

# 11. Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeigt man:

## Satz 11.1 (Identitätssatz für Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,

es sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  für  $z \in U_r(z_0)$ , es sei  $(z_k)$  eine

Folge in  $\dot{U}_r(z_0)$  mit  $z_k \rightarrow z_0$  und es gelte  $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

## Satz 11.2 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Es sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$ ,  $(z_k)$  eine Folge in  $G \setminus \{z_0\}$  mit  $f(z_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$  und  $z_k \rightarrow z_0$ .

Dann:  $f = 0$  auf  $G$ .

## Beweis

$\exists r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$ . 10.4  $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \forall z \in U_r(z_0)$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}: z_k \in U_r(z_0) \forall k \geq k_0$ . 11.1  $\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ .  $B := G \setminus A$ ,  $A \cap B = \emptyset$

Sei  $a \in A$ .  $\exists \delta > 0: U_\delta(a) \subseteq G$ . 10.4  $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \forall z \in U_\delta(a)$

$a \in A \Rightarrow f^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \equiv 0$  auf  $U_\delta(a)$

$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0$  auf  $U_\delta(a) \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow U_{(\delta)}(a) \subseteq A$ .  $A$  ist also offen. Sei  $b \in B$ .  $\exists k \in \mathbb{N}_0: f^{(k)}(b) \neq 0$ ;

$f^{(k)}$  stetig  $\Rightarrow \exists \epsilon > 0: U_\epsilon(b) \subseteq G$  und  $f^{(k)}(z) \neq 0 \forall z \in U_\epsilon(b)$

$\Rightarrow U_\epsilon(b) \subseteq B$ ; d.h.  $B$  ist offen.  $G$  ist ein Gebiet  $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow G = A \Rightarrow \text{Beh.}$  ■

## Bezeichnung

für  $f \in H(G)$ :  $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$ .

## Folgerung 11.3

(1) Ist  $f \in H(G)$ ,  $f \not\equiv 0$  auf  $G$  und  $z_0 \in Z(f)$ , so existiert ein  $\epsilon > 0$ :

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ ,  $f(z) \neq 0 \forall z \in \dot{U}_\epsilon(z_0)$

(2) Ist  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und gilt:  $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ , so ist  $f = 0$  auf  $G$ .

### Beweis

(1) folgt aus 11.2

(2) Verfahre wie im Beweis von 11.2 ■

### Satz 11.4

Sei  $G$  ein EG und  $f \in H(G)$  mit  $Z(f) = \emptyset$

(1)  $\exists h \in H(G): e^h = f$  auf  $G$

(2) Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so existiert ein  $g \in H(G): g^n = f$  auf  $G$

### Beweis

(1) Es ist  $\frac{f'}{f} \in H(G)$ .  $G$  ist ein EG  $\Rightarrow \exists F \in H(G): F' = \frac{f'}{f}$  auf  $G$ .  $\phi := \frac{e^F}{f}$ .

Dann:  $\phi \in H(G)$  und  $\phi' = 0$  auf  $G$ . (nachrechnen!)

$\exists c \in \mathbb{C}: e^F = c \cdot f$  auf  $G$ .

Klar:  $c \neq 0$ . 7.1  $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{C}: c = e^a \Rightarrow f = e^{F-a}$  auf  $G$ .

(2) Sei  $h$  wie in (1),  $g := e^{\frac{1}{n}h}$ . Dann:  $g^n = e^h = f$  auf  $G$ . ■

### Satz 11.5

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.

(1) Ist  $F \in H(D)$ ,  $0 \in D$ ,  $F(0) = 0$  und  $F'(0) \neq 0$ , so gilt:  $0 \in (F(D))^o$

(2) Ist  $f \in H(G)$  **nicht** konstant, so ist  $f(G)$  offen.

(3) **Satz von der Gebietstreue:**

Ist  $f \in H(G)$  **nicht** konstant, so ist  $f(G)$  ein Gebiet.

