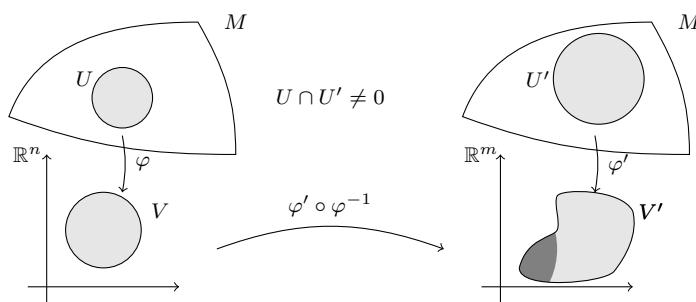


Kapitel 1.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition Eine n -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein topologischer **Hausdorff-Raum** mit einer abzählbaren Basis der **Topologie** in dem zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge U mit $p \in U$ existiert und ein **Homöomorphismus** $\varphi: U \rightarrow V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.



$\varphi' \circ \varphi^{-1}$ ist ein Homöomorphismus offener Mengen des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Nach dem **Satz von Brouwer** (1912) gilt dann $m = n$. Damit ist die Dimension einer zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert.

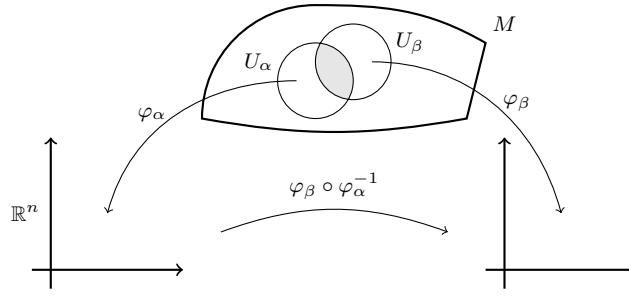
Die Abbildung $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Karte** von M um p , die Menge U heißt **Kartengebiet**.

Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ heißt **Atlas** von M , falls $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = M$.

Ein Atlas \mathcal{A} von M heißt C^k -Atlas, wenn für alle $\alpha, \beta \in J$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ der sogenannte **Kartenwechsel**:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ein C^k -**Diffeomorphismus** ist.



Eine Karte $\psi: U \rightarrow V$ von M heißt **verträglich** mit einem C^k -Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ wenn jeder Kartenwechsel

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

ein C^k -Diffeomorphismus ist, also $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{(\psi, U)\}$ ebenfalls ein C^k -Atlas ist. Die Menge aller mit \mathcal{A} verträglichen Karten ist ein **maximaler C^k -Atlas**. Jeder maximale Atlas enthält alle mit ihm verträglichen Karten. Ein maximaler C^k -Atlas heißt auch **C^k -differenzierbare Struktur**.

Definition 1.1 (differenzierbare Mannigfaltigkeit) Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse C^k ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer C^k -differenzierbaren Struktur.

Beispiel Einige Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten:

- 1) $M = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \{(\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$
- 2) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{A} = \{(\iota_M, M)\}$
- 3) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine eindimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit:

$$U = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (0, 2\pi)\}$$

ist offen in S^1 und die Kartenabbildung

$$\varphi: (\sin t, \cos t) \mapsto t$$

ist ein Homöomorphismus.

$$\varphi': U' = \{(\sin t, \cos t) \mid t \in (-\pi, \pi)\} \rightarrow (-\pi, \pi)$$

ebenfalls. $\mathcal{A} = \{(\varphi, U), (\varphi', U')\}$ ist ein Atlas von S^1 , denn $U \cup U' = S^1$.

