26. Zwei Eindeutigkeitssätze

Stets in diesem Paragraphen: $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$. Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz 26.1 (Satz von Nagumo)
Es gelte

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \frac{|y - \tilde{y}|}{|x - x_0|} \ \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D \text{ mit } x \neq x_0 \,.$$

Dann hat (A) höchstens eine Lösung auf I.

Beweis
Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (A) auf I, $y := y_1 - y_2$. ($\implies y(x_0) = 0$)

$\lim_{x \to x_0} \frac{y(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = y'(x_0) = y_1'(x_0) - y_2'(x_0) = f(x_0, y_1(x_0)) - f(x_0, y_2(x_0)) = 0$.

Definiere $h : i \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \begin{cases} \frac{|y(x)|}{|x - x_0|}, & x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & x = x_0 \end{cases} \implies h \in C(I, \mathbb{R})$. Voraussetzung $\implies |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq h(t) \ \forall t \in I$.

$$\begin{aligned} \forall x \in I : |y(x)| &= |y_1(x) - y_2(x)| \\ &\overset{12.1}{=} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} h(t) dt \right| \end{aligned}$$

Annahme: $\exists x_1 \in I : y(x_1) \neq 0$. Dann: $x_1 \neq x_0$, etwa $x_0 < x_1$; $h(x_1) > 0$, $h(x_0) = 0$. $\exists \xi \in [x_0, x_1] : h(t) \leq h(\xi) \ \forall t \in [x_0, x_1]$. Dann: $h(\xi) > 0 \implies \xi \neq x_0$, also $x_0 < \xi$.

$$\begin{aligned} \text{Dann: } h(\xi) = \frac{|y(\xi)|}{|\xi - x_0|} = \frac{|y(\xi)|}{\xi - x_0} &\leq \frac{1}{\xi - x_0} \left| \int_{x_0}^{\xi} h(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{\xi - x_0} \int_{x_0}^{\xi} h(t) dt < \frac{1}{\xi - x_0} \int_{x_0}^{\xi} h(\xi) dt = h(\xi), \text{ Widerspruch.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 26.2 (Satz von Osgood)
Es sei $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und > 0 auf $(0, \infty)$, $t_0 > 1$ und das uneigentliche Integral $\int_0^{t_0} \frac{du}{\phi(u)}$ sei divergent.
Weiter gelte

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \phi(|y - \tilde{y}|) \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in D \text{ mit } y \neq \tilde{y}.$$

Dann hat (A) auf I höchstens eine Lösung.

Bemerkung: f genüge auf D einer LB bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten L: $\phi(u) := Lu$

Beweis
o.B.d.A: $x_0 = a$. $\int_0^{t_0} \frac{du}{\phi(u)}$ div. $\implies \int_{\frac{1}{k}}^{t_0} \frac{du}{\phi(u)} \to \infty (k \to \infty)$.
Daher: o.B.d.A: $\int_{\frac{1}{k}}^{t_0} \frac{du}{\phi(u)} > 2(b - a) \forall k \in \mathbb{N}$.

(I): Sei $k \in \mathbb{N}$. Definiere $g_k : [\frac{1}{k}, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $g_k(t) := \int_{\frac{1}{k}}^{t} \frac{du}{\phi(u)}$
Dann: $g_k \in C^1([\frac{1}{k}, \infty)$, $g_k' = \frac{1}{\phi} > 0$, g_k ist streng wachsend, $g_k(\frac{1}{k}) = 0$, $g_k(t_0) > 2(b - a)$
ZWS $\implies [0, 2(b - a)] \subseteq g_k([\frac{1}{k}, \infty))$
Für $x \in I = [a, b] : 2(x - a) \in [0, 2(b - a)]$.
Definiere $\Psi_k : I \to \mathbb{R}$ durch $\Psi_k(x) := g_k^{-1}(2(x - a))$.
$\implies (i) : 2(x - a) = g_k(\Psi_k(x)) = \int_{\frac{1}{k}}^{\Psi_k(x)} \frac{du}{\phi(u)} \forall x \in I$.
g_k streng wachsend $\implies g_k^{-1}$ streng wachsend $\implies \Psi_k$ streng wachsend.
$\Psi_k(a) = \Psi_k(x_0) = g_k^{-1}(0) = \frac{1}{k}$, $\Psi_k(x) > \frac{1}{k} \forall x \in (a, b]$.
g_k ist stetig db $\implies g_k^{-1}$ stetig db $\implies \Psi_k$ stetig db.
Aus (i): $2 = g_k'(\Psi_k(x))\Psi_k'(x) = \frac{1}{\phi(\Psi_k(x))}\Psi_k'(x) \forall x \in I$
$\implies$ (ii): $\Psi_k' = 2\phi(\Psi_k(x)) > 0 \forall x \in I$.

