Численные методы решения обратных задач

Тема 5. Идентификация правой части

Содержание дисциплины

1. Корректные и некорректные задачи
2. Обратные задачи математической физики
3. Метод регуляризации Тихонова
4. Градиентные, итерационные методы
5. **Идентификация правой части**
6. Эволюционные обратные задачи
7. Граничные обратные задачи
8. Коэффициентные обратные задачи

Идентификация правой части

Важный класс обратных задач математической физики связан с определением неизвестной правой части уравнения. Дополнительная информация о решении задается во всей расчетной области или же в ее некоторой части, в частности, на границе.

В нестационарных задачах может определяться зависимость только от времени или только от пространственных переменных.

Стационарная задача

В качестве простейшей математической модели рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad 0 < x < l, \quad (1)$$

где $k(x) \geq \kappa > 0$, $q(x) \geq 0$.
Граничное условие

$$u(0) = 0, \qquad u(l) = 0$$

$\Omega = [0, l]$ — расчетная область.

Прямая задача

Прямая задача состоит в определении функции $u(x)$ из уравнения (1) с заданными коэффициентами $k(x)$, $q(x)$, правой частью $f(x)$ и условий на границе.

$$\{k(x), q(x), f(x), \text{ГУ}\} \longrightarrow u(x)$$

Обратная задача

Будем считать, что правая часть $f(x)$ неизвестна. Для ее определения требуется задать некоторую дополнительную информацию о самом решении. Нам необходимо найти функцию от x, поэтому дополнительную информацию желательно задать также в виде функции от x. Тем самым будем считать, что известно решение $u(x)$, $x \in \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \Omega$ и пусть $\Gamma = [0, l]$.

$$\{k(x), q(x), \text{ГУ}, u(x)\big|_\Gamma\} \longrightarrow \{f(x), u(x)\}$$

Точно заданное решение

При известном **точном** $u(x)$, $x \in [0,1]$, правая часть определяется однозначно, из уравнения (1) следует, что

$$f(x) = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x), \qquad 0 < x < l, \qquad (2)$$

Использование формулы (2) предполагает, например, что $f(x) \in C(0,l)$, если решение $u(x) \in C^2[0,l]$ при $k(x) \in C^1[0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$.

Возмущенные входные данные

Проблема состоит в том, что входные данные ($u(x)$, $x \in [0, l]$) заданы приближенно и *не принадлежат* отмеченному классу гладкости. Вместо точного решения $u(x)$, $x \in [0, l]$, известна функция $u_\delta(x)$, $x \in [0, l]$, причем $u_\delta(x) \in C[0, l]$ и

$$\|u_\delta(x) - u(x)\|_{C[0,l]} \leq \delta,$$

где норма в $C[0, l]$ равна

$$\|v(x)\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |v(x)|$$

Способы решения

Задача (1)–(2) есть задача вычисления значений дифференциального оператора. Она относится к классу некорректных в классическом смысле, и для ее решения необходимо использовать регуляризирующие алгоритмы.

[0] В книге дается метод на основе разностных схем.

Операторное определение задачи

Будем рассматривать задачу (1)–(2) на операторном уровне. На множестве функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, l]$ определим оператор $\mathcal{D}$ по правилу

$$\mathcal{D}u = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)$$

В $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, l)$ оператор

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq mE, \quad m = \kappa\frac{\pi^2}{l^2}.$$

Операторное определение задачи

В силу этого $\mathcal{D}^{-1}$ существует и

$$0 < \mathcal{D}^{-1} \leq \frac{1}{m} E$$

Из прямой задачи

$$\mathcal{D}u = f \tag{3}$$

можно перейти к уравнению

$$\mathcal{A}f = u. \tag{4}$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = \mathcal{D}^{-1}$.

Возмущение в l_2-норме

Вместо точной правой части известна $u_\delta(x)$, причем уровень погрешности контролируется неравенством

$$\|u_\delta - u\| \le \delta, \tag{5}$$

где

$$\|u(x)\|^2 = \int_0^l u^2(x)\, dx.$$

Метод регуляризации Тихонова

Для ее устойчивого решения задачи (4)–(5) можно применить метод регуляризации А. Н.Тихонова. В этом случае приближенное решение f_α, $\alpha = \alpha(\delta)$, определяется из

$$J_\alpha(f_\alpha) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v), \tag{6}$$

где

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{A}v - u_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2. \tag{7}$$

Преобразование функционала

Функционал (7) можно записать в виде

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{D}^{-1}v - u_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2.$$

Его неудобство связано с тем, что вычислять значения оператора $\mathcal{D}$ проще, чем его обращать. Можно вместо (7) использовать несколько более общий функционал

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{D}^{-1}v - u_\delta\|^2_{\mathcal{G}} + \alpha\|v\|^2_{\mathcal{G}}.$$

с $\mathcal{G} = \mathcal{G}^* > 0$. Положим $\mathcal{G} = \mathcal{D}^*\mathcal{D}$, тогда

$$J_\alpha(v) = \|v - \mathcal{D}u_\delta\|^2 + \alpha\|\mathcal{D}v\|^2. \tag{8}$$

Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера для (6), (8) имеет вид

$$(E + \alpha \mathcal{D}^* \mathcal{D}) f_\alpha = \mathcal{D} u_\delta \tag{9}$$

Уравнение (9) дает краевую задачу для ОДУ четвертого порядка. Для решения уравнения (9) справедлива априорная оценка

$$\|f_\alpha\| \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|u_\alpha\|,$$

выражающая устойчивость приближенного решения к малым возмущениям правой части.

