CONCEPTION ET VÉRIFICATION DE SYSTÈMES CRITIQUES

LA SPÉCIFICATION DES PROPRIÉTÉS AVEC LA LOGIQUE LTL

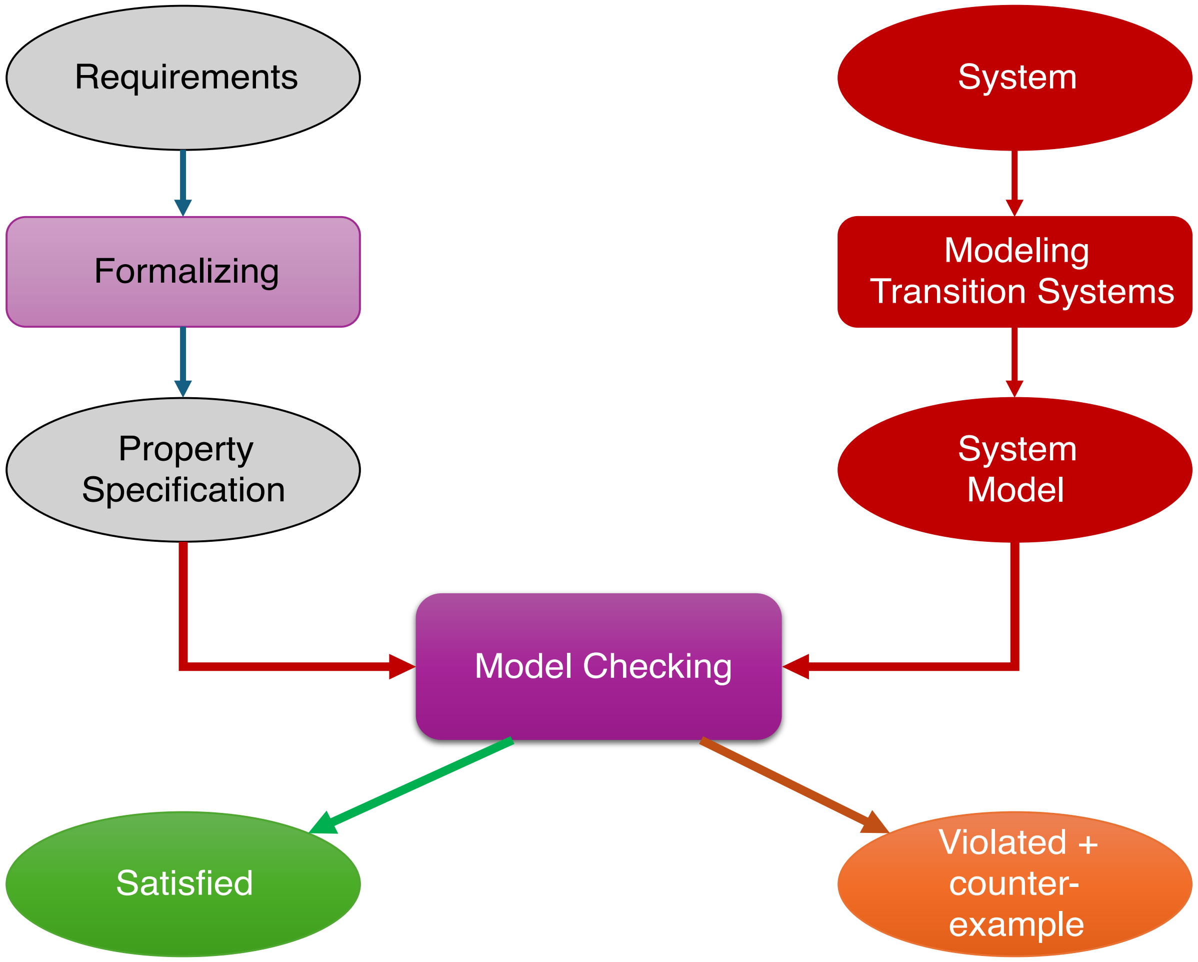
2A Cursus Ingénieurs - ST5 : Modélisation fonctionnelle et régulation
CentraleSupelec - Université Paris-Saclay - 2025/2026

