

## 6. Jacobi-Felder (Verbindung Geometrie–Krümmung)

### 6.1. Jacobi-Gleichung

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Für  $v \in T_p M$  sei  $\exp_p$  definiert. Wir betrachten die parametrisierte Fläche  $f(t, s) := \exp_p(tv(s))$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und  $-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$ , wobei  $v(s)$  eine Kurve in  $T_p M$  mit  $\|v(s)\| = \|v(0)\|$ ,  $v(0) = v$ ,  $v'(0) = w$  ist.

Es gilt (vergleiche Beweis Gauß-Lemma):

$$d\exp_p|_v w = \frac{\partial l}{\partial s}(1, 0) = T_{\exp_p(v)} M.$$

$\|d\exp_p|_v w\|$  ist ein Maß dafür, wie schnell die Geodätischen  $t \mapsto f(t, s)$  auseinanderlaufen.

Betrachte dazu das Vektorfeld  $d\exp_p|_{tv} tw = \frac{\partial f}{\partial s}(t, v)$  längs  $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Wir halten fest: Da  $\gamma$  eine Geodätische ist, gilt für alle  $t, s$ :  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 0$ .

#### Lemma 6.1

$$f: \begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \\ (u, v) \mapsto f(u, v) \end{array}$$

sei eine parametrisierte Fläche und  $V(u, v)$  sei ein Vektorfeld längs  $f$ . Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial V} \frac{D}{\partial U} V - \frac{D}{\partial U} \frac{D}{\partial V} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial U}, \frac{\partial f}{\partial V}\right)V$$

wobei  $\frac{D}{\partial U} = D_{\frac{\partial f}{\partial U}}$ .

#### Beweis

Betrachte Karte  $(U, \varphi)$ . Dann sind die Basisfelder also  $V = \sum_{i=1}^n v^i X_i$ ,  $v^i = v^i(u, v)$ ,  $\frac{D}{\partial U} V = \frac{D}{\partial U} (\sum_{i=1}^n u^i x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial U} x_i + \sum_{i=1}^n v^i \frac{D}{\partial U} x_i$ .  $\frac{D}{\partial U} (\frac{D}{\partial U} V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u^i}{\partial v \partial u} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v^i}{\partial u} \frac{D}{\partial v} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial v} \frac{\partial D}{\partial u} x_i$   
 $\implies \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} v - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} v = \sum_{i=1}^n v_i (\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} x_i - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} x_i)$  (+) (Bitte auf v- und u-Verwechsler prüfen!)

Berechne  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} x_i$ : Für  $f(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$  ist  $\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u} x_j$ ;  $\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial v} x_k$   
 und  $\frac{D}{\partial u} x_i = D_{\frac{\partial f}{\partial u}} x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u} D_{x_j} x_j$ .  $\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} v_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x^j}{\partial v \partial u} D_{x_j} x_i + \sum \frac{\partial x^j}{\partial u} D_{\frac{\partial f}{\partial v}} (D_{x_j} x_i) =$   
 $\sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial u \partial v} D_{x_j} x_i + \sum_d \frac{\partial x^i}{\partial u} (\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u} D_{x_k} D_{x_j} x_i) = \sum_j \text{ WTF } \dots$

Weiter gilt:

$$0 = \frac{D}{\partial s} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Lemma 1}}{=} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3 Kap 4} + \text{schiefsym.}}{=} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right) - R \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

Wir setzen  $\gamma(t) = \exp_p(tv) = f(t, 0)$  und  $J(t) \equiv J(\gamma(t)) := \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  ein Vektorfeld längs  $\gamma$ . Dann gilt die Jacobi-Gleichung:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

mit der Kurzschreibweise

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) =: J''(t)$$

### Definition

Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodätische. Ein Vektorfeld  $J$  längs  $\gamma$  heißt Jacobi-Feld, falls  $J$  für alle  $t \in [0, a]$  die Jacobi-Gleichung erfüllt.

Es gilt: Ein Jacobi-Feld ist eindeutig bestimmt durch die Anfangsbedingungen  $J(0)$  und  $J'(0) := D_{\gamma'} J(0)$ .

