



Laboratoire
Méthodes
Formelles



CONCEPTION ET VÉRIFICATION DE SYSTÈMES CRITIQUES

INTRODUCTION AUX MÉTHODES FORMELLES

🎓 2A Cursus Ingénieurs - ST5 : Modélisation fonctionnelle et régulation

🏛️ CentraleSupélec - Université Paris-Saclay - 2025/2026



Idir AIT SADOUNE
idir.aitsadoune@centralesupelec.fr

PLAN

- La nécessité des méthodes formelles/vérification
- La vérification d'un programme
- Le principe du Model-Checking
- La modélisation d'un logiciel/système

[Retour au plan](#) - [Retour à l'accueil](#)

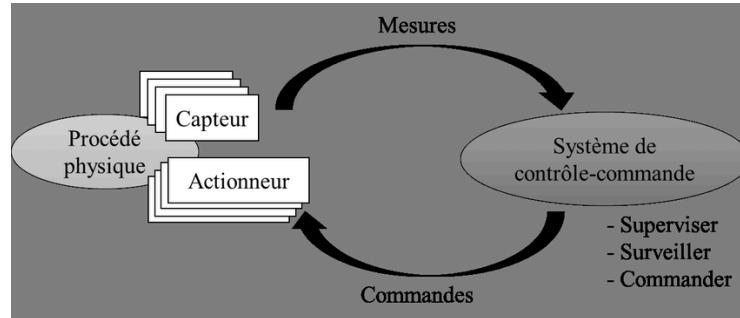
PLAN

- La nécessité des méthodes formelles/vérification
- La vérification d'un programme
- Le principe du Model-Checking
- La modélisation d'un logiciel/système

[Retour au plan](#) - [Retour à l'accueil](#)

FIABILITÉ DES SYSTÈMES DE CONTRÔLE

- Un système de contrôle est composé de 3 parties :
 1. Capteurs
 2. Actionneurs
 3. **Logiciel** de contrôle qui est **critique** dans le contexte d'un **système critique**!



Logiciel critique → pour lequel une défaillance peut être catastrophique

- mortelle ou/et extrêmement coûteuse

Quelques défaillances spectaculaires de logiciels critiques :

- Crash of Ariane 5
- LASCAD : Crash of London Ambulance CAD service
- Therac-25 : 7 deaths of cancer patients due to overdoses of radiation

SOLUTIONS

- Les règles et les techniques de programmation.
- Le support des langages de programmation.
- Les méthodologies de conception et de développement.
- Le test.
- Les **méthodes formelles**
 - ➡ **méthodes d'ingénierie** basées sur des **approches mathématiques** utilisées pour développer et analyser des systèmes (logiciels).
 - ➡ **démarche globale (langages et outils de vérification)**.



Formal Methods for Software Engineering
Languages, Methods, Application Domains
Springer 2022

SPÉCIFICATION, CONCEPTION ET VÉRIFICATION

- **La spécification formelle** → **description rigoureuse** et **non ambiguë** du comportement attendu d'un système (logiciel).
 - ➡ modèle mathématique décrivant **ce que doit faire** le système (logiciel).
 - ➡ modélisation par un **langage mathématique** (syntaxe, logique, sémantique...).
- **La conception formelle** → **description rigoureuse** et **non ambiguë** de la réalisation du système (logiciel).
 - ➡ modèle mathématique décrivant **la construction** du système (logiciel).
 - ➡ modélisation par un **langage mathématique** (syntaxe, logique, sémantique...).
- **La Vérification formelle** → **démontrer mathématiquement** qu'un système (logiciel) **respecte les exigences** identifiées dans la spécification.
 - ➡ **démonstration** que la conception correspond bien à la spécification.
 - ➡ **simulation, preuve de théorèmes, model checking...**

VÉRIFICATION DU LOGICIEL DE CONTRÔLE

Le processus de vérification

1. Déterminer ce que le logiciel est censé faire (**Spécification**)
2. Prendre le logiciel (**Conception**)
3. Démontrer que le logiciel fait ce qu'il est censé faire (**Vérification**)

Imposée par les organismes de certification (⇒ quelques examples)

TEST vs VERIFICATION

- Les tests sont une technique dynamique courante où le système est exécuté
- **Procédure de test :**
 - prendre une implémentation du système
 - la stimuler avec certaines données en entrée (les cas de tests)
 - observer la réaction et vérifier si elle est "souhaitable"
- **Inconvénients des tests :**
 - ✗ le **nombre de cas possibles** est très important (voire infini)
 - ✗ les **comportements inexplorés** peuvent contenir un bug fatal
 - ✗ les tests privilégiuent **les scénarios les plus probables**

- Les tests peuvent prouver la présence d'erreurs, et **non leur absence** !
- **La vérification prouve l'absence d'erreurs (ou les trouve)**

LA NÉCESSITÉ DES MÉTHODES FORMELLES

⇒ les slides de la présentation de la ST58

PLAN

- La nécessité des méthodes formelles/vérification
- La vérification d'un programme
- Le principe du Model-Checking
- La modélisation d'un logiciel/système

[Retour au plan](#) - [Retour à l'accueil](#)

