Karlsruher Institut für Technologie

Skript zur Vorlesung

Algebraische Geometrie I

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Wintersemester 2010/2011

Jonathan Zachhuber, Jens Babutzka und Michael Fütterer
Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Ziel: *Untersuche Nullstellenmengen von Polynomen: Für eine Menge von Polynomen*

$$p_1,\ldots,p_r \in k[X_1,\ldots,X_n]$$

über einem Körper k möchte man die Menge der Nullstellen

$$\{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid p_i(x) = 0 \text{ für alle } i\}$$

analysieren.

Beispiel:
(a) Betrachte $ax^2 + by^2 = 1 \iff ax^2 + by^2 - 1 = 0$ über $k = \mathbb{R}$. Das liefert eine Ellipse, für $a = b = 1$ einen Kreis.
(b) Betrachte $x^2 + y^2 = z^2$.
(c) Betrachte (b) mit $x = 1$: Dann ist $1 + y^2 = z^2 \iff 1 = z^2 - y^2$, also eine Hyperbel.
(d) Bei linearen Gleichungen sehen wir mit Hilfe der linearen Algebra, das wir affine Unterräume erhalten.
(e) Die Lösungsmengen sind abhängig vom Körper, z.B. sehen wir, dass das Polynom $X^3 - X$ für $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als Lösungsmenge ganz k hat.

Der Inhalt der Vorlesung wurde in großen Teilen von der Algebraischen-Geometrie-Vorlesung von Prof. Dr. Frank Herrlich inspiriert.