Laboratoire Méthodes Formelles

CentraleSupélec | université PARIS-SACLAY

CONCEPTION ET VÉRIFICATION DE SYSTÈMES CRITIQUES

INTRODUCTION AUX MÉTHODES FORMELLES

2A Cursus Ingénieurs - ST5 : Modélisation fonctionnelle et régulation

CentraleSupelec - Université Paris-Saclay - 2025/2026

Idir AIT SADOUNE
idir.aitsadoune@centralesupelec.fr

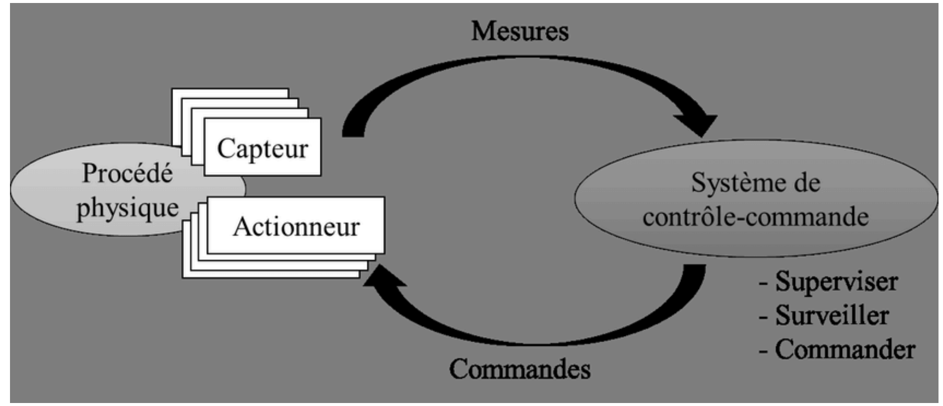
PLAN

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

FIABILITÉ DES SYSTÈMES DE CONTRÔLE

- Un système de contrôle est composé de 3 parties :
  1. Capteurs
  2. Actionneurs
  3. **Logiciel** de contrôle qui est **critique** dans le contexte d'un **système critique**!



Logiciel critique $\rightarrow$ pour lequel une défaillance peut être catastrophique

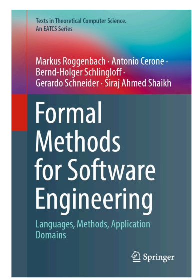
- mortelle ou/et extrêmement coûteuse

Quelques défaillances spectaculaires de logiciels critiques :

- Crash of Ariane 5
- LASCAD : Crash of London Ambulance CAD service
- Therac-25 : 7 deaths of cancer patients due to overdoses of radiation

SOLUTIONS

- Les **règles** et les **techniques** de programmation.
- Le **support** des langages de programmation.
- Les **méthodologies de conception** et de **développement**.
- Le **test**.
- Les **méthodes formelles**
  - ➠ **méthodes d'ingénierie** basées sur des approches mathématiques utilisées pour développer et analyser des systèmes (logiciels).
  - ➠ **démarche globale (langages et outils de vérification)**.



Formal Methods for Software Engineering
Languages, Methods, Application Domains
Springer 2022

SPÉCIFICATION, CONCEPTION ET VÉRIFICATION

- **La spécification formelle** $\longrightarrow$ **description rigoureuse** et **non ambiguë** du comportement attendu d'un système (logiciel).
  - ➠ modèle mathématique décrivant ce que doit faire le système (logiciel).
  - ➠ modélisation par un langage mathématique (syntaxe, logique, sémantique...).
- **La conception formelle** $\longrightarrow$ **description rigoureuse** et **non ambiguë** de la réalisation du système (logiciel).
  - ➠ modèle mathématique décrivant la construction du système (logiciel).
  - ➠ modélisation par un langage mathématique (syntaxe, logique, sémantique...).
- La **Vérification formelle** $\longrightarrow$ **démontrer mathématiquement** qu'un système (logiciel) respecte les exigences identifiées dans la spécification.
  - ➠ démonstration que la conception correspond bien à la spécification.
  - ➠ simulation, preuve de théorèmes, model checking...

VÉRIFICATION DU LOGICIEL DE CONTRÔLE

Le processus de vérification

1. Déterminer ce que le logiciel est censé faire (**Spécification**)
2. Prendre le logiciel (**Conception**)
3. Démontrer que le logiciel fait ce qu'il est censé faire (**Vérification**)

Imposée par les organismes de certification ($\Longrightarrow$ quelques examples)

TEST vs VERIFICATION

- Les tests sont une technique dynamique courante où le système est exécuté

- **Procédure de test** :
  - prendre une implémentation du système
  - la stimuler avec certaines données en entrée (les cas de tests)
  - observer la réaction et vérifier si elle est "souhaitable"

- **Inconvénients des tests** :
  - ✘ le nombre de cas possibles est très important (voire infini)
  - ✘ les comportements inexplorés peuvent contenir un bug fatal
  - ✘ les tests privilégient les scénarios les plus probables

- Les tests peuvent prouver la présence d'erreurs, et **non leur absence** !
- **La vérification prouve l'absence d'erreurs (ou les trouve)**

LA NÉCISSITÉ DES MÉTHODES FORMELLES

$\Longrightarrow$ les slides de la présentation de la ST58

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

DEFINITION D'UN PROGRAMME SÉQUENTIEL

- Une séquence d'instructions qui **se termine** et dont le **résultat** est calculé à partir des **données initiales** (les entrées)

- **Exemple** $\longrightarrow$ programme de tri
  - Initial data : Array T of size N
  - Result : Sorted Array T of size N

```python
def bubble_sort(T):
    N = len(T)
    for i in range(N):
        # Last i elements are already in place
        for j in range(0, N - i - 1):
            if T[j] > T[j + 1]:
                # Swap if element is greater than the next
                T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
```

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Définitions

- **PreCondition** $\rightarrow$ propriété satisfaite par les données initiales du programme avant l'exécution des instructions
- **PostCondition** $\rightarrow$ propriété satisfaite par le résultat et les variables du programme après l'exécution des instructions

