# 7. Topologie-Übung

Joachim Breitner

5. Dezember 2007

## Aufgabe 1

$X_k$ seien für $k \in \mathbb{N}_0$ endliche Mengen. Auf $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ sei die Norm

$$D((x_k),(y_k)) := \begin{cases} 0, & x_k = y_k \text{ für alle } k \\ 2^{-m}, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, wobei $m := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k \neq y_k\}$

**Frage:** Wie sieht $B_r((x_k))$ für $r > 0$ aus?

Sei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{2^{m+1}} \leq r \leq \frac{1}{2^m}$. Dann ist $B_r((x_k))$ die Menge aller Folgen in $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$, die mindestens in den ersten $m$ Folgengliedern mit $(k_k)$ übereinstimmen.

**Behauptung** $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ ist kompakt.

$\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ ist ein metrischer Raum, also ist $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ genau dann kompakt, wenn $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ folgenkompakt ist.

Wir zeigen: $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ ist folgenkompakt. Sei also $(A_k)$ eine Folge in $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$:

$$A_1 : a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$$
$$A_2 : a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots$$
$$A_3 : a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots$$

Es ist $X_0$ endlich, also gibt es $a_o \in X_0$, so dass $a_{l1} = a_0$ für unendlich viele $l$ gilt. Betrachte die Teilfolge $(\tilde{A}_k)$ von $(A_k)$, für die gilt: $\tilde{a}_{k1} = a_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es ist auch $X_1$ enlich, also gibt es $a_1 \in X_1$, so dass $\tilde{a}_{l2} = a_1$ für unendlich viele $l$. Betrachte die Teilfolge $(\tilde{\tilde{A}}_k)$ von $(\tilde{A}_k)$, für die gilt: $\tilde{\tilde{a}}_{k1} = a_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine Teilfolge von $(A_k)$, die gegen $(a_0, a_1, \ldots)$ konvergiert.

# Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte

$$f(X) = 0 \implies \exists i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \neq 0$$

**Behauptung:** $X \coloneqq \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Dazu konstruieren wir einen Atlas auf $X$, mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Nach Voraussetzung existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\frac{\partial f}{\partial u_i}(x) \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert daher eine Umgebung $U_x \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ und eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}$ von $x_i$ sowie eine stetige Abbildung $g : U_x \to V_x$ mit $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i$, so dass (nach geeigneter Variablenumsortierung) $f(u, g(u)) = 0$ für alle $u \in U_x$.

Setze $O \coloneqq (U_x \times V_x) \cap X$. Das ist eine offene Menge in $X$, da $U_x$ und $V_x$ offen sind. Definiere $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq U_x \to O$ mit $\varphi(u) \coloneqq (u, g(u))$. Klar: $\varphi$ ist stetig und injektiv.

*Der Rest fehlt mangels Akkulaufzeit.*

# Aufgabe 4

Es sei $K$ eine kompakter topologischer RAum, der Gruppenstruktur hat, $\Phi : K \to GL(n, \mathbb{C})$ sei stetig und Gruppenhomomorphismus.

**Behauptung:** Für $k \in K$ sind haben alle Eigenwerte von $\Phi(k)$ den Betrag 1.

Es ist $K$ kompakt und $\Phi$ stetig, also ist $\Phi(K)$ ebenfalls kompakt und als Teilmenge eines metrischen Raumes damit beschränkt. Für $k \in K$ gilt $\Phi(k^n) = \Phi(k)^n \in \Phi(K)$ und $\Phi(k^{-1}) = \Phi(k)^{-1} \in \Phi(K)$.

Sei $A \coloneqq \Phi(k) \in GL_(n, \mathbb{C})$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass es ein $U \in GL(n, \mathbb{C})$ gibt, so dass $\tilde{A} \coloneqq UAU^{-1}$ in Jordan-Normalform vorliegt. Auf der Diagonalen von $\tilde{A}^n$ stehen die $n$-ten Potenzen der Eigenwerte von $A$.

Wäre also $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ mit $|\lambda| > 1$, so würde für $n \to \infty$ gelten: $\|U\Phi(k)^n U^{-1}\| \to \infty$. Weil die Konjugation mit $U \in GL(n, \mathbb{C})$ eine stetige Abbildung ist, gilt dann auch $\|\Phi(k)\| \to \infty$, also wäre $\Phi(K)$ nicht beschränkt, was ein Widerspruch wäre.

Wäre dagagen $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ mit $|\lambda| < 1$, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eingenwert von $\Phi(k^{-1})$, was wie eben gezeigt ein Widerspruch ist.

**Behauptung:** $\Phi(k)$ ist diagonalisierbar.

Angenommen, $A := \Phi(k)$ wäre nicht diagonalisierbar. Hat das erste Jordankästchen in $\tilde{A}$ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und sei $b_{21}$ der Eintrag an der Stelle $(2, 1)$ in der Matrix $\tilde{A}^n$, dann gilt: $b_{21} = n \cdot \lambda^{n-1}$, das heißt für $n \to \infty$ ist $\|\Phi(k)^n\| \to \infty$, also $\Phi(K)$ nicht beschränkt, was ein Widerspruch ist.

Damit ist die Jordan-Normalform von $\Phi(k)$ diagonalisierbar, also ist $\Phi(k)$ diagonalisierbar.