Développement de systèmes critiques avec la méthode B

Les concepts de base de la méthode B

3A Cursus Ingénieurs - Dominante Informatique
CentraleSupelec - Université Paris-Saclay - 2021/2022

Présenté par :

Idir AIT SADOUNE

idir.aitsadoune@centralesupelec.fr

1 Présentation de la méthode B

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

1. Présentation de la méthode B
   - La modélisation avec la méthode B
   - Le preuve d’un modèle B
   - L’Atelier B
2. La logique du 1^{e} ordre et la théorie des ensembles
3. La synthèse

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Pourquoi la méthode B ?

- Notions communes à toute **approche formelle**
  spécification, vérification, preuve

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Pourquoi la méthode B ?

- Notions communes à toute **approche formelle**
  spécification, vérification, preuve
- **Processus de développement** complet
  spécification, raffinement, génération de code

Pourquoi la méthode B ?

- Notions communes à toute **approche formelle**
  spécification, vérification, preuve
- **Processus de développement** complet
  spécification, raffinement, génération de code
- **Outil** et méthode permettant le passage à l'échelle
  composition des spécification, vérification incrémentale ...

Pourquoi la méthode B ?

- Notions communes à toute **approche formelle**
  spécification, vérification, preuve

- **Processus de développement** complet
  spécification, raffinement, génération de code

- **Outil** et méthode permettant le passage à l'échelle
  composition des spécification, vérification incrémentale ...

- **Applications industrielles** et processus métier
  Atelier B, Rodin IDE, ProB, ...

Le développement avec la méthode B

- Le **développement** d'un projet selon la **méthode B** comporte deux activités :

Le développement avec la méthode B

- Le **développement** d'un projet selon la **méthode B** comporte deux activités :
  1. l'écriture de textes formels (la **modélisation**)

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

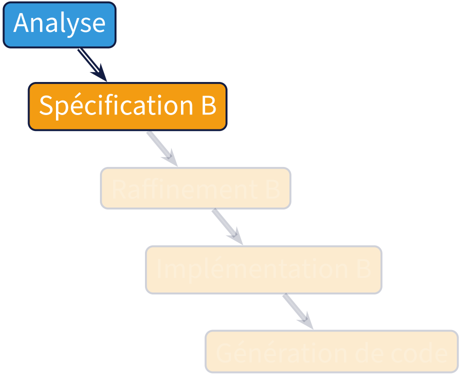
Le développement avec la méthode B

- Le **développement** d'un projet selon la **méthode B** comporte deux activités :
  1. l'écriture de textes formels (la **modélisation**)
  2. la **preuve** de ces mêmes textes

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

La spécification avec la méthode B



Le spécification avec la méthode B

- La modélisation consiste à rédiger des **spécifications formelles** avec un formalisme mathématique de haut niveau.

Le spécification avec la méthode B

- La modélisation consiste à rédiger des **spécifications formelles** avec un formalisme mathématique de haut niveau.
- Une **spécification B** comporte :

Le spécification avec la méthode B

- La modélisation consiste à rédiger des **spécifications formelles** avec un formalisme mathématique de haut niveau.
- Une **spécification B** comporte :
  - **un état** (des données, **des ensembles**, des relations, ...)

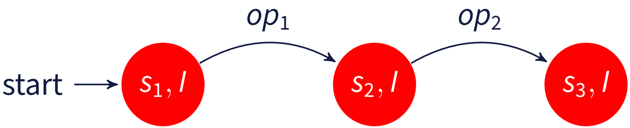
Le spécification avec la méthode B

- La modélisation consiste à rédiger des **spécifications formelles** avec un formalisme mathématique de haut niveau.

- Une **spécification B** comporte :
  - **un état** (des données, **des ensembles**, des relations, ...)
  - des **propriétés invariantes** (**logique** des prédicats **du premier ordre**)

Le spécification avec la méthode B

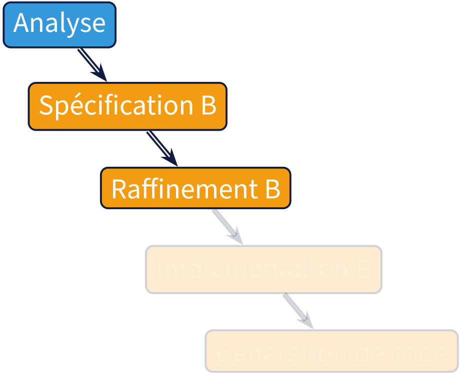
- La modélisation consiste à rédiger des **spécifications formelles** avec un formalisme mathématique de haut niveau.
- Une **spécification B** comporte :
  - **un état** (des données, **des ensembles**, des relations, ...)
  - des **propriétés invariantes** (**logique** des prédicats **du premier ordre**)
  - des services (**initialisation** et **opérations**) pour faire évoluer l'état (**substitutions**)



Exemple

```
MACHINE M₁
CONSTANTS AA, BB
PROPERTIES
  AA ∈ NAT ∧ BB ∈ NAT
VARIABLES aa, bb, cc
INVARIANT
  aa ∈ NAT ∧ bb ∈ NAT ∧ cc ∈ NAT
INITIALISATION
  aa := AA || bb := BB || cc := 0
OPERATIONS
  add =
  CHOICE
    cc := aa + bb
    OR
    cc := (aa + bb) − MAXINT
  END
END
```

Le raffinement d’une spécification B



Le raffinement d’une spécification B

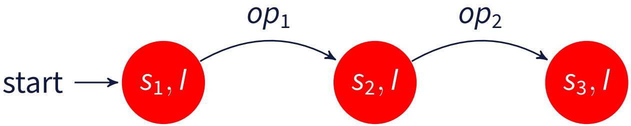
- Le développement d’une spécification abstraite se poursuit par des **étapes successives de raffinement**.

Le raffinement d'une spécification B

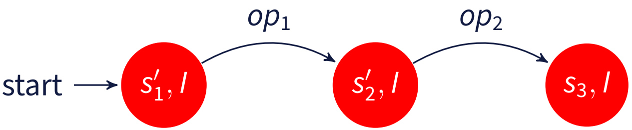
- Le développement d'une spécification abstraite se poursuit par des **étapes successives de raffinement**.
- **Raffiner une spécification** consiste à **l'enrichir** et à **la reformuler** par une autre spécification **plus concrète**.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Le raffinement d'une spécification B

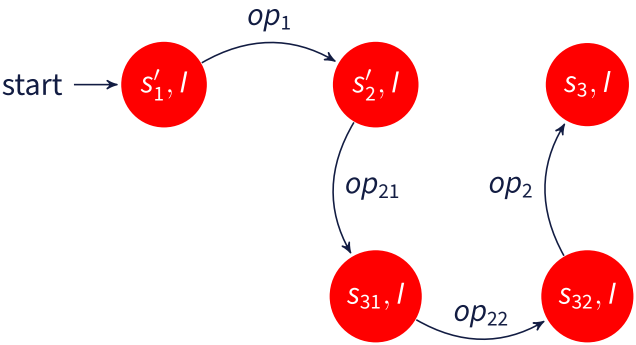


Le raffinement d'une spécification B



Raffinement des données (états)

Le raffinement d'une spécification B

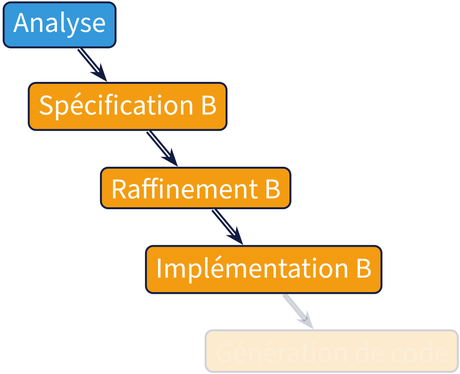


Raffinement du comportement (opérations)

Exemple

```
REFINEMENT M1_r
REFINES M1
VARIABLES aa, bb, cc
INITIALISATION
  aa := AA || bb := BB || cc := 0
OPERATIONS
  add =
  BEGIN
    cc :(
      ((aa+bb ≤ MAXINT) ∧ (cc = aa+bb)) ∨
      ((aa+bb > MAXINT) ∧ (cc = aa+bb−MAXINT))
    )
  END
END
```