- Prouver que si la **PreCondition** est satisfaite, alors la **PostCondition** est satisfaite $\Rightarrow$ trouver la **PreCondition** qui permet d'aboutir à la **PostCondition**
- **Exemple** $\rightarrow$ programme de tri
  - Initial data : Array T of size N
  - Result : Sorted Array T of size N
  - Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n < m \Longrightarrow T[n] < T[m]$
  - Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n \neq m \Longrightarrow T[n] \neq T[m]$

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Spécification $\longrightarrow$ programme de tri

- Initial data : Array T of size N
- Result : Sorted Array T of size N
- Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n < m \implies T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n \neq m \implies T[n] \neq T[m]$

Conception $\longrightarrow$ programme de tri

```
input T : array [N] of integer
for i=0 to N-1 do
  for j=0 to N-i-1 do
    if T[j] > T[j + 1] do
      T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
    end
  end
end
```

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Spécification $\longrightarrow$ programme de tri

- Initial data : Array T of size N
- Result : Sorted Array T of size N
- Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n < m \Longrightarrow T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n \neq m \Longrightarrow T[n] \neq T[m]$

Implémentation $\longrightarrow$ programme de tri

```python
def bubble_sort(T):
    N = len(T)
    for i in range(N):
        for j in range(0, N - i - 1):
            if T[j] > T[j + 1]:
                T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
```

VÉRIFICATION FORMELLE

QUESTION ?

Spécification $\longrightarrow$ programme de tri

- Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n < m \Longrightarrow T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N],\ n \neq m \Longrightarrow T[n] \neq T[m]$

Conception $\longrightarrow$ programme de tri

```
input T : array [N] of integer
for i=0 to N-1 do
  for j=0 to N-i-1 do
    if T[j] > T[j + 1] do
      T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
    end
  end
end
```

$\Longrightarrow$ Prouver que si la **PreCondition** est satisfaite, alors la **PostCondition** est satisfaite

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

- Le système de preuve de **Hoare** fournit pour chaque type d'instruction une règle pour trouver la **PreCondition** la plus générale P (la forme générale : $\{P\}\ I\ \{Q\}$)
- Le triplet $\{P\}\ I\ \{Q\}$ exprime la propriété suivante :
  - ➠ Si P (**PreCondition**) est vérifiée avant l'exécution de I,
  - ➠ alors Q (**PostCondition**) est vérifiée après son exécution.
- Une règle de **Hoare** est constituée :
  - d'hypothèses $H_1, \ldots, H_n$
  - d'une conclusion C

$$\frac{H_1, \ldots, H_n}{C}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA SÉQUENCE

$$\frac{\{P\}\ I\ \{R\} \qquad \{R\}\ J\ \{Q\}}{\{P\}\ I\ ;\ J\ \{Q\}}$$

$$\frac{\{x > 0\}\ x := x + 1\ \{x > 1\} \qquad \{x > 1\}\ y := 2 * x\ \{y > 2\}}{\{x > 0\}\ x := x + 1\ ;\ y := 2 * x\ \{y > 2\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA CONDITIONNELLE

$$\frac{\{P \wedge C\}\ I\ \{Q\} \qquad \{P \wedge \neg C\}\ J\ \{Q\}}{\{P\}\ \text{if}\ C\ \text{then}\ I\ \text{else}\ J\ \{Q\}}$$

$$\frac{\{true \wedge y \geq 0\}\ x := y\ \{x \geq 0\} \qquad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\}\ x := 0\ \{x \geq 0\}}{\{true\}\ \text{if}\ y \geq 0\ \text{then}\ x := y\ \text{else}\ x := 0\ \{x \geq 0\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA BOUCLE

$$\frac{\{P \wedge C\}\ I\ \{P\}}{\{P\}\ \text{while}\ C\ \text{do}\ I\ \{P \wedge \neg C\}}$$

$$\frac{\dfrac{\{x\leq b \wedge x<b\}\ x:=x+1\ \{x\leq b\}}{\{x\leq b\}\ \text{while}\ x<b\ \text{do}\ x:=x+1\ \{x\leq b \wedge x\geq b\}}}{\{x \leq b\}\ \text{while}\ x < b\ \text{do}\ x := x + 1\ \{x = b\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE L'AFFECTATION

$$\overline{\{Q[x \leftarrow E]\}\ x := E\ \{Q\}}$$

Raisonnement arrière $\rightarrow$ pourque Q soit vraie après cette affectation, il faut qu'elle soit déjà vraie pour la valeur que va prendre x.

$$\overline{\{x + 2 > 2\}\ x := x + 2\ \{x > 2\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LES RÈGLES LOGIQUES

$$\frac{P \Rightarrow P' \qquad \{P'\}\ I\ \{Q'\} \qquad Q' \Rightarrow Q}{\{P\}\ I\ \{Q\}}$$

$$\frac{\{true \wedge y \geq 0\}\ x := y\ \{x \geq 0\} \qquad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\}\ x := 0\ \{x \geq 0\}}{\{true\}\ \text{if}\ y \geq 0\ \text{then}\ x := y\ \text{else}\ x := 0\ \{x \geq 0\}}$$

LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE (FOL)

- La preuve du programme est basée sur le **système formel** de la **logique du premier ordre** (**FOL**)
  - PreConditions, PostConditions, Invariants, Assertions . . .
- **FOL** est **la logique** que vous avez l'habitude d'utiliser en mathématiques
- La syntaxe :

$$t \quad ::= \quad c \mid x \mid f(t, \ldots, t)$$

$$\phi \quad ::= \quad true \mid a \mid t = t \mid P(t, \ldots, t) \mid \phi \wedge \phi \mid \neg \phi \mid \exists x.\ \phi$$

- La **sémantique** est l'interprétation habituelle utilisée en **mathématiques**

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

EN PRATIQUE ...

Le système de **Hoare** est complexe à utiliser :

✘ règles lourdes à appliquer

✘ taille des arbres de preuve

✔ mieux adapté à une preuve automatisée (ex. **Méthode B**)

PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

HISTOIRE DE LA VÉRIFICATION FORMELLE

Avant . . .