### Beweis

(1)  $u := \operatorname{Re} F$ ,  $v := \operatorname{Im} F$ . 4.1  $\Rightarrow u_x(0) = v_y(0)$ ,  $u_y(0) = -v_x(0)$

und  $F'(0) = u_x(0) + iv_x(0)$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$

Umkehrsatz (Analysis II)  $\Rightarrow \exists U \subseteq D: 0 \in U$ ,  $U$  ist offen und  $F(U)$  ist offen.  $F(0) = 0 \Rightarrow 0 \in F(U) \Rightarrow \exists \delta > 0: U_\delta(0) \subseteq F(U) \subseteq F(D)$ .

(2) Sei  $w_0 \in f(D)$ . z.z.  $\exists \delta > 0: U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$ .

O.B.d.A.  $w_0 = 0$ .  $\exists z_0 \in D: f(z_0) = w_0 = 0$ . O.B.d.A.  $z_0 = 0$ .

Also:  $f(0) = 0$ .  $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ .

10.4  $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$ ;

$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ . 11.3  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0$

$m := \min\{n \in \mathbb{N}: a_n \neq 0\} (\geq 1)$

Dann:  $f(z) = z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \dots) = z^m \cdot g(z) \quad \forall z \in U_\varepsilon(0)$ ,

wobei  $g \in H(U_\varepsilon(0))$  und  $g(0) = a_m \neq 0$ .

$g$  stetig  $\Rightarrow \exists r \in (0, \varepsilon): g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_r(0)$

$U_r(0)$  ist ein EG  $\stackrel{11.4}{\Rightarrow} \exists h \in H(U_r(0))$ :  $h^m = g$  auf  $U_r(0)$   
 Def.  $F \in H(U_r(0))$  durch  $F(z) := zh(z)$ .  
 Dann:  $F(0) = 0$ ,  $F'(z) = h(z) + zh'(z)$   
 also  $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$ , also  $F'(0) \neq 0$ .  
 Weiter:  $F^m = f$  auf  $U_r(0)$ . (1)  $\Rightarrow \exists R > 0$ :  $U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$ .  
 $\delta := R^m$ . Sei  $w \in U_\delta(0)$ . 1.5  $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}$ :  $v^m = w$   
 Dann:  $|v|^m = |w| < \delta = R^m \Rightarrow |v| < R \Rightarrow v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$   
 $\Rightarrow \exists z \in U_r(0) \subseteq D$  mit:  $F(z) = v$ .  
 $\Rightarrow w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$   
 Also:  $U_\delta(0) \subseteq f(D)$

(3) 3.6  $\Rightarrow f(G)$  ist zusammenhängend  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(G)$  ist ein Gebiet.

### Satz 11.6 (Maximum-, Minimumsprinzip (I))

$f \in H(G)$  sei nicht konstant.

- (1)  $|f|$  hat auf  $G$  kein lokales Maximum
- (2) Ist  $Z(f) = \emptyset$ , so hat  $|f|$  auf  $G$  kein lokales Minimum.

#### Beweis

- (1) Sei  $z_0 \in G$  und  $\epsilon > 0$  so, dass  $U_\epsilon(z_0) \subseteq G$ .  $w_0 := f(z_0)$ . 11.5  $\Rightarrow f(U_\epsilon(z_0))$  ist offen.  
 $w_0 \in f(U_\epsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0$ :  $U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\epsilon(z_0))$ .  
 $\exists w \in U_\delta(w_0)$ :  $|w| > |w_0|$ .  $\exists z \in U_\epsilon(z_0)$ :  $w = f(z)$ .  
 Dann:  $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$
- (2) Wende (1) auf  $\frac{1}{f}$  an. ■

### Satz 11.7 (Maximum-, Minimumsprinzip (II))

$G$  sei beschränkt,  $f \in C(\overline{G})$  und es sei  $f \in H(G)$ .