DEFINITION D'UN PROGRAMME SÉQUENTIEL

- Une séquence d'instructions qui **se termine** et dont le **résultat** est calculé à partir des **données initiales** (les entrées)
- **Exemple** → programme de tri
 - Initial data : Array T of size N
 - Result : Sorted Array T of size N

```
1 def bubble_sort(T):  
2     N = len(T)  
3     for i in range(N):  
4         # Last i elements are already in place  
5         for j in range(0, N - i - 1):  
6             if T[j] > T[j + 1]:  
7                 # Swap if element is greater than the next  
8                 T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
```

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Définitions

- **PreCondition** → propriété satisfaite par les données initiales du programme avant l'exécution des instructions
- **PostCondition** → propriété satisfaite par le résultat et les variables du programme après l'exécution des instructions

- Prouver que si la **PreCondition** est satisfaite, alors la **PostCondition** est satisfaite \Rightarrow trouver la **PreCondition** qui permet d'aboutir à la **PostCondition**
- **Exemple** → programme de tri
 - Initial data : Array T of size N
 - Result : Sorted Array T of size N
 - Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N], n < m \Rightarrow T[n] < T[m]$
 - Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N], n \neq m \Rightarrow T[n] \neq T[m]$

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Spécification → programme de tri

- Initial data : $\text{Array } T \text{ of size } N$
- Result : $\text{Sorted Array } T \text{ of size } N$
- Post-Condition : $\forall n, m \in [1..N], n < m \implies T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1..N], n \neq m \implies T[n] \neq T[m]$

Conception → programme de tri

```
input T : array [N] of integer
for i=0 to N-1 do
    for j=0 to N-i-1 do
        if T[j] > T[j + 1] do
            T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
        end
    end
end
```

VÉRIFICATION FORMELLE DES PROGRAMMES SÉQUENTIELS

Spécification → programme de tri

- Initial data : $\text{Array } T \text{ of size } N$
- Result : $\text{Sorted Array } T \text{ of size } N$
- Post-Condition : $\forall n, m \in [1.. N], n < m \implies T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1.. N], n \neq m \implies T[n] \neq T[m]$

Implémentation → programme de tri

```
1 def bubble_sort(T):  
2     N = len(T)  
3     for i in range(N):  
4         for j in range(0, N - i - 1):  
5             if T[j] > T[j + 1]:  
6                 T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
```

VÉRIFICATION FORMELLE

QUESTION ?

Spécification → programme de tri

- Post-Condition : $\forall n, m \in [1.. N], n < m \implies T[n] < T[m]$
- Pre-Condition : $\forall n, m \in [1.. N], n \neq m \implies T[n] \neq T[m]$

Conception → programme de tri

```
input T : array [N] of integer
for i=0 to N-1 do
    for j=0 to N-i-1 do
        if T[j] > T[j + 1] do
            T[j], T[j + 1] = T[j + 1], T[j]
        end
    end
end
```

⇒ Prouver que si la **PreCondition** est satisfaite, alors la **PostCondition** est satisfaite

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

- Le système de preuve de **Hoare** fournit pour chaque type d'instruction **une règle** pour trouver la **PreCondition** la plus générale P (la forme générale : $\{P\} I \{Q\}$)
- Le triplet $\{P\} I \{Q\}$ exprime la propriété suivante :
 - ➡ Si P (**PreCondition**) est vérifiée avant l'exécution de I ,
 - ➡ alors Q (**PostCondition**) est vérifiée après son exécution.
- Une règle de **Hoare** est constituée :
 - d'hypothèses H_1, \dots, H_n
 - d'une conclusion C

$$\frac{H_1, \dots, H_n}{C}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA SÉQUENCE

$$\frac{\{P\} I \{R\} \quad \{R\} J \{Q\}}{\{P\} I ; J \{Q\}}$$

$$\frac{\{x > 0\} x := x + 1 \{x > 1\} \quad \{x > 1\} y := 2 * x \{y > 2\}}{\{x > 0\} x := x + 1 ; y := 2 * x \{y > 2\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA CONDITIONNELLE

$$\frac{\{P \wedge C\} I \{Q\} \quad \{P \wedge \neg C\} J \{Q\}}{\{P\} \text{ if } C \text{ then } I \text{ else } J \{Q\}}$$

$$\frac{\{true \wedge y \geq 0\} x := y \{x \geq 0\} \quad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\} x := 0 \{x \geq 0\}}{\{true\} \text{ if } y \geq 0 \text{ then } x := y \text{ else } x := 0 \{x \geq 0\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE LA BOUCLE

$$\frac{\{P \wedge C\} \ I \ \{P\}}{\{P\} \ \text{while } C \text{ do } I \ \{P \wedge \neg C\}}$$

$$\frac{\frac{\{x \leq b \wedge x < b\} \ x := x + 1 \ \{x \leq b\}}{\{x \leq b\} \ \text{while } x < b \text{ do } x := x + 1 \ \{x \leq b \wedge x \geq b\}}}{\{x \leq b\} \ \text{while } x < b \text{ do } x := x + 1 \ \{x = b\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LA RÈGLE DE L'AFFECTION

$$\overline{\{Q[x \leftarrow E]\} \ x := E \ \{Q\}}$$

Raisonnement arrière \rightarrow pourquoi Q soit vraie après cette affectation, il faut qu'elle soit déjà vraie pour la valeur que va prendre x .