Begründung: Betrachte orthonormale Parallelfelder  $E_1(t), \dots, E_n(t)$ , wobei  $E_i(t) = E_i(\gamma(t))$ , längs  $\gamma$ . Dann kann man schreiben:  $J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) E_i(t)$  mit  $f_i \in C^\infty$ . Also  $J'(t) = D_{\gamma'} J(t) = \sum_{i=1}^n D_{\gamma'} D_{\gamma'} (f_i E_i) = \sum_{i=1}^n (f'_i E_i + f_i \underbrace{D_{\gamma'} E_i}_{=0}) = \sum_{i=1}^n f'_i(t) E_i(t)$  und  $J''(t) = \sum_{i=1}^n f''_i(t) E_i(t)$ .

Weiter sei  $a_{ij}(t) := \langle R(\gamma'(t), E_i(t))\gamma'(t), E_j(t) \rangle_{\gamma(t)}$ . Dann gilt  $R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i \langle R(\gamma' E_i)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i a_{ij}(t) E_j(t)$

Damit ist die Jacobi-Gleichung äquivalent zum System linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$f''_j(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) f_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension  $2n$ , wobei  $n = \dim M$ . Zu gegebener Anfangsbedingung  $J(0), J'(0)$  bzw.  $f_1(0), \dots, f_n(0), f'_1(0), \dots, f'_n(0)$  existiert genau ein Jacobi-Feld längs ganz  $\gamma$ , also eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems für alle  $t \in [0, a]$ .

**Folgerung:** Längs der Geodätischen  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  existieren  $2n$  linear unabhängige Jacobi-Felder, wobei  $n = \dim M$ .

**Bemerkung:** Gewisse Jacobi-Felder kann man direkt angeben:  $J(t) := \gamma'(t)$  ist ein Jacobi-Feld, da  $J'' + R(\gamma', J)\gamma' = \gamma''' + R(\gamma', \gamma')\gamma' = D_{\gamma'} \gamma'' + 0 = D_{\gamma'} D_{\gamma'} \gamma' = 0$ .

Ansatz:  $J(t) := a(t)\gamma'(t)$  für  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Jacobi-Feld, genau dann, wenn  $a(t)$  linear ist. Also:  $J'' = a''\gamma'$ ,  $R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', a\gamma')\gamma' = aR(\gamma', \gamma')\gamma' = 0$ . Das heißt die Jacobi-Gleichung gilt  $\iff a''\gamma' = 0 \iff a'' = 0 \iff a(t) = \alpha + t\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Folgerung:**  $J_1(t) := \gamma'(t)$  und  $J_2(t) := t\gamma'(t)$  sind verschieden, da  $J_1(0) = \gamma'(0) \neq J_2(0) = 0$ , und spannen einen 2-dimensionalen Untervektorraum des Vektorraumes aller Jacobi-Felder längs  $\gamma$  auf.

Es genügt dann den  $2(n-1)$ -dimensionalen Untervektorraum aller Jacobi-Felder orthogonal zu  $\gamma'$  zu verstehen.

**Beispiel (Jacobi-Felder für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $k_0$ , etwa  $(\mathbb{R}^2, \text{kan}) : k_0 = 0$ ,  $(S^2, \text{kan}) : k_0 = 1$ ,  $(H^2\mathbb{R}, \text{kan}) : k_0 = -1$ .

Weiter sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische und  $J$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$ , so dass  $J(t) \perp \gamma'(t)$ .

Für ein beliebiges Vektorfeld  $X$  längs  $\gamma$  gilt die Formel (vgl. 5.2):

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle = k_0 \underbrace{(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, X \rangle)}_{=1} - \underbrace{\langle \gamma', X \rangle \langle J, \gamma' \rangle}_{=0} = k_0 \langle J, X \rangle$$

also

$$R(\gamma', J)\gamma' = k_0 J$$

Die Jacobi-Gleichung lautet hier:

$$J'' + k_0 J = 0 \quad (*)$$

Es sei  $E(t)$  ein Parallelfeld längs  $\gamma$  mit  $\|E(t)\|_{\gamma(t)} = 1$  und  $\langle E(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} = 0$  für alle  $t$ . Dann ist

$$J(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k_0}} \cdot \sin(t\sqrt{k_0}) \cdot E(t), & k_0 > 0 \\ t \cdot E(t), & k_0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k_0}} \cdot \sinh(t\sqrt{-k_0}) \cdot E(t), & k_0 < 0 \end{cases}$$

eine Lösung von  $(*)$  mit Anfangsbedingung  $J(0) = 0$  und  $J'(0) = E(0)$ .

