Типовой расчет №3

по дисциплине „Дискретная математика"

Выполнил студент гр. M3106
Макаров М. А.

№1.

Нарисуйте по степеням вершин простой неориентированный граф (исходный граф: 5 6 4 6 2 4 4 3 5 3), желательно состоящий из одной компоненты связности. К полученному графу постройте следующие графы (обязательно доказывайте и обосновывайте верность своих построений в решении):

1) Частичный граф к исходному, который будет являться двудольным.
2) подграф для построенного, такой чтобы при пересечении полученного подграфа и ранее построенного частичного графа – получилось дерево.
3) надграф к исходному, такой чтобы дополнительный граф к надграфу был регулярным
4) 2 изоморфных графа с исходным, причем один с планарной укладкой, а другой с непланарной
5) дополнительные графы к полученным выше частичному и подграфу относительно исходного графа
6) нуль - граф к полученному выше надграфу

№2.

Выпишите и отметьте на самом графе:

1) матрицу смежности
2) инцидентности
3) список смежности

4) степени вершин

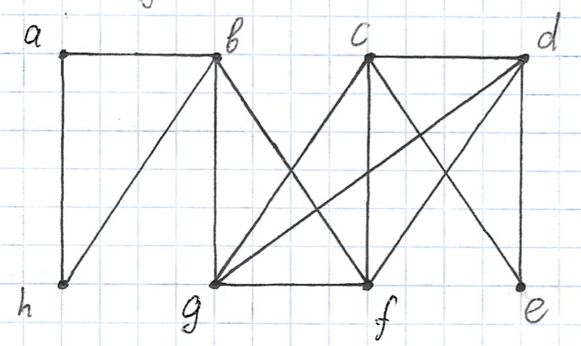
5) точки сочленения и мосты.

6) изолированные и висячие вершины

7) смежные между собой сразу 3 или 4 ребра / дуги.

8) определите и обоснуйте тип графа (мульти, псевдо, направленный и т. п.)

9) проверьте является ли граф: регулярным / полным / двудольным (обоснуйте свои ответы)



№3.

Найти для указанного графа и дополнительного к нему:

1) центр (отметить на графе)

2) диаметр

3) радиус

4) три разных остовных дерева

5) цепь длиной 6 (покажите на графе)

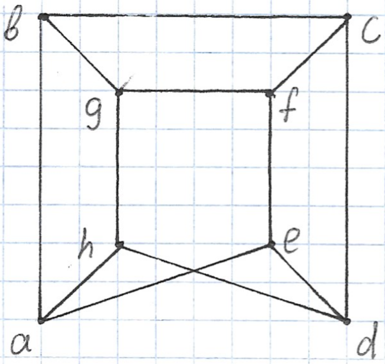
6) замкнутый путь длиной 10 (покажите на графе)

7) вершинно простой путь длиной 5 (покажите на графе)

8) цикл длиной 4 и 6 (покажите на графе)

9) простой цикл длиной 3 и 4 (покажите на графе)

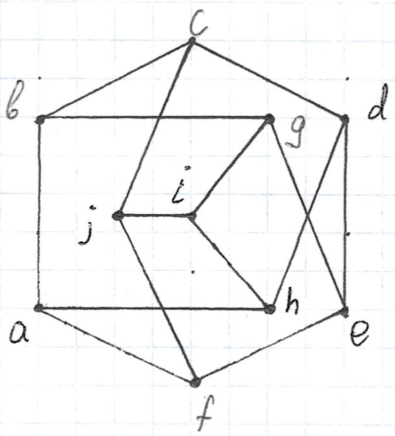
Примечание: для пунктов 5 – 9 рисуйте граф заново, если же выполнить условие пункта задания невозможно – обоснуйте.



№4

Для представленного графа и дополнительного к нему выполните (в каждом) удаление не менее 3х ребер с сохранением связности графа. Для получившихся графов укажите:

1) компоненты реберной двусвязности
2) компоненты вершинной двусвязности
3) точки сочленения, если их нет, то укажите почему
4) мосты, если их нет, укажите почему.



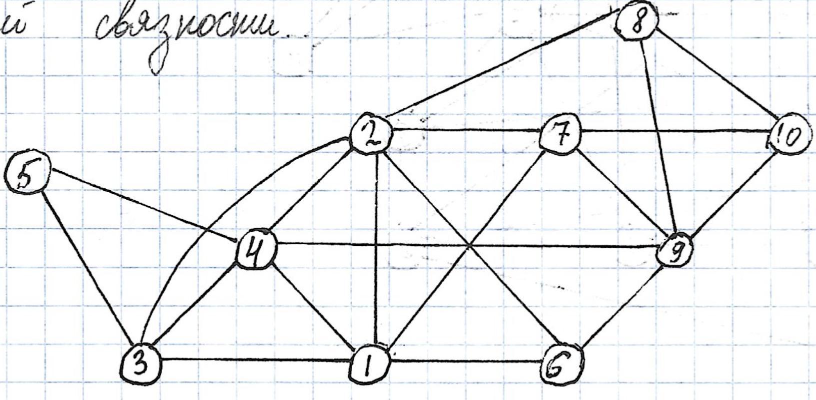
№5.

Нарисуйте следующие графы и обоснуйте корректность вашего ответа:

1) дерево с диаметром равным 8, двумя центрами и 19ю листьями
2) ориентированный граф с 6 компонентами слабой связности в каждой компоненте слабой связности не менее 4 компонент сильной связности
3) графы K_5 и $K_{3,2}$, $K_{6,7}$
4) простой неориентированный с 5 компонентами связности, который имеет 2 висячих ребра, 3 простых цикла длиной 7, 0 изолированных вершин, 3 моста и 8 точек сочленения.

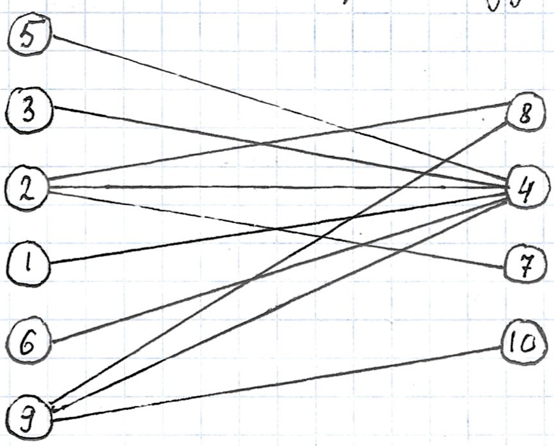
№1.