Idir AIT SADOUNE
idir.aitsadoune@centralesupelec.fr

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

PRINCIPE DU MODEL-CHECKING



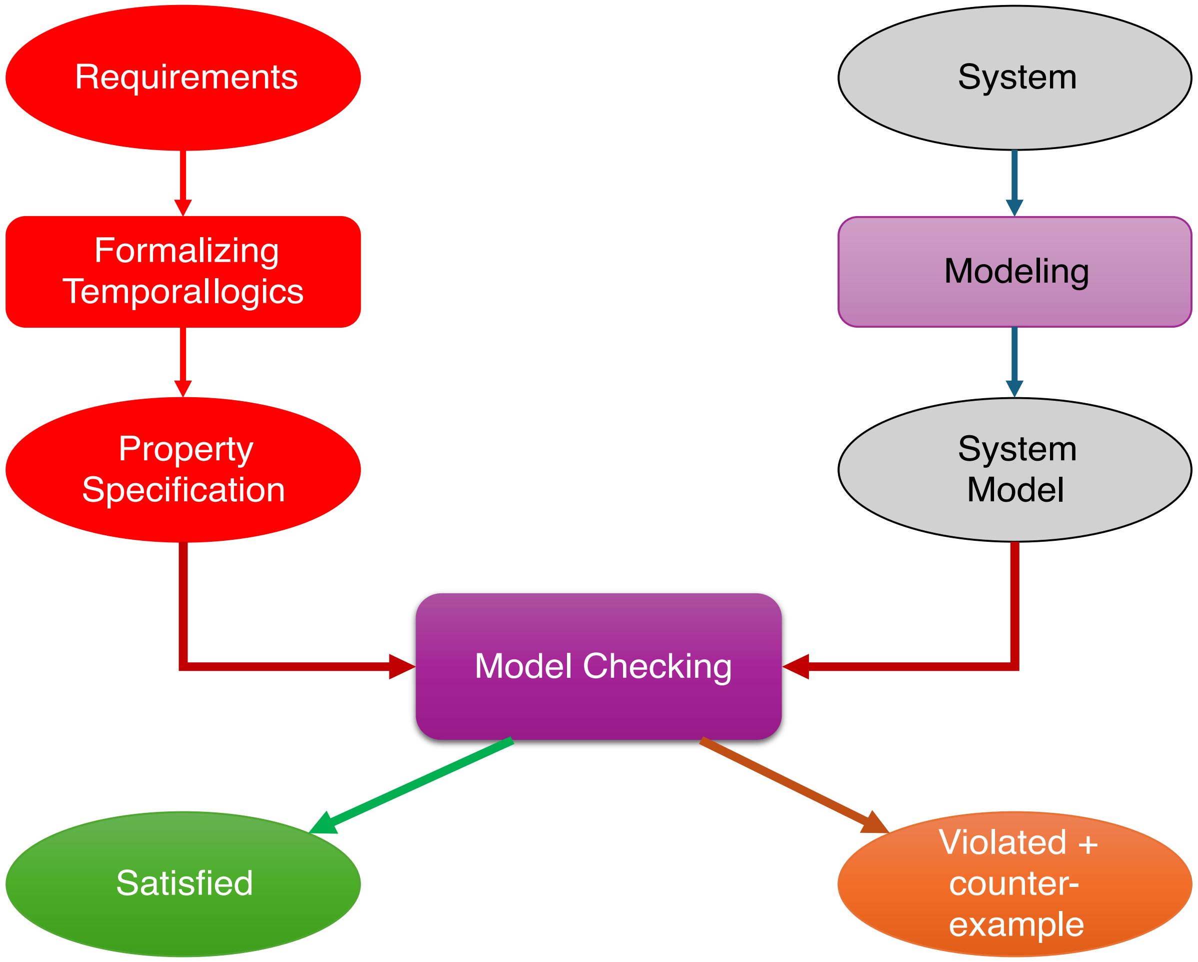
RAPPEL

- Un **systèmes de transition** TS est un tuple $(S, \delta, I, AP, \mathcal{L})$
- Un **fragment de chemin infini** π est une séquence d'états infinie :
  $\pi = s_0 s_1 s_2 \dots$ tel que $\forall i \geq 0, s_i \longrightarrow s_{i+1} \in \delta$
- La **trace du chemin** $\pi = s_0 s_1 s_2 \dots \in S^\omega$ avec $\mathcal{L} : S \longrightarrow 2^{AP}$
  - $trace(\pi) = \sigma = \mathcal{L}(s_0)\mathcal{L}(s_1)\mathcal{L}(s_2) \dots \in (2^{AP})^\omega$

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

PRINCIPE DU MODEL-CHECKING



LOGIQUES TEMPORELLES

POURQUOI ?

- Permettent d'exprimer des propriétés sur des séquences d'observations
- Utilisation de connecteurs temporels et de quantificateurs sur les chemins
- On pourrait utiliser **la logique du premier ordre**.

$$\phi \quad ::= \quad true \quad | \quad a \quad | \quad \phi \quad \wedge \quad \phi \quad | \quad \neg\,\phi \quad | \quad \exists x.\ \phi \quad | \quad \ldots$$

  - **Exemple** : "toute requête sera un jour satisfaite"
  - $\forall t.\, (\text{requete} \rightarrow \exists t' \geq t.\, (\text{reponse}))$

✘ difficile à écrire/comprendre
✘ vérification peu efficace

LOGIQUES TEMPORELLES

POURQUOI ?

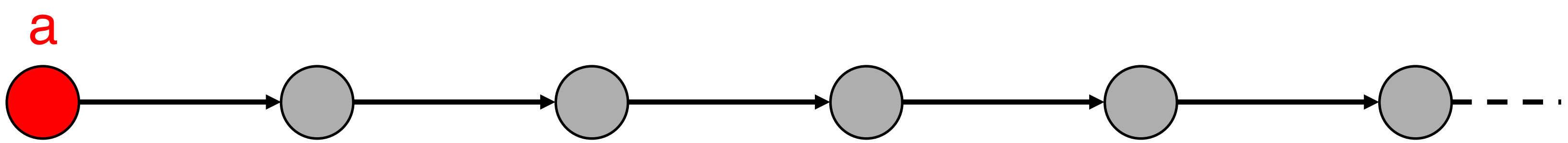
- Pas de variable pour gérer le temps (instants implicites)
- **Temporel $\neq$ temporisé**
  la logiques temporelles ne quantifient pas écoulement du temps.
- Deux approches :
  1. **temps linéaire** : propriétés des séquences d'exécutions (futur déterminé)
  2. **temps arborescent** : propriétés de l'arbre d'exécutions (tous les futurs possibles)

PROPOSITIONAL LINEAR TEMPORAL LOGIC (LTL)

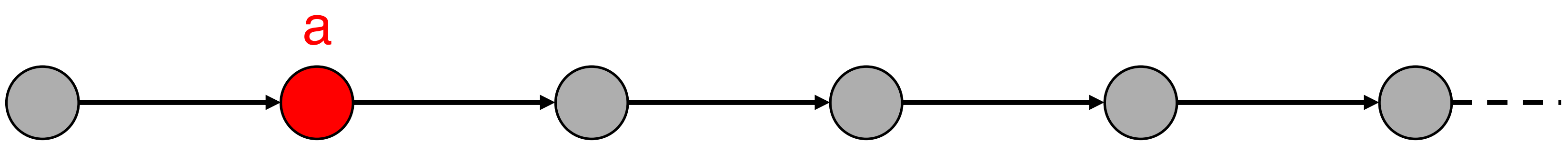
$$\phi \quad ::= \quad \mathit{true} \quad | \quad a \quad | \quad \phi \quad \wedge \quad \phi \quad | \quad \neg\, \phi \quad | \quad \bigcirc\, \phi \quad | \quad \Box\, \phi$$

avec $a \in AP$ $\qquad\qquad$ $\bigcirc \equiv \mathbf{X}$ (next) $\qquad$ $\Box \equiv \mathbf{G}$ (always)

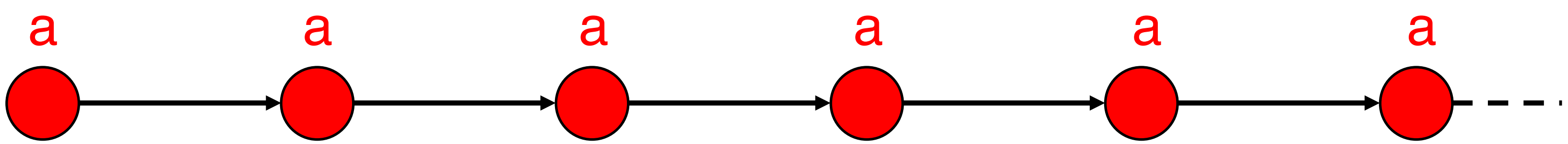
$\sigma \models a$



$\sigma \models \bigcirc\, a$



$\sigma \models \Box\, a$



OPÉRATEURS TEMPORELS DÉRIVÉS

$\Box\,\phi \equiv \mathrm{G}\,\phi$
(always)