- Le code du logiciel était séquentiel
- Les propriétés sont exprimées en utilisant la **logique du premier ordre**
- **La preuve de théorème** : ex. la méthode B
- Difficilement automatisé : **semi-décidable**

Après les années 80

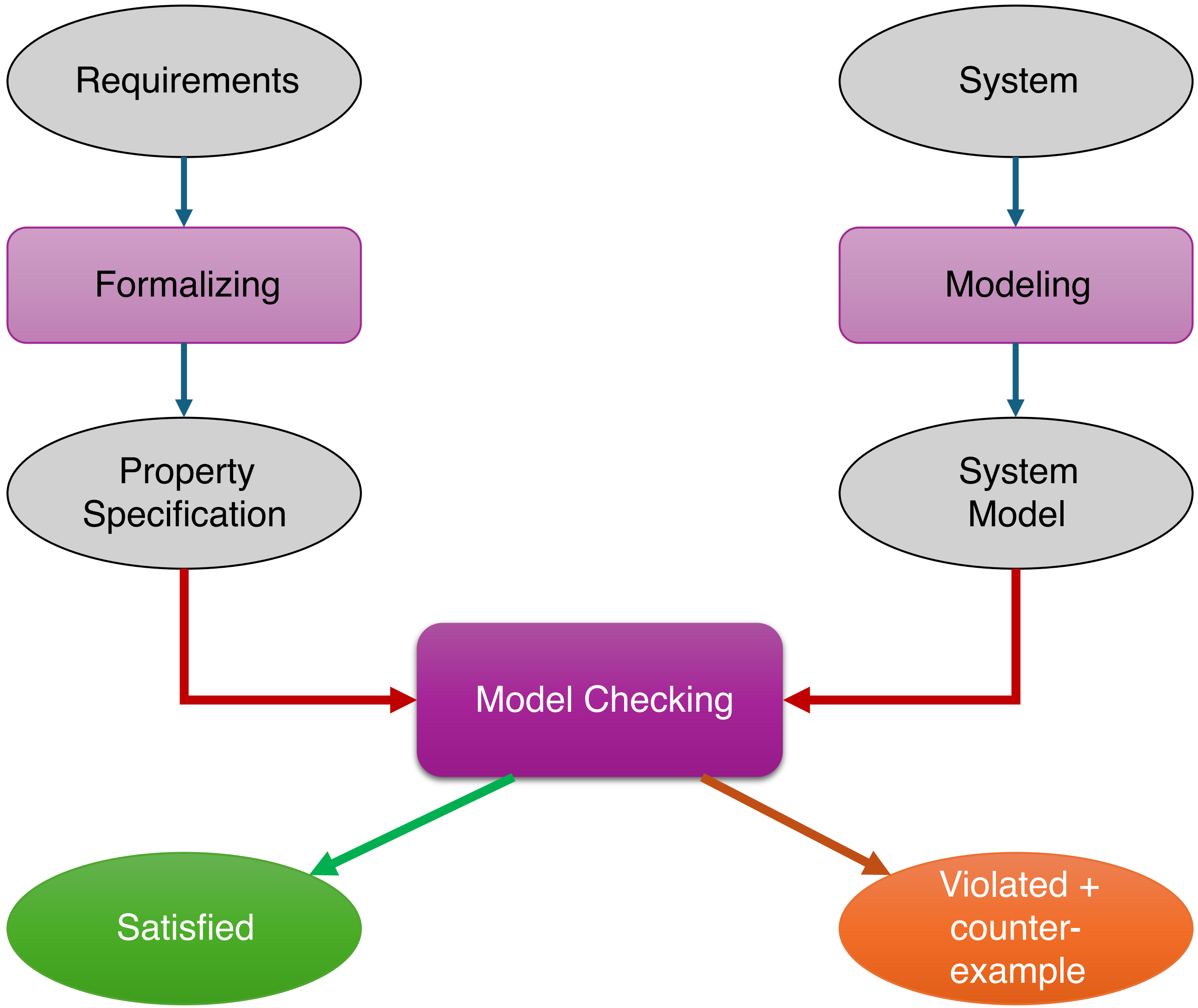
- Le logiciel est **concurrent** et réactif
- Les propriétés sont exprimées en **logique temporelle**
- Démontrer des propriétés telles que la sécurité, la vivacité et l'équité . . .
- ex. Model Checking
- Méthodes automatisées : **décidable**

LA FORMALISATION DE LA VÉRIFICATION D'UN MODÈLE

La forme formelle du problème de vérification est $M \models^? \varphi$ avec:

- M est la représentation formelle du système observé
- φ est la représentation formelle de la propriété à vérifier