Нарисовать по степеням вершин {5, 6, 4, 6, 2, 4, 4, 3, 5, 3} простой неориентированный граф, желательно с одной компонентой связности.

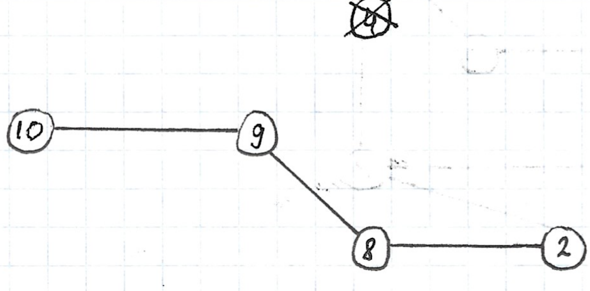


К полученному графу нарисовать следующие графы:

1) частичный граф, который будет являться двудольным:

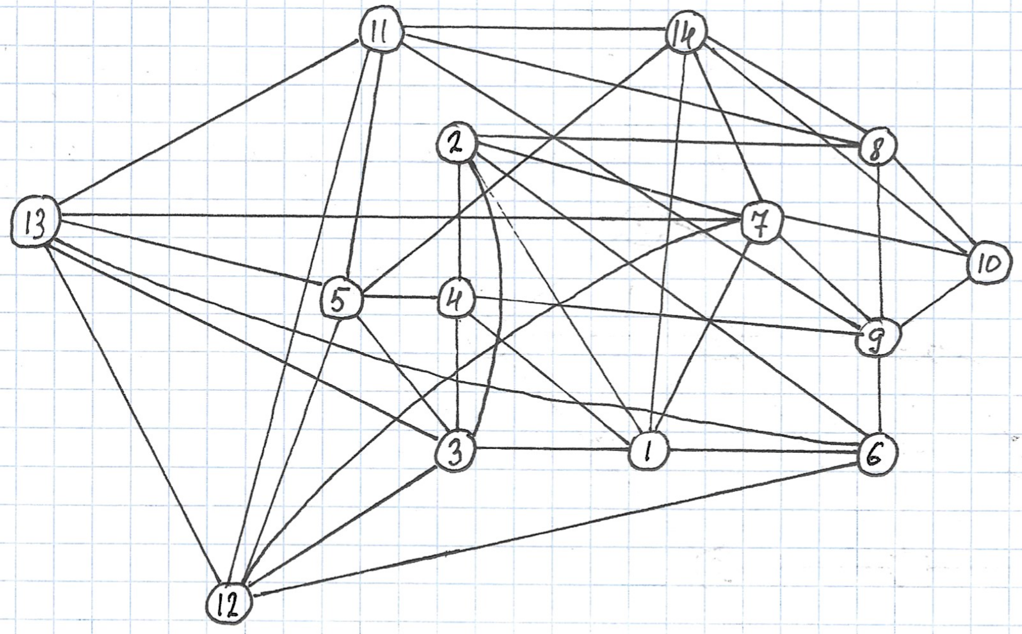


2) подграф к построенному такой, что при их пересечении образуется дерево:



3) надграф к исходному такой, что дополнительный к нему — регулярный.

~~Ответ~~ Дополнительный граф регулярный тогда, когда исходный граф — регулярен. => необходимо дополнить исходный граф вершинами и ребрами таким образом, чтобы он стал регулярным.



Добавлены:

V = {11, 12, 13, 14}

E = {(13; 12); (13, 3); (13; 6); (13, 5); (13, 7); (13, 11); (12, 11); (12, 5); (12, 7); (12, 3); (12, 6); (11, 5); (11, 9); (11, 8); (11, 14); (14; 5); (14, 1); (14, 7); (14, 10); (14, 8)}

4) 2 изоморфных графа к исходному, один с планарной укладкой, другой – без нее.

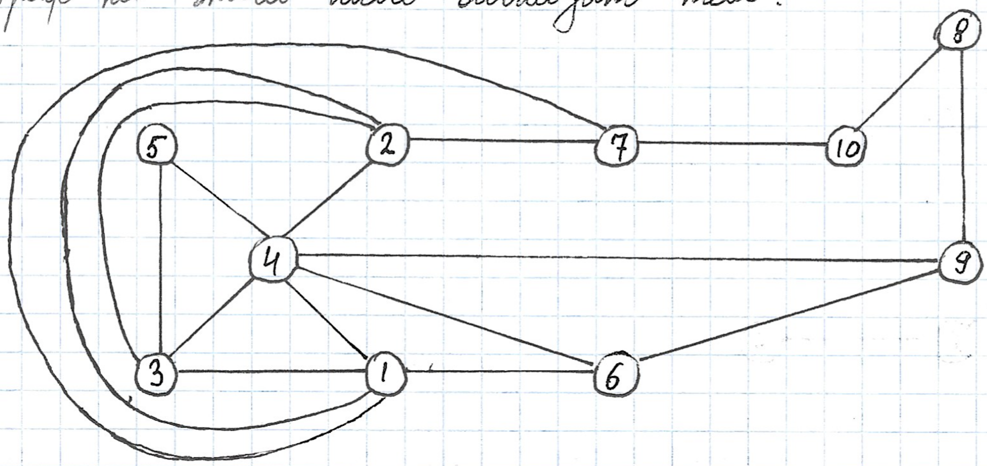
Планарную укладку построить невозможно.

На некотором шаге гамма-алгоритма:

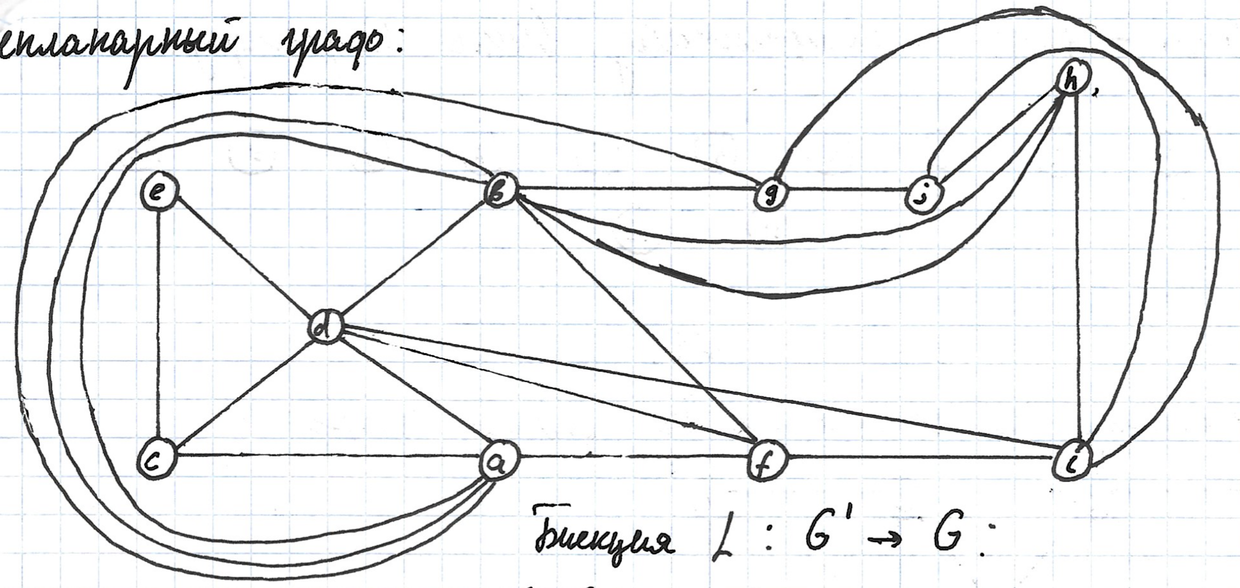
- Сегменты, еще не добавленные в граф: {(7, 9); (9, 10); (2; 6); (8, 2)};
- Кол-во граней, вмещающих в себя i-й сегмент:

(2; 2; 0; 1).

Граф на этом шаге выглядит так:



Непланарный граф:

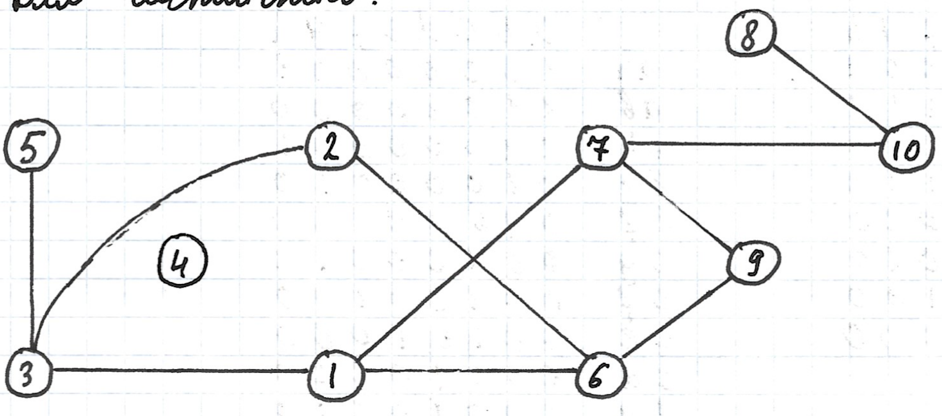


Биекция $L : G' \to G$:

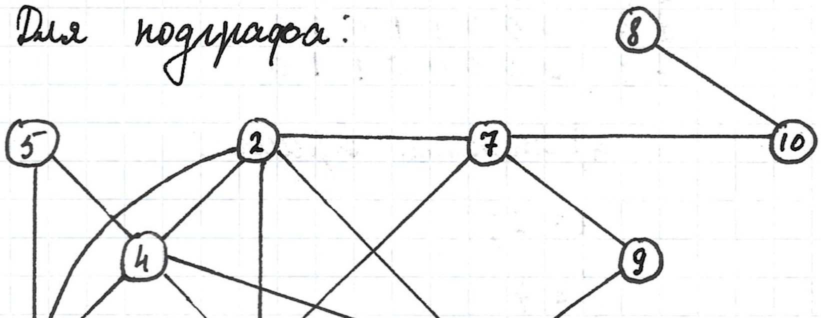
$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & j \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 10 \end{pmatrix}$$

5) Доп. графы для полученных выше частичному и подграфу относительно исходного:

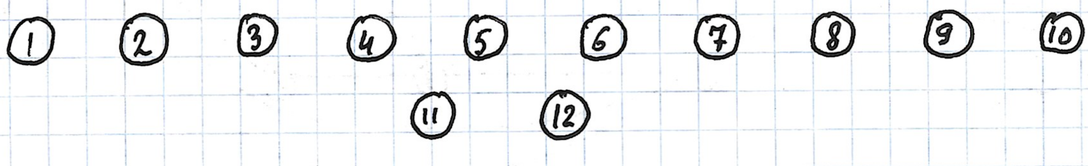
Для частичного:



Для подграфа:

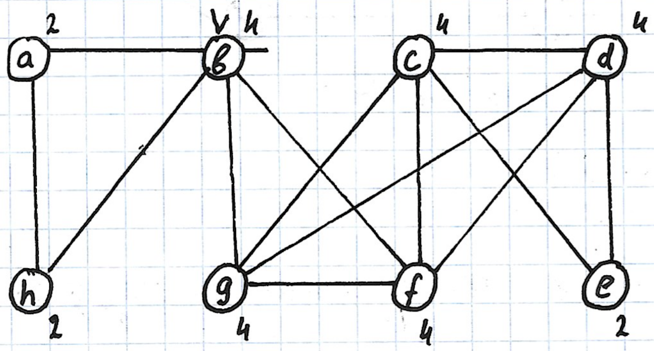


6) Нуль-граф к полученному выше надграфу:



№2.

Выпишите и отметьте на самом графе:



1) Матрицу смежности:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	0	0	0	0	0	1
b	1	0	0	0	0	1	1	1
c	0	0	0	1	1	1	1	0
d	0	0	1	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	0	0	0	0
f	0	1	1	1	0	0	1	0
g	0	1	1	1	0	1	0	0
h	1	1	0	0	0	0	0	0

2) Матрицу инцидентности:

	a	b	c	d	e	f	g	h
ah	1	0	0	0	0	0	0	1
ab	1	1	0	0	0	0	0	0
bh	0	1	0	0	0	0	0	1
bg	0	1	0	0	0	0	1	0
bf	0	1	0	0	0	1	0	0
cg	0	0	1	0	0	0	1	0
cf	0	0	1	0	0	1	0	0
ce	0	0	1	0	1	0	0	0
cd	0	0	1	1	0	0	0	0
dg	0	0	0	1	0	0	1	0
df	0	0	0	1	0	1	0	0
de	0	0	0	1	1	0	0	0
fg	0	0	0	0	0	1	1	0

3) Список смежности:

a: {b, h}

b: {a, h, g, f}

c: {g, f, e, d}

d: {c, g, f, e}

e: {c, d}

f: {g, b, c, d}

g: {b, c, d, f}

h: {a, b}

4) Степени вершин:

a = 2;

b = 4

c = 4

d = 4

e = 2

f = 4

g = 4

h = 2

Точки сочленения:

в; отмечена v на графе

Мосты:

{ ∅ – удаление любого из ребер не приводит к увеличению комп. связи.