Нестационарная задача

В качестве модельной рассмотрим задачу восстановления правой части одномерного параболического уравнения.

Решение $u(x)$ определяется в прямоугольнике

$$\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T],$$

$$\overline{\Omega} = \{x \mid 0 \le x \le l\}, \quad 0 \le t \le T.$$

Постановка задачи

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t \in (0,T], \tag{10}$$

при стандартных ограничениях $k(x) \geq \kappa > 0$.

Граничные и начальные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{12}$$

Постановка задачи

В прямой задаче (10)–(12) решение $u(x,t)$ определяется по известным коэффициенту $k(x)$ и правой части $f(x,t)$. В рассматриваемой обратной задаче неизвестной будет правая часть $f(x,t)$ (мощность источников) при известном решении $u(x,t)$. Для вычисления правой части имеем из (10) явную формулу

$$f(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad x \in (0,l), \quad t \in (0,T]. \tag{13}$$

Аспекты задачи

Входные данные заданы с погрешностью, и поэтому прямое использование (13) затруднительно. Пусть вместо точного решения задачи (10)–(12) $u(x,t)$ известна функция $u_\delta(x,t)$, и в некоторой норме параметр δ определяет уровень погрешностей в задании решения:

$$\|u_\delta(x,t) - u(x,t)\| \le \delta \qquad (14)$$

Пути решения

Необходимо использовать специальные вычислительные алгоритмы устойчивого численного дифференцирования. Для приближенного решения можно использовать алгоритмы конечно-разностной регуляризации, когда в качестве параметра регуляризации выступают шаги дискретизации. Подробное обсуждение такого метода дано выше при рассмотрении стационарной задачи для ОДУ второго порядка. При решении обратной задачи (11)–(14) необходимо согласовывать с погрешностью в задании $u(x, t)$ шаг дискретизации по пространству и по времени.

Итерационное решение. Обозначения

В гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$ норму и скалярное произведение введем обычным образом

$$(v, w) = \int_\Omega v(x)w(x)dx, \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Для функций $v(x,t), w(x,t) \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(Q_T)$ положим

$$(v, w)^* = \int_0^T (v, w)dt, \quad \|v\|^* = ((v, v)^*)^{1/2}.$$

Определим оператор

$$\mathcal{A}u = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right), \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A} \geq mE, \quad m = \kappa\frac{\pi}{l^2},$$

на множестве функций, удовлетворяющих (11).

Итерационная схема

По заданной правой части $f(x, t)$ из решения краевой задачи (10)–(12) однозначно определяется $u(x, t)$. Это соответствие отобразим введением оператора $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} f = u.$$

После симметризации этого уравнения двухслойный итерационный метод запишем в виде

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_{k+1}} + \mathcal{G}^* \mathcal{G}\, f_k = \mathcal{G}^* u_\delta \tag{15}$$

Шаг итерации

Итерационные параметры при использовании метода скорейшего спуска рассчитываются по формуле

$$\tau_{k+1} = \left(\frac{\|r_k\|^*}{\|\mathcal{G} r_k\|^*} \right), \quad r_k = \mathcal{G}^* \mathcal{G}\, f_k - \mathcal{G}^* u_\delta \qquad (16)$$

Число итераций $K(\delta)$ в (16) согласуется с погрешностью δ:

$$\|\mathcal{G} f_{K(\delta)} - u_\delta\|^* \le \delta.$$

Операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$

Операторное представление $v = \mathcal{G} f_k$ есть решение прямой задачи

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A} v = f_k, \qquad 0 < t \le T,$$

$$v(0) = 0.$$

При нахождении значений сопряженного оператора $w = \mathcal{G}^* v$ решается прямая задача

$$-\frac{dw}{dt} + \mathcal{A} w = v, \qquad 0 \le t < T,$$

$$w(T) = 0.$$

Операторы $\mathcal{D}v = \frac{dv}{dt} + \mathcal{A}v$ и $\mathcal{D}^*$

$$(\mathcal{D}v, w)^* = \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, w\right) dt + \int_0^T (\mathcal{A}v, w) dt =$$
$$(v, w)\Big|_0^T - \int_0^T \left(v, \frac{dw}{dt}\right) dt + \int_0^T (v, \mathcal{A}w) dt = (v, \mathcal{D}^* w)^*$$

при условии $v(x, 0) = 0$ и $w(x, T) = 0$.
Тем самым оператор $\mathcal{D}^*$ определяется как

$$\mathcal{D}^* w = -\frac{dw}{dt} + \mathcal{A}w$$

на множестве функций

$$w(x, T) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

Ограничения на правую часть

Отметим, что рассматриваемый алгоритм используется при определенных ограничениях на правую часть. В соответствии с применяемой симметризацией за счет оператора $\mathcal{G}$ на правую часть накладываются ограничения

$$f(x,T) = 0, \qquad x \in \Omega$$

$$f(0,t) = f(l,t) = 0, \qquad 0 \le t < T.$$