$\Diamond\,\phi \equiv \mathrm{F}\,\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$
(eventually)

$\Diamond\Box\,\phi$
(persistence)

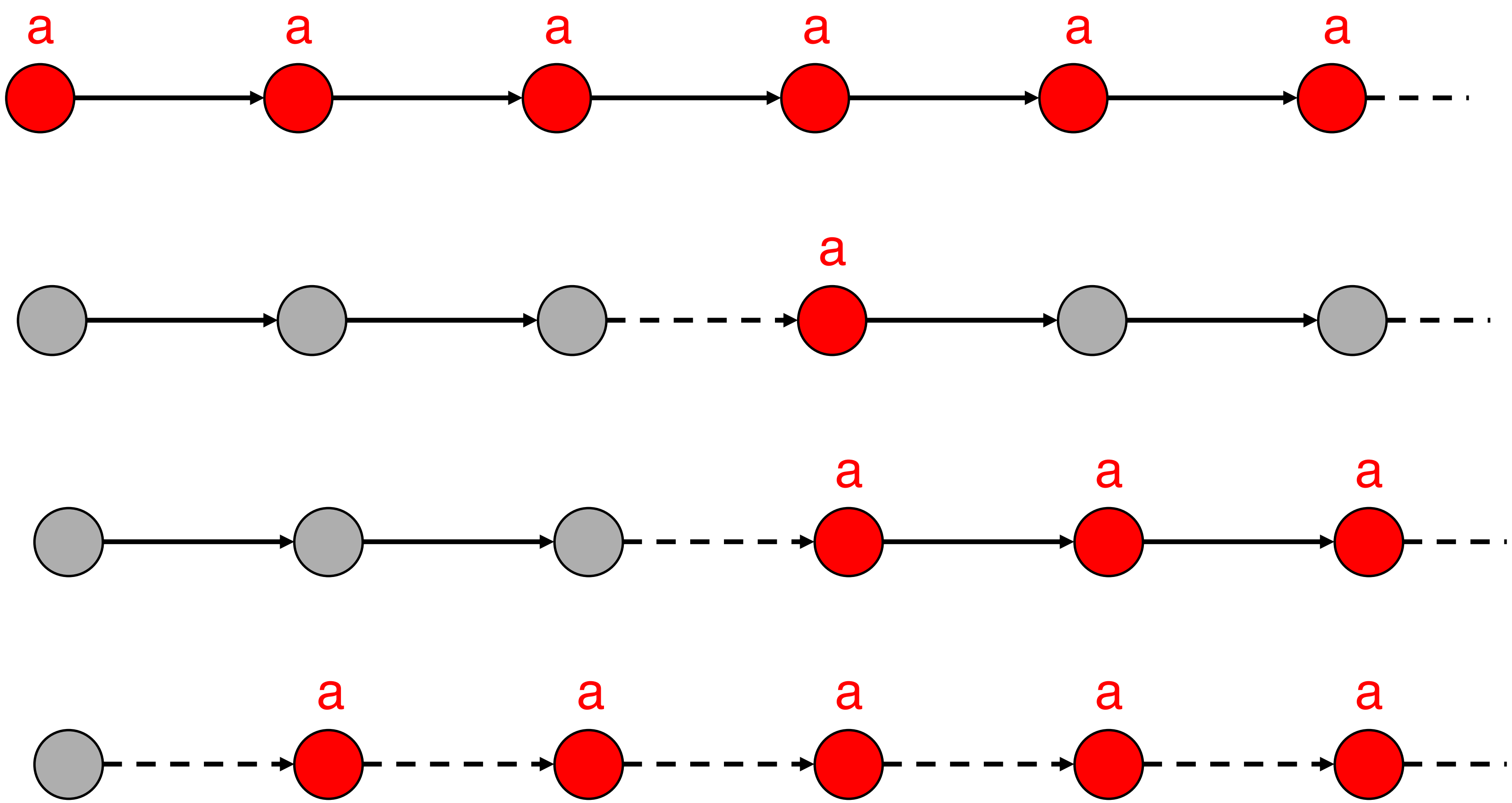
$\Box\Diamond\,\phi \equiv \neg\Diamond\Box\neg\phi$
(infinitely many)

$\sigma \models \Box\, a$

$\sigma \models \Diamond\, a$

$\sigma \models \Diamond\Box\, a$

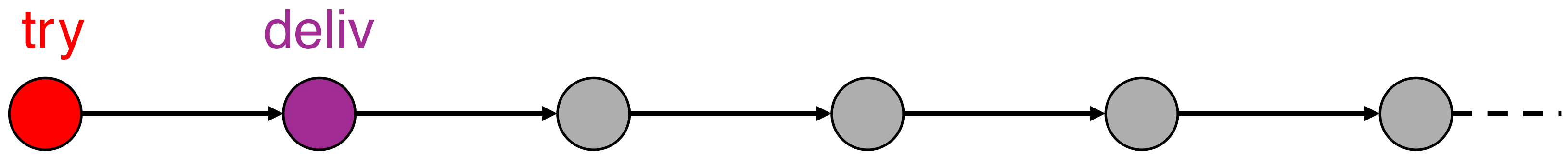
$\sigma \models \Box\Diamond\, a$



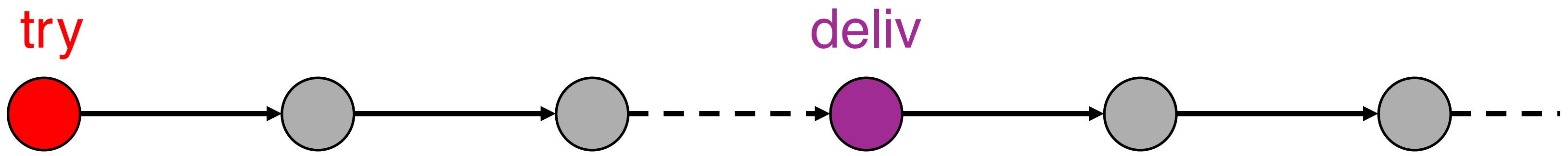
L'OPÉRATEUR UNTIL

$$\phi \quad ::= \quad true \mid a \mid \phi \wedge \phi \mid \neg \phi \mid \bigcirc \phi \mid \Box \phi \mid \phi \, \mathcal{U} \, \phi$$