L'implémentation d'une spécification B



L’implémentation d’une spécification B

- L’implémentation est le **dernier niveau de raffinement** d’une spécification B.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

L'implémentation d'une spécification B

- L'implémentation est le **dernier niveau de raffinement** d'une spécification B.
- L'implémentation est une spécification qui ne manipule que **des définitions** ayant un **équivalent dans un langage informatique**.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

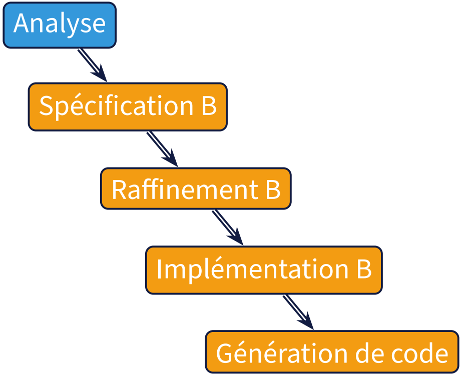
L’implémentation d’une spécification B

- L’implémentation est le **dernier niveau de raffinement** d’une spécification B.
- L’implémentation est une spécification qui ne manipule que **des définitions** ayant un **équivalent dans un langage informatique**.
- Les définitions de l’implémentation constituent **un langage de programmation informatique** similaire à un langage impératif.

Exemple

```
IMPLEMENTATION M1_i
REFINES M1_r
VALUES
  AA = 40 ; BB = 85
CONCRETE_VARIABLES aa, bb, cc
INITIALISATION
  aa := AA ; bb := BB ; cc := 0
OPERATIONS
  add =
  VAR ss IN
    ss := aa + bb;
    IF (ss ≤ MAXINT) THEN
      cc := ss
    ELSE
      cc := ss − MAXINT
    END
  END
END
```

La génération de code avec la méthode B



La génération de code avec la méthode B

- **Une implémentation** peut **s'exécuter** après fabrication d'un exécutable :

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

La génération de code avec la méthode B

- **Une implémentation** peut **s'exécuter** après fabrication d'un exécutable :
  - soit à l'aide d'un compilateur dédié

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

La génération de code avec la méthode B

- **Une implémentation** peut **s'exécuter** après fabrication d'un exécutable :
    - soit à l'aide d'un compilateur dédié
    - soit en passant par une étape de génération de code (**Ada**, **C** ou **Java**).

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemple

```c
#define M1__AA 40
#define M1__BB 85

static int32_t M1__aa;
static int32_t M1__bb;
static int32_t M1__cc;

void M1__INITIALISATION(void)
{
    M1__aa = M1__AA;
    M1__bb = M1__BB;
    M1__cc = 0;
}
```

```c
void M1__add(void)
{
    int32_t ss;
    ss = M1__aa+M1__bb;
    if(((ss) <= (2147483647)))
    {
        M1__cc = ss;
    }
    else
    {
        M1__cc = (ss-2147483647);
    }
}
```

Le preuve d’un modèle B

- L’activité de **preuve en B** consiste à réaliser un certain nombre de **démonstrations** pour vérifier la **consistance d’une spécification B**.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Le preuve d'un modèle B

- L'activité de **preuve en B** consiste à réaliser un certain nombre de **démonstrations** pour vérifier la **consistance d'une spécification B**.
- **Les assertions** à démontrer (**obligations de preuve - OP**) expriment les propriétés suivantes :

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Le preuve d'un modèle B

- L'activité de **preuve en B** consiste à réaliser un certain nombre de **démonstrations** pour vérifier la **consistance d'une spécification B**.
- **Les assertions** à démontrer (**obligations de preuve - OP**) expriment les propriétés suivantes :
    - l'appel d'une opération **conserve** les propriétés **invariantes**.

Le preuve d'un modèle B

- L'activité de **preuve en B** consiste à réaliser un certain nombre de **démonstrations** pour vérifier la **consistance d'une spécification B**.
- **Les assertions** à démontrer (**obligations de preuve - OP**) expriment les propriétés suivantes :
  - l'appel d'une opération **conserve** les propriétés **invariantes**.
  - le raffinement constitue une **reformulation valide** de la spécification.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Le preuve d'un modèle B

- L'activité de **preuve en B** consiste à réaliser un certain nombre de **démonstrations** pour vérifier la **consistance d'une spécification B**.
- **Les assertions** à démontrer (**obligations de preuve - OP**) expriment les propriétés suivantes :
  - l'appel d'une opération **conserve** les propriétés **invariantes**.
  - le raffinement constitue une **reformulation valide** de la spécification.
  - le **code généré conforme** à la spécification initiale.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les OP de préservation de l'invariant

```
MACHINE M₁
CONSTANTS AA, BB
PROPERTIES
  AA ∈ NAT ∧ BB ∈ NAT
VARIABLES aa, bb, cc
INVARIANT
  aa ∈ NAT ∧ bb ∈ NAT ∧ cc ∈ NAT
INITIALISATION
  aa := AA || bb := BB || cc := 0
OPERATIONS
  add =
  CHOICE
    cc := aa + bb
    OR
    cc := (aa + bb) − MAXINT
  END
END
```

Préservation de l'invariant par add

```
NAT = 0..MAXINT ∧
aa ∈ NAT ∧ bb ∈ NAT ∧ cc ∈ NAT
⇒
NAT = 0..MAXINT ∧
aa ∈ NAT ∧ bb ∈ NAT ∧ cc ∈ NAT
[cc = aa + bb ∨ cc = aa + bb - MAXINT]
```

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les OP de préservation de l'invariant

```
MACHINE M₁
CONSTANTS AA, BB
PROPERTIES
  AA ∈ NAT ∧ BB ∈ NAT
VARIABLES aa, bb, cc
INVARIANT
  aa ∈ NAT ∧ bb ∈ NAT ∧ cc ∈ NAT
INITIALISATION
  aa := AA || bb := BB || cc := 0
OPERATIONS
  add =
  CHOICE
    cc := aa + bb
    OR
    cc := (aa + bb) − MAXINT
  END
END
```

Préservation de l'invariant par add

$$\mathtt{NAT} = 0..\mathtt{MAXINT}\ \wedge$$
$$\mathtt{aa} \in \mathtt{NAT} \wedge \mathtt{bb} \in \mathtt{NAT} \wedge \mathtt{cc} \in \mathtt{NAT}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathtt{NAT} = 0..\mathtt{MAXINT}\ \wedge$$
$$\mathtt{aa} \in \mathtt{NAT} \wedge \mathtt{bb} \in \mathtt{NAT}\ \wedge$$
$$(\mathtt{aa} + \mathtt{bb} \in \mathtt{NAT} \vee \mathtt{aa} + \mathtt{bb} - \mathtt{MAXINT} \in \mathtt{NAT})$$

Les OP de reformulation valide

```
REFINEMENT M1_r
REFINES M1
VARIABLES aa, bb, cc
INITIALISATION
  aa := AA || bb := BB || cc := 0
OPERATIONS
  add =
  BEGIN
    cc :(
      ((aa+bb ≤ MAXINT) ∧
      (cc = aa+bb))
      ∨
      ((aa+bb > MAXINT) ∧
      (cc = aa+bb−MAXINT))
    )
  END
END
```

Reformulation valide de add

$$(aa+bb \leq MAXINT \wedge cc = aa+bb) \vee$$
$$(aa+bb > MAXINT \wedge cc = aa+bb-MAXINT)$$
$$\Rightarrow$$
$$(cc = aa+bb \vee cc = aa+bb-MAXINT)$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les OP de reformulation valide

```
IMPLEMENTATION M1_i
REFINES M1_r
VALUES
  AA = 40 ; BB = 85
CONCRETE_VARIABLES aa, bb, cc
INITIALISATION
  aa := AA ; bb := BB ; cc := 0
OPERATIONS
  add =
  VAR ss IN
    ss := aa + bb;
    IF (ss ≤ MAXINT) THEN
      cc := ss
    ELSE
      cc := ss − MAXINT
    END
  END
END
```

Reformulation valide de add

$$\mathtt{ss} = \mathtt{aa+bb} \wedge \mathtt{ss} \leq \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc} = \mathtt{ss}$$

$$\Rightarrow$$

$$(\mathtt{aa+bb} \leq \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc} = \mathtt{aa+bb}) \vee$$

$$(\mathtt{aa+bb} > \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc} = \mathtt{aa+bb-MAXINT})$$

