

## 5. Differentiation

**Vereinbarung:** Stets in dem Paragraphen:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion, also  $f = (f_1, \dots, f_m)$

### Definition

- (1) Sei  $k \in \mathbb{N}$ .  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) : \iff f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$  ( $j = 1, \dots, m$ )
- (2) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt partiell differenzierbar in  $x_0 : \iff$  jedes  $f_j$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von  $f$  in  $x_0$ .

**Beachte:** (1)  $J_f(x_0)$  ist eine  $(m \times n)$ -Matrix, (2) Ist  $m = 1 \implies J_f(x_0) = \text{grad } f(x_0)$

**Erinnerung:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0 \in I$ .  $\varphi$  ist in  $x_0$  differenzierbar

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{ANA}}{\iff} \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \\ & \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{h} = 0 \\ & \iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - ah}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

### Definition

- (1) Sei  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt **differenzierbar** (db) in  $x_0 : \iff \exists (m \times n)$ -Matrix  $A : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0$  (\*)
- (2)  $f$  heißt differenzierbar auf  $D : \iff f$  ist in jedem  $x \in D$  differenzierbar.

### Bemerkungen:

- (i)  $f$  ist differenzierbar in  $x_0 \iff \exists (m \times n)$ -Matrix  $A$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

- (ii) Ist  $m = 1$ , so gilt:  $f$  ist differenzierbar in  $x_0$

$$\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{\|h\|} = 0 (**)$$

(iii) Aus 2.1 folgt:  $f$  ist differenzierbar in  $x_0 \iff$  jedes  $f_j$  ist differenzierbar in  $x_0$ .

**Satz 5.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)**

$f$  sei in  $x_0 \in D$  differenzierbar

- (1)  $f$  ist in  $x_0$  stetig
- (2)  $f$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar und die Matrix  $A$  in (\*) ist eindeutig bestimmt:  
 $A = J_f(x_0)$ .  $f'(x_0) := A = J_f(x_0)$  (**Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ ).

**Beweis**

Sei  $A$  wie in (\*),  $A = (a_{jk})$ ,  $\varrho(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{\|h\|}$ , also:  $\varrho(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). Sei  $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ . 2.1  $\implies \varrho_j(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) ( $j = 1, \dots, m$ )

$$(1) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{Ah}_{\xrightarrow{3.5} 0} + \underbrace{\|h\|\varrho(h)}_{\rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} \rightarrow f(x_0) \quad (h \rightarrow 0)$$

- (2) Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Zu zeigen:  $f_j$  ist partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$ .  $\varrho_j(h) = \frac{1}{\|h\|}(f_j(x_0+h) - f_j(x_0) - (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). Für  $t \in \mathbb{R}$  sei  $h = te_k \implies \varrho_j(h) = \frac{1}{|t|}(f_j(x_0 + te_k) - a_{jk}t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies \left| \frac{f_j(x_0 + te_k) - f_j(x_0)}{t} - a_{jk} \right| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies f_j$  ist in  $x_0$  partiell differenzierbar und  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) = a_{jk}$ . ■

**Beispiele:**

(1)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt:  $f$  ist in  $(0, 0)$  **nicht** stetig, aber partiell differenzierbar und  $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$   
 5.1  $\implies f$  ist in  $(0, 0)$  **nicht** differenzierbar.

(2)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$ :  $|f(x, y)| = (x^2 + y^2) \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$   $f$  ist in  $(0, 0)$  stetig.  $\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} t^2 \sin \frac{1}{|t|} = t \sin \frac{1}{|t|} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ )  $\implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $x$  und  $f_x(0, 0) = 0$ . Analog:  $f$  ist in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar nach  $y$  und  $f_y(0, 0) = 0$ .  $\varrho(h) = \frac{1}{\|h\|} f(h) \stackrel{h=(h_1, h_2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} (h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\text{beschränkt}} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ )  $\implies f$  ist differenzierbar in  $(0, 0)$  und  $f'(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$

(3)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Übung:  $f$  ist in  $(0, 0)$  stetig.

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3}{t^2} = 1 \rightarrow 1 \quad (t \rightarrow 0). \quad \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

$\implies f$  ist in  $(0, 0)$  partiell db und  $\text{grad } f(0, 0) = (1, 0)$ .

$$\text{Für } h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) : \rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \text{grad } f(0, 0) \cdot h) = \frac{1}{\|h\|} \left( \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1 \right) = \frac{1}{\|h\|} \frac{-h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

Für  $h_2 = h_1 > 0 : \rho(h) = \frac{-h_1^3}{(\sqrt{2})^3 h_1^3} = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \implies \rho(h) \not\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies f$  ist in  $(0, 0)$  nicht db.