- (1)  $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$
- (2) Ist  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ , so gilt  $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \quad \forall z \in \overline{G}$

#### Beweis

- (1)  $\overline{G}$  ist kompakt, 3.3  $\Rightarrow \exists w_0 \in \overline{G}$ :  $|f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in \overline{G}$   
 Fall 1:  $w_0 \in \partial G$ : fertig  
 Fall 2:  $w_0 \in G$ . Dann:  $|f(z)| \leq |f(w_0)| \quad \forall z \in G$ . 11.6  $\Rightarrow f$  ist konstant auf  $G$ .  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  konstant auf  $\overline{G} \Rightarrow$  Beh.
- (2) Fall 1:  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{G}$ . Wende (1) auf  $\frac{1}{f}$  an.  
 Fall 2:  $\exists z_0 \in \overline{G}$ :  $f(z_0) = 0$  Vor.  $\Rightarrow z_0 \in \partial G \Rightarrow \min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0 \Rightarrow$  Behauptung. ■

**Definition**

Sei  $A \subseteq G$ .  $A$  heißt **diskret in  $G$**  :  $\iff A$  hat in  $G$  keinen Häufungspunkt. ( $\iff \forall z_0 \in G \exists r = r(z_0) > 0 : A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$ )

*Aufgabe:* Ist  $A$  diskret in  $G$ , so ist  $A$  höchstens abzählbar.

**Satz 11.8**

Sei  $f \in H(G)$  und  $f$  nicht identisch 0 auf  $G$ .

Dann ist  $Z(f)$  diskret in  $G$ .

Ist  $z_0 \in Z(f)$ , so existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  und ein  $g \in H(G)$ :

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in G \text{ und } g(z_0) \neq 0$$

$m$  und  $g$  sind eindeutig bestimmt.  $m$  heißt **Ordnung** (oder **Vielfachheit**) der Nullstelle  $z_0$  von  $f$ . (" $f$  hat eine  $m$ -fache Nullstelle")

**Beweis**

11.3  $\Rightarrow Z(f)$  ist diskret in  $G$ . O.B.d.A:  $z_0 = 0$ .  $\exists r > 0 : U_r(0) \subseteq G$ .

10.4  $\Rightarrow f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad \forall z \in U_r(0)$ .  $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

11.2  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ ,  $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$

Dann:  $f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}z + \dots)}_{:=\varphi(z)} = z^m \varphi(z) \quad \forall z \in U_r(0)$

Es ist  $\varphi \in H(U_r(0))$  und  $\varphi(0) = a_m \neq 0$

Definiere  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & , z \neq 0 \\ a_m & , z = 0 \end{cases}$$

Dann:  $f(z) = z^m g(z) \quad \forall z \in G$ ,  $g(0) = a_m \neq 0$ ,  $g = \varphi$  auf  $U_r(0)$ , also  $g \in H(G)$  ■

*Aufgabe:* Sei  $f$  wie in 11.8,  $z_0 \in G$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann:

$f$  hat in  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle  $\iff f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$  und  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

**Satz 11.9**

Sei  $f \in H(G)$ .

(1) Sei  $g : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & , z \neq w \\ f'(z) & , z = w \end{cases}$$

Dann ist  $g$  stetig.

(2) Ist  $z_0 \in G$ , so existiert ein  $\epsilon > 0$ :

$U_\epsilon(z_0) \subseteq G$  und (\*)  $|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2} |f'(z_0)| |z - w| \quad \forall z, w \in U_\epsilon(z_0)$

Ist  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f$  auf  $U_\epsilon(z_0)$  injektiv und  $f^{-1}$  ist auf  $f(U_\epsilon(z_0))$  stetig.