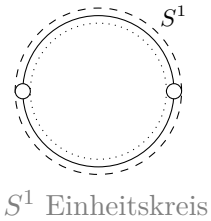
$$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

$$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \rightarrow (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \quad t \mapsto \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

- 4) Jeder reelle Vektorraum endlicher Dimension ist in kanonischer Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Wähle eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V . Diese definiert mit

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$



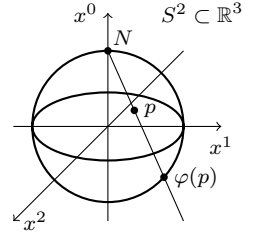
S^1 Einheitskreis

eine Bijektion auf \mathbb{R}^n . Damit erhält man eine globale Karte von V . Der zugehörige Atlas hängt nicht von der Wahl der Basis ab, denn ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere Basis von V und $\psi(\sum \lambda_i w_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine weitere Karte, so ist $\varphi \circ \psi^{-1}$ als **Endomorphismus** des \mathbb{R}^n schon C^∞ .

5) $S^n = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$.

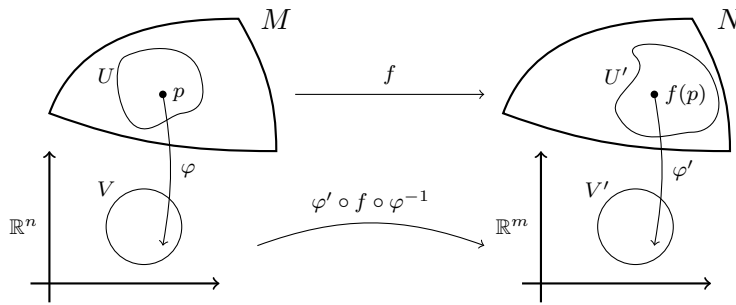
Betrachte den Nordpol $N = (1, 0, \dots, 0)$ und den Südpol $S = (-1, 0, \dots, 0)$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: U = S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left(\frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0} \right), \\ \psi: U' = S^n \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^n & x &\mapsto \left(\frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0} \right) \end{aligned}$$



Aufgabe: Zeige, dass $(\varphi, U), (\psi, U')$ einen C^∞ -Atlas auf S^n definiert.

Definition 1.2 (Differenzierbare Abbildungen) Eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißt **glatt** (C^∞ -differenzierbar), wenn es zu jedem $p \in M$ Karten (φ, U) in M um p und geeignete (φ', U') in N um $f(p)$ gibt, so dass $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatt ist.



Die Menge aller glatten Abbildungen von M nach N wird $C^\infty(M, N)$ genannt.

Konvention: Ab jetzt seien zunächst alle Mannigfaltigkeiten, wie auch alle Abbildungen als glatt vorausgesetzt.

Bemerkung Da Kartenwechsel C^∞ sind, gilt obige Bedingung automatisch für alle Karten von M und N (evtl. nach Einschränkung).

Beispiel Es folgen zwei Beispiele für differenzierbare Abbildungen:

1. $(\varphi, U) \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, denn

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty.$$

2. $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, P) \Rightarrow g \circ f \in C^\infty(M, P)$, denn

$$\varphi_p \circ g \circ f \circ \varphi_m^{-1} = (\varphi_p \circ g \circ \varphi_n^{-1}) \circ (\varphi_n \circ f \circ \varphi_m^{-1}) \in C^\infty.$$

Definition 1.3 (Diffeomorphismus) Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv ist und f , sowie f^{-1} C^∞ -Abbildungen von M nach N sind. Insbesondere haben M und N in diesem Fall dieselbe Dimension. Die Menge der Diffeomorphismen von M nach M wird mit $\text{Diff}(M)$ bezeichnet. $(\text{Diff}(M), \circ)$ ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

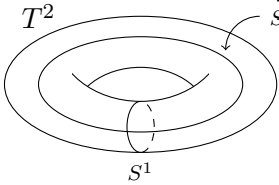
1. Produkte von Mannigfaltigkeiten

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n . Dann hat $M \times N$ versehen mit der **Produkttopologie**, die Struktur einer Mannigfaltigkeit. Da M und N hausdorffsch sind und abzählbare Basen ihrer Topologie besitzen gilt dies auch für $M \times N$. Sind (φ, U) und (ψ, V) Karten von M bzw. N , so ist $\varphi \times \psi$ ein Homöomorphismus von $U \times V$ auf sein offenes Bild in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.