$$\overline{\{x + 2 > 2\} \ x := x + 2 \ \{x > 2\}}$$

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

LES RÈGLES LOGIQUES

$$\frac{P \Rightarrow P' \quad \{P'\} I \{Q'\} \quad Q' \Rightarrow Q}{\{P\} I \{Q\}}$$

$$\frac{\{true \wedge y \geq 0\} x := y \{x \geq 0\} \quad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\} x := 0 \{x \geq 0\}}{\{true\} \text{ if } y \geq 0 \text{ then } x := y \text{ else } x := 0 \{x \geq 0\}}$$

$$\frac{\{true \wedge y \geq 0\} \Rightarrow \{y \geq 0\} \quad \{y \geq 0\} x := y \{x \geq 0\} \quad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\} \Rightarrow \{0 \geq 0\} \quad \{0 \geq 0\} x := 0 \{x \geq 0\}}{\{true \wedge y \geq 0\} x := y \{x \geq 0\} \quad \{true \wedge \neg(y \geq 0)\} x := 0 \{x \geq 0\}}$$

LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE (FOL)

- La **preuve du programme** est basée sur le **système formel** de la **logique du premier ordre (FOL)**
 - PreConditions, PostConditions, Invariants, Assertions ...
- **FOL** est **la logique** que vous avez l'habitude d'utiliser en **mathématiques**
- La syntaxe :
$$t ::= c \mid x \mid f(t, \dots, t)$$
$$\phi ::= \text{true} \mid a \mid t = t \mid P(t, \dots, t) \mid \phi \wedge \phi \mid \neg \phi \mid \exists x. \phi$$
- La **sémantique** est l'interprétation habituelle utilisée en **mathématiques**

LE SYSTÈME DE PREUVE DE HOARE

EN PRATIQUE ...

Le système de **Hoare** est complexe à utiliser :

- ✗ règles lourdes à appliquer
- ✗ taille des arbres de preuve
- ✓ mieux adapté à une preuve automatisée (ex. **Méthode B**)

PLAN

- La nécessité des méthodes formelles/vérification
- La vérification d'un programme
- Le principe du Model-Checking
- La modélisation d'un logiciel/système

[Retour au plan](#) - [Retour à l'accueil](#)

HISTOIRE DE LA VÉRIFICATION FORMELLE

Avant . . .

- Le code du logiciel était séquentiel
- Les propriétés sont exprimées en utilisant la **logique du premier ordre**
- **La preuve de théorème** : ex. la méthode B
- Difficilement automatisé : **semi-décidable**

Après les années 80

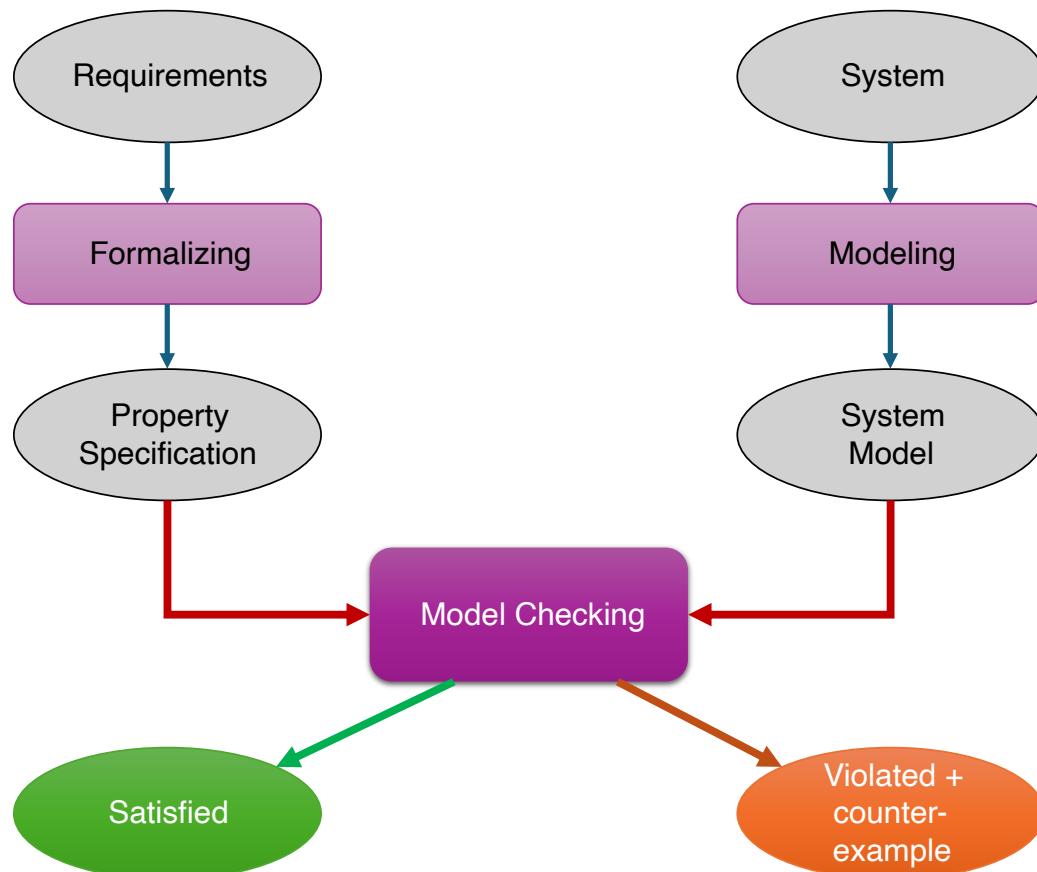
- Le logiciel est **concurrent** et réactif
- Les propriétés sont exprimées en **logique temporelle**
- Démontrer des propriétés telles que la sécurité, la vivacité et l'équité . . .
- ex. Model Checking
- Méthodes automatisées : **décidable**

