Численные методы решения обратных задач

Тема 2.

Обратные задачи математической физики

Содержание дисциплины

1. Корректные и некорректные задачи
2. **Обратные задачи математической физики**
3. Метод регуляризации Тихонова
4. Градиентные, итерационные методы
5. Идентификация правой части
6. Эволюционные обратные задачи
7. Коэффициентные обратные задачи
8. Граничные обратные задачи

Корректность задачи

Корректность задачи по Адамару:

Задача называется ***корректно поставленной****, если:*

1. *решение задачи существует,*
2. *это решение единственно,*
3. *решение задачи зависит непрерывно от входных данных.*

Корректность параболической задачи

Краевая задача для одномерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}u\right) + f(x,t), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

Оно дополняется граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

и начальным условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

Корректность параболической задачи

Теорема (Априорная оценка)

Для решения задачи (1)–(3) верна априорная оценка $\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\theta)\| d\theta$.

Следствие (Единственность)

Решение задачи (1)–(3) единственно.

Следствие (Устойчивость)

Пусть $\|u_0 - \tilde{u}_0\| \leq \varepsilon$, $\|f(t) - \tilde{f}(t)\| \leq \varepsilon$, $0 \leq t \leq T$, *где* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \mathcal{M}\varepsilon$, *с* $\mathcal{M} = 1 + T$.

Классификация обратных задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

Краевая задача для уравнения с частными производными характеризуется заданием определяющего уравнения, расчетной области, граничных и начальных условий.

Классификация обратных задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

По виду искомых функций обратные задачи делятся на:

- Граничные,
- Эволюционные,
- Коэффициентные,
- Геометрические.

Граничные обратные задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

В условиях, когда прямые измерения на границе или на части границы невозможны, имеем дело с **граничными обратными задачами.**

В этом случае недостающие граничные условия $g_1(t)$ и (или) $g_2(t)$ идентифицируются, например, по измерениям внутри области (**дополнительное условие**).

Граничные обратные задачи. Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

Необходимо найти пару неизвестных функций

$$\{u(x,t); u(l,t)\} =?$$

Дополнительное условие – решение во внутренней точке x^*:

$$u(x^*,t) = \varphi(t), \quad 0 < t \le T.$$

Задача называется **задачей продолжения.**

Граничные обратные задачи. Пример 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$
$$u(0,t) = g_1(t), \quad 0 < t \le T,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l),$$
$$u(x^*,t) = \varphi(t), \quad 0 < t \le T.$$

Задача идентификации потока на части границы, недоступной измерениям $x = l$ – нахождение пары неизвестных функций

$$\left\{u(x,t); k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\right\} = ?$$

Эволюционные обратные задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

К **эволюционным обратным задачам** относятся обратные задачи, в которых неизвестны начальные условия.

В качестве дополнительного условия может служить решение на каком-то моменте времени t^*.

Эволюционные обратные задачи. Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,T) = u_T(x), \quad x \in (0,l).$$

Необходимо найти решение в предшествующие моменты времени

$$\{u(x,t), 0 \le t < T\} = ?$$

Задача называется **ретроспективной обратной задачей**.

Эволюционные обратные задачи. Пример 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x^*,t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Необходимо найти решение во всем временном интервале

$$\{u(x,t), 0 \leq t \leq T\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

В **коэффициентных обратных задач** коэффициент уравнения $k(x)$ или (и) правая часть $f(x)$ неизвестны.

Коэффициентные обратные задачи. Пример 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\{k(x); u(x,t)\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи. Пример 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\{k; u(x,t)\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи. Пример 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$\{k(u); u(x,t)\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи. Пример 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\{f(x,t); u(x,t)\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи. Пример 5

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta(t)\psi(x), \quad x \in (0, l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0, l).$$

$$u(x^*,t) = \varphi(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\{\eta(t); u(x,t)\} = ?$$

Коэффициентные обратные задачи. Пример 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \eta(t)\ \psi(x), \quad x \in (0, l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l).$$

$$u(x,T) = u_T(x), \quad x \in (0,l),$$

$$\{\psi(x); u(x,t)\} = ?$$

Геометрические обратные задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l),$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in (0,l'), \\ k_2, & x \in (l',l). \end{cases}$$

При известных k_1, k_2 коэффициентная обратная задача сводится к задаче идентификации точки $x = l'$, т.е. **геометрической обратной задаче**.

Геометрические обратные задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l),$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & x \in (0,l'), \\ k_2, & x \in (l',l), \end{cases}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad 0 < t \le T,$$

$$\{l'; u(x,t)\} = ?$$