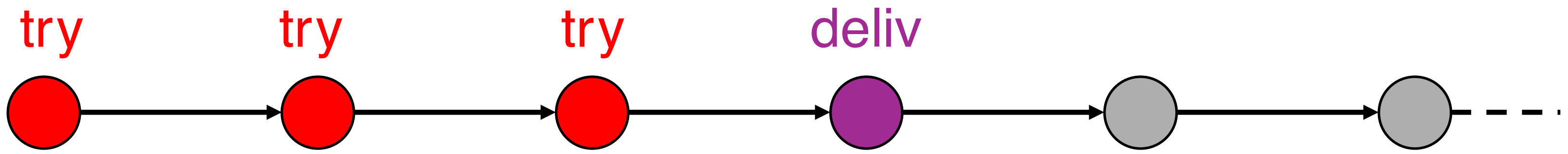
$try \Rightarrow \bigcirc \, deliv$



$try \Rightarrow \Diamond \, deliv$



$try \, \mathcal{U} \, deliv$



$\Diamond \, \phi \equiv true \cup \phi$ et $\Box \, \phi \equiv \neg \Diamond \neg \phi$

LA SÉMANTIQUE DES OPÉRATEURS LTL

- Syntaxe version 1 :
  $\phi \quad ::= \quad true \mid a \mid \phi_1 \ \wedge \ \phi_2 \mid \neg\, \phi \mid \bigcirc\, \phi \mid \Box\, \phi \mid \Diamond\, \phi \mid \phi_1 \ \bigcup \ \phi_2$
- Syntaxe version 2 : **(adoptée dans la suite du cours/TD)**
  $\phi \quad ::= \quad true \mid a \mid \phi_1 \ \wedge \ \phi_2 \mid \neg\, \phi \mid \mathrm{X}\, \phi \mid \mathrm{G}\, \phi \mid \mathrm{F}\, \phi \mid \phi_1 \ \mathrm{U} \ \phi_2$
- Pour $\sigma = A_0 A_1 A_2 \cdots \in (2^{AP})^\omega$:

$\sigma \models true$		
$\sigma \models a$	iff	$a \in A_0$
$\sigma \models \phi_1 \wedge \phi_2$	iff	$\sigma \models \phi_1$ and $\sigma \models \phi_2$
$\sigma \models \neg\, \phi$	iff	$\sigma \not\models \phi$
$\sigma \models \mathrm{X}\, \phi$	iff	$A_1 A_2 A_3 \cdots \models \phi$
$\sigma \models \mathrm{G}\, \phi$	iff	$\forall\, i \geq 0,\ A_i A_{i+1} A_{i+2} \cdots \models \phi$
$\sigma \models \mathrm{F}\, \phi$	iff	$\exists\, i \geq 0,\ A_i A_{i+1} A_{i+2} \cdots \models \phi$
$\sigma \models \phi_1 \mathrm{U} \phi_2$	iff	$\exists\, j \geq 0,\ A_j A_{j+1} A_{j+2} \cdots \models \phi_2$ and $\forall\, 0 \leq i < j,\ A_i A_{i+1} A_{i+2} \cdots \models \phi_1$

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

PROPRIÉTÉ DU TEMPS LINÉAIRE

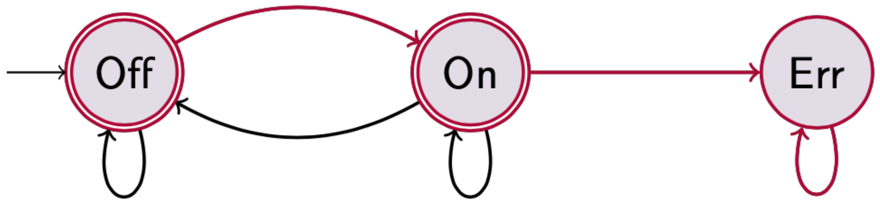
- Les propriétés du temps linéaire spécifient le comportement **admissible** du système considéré
  - La propriété LT spécifie les traces qu'un TS peut exhiber

Définition formelle

- Une propriété temporelle linéaire P sur AP est un sous-ensemble de $(2^{AP})^\omega$
- TS **satisfait** P (sur AP) :
  - $TS \models P$ si et seulement si $Traces(TS) \subseteq P \subseteq (2^{AP})^\omega$

- Nous utiliserons la **logique temporelle linéaire** (**LTL**) pour formaliser P

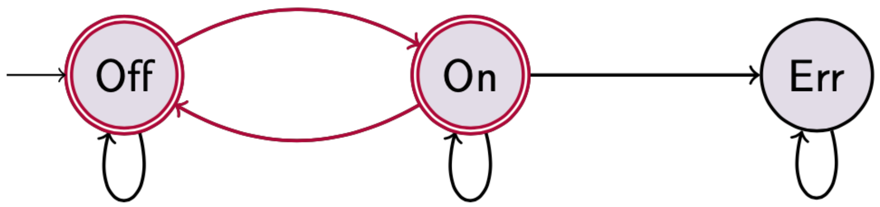
EXEMPLE I



Prenant la trace $\sigma = \text{Off On Err Err Err} \ldots = \text{Off On Err}^{\omega}$

- $\sigma \models \text{Off}$ mais $\sigma \not\models \text{On}$ alors $\sigma \models \neg\text{On}$
- $\sigma \models \mathrm{X}\,\text{On}$
- $\sigma \models \mathrm{XX}\,\text{Err}$
- $\sigma \models (\text{Off} \vee \text{On})\,\mathrm{U}\,\text{Err}$
- $\sigma \models \mathrm{G}(\text{Err} \Rightarrow \mathrm{X}\,\text{Err})$
- $\sigma \models \mathrm{G}(\text{Err} \Rightarrow \mathrm{G}\,\text{Err})$
- $\sigma \models \mathrm{FG}\,\text{Err}$
- $\sigma \models \mathrm{XX}\,\mathrm{G}\,\text{Err}$

