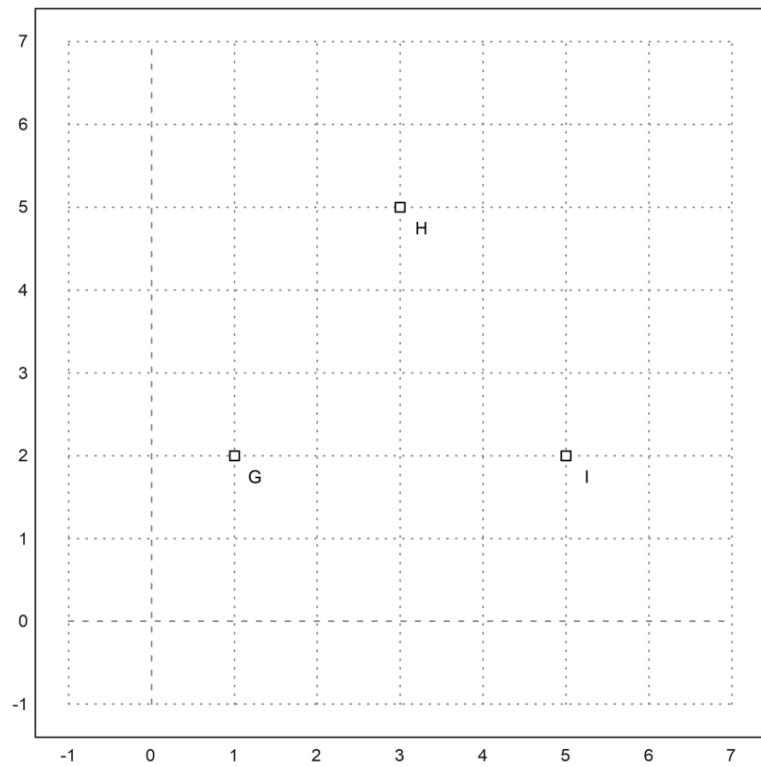
Latihan

Diketahui sebuah lingkaran yang melalui titik G(1,2), H(3,5), dan I(5,2). Hitunglah luas dan keliling lingkaran tersebut.

