

Численные методы решения обратных задач

Тема 3. Метод регуляризации Тихонова

Содержание дисциплины

- 1 Корректные и некорректные задачи
- 2 Обратные задачи математической физики
- 3 **Метод регуляризации Тихонова**
- 4 Градиентные, итерационные методы
- 5 Идентификация правой части
- 6 Эволюционные обратные задачи
- 7 Коэффициентные обратные задачи
- 8 Граничные обратные задачи

Решение некорректных задач

Основные подходы к приближенному решению некорректных задач связаны с тем или иным возмущением исходной задачи, переходом к некоторой *близкой, но уже корректной задаче*.

В частности, переход к корректной задаче может осуществляться за счет возмущения исходного уравнения, перехода к вариационной задаче и т.д.

Постановка задачи

Изложение методов численного решения некорректных задач обычно проводится применительно к линейному операторному уравнению

$$Au = f. \tag{1}$$

Правая часть и само решение принадлежат тем или иным метрическим пространствам.

Оператор

Ограничимся случаем линейного оператора A в предположениях, действующего в гильбертовом пространстве H :

$$u \in H, \quad f \in H, \text{ т.е. } A : H \rightarrow H.$$

В H введено скалярное произведение (u, v) и норма $\|u\|$ для элементов $u, v \in H$.

Предположим, что оператор A самосопряжен, положителен и неограничен, а его область определения $D(A)$ плотна в H .

Оператор

Будем, для простоты, считать, что спектр оператора A дискретный и состоит из собственных значений λ_k , стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots \geq 0.$$

а соответствующая система собственных функций $\{w_k\}$, $w_k \in D(A)$, $k = 1, 2, \dots$ ортонормирована и полна в H .

Поэтому для каждого $v \in H$ справедливо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k, \quad v_k = (v, w_k).$$

Входные данные с погрешностью

В прикладных исследованиях обычно входные данные задаются с погрешностью, т.е. правая часть уравнения (1) задана с погрешностью δ .

Вместо f нам известно f_δ , такое что

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta. \quad (2)$$

Необходимо найти приближенное решение уравнения (1) с приближенно заданной правой частью f_δ .

Это приближенное решение обозначается u_α , причем параметр α связан с δ , т.е.

$$\alpha = \alpha(\delta).$$

Устойчивые методы

Основная идея методов решения некорректных задач базируется на использовании *априорной информации о неточности входных данных*.

Так как правая часть задана с погрешностью, не нужно пытаться точно решить уравнение

$$Au_\alpha = f_\delta. \quad (3)$$

Например, можно перейти к некоторой другой, но уже корректной задаче

$$A_\delta u_\alpha = f_\delta.$$

где A_δ обладает лучшими свойствами, чем A .

Вариационный метод

В вариационных методах вместо решения уравнения (3) минимизируется норма невязки $r = Au - f_\delta$, т.е. минимизируется **функционал невязки**

$$J(u) = \|Au - f_\delta\|^2.$$

Существует много решений такой вариационной задачи, которые с точностью δ удовлетворяют уравнению (3).

Необходимо разумно распорядиться информацией о погрешности с тем, чтобы выделить наиболее приемлемое решение.

Метод регуляризации Тихонова

В методе регуляризации А.Н. Тихонова вводится **сглаживающий функционал**

$$J_{\alpha}(u) = \|Au - f_{\delta}\|^2 + \alpha\|u\|^2, \quad (4)$$

в которую для выделения ограниченного решения добавлен стабилизирующий функционал $\alpha\|u\|^2$, где $\alpha > 0$ – **параметр регуляризации**, величина которого согласуется с погрешностью δ .

Приближенным решением исходной задачи (1), (2) является экстремаль этого функционала:

$$J_{\alpha}(u_{\alpha}) = \min_{u \in H} J_{\alpha}(u). \quad (5)$$

Метод регуляризации Тихонова

Основной вопрос теоретического исследования приближенных алгоритмов связан с доказательством сходимости приближенного решения к точному.

Необходимо указать при каких условиях приближенное решение u_α , определяемое из (4), (5), сходиться к точному решению задачи (1).

В идеале, необходимо не только установить факт сходимости, но и указать скорость сходимости.

Метод регуляризации Тихонова

Представим приближенное решение в операторном виде

$$u_\alpha = R(\alpha)f_\delta. \quad (6)$$

Если это приближенное решение сходится к точному при стремлении к нулю погрешности правой части, то в этом случае говорят, что оператор $R(\alpha)$ является **регуляризирующим**.

При выбранной конструкции оператора $R(\alpha)$ необходимо указать и выбор параметра регуляризации α в зависимости от δ .

