

Типовой расчет №4
по дисциплине "Дискретная математика"

Выполнено студентом гр. М3106
Макаров М. А.

№1.

За круглыми столами короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый брандзует со своими соседями. Надо выбрать 5 из них, чтобы освободить заколдованный принцессу. Сможет ли способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было брандов?

Ответ: 12. 36.

№2.

Все ребята собрали 10 рамочек, 15 вспышек и 14 негауди-
дов. Сможет ли способами они могут разделить эти
вещи между собой?

Ответ: 2640.

№3.

Сколько различных слов можно получить, переставив буквы
в слове "математика"?

Ответ: 151 200.

№4.

В стране 20 городов, каждые два из которых соединены
автодорогами. Сколько автодорог в этой стране?

Ответ: 190.

№5.

Для представляемого графа и дополнительного к нему определите

1) есть ли в графе Эйлеров цикл или Эйлерова цепь?

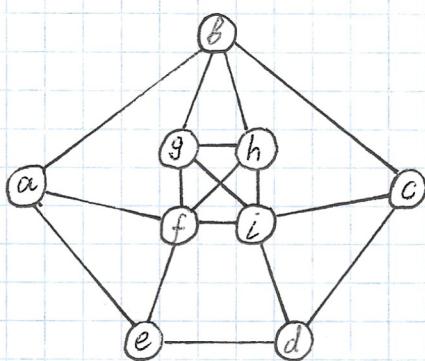
Если есть, то постройте по шагам алгоритма Риэра цепь/цикл. Если нет, то обоснуйте отсутствие;

2) есть ли в графе Гамильтонов цикл, Гамильтонова цепь?

Если есть, то постройте по шагам алгоритма цепь/цикла.

Если нет, то обоснуйте отсутствие (проверка все теорем);

Дополнительно: преобразуйте граф, добавляя новые ребра и вершины, чтобы он был одновременно Гамильтоновым и Эйлеровым.



Ответ: 1) исходный: нет; дополнительный: нет.

2) исходный: да, да; дополнительный: да, да.

№6.

Постройте дерево по следующему коду (1-рисунок ребро, 0-возвращающееся ко ребру): 11010110010001100111001000.

а) Построение для полученного дерева (но дозрее)

1) радиус

2) диаметр

3) центр (отмечь на дереве)

4) число листьев (отмечь на дереве).

, покажите дерево 6-го уровня или, чтобы это никак не
центр не изменился.

- 1) нарисуйте новое дерево отдельно (показав, что
условия выполнены)
- 2) посчитайте для нового дерева: радиус, диаметр, центр
(отметь на дереве)
- 3) отпишите все листья на новом дереве
- 4) закодируйте новое дерево.
- б) На основе полученных деревьев постройте следующие
указы:
- 1) узел, который имеет 8 сыновей различной длины.
 - 2) узел, который имеет в каждом вершинной двусвязности
 - 3) узел, который имеет 29 компонентов реберной связности
 - 4) узел, у которого максимальное число 7.
- Ответ: а) 1) 8
2) 4
3) {13}
4) 7
б) 2) $R=5$; $D=10$; центр - {13}.
4) 111101100101110000011100011110011100000.

N 7.

Узел задан минимальной расстояний. Предусмотрите:

- 1) постройте минимальное основное дерево
- 2) постройте ФСУ, ассоциированную с этим основой
- 3) найти кратчайшие пути от вершины 1 и 4 до всех
остальных вершин узла.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & - & - & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & - & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: 2) $\{(1; 6; 5); (1; 2; 6); (1; 2; 3); (4; 5; 6); (1; 6; 5; 4); (1; 2; 5; 6); (1; 2; 3; 6); (1; 2; 4; 5; 6); (1; 2; 3; 5; 6); (1; 2; 3; 4; 5; 6)\}$

3) $\ell : \{0 \underset{1}{3} \underset{2}{5} \underset{3}{7} \underset{4}{4} \underset{5}{2} \underset{6}{3}\}$

$\ell : \{7 \underset{1}{4} \underset{2}{6} \underset{3}{0} \underset{4}{3} \underset{5}{5} \underset{6}{3}\}$

№1.

За круглым столом король Артура сидят 12 рыцарей. Из них
каждый сидит со своими соседями. Надо выбрать 5 из них, чтобы
освободить замужеванную принцессу. Сколько способов это мож-
но сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было бра-
тей?