6) Изолированные вершины:

∅ – $\deg(v)\ (v \in V) > 0$

Висячие вершины:

∅ – $\deg(v)\ (v \in V) > 1$.

7) Смежные между собой сразу 3-4 ребра:

{ba, bh, bg, bf}

{cg, cf, ce, cd}

{cd, dg, df, de}

{gf, bf, cf, df}

{bg, cg, dg, fg}

8) Определить и обосновать тип графа:

8.1) Неориентир. граф.

8.2) Простой (без крат. ребер и петель)

8.3) Эйлеров (кол-во вершин нечет. степени = 0 < 3)

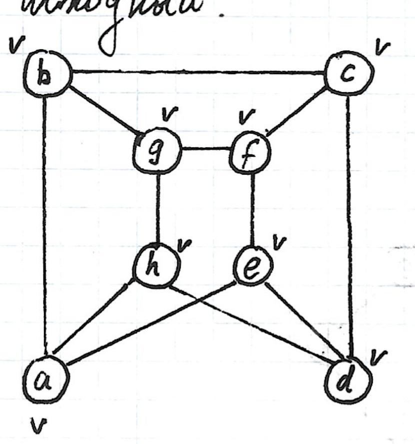
9) Проверить, является ли граф:

- регулярным – нет (не все вершины имеют одинак. степень)
- полным – нет (не каждая пара вершин соед. м/у собой)
- двудольным – нет (нет соответствующего разбиения)

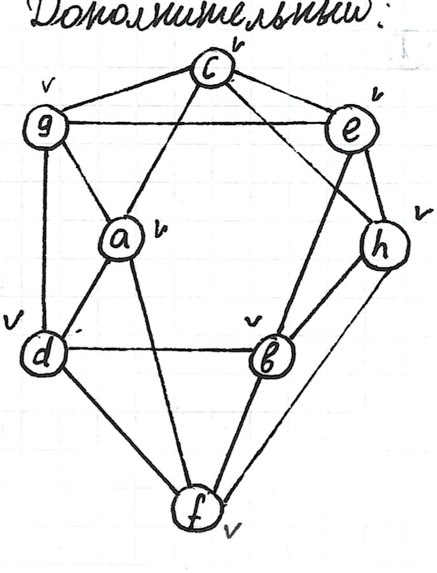
№3.

Найти для указанного графа и дополнительного к нему:

Исходный:



Дополнительный:



1) Центр.

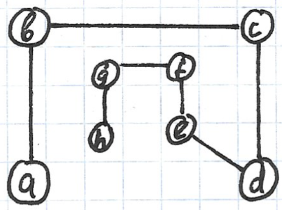
	a	b	c	d	e	f	g	h	ε
a	0	1	2	2	1	2	2	1	2
b	1	0	1	2	2	2	1	2	2
c	2	1	0	1	2	1	2	2	2
d	2	2	1	0	1	2	2	1	2
e	1	2	2	1	0	1	2	2	2
f	2	2	1	2	1	0	1	2	2
g	2	1	2	2	2	1	0	1	2
h	1	2	2	1	2	2	1	0	2

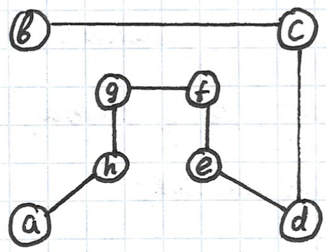
Все вершины являются центрами.

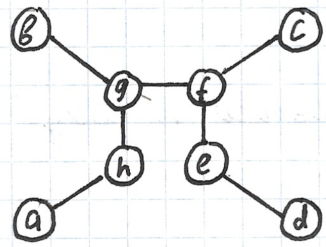
2) Радиус. $r = 2$

3) Диаметр. $d = 2$

4) Три разных остовных дерева.





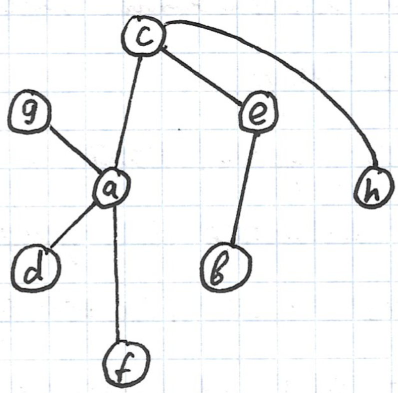


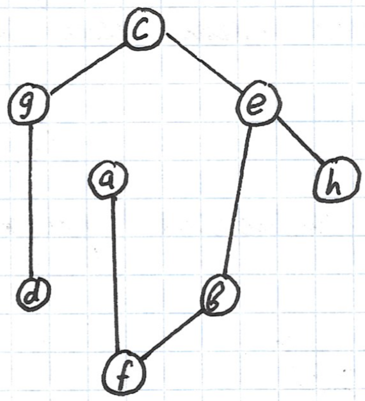
	a	b	c	d	e	f	g	h	ε
a	0	2	1	1	2	1	1	2	2
b	2	0	2	1	1	1	2	1	2
c	1	2	0	2	1	2	1	1	2
d	1	1	2	0	2	1	1	2	2
e	2	1	1	2	0	2	2	2	2
f	1	1	2	1	2	0	2	2	2
g	1	2	1	1	2	2	0	2	2
h	2	1	1	2	2	2	2	0	2

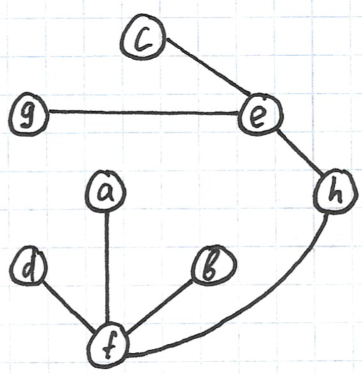
Все вершины — центры.

