

# Kapitel 13

## Grenzwertsätze

### 13.1 Schwache Gesetze der großen Zahlen

**Satz 13.1 (Tschebyscheffs schwaches Gesetz der großen Zahlen)**

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $EX_i = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) < \infty$ . Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

**Beweis**

Mit der Ungleichung von Tschebyscheff (Satz 7.4) folgt:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \stackrel{\text{Satz 9.6}}{=} \frac{\frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n)}{\varepsilon^2} = \\ &= \frac{\text{Var}(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Behauptung

Die Bedingung  $\text{Var}(X_i) < \infty$  soll weg. Zur Vorbereitung brauchen wir einige Ergebnisse aus der Analysis.

**Lemma 13.2** Für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\left|e^{it} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!}\right| \leq \frac{|t|^m}{m!}$$

**Beweis**

Es genügt  $t \geq 0$  zu betrachten, da  $|z| = |\bar{z}|$

Für  $e^{it}$  gilt die folgende Taylorentwicklung mit Integraldarstellung des Restgliedes (Beweis durch Induktion nach  $m$ ):

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} + i^m \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} e^{iu} du$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| e^{it} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| &= \left| \underbrace{i^m}_{|\cdot|=1} \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} \underbrace{e^{iu}}_{|\cdot|=1} du \right| \leq \int_0^t \frac{(t-u)^{m-1}}{(m-1)!} du = \\ &= -\frac{(t-u)^m}{m!} \Big|_0^t = \frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

**Lemma 13.3**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert  $EX = \mu$  und  $\varphi_X(t)$  die zugehörige charakteristische Funktion. Dann gilt  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + i\mu\left(\frac{t}{n}\right) + o_t\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Beweis**

Zu zeigen:  $\forall t \in \mathbb{R}$  gilt:  $\left[ \varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) - \left(1 + i\mu\frac{t}{n}\right) \right] \cdot n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

$$n \cdot \left[ \varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) - \left(1 + i\mu\frac{t}{n}\right) \right] = E \left[ \underbrace{n \cdot \left( e^{i\frac{t}{n}X} - 1 - \frac{itX}{n} \right)}_{=: Y_n} \right]$$

Lemma 13.2 mit  $m = 2$ :

$$|Y_n| \leq n \cdot \frac{\left|\frac{t}{n}X\right|^2}{2!} = \frac{t^2 X^2}{2!n} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Limes und  $E$  kann man hier vertauschen ( $\rightarrow$  majorisierte Konvergenz)

$\Rightarrow$  Behauptung

**Lemma 13.4**

Sei  $z \in \mathbb{C}$  fest  $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\eta_n \in \mathbb{C}$  und  $\eta_n \rightarrow 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n} \right)^n = e^z$$

**Beweis**

1.Fall:  $z = 0$

Zu zeigen:  $(1 + \frac{\eta_n}{n})^n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \left( 1 + \frac{\eta_n}{n} \right)^n - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left( \frac{\eta_n}{n} \right)^k \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left( \frac{|\eta_n|}{n} \right)^k = \left( 1 + \frac{|\eta_n|}{n} \right)^n - 1$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\leq} \frac{|\eta_n|}{n} n(1 + \vartheta)^{n-1} \leq |\eta_n| \left( 1 + \frac{|\eta_n|}{n} \right)^n \leq |\eta_n| \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \underbrace{|\eta_n| \cdot e}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty}$$

2.Fall:  $z \neq 0$

$$\left( 1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n \left( \frac{1 + \frac{z}{n} + \frac{\eta_n}{n}}{1 + \frac{z}{n}} \right)^n = \underbrace{\left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n}_{\rightarrow e^z \text{ für } n \rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n}_{\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ (Fall 1)}}$$

mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

**Satz 13.5 (Khinchins schwaches Gesetz der großen Zahlen, 1929)**

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $E|X_i| < \infty$ ,  $EX_i = \mu$ . Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

**Beweis**

Da  $\mu \in \mathbb{R}$  konstant, genügt wegen Lemma 11.3 zu zeigen  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{d} \mu$

