Approximation de la fonction de répartition des nombres premiers

Idir SADAOUI

1 Introduction

Un nombre premier est un nombre entier naturel strictement supérieur à 1 qui admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.
Par exemple : 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.
Il existe une infinité de nombres premiers et ces derniers suscitent énormement d'interrogations comme par exemple leur répartition dans $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
Dans ce document, nous allons voir une méthode d'approximation de la fonction de répartition des nombres premiers, notamment grâce à la fonction ζ de Riemann.
On peut commencer par regarder à quoi ressemble cette répartition en la traçant avec par exemples les 100 premiers nombres premiers.

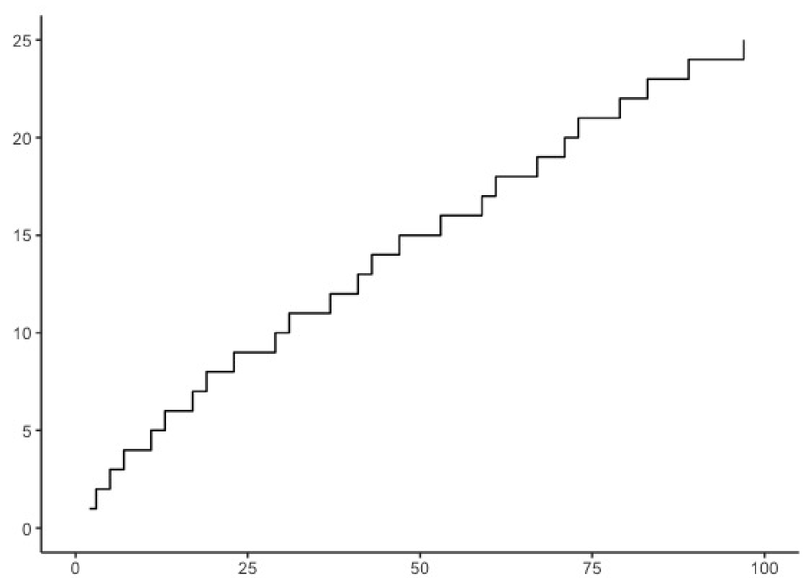

Figure 1 : Fonction de répartition des 100 premiers nombres premiers

2 Quelques définitions

2.1 La fonction ζ de Riemann

La fonction ζ à été introduite en 1859 par Bernhard Riemann et est définie telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$ où $\mathcal{R}e(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On va s'intéresser aux points où cette fonction s'annule :

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$, $\zeta(-2n) = 0$, on appelle ces points les **zéros triviaux** de la fonction ζ.
- On sait aussi que la fonction admet une infinité zéros dans la bande $0 \leq \mathcal{R}e(s) \leq 1$ et si l'hypothèse de Riemann est vraie, les points où la fonction s'annule sont complexes et sont tous de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$ et de partie imaginaire égale à des certains $\beta \in \mathbb{R}$, on a alors :

  $$\zeta(|\frac{1}{2} + i\beta|) = 0$$

  On appelle ces points les **zéros non triviaux** de la fonction ζ.
  On va noter $\rho = \frac{1}{2} + i\beta$ pour la suite de l'étude.

On va s'intéresser aux zéros non triviaux de la fonction car ils sont les clefs de la répartition des nombres premiers.

2.2 La fonction R de Riemann

Avant de montrer l'utilité des zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$, on va définir une autre fonction que l'on appelle la fonction de Riemann qui est une très bonne approximation linéaire de la répartition en escalier des nombres premiers et est définie telle que :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n})$$

avec μ la fonction de Möbius et li le logarithme intégral définient telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$ ainsi que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1$:

$$li(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{ln(t)}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n est divisible par un carré parfait différent de 1} \\ 1 & \text{si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts} \\ -1 & \text{si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts} \end{cases}$$