$r = 2$

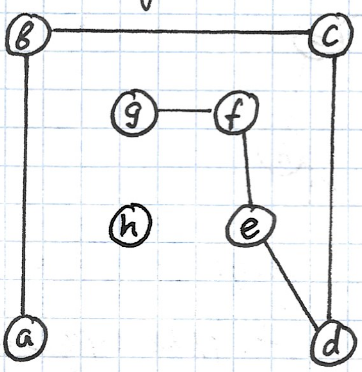
$d = 2$

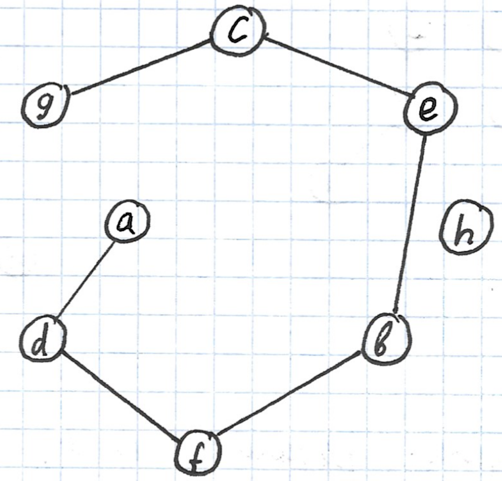




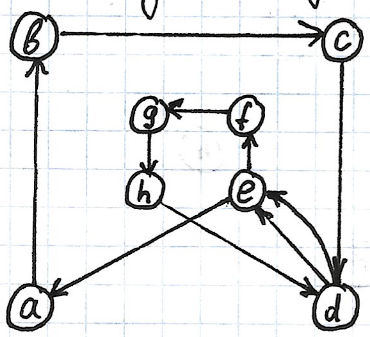


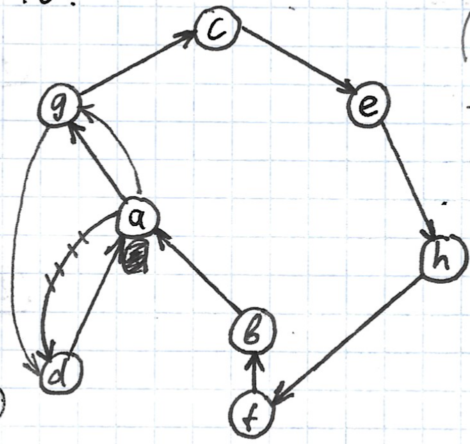
) цепь длиной 6 (покажите на графе)





6) Замкнутый путь длиной 10.



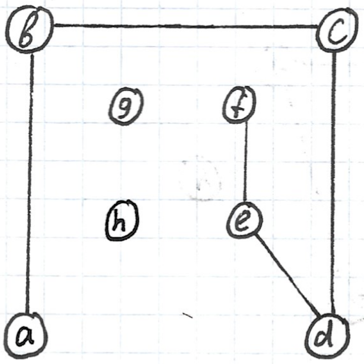


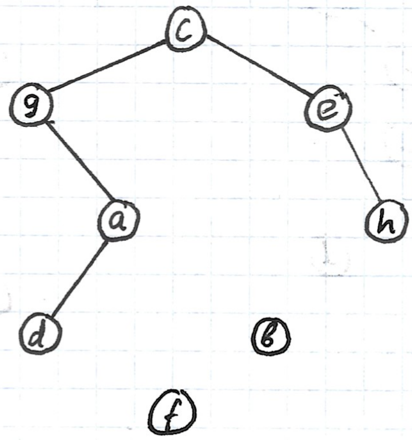
(d→a→g→c→e→h→ →f→b→a→g→d)

Ребра (a→d) не существует.

(a→b→c→d→e→f→g→h→d→e→a)

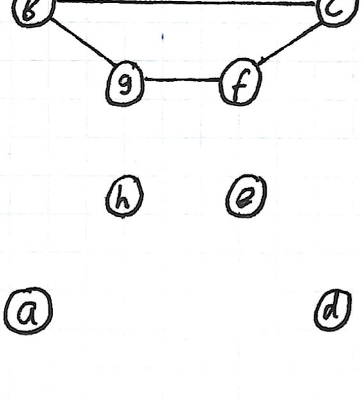
7) вершинно простой путь длиной 5.



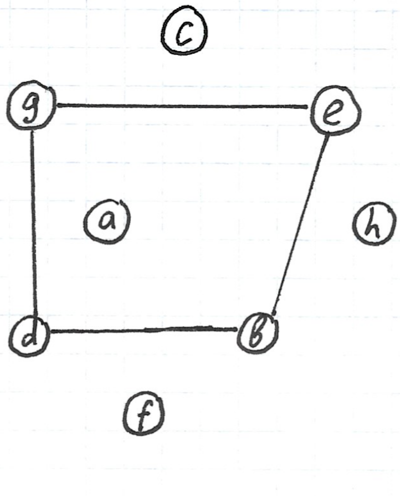


8) цикл длиной 4 и 6.

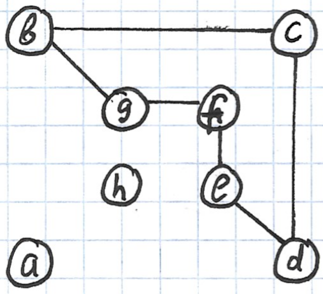
4:



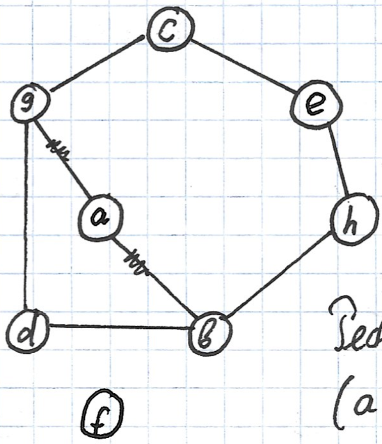
4:



6 :



6 :

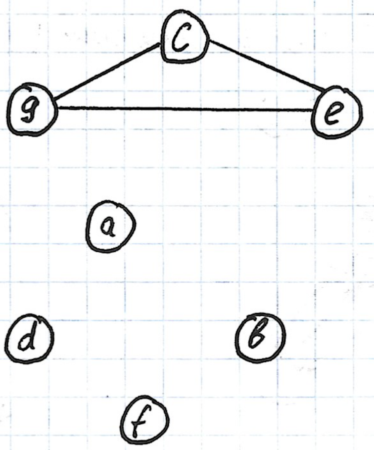


Ребер (a ; b) и (a ; g) не существует.

