Численные методы решения обратных задач

Тема 6. Эволюционные обратные задачи

Содержание дисциплины

1. Корректные и некорректные задачи
2. Обратные задачи математической физики
3. Метод регуляризации Тихонова
4. Градиентные методы
5. Идентификация правой части
6. **Эволюционные обратные задачи**
7. Граничные обратные задачи
8. Коэффициентные обратные задачи

Идентификация начального условия

При решении обратных задач для уравнений математической физики широко используются градиентные итерационные методы при вариационной формулировке обратной задачи. Здесь рассматривается наиболее простой итерационный метод при приближенном решении ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения второго порядка. Для поставленной обратной задачи итерационно уточняется начальное условие, т.е. на каждой итерации решается обычная прямая краевая задача для параболического уравнения.

Нестационарная задача

В качестве модельной рассмотрим задачу восстановления начального условия начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

Решение $u(x)$ определяется в прямоугольнике

$$\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T],$$

$$\overline{\Omega} = \{x \mid 0 \le x \le l\}, \quad 0 \le t \le T.$$

Постановка прямой задачи

В Ω ищется решение $u(x,t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T], \qquad (1)$$

при стандартных ограничениях $k(x) \geq \kappa > 0$.

Граничные и начальные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \qquad (3)$$

Постановка обратной задачи

В рассматриваемой обратной задаче вместо задания решения на начальный момент времени $t = 0$ задается решение на конечный момент времени:

$$u(x, T) = \varphi(x) \tag{4}$$

Такая обратная задача корректна, например, в классе ограниченных решений.

$$\{k(x), \varphi(x)\} \longrightarrow \{u(x, t)\}$$

Разностная задача

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (1)–(4) дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. Будем считать, для простоты, что в области Ω введена равномерная сетка с шагами h,
и пусть ω — множество внутренних узлов.

Сеточный оператор

На множестве сеточных функций $y(x)$ таких, что $y(x) = 0$, $x \notin \omega$ определим сеточный оператор

$$\Lambda y = -(a y_{\bar{x}})_x$$

положив, например,

$$a(x) = k(x - 0.5h)$$

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x) w(x) h, \qquad \|y\| = (y, y)^{1/2}$$

Дифференциально-операторное уравнение

В H имеем $\Lambda = \Lambda^* > 0$.
От (1)–(4) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad 0 < t < T \tag{5}$$

при заданном

$$y(T) = \varphi, \quad x \in \omega. \tag{6}$$

Итерационное уточнение начального условия

Будем ориентироваться на применения методов, в которых на каждой итерации соответствующие корректные задачи решаются на основе использования стандартных двухслойных разностных схем.

Пусть вместо обратной задачи (5)–(6) рассматривается прямая задача для уравнения (1), когда вместо (3) используется начальное условие

$$y(0) = v, \quad x \in \omega.$$

Разностная схема

Обозначим через y_n разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, $\tau = T/N$.
Двухслойная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n) = 0, \quad n \in \overline{0, N-1} \tag{7}$$

$$y_0 = v, \quad x \in \omega. \tag{8}$$

Операторная формулировка

Из (7)–(8) для заданного y_0 на конечный момент времени получим

$$y_N = S^N v, \tag{9}$$

где оператор перехода с одного временного слоя на другой равен

$$S = (E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}(E + (\sigma - 1)\tau\Lambda).$$

С учетом (5), (6) и (9) приближенному решению обратной задачи естественно сопоставить решение следующего сеточного операторного уравнения

$$Av = \varphi, \quad x \in \omega, \qquad A = S^N. \tag{10}$$

Свойства оператора A

В силу самосопряженности оператора Λ самосопряженным является оператор перехода S и оператор A в (10). Однозначная разрешимость сеточного уравнения (10) будет иметь место, например, при положительности оператора A. Это условие будет выполнено для положительного оператора перехода $S > 0$ при

$$\sigma \geq 1.$$

Данное условие на вес схемы (7), (8) является более жестким, чем обычное условие устойчивости $\sigma \geq 1/2$. В нашем случае для оператора A имеем

$$0 < A = A^* < E. \tag{11}$$

Итерационное решение

Для решения уравнения (10), (11) можно использовать явный двухслойный итерационный метод, который записывается в виде

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + Av_k = \varphi, \qquad (12)$$

где s_{k+1} — итерационные параметры.

Разностное решение, которое соответствует начальному условию v_k обозначим $y^(k)$.

Организация вычислений

Сначала при заданном v_k решается прямая задача с использованием разностной схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(k)} - y_n^{(k)}}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1}^{(k)} + (1-\sigma) y_n^{(k)}) = 0, \quad n \in \overline{0, N-1}$$

$$y_0^{(k)} = v_k, \quad x \in \omega.$$

После того как найдено $y_N^{(k)}$ уточняется начальное условие

$$v_{k+1} = v_k - s_{k+1}(y_N^{(k)} - \varphi)$$

Шаг простой итерации

Из общей теории итерационных методов следует, что скорость сходимости метода (12) определяется постоянными энергетической эквивалентности γ_1, γ_2:

$$\gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0.$$

В нашем случае можно положить $\gamma_2 = 1$. Положительная постоянная γ_1 зависит от сетки и лежит вблизи нуля.

Для *простого итерационного метода* условия сходимости имеют в наших условиях вид $s \le 2$. Для оптимального постоянного значения итерационного параметра имеем $s \approx 1$.

Итерационный метод минимальных невязок

Для ускорения сходимости необходимо ориентироваться на применение итерационных методов вариационного типа. При использовании *итерационного метода минимальных невязок* для итерационных параметров имеем

$$s_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)}, \quad r_k = Av_k - \varphi.$$

В этом случае на каждой итерации минимизируется норма невязки, т.е. верна оценка

$$\|r_{k+1}\| < \|r_k\| < \ldots < \|r_0\|.$$

Неявный итерационный метод

При использовании более общего неявного итерационного метода вместо (12) имеем

$$B\frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + Av_k = \varphi, \qquad B = B^* > 0.$$

В методе минимальный поправок для итерационных параметров используются расчетные формулы

$$s_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}, \quad w_k = B^{-1}r_k$$

Для этого случае минимизируется поправка w_{k+1} на каждой итерации: $\|w_{k+1}\| < \|w_k\| < \ldots < \|w_0\|$.

Критерий останова

Решение на финальный момент времени задается с погрешностью

$$\|\varphi_\delta - \varphi\| \leq \delta.$$

Итерационный процесс обрывается до достижения невязки, величина которой определяется погрешностью входных данных

$$r_k \leq \delta.$$

Выбор оператора B

В обычных итерационных методах выбор оператора B подчинен исключительно ускорению скорости сходимости итерационного метода.

Принципиальная особенность приближенного решения некорректных задач итерационными методами состоит в том, что выделение приближенного решения из необходимого класса гладкости достигается выбором оператора B.