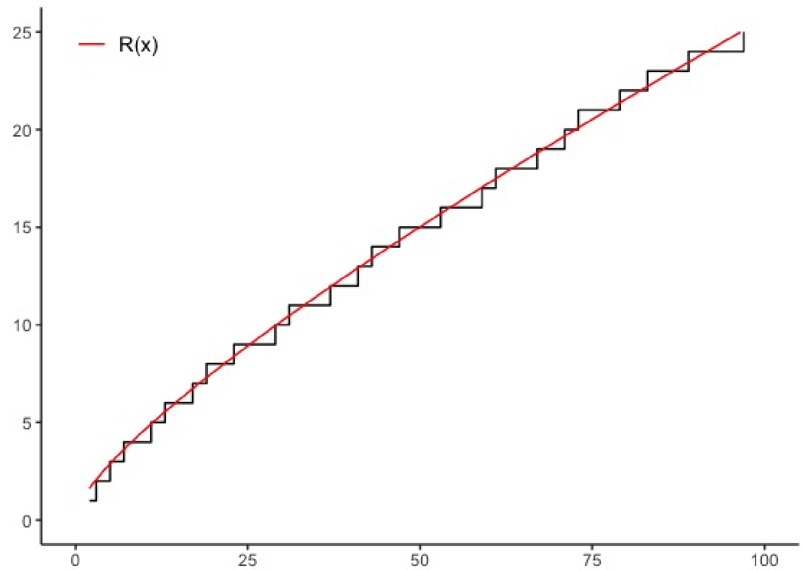

Figure 2 : Approximation de la fonction de répartition par $R(x)$

La fonction $R(x)$ est une bonne approximation de la fonction de répartition des nombres premiers mais il existe une approximation encore meilleure qui se rapproche de la fonction en escalier que l'on va detailler maintenant.

3 La fonction $\pi(x)$

La fonction $\pi(x)$ est définie de la façon suivante :

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\beta}[R(x^{1/2+i\beta}) + R(x^{1/2-i\beta})] - \sum_{m=1}^{+\infty} R(x^{-2m})$$

avec β la partie imaginaire des zéros non triviaux de la fonction $\zeta(s)$.

On peut remplacer $R(x)$ par sa valeur donnée en 2.2, on a :

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n}) - \sum_{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n}(li(x^{\frac{1/2+i\beta}{n}}) + li(x^{\frac{1/2-i\beta}{n}})) - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{-2m/n})$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n}) - \sum_{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} 2\mathcal{R}e\left(li(x^{\frac{1/2+i\beta}{n}})\right) - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{-2m/n})$$

D'après le theorème des nombres premiers, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \pi(x)\frac{ln(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{li(x)} = 1$$

donc en l'infini, $\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$ et $\pi(x) \sim li(x)$ alors $li(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$.

En introduisant ρ dans cette équivalence, on a :

$$li(x^\rho) \sim \frac{x^\rho}{ln(x^\rho)} = \frac{x^\rho}{\rho ln(x)}$$

donc

$$\sum_\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} 2\mathcal{R}e\left(li(x^{\frac{1/2+i\beta}{n}})\right) \approx \sum_\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} 2\mathcal{R}e\left(\frac{x^{\frac{1/2+i\beta}{n}}}{(\frac{1/2+i\beta}{n})ln(x)}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
2\mathcal{R}e\left(\frac{x^{\frac{1/2+i\beta}{n}}}{(\frac{1/2+i\beta}{n})ln(x)}\right) &= 2\mathcal{R}e\left(\frac{(\sqrt{x})^{1/n}}{ln(x)} \times \frac{e^{\frac{i\beta}{n}ln(x)}}{\frac{1}{2n}+\frac{i\beta}{n}}\right) \\
&= 2\frac{(\sqrt{x})^{1/n}}{ln(x)} \mathcal{R}e\left(\frac{cos(\frac{\beta}{n}ln(x)) + isin(\frac{\beta}{n}ln(x))}{\frac{1}{2n}+\frac{i\beta}{n}}\right) \\
&= 4n\frac{(\sqrt{x})^{1/n}}{ln(x)} \left(\frac{cos(\frac{\beta}{n}ln(x)) + 2\beta sin(\frac{\beta}{n}ln(x))}{1+4\beta^2}\right)
\end{aligned}$$