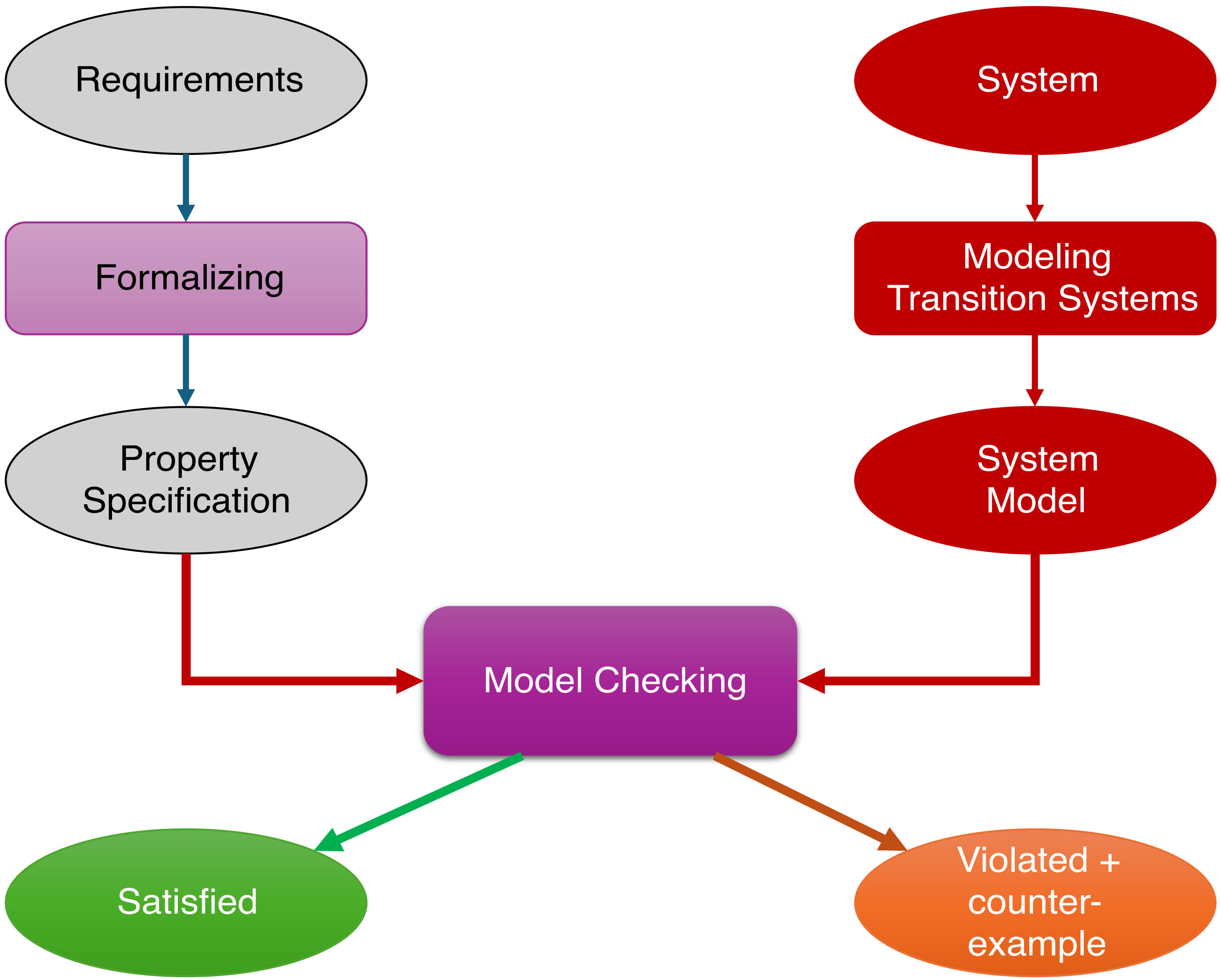
PRINCIPE DU MODEL-CHECKING



PLAN

Retour au plan - Retour à l'accueil

PRINCIPE DU MODEL-CHECKING



SYSTÈMES DE TRANSITION

- **modèle** pour décrire le comportement des systèmes
- **digraphes** où les **nœuds** représentent les états et les **arêtes** représentent les transitions
- **états** :
  - la couleur actuelle d'un feu de circulation : rouge, vert, orange.
  - **software :** les valeurs actuelles de toutes les variables du programme...
  - **hardware :** la valeur actuelle des registres ainsi que les valeurs des bits d'entrée
- **transitions** : ("changement d'états")
  - un passage d'une couleur à une autre
  - **software :** l'exécution d'une instruction de programme
  - **hardware :** le changement des registres et des bits de sortie pour une nouvelle entrée

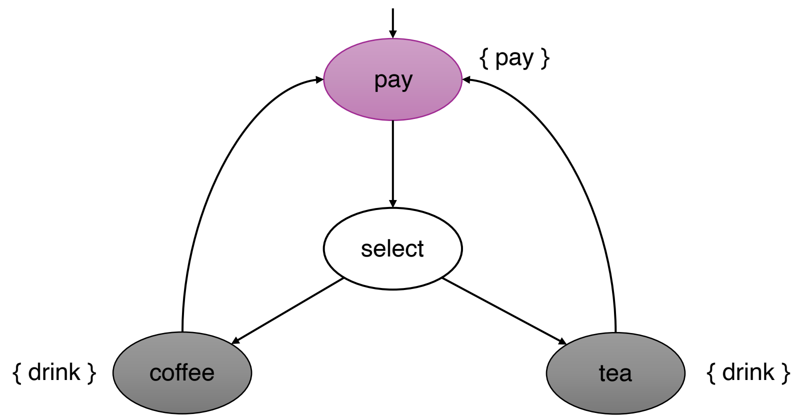
SYSTÈMES DE TRANSITION

LA DÉFINITION FORMELLE

- Un **systèmes de transition** TS est un tuple $(S, \delta, I, AP, \mathcal{L})$ avec :
  - S est un ensemble d'états
  - $\delta \subseteq S \times S$ est une relation de transition
    Notation: $s \rightarrow s'$ au lieu de $(s, s') \in \delta$
  - $I \subseteq S$ est un ensemble d'états initiaux
  - AP est un ensemble de propositions atomiques
  - $\mathcal{L} : S \longrightarrow 2^{AP}$ est une fonction d'étiquetage

SYSTÈMES DE TRANSITION

EXAMPLE

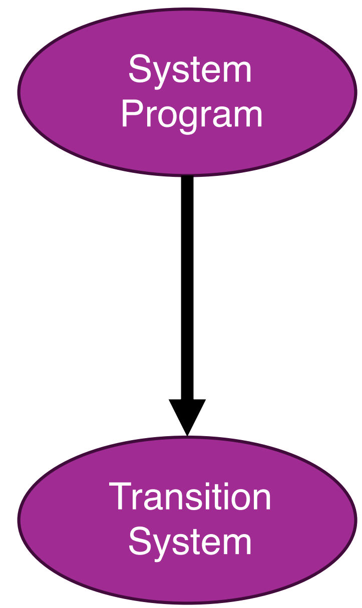


- **Ensemble d'états** : $S = \{\text{pay}, \text{select}, \text{tea}, \text{coffee}\}$
- **Les états initiaux** : $I = \{\text{pay}\}$
- **Les propositions atomiques, La fonction d'étiquetage** :
  - cas 1: $AP = S$, $\mathcal{L}(s) = \{s\}$
  - cas 2: $AP = \{\text{pay}, \text{drink}\}$, $\mathcal{L}(\text{tea}) = \mathcal{L}(\text{coffee}) = \{\text{drink}\}$