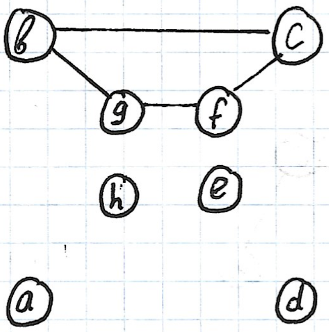
9) простой цикл длиной 3 и 4.

3 : не существует.

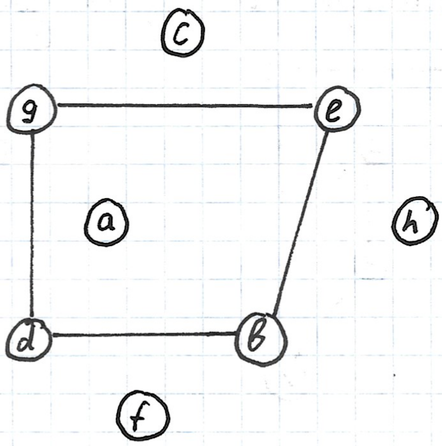
3 :



4 :



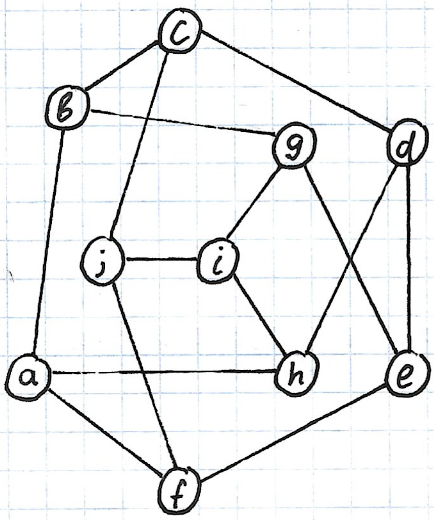
4 :

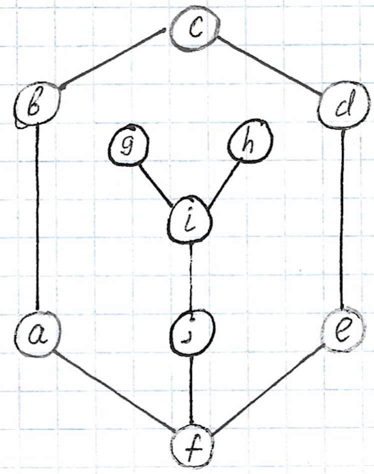


№4.

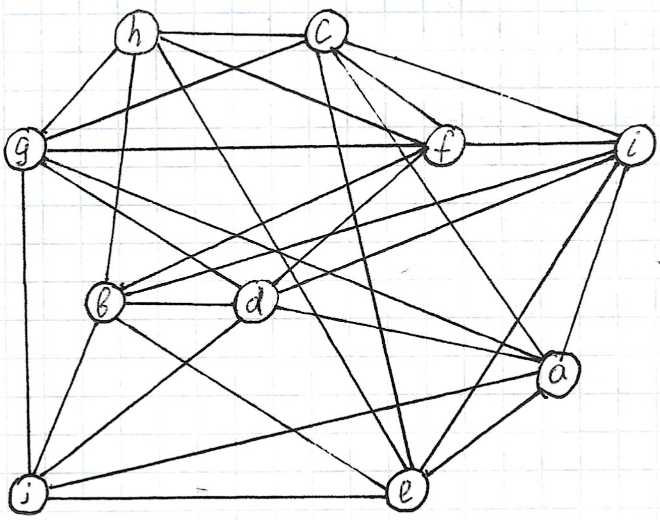
Для представленного графа и дополнительного к нему удалить не менее 3-х ребер с сохранением связности.

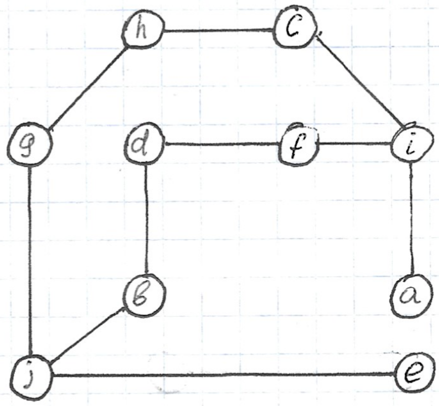
Исходный:





Дополнительный:





Для них указать:

1) Компоненты реберной двусвязности:

$\{a, b, c, d, e, f\} \cup \{j\} \cup \{i\} \cup \{g\} \cup \{h\}$ (исходный)

$\{j, g, h, c, i, f, d, b\} \cup \{a\} \cup \{e\}$ (дополнительный)

2) компоненты вершинной двусвязности:
Для обоих графов совпадают с компонентами реберной двусвязности.

3) Точки сочленения:
$\{i; j, f\}$ $\{i, j\}$

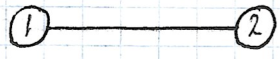
4) Мосты:
$\{(g; i)$, ~~(j; h)~~, $(i; h); (j; i), (f; j)\}$ $\{(e; j), (a; i)\}$

№5.

Нарисовать следующие графы и обосновать корректность ответа.

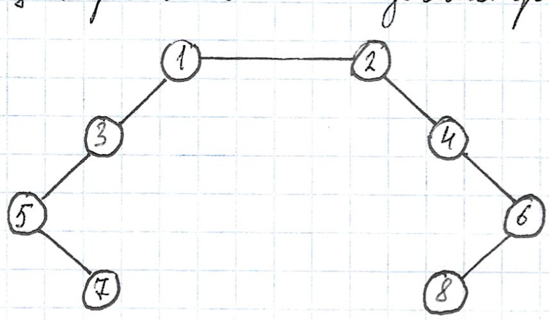
1) Дерево с диаметром 8, двумя центрами и 19-ю листьями.
Это невозможно. Абстрагируемся от условия „19 листов"
и допустим, что действительно есть дерево с двумя центрами и диаметром 8. На каждом шаге дерево должно оставаться деревом.

Выберем две центральные вершины:



$r = 1$; $d = 1$.

Нарастим дерево таким образом, чтобы эти вершины оставались центральными и диаметр не превосходил 8.



$r = 4$; $d = 7$.

Если мы добавим вершину к 7-ой вершине, диаметр увеличится на 1, но это приведет к единственному центру в вершине 1. Если мы добавим вершину ~~8~~ к 7 и 8 вершинам, это сохранит два центра, но увеличит диаметр на 2. Добавлять вершины к другим вершинам не имеет смысла, т.к в этих случаях ситуация сводится к упомянутой выше.