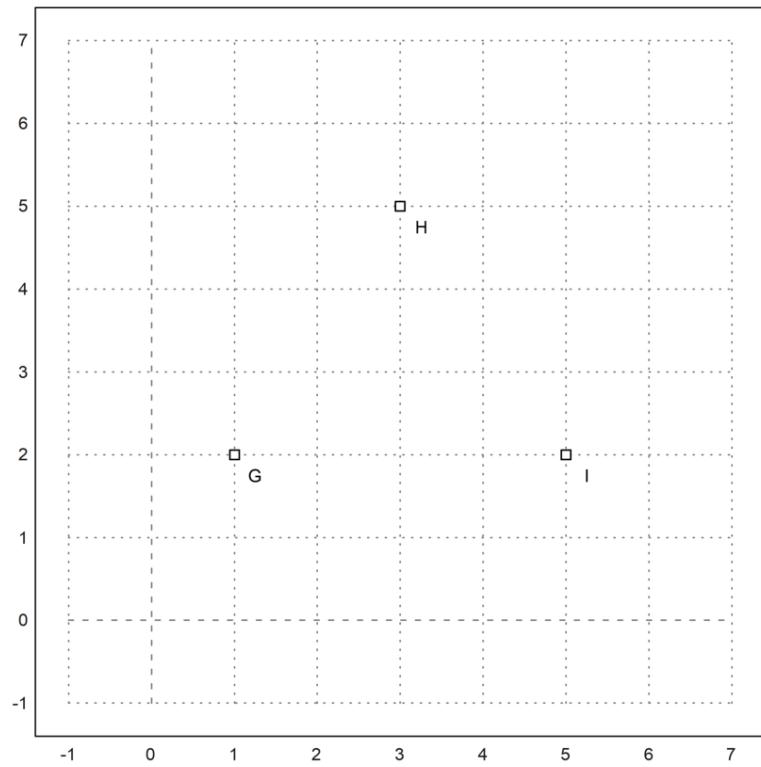
```
>setPlotRange (-1,7,-1,7):
```



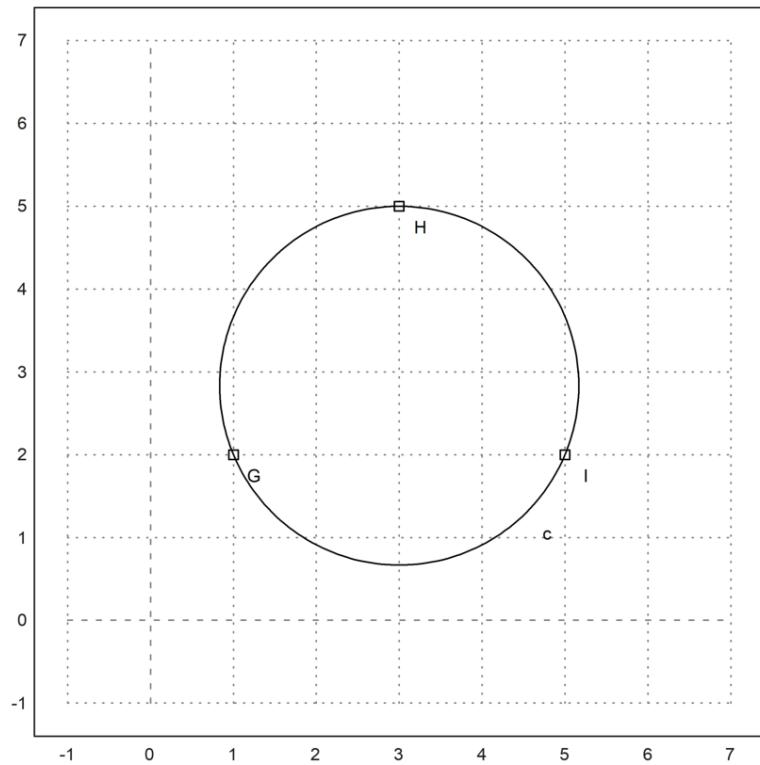
```
>G=[1,2]; plotPoint(G, "G");
>H=[3,5]; plotPoint(H, "H");
>I=[5,2]; plotPoint(I, "I");
```



```
>c=circleThrough(G,H,I):
```



```
>plotCircle(c):
```



```
>r=getCircleRadius(c)
```

2.16666666667

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

14.7480321794

```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

13.6135681656

Perhitungan Geometri lainnya

Perhitungan sudut pada bangun datar

Perhitungan sudut dalam konteks bangun datar dan antara dua garis

melibatkan pengukuran besarnya sudut antara dua garis atau sudut dalam suatu bangun datar. Sudut diukur dalam derajat ($^{\circ}$) atau radian (rad) tergantung pada preferensi dan konteks pengukuran yang digunakan. Dan dalam kesempatan kali ini kita akan menggunakan sudut derajat ($^{\circ}$). Contoh:

$$S = ((n - 2).180) - (k)$$

dimana S adalah sudut yang akan ditentukan dalam derajat ($^{\circ}$)

n adalah jumlah sudut yang ada pada bangun datar tersebut
dan k adalah jumlah sudut segitiga yang diketahui

contoh:

Andi ingin membuat segitiga menggunakan kawat dan dia ingin membuat segitiga siku-siku dan dia telah menentukan bahwa salah satu sudut selain siku-sikunya adalah 30° maka berapakah sudut yang belum diketahuinya?

Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus UNY pusat.

```
>UNY=[rad(-7,-46.17),rad(110,22.39)]
```

```
[-0.135603, 1.92638]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(UNY) // posisi garis lintang dan garis bujur UNY
```

```
S 7°46.170' E 110°22.390'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];  
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini [pos,jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7° .

```
>br=svector(UNY,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak UNY-Solo
```

66°23'43.70''
54.7764836559

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(UNY,Semarang)->" km", // perkiraan jarak UNY-Semarang
```

87.5069716842 km

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(UNY,Solo))
```

66.40°

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,UNY,Semarang)+sangle(UNY,Solo,Semarang)+sangle(UNY,Semarang,Solo); degpr
```

180°0'10.91''

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga UNY-Solo-Semarang,
```

2142.91458761 km^2

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,UNY,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

2150.62504635 km^2

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan vektor. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan vektor sadd.

```
>v=svector(UNY,Solo); sposprint(saddvector(UNY,v)), sposprint(Solo),
```

S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(UNY,esdir(UNY,Solo),esdist(UNY,Solo))), sposprint(Solo),
```

S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'

```
>load "spherical.e";
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Merapi Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Merapi=[rad(-7,-22.33),rad(110,15.00)]; Monas=[rad(-6,17.50),rad(106,81.1944)];  
>sposprint(Merapi), sposprint(Monas)
```

S 7°22.330' E 110°15.000'
S 5°42.500' E 107°21.194'

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan pendekatan yang baik.

```
>esdist(Merapi,Monas)->" km", // perkiraan jarak Merapi Jogja - Monas Jakarta
```

370.027986205 km

Judulnya sama dengan judul yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Merapi,Monas))
```

299°51'45.84''

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Merapi,esdir(Merapi,Monas),esdist(Merapi,Monas)))
```

S 5°42.500' E 107°21.195'

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

S 5°42.500' E 107°21.194'

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin menempuh jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti heading yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan pos yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Merapi,Monas); hd=esdir(Merapi,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluhan dari jarak, menggunakan pos ke Monas, kita sampai di Merapi.