Satz 12.5  $\Rightarrow$  zu zeigen ist:  $\varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}}(t) \rightarrow \varphi_\mu(t) \stackrel{\text{Bsp. 12.1}}{=} e^{it\mu}$

Also:

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}}(t) &\stackrel{\text{Satz 12.1c)}}{=} \varphi_{X_1 + \dots + X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{Satz 12.2}}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\ &\stackrel{\text{Lem. 13.3}}{=} \left(1 + \frac{i\mu t}{n} + o_t\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \stackrel{\text{Lem. 13.4}}{\longrightarrow} e^{it\mu} \end{aligned}$$

**13.2 Das starke Gesetz der großen Zahlen****Satz 13.6 (Kolmogorovs starkes Gesetz der großen Zahlen)**

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $E|X_i| < \infty$ ,  $EX_i = \mu$ . Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{f.s.} \mu$$

ohne Beweis

**Beispiel 13.1 (Monte-Carlo-Simulation)**

Es sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine stetige Funktion.  $M := \max_{x \in [0, 1]} f(x)$ . Wir wollen  $\int_0^1 f(x) dx$  numerisch (näherungsweise) berechnen.

Dazu  $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, wobei die  $(U_i)$  identisch verteilt sind mit  $U_i \sim U(0, 1)$  und die  $(V_i)$  identisch verteilt sind mit  $V_i \sim U(0, M)$ . Wir setzen

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(U_k) > V_k \\ 0 & \text{falls } f(U_k) \leq V_k \end{cases}$$

Dann gilt:  $I_1, I_2, \dots$  sind unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$EI_k = P(f(U_k) > V_k) = P((U_k, V_k) \in G) = \int_0^1 \int_0^{f(x)} \frac{1}{M} \cdot 1 dy dx = \frac{1}{M} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Satz 13.6:} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{M} \int_0^1 f(x) dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

**Beispiel 13.2 (Normale Zahlen)**

Es sei  $\Omega = [0, 1)$  und  $\omega \in \Omega$ . Wir betrachten die Dualbruchzerlegung von  $\omega$ : das heißt

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2^k} \quad a_k \in \{0, 1\}$$

$\omega$  heißt normal, falls die Werte 0 und 1 asymptotisch gleich häufig auftreten.

Wie viele  $\omega \in \Omega$  sind normal?

Sei  $\mathcal{A} = \mathfrak{B}_{[0,1]}$  und definiere die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  durch

$X_n(\omega) = a_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  (Beachte  $X_n$  ist Zufallsvariable)

Weiter sei:

$A_n(x_1, \dots, x_n) := \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = x_1, \dots, X_n(\omega) = x_n\}$   
 $= \{\omega \in \Omega \mid \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \leq \omega < \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\}$  für  $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$  fest.

Wir nehmen an, dass  $P = \text{unif}(0, 1)$ , das heißt  $P([a, b)) = b - a$  für  $0 \leq a < b < 1$ .

Also  $P(A_n(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow P(X_1 = 0) = P(A_1(0)) = \frac{1}{2} = P(X_1 = 1)$

$P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, X_1 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1) =$

$= P(A_2(0, 0)) + P(A_2(1, 0)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

und  $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{1}{4} = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)$  für  $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$

Also sind die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilt

mit  $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$  und  $EX_k = \frac{1}{2}$

Nach Satz 13.6 gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

das heißt fast alle Zahlen des Intervalls  $[0, 1)$  bis auf eine Menge  $A \subset [0, 1)$  mit  $P(A) = 0$  sind “normal“

**13.3 Der zentrale Grenzwertsatz**

Betrachte die Situation aus Satz 13.1:

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen,

$EX_i = \mu, \text{Var}(X_i) < \infty$

Dann gilt:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Setze  $\varepsilon = \hat{\varepsilon} \cdot n^{-\frac{1}{2} + \delta}$  mit  $\delta > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \frac{\hat{\varepsilon}}{n^{\frac{1}{2} - \delta}}\right) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n \cdot \hat{\varepsilon}^2 n^{-1 + 2\delta}} = \frac{\text{Var}(X_1)}{\hat{\varepsilon}^2 n^{2\delta}}$$

$$\text{Also für } \delta > 0 : n^{\frac{1}{2} - \delta} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{P} 0$$

Was ist mit  $\delta = 0$ ?