### Satz 5.2 (Stetigkeit aller partiellen Ableitungen)

Sei  $x_0 \in D$  und alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  seien auf  $D$  vorhanden und in  $x_0$  stetig ( $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$ ). Dann ist  $f$  in  $x_0$  db.

### Beweis

O.B.d.A:  $m = 1$  und  $x_0 = 0$ . Der Übersicht wegen sei  $n = 2$ .

Für  $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) :$

$$\rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (f(h) - f(0, 0) - \underbrace{(h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))}_{=\text{grad } f(0, 0) \cdot h})$$

$$f(h) - f(0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \underbrace{f(h_1, h_2) - f(0, h_2)}_{=: \Delta_1} + \underbrace{f(0, h_2) - f(0, 0)}_{=: \Delta_2}$$

$$\varphi(t) := f(t, h_2), \quad t \text{ zwischen } 0 \text{ und } h_1 \implies \Delta_1 = \varphi(h_1) - \varphi(0), \quad \varphi'(t) = f_x(t, h_2)$$

Aus dem Mittelwertsatz aus Analysis I folgt:  $\exists \xi = \xi(h)$  zw. 0 und  $h_1 : \Delta_1 = h_1 \varphi'(\xi) = h_1 f_x(\xi, h_2)$   
 $\exists \eta = \eta(h)$  zw. 0 und  $h_2 : \Delta_2 = h_2 \varphi(\eta) = h_2 f_y(\eta, h_2)$

$$\implies \rho(h) := \frac{1}{\|h\|} (h_1 f_x(\xi, h_2) - h_2 f_y(0, \eta) - (h_1 f_x(0, 0) + h_2 f_y(0, 0))) \\ = \frac{1}{\|h\|} h \underbrace{(f_x(\xi, h_2) - f_x(0, 0), f_y(0, \eta) - f_y(0, 0))}_{=: v(h)} = \frac{1}{\|h\|} h \cdot v(h)$$

$$\implies |\rho(h)| = \frac{1}{\|h\|} |h \cdot v(h)| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\|h\|} \|h\| \|v(h)\| = \|v(h)\|$$

$f_x, f_y$  sind stetig in  $(0, 0) \implies v(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \implies \rho(h) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$  ■

### Folgerung 5.3

Ist  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \implies f$  ist auf  $D$  db.

### Definition

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ . Dann heißt  $f$  auf  $D$   $k$ -mal stetig db.

### Beispiele:

$$(1) \quad f(x, y, z) = (x^2 + y, xyz). \quad J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

$\xrightarrow{5.3}$   $f$  ist auf  $\mathbb{R}^3$  db und  $f'(x, y, z) = J_f(x, y, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

(2) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear, es ex. also eine  $(m \times n)$ -Matrix  $A : f(x) = Ax$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt:

$$\rho(h) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) = \frac{1}{\|h\|} (f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)) = 0.$$

Also:  $f$  ist auf  $\mathbb{R}^n$  db und  $f'(x) = A \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Insbesondere ist  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

(2.1)  $n = m$  und  $f(x) = x = Ix$  ( $I = (m \times n)$ -Einheitsmatrix). Dann:  $f'(x) = I \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

(2.2)  $m = 1 : \exists a \in \mathbb{R}^n : f(x) = ax$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) (Linearform).  $f'(x) = a \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

(3)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bekannt:  $f$  ist in  $(0, 0)$  db. Übungsblatt:  $f_x, f_y$  sind in  $(0, 0)$  *nicht* stetig.

(4) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g = (g_1, \dots, g_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m; g_1, \dots, g_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

$g$  ist in  $t_0 \in I$  db  $\iff g_1, \dots, g_m$  sind in  $t_0 \in I$  db. In diesem Fall gilt:  $g'(t_0) = (g'_1(t_0), \dots, g'_m(t_0))$ .

(4.1)  $m = 2 : g(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]. g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ .

(4.2) Seien  $a, b \in \mathbb{R}^m, g(t) = a + t(b - a), t \in [0, 1], g'(t) = b - a$ .

#### Satz 5.4 (Kettenregel)

$f$  sei in  $x_0 \in D$  db,  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^m, E$  sei offen,  $f(D) \subseteq E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$  sei db in  $y_0 := f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  db in  $x_0$  und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \text{ (Matrizenprodukt)}$$

#### Beweis

$A := f'(x_0), B := g'(y_0) = g'(f(x_0)), h := g \circ f$ .