Задачи решаем произвольно выбранных 5-ти рыцарей. Тогда из
всех возможных выборок 5-ти, чтобы среди них не было
братьев. В случае, если 5-ти рыцарей не освободят принцессу,
нужно выбрать еще 4 рыцаря среди 9-ти оставшихся:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ способов это сделать.}$$

Если 5-ти рыцарей не лежат к принцессе, то из 11 оставшихся
 $11-5+1=7$ рыцарей. Из них нужно выбрать 5:

~~$C_{11-5+1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$~~

$$C_{11-5+1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ способов это сделать.}$$

Это задавшее группам друга количество $\Rightarrow C_6^4 + C_7^5 = 21 + 15 = 36$.

Ответ: 36.

№2.

Все ребята собирали 10 романчиков, 15 васильков и 14 керадубок.
Сколько способов они могут разделять эти цветы
между собой?

Большое число способов для распределения ромашек:

У первого места оказывается такое число ромашек от 0 до 10.

У второго - все оставшиеся.

Показано, что число способов размещения равно:

$$R = C_{16}^1 \cdot 1 = 16.$$

Аналогично, для восьмиподиумов $V=16$ и для девятиподиумов $N=15$.

Распределение цветов не зависит групп от групп, следовательно:

$$N_{\text{overall}} = 16 \cdot 16 \cdot 15 = 2640.$$

Ответ: 2640.

№3.

Сколько различных слов можно наложить, переставив любые в слове "математика"?

Посчитаем количество повторений букв:

$$m - 2$$

$$a - 3$$

$$n - 2$$

$$e - 1$$

$$t - 1$$

$$k - 1$$

Число уникальных размещений этого набора по 10:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = \frac{3628800}{24} = 151200.$$

Ответ: 151200.

№4.

В стране 20 городов, каждые два из которых соединены автодорогами. Сколько автодорог в этой стране?

Каждый из 20 городов соединен с остальными 19. Учитывая, что между А и Б + то же самое, что из Б и А:

$$N = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

Ответ: 190.

15.

Для представляемого узда и дополнительного к нему определение:

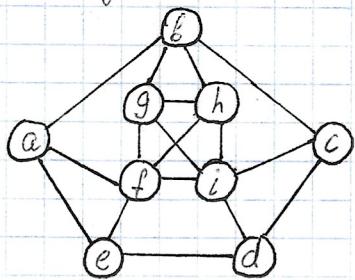
1) есть ли в узде Эйлеров цикл или Эйлерова цепь? Если есть, то постройте по шагам алгоритма Флери цепь / цикл. Если нет - обоснуйте

2) есть ли в узде Гамильтонов цикл, Гамильтонова цепь?

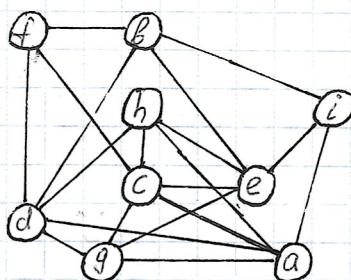
Если есть, постройте по шагам алгоритма цепь / цикл. Если нет, то обоснуйте окончательные (проверьте все теоремы).

Дополнительно: преобразуйте узда, добавив новые ребра и вершины, чтобы он был обобщением Гамильтоновых и Эйлеровых.

Исходный узд:



Дополнительный узд:



1) Или в исходном, или в дополнительном к нему не существует, т.к. в обоих уздах кол-во вершин нечетной степени больше двух. Следовательно, не существует и Эйлерова цикла.

2) Исходный узд:

Гамильтонова цепь: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i$.

Гамильтонов цикл:

Необходимое условие: $\forall x_i \in V: \text{power}(x_i) \geq 2$ - выполнимо

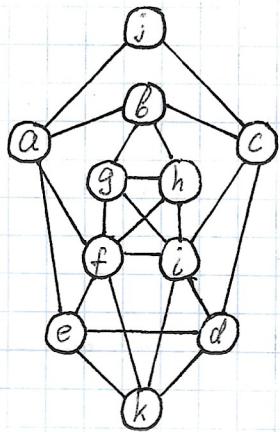
$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow a$.

2) Дополнительный узд:

Гамильтонова цепь: $a \rightarrow g \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow b \rightarrow i \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow h$ *

Гамильтонов цикл: $a \rightarrow g \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow b \rightarrow i \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow h \rightarrow a$.