LA FORMALISATION DE LA VÉRIFICATION D'UN MODÈLE

La forme formelle du problème de vérification est $M \models^? \varphi$ avec:

- M est la représentation formelle du système observé
- φ est la représentation formelle de la propriété à vérifier

PRINCIPE DU MODEL-CHECKING

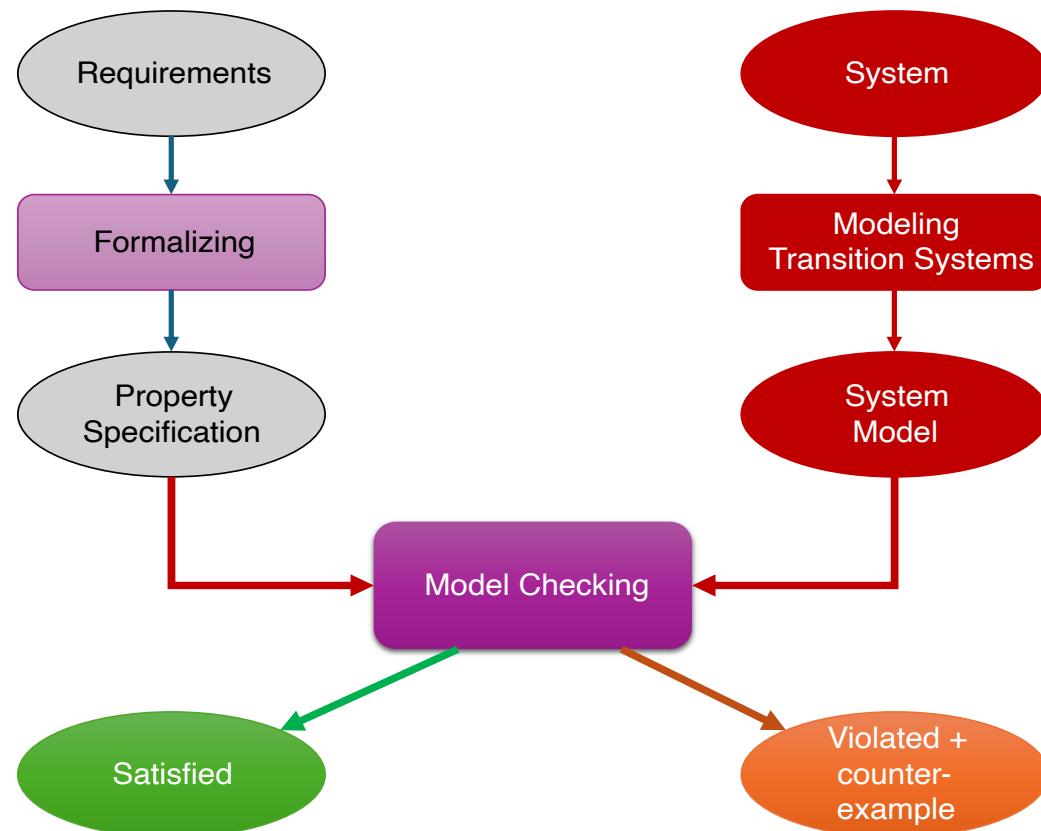


PLAN

- La nécessité des méthodes formelles/vérification
- La vérification d'un programme
- Le principe du Model-Checking
- La modélisation d'un logiciel/système

[Retour au plan](#) - [Retour à l'accueil](#)

PRINCIPE DU MODEL-CHECKING



SYSTÈMES DE TRANSITION

- **modèle** pour décrire le **comportement des systèmes**
- **digraphes** où les **nœuds** représentent les états et les **arêtes** représentent les **transitions**
- **états** :
 - la couleur actuelle d'un feu de circulation : rouge, vert, orange.
 - **software** : les valeurs actuelles de toutes les variables du programme...
 - **hardware** : la valeur actuelle des registres ainsi que les valeurs des bits d'entrée
- **transitions** : ("changement d'états")
 - un passage d'une couleur à une autre
 - **software** : l'exécution d'une instruction de programme
 - **hardware** : le changement des registres et des bits de sortie pour une nouvelle entrée

