§ 7 Parameterintegrale

In diesem Paragraphen sei stets $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_d$.

Satz 7.1
Sei $U \in \mathfrak{B}_k, t_0 \in U$ und es sei $f \colon U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

(1) Für jedes $t \in U$ ist $x \mapsto f(t,x)$ messbar.

(2) Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$ so, dass $t \mapsto f(t,x)$ für jedes $x \in X \setminus N$ stetig in t_0 ist.

(3) Es existiert eine integrierbare Funktion $g \colon X \to [0,\infty]$ und zu jedem $t \in U$ existiert eine Nullmenge $N_t \subseteq X$ so, dass für jedes $t \in U$ und jedes $x \in X \setminus N_t$ gilt:

$$|f(t,x)| \leq g(x)$$

Dann ist $x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar. Ist $F \colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t,x)\,dx,$$

so ist F stetig in t_0.

Also:

$$\lim_{t\to t_0} \int_X f(t,x)\,dx = \lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0) = \int_X f(t_0,x)\,dx = \int_X \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dx$$

Beweis
Aus (1) und (3) folgt, dass $x \mapsto f(t,x)$ für jedes $t \in U$ integrierbar ist (zur Übung). Sei (t_n) eine Folge in U mit $t_n \to t_0$ und

$$g_n(x) := f(t_n,x) \ (n \in \mathbb{N}, x \in X)$$

Setze

$$\tilde{N} := N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{t_n} \right)$$

Aus 5.1 folgt, dass $\tilde{N}$ eine Nullmenge ist. Voraussetzung (2) liefert $g_n(x) \to f(t_0,x)$ für jedes $x \in X \setminus \tilde{N}$, also gilt

$$g_n(x) \to f(t_0,x) \text{ fast überall auf } X$$

Voraussetzung (3) liefert $|g_n(x)| = |f(t_n,x)| \leq g(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X \setminus \tilde{N}$. Aus 6.2 folgt

$$F(t_n) = \int_X f(t_n,x)\,dx = \int_X g_n\,dx \longrightarrow \int_X f(t_0,x)\,dx = F(t_0)$$

■

Bezeichnung
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a := \inf I$ und $b := \sup I$, wobei $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zugelassen sind. Weiter sei $f \colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar (oder f ist messbar und ≥ 0) und

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_{(a,b)} f_{|(a,b)}(x)\,dx$$

Dann ist

$$\int_I f(x)dx = \int_{(a,b)} f(x)dx$$

Ist z.B. $I = [a,b)$, dann gilt, da $\{a\}$ eine Nullmenge ist:

$$\int_I f\,dx = \int_{\{a\}} f\,dx + \int_{(a,b)} f\,dx = \int_{(a,b)} f\,dx$$

Folgerung 7.2
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a = \inf I$ und $f \colon I \to \mathbb{R}$ sei integrierbar. Definiert man $F \colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := \int_a^t f(x)\,dx,$$

so ist $F \in C(I)$.

Beweis
Für $x, t \in I$ definiere $h(t,x) := \mathbb{1}_{(a,t)} f(x)$. Dann ist $F(t) = \int_I h(t,x)\,dx$ und

$$|h(t,x)| = \mathbb{1}_{(a,t)} \cdot |f(x)| \leq |f(x)| \text{ für alle } t, x \in I$$

Aus 4.9 folgt, dass $|f|$ integrierbar ist. Sei $t_0 \in I$ und $N := \{t_0\}$, also eine Nullmenge. Dann ist $t \mapsto h(t,x)$ für jedes $x \in I \setminus N$ stetig in t_0 (zur Übung). Die Behauptung folgt aus 7.1. ■

Satz 7.3
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f \colon U \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es sei $g \colon X \to [0, +\infty]$ integrierbar und $N \subseteq X$ sei eine Nullmenge. Weiter gelte:

(1) für jedes $t \in U$ sei $x \mapsto f(t,x)$ integrierbar.

(2) für jedes $x \in X \setminus N$ sei $t \mapsto f(t,x)$ partiell differenzierbar auf U.

(3) $\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}\right| \leq g(x)$ für jedes $x \in X \setminus N$, jedes $t \in U$ und jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$

Ist dann $F \colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(t,x)dx$$

so ist F auf U partiell differenzierbar und für jedes $t \in U$ sowie jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\,dx$$

Also: $\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t,x)\,dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\,dx$.

Beweis
Sei o.B.d.A. $k=1$, also $U \subseteq \mathbb{R}$. Sei $t_0 \in U$ und (h_n) eine Folge mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze

$$g_n(x) := \frac{f(t_0+h_n,x)-f(t_0,x)}{h_n} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N})$$

Aus Voraussetzung (2) folgt für jedes $x \in X \setminus N$:

$$g_n(x) \to \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x) \quad (n \to \infty)$$

Nach dem Mittelwertsatz aus Analysis 1 existiert für jedes $x \in X \setminus N$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n = s_n(x)$ zwischen t_0 und t_0+h_n mit:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s_n,x)\right| \overset{(3)}{\leq} g(x)$$

Aus 6.2 folgt

$$\int_X g_n\,dx \longrightarrow \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,dx$$

Es ist nach Konstruktion gerade $\int_X g_n\,dx = \frac{F(t_0+h_n)-F(t_0)}{h_n}$. ■