Les OP de reformulation valide

```
IMPLEMENTATION M1_i
REFINES M1_r
VALUES
  AA = 40 ; BB = 85
CONCRETE_VARIABLES aa, bb, cc
INITIALISATION
  aa := AA ; bb := BB ; cc := 0
OPERATIONS
  add =
  VAR ss IN
    ss := aa + bb;
    IF (ss ≤ MAXINT) THEN
      cc := ss
    ELSE
      cc := ss − MAXINT
    END
  END
END
```

Reformulation valide de add

$$\mathtt{ss = aa{+}bb} \wedge \mathtt{ss} \leq \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = ss}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\mathtt{aa{+}bb} \leq \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = aa{+}bb}) \vee$$
$$(\mathtt{aa{+}bb} > \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = aa{+}bb{-}MAXINT})$$

$$\mathtt{ss = aa{+}bb} \wedge \mathtt{ss} > \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = ss{-}MAXINT}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\mathtt{aa{+}bb} \leq \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = aa{+}bb}) \vee$$
$$(\mathtt{aa{+}bb} > \mathtt{MAXINT} \wedge \mathtt{cc = aa{+}bb{-}MAXINT})$$

Les obligations de preuve

- La **génération des obligations de preuve** est complètement automatique.

Les obligations de preuve

- La **génération des obligations de preuve** est complètement automatique.
- La **démonstration** des obligations de preuve peut être :

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

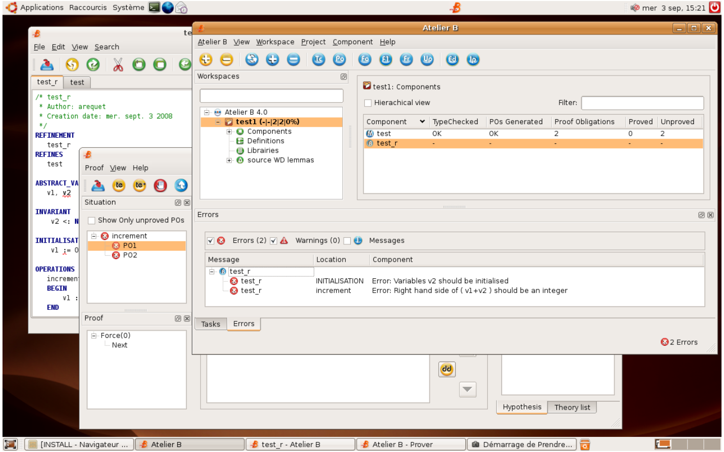
Les obligations de preuve

- La **génération des obligations de preuve** est complètement automatique.
- La **démonstration** des obligations de preuve peut être :
  - ➜ **automatique** (démonstrateurs de l'Atelier B).

Les obligations de preuve

- La **génération des obligations de preuve** est complètement automatique.
- La **démonstration** des obligations de preuve peut être :
  - ➜ **automatique** (démonstrateurs de l'Atelier B).
  - ➜ **semi-automatique** (démonstrateur interactif de l'Atelier B).

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY



Lien de téléchargement

Les services de l’Atelier B

- Gestionnaire de projets

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B
- Vérificateur de la cohérence des types

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B
- Vérificateur de la cohérence des types
- Générateur d'obligations de preuve

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B
- Vérificateur de la cohérence des types
- Générateur d'obligations de preuve
- Démonstrateur automatique

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B
- Vérificateur de la cohérence des types
- Générateur d'obligations de preuve
- Démonstrateur automatique
- Démonstrateur interactif

Les services de l'Atelier B

- Gestionnaire de projets
- Analyseur de la syntaxe des modèles B
- Vérificateur de la cohérence des types
- Générateur d'obligations de preuve
- Démonstrateur automatique
- Démonstrateur interactif
- Générateur de code (C et Ada)

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Définition

Les expressions logiques dénotent des prédicats qui ont une interprétation dans le domaine des valeurs de vérité : `btrue` et `bfalse`.

Exemples

$$x = y$$

Exemples

$$\begin{aligned} x &= y \\ x+3 &> y-2 \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} x &= y \\ x+3 &> y-2 \\ f(x) &\leq \pi \end{aligned}$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned} x &= y \\ x+3 &> y-2 \\ f(x) &\leq \pi \\ \text{FALSE} &\neq \text{TRUE} \end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Symbole	Signification	Définition
$\wedge$	et logique	

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Symbole	Signification	Définition
$\wedge$	et logique	
$\neg$	négation	

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Symbole	Signification	Définition
$\wedge$	et logique	
$\neg$	négation	
$\vee$	ou logique	$a \vee b \overset{def}{=} \neg(\neg a \wedge \neg b)$

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Symbole	Signification	Définition
$\wedge$	et logique	
$\neg$	négation	
$\vee$	ou logique	$a \vee b \overset{def}{=} \neg(\neg a \wedge \neg b)$
$\Rightarrow$	implication	$a \Rightarrow b \overset{def}{=} \neg a \vee b$

Les connecteurs logiques

Les opérateurs permettant de combiner des prédicats sont les connecteurs usuels de la logique :

Symbole	Signification	Définition
$\wedge$	et logique	
$\neg$	négation	
$\vee$	ou logique	$a \vee b \overset{def}{=} \neg(\neg a \wedge \neg b)$
$\Rightarrow$	implication	$a \Rightarrow b \overset{def}{=} \neg a \vee b$
$\Leftrightarrow$	équivalence	$a \Leftrightarrow b \overset{def}{=} (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$x = y \quad \wedge \quad x > 0$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned} x = y \quad &\wedge \quad x > 0 \\ x = y \wedge x > 0 \quad &\Rightarrow \quad y > 0 \end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{array}{rcl}
x = y & \wedge & x > 0 \\
x = y \wedge x > 0 & \Rightarrow & y > 0 \\
x \in \mathbb{N} & \Leftrightarrow & x \in 0..MAXINT
\end{array}
$$

Les quantificateurs

On peut quantifier les prédicats par les quantificateurs universel et existentiel :

Les quantificateurs

On peut quantifier les prédicats par les quantificateurs universel et existentiel :

Symbole	Signification	Syntaxe
$\forall$	pour tout	$\forall\, \mathit{Id\_liste} \cdot (\mathit{Predicat} \Rightarrow \mathit{Predicat})$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les quantificateurs

On peut quantifier les prédicats par les quantificateurs universel et existentiel :

Symbole	Signification	Syntaxe
$\forall$	pour tout	$\forall\, Id\_liste \cdot (Predicat \Rightarrow Predicat)$
$\exists$	il existe	$\exists\, Id\_liste \cdot (Predicat)$

Les quantificateurs

On peut quantifier les prédicats par les quantificateurs universel et existentiel :

Symbole	Signification	Syntaxe
$\forall$	pour tout	$\forall\ Id\_liste \cdot (Predicat \Rightarrow Predicat)$
$\exists$	il existe	$\exists\ Id\_liste \cdot (Predicat)$

$$\exists x \cdot (P) \stackrel{def}{=} \neg\forall x \cdot (\neg P)$$

Exemples

$$\forall n.(n \in \{0, 1\} \Rightarrow \mathit{factorial}(n) = 1)$$

Exemples

$$\forall n.(n \in \{0, 1\} \Rightarrow factorial(n) = 1)$$
$$\forall n.(n \in \mathbb{N} \land n > 1 \Rightarrow factorial(n) = n \times factorial(n - 1))$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\forall n.(n \in \{0, 1\} \Rightarrow \mathit{factorial}(n) = 1)$$
$$\forall n.(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \Rightarrow \mathit{factorial}(n) = n \times \mathit{factorial}(n - 1))$$
$$\exists x.(x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + 4 \times x + 4 = 0)$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Construction d’ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d’éléments, des produits cartésiens d’ensembles, ou des parties d’un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$\mathit{Ensemble} \times \mathit{Ensemble}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$\mathit{Ensemble} \times \mathit{Ensemble}$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{\mathit{Expression\_liste}\}$