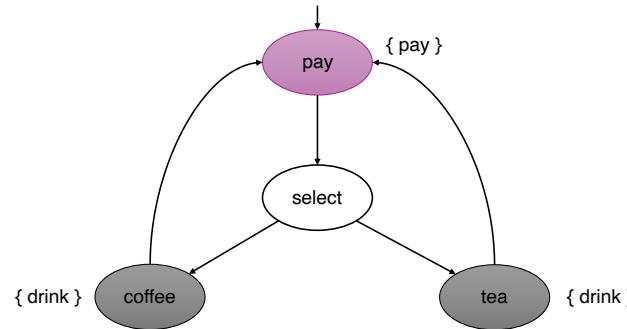
SYSTÈMES DE TRANSITION

LA DÉFINITION FORMELLE

- Un **systèmes de transition** TS est un tuple $(S, \delta, I, AP, \mathcal{L})$ avec :
 - S est un ensemble d'**états**
 - $\delta \subseteq S \times S$ est une **relation de transition**
Notation: $s \rightarrow s'$ au lieu de $(s, s') \in \delta$
 - $I \subseteq S$ est un ensemble d'**états initiaux**
 - AP est un ensemble de **propositions atomiques**
 - $\mathcal{L} : S \longrightarrow 2^{AP}$ est une **fonction d'étiquetage**

SYSTÈMES DE TRANSITION

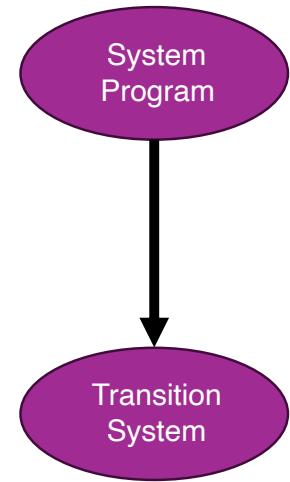
EXAMPLE



- Ensemble d'états : $S = \{\text{pay}, \text{select}, \text{tea}, \text{coffee}\}$
- Les états initiaux : $I = \{\text{pay}\}$
- Les propositions atomiques, La fonction d'étiquetage :
 - cas 1: $AP = S$, $\mathcal{L}(s) = \{s\}$
 - cas 2: $AP = \{\text{pay}, \text{drink}\}$, $\mathcal{L}(\text{tea}) = \mathcal{L}(\text{coffee}) = \{\text{drink}\}$
 $\mathcal{L}(\text{pay}) = \{\text{pay}\}$, $\mathcal{L}(\text{select}) = \emptyset$

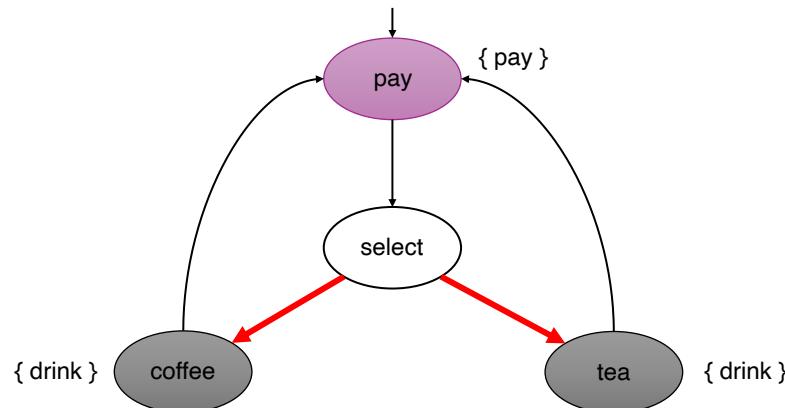
DES LANGAGES DE PROGRAMMATION AUX SYSTÈMES DE TRANSITION

- Les systèmes de transition sont un langage de modélisation élémentaire
 - décrit **tous** les états que le système peut atteindre
 - décrit le comportement du système (transitions)
- Même un système de base peut avoir des milliers d'états !
 - `int i=0; while(i<1000) i++;`
 - la modélisation peut être fastidieuse !
- Et si le système de transition était **généré automatiquement** à partir du programme du système ?
 - la modélisation serait automatique !
 - de nombreux outils existent, de **C, Java ... à TS**

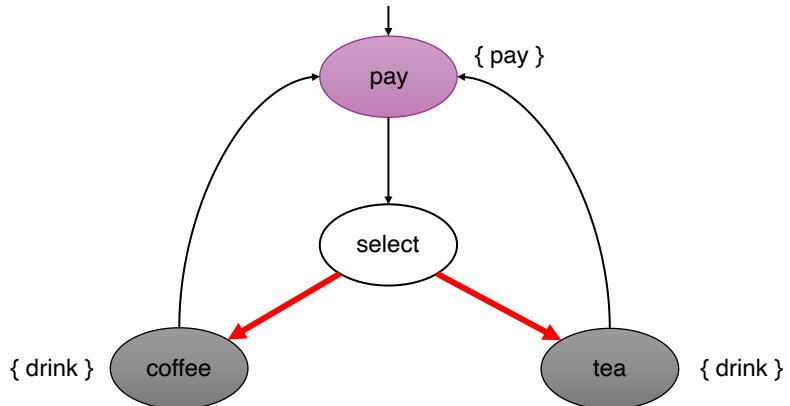


DÉTERMINISME ET NON-DÉTERMINISME

- Soit $TS = (S, \delta, I, AP, \mathcal{L})$ un système de transition, TS est **déterministe**
 - iff $\forall s, s'_1, s'_2 \in S, s \rightarrow s'_1, s \rightarrow s'_2 \in \delta \Rightarrow s'_1 = s'_2$
 - iff $\forall s \in S, \#(\delta(s)) \leq 1$



SOURCES DU NON-DÉTERMINISME



- Informations incomplètes sur l'environnement du système
 - Sélection de l'utilisateur
 - Événements déclenchés