```
>p=Merapi; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh.

```
>sposprint(p), skmpprint(esdist(p,Monas))
```

S $5^{\circ}42.969'$ E $107^{\circ}20.921'$
1.006km

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30° , melainkan jalur terpendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

79.69°

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

79.69°
 81.67°
 83.71°
 85.78°
 87.89°
 90.00°
 92.12°
 94.22°
 96.29°
 98.33°

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti heading yang sama terlalu lama.

```
>skmpprint(esdist(p,P2))
```

0.203km

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan pos setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Merapi ke Monas.

```
>p=Merapi; dist=esdist(Merapi,Monas); ...
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmpprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

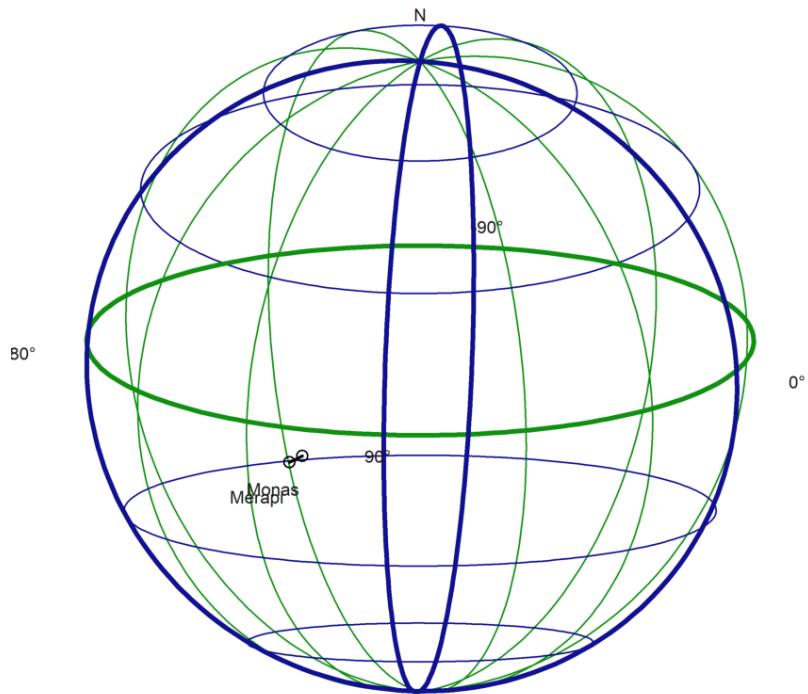
```
>load spherical; v=navigate(Merapi,Monas,10); ...
>loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

S 7°22.330' E 110°15.000'
S 7°12.393' E 109°57.565'
S 7°2.445' E 109°40.144'
S 6°52.487' E 109°22.734'
S 6°42.518' E 109°5.337'
S 6°32.539' E 108°47.952'
S 6°22.550' E 108°30.578'
S 6°12.551' E 108°13.216'
S 6°2.543' E 107°55.865'
S 5°52.526' E 107°38.524'
S 5°42.500' E 107°21.194'

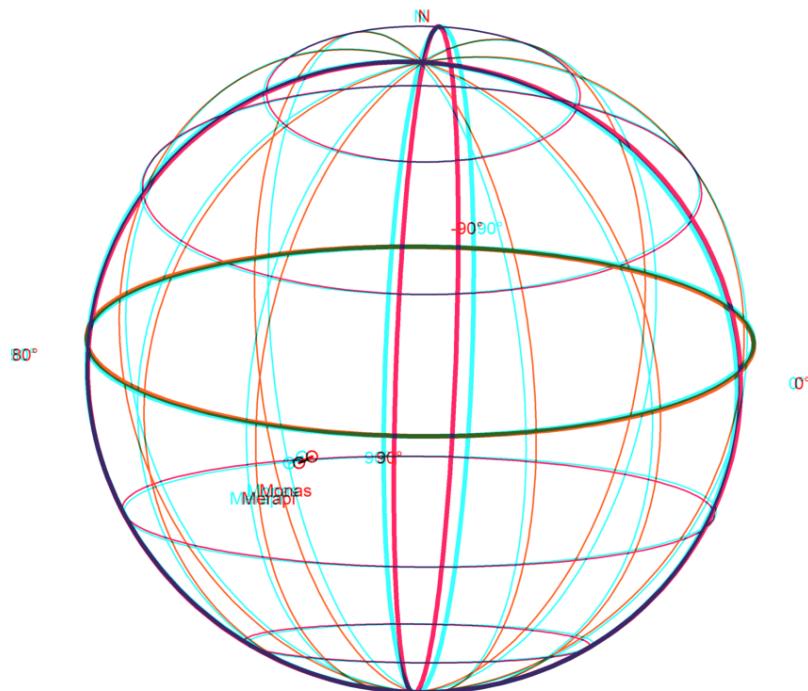
```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Merapi,"Merapi"); plotpos(Monas,"Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



```
>function testplot ...
```

```
useglobal;  
plotearth;  
plotpos(UNY,"UNY Pusat"); plotpos(Monas,"Monas");  
plotposline(v);  
endfunction
```

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```