Сходимость метода регуляризации

При исследовании условно корректных задач необходимо выделить класс искомых решений, явно указать априорные ограничения на решение.

В задаче (1), (2) нас будут интересовать ограниченные решения, тем самым априорные ограничения на решение есть

$$\|u\| \leq M, \quad (7)$$

где $M = \text{const} > 0$.

Сходимость метода регуляризации

Основной результат формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема

Пусть для погрешности правой части выполнена оценка (2). Тогда приближенное решение u_α , определяемое как решение задачи (4), (5), при $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится в H к ограниченному точному решению u при $\delta \rightarrow 0$.

Сходимость метода регуляризации

Доказательство. При наших предположениях об A точное решение (1) представляется в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (f, w_k) w_k. \quad (8)$$

Пусть

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \quad c_k = (v, w_k),$$

тогда функционал $J_{\alpha}(v)$ принимает вид

$$J_{\alpha}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\lambda_k c_k - (f_{\delta}, w_k))^2 + \alpha c_k^2 \right]$$

Сходимость метода регуляризации

$$J_{\alpha}(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\lambda_k c_k - (f_{\delta}, w_k))^2 + \alpha c_k^2 \right]$$

Условие (5) эквивалентно

$$\frac{\partial J_{\alpha}}{\partial c_k} = 2\lambda_k (\lambda_k c_k - (f_{\delta}, w_k)) + 2\alpha c_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует представление для решения задачи (4), (5)

$$u_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \alpha} (f_{\delta}, w_k) w_k. \quad (9)$$

Сходимость метода регуляризации

Для погрешности $z = u_\alpha - u$ используем представление

$$z = z_1 + z_2, \quad z_1 = u_\alpha - R(\alpha)f, \quad z_2 = R(\alpha)f - u, \quad (10)$$

где $R(\alpha)f$ – решение задачи минимизации сглаживающего функционала при точном задании правой части.

С учетом (8), (9) получим

$$\|z_1\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \alpha)^2} [(f_\delta, w_k) - (f, w_k)]^2.$$

Сходимость метода регуляризации

Для неотрицательных x верно неравенство

$$\frac{x}{x^2 + \alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\alpha}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

и поэтому при предположениях (2)

$$\|z_1\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\alpha} [(f_\delta, w_k) - (f, w_k)]^2 \leq \frac{\delta^2}{4\alpha}. \quad (11)$$

Оценка (11) выражает устойчивость решения задачи (4), (5) по отношению к малым возмущениям правой части.

Сходимость метода регуляризации

Оценим z_2 в представлении (10) для погрешности приближенного решения.

В этом случае речь идет об условиях близости решений уравнения (1) и задачи минимизации сглаживающего функционала при одной и той же точной правой части.

Из (8), (9) имеем

$$\|z_2\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2.$$

Сходимость метода регуляризации

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\alpha(\varepsilon)$ такое, что $\|z_2\|^2 \leq \varepsilon$ для всех $0 < \alpha \leq \alpha(\varepsilon)$. Для функций из класса (7) ряд

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2$$

сходится и поэтому найдется $n(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сходимость метода регуляризации

В этих условиях получим неравенство

$$\|z_2\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2 + \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2$$

За счет выбора достаточно малого $\alpha(\varepsilon)$ для первого слагаемого получим

$$\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это неравенство будет иметь место для всех $0 < \alpha \leq \alpha(\varepsilon)$.

Сходимость метода регуляризации

Тем самым

$$s(\alpha) = \|z_2\| \rightarrow 0, \text{ если } \alpha \rightarrow 0.$$

Подстановка в (10) дает

$$\|z\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + s(\alpha). \quad (12)$$

В силу этого, если $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то $\|z\| \rightarrow 0$. □

Уравнение Эйлера

Вместо экстремальной задачи (4), (5) можно решать *уравнение Эйлера*

$$A^*Au_\alpha + \alpha u_\alpha = A^*f_\delta. \quad (13)$$

Переход к корректной задаче (13) от некорректной (3) осуществляется за счет перехода к задаче с само-сопряженным оператором A^*A , домножая (3) слева на A^* , и его возмущении оператором αE .

При $A = A^* \geq 0$ можно ограничиться:

$$Au_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta. \quad (14)$$

Задача (14) соответствует использованию алгоритма *упрощенной регуляризации*.

Скорость сходимости

Мы рассмотрели метод регуляризации Тихонова в предположениях (7) о точном решении некорректной задачи (1), (2).

Для погрешности решения получена оценка (12), в которой $s(\alpha) \rightarrow 0$, если параметр $\alpha \rightarrow 0$.

Заметим, что сходимость устанавливается в той же норме, в которой формулируются априорные ограничения на решение.