ENTRELACEMENT DE SYSTÈMES CONCURRENTS

- le système est composé de nombreux composants concurrents
- **un système de transition** pour modéliser le comportement d'**un composant**
- ex. le threading, les algorithmes distribués et les protocoles de communication

PRINCIPE D'ENTRELACEMENT

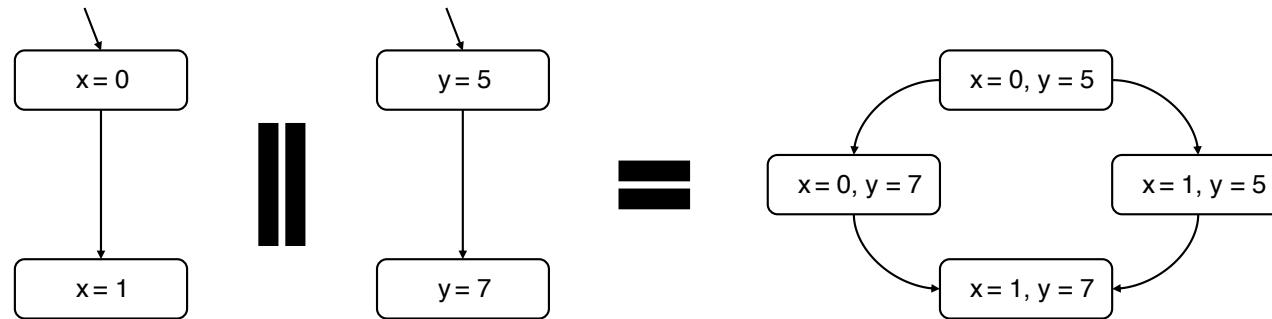
- Les actions des composants indépendants sont **entrelacées**
 - un seul processeur est disponible
 - sur lequel chaque composant s'exécute pendant un quantum de temps
- Aucune hypothèse n'est faite sur l'ordre des exécutions
 - ordres possibles pour des composants indépendants infinis
 $Loop(P) \parallel Loop(Q)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} P & Q & P & Q & P & Q & P & Q & P & Q & \dots \\ P & P & Q & P & P & Q & P & P & Q & P & \dots \\ P & Q & P & P & Q & P & P & P & Q & P & \dots \end{array}$$

source principale de **non-déterminisme** qui peut être évitée en ajoutant un **ordonnanceur** avec une stratégie particulière

PRINCIPE D'ENTRELACEMENT

EXEMPLE D'ENTRELACEMENT



L'ENTRELACEMENT $TS_1 \parallel TS_2$

DÉFINITION FORMELLE

Soient $TS_i = (S_i, \delta_i, I_i, AP_i, \mathcal{L}_i), i = 1, 2$ deux systèmes de transition.

Le **produit entrelacé (produit asynchrone)** est le système de transition :

$$TS_1 \parallel TS_2 = (S_1 \times S_2, \delta, I_1 \times I_2, AP_1 \cup AP_2, \mathcal{L})$$

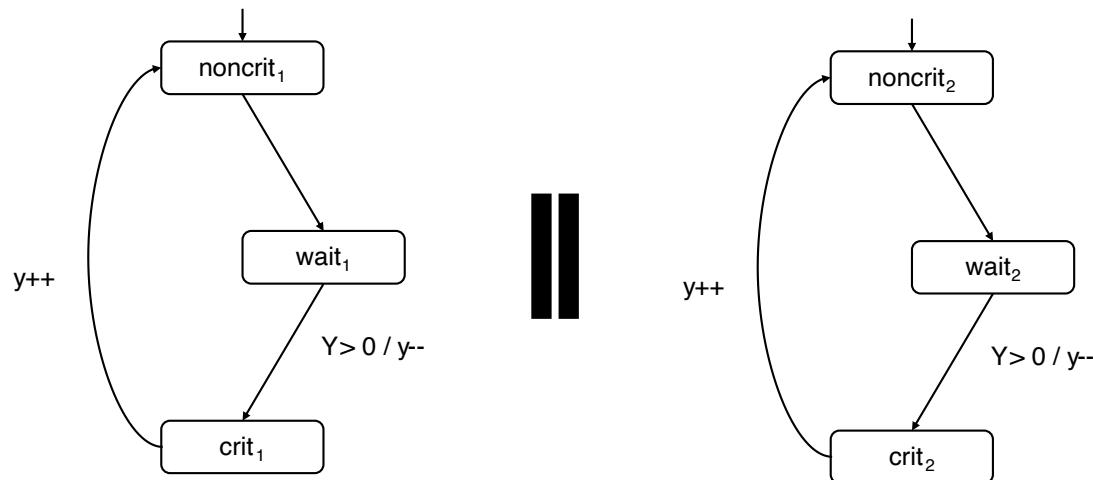
où δ vérifie :

$$\frac{s_1 \longrightarrow s'_1}{\langle s_1, s_2 \rangle \longrightarrow \langle s'_1, s_2 \rangle} \quad \text{and} \quad \frac{s_2 \longrightarrow s'_2}{\langle s_1, s_2 \rangle \longrightarrow \langle s_1, s'_2 \rangle}$$

et \mathcal{L} vérifie :

$$\mathcal{L}(\langle s_1, s_2 \rangle) = \mathcal{L}_1(s_1) \cup \mathcal{L}_2(s_2)$$

