

16. Die Umlaufzahl

Hilfssatz:

Sei σ eine Menge von zsh. Teilmengen von \mathbb{C} mit $\bigcap_{A \in \sigma} A \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{A \in \sigma} A$ zsh.

Beweis

Fast wörtlich wie Hilfssatz 3 in §9. ■

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $C \subseteq D$ heißt eine (Zusammenhang-) **Komponente** von $D : \Leftrightarrow C$ ist zsh. und aus $C \subseteq C_1 \subseteq D$. C_1 zsh. folgt stets $C = C_1$.

Beispiel

$D = U_1(0) \cup U_1(3)$ Dann nennt man $U_1(0)$ und $U_1(3)$ die Komponenten von D .

Satz 16.1

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

- (1) Ist $C \subseteq D$ eine Komponente von D , so ist C ein Gebiet.
- (2) Sind C_1, C_2 Komponenten von D , so gilt: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oder $C_1 = C_2$.
- (3) Ist $z_0 \in D$, so existiert genau eine Komponente C von $D : z_0 \in C$.
- (4) $\mathbb{C} \setminus K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in C$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$. $C_1 := C \cup U_\delta(z_0) \subseteq D$. Klar: $C \subseteq C_1$. HS $\Rightarrow C_1$ zsh. C_1 Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow U_\delta(z_0) \subseteq C \Rightarrow C$ offen $\Rightarrow C$ Gebiet.
- (2) Sei $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. $C := C_1 \cup C_2$. HS $\Rightarrow C$ zsh. Klar: $C_1 \subseteq C \subseteq D$.
 C_1 Komponente von $D \Rightarrow C = C_1 \Rightarrow C_2 \subseteq C_1 \subseteq D$.
 C_2 Komponente von $D \Rightarrow C_1 = C_2$.
- (3) $\sigma := \{A \subseteq D : A \text{ ist zsh., } z_0 \in A\}$. $z_0 \in \bigcap_{A \in \sigma} A \xrightarrow{\text{HS}} C := \bigcup_{A \in \sigma} A$ zsh. Sei $C \subseteq C_1 \subseteq D$ und C_1 zsh. Dann: $C_1 \in \sigma \Rightarrow C_1 \subseteq C \Rightarrow C_1 = C$.
- (4) Übung. ■

Definition

Sei γ ein stückweise glatter und geschlossener Weg in \mathbb{C} und es sei $z \notin \text{Tr}(\gamma)$. $n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$

heißt die **Umlaufzahl** von γ bezüglich z . $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$.

Satz 16.2

Sei γ wie oben und $D := \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$.

- (1) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \forall z \in D$.
- (2) Ist C eine Komponente von D , so ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf C konstant.
- (3) Ist C die unbeschränkte Komponente von D , so gilt: $n(\gamma, z) = 0 \forall z \in C$.

Beispiele:

- (1) Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) := z_0 + re^{ikt}$ ($t \in [0, 2\pi]$). $C_1 = U_r(z_0); C_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}$ und die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$. Sei $z \in C_2$. 16.2(3) $\Rightarrow n(\gamma, z) = 0$. Sei $z \in C_1$. $n(\gamma, z) \stackrel{16.2(2)}{=} n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{ikt}} ikr e^{ikt} dt = k$.

- (2) Sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & , -2 \leq t \leq 2 \\ 2e^{i(t-2)} & , 2 < t \leq 2 + \pi \end{cases}$$

Berechne $n(\gamma, i)$. Sei γ_1 wie im Bild¹ und $\gamma_0(t) := 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-i}}_{=n(\gamma,i)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-i}}_{\stackrel{16.2(3)}{=} 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dw}{w-i} \stackrel{Bsp.1}{=} 1 \Rightarrow n(\gamma, i) = 1.$$

Beweis

- (1) O.B.d.A γ glatt. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, z \in D$ und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$

$\stackrel{8.2}{\Rightarrow}$ h ist auf $[a, b]$ differenzierbar und $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$.

Sei $H(t) := e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)$. Nachrechnen: $H' = 0$ auf $[a, b]$. Also existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $H(t) = c \forall t \in [a, b]$.

$$\stackrel{t=a}{\Rightarrow} c = e^{-h(a)}(\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z$$

$$\Rightarrow e^{h(t)} = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z} \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\stackrel{t=b}{\Rightarrow} e^{h(b)} = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} \stackrel{\gamma \text{ geschlossen}}{=} 1$$

$$\stackrel{6.3}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : h(b) = 2k\pi i$$

$$\Rightarrow 2k\pi i = h(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i n(\gamma, z) \Rightarrow k = n(\gamma, z)$$

- (2) Definiere $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \stackrel{9.5}{\Rightarrow} f \in H(C)$. C ist ein Gebiet.

$\stackrel{11.5}{\Rightarrow} f(C)$ ist ein Gebiet oder f ist auf C konstant. $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(C) \subseteq \mathbb{Z}$. Also ist f auf C konstant.

- (3) Sei f wie im Beweis von (2). Wähle $R > 0$, so daß $\text{Tr}(\gamma) \subseteq U_R(0)$. $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = c \forall z \in C$. Sei $z \in C$, so daß $|z| > 2R$ (geht, da C unbeschränkt).

Für $w \in \text{Tr}(\gamma)$ gilt: $|w - z| \geq |z| - |w| > |z| - R > R > 0$.

¹ γ_1 läuft von $(2, 0)$ aus nach $(-2, 0)$ und dann den Halbkreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 0)$ wieder zurück nach $(2, 0)$

Damit: $|c| = |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \right| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)}.$

Also: $|c| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z|-R)} \quad \forall z \in C \text{ mit } |z| > 2R. \quad C \text{ unbeschränkt} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \text{Behauptung.}$ ■