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$Ensemble \times Ensemble$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{Expression\_liste\}$
$\{x \mid P\}$	ensembles définis en compréhension	$\{Id\_liste \mid Predicat\}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$\mathit{Ensemble} \times \mathit{Ensemble}$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{\mathit{Expression\_liste}\}$
$\{x \mid P\}$	ensembles définis en compréhension	$\{\mathit{Id\_liste} \mid \mathit{Predicat}\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des sous-ensembles	$\mathbb{P}(\mathit{Ensemble})$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$Ensemble \times Ensemble$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{Expression\_liste\}$
$\{x \mid P\}$	ensembles définis en compréhension	$\{Id\_liste \mid Predicat\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des sous-ensembles	$\mathbb{P}(Ensemble)$
$\mathbb{P}_1$	ensemble des sous-ensembles non vides	$\mathbb{P}_1(Ensemble)$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Construction d'ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d'éléments, des produits cartésiens d'ensembles, ou des parties d'un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$Ensemble \times Ensemble$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{Expression\_liste\}$
$\{x \mid P\}$	ensembles définis en compréhension	$\{Id\_liste \mid Predicat\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des sous-ensembles	$\mathbb{P}(Ensemble)$
$\mathbb{P}_1$	ensemble des sous-ensembles non vides	$\mathbb{P}_1(Ensemble)$
$\mathbb{F}$	ensemble des sous-ensembles finis	$\mathbb{F}(Ensemble)$

Construction d’ensembles

Les ensembles peuvent être des ensembles d’éléments, des produits cartésiens d’ensembles, ou des parties d’un ensemble.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\varnothing$	ensemble vide	
$\times$	produit cartésien	$Ensemble \times Ensemble$
$\{x_1, x_2, \ldots\}$	ensembles définis en extension	$\{Expression\_liste\}$
$\{x \mid P\}$	ensembles définis en compréhension	$\{Id\_liste \mid Predicat\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des sous-ensembles	$\mathbb{P}(Ensemble)$
$\mathbb{P}_1$	ensemble des sous-ensembles non vides	$\mathbb{P}_1(Ensemble)$
$\mathbb{F}$	ensemble des sous-ensembles finis	$\mathbb{F}(Ensemble)$
$\mathbb{F}_1$	ensemble des sous-ensembles finis non vides	$\mathbb{F}_1(Ensemble)$

Exemples

$X = \{1, 2, 3\}$ et $Y = \{4, 5\}$

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$

$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$
$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$
$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$
$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{F}(X)$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$
$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{F}(X)$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \mathbb{F}_1(X)$$

Exemples

$$X = \{1, 2, 3\} \text{ et } Y = \{4, 5\}$$
$$X \times Y = \{(1 \mapsto 4), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 4), (2 \mapsto 5), (3 \mapsto 4), (3 \mapsto 5)\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{F}(X)$$
$$\mathbb{P}_1(X) = \mathbb{F}_1(X)$$
$$\{x | x \in X \wedge x\ mod\ 2 = 1\} = \{1, 3\}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	
$\notin$	n'appartient pas à	$x \notin s \stackrel{def}{=} \neg(x \in s)$

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	
$\notin$	n'appartient pas à	$x \notin s \stackrel{def}{=} \neg(x \in s)$
$\subseteq$	est inclus dans	$s \subseteq t \stackrel{def}{=} s \in \mathbb{P}(t)$

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	
$\notin$	n'appartient pas à	$x \notin s \stackrel{def}{=} \neg(x \in s)$
$\subseteq$	est inclus dans	$s \subseteq t \stackrel{def}{=} s \in \mathbb{P}(t)$
$\not\subseteq$	n'est pas inclus dans	$s \not\subseteq t \stackrel{def}{=} \neg(s \subseteq t))$

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	
$\notin$	n'appartient pas à	$x \notin s \stackrel{def}{=} \neg(x \in s)$
$\subseteq$	est inclus dans	$s \subseteq t \stackrel{def}{=} s \in \mathbb{P}(t)$
$\not\subseteq$	n'est pas inclus dans	$s \not\subseteq t \stackrel{def}{=} \neg(s \subseteq t))$
$\subset$	est strictement inclus dans	$s \subset t \stackrel{def}{=} (s \subseteq t \wedge s \neq t)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Prédicats sur les ensembles

Symbole	Signification	Syntaxe
$\in$	appartient à	
$\notin$	n'appartient pas à	$x \notin s \overset{def}{=} \neg(x \in s)$
$\subseteq$	est inclus dans	$s \subseteq t \overset{def}{=} s \in \mathbb{P}(t)$
$\not\subseteq$	n'est pas inclus dans	$s \not\subseteq t \overset{def}{=} \neg(s \subseteq t))$
$\subset$	est strictement inclus dans	$s \subset t \overset{def}{=} (s \subseteq t \wedge s \neq t)$
$\not\subset$	n'est pas strictement inclus dans	$s \not\subset t \overset{def}{=} \neg(s \subset t)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$: $\quad x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$: $x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$

Le produit cartésien assiciatif à gauche : $E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$: $x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$

Le produit cartésien assiciatif à gauche : $E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$

L'inclusion : $s \in \mathbb{P}(t) \Leftrightarrow \forall x \cdot (x \in s \Rightarrow x \in t)$

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$:	$x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$
Le produit cartésien assiciatif à gauche :	$E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$
L'inclusion :	$s \in \mathbb{P}(t) \Leftrightarrow \forall x \cdot (x \in s \Rightarrow x \in t)$
L'égalité des ensembles :	$\forall x \cdot (x \in s \Leftrightarrow x \in t) \Leftrightarrow s = t$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$:	$x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$
Le produit cartésien assiciatif à gauche :	$E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$
L'inclusion :	$s \in \mathbb{P}(t) \Leftrightarrow \forall x \cdot (x \in s \Rightarrow x \in t)$
L'égalité des ensembles :	$\forall x \cdot (x \in s \Leftrightarrow x \in t) \Leftrightarrow s = t$
La réflexivité de l'inclusion :	$s \subseteq s$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire ($x \mapsto y$) :	$x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$
Le produit cartésien assiciatif à gauche :	$E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$
L'inclusion :	$s \in \mathbb{P}(t) \Leftrightarrow \forall x \cdot (x \in s \Rightarrow x \in t)$
L'égalité des ensembles :	$\forall x \cdot (x \in s \Leftrightarrow x \in t) \Leftrightarrow s = t$
La réflexivité de l'inclusion :	$s \subseteq s$
La transitivité de l'inclusion :	$s \subseteq t \wedge t \subseteq u \Rightarrow s \subseteq u$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques axioms ...

Définition d'une paire $(x \mapsto y)$:	$x, y \in E_1 \times E_2 \Leftrightarrow (x \in E_1 \wedge y \in E_2)$
Le produit cartésien assiciatif à gauche :	$E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3$
L'inclusion :	$s \in \mathbb{P}(t) \Leftrightarrow \forall x \cdot (x \in s \Rightarrow x \in t)$
L'égalité des ensembles :	$\forall x \cdot (x \in s \Leftrightarrow x \in t) \Leftrightarrow s = t$
La réflexivité de l'inclusion :	$s \subseteq s$
La transitivité de l'inclusion :	$s \subseteq t \wedge t \subseteq u \Rightarrow s \subseteq u$
L'anti-symétrie de l'inclusion :	$s \subseteq t \wedge t \subseteq s \Rightarrow s = t$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Expressions d'ensembles I

On suppose comme hypothèses : $s_1 \subseteq t \wedge s_2 \subseteq t$

Expressions d'ensembles I

On suppose comme hypothèses : $s_1 \subseteq t \land s_2 \subseteq t$

Symbole	Signification	Syntaxe
$\cup$	union	$s_1 \cup s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \land (x \in s_1 \lor x \in s_2)\}$

Expressions d'ensembles I

On suppose comme hypothèses : $s_1 \subseteq t \wedge s_2 \subseteq t$

Symbole	Signification	Syntaxe
$\cup$	union	$s_1 \cup s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \wedge (x \in s_1 \vee x \in s_2)\}$
$\cap$	intersection	$s_1 \cap s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \wedge (x \in s_1 \wedge x \in s_2)\}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Expressions d'ensembles I

On suppose comme hypothèses : $s_1 \subseteq t \land s_2 \subseteq t$

Symbole	Signification	Syntaxe
$\cup$	union	$s_1 \cup s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \land (x \in s_1 \lor x \in s_2)\}$
$\cap$	intersection	$s_1 \cap s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \land (x \in s_1 \land x \in s_2)\}$
$-$	différence	$s_1 - s_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in t \land (x \in s_1 \land x \notin s_2)\}$