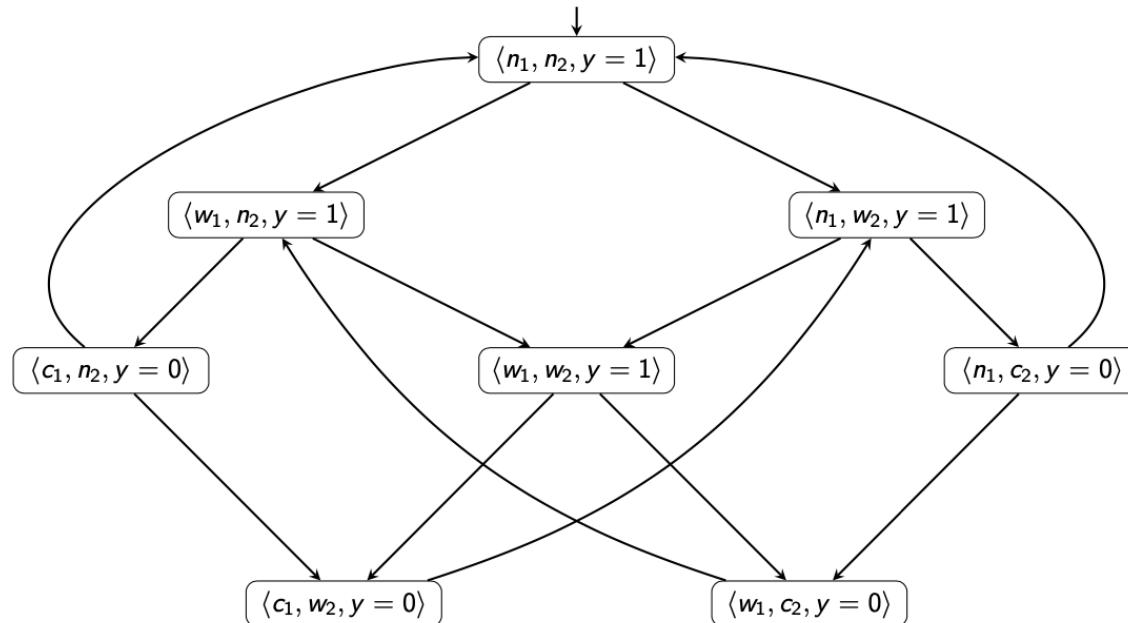
EXCLUSION MUTUELLE BASÉE SUR LES SÉMAPHORES



$y = 0$ signifie "le verrou est actuellement possédé";

$y = 1$ signifie "le verrou est libre"

PRODUIT D'ENTRELACEMENT



$n_i : \text{noncrit}_i, w_i : \text{wait}_i, c_i : \text{crit}_i$

Source typique d'explosion d'état → supposons qu'il y ait 3 composants concurrents