EXEMPLE II



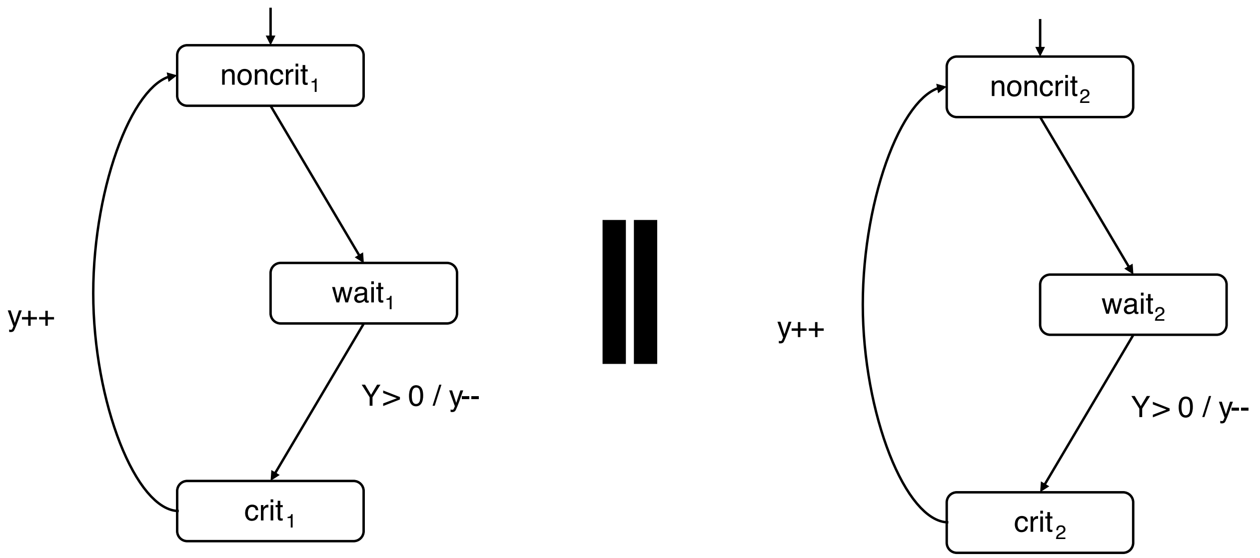
Prenant la trace $\sigma = \text{Off On Off On Off} \ \ldots = (\text{Off On})^\omega$

- $\sigma \not\models (\text{Off} \vee \text{On}) \,\mathbf{U}\, \text{Err}$
- $\sigma \models \mathbf{F}\, \text{Err} \Rightarrow ((\text{Off} \vee \text{On}) \,\mathbf{U}\, \text{Err})$ car $\sigma \not\models \mathbf{F}\, \text{Err}$
- $\sigma \models \mathbf{G}(\text{On} \vee \text{Off})$
- $\sigma \models \mathbf{GF}\, \text{On} \wedge \mathbf{GF}\, \text{Off}$
- $\sigma \not\models \mathbf{FG}\, \text{On} \vee \mathbf{FG}\, \text{Off}$
- $\sigma \models \mathbf{G}\, (\text{Off} \Rightarrow \mathbf{X}\, \text{On}) \wedge \mathbf{G}\, (\text{On} \Rightarrow \mathbf{X}\, \text{Off})$

PLAN

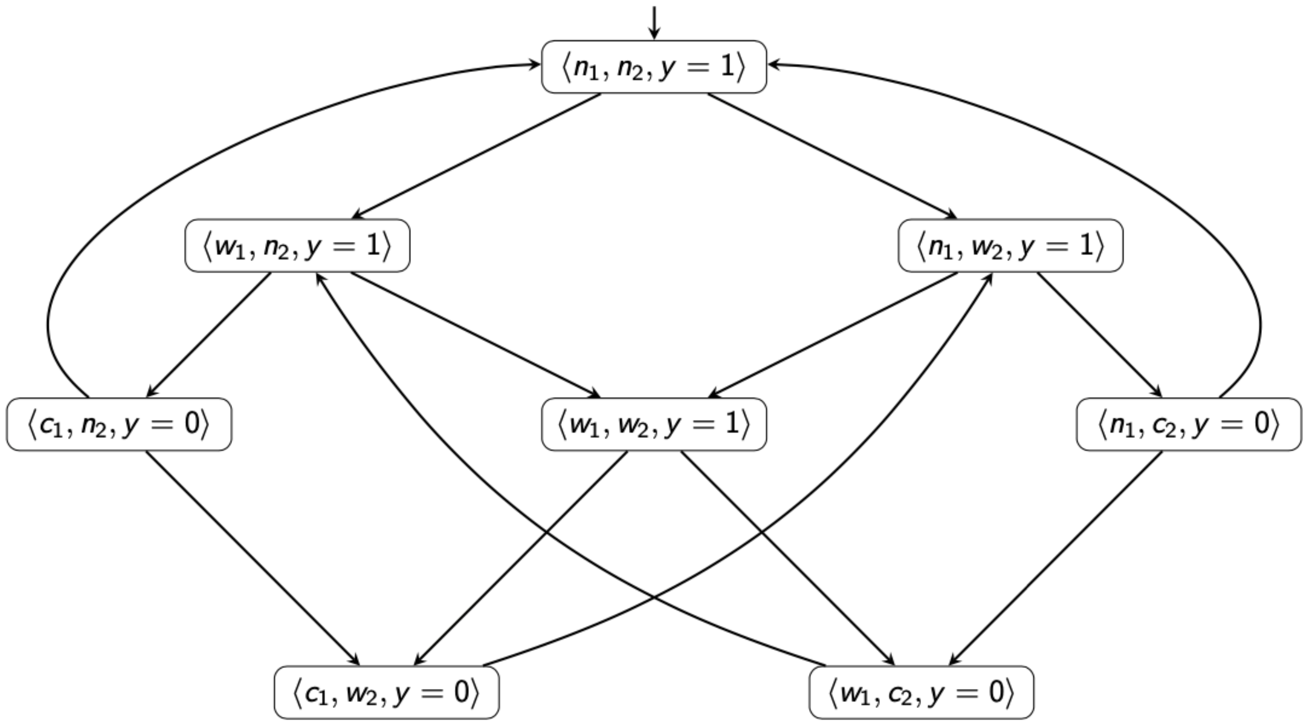
Retour au plan - Retour à l'accueil

RAPPEL DE L'EXEMPLE



$y = 0$ signifie "le verrou est actuellement possédé";
$y = 1$ signifie "le verrou est libre"

RAPPEL DE L'EXEMPLE



$$n_i : noncrit_i, \quad w_i : wait_i, \quad c_i : crit_i$$

COMMENT SPÉCIFIER L'EXCLUSION MUTUELLE ?