Expressions d'ensembles II

Symbole	Signification	Syntaxe
union	union généralisée	*union*(*Ensemble*)

Expressions d'ensembles II

Symbole	Signification	Syntaxe
union	union généralisée	*union*(*Ensemble*)
inter	intersection généralisée	*inter*(*Ensemble*)

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Expressions d'ensembles II

Symbole	Signification	Syntaxe
union	union généralisée	$union(Ensemble)$
inter	intersection généralisée	$inter(Ensemble)$
$\bigcup$	union quantifiée	$\bigcup Id\_liste \cdot (Predicat \mid Ensemble)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Expressions d'ensembles II

Symbole	Signification	Syntaxe
union	union généralisée	*union*(*Ensemble*)
inter	intersection généralisée	*inter*(*Ensemble*)
$\bigcup$	union quantifiée	$\bigcup$ *Id_liste* · (*Predicat*|*Ensemble*)
$\bigcap$	intersection quantifiée	$\bigcap$ *Id_liste* · (*Predicat*|*Ensemble*)

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\mathit{union}(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) \quad = \{1,2,3,4,5\}$$

Exemples

$$\begin{aligned} union(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{1,2,3,4,5\} \\ inter(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{2\} \end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
union(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{1,2,3,4,5\}\\
inter(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{2\}\\
\bigcup x \cdot (x \in \{2,4\} | \{y | y \in \mathbb{N} \wedge x - 1 \leq y \leq x + 1\}) &= \{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
union(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{1,2,3,4,5\}\\
inter(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{2,4,5\}\}) &= \{2\}\\
\bigcup x\cdot(x\in\{2,4\}|\{y|y\in\mathbb{N}\wedge x-1\leq y\leq x+1\}) &= \{1,2,3\}\cup\{3,4,5\}\\
&= \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

Relations

Les relations sont un cas particulier de construction d'ensembles.
Il s'agit d'ensembles de couples d'éléments.

Relations

Les relations sont un cas particulier de construction d'ensembles.
Il s'agit d'ensembles de couples d'éléments.

Symbole	Signification	Syntaxe
$\leftrightarrow$	relation entre deux ensembles	$E_1 \leftrightarrow E_2 \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(E_1 \times E_2)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques définitions

Quelques définitions

Condition	Expression	Définition
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2$	$dom(r)$	$\{x \mid x \in E_1 \land \exists y \cdot (y \in E_2 \land (x \mapsto y) \in r)\}$

Quelques définitions

Condition	Expression	Définition
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2$	$dom(r)$	$\{x \mid x \in E_1 \land \exists y \cdot (y \in E_2 \land (x \mapsto y) \in r)\}$
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2$	$ran(r)$	$\{y \mid y \in E_2 \land \exists x \cdot (x \in E_1 \land (x \mapsto y) \in r)\}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Quelques définitions

Condition	Expression	Définition
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2$	$dom(r)$	$\{x \mid x \in E_1 \land \exists y \cdot (y \in E_2 \land (x \mapsto y) \in r)\}$
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2$	$ran(r)$	$\{y \mid y \in E_2 \land \exists x \cdot (x \in E_1 \land (x \mapsto y) \in r)\}$
$r \in E_1 \leftrightarrow E_2 \land F \subseteq E_1$	$r[F]$	$\{y \mid y \in E_2 \land \exists x \cdot (x \in F \land (x \mapsto y) \in r)\}$

Remarque

Les opérations sur les ensembles s'appliquent évidemment aux relations (qui sont des ensembles de couples).

Les opérations sur les relations

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$
$;$	composition séquentielle	$Relation ; Relation$

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$
$;$	composition séquentielle	$Relation ; Relation$
$\otimes$	produit direct	$Relation \otimes Relation$

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$
$;$	composition séquentielle	$Relation; Relation$
$\otimes$	produit direct	$Relation \otimes Relation$
$\|\|$	produit parallèle	$Relation\|\|Relation$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$
$;$	composition séquentielle	$Relation; Relation$
$\otimes$	produit direct	$Relation \otimes Relation$
$\vert\vert$	produit parallèle	$Relation\vert\vert Relation$
prj_1	première projection	$prj_1(Ensemble, Ensemble)$

Les opérations sur les relations

Symbole	Signification	Syntaxe
id	relation identité	$id(Ensemble)$
$^{-1}$	inverse d'une relation	$Relation^{-1}$
;	composition séquentielle	$Relation; Relation$
$\otimes$	produit direct	$Relation \otimes Relation$
$\vert\vert$	produit parallèle	$Relation\vert\vert Relation$
prj_1	première projection	$prj_1(Ensemble, Ensemble)$
prj_2	deuxième projection	$prj_2(Ensemble, Ensemble)$

Exemples

$$id(\{1, 2, 3\}) \quad = \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\}$$

Exemples

$$\begin{aligned} id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\ R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \end{aligned}$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\}
\end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\} \\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\} \\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\} \\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)), (2 \mapsto (5 \mapsto -1)), (2 \mapsto (7 \mapsto -1))\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1),(2 \mapsto 2),(3 \mapsto 3)\}\\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2),(1 \mapsto 5),(2 \mapsto 5),(2 \mapsto 7)\}\\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0),(5 \mapsto 1),(5 \mapsto 2),(7 \mapsto 2)\}\\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0),(2 \mapsto -1),(5 \mapsto 8),(6 \mapsto 9)\}\\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1),(1 \mapsto 8),(2 \mapsto 8)\}\\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)),(2 \mapsto (5 \mapsto -1)),(2 \mapsto (7 \mapsto -1))\}\\
R_3 &= \{(4 \mapsto 5),(3 \mapsto 2)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\} \\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\} \\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)), (2 \mapsto (5 \mapsto -1)), (2 \mapsto (7 \mapsto -1))\} \\
R_3 &= \{(4 \mapsto 5), (3 \mapsto 2)\} \\
R_4 &= \{(11 \mapsto 12), (21 \mapsto 22)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\} \\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\} \\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)), (2 \mapsto (5 \mapsto -1)), (2 \mapsto (7 \mapsto -1))\} \\
R_3 &= \{(4 \mapsto 5), (3 \mapsto 2)\} \\
R_4 &= \{(11 \mapsto 12), (21 \mapsto 22)\} \\
R_3 || R_4 &= \{((4 \mapsto 11) \mapsto (5 \mapsto 12)), ((4 \mapsto 21) \mapsto (5 \mapsto 22)), \\
&((3 \mapsto 11) \mapsto (2 \mapsto 12)), ((3 \mapsto 21) \mapsto (2 \mapsto 22))\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\}\\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\}\\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\}\\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\}\\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\}\\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)), (2 \mapsto (5 \mapsto -1)), (2 \mapsto (7 \mapsto -1))\}\\
R_3 &= \{(4 \mapsto 5), (3 \mapsto 2)\}\\
R_4 &= \{(11 \mapsto 12), (21 \mapsto 22)\}\\
R_3 || R_4 &= \{((4 \mapsto 11) \mapsto (5 \mapsto 12)), ((4 \mapsto 21) \mapsto (5 \mapsto 22)),\\
& \quad ((3 \mapsto 11) \mapsto (2 \mapsto 12)), ((3 \mapsto 21) \mapsto (2 \mapsto 22))\}\\
prj_1(\{1,2\},\{3,4\}) &= \{((1 \mapsto 3) \mapsto 1), ((1 \mapsto 4) \mapsto 1), ((2 \mapsto 3) \mapsto 2), ((2 \mapsto 4) \mapsto 2)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
id(\{1,2,3\}) &= \{(1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2), (3 \mapsto 3)\} \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5), (2 \mapsto 7)\} \\
R_1^{-1} &= \{(2 \mapsto 0), (5 \mapsto 1), (5 \mapsto 2), (7 \mapsto 2)\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto 0), (2 \mapsto -1), (5 \mapsto 8), (6 \mapsto 9)\} \\
R_1 ; R_2 &= \{(0 \mapsto -1), (1 \mapsto 8), (2 \mapsto 8)\} \\
R_1 \otimes R_2 &= \{(0 \mapsto (2 \mapsto 0)), (2 \mapsto (5 \mapsto -1)), (2 \mapsto (7 \mapsto -1))\} \\
R_3 &= \{(4 \mapsto 5), (3 \mapsto 2)\} \\
R_4 &= \{(11 \mapsto 12), (21 \mapsto 22)\} \\
R_3 || R_4 &= \{((4 \mapsto 11) \mapsto (5 \mapsto 12)), ((4 \mapsto 21) \mapsto (5 \mapsto 22)), \\
& ((3 \mapsto 11) \mapsto (2 \mapsto 12)), ((3 \mapsto 21) \mapsto (2 \mapsto 22))\} \\
prj_1(\{1,2\},\{3,4\}) &= \{((1 \mapsto 3) \mapsto 1), ((1 \mapsto 4) \mapsto 1), ((2 \mapsto 3) \mapsto 2), ((2 \mapsto 4) \mapsto 2)\} \\
prj_2(\{1,2\},\{3,4\}) &= \{((1 \mapsto 3) \mapsto 3), ((1 \mapsto 4) \mapsto 4), ((2 \mapsto 3) \mapsto 3), ((2 \mapsto 4) \mapsto 4)\}
\end{aligned}
$$