    $\mathcal{L}(\text{pay}) = \{\text{pay}\}$, $\mathcal{L}(\text{select}) = \emptyset$

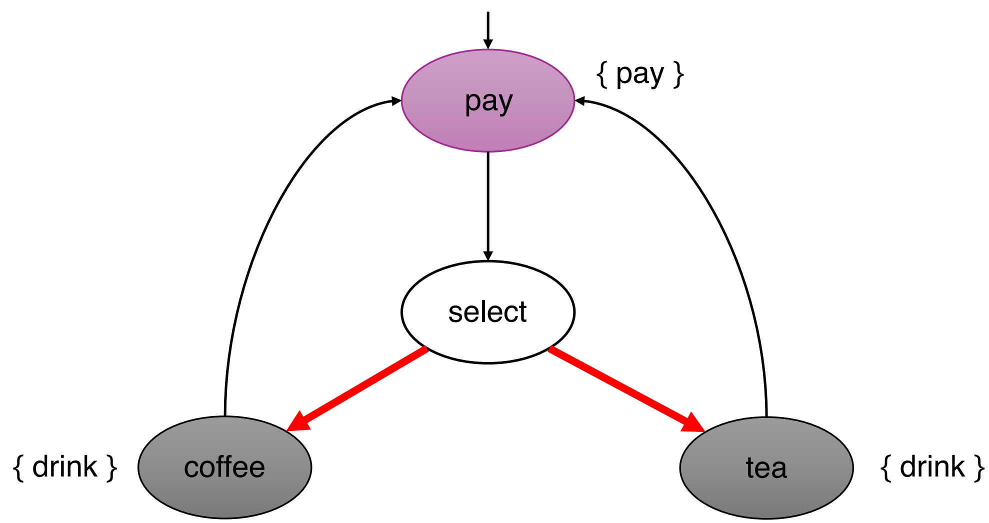
DES LANGAGES DE PROGRAMMATION AUX SYSTÈMES DE TRANSITION

- Les systèmes de transition sont un langage de modélisation élémentaire
  - décrit tous les états que le système peut atteindre
  - décrit le comportement du système (transitions)
- Même un système de base peut avoir des milliers d'états !
  - `int i=0; while(i<1000) i++;`
  - la modélisation peut être fastidieuse !
- Et si le système de transition était généré automatiquement à partir du programme du système ?
  - la modélisation serait automatique !
  - de nombreux outils existent, de **C**, **Java** . . . à TS

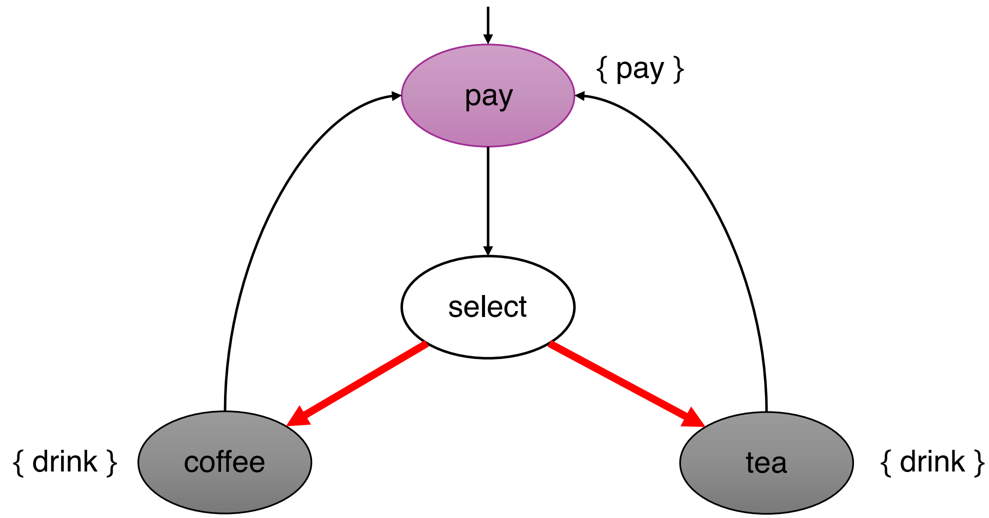


DÉTERMINISME ET NON-DÉTERMINISME

- Soit $TS = (S, \delta, I, AP, \mathcal{L})$ un système de transition, TS est **déterministe**
  - iff $\forall\ s, s'_1, s'_2 \in S, \quad s \to s'_1, s \to s'_2 \in \delta \Rightarrow s'_1 = s'_2$
  - iff $\forall\ s \in S, \quad \#(\delta(s)) \leq 1$



SOURCES DU NON-DÉTERMINISME



- Informations incomplètes sur l'environnement du système
  - Sélection de l'utilisateur
  - Événements déclenchés