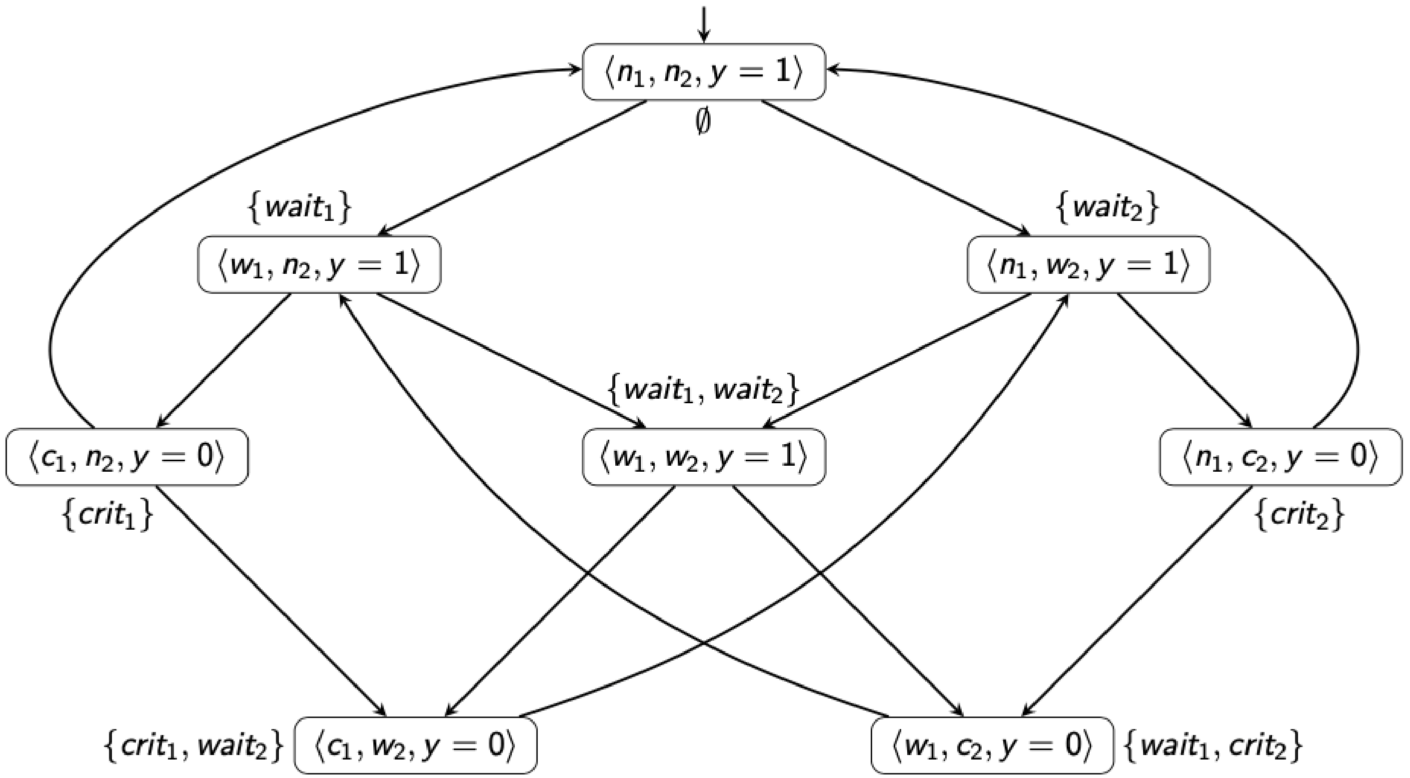
L'exclusion mutuelle
Il y a au plus un processus dans la section critique

- Soit $AP = \{crit_1, crit_2\}$
  - les autres propositions atomiques n'ont aucune pertinence pour cette propriété
- Formalisation LTL de la propriété LT

  $$P_{mutex} = \mathrm{G} \neg (crit_1 \wedge crit_2)$$

- **L'algorithme basé sur le sémaphore satisfait-il P_{mutex} ?**

LA RÉPONSE



OUI ! car il n'existe aucun état accessible étiqueté avec $\{crit_1, crit_2\}$

COMMENT SPÉCIFIER L'ABSENCE DE FAMINE ?

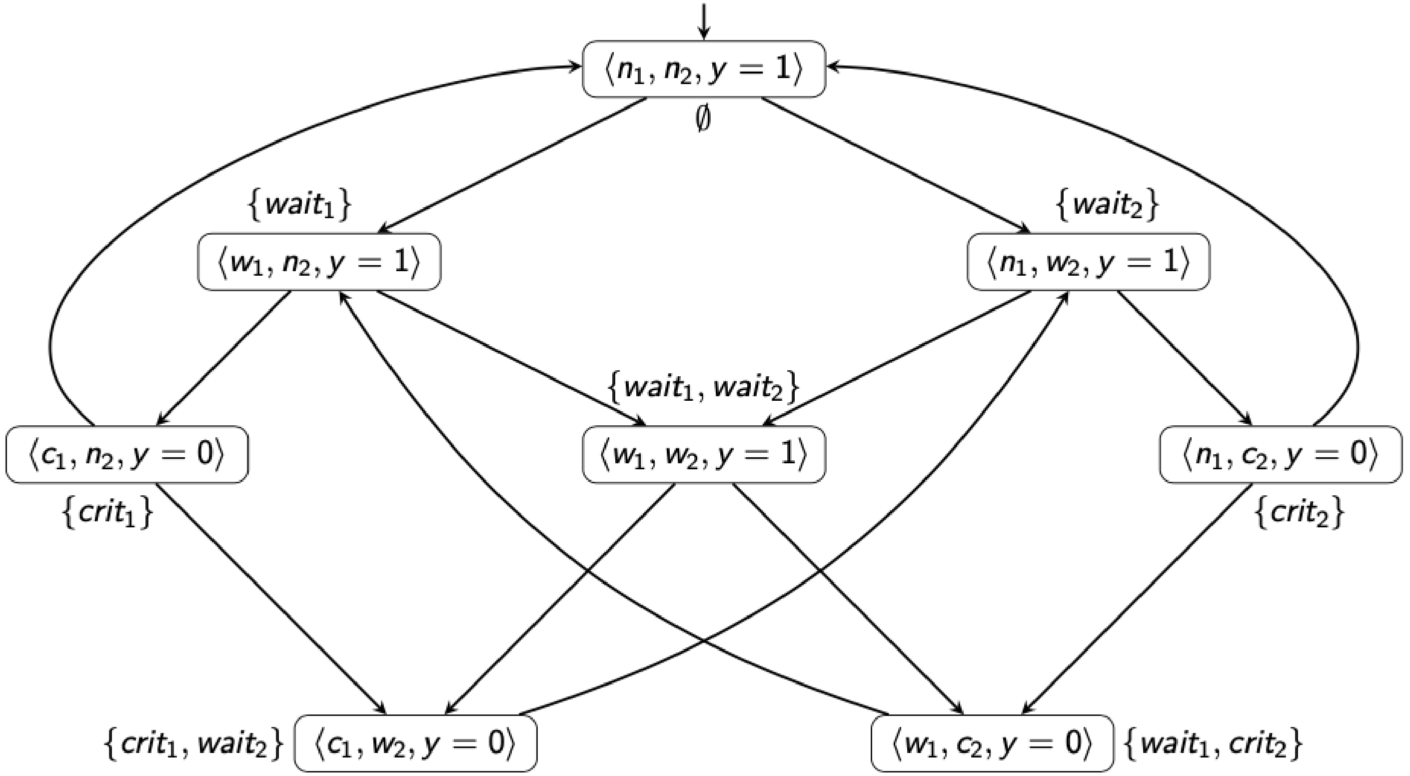
L'absence de famine
Un processus qui veut entrer dans la section critique est finalement capable de le faire