Les Itérations

Dans le tableau suivant, on a $r \in s \leftrightarrow s$

Les Itérations

Dans le tableau suivant, on a $r \in s \leftrightarrow s$

Symbole	Signification	Syntaxe
r^n	itération n fois de r	$r^n \stackrel{def}{=} r; r^{n-1}$ si $n > 0$ $r^0 \stackrel{def}{=} id(s)$

Les Itérations

Dans le tableau suivant, on a $r \in s \leftrightarrow s$

Symbole	Signification	Syntaxe
r^n	itération n fois de r	$r^n \stackrel{def}{=} r; r^{n-1}\ si\ n > 0$ $r^0 \stackrel{def}{=} id(s)$
r^+	fermeture transitive	$r^+ \stackrel{def}{=} \bigcup n \cdot (n \in \mathbb{N}_1 \mid r^n)$

Les Itérations

Dans le tableau suivant, on a $r \in s \leftrightarrow s$

Symbole	Signification	Syntaxe
r^n	itération n fois de r	$r^n \stackrel{def}{=} r; r^{n-1}$ $si\ n > 0$ $r^0 \stackrel{def}{=} id(s)$
r^+	fermeture transitive	$r^+ \stackrel{def}{=} \bigcup n \cdot (n \in \mathbb{N}_1 \mid r^n)$
r^*	fermeture réflexive transitive	$r^* \stackrel{def}{=} \bigcup n \cdot (n \in \mathbb{N} \mid r^n)$

Exemples

$$R = \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (2 \mapsto 1)\}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (2 \mapsto 1)\} \\
R^2 &= \{(0 \mapsto 1), (1 \mapsto 2), (2 \mapsto 0)\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
R &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (2 \mapsto 1)\} \\
R^2 &= \{(0 \mapsto 1), (1 \mapsto 2), (2 \mapsto 0)\} \\
R^3 &= \{(0 \mapsto 0), (1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2)\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université
PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
R &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (2 \mapsto 1)\} \\
R^2 &= \{(0 \mapsto 1), (1 \mapsto 2), (2 \mapsto 0)\} \\
R^3 &= \{(0 \mapsto 0), (1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2)\} \\
R^4 &= R
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
R &= \{(0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (2 \mapsto 1)\} \\
R^2 &= \{(0 \mapsto 1), (1 \mapsto 2), (2 \mapsto 0)\} \\
R^3 &= \{(0 \mapsto 0), (1 \mapsto 1), (2 \mapsto 2)\} \\
R^4 &= R \\
R^* &= \{(0 \mapsto 0), (0 \mapsto 1), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 0), (1 \mapsto 1), (1 \mapsto 2), \\
&\quad (2 \mapsto 0), (2 \mapsto 1), (2 \mapsto 2)\}
\end{aligned}
$$

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t$, $E \subseteq s$, $F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t$, $E \subseteq s$, $F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Signification	Expression	Définition
restriction sur le domaine	$E \lhd R$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \land x \in E\}$

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t$, $E \subseteq s$, $F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Signification	Expression	Définition
restriction sur le domaine	$E \lhd R$	$\{x, y \mid (x \mapsto y) \in R \wedge x \in E\}$
soustraction sur le domaine	$E \unlhd R$	$\{x, y \mid (x \mapsto y) \in R \wedge x \notin E\}$

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t$, $E \subseteq s$, $F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Signification	Expression	Définition
restriction sur le domaine	$E \lhd R$	$\{x, y \mid (x \mapsto y) \in R \land x \in E\}$
soustraction sur le domaine	$E \mathbin{⩤} R$	$\{x, y \mid (x \mapsto y) \in R \land x \notin E\}$
restriction sur le codomaine	$R \rhd F$	$\{x, y \mid (x \mapsto y) \in R \land y \in F\}$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t, E \subseteq s, F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Signification	Expression	Définition
restriction sur le domaine	$E \lhd R$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \wedge x \in E\}$
soustraction sur le domaine	$E \ntriangleleft R$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \wedge x \notin E\}$
restriction sur le codomaine	$R \rhd F$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \wedge y \in F\}$
soustraction sur le codomaine	$R \ntriangleright F$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \wedge y \notin F\}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les Restrictions

Dans le tableau des définitions, on a : $R \in s \leftrightarrow t, E \subseteq s, F \subseteq t$ et $Q \in s \leftrightarrow t$.

Signification	Expression	Définition
restriction sur le domaine	$E \lhd R$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \land x \in E\}$
soustraction sur le domaine	$E \ntriangleleft R$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \land x \notin E\}$
restriction sur le codomaine	$R \rhd F$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \land y \in F\}$
soustraction sur le codomaine	$R \ntriangleright F$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in R \land y \notin F\}$
modification ou surcharge	$R \Leftarrow Q$	$\{x, y \| (x \mapsto y) \in s \leftrightarrow t$ $\land(((x \mapsto y) \in R \land x \notin dom(Q))$ $\lor(x \mapsto y) \in Q)\}$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$R_1 = \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\}$$

Exemples

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\ R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\} \\
E \lhd R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9)\}
\end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\} \\
E \lhd R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9)\} \\
E \ntriangleleft R_1 &= \{(4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\} \\
E \lhd R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9)\} \\
E \mathbin{\triangleleft\!\!\!-} R_1 &= \{(4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_1 \rhd F &= \{(3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\} \\
E \lhd R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9)\} \\
E \mathbin{⩤} R_1 &= \{(4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_1 \rhd F &= \{(3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_1 \mathbin{⩥} F &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_2 &= \{(3 \mapsto 3), (5 \mapsto 4)\} \\
E &= \{1, 2, 3\} \\
F &= \{5, 7, 9\} \\
E \lhd R_1 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 9)\} \\
E \unlhd R_1 &= \{(4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_1 \rhd F &= \{(3 \mapsto 9), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9)\} \\
R_1 \unrhd F &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8)\} \\
R_1 \Leftarrow R_2 &= \{(2 \mapsto 1), (2 \mapsto 8), (3 \mapsto 3), (4 \mapsto 7), (4 \mapsto 9), (5 \mapsto 4)\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Les Fonctions

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \nrightarrow t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \land \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \land x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \nrightarrow t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \wedge x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s \nrightarrow t \wedge \mathrm{dom}(f) = s\}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \pfun t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \land \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \land x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \land \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s \pinj t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \land f^{-1} \in t \pfun s\}$

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \nrightarrow t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \wedge x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s \nrightarrow t \wedge \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ \; t$	$\{f \mid f \in s \nrightarrow t \wedge f^{-1} \in t \nrightarrow s\}$
injectives totales	$s \rightarrowtail t$	$s \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ \; t \cap s \rightarrow t$

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \pfun t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \land \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \land x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \land \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s \pinj t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \land f^{-1} \in t \pfun s\}$
injectives totales	$s \rightarrowtail t$	$s \pinj t \cap s \rightarrow t$
surjectives partielles	$s \psurj t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \land \mathrm{ran}(f) = t\}$