Хотелось бы получить оценку, которая конкретизировала скорость сходимости приближенного решения при $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$.

Скорость сходимости

Для того чтобы прояснить ситуацию рассмотрим задачу приближенного вычисления производной.

Будем использовать разностное отношение

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, \quad (15)$$

предполагая, что функция $u(x)$ дифференцируема для всех x .

Нас интересует вопрос о том, как хорошо разностная производная приближает du/dx в точке x .

Скорость сходимости

Для доказательства сходимости, получения оценок скорости сходимости разностной производной (15) к du/dx сформулируем более жесткие ограничения на функцию $u(x)$.

Если функция $u(x)$ дважды дифференцируемая, то

$$u_x = \frac{du}{dx} + O(h),$$

для трижды дифференцируемой функции

$$u_x = \frac{du}{dx} + O(h^2).$$

При для понижении гладкости дифференцируемых функций погрешность аппроксимации падает.

Скорость сходимости

Аналогичная ситуация имеет место и при исследовании скорости сходимости метода регуляризации.

Вместо (7) сформулируем более сильные ограничения на точное решение задачи (1).

Требования повышенной гладкости точного решения естественно связать с оператором A .

Будем считать, что точное решение принадлежит классу

$$\|A^{-1}u\| \leq M. \quad (16)$$

Скорость сходимости

В рассматриваемом случае самосопряженного и положительного оператора A промежуточное (между (7) и (16)) положение занимает класс априорных ограничений на решение типа

$$\|u\|_{A^{-1}} \leq M. \quad (17)$$

В условиях (16), (17) можно попытаться конкретизировать зависимость $s(\alpha)$ в оценке погрешности типа (12) для метода регуляризации.

Скорость сходимости

Оценки для погрешности метода регуляризации Тихонова мы получим на основе априорных оценок для операторного уравнения (13), которое с учетом $A = A^* > 0$ принимает вид

$$A^2 u_\alpha + \alpha u_\alpha = A f_\delta. \quad (18)$$

Скорость сходимости

Теорема

Для погрешности приближенного решения задачи (1), (2), определяемого из (12), справедлива априорная оценка

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}M^2, \quad (19)$$

для точных решений из класса (16) и

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}M^2, \quad (20)$$

для решений из (17).

Доказательство

Доказательство. Вычитая из (18) уравнение

$$A^2u = Af.$$

получим следующее уравнение для погрешности $z = u_\alpha - u$ уравнение

$$A^2z + \alpha z = A(f_\delta - f) - \alpha u.$$

Скалярно домножим его на z , что дает

$$\|Az\|^2 + \alpha\|z\|^2 = ((f_\delta - f), Az) - \alpha(u, z).$$

Доказательство

Подстановка неравенства

$$((f_\delta - f), Az) \leq \frac{1}{2}\|Az\|^2 + \frac{1}{2}\|f_\delta - f\|^2$$

дает

$$\frac{1}{2}\|Az\|^2 + \alpha\|z\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f_\delta - f\|^2 - \alpha(u, z). \quad (21)$$

Доказательство

Рассмотрим вначале случай априорных ограничений (16). Использование неравенства с в (21) приводит нас к оценке

$$\alpha \|z\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f_\delta - f\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|A^{-1}u\|^2.$$

С учетом (2) и (16) приходим к доказываемой оценке (19).

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} M^2.$$

Доказательство

В случае (17) последнее слагаемое в правой части (21) оцениваем следующим образом:

$$-\alpha(u, z) = -\alpha(A^{-1/2}u, A^{1/2}z) \leq \sqrt{\alpha}\|A^{1/2}z\|^2 + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{4}\|A^{1/2}u\|^2$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2}\|Az\|^2 + \alpha\|z\|^2 - \sqrt{\alpha}\|A^{1/2}z\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}Az - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}z \right\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z\|^2,$$

получим

$$\frac{\alpha}{2}\|z\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f_\delta - f\|^2 + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{4}\|A^{1/2}u\|^2.$$

Скорость сходимости

С учетом (2), (17) имеем оценку (20)

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} M^2.$$



Повышение требований по гладкости точного решения приводит к повышению скорости сходимости приближенного решения к точному (см. оценки (19), (20)).

Выбор параметра регуляризации

В теории методов приближенного решения некорректных задач вопросу выбора параметра регуляризации уделяется значительное внимание.

Наибольшее распространение получили:

- выбор по невязке,
- выбор по обобщенной невязке (при учете погрешности в задании не только правой части, но и оператора A),
- квазиоптимальный выбор и т.д.

Выбор оптимального значения параметра регуляризации во многом определяет работоспособность вычислительного алгоритма.