(II): <u>Behauptung:</u> $\Psi_k(x) \to 0 (k \to \infty) \forall x \in I$.
<u>Beweis:</u> Sei $x \in I$. **Annahme:** $\Psi_k(x) \not\to 0 (k \to \infty)$.
Dann $\exists \epsilon_0 > 0$ und eine TF $(\Psi_{k_j}(x))$ von $(\Psi_k(x))$ mit:
$\epsilon_0 \geq 0 \Psi_{k_j}(x) \forall j \in \mathbb{N}$.
$c_j := \int_{\frac{1}{k_j}}^{\epsilon_0} \frac{du}{\phi(u)} (j \in \mathbb{N})$. Vorraussetzung $\implies c_j \to \infty (j \to \infty)$.
Aber: $c_j = \int_{\frac{1}{k_j}}^{\varepsilon_0} \frac{du}{\phi(u)} \leq \int_{\frac{1}{k_j}}^{\Psi_{k_j}(x)} \frac{du}{\phi(u)} \overset{(1)}{=} 2(x - a) \forall j \in \mathbb{N}$.
Widerspruch zu $c_j \to \infty$!

(III): Sei y_1, $y_2 : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von (A) auf I. $y := y_1 - y_2$.
Wir zeigen: $|y(x)| \leq \Psi_k(x) \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in I$. (Mit (II) folgt dann: $y == 0$ auf I.)
Sei $k \in \mathbb{N}$.
Annahme: $M := x \in I : |y(x)| > \Psi_k(x) \neq \emptyset$.
$y(a) = y(x_0) = y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0 \implies a \notin M . \xi := \inf M$
y,Ψ_k stetig $\implies |y(\xi)| \geq \Psi_k(\xi) \implies \xi > a$ und $|y(x)| \leq \Psi_k(x) \forall x \in [a, \xi)$ (iii)

$\xrightarrow{x \to \xi-}$ $|y(\xi)| \leq \Psi_k(\xi)$. Also: $|y(\xi)| = \Psi_k(\xi)$. D.h.: $+- \, y(\xi) = \Psi_k(\xi)$. o.B.d.A: $y(\xi) = \Psi_k(\xi)$. (sonst betrachte $y_2 - y_1 = -y$).
Aus (iii) folgt: $\exists \alpha > 0$ so, dass $\xi - \alpha \geq a$ und $0 < y \leq \Psi_k$ auf $[\xi - a, \xi]$.
Sei $x \in (\xi - \alpha, \xi) \implies y(x) \leq \Psi_k(x) \implies y(x) - y(\xi) \leq \Psi_k(x) - \Psi_k(\xi)$
$\implies \frac{y(x)-y(\xi)}{x-\xi} \geq \frac{\Psi_k(x)-\Psi_k(\xi)}{x-\xi} \xrightarrow{x \to \xi-} y'(\xi) \geq \Psi'_k(\xi) \implies \Psi'_k(\xi) \leq y'(\xi) = y'_1(\xi) - y'_2(\xi)$
$= f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi)) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2}\Psi'_k(\xi) \implies \Psi'_k(\xi) \leq 0$, Widersruch zu (ii)!.