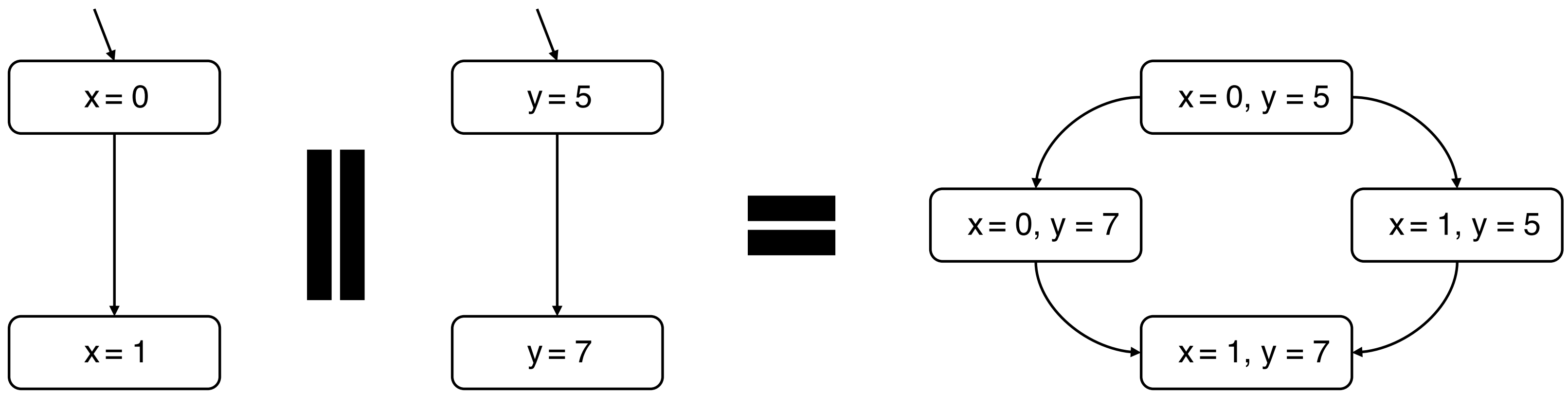
ENTRELACEMENT DE SYSTÈMES CONCURRENTS

- le système est composé de nombreux composants concurrents
- **un système de transition** pour modéliser le comportement d'**un composant**
- ex. le threading, les algorithmes distribués et les protocoles de communication