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \pushfunc t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \wedge x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s \pushfunc t \wedge \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ \; t$	$\{f \mid f \in s \pushfunc t \wedge f^{-1} \in t \pushfunc s\}$
injectives totales	$s \rightarrowtail t$	$s \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ \; t \cap s \rightarrow t$
surjectives partielles	$s \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; t$	$\{f \mid f \in s \pushfunc t \wedge \mathrm{ran}(f) = t\}$
surjectives totales	$s \twoheadrightarrow t$	$s \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ \; t \cap s \rightarrow t$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s \pfun t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \wedge x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \to t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \wedge \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s \pinj t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \wedge f^{-1} \in t \pfun s\}$
injectives totales	$s \rightarrowtail t$	$s \pinj t \cap s \to t$
surjectives partielles	$s \psurj t$	$\{f \mid f \in s \pfun t \wedge \mathrm{ran}(f) = t\}$
surjectives totales	$s \twoheadrightarrow t$	$s \psurj t \cap s \to t$
bijectives partielles	$s \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow t$	$s \pinj t \cap s \psurj t$

Les Fonctions

Signification	Expression	Définition
fonction partielle	$s ⇸ t$	$\{r \mid r \in s \leftrightarrow t \wedge \forall x, y, z \cdot (x, y \in r \wedge x, z \in r \Rightarrow y = z)\}$
fonction totale	$s \rightarrow t$	$\{f \mid f \in s ⇸ t \wedge \mathrm{dom}(f) = s\}$
injectives partielles	$s ⤔ t$	$\{f \mid f \in s ⇸ t \wedge f^{-1} \in t ⇸ s\}$
injectives totales	$s \rightarrowtail t$	$s ⤔ t \cap s \rightarrow t$
surjectives partielles	$s ⤀ t$	$\{f \mid f \in s ⇸ t \wedge \mathrm{ran}(f) = t\}$
surjectives totales	$s \twoheadrightarrow t$	$s ⤀ t \cap s \rightarrow t$
bijectives partielles	$s ⤖ t$	$s ⤔ t \cap s ⤀ t$
bijectives totales	$s ⤖ t$	$s \rightarrowtail t \cap s \twoheadrightarrow t$

Les constructeurs de fonctions

Les constructeurs de fonctions

Signification	Syntaxe
Lambda-expression	$\lambda Id\_liste \cdot (Predicat \mid Expression)$

Les constructeurs de fonctions

Signification	**Syntaxe**
Lambda-expression	$\lambda Id\_liste \cdot (Predicat \mid Expression)$
fonction constante	$Expression \times \{Expression\}$

Les constructeurs de fonctions

Signification	Syntaxe
Lambda-expression	$\lambda Id\_liste \cdot (Predicat \mid Expression)$
fonction constante	$Expression \times \{Expression\}$
transformée en fonction	$fnc(Expression)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les constructeurs de fonctions

Signification	Syntaxe
Lambda-expression	$\lambda Id\_liste \cdot (Predicat \mid Expression)$
fonction constante	$Expression \times \{Expression\}$
transformée en fonction	$fnc(Expression)$
transformée en relation	$rel(Expression)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les constructeurs de fonctions

Signification	Syntaxe
Lambda-expression	$\lambda Id\_liste \cdot (Predicat \mid Expression)$
fonction constante	$Expression \times \{Expression\}$
transformée en fonction	$fnc(Expression)$
transformée en relation	$rel(Expression)$
évaluation de fonction	$Expression(Expression)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned} f &= \lambda x \cdot (x \in \mathbb{N} | x + 2) \\ f(3) &= 5 \end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$
\begin{aligned}
f &= \lambda x \cdot (x \in \mathbb{N} | x + 2) \\
f(3) &= 5 \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 1), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 1), (1 \mapsto 7), (2 \mapsto 3)\} \\
fnc(R_1) &= \{(0 \mapsto \{1, 2\}), (1 \mapsto \{1, 7\}), (2 \mapsto \{3\})\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
f &= \lambda x \cdot (x \in \mathbb{N} | x + 2) \\
f(3) &= 5 \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 1), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 1), (1 \mapsto 7), (2 \mapsto 3)\} \\
fnc(R_1) &= \{(0 \mapsto \{1, 2\}), (1 \mapsto \{1, 7\}), (2 \mapsto \{3\})\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto \{0, 2\}), (1 \mapsto \{4, 6, 8\})\} \\
rel(R_2) &= \{(0 \mapsto 0), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 4), (1 \mapsto 6), (1 \mapsto 8)\}
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
f &= \lambda x \cdot (x \in \mathbb{N} | x + 2) \\
f(3) &= 5 \\
R_1 &= \{(0 \mapsto 1), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 1), (1 \mapsto 7), (2 \mapsto 3)\} \\
fnc(R_1) &= \{(0 \mapsto \{1, 2\}), (1 \mapsto \{1, 7\}), (2 \mapsto \{3\})\} \\
R_2 &= \{(0 \mapsto \{0, 2\}), (1 \mapsto \{4, 6, 8\})\} \\
rel(R_2) &= \{(0 \mapsto 0), (0 \mapsto 2), (1 \mapsto 4), (1 \mapsto 6), (1 \mapsto 8)\} \\
ctx &= \mathbb{N} \times \{0\} \\
&= \lambda x \cdot (x \in \mathbb{N} | 0)
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

Les constantes symboliques et les booléens

- Les booléens sont un cas particulier de type énuméré :
  $\mathrm{BOOL} = \{\mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}$

Les constantes symboliques et les booléens

- Les booléens sont un cas particulier de type énuméré :
  $\mathrm{BOOL} = \{\mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}$

- Il est possible de convertir explicitement un prédicat en un booléen :
  $\mathrm{bool}(\mathit{Predicat})$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les constantes symboliques et les booléens

- Les booléens sont un cas particulier de type énuméré :
  $\mathrm{BOOL} = \{\mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}$

- Il est possible de convertir explicitement un prédicat en un booléen :
  $\mathrm{bool}(\mathit{Predicat})$
  $\mathrm{bool}(\exists x \cdot (x \in \mathbb{N} \land x = x * 2))$

Les constantes symboliques et les booléens

- Les booléens sont un cas particulier de type énuméré :
  $\mathrm{BOOL} = \{\mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}$

- Il est possible de convertir explicitement un prédicat en un booléen :
  $\mathrm{bool}(\mathit{Predicat})$
  $\mathrm{bool}(\exists x \cdot (x \in \mathbb{N} \land x = x * 2)) = \mathrm{TRUE}$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les nombres entiers

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x > 0\}$

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n \wedge x \leq m\}$

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x \geq n \land x \leq m\}$
maxint	entier maximum représentable	

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \| x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \| x \in \mathbb{Z} \land x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \| x \in \mathbb{Z} \land x \geq n \land x \leq m\}$
maxint	entier maximum représentable	
minint	entier minimum représentable	

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n \wedge x \leq m\}$
maxint	entier maximum représentable	
minint	entier minimum représentable	
INT	entiers relatif représentable	*minint..maxint*

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n \wedge x \leq m\}$
maxint	entier maximum représentable	
minint	entier minimum représentable	
INT	entiers relatif représentable	*minint..maxint*
NAT	entiers positifs représentable	0..*maxint*

Les nombres entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatif	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$
$\mathbb{N}_1$	entiers strictement positifs	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}$
$n..m$	ensemble des entiers entre n et m	$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq n \wedge x \leq m\}$
$maxint$	entier maximum représentable	
$minint$	entier minimum représentable	
INT	entiers relatif représentable	$minint..maxint$
NAT	entiers positifs représentable	$0..maxint$
NAT_1	entiers strictement positifs représentable	$1..maxint$

Les opérations sur les entiers I

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition
$-$	soustraction ou différence

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition
$-$	soustraction ou différence
$*$	multiplication ou produit

Les opérations sur les entiers I

Symbole	**Signification**
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition
$-$	soustraction ou différence
$*$	multiplication ou produit
$/$	quotient de la division entière

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition
$-$	soustraction ou différence
$*$	multiplication ou produit
$/$	quotient de la division entière
mod	reste de la division entière

Les opérations sur les entiers I

Symbole	Signification
succ	fonction successeur
pred	fonction prédécesseur
$-$	moins unaire
$+$	addition
$-$	soustraction ou différence
$*$	multiplication ou produit
$/$	quotient de la division entière
mod	reste de la division entière
x^y	opération puissance entière

