Algebra II Übung vom 27.4.06

Moduln

1.3

(a) R-Untermoduln
Eine Untergruppe N eines R-Moduls M heißt R-Untermodul von M, falls $R \cdot N \subseteq N$

Beispiel

- Jedes Ideal ist ein R-Untermodul von R
- R^a ist Untermodul von R^b mit $a \leq b \in \mathbb{N}$

(b) Kern und Bild R-linearer Abbildungen sind R-Moduln. Sei $\varphi : M \to N$ R-lineare Abbildung

- Kern(φ): $m \in \text{Kern}(\varphi)$, $r \in R$:
$\varphi(rm) = r\varphi(m) = 0 \Rightarrow R \cdot \text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}\varphi$; Untergruppe klar
- Bildφ: $n \in \text{Bild}\varphi$, d. h. $\exists m : n = \varphi(m), m \in M \Rightarrow r \in R : rn = r\varphi(m) = \varphi(rm) \in \text{Bild}(\varphi) \Rightarrow R \cdot \text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$

(c) Zu jedem Untermodul $N \subseteq M$ gibt es einen Faktormodul M/N (M abelsch $\Rightarrow$ jedes N Normalteiler)

- M/N ist abelsche Gruppe
- Wir definieren R-Aktion auf M/N durch $r(m + N) = rm + N$. Das ist wohldefiniert, denn
$r((m + n) + N) = r(m + n) + N = rm + \underbrace{rn}_{\in N} + N = rm + N$
- $r((m + N) + (m' + N)) = r(m + m') + N) = r(m + m') + N = rm + N + rm' + N = r(m + N) + r(m' + N)$

(d) Homomorphiesatz: Für einen surjektiven homomorphismus $\varphi : M \to N$ gilt: $M/\text{Kern}(\varphi) \cong N$ (Bild fehlt)

- Wohldefiniertheit von $\tilde{\varphi} : M/\text{Kern}(\varphi) \to N$:
Sei $k \in \text{Kern}\varphi : \varphi(m + k) = \varphi(m)$
- surjektiv: $\forall n \in N : n = \varphi(m) = \tilde{\varphi}(m + \text{Kern}(\varphi)$
- injektiv: $m, m' \in M$ mit $\varphi(m) = \varphi(m') = n \in N \leftrightarrow \varphi(m - m') = 0 \to m + \text{Kern}(\varphi)(m) = \text{Kern}(\varphi)(m')$

- $\tilde{\varphi}$ ist R-linear. Klar, wegen φ R-linear.

(e) Direktes Produkt: Sei $\{M_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Meng von Moduln. Dann ist ihr direktes Produkt $\Pi_i M_i = X_i M_i$ gegeben durch die Menge aller Tupel $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i \in M_i$ und die R-Aktion $r(m_i)_{i\in I} = (rm_i)_{i\in I}$.
Direkte Summe: Das gleiche wie beim dirketen Produkt, jedoch dürfen in den Tupeln nur endlich viele $m_i \neq 0$ sein.

Beispiel $R^n = \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n\text{-mal}}$

1.4

(f) - Freie Moduln verhalten sich wie Vektorräume Sei R ein Ring, M freier R-Modul $\{x_i\}_{i\in I}, x_i \neq x_j (i \neq j)$ Basis von M. Sei N weiterer R-Modul und $\{y_i\}_{i\in I}$ Familie von Elementen von N .
Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : M \to N$ mit $\varphi(x_i) = y_i \quad \forall i \in I$

Beweis: Sei $x \in M$. Dann ist durch $x = \sum_i a_i x_i \quad \{a_i\}_{i\in I}$ eindeutig bestimmt.
Wir setzen: $\varphi(x) := \sum_i a_i y_i = \sum_i a_i \varphi(x_i)$

Korollar 1: Falls $\{y_i\}_{i\in I}, y_i \neq y_j (i \neq j)$ Basis von N ist, ist φ Ismomorphismus

Beweis: wir können den Beweis des Satzes rückwärts anwenden $\Rightarrow \exists \psi : N \to M \text{mit} \psi(y_i) = x_i \forall i \in I \Rightarrow \varphi \circ \psi = id_N, \psi \circ \varphi = id_M$

Korollar 2: Zwei freie Moduln mit gleicher Basis sind isomorph.

Proposition: Sei M freier Modul. Dann ist M^* wieder frei und hat dieselbe Dimension wie M

1.5 Proposition:

(b) Sei $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ exakt.
Dann: $0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(M', N)$ exakt.

Beweis:

- β^* inj: Für $\varphi \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ ist $\beta^*(\varphi) = \varphi \circ \beta$
  Sei $\beta^*(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \circ \beta = 0 \overset{\beta \text{ surj.}}{\rightarrow} \varphi = 0$.
- $\mathrm{Bild}(\beta^*) \subseteq \mathrm{Kern}(\alpha^*)$: $(\alpha^* \circ \beta^*)(\varphi) = \alpha^*(\varphi \circ \beta) = \varphi \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0} = 0$
- $\mathrm{Kern}(\alpha^*) \subseteq \mathrm{Bild}(\beta^*)$: Sei $\psi \in \mathrm{Kern}(\alpha^*)$. D. h. $\psi \in \mathrm{Hom}(M, N)$ mit $\psi \circ \alpha = 0$
  Weil ψ auf $\mathrm{Bild}(\alpha)$ verschwindet, kommutiert DIAGRAMM
  $\Rightarrow \beta^*(\sigma) = \psi \Longrightarrow$ Beh.

(c) im Allgemeinen sind β_* und α^* nicht surjektiv
z.B.:

α: $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 2}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Es gilt: $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{0\}$
$\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0, id\} \Longrightarrow N$ nicht projektiv!

β: $0 \to \mathbb{Z} \overset{\cdot 4}{i} \overset{\rightarrow}{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$ mit $N := 2 \cdot \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, N) = \{0, \Psi\}$, wobei $\Psi(1) = 2$.
Dann: $\alpha^*(\Psi) = \Psi \circ \alpha = 0$

Satz: (a) Ein R-Modul N ist genau dann injektiv, wenn DIAGRAMM kommutiert (Von M' nach N kommutiert mit Einbettung α von M' in M und einer lin. Abb)
(b) Ein R-Modul N ist genau dann injektiv, falls DIAGRAMM kommutiert (phi nach (Ideal I einbettung in R) kommutiert mit abb von I nach N..)