**Satz 13.7 (Zentraler Grenzwertsatz)**

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $EX_i = \mu$  und  $0 < \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Dann gilt:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} X \sim N(0, 1), \text{ also}$$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Beweis**

Betrachte zunächst den Fall  $\mu = 0, \sigma = 1$

$$\text{zu zeigen: } \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0, 1)$$

$$\varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) \stackrel{\text{Satz 12.1c)}}{=} \varphi_{X_1 + \dots + X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \stackrel{\text{Satz 12.2}}{=} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$\stackrel{\text{vgl. L. 13.3}}{=} \left(1 + \underbrace{\frac{it\mu}{\sqrt{n}}}_{=0} + \frac{(it)^2}{2n} \underbrace{EX^2}_{=1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{\text{nach Lem. 13.4}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Allgemeiner Fall:

Setze  $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$

Also  $Y_1, Y_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilt mit  $EY_1 = 0, \text{Var}(Y_n) = 1$

Wende jetzt Spezialfall an:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0, 1)$$

**Korollar 13.8**

Unter den Voraussetzungen des ZGWS gilt für feste  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ :

$$P\left(\alpha \leq \underbrace{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}_{=: T_n} \leq \beta\right) \rightarrow \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Beweis** Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$\underbrace{F_{T_n}(\beta) - F_{T_n}(\alpha)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} \leq P(\alpha \leq T_n \leq \beta) \leq \underbrace{F_{T_n}(\beta) - F_{T_n}(\alpha - \varepsilon)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(\beta) - \Phi(\alpha - \varepsilon)}$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt daraus die Behauptung. ■

**Satz 13.9** Sind die Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  unabhängig und identisch verteilt mit  $EX_1 = \mu$  sowie  $|\mu|_3 = E|X_1 - \mu|^3$ , so gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{|\mu|_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

### Beispiel 13.3

Es seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_n \sim B(1, p)$ . Also  $EX_n = p$ ,  $\text{Var}(X_n) = p(1-p)$ ,  $0 < p < 1$ . Sei  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , dann gilt nach dem ZGWS:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

Umgeformt ergibt das:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq np + x\sqrt{np(1-p)}) = \Phi(x)$$

Da  $S_n \sim B(n, p)$  heißt das:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq np + x\sqrt{np(1-p)}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \Phi(x)$$

Diese Version nennt man auch **Grenzwertsatz von DeMoivre Laplace**.

### Beispiel 13.4 (Wahlumfrage)

Wir wollen den Anteil  $p$  der Anhänger der Partei A unter den Wahlberechtigten ermitteln. Dazu nehmen wir eine Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ , wobei:

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls Person } i \text{ Partei A wählt} \\ 0 & , \text{ falls Person } i \text{ Partei A nicht wählt} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Sei  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ . Wir schätzen  $\hat{p} = \frac{S_n}{n}$

Wie groß muss der Stichprobenumfang  $n$  mindestens gewählt werden, damit der Schätzfehler  $|\hat{p} - p|$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 nicht größer als 0.02 ist?

Also gesucht ist die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \leq 0.02) \geq 0.95 \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0.95$$

Wegen  $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \quad \forall p \in [0, 1]$  folgt:

$$P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{0.02\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq 0.04\sqrt{n}\right)$$

Für  $n$  groß ist etwa  $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq 0.04\sqrt{n}\right) \approx \Phi(0.04\sqrt{n}) - \Phi(-0.04\sqrt{n}) = 2\Phi(0.04\sqrt{n}) - 1 = 0.95$$

$$\Rightarrow n = (25\Phi^{-1}(0.975))^2 = 2401$$