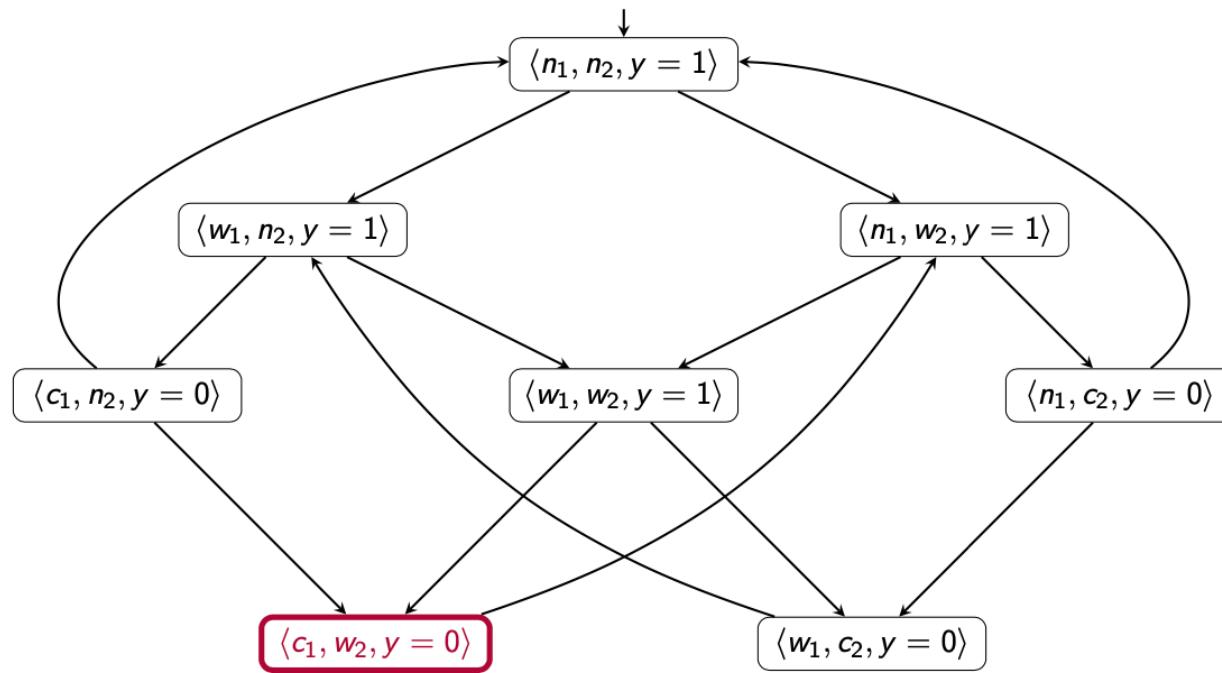
CHEMINS ET ÉTATS ATTEIGNABLES

- Un **fragment de chemin infini** π est une séquence d'états infinie :
$$\pi = s_0 s_1 s_2 \dots \text{ tel que } \forall i \geq 0, s_i \longrightarrow s_{i+1} \in \delta$$
- $Paths(s)$ est l'ensemble des fragments de chemin infinis π avec $first(\pi) = s$
- $Paths(TS) = \bigcup_{s \in I} Paths(s)$ est l'ensemble des fragments de chemin initiaux
- Un état $s \in S$ est dit **accessible** dans TS s'il existe un fragment de chemin initial π tel que

$$\pi = s_0 s_1 \dots s_{n-1} (s_n = s) s_{n+1} \dots \in Paths(TS)$$

- $Reach(TS)$ désigne l'ensemble de tous les états atteignables dans TS

REVENONS À NOTRE EXEMPLE



$Paths(\langle c_1, w_2, y = 0 \rangle) = ?$

$Paths(TS) = ?$

$Reach(TS) = ?$

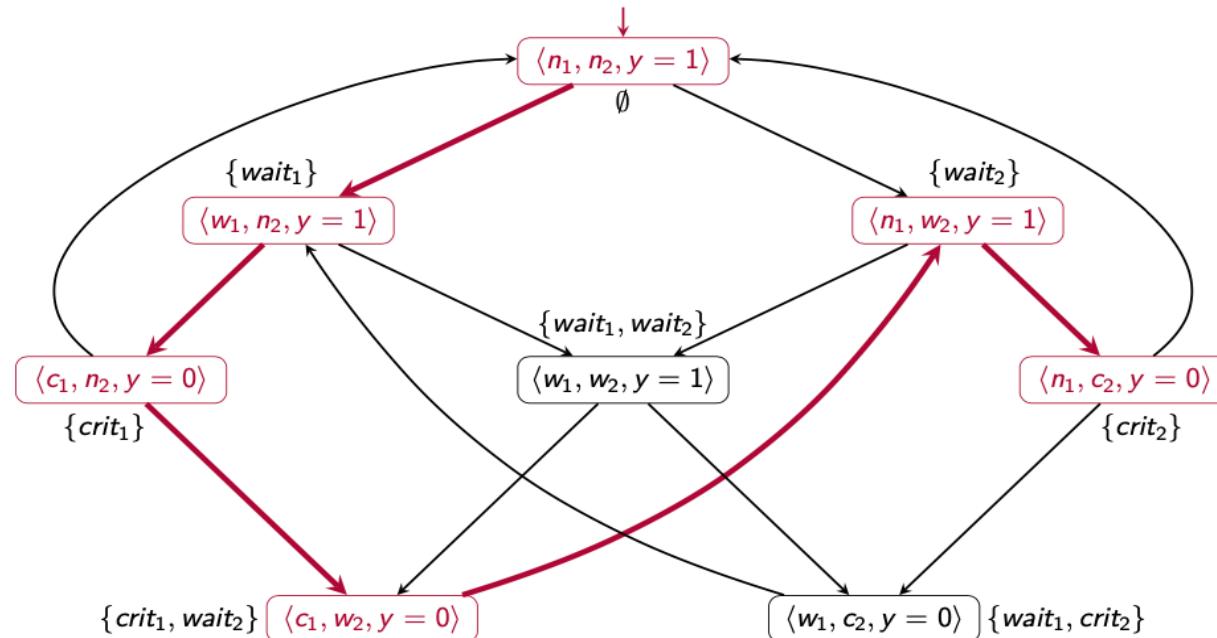
TRACES

- Les états sont observables à travers leurs **propositions atomiques**
- Les **traces** se concentrent uniquement sur l'ensemble des **propositions atomiques qui sont valides** le long du chemin d'exécution
- La trace du chemin $\pi = s_0 s_1 s_2 \dots \in S^\omega$ avec $\mathcal{L} : S \longrightarrow 2^{AP}$
 - $trace(\pi) = \mathcal{L}(s_0) \mathcal{L}(s_1) \mathcal{L}(s_2) \dots \in (2^{AP})^\omega$
- Les traces sont des mots **infinis** sur l'alphabet 2^{AP}
- $trace(\Pi) = \{trace(\pi) | \pi \in \Pi\}, \quad Traces(s) = trace(Paths(s))$

et $Traces(TS) = \bigcup_{s \in I} Traces(s)$

REVENONS À NOTRE EXEMPLE

Soit $AP = \{wait_1, crit_1, wait_2, crit_2\}$



$Trace(\pi \dots) = \emptyset \{wait_1\} \{crit_1\} \{crit_1, wait_2\} \{wait_2\} \{crit_2\} \dots$

MERCI

[Version PDF des slides](#)

[Retour à l'accueil](#) - [Retour au plan](#)