PRINCIPE D'ENTRELACEMENT

PRINCIPE D'ENTRELACEMENT

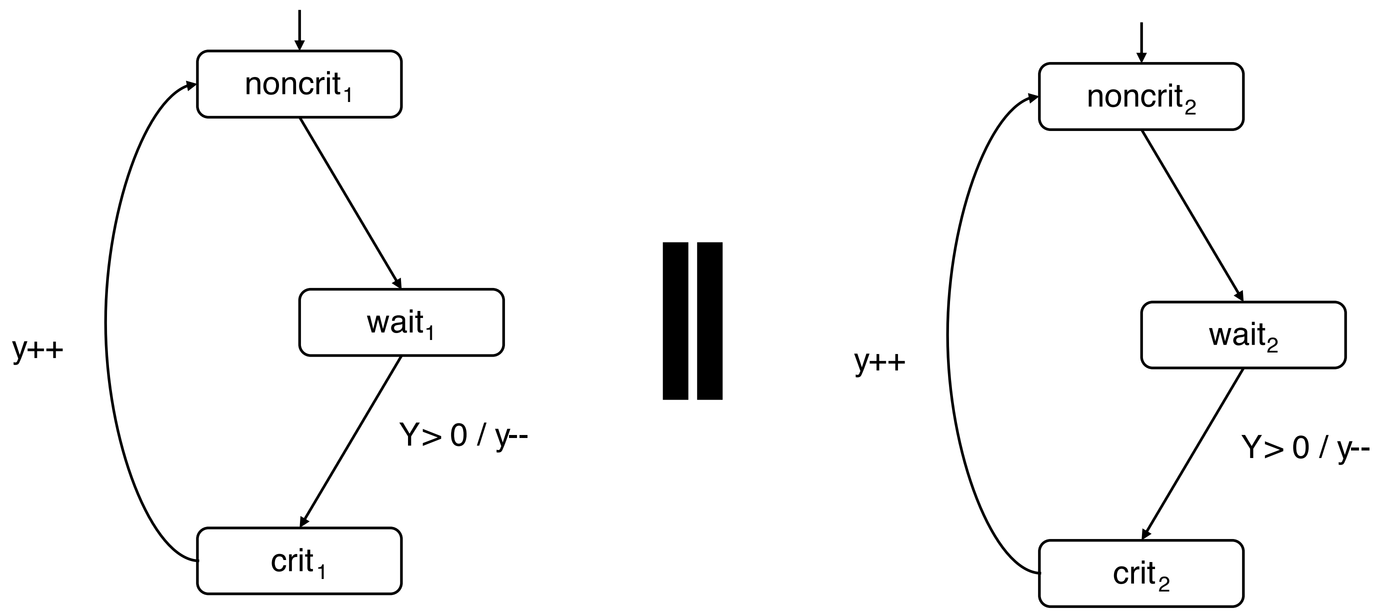
EXEMPLE D'ENTRELACEMENT



L'ENTRELACEMENT $TS_1 \parallel TS_2$

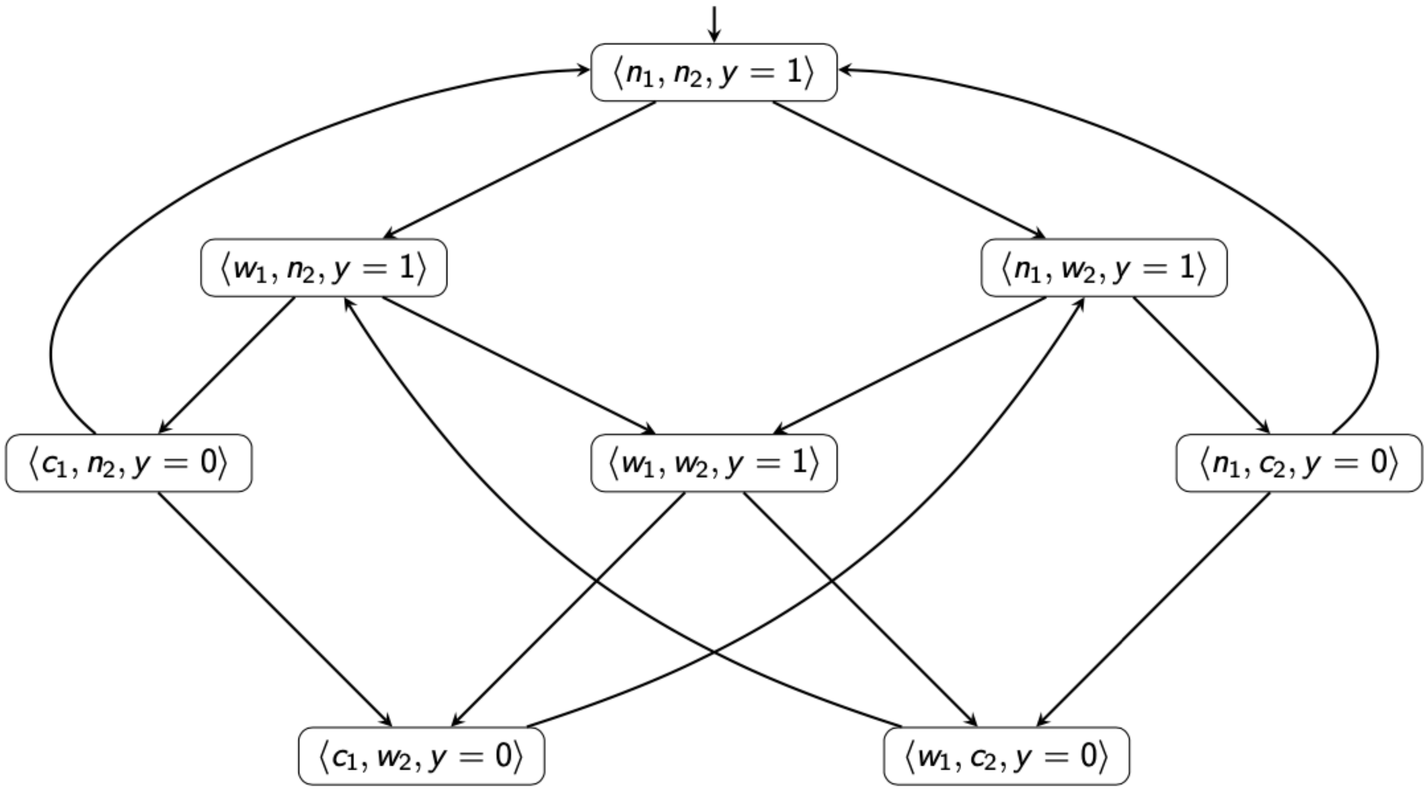
DÉFINITION FORMELLE

EXCLUSION MUTUELLE BASÉE SUR LES SÉMAPHORES



$y = 0$ signifie "le verrou est actuellement possédé";
$y = 1$ signifie "le verrou est libre"

PRODUIT D'ENTRELACEMENT



$n_i : noncrit_i, w_i : wait_i, c_i : crit_i$

Source typique d'explosion d'état $\rightarrow$ supposons qu'il y ait 3 composants concurrents

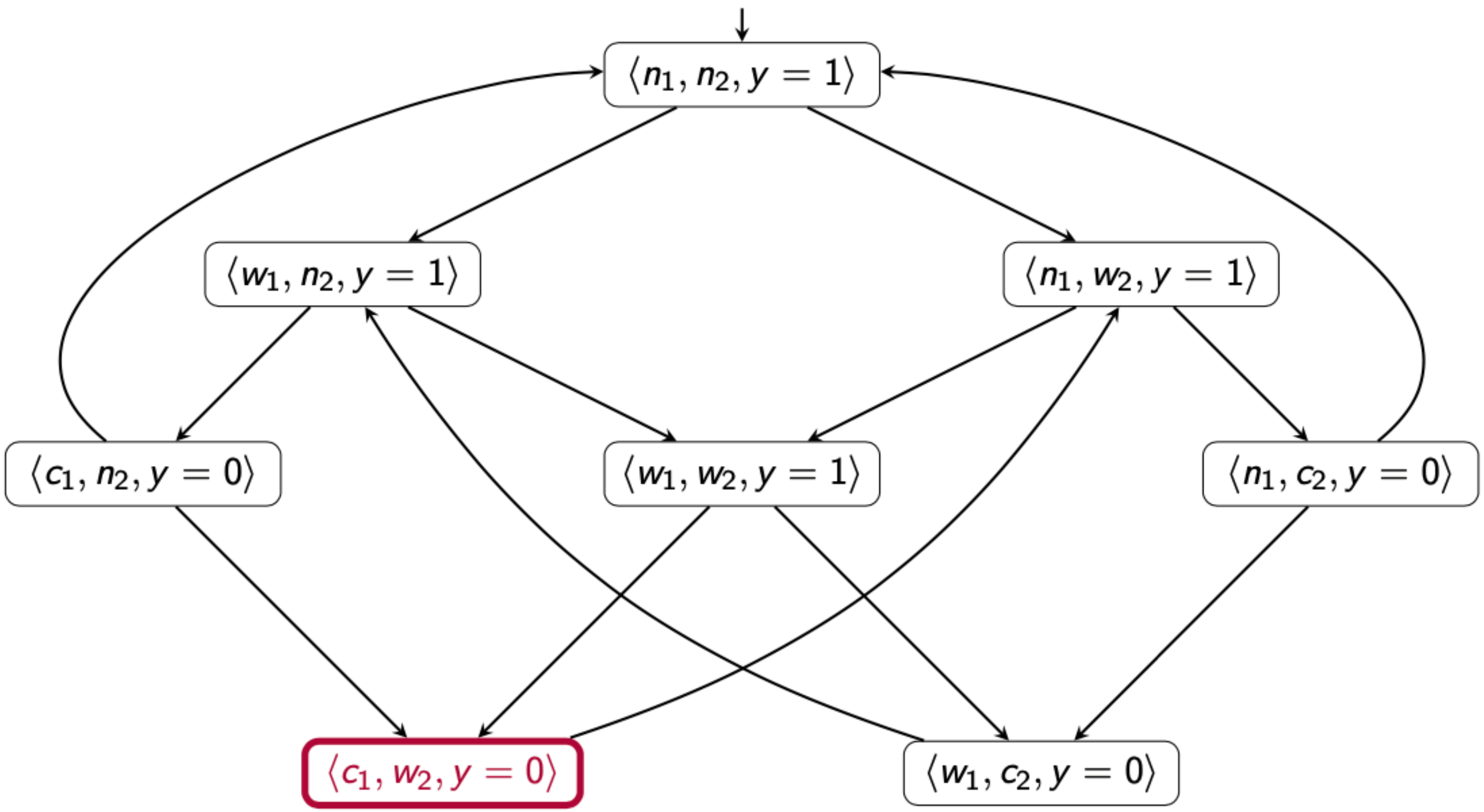
CHEMINS ET ÉTATS ATTEIGNABLES

- Un **fragment de chemin infini** π est une séquence d'états infinie : $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots$ tel que $\forall i \geq 0, s_i \longrightarrow s_{i+1} \in \delta$
- $Paths(s)$ est l'ensemble des fragments de chemin infinis π avec $first(\pi) = s$
- $Paths(TS) = \bigcup\limits_{s \in I} Paths(s)$ est l'ensemble des fragments de chemin initiaux
- Un état $s \in S$ est dit **accessible** dans TS s'il existe un fragment de chemin initial π tel que