Les opérations sur les entiers II

Les opérations sur les entiers II

Symbole	Signification	Syntaxe
$\sum$	Pomme d'expressions quantifiées	$\sum \mathit{Id\_liste} \cdot (\mathit{Prdicat} \mid \mathit{Expression})$

Les opérations sur les entiers II

Symbole	Signification	Syntaxe
$\sum$	Pomme d'expressions quantifiées	$\sum \mathit{Id\_liste} \cdot (\mathit{Prdicat} \mid \mathit{Expression})$
$\prod$	Produit d'expressions quantifiées	$\prod \mathit{Id\_liste} \cdot (\mathit{Prdicat} \mid \mathit{Expression})$

Exemples

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemples

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ \sum x \cdot (x \in E_1 | x * 2) &= (1 * 2) + (2 * 2) + (3 * 2) + (4 * 2) \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ \sum x \cdot (x \in E_1 | x * 2) &= (1 * 2) + (2 * 2) + (3 * 2) + (4 * 2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\
\sum x \cdot (x \in E_1 | x * 2) &= (1 * 2) + (2 * 2) + (3 * 2) + (4 * 2) \\
&= 20 \\
\prod x \cdot (x \in E_1 | x) &= 1 * 2 * 3 * 4
\end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\
\sum x \cdot (x \in E_1 | x * 2) &= (1 * 2) + (2 * 2) + (3 * 2) + (4 * 2) \\
&= 20 \\
\prod x \cdot (x \in E_1 | x) &= 1 * 2 * 3 * 4 \\
&= 24
\end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les entiers III

Les opérations sur les entiers III

Symbole	Signification	Syntaxe
card	nombre d'éléments d'un ensemble quelconque	$\mathrm{card}(\mathit{Expression})$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les entiers III

Symbole	Signification	Syntaxe
card	nombre d'éléments d'un ensemble quelconque	$\mathrm{card}(\mathit{Expression})$
$\min$	minimum d'un ensemble fini non vide d'entiers	$\min(\mathit{Expression})$

Les opérations sur les entiers III

Symbole	Signification	Syntaxe
card	nombre d'éléments d'un ensemble quelconque	$\mathrm{card}(\textit{Expression})$
$\min$	minimum d'un ensemble fini non vide d'entiers	$\min(\textit{Expression})$
$\max$	maximum d'un ensemble fini non vide d'entiers	$\max(\textit{Expression})$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les séquences

Les séquences (ou suites) sont un cas particulier de constructeurs de fonctions dont le domaine est un intervalle d’entiers

Les séquences

Les séquences (ou suites) sont un cas particulier de constructeurs de fonctions dont le domaine est un intervalle d'entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathrm{seq}(E)$	séquences finies d'éléments de E	$\bigcup n \cdot (n \in \mathbb{N} \mid 1..n \rightarrow E)$

Les séquences

Les séquences (ou suites) sont un cas particulier de constructeurs de fonctions dont le domaine est un intervalle d'entiers

Symbole	Signification	Définition
$\mathrm{seq}(E)$	séquences finies d'éléments de E	$\bigcup n \cdot (n \in \mathbb{N} \mid 1..n \rightarrow E)$
$\mathrm{seq}_1(E)$	séquences non vides	$\mathrm{seq}(E) - \varnothing$

Exemples

Les séquences ont une dénotation syntaxique prédéfinie :

$$
\begin{aligned}
[] &= \varnothing \\
[3, 7, 5] &= \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 7, 3 \mapsto 5\}
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec

université PARIS-SACLAY

L’insertion dans une séquence

- L’opérateur d’ajout d’un élément au début de la séquence est noté : `a -> s` avec $a \in E$ et $s \in \mathrm{seq}(E)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

L'insertion dans une séquence

- L'opérateur d'ajout d'un élément au début de la séquence est noté : $a \text{ -> } s$ avec $a \in E$ et $s \in \mathrm{seq}(E)$
- L'opérateur -> est défini de façon primitive par :

$$\begin{aligned} a \text{ -> } [] &= \{1 \mapsto a\} \\ a \text{ -> } s &= \{1 \mapsto a\} \cup (\mathrm{pred}; s) \end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les séquences I

Les opérations sur les séquences I

Notation	Signification
size	longueur de séquence

Les opérations sur les séquences I

Notation	Signification
size	longueur de séquence
$\frown$	concaténation

Les opérations sur les séquences I

Notation	Signification
size	longueur de séquence
$\frown$	concaténation
<-	ajout à la fin

Les opérations sur les séquences I

Notation	Signification
size	longueur de séquence
$\frown$	concaténation
<-	ajout à la fin
rev	inversion de séquence

Les opérations sur les séquences I

Notation	Signification
size	longueur de séquence
$\frown$	concaténation
`<-`	ajout à la fin
rev	inversion de séquence
conc	concaténation généralisée

Exemples

$$\mathrm{size}([3, 7, 5, 6]) \quad = 4$$

Exemples

$$\begin{aligned} \mathrm{size}([3, 7, 5, 6]) &= 4 \\ [3, 7, 5] \frown [4, 8] &= [3, 7, 5, 4, 8] \end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned}
\mathrm{size}([3,7,5,6]) &= 4\\
[3,7,5] \frown [4,8] &= [3,7,5,4,8]\\
\mathrm{rev}([3,7,5,4]) &= [4,5,7,3]
\end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\mathrm{size}([3,7,5,6]) &= 4\\
[3,7,5] \frown [4,8] &= [3,7,5,4,8]\\
\mathrm{rev}([3,7,5,4]) &= [4,5,7,3]\\
\mathrm{conc}([[2,3],[\,],[5,7,8],[0]]) &= [2,3,5,7,8,0]
\end{aligned}
$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les séquences II

Les opérations sur les séquences II

Signification	Expression
Premier élément	$\mathrm{first}(s)$

Les opérations sur les séquences II

Signification	Expression
Premier élément	$\mathrm{first}(s)$
Dernier élément	$\mathrm{last}(s)$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Les opérations sur les séquences II

Signification	Expression
Premier élément	$\mathrm{first}(s)$
Dernier élément	$\mathrm{last}(s)$
Éléments sauf le premier	$\mathrm{tail}(s)$

Les opérations sur les séquences II

Signification	Expression
Premier élément	$\mathrm{first}(s)$
Dernier élément	$\mathrm{last}(s)$
Éléments sauf le premier	$\mathrm{tail}(s)$
Éléments sauf le dernier	$\mathrm{front}(s)$

Exemples

$$\text{first}([4, 5, 7, 3]) \quad = 4$$

Exemples

$$\begin{aligned}\mathrm{first}([4,5,7,3]) &= 4\\ \mathrm{last}([4,5,7,3]) &= 3\end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned}
\mathrm{first}([4,5,7,3]) &= 4\\
\mathrm{last}([4,5,7,3]) &= 3\\
\mathrm{tail}([4,5,7,3]) &= [5,7,3]
\end{aligned}$$

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

Exemples

$$\begin{aligned}
\mathrm{first}([4,5,7,3]) &= 4\\
\mathrm{last}([4,5,7,3]) &= 3\\
\mathrm{tail}([4,5,7,3]) &= [5,7,3]\\
\mathrm{front}([4,5,7,3]) &= [4,5,7]
\end{aligned}$$

La synthèse

- La méthode B est une méthode formelle basée sur la logique du 1e ordre et la théorie des ensembles.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

La synthèse

- La méthode B est une méthode formelle basée sur la logique du 1e ordre et la théorie des ensembles.
- Le développement avec la méthode B se base sur une activité de modélisation et une activité de vérification des modèles obtenus.

La synthèse

- La méthode B est une méthode formelle basée sur la logique du 1^{e} ordre et la théorie des ensembles.
- Le développement avec la méthode B se base sur une activité de modélisation et une activité de vérification des modèles obtenus.
- Le développement avec la méthode B couvre l'ensemble des étapes d'un cycle de développement.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY

La synthèse

- La méthode B est une méthode formelle basée sur la logique du 1^e ordre et la théorie des ensembles.
- Le développement avec la méthode B se base sur une activité de modélisation et une activité de vérification des modèles obtenus.
- Le développement avec la méthode B couvre l'ensemble des étapes d'un cycle de développement.
- La méthode B permet le développement de logiciels sûrs et validés conformes à la spécification initiale.

CentraleSupélec
université PARIS-SACLAY