On peut remplacer tout ces résultats dans la fonction $\pi(x)$, on a :

$$\pi(x) \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{1/n}) - \sum_\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) \frac{4(\sqrt{x})^{1/n}}{ln(x)} \left(\frac{cos(\frac{\beta}{n}ln(x)) + 2\beta sin(\frac{\beta}{n}ln(x))}{1+4\beta^2}\right)$$
$$- \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} li(x^{-2m/n})$$

C'est exactement cette fonction que l'on va utiliser pour affiner un maximum notre approximation de la fonction de répartition des nombre premiers.
$\pi(x)$ est donc une amélioration de la fonction $R(x)$.
Chaque $\beta > 0$ ajoutée va apporter une petite correction à la fonction $\pi(x)$, autrement dit, plus il y a de β plus $\pi(x)$ sera efficace.
Si l'hypothèse de Riemann est vraie, en l'infini la fonction $\pi(x)$ se confondra parfaitement avec la fonction de répartition des nombres premiers et ceci nous permettrai de connaître l'emplacement exact de tout les nombres premiers.

Voici quelques graphiques de l'approximation de la fonction de répartition des nombres premiers par $\pi(x)$ avec de plus en plus de zéros triviaux :

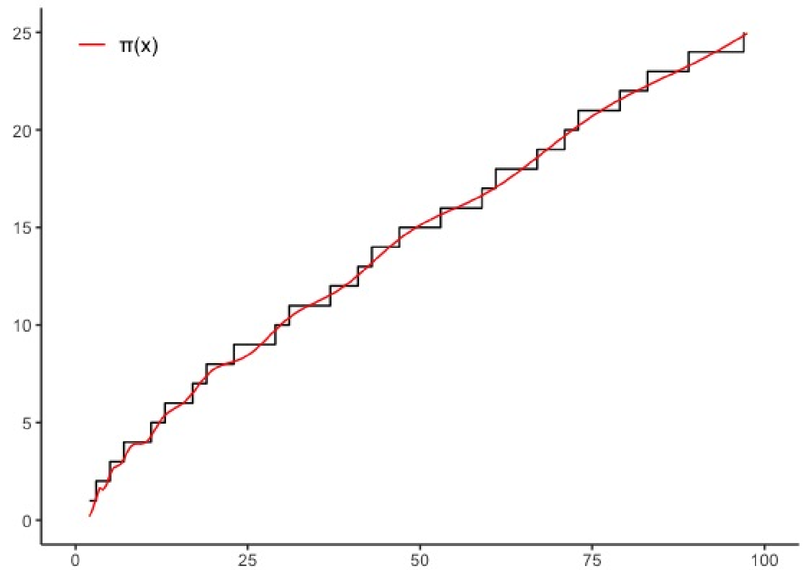

Figure 3 : Approximation de la fonction de répartition avec l'ajout d'un zéro non trivial sur $\pi(x)$

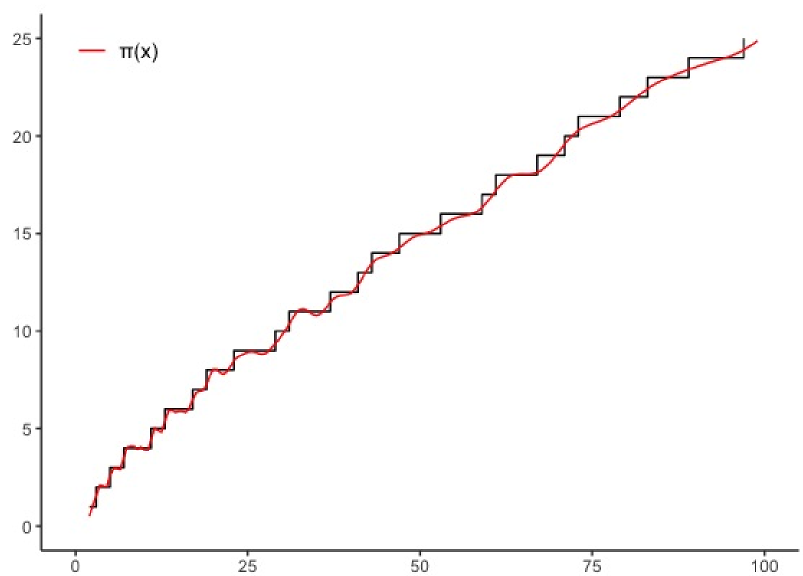

Figure 4 : Approximation de la fonction de répartition avec l'ajout de 10 zéros non triviaux sur $\pi(x)$

