2. Topologische Begriffe

Definition
(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$.

(1) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$

(2) (a_n) heißt eine **Cauchy-Folge** (CF) $:\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \; \forall n, m \geq n_0$

(3) (a_n) heißt **konvergent** $:\iff \exists a \in \mathbb{C} : |a_n - a| \to 0$ ($\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$)
In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt (Übung) und heißt der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n). Man schreibt : $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a (n \to \infty)$

(4) (a_n) heißt **divergent** $:\iff$ (a_n) konvergiert nicht.

Beispiel
$a_n = \frac{1}{n} + i(1 + \frac{1}{n})$; $|a_n - i| = |\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}| = \frac{|1-i|}{n} \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow a_n \to i$

Wie in $\mathbb{R}$ bzw. mit 1.3, zeigt man:

Satz 2.1
$(a_n), (b_n)$ seien Folgen in $\mathbb{C}$; $a, b \in \mathbb{C}$

(1) (a_n) konvergent $\Rightarrow a_n$ ist beschränkt.

(2) (a_n) konvergent $:\iff$ $(\text{Re } a_n), (\text{Im } a_n)$ sind konvergent. In diesem Fall gilt $\lim a_n = \lim \text{Re } a_n + i \lim \text{Im } a_n$

(3) Es gelte $(a_n) \to a, (b_n) \to b$. Dann:
$a_n + b_n \to a + b$, $a_n b_n \to ab$, $\bar{a_n} \to \bar{a}$, $|a_n| \to |a|$
Ist $a \neq 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \; \forall n \geq m$ und $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$
Ist a_{n_k} eine Teilfolge (TF) von $(a_n) \Rightarrow a_{n_k} \to a (k \to \infty)$

(4) Ist (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ enthält eine konvergente TF (**Bolzano-Weierstraß**)

(5) (a_n) ist eine CF $\iff$ (a_n) ist konvergent (**Cauchykriterium**)

Definition
(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{i=1}^n a_i \; n \in \mathbb{N}$. (s_n) heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt konvergent/divergent $\iff$ (s_n) konvergent/divergent. Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so schreibt man $\sum_{n=1}^\infty a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$

Beispiel (Geometrische Reihe)
$\sum_{n=0}^\infty z^n = 1 + z + \cdots$ $(z \in \mathbb{C})$. Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man:

(1) $1+z+\cdots+z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{, falls } z \neq 1 \\ n+1 & \text{, falls } z = 1 \end{cases}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergent $\iff$ $|z|<1$. In diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Definition
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** $:\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Wörtlich wie in $\mathbb{R}$ beweist, bzw. formuliert man:

Satz 2.2
(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$

(1) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

(3) Es gelten Cauchykriterium, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und der Satz über das Cauchyprodukt.

Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$

(1) $U_\epsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \epsilon\}$ **ϵ-Umgebung von** z_0 oder **offene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ
$\overline{U_\epsilon(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z-z_0| \leq \epsilon\}$ (**abgeschlossene Kreisscheibe** von z_0 mit Radius ϵ)
$\dot{U}_\epsilon(z_0) := U_\epsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$ (**punktierte Kreisschreibe**)

(2) $z_0 \in A$ heißt **innerer Punkt von A** $:\iff$ $\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \subseteq A$
$A^o := \{z \in A | z \text{ innerer Punkt von A}\}$ heißt das **Innere von A**. Klar ist: $A^o \subseteq A$
A heißt offen $:\iff$ $A = A^o$

(3) A heißt **abgeschlossen** $:\iff$ $\mathbb{C}\backslash A$ ist offen.

(4) A heißt **beschränkt** $:\iff$ $\exists c \geq 0 : |a| \leq c \ \forall a \in A$

(5) A heißt **kompakt** $:\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

(6) z_0 heißt ein **Häufungspunkt** von A $:\iff$ $\forall \epsilon > 0 : \dot{U}_\epsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$.
$\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist HP von } A\} \cup A$ heißt die **Abschließung** von A

(7) z_0 heißt ein **Randpunkt** von A
$:\iff$ $\forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\epsilon(z_0) \cap (\mathbb{C}\backslash A) \neq \emptyset$
$\partial A := \{z \in \mathbb{C} | z \text{ ist Randpunkt von } A\ \}$ wird als **Rand von A** bezeichnet

Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man:

Satz 2.3

(1) A heißt abgeschlossen $\iff$ $A = \bar{A}$ $\iff$ der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A gehört zu A.

(2) z_0 ist HP von A $\iff$ $\exists$ Folge (z_n) in $A\backslash\{z_0\} : z_n \to z_0$

(3) A ist kompakt $:\iff$ jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge deren Limes zu A gehört
$\iff$ jede offene Überdeckung von A enthält eine endliche Überdeckung von A.