Seien $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ und $\mathcal{A}' = \{(\psi_\beta, V_\beta) \mid \beta \in \mathcal{J}\}$ C^∞ -Atlanten von M und N . Dann ist $\mathcal{B} = \{(\varphi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \times V_\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$ ein C^∞ -Atlas von $M \times N$, denn

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\mu \times \psi_\nu)^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\mu^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_\nu^{-1})$$

ist ein C^∞ -Diffeomorphismus. Damit ist $M \times N$ in kanonischer Weise eine glatte $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die kanonischen Projektionen $\pi_M: M \times N \rightarrow M$, $\pi_N: M \times N \rightarrow N$ und die Abbildung $\tau: M \times N \rightarrow N \times M, (p, q) \mapsto (q, p)$ sind glatte Abbildungen.



Beispiel Es folgen einige Beispiele für Produkt-Mannigfaltigkeiten:

1) Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$

2) $T^n = \times_{i=1}^n S^1$

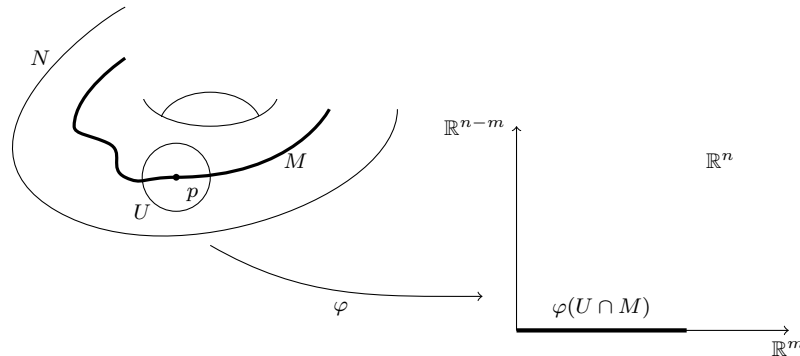
$$\iota: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, 0, \dots)$$

2. Untermannigfaltigkeiten

Definition 1.4 (Untermannigfaltigkeit) Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subseteq N$ heißt **Untermannigfaltigkeit** von N , wenn für alle $p \in M$ eine Karte (φ, U) von N um p existiert, so dass

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^m \times \{0\})}_{\{(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n\}}$$

gilt. Eine solche Karte heißt an M **adaptierte Karte**. Die Zahl $n - m$ heißt **Kodimension** von M in N .



Lemma 1.5 Es seien N eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $M \subseteq N$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von N . Bezeichnet \mathcal{A} einen C^∞ -Atlas von N und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^m, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$, so ist

$$\mathcal{B} = \{(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}, U \cap M) \mid (\varphi, U) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ adaptierte Karte}\}$$

ein C^∞ -Atlas von M .

Beweis Die Hausdorff-Eigenschaft und die Abzählbarkeit der Topologie werden von N auf M vererbt. Ist $p \in N$, so existiert eine adaptierte Karte (φ, U) von N um p und $\pi \circ \varphi|_{U \cap M}$ ist ein Homöomorphismus von $U \cap M$ auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^m . Jeder Kartenwechsel

$$(\pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \circ (\pi \circ \psi|_{V \cap M})^{-1} = (\pi \circ \varphi) \circ (\psi^{-1} \circ \iota) = \pi \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \iota$$

ist ein C^∞ -Diffeomorphismus. □

Bemerkung Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , wenn für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U und eine Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ist ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bild im \mathbb{R}^n .
- (ii) $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Jedes solche M ist eine Untermannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.4, denn jedes φ wie oben ist wegen (i) eine Karte von \mathbb{R}^n (im Sinne glatter Mannigfaltigkeiten) und wegen (ii) eine an M adaptierte Karte. Also sind mit Lemma 1.5 glatte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n glatte Mannigfaltigkeiten (im allgemeineren Sinne).