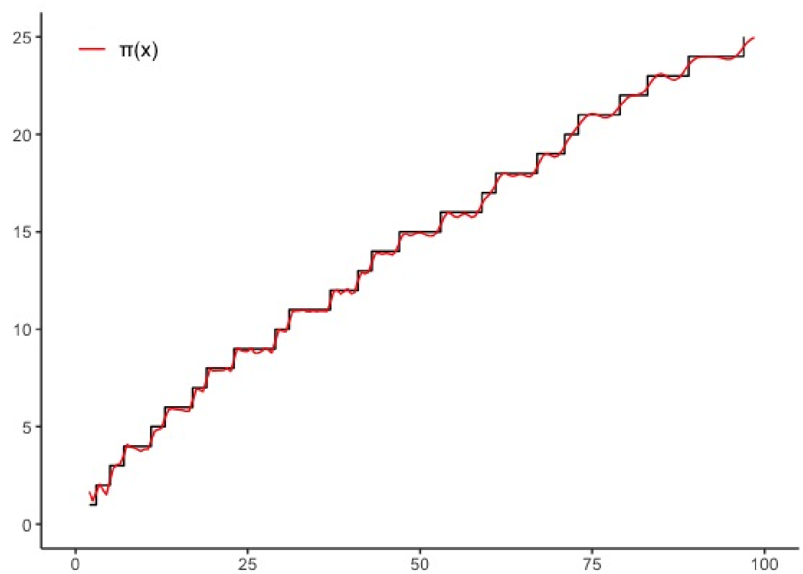

Figure 5 : Approximation de la fonction de répartition avec l'ajout de 50 zéros non triviaux sur $\pi(x)$

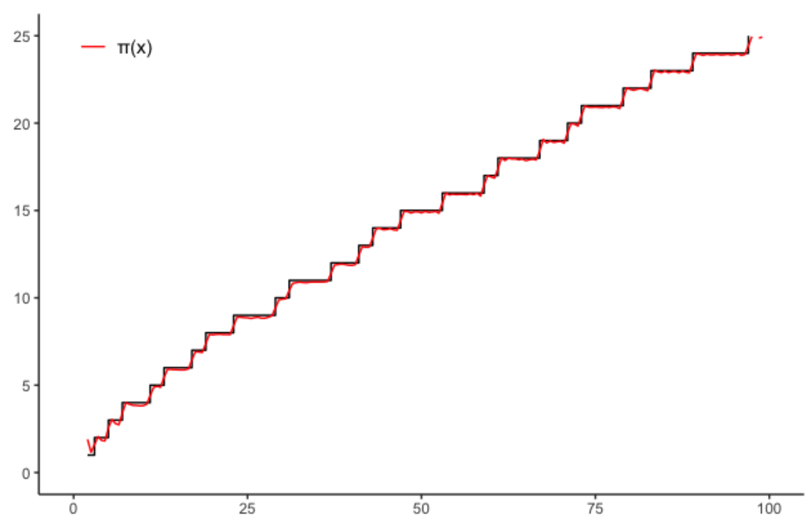

Figure 6 : Approximation de la fonction de répartition avec l'ajout de 200 zéros non triviaux sur $\pi(x)$

References

[1] Science Étonnante David Louapre. *L'hypothèse de Riemann*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=KvculWl-jhE&t=619s.

[2] *Fonction de Möbius*. URL: https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_M%C3%B6bius.

[3] *Fonction Zêta de Riemann*. URL: https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_z%C3%AAta_de_Riemann.

[4] *Logarithme intégral*. URL: https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_int%C3%A9gral.

[5] *Prime counting function*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function.

[6] *Théorème des nombres premiers*. URL: https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_nombres_premiers.