Дополнительно:



Эйлеровские:

- 1) 1 компоненты связности
- 2) $\forall x \in V : \text{power}(x) \% 2 = 0$

Гамильтоновские:

$$a \rightarrow j \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow h \rightarrow i \rightarrow d \rightarrow k \rightarrow e \rightarrow a.$$

N6.

Построение по следующему коду дерева: 110101100100011001111001000
(1 - рисунок ребра, 0 - возвращается по ребру)

a) Построение для полученного дерева (по формулям):

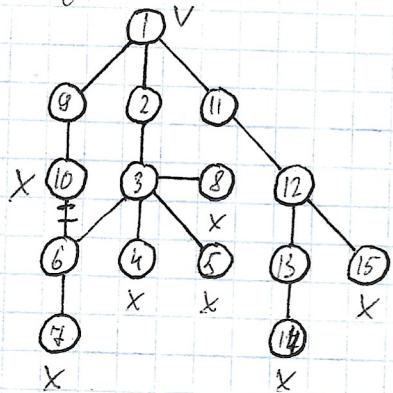
- 1) радиус
- 2) диаметр
- 3) центр (отмечи на узле)
- 4) число листьев (отмечи на узле)

б) Дополнение дерева 6-ю ребрами так, чтобы число листьев и центров не изменилось:

- 1) Нарисуйте новое дерево отдельно (показите, что узлов 8 штук.)
- 2) Построение для нового дерева: радиус, диаметр и центр (отмечи на дереве)
- 3) отмечи все листья на новом дереве
- 4) закодируйте новое дерево.

- b) На основе полученных деревьев построение следующие графы.
- 1) Граф, имеющий 8 циклов различной длины
 - 2) Граф, имеющий 6 компонент вершинной связности
 - 3) Граф, имеющий 9 компонент реберной связности
 - 4) Граф, у которого циклическое число 7.

a) Исходный граф:



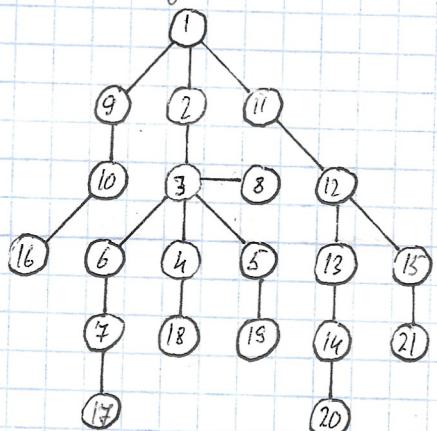
1) $R = 8 \quad (7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 14)$

2) $D = 4$

3) Центр - $\{1\}$, остовен V

4) Листья - 7, остовен X

б) Граф, дополненный 6-10 ребрами.

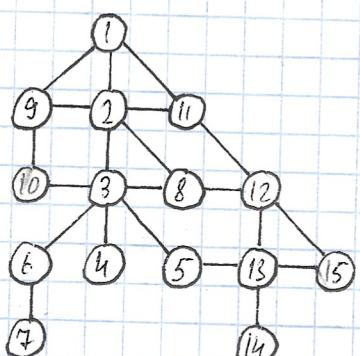


2) $D = 10; R = 5$; Центр - $\{1\}$, остовен V

3) Листья оставлены X

4) 111101100101110000011100011100111000000

б) 1)



Циклы (коэффициент одиночной длины):

1) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

2) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 1$

3) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

4) $1 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

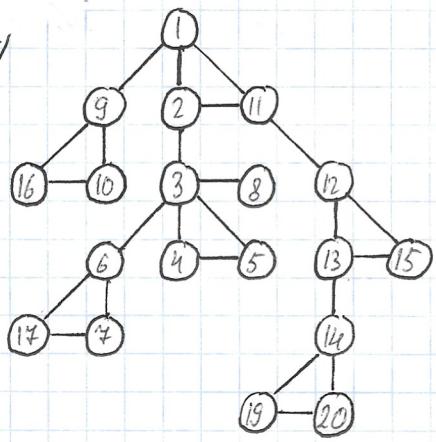
5) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 1$

6) $2 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

7) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

8) $1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 13$
 $1 \leftarrow 2 \leftarrow 11 \leftarrow 12 \leftarrow 15 \leftarrow$