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0) - B(y - y_0)}{\|y - y_0\|} & , \text{ falls } y \in E \setminus \{y_0\} \\ 0 & , \text{ falls } y = y_0 \end{cases}$$

$g$  ist db in  $y_0 \implies \tilde{g}(y) \rightarrow 0 (y \rightarrow y_0)$ . Aus Satz 5.1 folgt, dass  $f$  stetig ist in  $x_0 \implies f(x) \rightarrow f(x_0) = y_0 (x \rightarrow x_0) \implies \tilde{g}(f(x)) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$

Es ist  $g(y) - g(y_0) = \|y - y_0\| \tilde{g}(y) = B(y - y_0) \forall y \in E$ .

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)}{\|x - x_0\|} &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (g(f(x)) - g(f(x_0)) - BA(x - x_0)) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (\|f(x) - f(x_0)\| \tilde{g}(f(x)) + B(f(x) - f(x_0)) - BA(x - x_0)) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{=: D(x)} \underbrace{\tilde{g}(f(x))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{B\left(\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right)}_{\substack{f \xrightarrow{\text{db}} 0 \ (x \rightarrow x_0) \\ \xrightarrow{3.5} 0 \ (x \rightarrow x_0)}}$$

Noch zu zeigen:  $D(x)$  bleibt in der „Nähe“ von  $x_0$  beschränkt.

$$\begin{aligned} 0 \leq D(x) &= \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) + A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \\ &= \underbrace{\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\rightarrow 0 \ (x \rightarrow x_0)} + \underbrace{\frac{\|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\leq \|A\|}. \end{aligned}$$

■

**Wichtigster Fall**  $g = g(x_1, \dots, x_m)$  reellwertig,  $h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  ( $g \circ f$ )( $x$ ).

$$h_{x_j}(x) = g_{x_1}(f(x)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{x_2}(f(x)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \dots + g_{x_m}(f(x)) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

**Beispiel**

$$g = g(x, y, z), \quad h(x, y) = g(xy, x^2 + y, x \sin y) = g(f(x, y)).$$

$$h_x(x, y) = g_x(f(x, y))y + g_y(f(x, y))2x + g_z(f(x, y)) \sin y.$$

$$h_y(x, y) = g_x(f(x, y))x + g_y(f(x, y))1 + g_z(f(x, y))x \cos y.$$

**Hilfssatz**

Es sei  $A$  eine  $(m \times n)$ -Matrix (reell), es sei  $B$  eine  $(n \times n)$ -Matrix (reell) und es gelte

(i)  $BA = I (= (n \times n)\text{-Einheitsmatrix})$  und

(ii)  $AB = \tilde{I} (= (m \times m)\text{-Einheitsmatrix})$

Dann:  $m = n$ .

**Beweis**

$\Phi(x) := Ax (x \in \mathbb{R}^n)$ . Lin. Alg.  $\implies \Phi$  ist linear,  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $\xrightarrow{(i)} \Phi$  ist injektiv, also  $\text{Kern} \Phi = 0$ . (ii) Sei  $z \in \mathbb{R}^m, x := Bz \xrightarrow{(ii)} z = ABz = Ax = \Phi(x) \implies \Phi$  ist surjektiv. Dann:  $n = \dim \mathbb{R}^n \stackrel{\text{LA}}{=} \dim \text{Kern} \Phi + \dim \Phi(\mathbb{R}^n) = m$ . ■

### Satz 5.5 (Injektivität und Dimensionsgleichheit)

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei db auf  $D$ , es sei  $f(D)$  offen,  $f$  injektiv auf  $D$  und  $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei db auf  $f(D)$ . Dann:

(1)  $m = n$

(2)  $\forall x \in D : f'(x)$  ist eine invertierbare Matrix und  $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$

**Beachte:**

## 5. Differentiation

- (1) Ist  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  db, so muss i. A.  $f(D)$  nicht offen sein. Z.B.:  $f(x) = \sin x, D = \mathbb{R}, f(D) = [-1, 1]$
- (2) Ist  $D$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  db und injektiv, so muss i.A.  $f^{-1}$  nicht db sein. Z.B.:  $f(x) = x^3, D = \mathbb{R}, f^{-1}$  ist in 0 nicht db.

### Beweis

von 5.5:  $g := f^{-1}; x_0 \in D, z_0 := f(x_0) (\implies x_0 = g(z_0))$  Es gilt:  $g(f(x)) = x \forall x \in D, f(g(z)) = z \forall z \in f(D) \xrightarrow{5.4} g'(f(x)) \cdot f'(x) = I \forall x \in D; f'(g(z)) \cdot g'(z) = \tilde{I} \forall z \in f(D) \implies \underbrace{g'(z_0)}_{=:B} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=:A} = I, f'(x_0) \cdot g'(z_0) = \tilde{I} \xrightarrow{5.5} m = n \text{ und } f'(x_0)^{-1} = g'(z_0) = (f^{-1})'(f(x_0)).$  ■