$$\pi = s_0 s_1 \ldots s_{n-1} (s_n = s) s_{n+1} \ldots \in Paths(TS)$$

- $Reach(TS)$ désigne l'ensemble de tous les états atteignables dans TS

REVENONS À NOTRE EXEMPLE



$$Paths(\langle c_1, w_2, y = 0\rangle) = ?$$
$$Paths(TS) = ?$$
$$Reach(TS) = ?$$

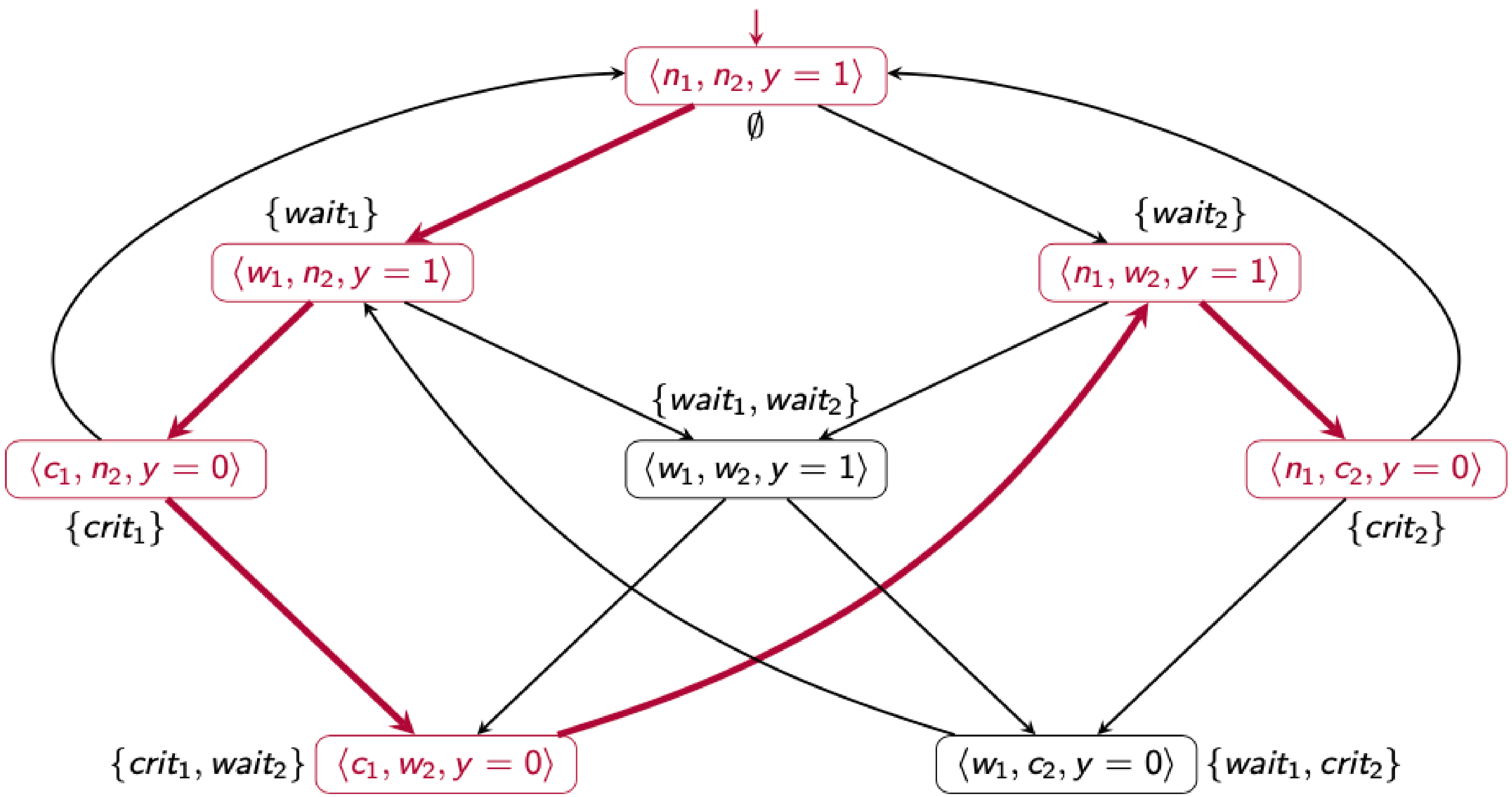
TRACES

- Les états sont observables à travers leurs propositions atomiques
- Les **traces** se concentrent uniquement sur l'ensemble des propositions atomiques qui sont valides le long du chemin d'exécution
- La trace du chemin $\pi = s_0 s_1 s_2 \ldots \in S^\omega$ avec $\mathcal{L} : S \longrightarrow 2^{AP}$
  - $trace(\pi) = \mathcal{L}(s_0)\mathcal{L}(s_1)\mathcal{L}(s_2)\ldots \in (2^{AP})^\omega$
- Les traces sont des mots **infinis** sur l'alphabet 2^{AP}
- $trace(\Pi) = \{trace(\pi) | \pi \in \Pi\}$, $\qquad Traces(s) = trace(Paths(s))$

et $\quad Traces(TS) = \bigcup_{s \in I} Traces(s)$

REVENONS À NOTRE EXEMPLE

Soit $AP = \{wait_1, crit_1, wait_2, crit_2\}$



$$Trace(\pi \ldots) = \emptyset\{wait_1\}\{crit_1\}\{crit_1, wait_2\}\{wait_2\}\{crit_2\}\ldots$$

MERCI

Version PDF des slides

Retour à l'accueil - Retour au plan