**Satz 6.1**

Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische (also  $\|\gamma'\| = 1$ ) und  $J$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$  mit  $J(0) = 0$  und  $J'(0) = \frac{D}{dt}J(0) = (D_{\gamma'}J)(0) =: w$ . Schließlich sei  $v := \gamma'(0)$ .

Wir betrachten  $w$  als Element von  $T_{av}(T_{\gamma(0)}M)$  und wählen Kurve  $v(s)$  in  $T_{\gamma(0)}M$  mit  $v(0) = av$ ,  $v'(0) = aw$ . Für die parametrisierte Fläche  $f(t, s) := \exp_{\gamma(0)}(\frac{t}{a}v(s))$ ,  $|s| < \varepsilon$ ,  $0 \leq \frac{t}{a} \leq 1$  ist  $\bar{J}(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$  mit  $J(t) = \bar{J}(t)$  für alle  $t \in [0, a]$ .

**Beweis**

Jacobi-Feld ist durch Anfangsbedingungen vollständig bestimmt, das heißt es genügt zu zeigen:  $J(0) = \bar{J}(0)$  und  $J'(0) = \bar{J}'(0)$ .

Es ist einfach zu sehen, dass  $\bar{J}(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = 0$ .

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \bar{J}'(t) &= \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{\frac{t}{a}v(0)} \cdot \frac{t}{a}v'(0)) = \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{tv} tw) \\ &= \frac{D}{dt} (td \exp_p|_{tv} w) = 1 \cdot d \exp_p|_{tv} w + t \frac{D}{dt} (d \exp_p|_{tv} w). \end{aligned}$$

Daher ist  $\bar{J}'(0) = d \exp_p|_0 w = w = J'(0)$ . ■

**Bemerkungen:** (1) Es gilt folgende Formel für ein Jacobi-Feld längs einer normalen Geodätischen  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  mit  $J(0) = 0$ :

$$J(t) = d \exp_p|_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a]$$

(2) Eine analoge Konstruktion (Jacobi-Felder erzeugen durch Variation einer Geodätischen) gilt auch für Jacobi-Felder mit Anfangsbedingung  $J(0) \neq 0$ .

## 6.2. Jacobi-Felder und Schnittkrümmung

### Satz 6.2

Sei  $p \in M$ ,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine normale Geodätische mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  und  $w \in T_v(T_p M) \cong T_p M$  mit  $\|w\| = 1$ . Weiter sei  $J(t) = d \exp_p|_{tv}(tw)$ ,  $0 \leq t \leq a$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma$ .

Dann gilt für die Taylorentwicklung von  $\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = \langle J(t), J(t) \rangle_{\gamma(t)}$  bei  $t = 0$ :

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(v, w)v, w \rangle_p t^4 + o(t^4)$$

### Beweis

Es ist  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w$ ,  $\|w\| = 1$ . Für die ersten drei Koeffizienten der Taylorreihe in  $t$  folgt:

$$(0) \quad \|J(p)\|_p^2 = \langle J, J \rangle(0) = 0$$

$$(1) \quad \langle J, J \rangle'(0) = 2 \langle J', J \rangle(0) = 0$$

$$(2) \quad \langle J, J \rangle''(0) = 2 \langle J'', J \rangle(0) + 2 \langle J', J' \rangle(0) = 0 + 2\|w\|^2 = 2$$

$$(3) \quad \langle J, J \rangle'''(0) = 2 \langle J''', J \rangle(0) + 2 \langle J'', J' \rangle(0) + 4 \langle J'', J' \rangle(0) = 0 + 6 \langle -R(\gamma', J)\gamma', J' \rangle(0) = 6 \langle -R(\gamma', 0)\gamma', J' \rangle(0) = 6 \langle 0, J' \rangle(0) = 0$$

$$(4) \quad \langle J, J \rangle''''(0) = 2 \langle J''', J' \rangle(0) + 2 \langle J''', J' \rangle(0) + 6 \langle J''', J' \rangle(0) + 6 \langle J'', J'' \rangle(0) = 8 \langle J''', J' \rangle(0) = -8 \langle R(\gamma', J')\gamma', J' \rangle(0) = -8 \langle R(v, w)v, w \rangle_p$$