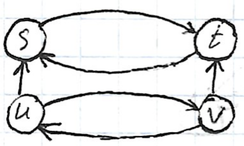
g.g. we lose.

2) Орграф с 6 компонентами слабой связности. В каждой компоненте - не менее 4 компонент сильной связности.

Вершины слабо связны, если они связны в неориентированном графе, полученном из исходного. Таким образом, 6 компонент слабой связности представляют собой 6 несвязанных м/у собой подграфов.

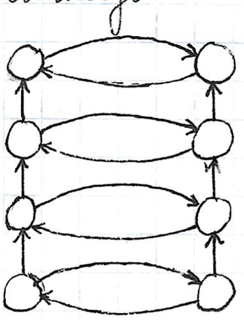
Вершины сильно связны, если существует ориентированный путь из s в t и наоборот. Самый простой способ задать компоненту сильной связности:

В компоненте слабой связности должно быть не меньше 4 таких элементов. Попробуем слабо связать два из них:

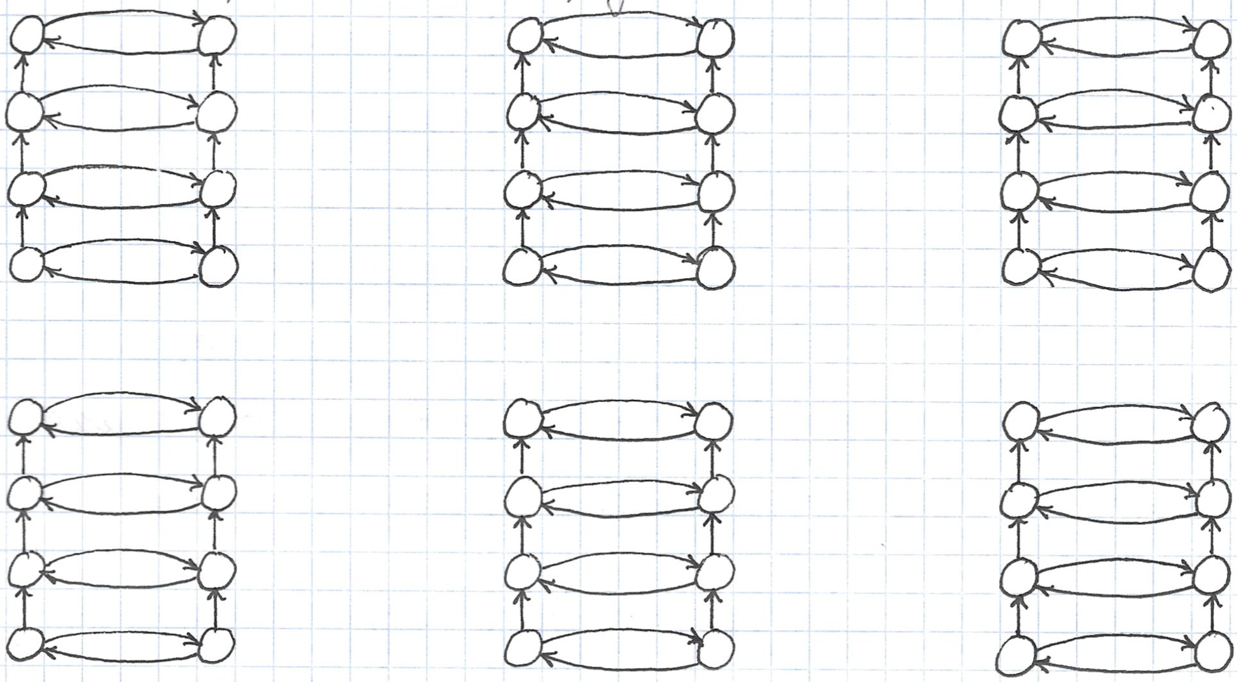


(существуют пути $s \rightsquigarrow t$, $t \rightsquigarrow s$, $u \rightsquigarrow v$, $v \rightsquigarrow u$, но не существует других обратимых)

Таким образом, одна компонента слабой связности будет выглядеть так:

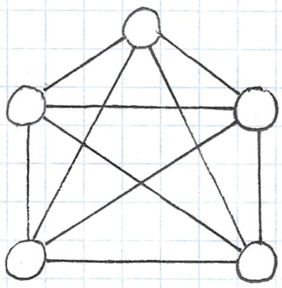


А полный граф, в свою очередь:

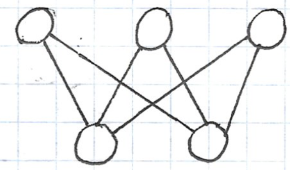


3) графы K_5 ; $K_{3,2}$; $K_{6,7}$

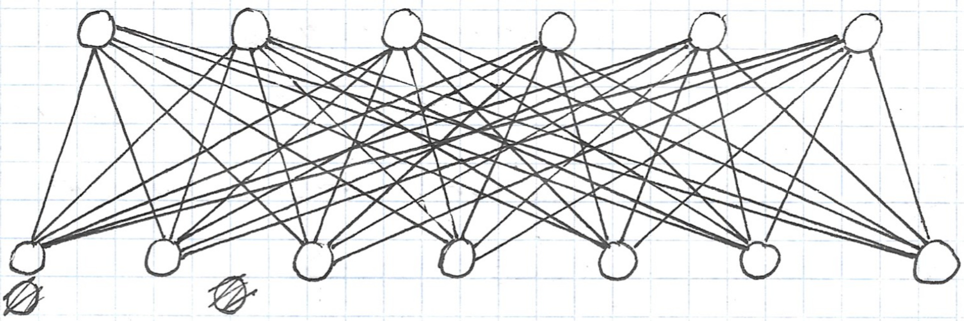
K_5:



$K_{3,2}$:

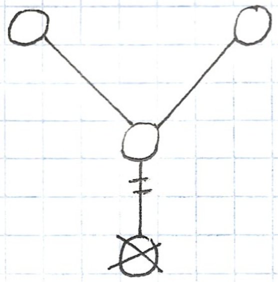


$K_{6,7}$:



4) простой неориентированный граф, имеющий 2 висячих ребра, 5 компонент связности, 3 простых цикла длиной 7, 0 изолированных вершин, 3 моста и 8 точек сочленения.