- Soit $AP = \{wait_1, crit_1, wait_2, crit_2\}$
- Formalisation LTL de la propriété LT

  $$P_{nostarve} = \mathrm{G}\ (wait_1 \Rightarrow \mathrm{F}\ crit_1) \wedge \mathrm{G}\ (wait_2 \Rightarrow \mathrm{F}\ crit_2)$$

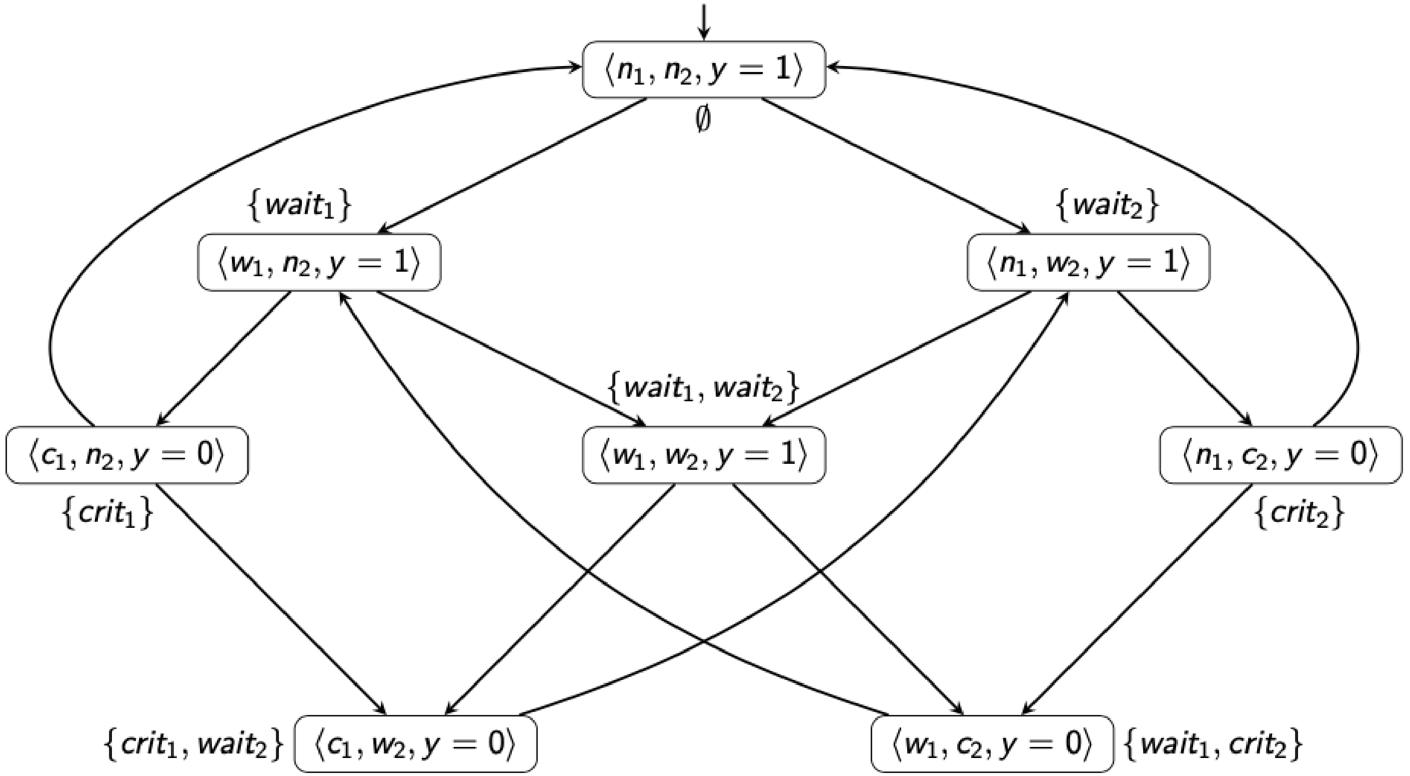
- **L'algorithme basé sur le sémaphore satisfait-il $P_{nostarve}$?**

LA RÉPONSE



NON ! Le processus un ou le processus deux risquent de mourir de faim !