### Beweis

- (1) Es genügt zu zeigen: ist  $z_0 \in G$ , so ist  $g$  stetig in  $(z_0, z_0) \in G \times G, \epsilon > 0: |g(z, w) - f'(z_0)| < \epsilon$   
 Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq G$  und  $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \epsilon \forall w \in U_\delta(z_0)$   
 Seien  $z, w \in U_\delta(z_0)$ .  $\gamma(t) := z + t(w - z)$  ( $t \in [0, 1]$ ), dann :  
 $Tr(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0)$ .

$U_\delta(z_0)$  ist ein Sterngebiet und  $f'$  hat auf  $U_\delta(z_0)$  die Stammfunktion  $f$ .

$$9.2 \Rightarrow \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w - z) dt$$

$$\text{Ist } z \neq w \Rightarrow g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

$$\text{Ist } z = w \Rightarrow \gamma(t) = z \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 f'(z) dt = f'(z) = g(z, z)$$

$$\text{Also: } g(z, w) = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt$$

Dann:

$$|g(z, w) - f'(z_0)| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) - f'(z_0) dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \epsilon} dt \leq \epsilon$$

- (2) Aus (1):  $|g(z, w)| \rightarrow |f'(z_0)|$  ( $(z, w) \rightarrow (z_0, z_0)$ )  $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subseteq G$  und  $|g(z, w)| \geq \frac{1}{2}|f'(z_0)| \forall z, w \in U_\epsilon(z_0) \Rightarrow (*)$   
 Sei  $f'(z_0) \neq 0$ .  $(*) \Rightarrow f$  ist injektiv auf  $U_\epsilon(z_0)$   
 Seien  $\lambda, \mu \in f(U_\epsilon(z_0)); z := f^{-1}(\lambda), w := f^{-1}(\mu)$   
 $|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|} |\lambda - \mu|$  ■

### Satz 11.10

Sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und  $f'(z_0) \neq 0$

Dann existiert ein  $r > 0: U_r(z_0) \subseteq G$ ,

- (1)  $f$  ist auf  $U_r(z_0)$  injektiv und  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$
- (2)  $f(U_r(z_0))$  ist ein Gebiet
- (3)  $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$  und  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \forall w \in f(U_r(z_0))$

### Beweis

- (1) Sei  $\epsilon > 0$  wie in 11.9(2),  $f'$  ist stetig  $\Rightarrow \exists r \in (0, \epsilon) : f'(z) \neq 0 \forall z \in U_r(z_0)$

- (2) folgt aus 11.5

- (3) Sei  $w_0 \in f(U_r(z_0))$  und  $(w_n)$  eine Folge in  $f(U_r(z_0)) \setminus \{w_0\}$  mit:  $w_n \rightarrow w_0$ .

$$z_n := f^{-1}(w_n), \tilde{z} := f^{-1}(w_0). 11.4 \Rightarrow f^{-1} \text{ stetig in } w_0 \Rightarrow z_n \rightarrow \tilde{z}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \tilde{z}}{f(z_n) - f(\tilde{z})} \rightarrow \frac{1}{f'(\tilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

$$\text{Also ist } f^{-1} \text{ in } w_0 \text{ komplex differenzierbar und } (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$
 ■

**Satz 11.11**

Sei  $f \in H(G)$  auf  $G$  injektiv. Dann:

- (1)  $Z(f') = \emptyset$
- (2)  $f^{-1} \in H(f(G))$  und  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$  für  $\forall w \in f(G)$