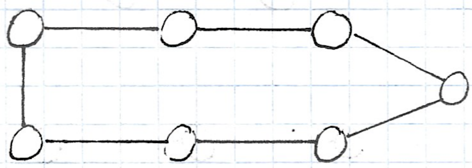
Начать построение такого графа предлагается с висячих ребер:



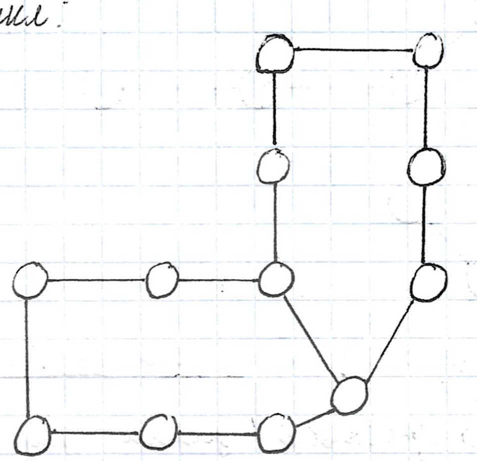
Мы получили 1 компоненту связности, 2 моста, ~~и~~ 2 висячих ребра и 1 точку сочленения.

~~Для~~ Построим 3 простых цикла длиной 7:

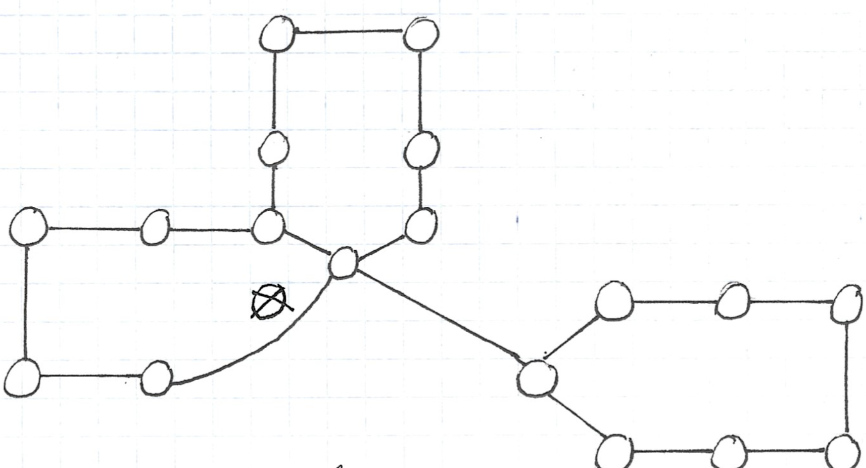
Примитив:



Добавим цикл:



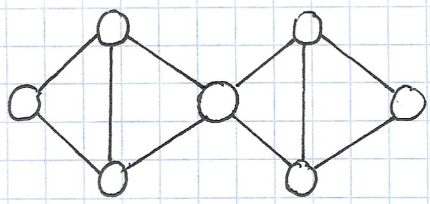
И мост с циклом.



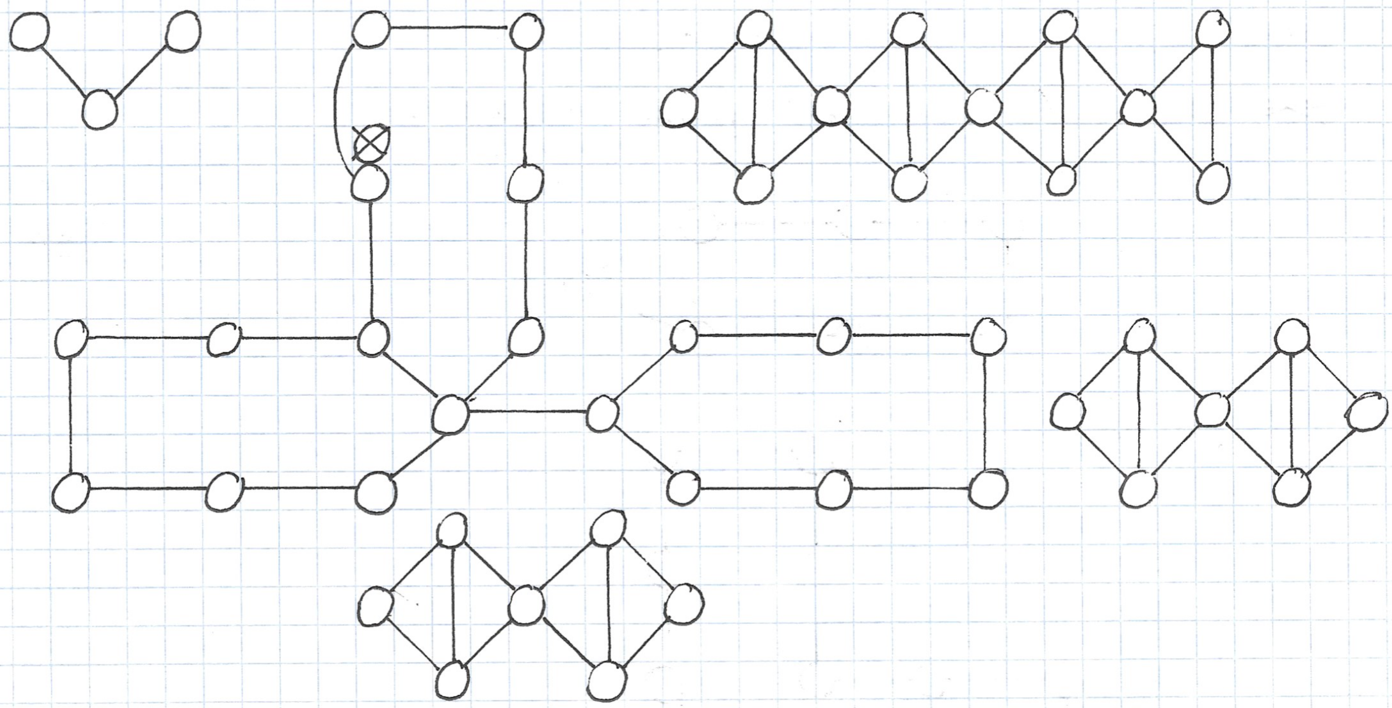
Мы получим 1 компоненту связности, 1 мост, 2 точки сочленения и 3 простых цикла длиной 7.

Осталось добавить 3 компоненты связности и 5 точек сочленения.

Точки сочленения легко получить, соединяя K_3:



Таким образом, итоговый граф выглядит так:



В итоге был получен граф, содержащий в точности 5 компонент связности, 2 висячих ребра, 3 простых цикла длиной 7, 0 изолированных вершин, 3 моста и 8 точек сочленения.