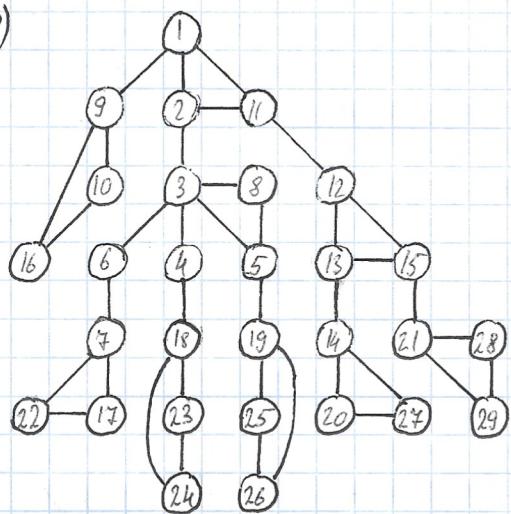
1)



Компоненты вершинной связности:

- 1) $\{(3; 4); (4; 5); (5; 3)\}$
- 2) $\{(12; 13); (13; 15); (15; 12)\}$
- 3) $\{(1; 2); (2; 11); (11; 1)\}$
- 4) $\{(9; 10); (10; 16); (16; 9)\}$
- 5) $\{(6; 4); (7; 17); (17; 6)\}$
- 6) $\{(14; 19); (19; 20); (20; 14)\}$

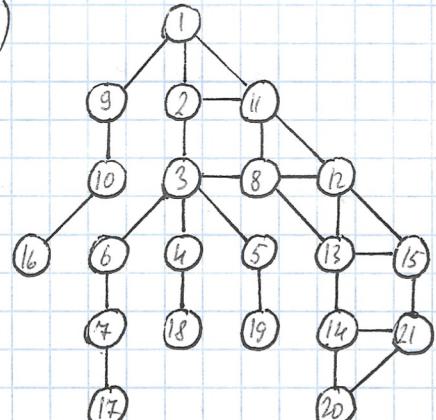
3)



Компоненты реберной связности:

- 1) $\{12; 13; 15\}$
- 2) $\{3; 8; 5\}$
- 3) $\{9; 10; 16\}$
- 4) $\{1; 2; 11\}$
- 5) $\{7; 22; 17\}$
- 6) $\{18; 23; 24\}$
- 7) $\{19; 25; 26\}$
- 8) $\{4; 20; 27\}$
- 9) $\{21; 28; 29\}$

4)



Наименьшее число ребер, которое нужно удалить из графа, чтобы он стал деревом - 7:

- 1) $(2; 11)$
- 2) $(8; 12)$
- 3) $(11; 8)$
- 4) $(8; 13)$
- 5) $(13; 15)$
- 6) $(14; 21)$
- 7) $(20; 21)$.

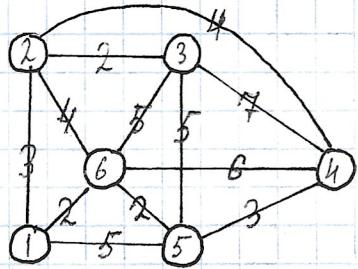
N^{7.}

Требуется максимизировать расстояния. Решение:

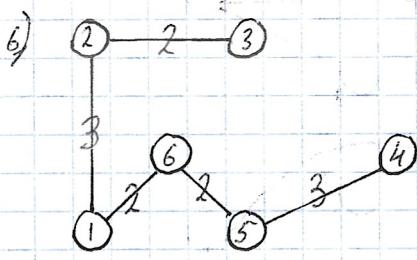
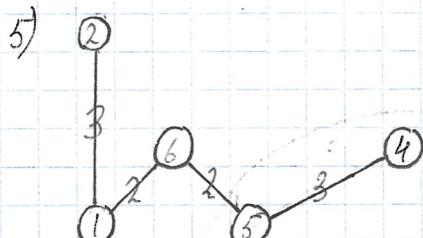
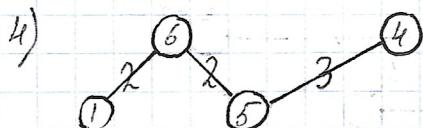
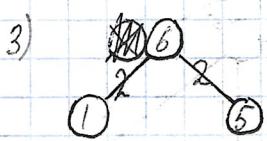
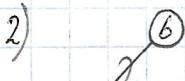
- 1) построим MST
- 2) построим РСЦ, ассоциированную с этим MST
- 3) найти кратчайшие пути от вершин 1 и 4 до каждого.

$$\begin{pmatrix} 3 & - & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \end{pmatrix}$$

Frage:



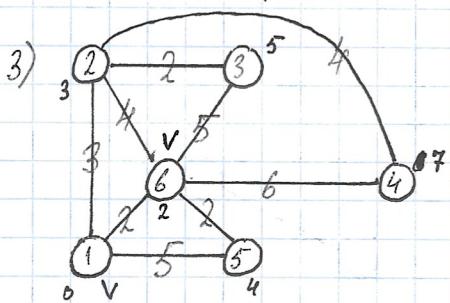
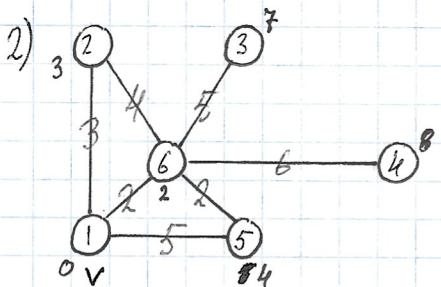
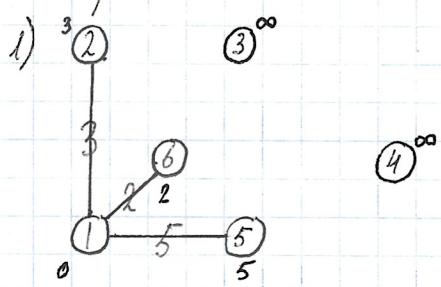
1) MST (no maxm.):



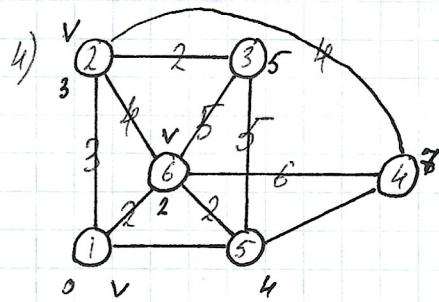
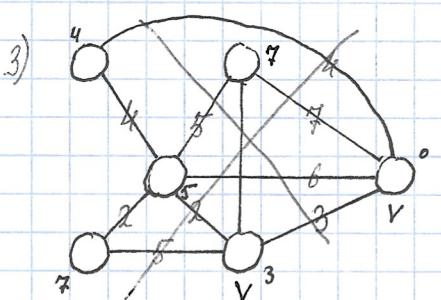
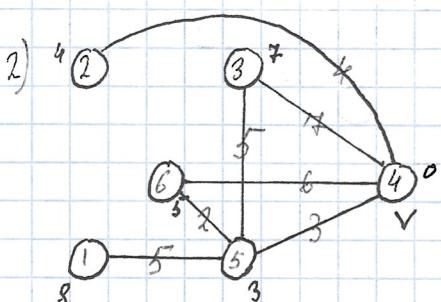
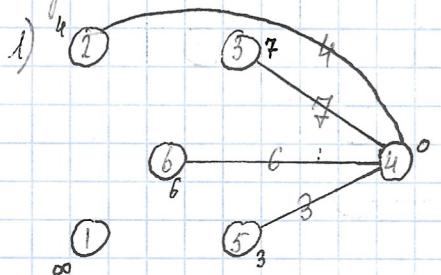
2) φC_6 :

$$\{ (1; 6; 5); (1; 2; 6); (1; 3; 3); (4; 5; 6); (1; 6; 5; 4); (2; 5; 6; 1); (3; 6; 1; 2); (2; 4; 5; 6; 1); (3; 5; 6; 1; 2); (3; 4; 5; 6; 1; 2) \}$$

3) Для вершины 1:



Для вершины 4:



Даны веса вершин не изменяются.

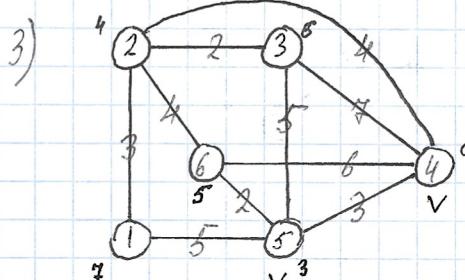
$$\text{Объем: } 1 \rightarrow 2 = 3$$

$$1 \rightarrow 6 = 2$$

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 5 = 4$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 = 5$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 = 7$$



Даны веса вершин не изменяются.

$$\text{Объем: } 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 = 7$$

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 = 6$$

$$4 \rightarrow 2 = 4$$

$$4 \rightarrow 5 = 3$$

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 = 5$$