**Beweis**

- (1) Annahme: Sei  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) = 0$ ,  $w_0 := f(z_0)$ . O.B.d.A.  $w_0 = 0 = z_0$ . Also  $f(0) = f'(0) = 0$   
 11.8  $\Rightarrow \exists m \geq 2; \exists g \in H(G)$  mit  $f(z) = z^m g(z) \forall z \in G$  und  $g(0) \neq 0$ .  
 11.3  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$  und  $U_\varepsilon(0) \subseteq G$ . Also  $g(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ . 11.4  $\Rightarrow \exists \psi \in H(U_\varepsilon(0))$  mit  $\psi^m = g$  auf  $U_\varepsilon(0)$ . Def.  $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$  durch  $\varphi(z) := z\psi(z) (z \in U_\varepsilon(0))$ .  
 Dann:  $\varphi^m = f$  auf  $U_\varepsilon(0)$ ;  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$ ,  $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$   
 also  $\varphi'(0) \neq 0$ . O.B.d.A.  $\varphi'(z) \neq 0 \forall z \in U_\varepsilon(0)$ . Klar:  $\varphi$  ist auf  $U_\varepsilon(0)$  injektiv.  
 $0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$ . 11.5  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$  11.10  $\Rightarrow \varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$ , 11.5  $\Rightarrow U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$  ist offen. Klar:  $0 \in U$ ,  $U \subseteq U_\varepsilon(0)$  und  $(*)\varphi(U) = U_\delta(0)$ .  
 Sei  $z_1 \in U \setminus \{0\}$ ;  $a_1 := \varphi(z_1)$ ;  $w_1 := f(z_1) \neq 0$ .  $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1 \Rightarrow a_1 \neq 0$ . 1.5  $\Rightarrow a_1$  ist eine  $m$ -te Wurzel von  $w_1$ ;  $m \geq 2 \Rightarrow \exists a_2 : a_2^m = a_1^m = w_1$  mit  $a_1 \neq a_2$ .  
 $a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$ ;  $|a_2| = |\varphi(z_1)| \stackrel{(*)}{<} \delta \Rightarrow a_2 \in \varphi(U) \Rightarrow \exists z_2 \in U : a_2 = \varphi(z_2) \Rightarrow f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1) \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$  Widerspruch zu  $f$  injektiv!
- (2) folgt aus (1) und 11.10 ■

**Definition**

Sei  $z_0 \in G$ ;  $a > 0$ ;  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$  seien glatte Wege und

$\gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, a], j = 1, 2$  und  $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ .  $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg \gamma_2'(0) - \arg \gamma_1'(0) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$  Orientierter Winkel von  $\gamma_1$  nach  $\gamma_2$  in  $z_0$ .

**Satz 11.12 (Winkeltreue)**

Sei  $f \in H(G)$ ,  $z_0 \in G$  und  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann:

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

**Beweis**

$\Gamma_j := f \circ \gamma_j (j = 1, 2)$ .  $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)$   $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$ .

$\exists b \in (0, a)$  mit  $\Gamma_j'(t) \neq 0 \forall t \in [0, b]$ .

$$\angle(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0) \quad \blacksquare$$

**Definition**

- (1)  $G_1$  und  $G_2$  seien Gebiete in  $\mathbb{C}$ . Ist  $f \in H(G_1)$  injektiv auf  $G_1$  und gilt  $f(G_1) = G_2$ , so heißt  $f$  eine **konforme Abbildung** von  $G_1$  auf  $G_2$ .
- (2) Ist  $f : G \rightarrow G$  eine konforme Abbildung von  $G$  auf  $G$ , so heißt  $f$  ein **Automorphismus** von  $G$ :  
 $f \in \text{Aut}(G)$ .

**Satz 11.13**

$G_1, G_2$  seien Gebiete,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  sei eine konforme Abbildung von  $G_1$  auf  $G_2$  und  $G_1$  sei ein Elementargebiet. Dann ist  $G_2$  ebenfalls ein Elementargebiet.

**Beweis**

Sei  $g \in H(G_2)$ ,  $h := (g \circ f)f'$ . Dann  $h \in H(G_1)$ ,  $G_1$  EG  $\Rightarrow \exists$  eine Stammfunktion  $\Phi$  von  $h$ ,  $F := \Phi \circ f^{-1}$  ist dann SF von  $g$ ,  $g$  war beliebig  $\Rightarrow G_2$  ebenfalls EG. ■