Выбор параметра регуляризации

Параметр регуляризации α согласовывается с погрешностью входных данных, и чем меньше погрешность, тем меньше параметр регуляризации берется, т.е. $\alpha = \alpha(\delta)$.

В соответствии со структурой погрешности (12), (19), (20) мы не можем брать слишком малый параметр регуляризации, потому что при уменьшении параметра регуляризации растет погрешность и проявляется некорректность задачи.

Тем самым, имеется некоторый оптимум для параметра регуляризации при котором погрешность приближенного решения минимальна.

Выбор параметра регуляризации

Оптимальный параметр регуляризации

зависит не только от величины погрешности в задании правой части, но и от класса априорных ограничений на точное решение.

Так например, для ограниченных решений (7) полученная выше оценка (12) для погрешности приближенного решения в методе А.Н. Тихонова не позволяет явно указать оптимальное значение параметра регуляризации.

Выбор параметра регуляризации

При сужении класса точных решений мы имеем возможность конкретизировать выбор параметра регуляризации.

В классе точных решений (16) для погрешности имеет место априорная оценка (19) и для оптимального значения параметра регуляризации получим выражение

$$\alpha_{opt} = \frac{\delta}{M}, \quad \|A^{-1}u\| \leq M. \quad (22)$$

При этом достигается скорость сходимости

$$\|z\| \leq \sqrt{M\delta}.$$

Выбор параметра регуляризации

Аналогичное рассмотрение выбора параметра регуляризации в классе априорных ограничений на точное решение (17) приводит нас к

$$\alpha_{opt} = \left(4 \frac{\delta^2}{M^2}\right)^{2/3}, \quad \|u\|_{A^{-1}} \leq M. \quad (23)$$

при этом

$$\|z\| \leq \sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{M^2 \delta}{4}}.$$

Выбор параметра регуляризации

Теорема

При выборе оптимального значения параметра регуляризации по правилу (22) в классе точных решений (16) и по правилу (23) в классе (17) для погрешности приближенного решения имеем

$$\|z\| = O(\delta^\beta), \quad \beta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \|A^{-1}u\| \leq M, \\ \frac{1}{3}, & \|u\|_{A^{-1}} \leq M. \end{cases} \quad (24)$$

Выбор параметра регуляризации

Оптимальный выбор параметра регуляризации проводится при условии, что известен уровень погрешности в задании правой части и класс априорных ограничений на точное решение.

При решении практических задач такая априорная информация частично или же даже полностью отсутствует.

Поэтому приходится ориентироваться и на другие способы выбора регуляризации.

Метод невязки

При **выборе параметра регуляризации по невязке** в качестве определяющего уравнения выступает равенство

$$\|Au_\alpha - f_\delta\| = \delta. \quad (25)$$

Обоснование такого выбора параметра регуляризации, т.е. сходимость приближенного решения u_α с $\alpha = \alpha(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ к точному решению уравнения (1), дано для многих классов задач.

Мы отметим лишь особенности вычислительной реализации такого способа определения параметра регуляризации.

Метод невязки

Невязка зависит некоторым образом от параметра регуляризации α . Обозначим

$$\varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|$$

тогда нахождение параметра регуляризации состоит в соответствии с принципом невязки (25) в решении уравнения

$$\varphi(\alpha) = \delta. \quad (26)$$

В достаточно общих условиях функция $\varphi(\alpha)$ является неубывающей и уравнение (26) имеет решение.

Метод невязки

Для приближенного решения уравнения (26) применяются различные методы. Например, используется последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0 \quad (27)$$

и вычисления проводятся начиная с $k = 0$ до некоторого $k = K$, при котором равенство (26) выполняется с приемлемой точностью.

При этом требуется $K + 1$ вычислений невязки (решений вариационных задач типа (4), (5)).

Для решения (26) можно использовать и более быстросходящиеся итерационные методы.

Квазиоптимальный выбор

Выбор **квазиоптимального значения параметра регуляризации** напрямую не связан с уровнем погрешностей δ . Выбирается значение $\alpha > 0$, которое минимизирует

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right\|. \quad (28)$$

Для нахождения квазиоптимального значения чаще всего используется последовательность (27).

Минимизация (28) на таких значениях параметра регуляризации соответствует поиску минимума

$$\tilde{\chi} = \|u_{\alpha^{k+1}} - u_{\alpha_k}\|.$$

Выбор параметра регуляризации

Выбор параметра регуляризации приводит к существенному увеличению вычислительной работы и носит в той или иной степени итерационный характер.

При каждом значении итерационного параметра решается задача (4), (5)).

Понятное дело, что при промежуточных значениях параметра регуляризации нет большого смысла в очень точном решении таких задач.

Поэтому можно комбинировать нахождение решения задачи (4), (5)) с выбором параметра регуляризации.