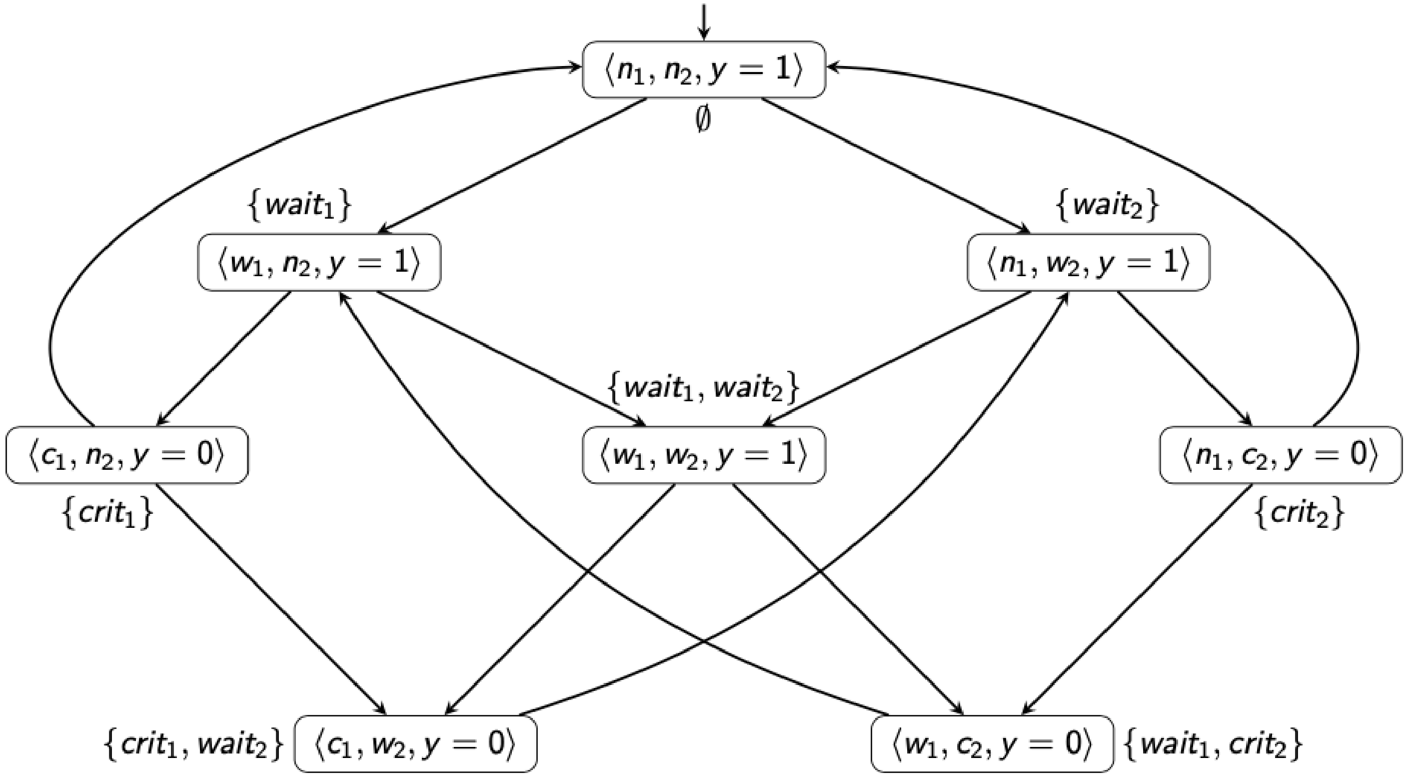
LA RÉPONSE



prenant $\sigma = \emptyset(\{wait_1\}\{wait_1, wait_2\}\{wait_1, crit_2\})^\omega \in Traces(TS)$

mais $\sigma \models \mathrm{F}(wait_1 \wedge \mathrm{G}\neg\, crit_1) \Rightarrow \sigma \notin P_{nostarve}$

LA RÉPONSE



prenant $\sigma = \emptyset(\{wait_2\}\{wait_1, wait_2\}\{crit_1, wait_2\})^\omega \in Traces(TS)$

mais $\sigma \models \mathrm{F}(wait_2 \wedge \mathrm{G}\neg\, crit_2) \Rightarrow \sigma \notin P_{nostarve}$

LA PROPRIÉTÉ D'INVARIANTS

- **Propriété de sécurité** typique $\rightarrow$ propriété d'exclusion mutuelle
  - la **mauvaise chose** (avoir > 1 processus dans la section critique) **ne se produit jamais**
- Une autre **propriété de sécurité** typique $\rightarrow$ vérifie les limites des variables (dépassement)

Ces propriétés sont des **invariants**

- Un **invariant** est une propriété LT
  - qui est donné par une **condition** ϕ sur AP
  - exige que la **condition** ϕ soit vraie **pour tous les états** (atteignables)
  - **exemple** : la propriété d'exclusion mutuelle $\phi = \neg(crit_1 \wedge crit_2)$

LA PROPRIÉTÉ D'INVARIANTS

DÉFINITION FORMELLE

- Une propriété LT P_{inv} sur AP est un **invariant** s'il existe une formule **pure propositionnelle** ϕ sur AP telle que :

$$P_{inv} = \mathrm{G}\ \phi$$

  - ϕ est appelé une **condition invariante** de P_{inv}

- Notez que :
  $TS \models P_{inv}$ si et seulement si $\forall s \in Reach(TS),\ \mathcal{L}(s) \models_{prop} \phi$

- ϕ doit être satisfait par tous les états initiaux et tous les états atteignables de TS

PROPRIÉTÉS DE SÉCURITÉ

- **Propriétés de sécurité** (**safety property**) $\rightarrow$ **"rien de mauvais ne devrait arriver"**
  - une **propriété invariante** est une **propriété de sécurité particulière**

- **Les propriétés de sécurité** peuvent imposer des exigences sur **des fragments de chemin finis**

- **Une propriété de sécurité** qui n'est pas un invariant
  - considérant un distributeur de billets
  - propriété "l'argent ne peut être retiré qu'une fois qu'un code PIN correct a été fourni"
  - **pas un invariant**, car ce n'est pas une propriété à vérifier dans tous les états

- Un exemple LTL typique $\rightarrow$ **Réponse limitée**

$$\mathrm{G}(request \Rightarrow \bigvee_{i=n}^{m} \mathrm{X}^i response)$$

PROPRIÉTÉS DE VIVACITÉ

- Les **propriétés de sécurité** précisent que "quelque chose de mauvais n'arrive jamais"
- Ne rien faire satisfait facilement une propriété de sécurité
  - car cela ne mènera jamais à une "mauvaise" situation
- Les propriétés de sécurité sont complétées par des **propriétés de vivacité** (**Liveness properties**)
  - qui nécessitent des progressions dans l'exécution
  - qui affirment $\rightarrow$ "quelque chose de bien arrivera éventuellement"
- Un exemple LTL typique $\rightarrow \mathbf{F}\ \phi$

EXEMPLES DE PROPRIÉTÉS DE VIVACITÉ

- Revenons à notre algorithme basé sur les sémaphores avec

$$AP = \{wait_1, crit_1, wait_2, crit_2\}$$

- **Finalement** (**Eventually**)

$$\mathrm{F}\ crit_1 \wedge \mathrm{F}\ crit_2$$

- **Finalement répété** (**Repeated eventually)**

$$\mathrm{GF}\ crit_1 \wedge \mathrm{GF}\ crit_2$$

- **Absence de famine**

$$\mathrm{G}\ (wait_1 \Rightarrow \mathrm{F}\ crit_1) \wedge \mathrm{G}\ (wait_2 \Rightarrow \mathrm{F}\ crit_2)$$

MERCI

PDF version of the slides

Retour à l'accueil - Retour au plan