Nebenrechnung für  $J''' = -\frac{D}{dt}R(\gamma', J)\gamma'$ . Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld  $Z$  mit  $Z' = \frac{D}{dt}Z = D_{\gamma'}Z$ . Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', J)\gamma', Z \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', J)\gamma', Z \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', Z)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt}R(\gamma', Z)\gamma', J \right\rangle + \langle R(\gamma', Z)\gamma', J' \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', Z' \rangle. \end{aligned}$$

Für  $t = 0$  ist  $J(0) = 0$ , also:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{D}{dt} R(\gamma', J) \gamma', Z \right\rangle(0) &= 0 + \langle R(\gamma', Z) \gamma', J \rangle'(0) - 0 \\ &= \langle R(\gamma', J') \gamma', Z \rangle(0)\end{aligned}$$

■

Da  $Z$  beliebig war, gilt  $J'''(0) = -\frac{D}{dt} R(\gamma', J) \gamma'(0) = -R(\gamma', J') \gamma'(0)$

### Korollar

Falls  $\langle v, w \rangle_p = 0$ , ( $v, w$  also orthonormiert) gilt:  $\langle R(v, w)v, w \rangle_p = K(p, \sigma) =$  Schnittkrümmung der von  $v$  und  $w$  aufgespannten Ebene  $\sigma$ , also

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)}^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + o(t^4)$$

sowie

$$\|J(t)\|_{\gamma(t)} = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + o(t^3)$$

### Beweis

Die Formel für  $\|J(t)\|_{\gamma(t)}$  folgt aus einem Koeffizientenvergleich der Taylorreihen:

$$\begin{aligned}f(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 + \dots \\ (f(t))^2 &= a^2 + 2abt + \dots\end{aligned}$$

■

**Anwendung** Länge von geodätischen Kreisen.  $p \in M$ ,  $v, w \in T_p M$ ,  $v \perp w$ ,  $\|v\| = \|w\| = 1$ ,  $f(r, \theta) := \exp_p(r(\cos \theta \cdot v + \sin \theta \cdot w))$ . Für ein festes  $r$  heißt  $K_r(\theta) = f(r, \theta)$  für  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ein geodätischer Kreis von Radius  $r$ .

Die Länge von  $K_r$  ist  $L(K_r) := \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d}{d\theta} K_r(\theta) \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\| d\theta$ , wobei  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$  ein Jacobi-Feld längs  $\gamma_\theta(r) = \exp_p(rv(\theta))$  ist. Daher

$$L(K_r) = \int_0^{2\pi} \left[ r - \frac{1}{6}K(p, \sigma)r^3 + o(r^3) \right] d\theta = 2\pi r \left( 1 - \frac{1}{6}K(p, \sigma)r^2 + o(r^2) \right).$$

Das ist die klassische Formel von Bertrand-Puiseux (1848) für Flächen in  $\mathbb{R}^3$ .

Umgekehrt hat man  $K(p, \sigma) = \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(K_r) + o(r^3))$  oder

$$K(p, \sigma) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3}(2\pi r - L(K_r)).$$

Im euklidischen ist  $L(K_r) = 2\pi r$ , also  $K(p, \sigma) = 0$ . Im sphärischen ist  $L(K_r) = 2\pi \sin r = 2\pi(r - \frac{r^3}{3!} + \dots)$ , also  $K(p, \sigma) = +1$ . Im hyperbolischen ist  $L(K_r) = 2\pi \sinh r = 2\pi(r + \frac{r^3}{3!} + \dots)$ , also  $K(p, \sigma) = -1$ .

