Definitionen

Dichte
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$
$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Ereignis
$A \subseteq \Omega$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.
Elementarereignis: $\{\omega\}, \omega \in \Omega$

Ergebnis
$\omega \in \Omega$

Erwartungstreue

$$\forall \theta \in \Theta : E_\theta(T) = \theta$$

Erwartungswert
(Ex. falls mit $|\cdot| < \infty$)

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$
$$= \sum_{x \in \mathbb{R} : P(X=x) > 0} x \cdot P(X = x)$$
$$E(X) := E(X_+) - E(X_-)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$

bedingter Erwartungswert:
$$E(X|Y=y) = \sum x P(X = x|Y = y)$$
bedingte Erwartung:
$$E(X|Y) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, y \mapsto E(X|Y = y)$$
iterierter:
$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Faltung
$X(\Omega) + Y(\Omega)$ F. der Verteilungen X, Y. $(P^{X+Y} = P^X * P^Y)$

Fehler 1./2. Art
1. Art: Wahre Hypothese abgelehnt.
2. Art: Falsche Hypothese nicht verworfen.

Gütefunktion

$$g : \Theta \to [0,1], \theta \mapsto P_\theta(X \in \mathcal{K})$$
$$g_\varphi : \Theta \to [0,1], \theta \mapsto E_\theta(\varphi)$$

Häufigkeit
Sei $(x_1, \dots, x_n) \in \{a_1, \dots, a_s\}^n$ Stichprobe.
absolute:
$$h_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{x_i = a_j\}$$
relative:
$$\frac{h_j}{n}$$

Kombination

$$Kom_k^n(mW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_1 \leq \dots \leq a_k\}$$
$$Kom_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_1 < \dots < a_k\}$$
$$|Kom_k^n(mW)| = \binom{n+k-1}{k}$$
$$|Kom_k^n(oW)| = \binom{n}{k}$$

Konfidenzber./Bereichssch.
$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ stat. Modell.
$$\mathcal{C} : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\Theta)$$
heißt Konfidenzbereich oder Bereichsschätzer.
Konfidenzniveau: $\mathcal{C}$ Konfidenzber. zum Niveau $1 - \alpha$:
$$P_\theta(\mathcal{A}(\theta)) \geq 1 - \alpha$$

Konsistenz
(T_n) *Schätzfolge:* $\forall \varepsilon > 0, \forall \theta \in \Theta$:
$$\lim_{n \to \infty} P_\theta(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$
φ_n *Testfolge:* $\forall \theta \in \Theta_1$:
$$\lim_{n \to \infty} g_{\varphi_n}(\theta) = 1$$

Konvergenz nach W-keit

$$Y_n \xrightarrow{P} Y \iff \forall \varepsilon > 0 :$$
$$P(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

Koppelung
Das zu einem W-Maß P_1 und einer Übergangs-W-keit P_{12} gehörende W-Maß
$$P = P_1 \otimes P_{12}$$
auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ heißt Koppelung von P_1 und P_{12}.

Korrelationskoeffizient

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

empirischer:
$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n}\sum(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_j - \overline{x})^2 \cdot \frac{1}{n}\sum(y_j - \overline{y})^2}}$$

Kovarianz

$$C(X,Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

kritischer Bereich
$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ mit:

$$x \in \mathcal{K} \implies d_1$$
$$x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{K} \implies d_0$$

Lagemaß
$l : \{a_1, \dots, a_s\}^n \to \mathbb{R}$ ist ein Lagemaß, falls gilt:
$l(x_1 + a, \dots, x_n + a) = l(x_1, \dots, x_n) + a$

Likelihood-Funktion

$$L_x : \Theta \to [0,1], \theta \mapsto P_\theta(X = x)$$

Marginalverteilung
P W-Maß auf $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$. j-te Marginalverteilung:
$$P_j(B) := P(\Omega' \times B \times \Omega'')$$
mit
$$\Omega' := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{j-1}$$
$$\Omega' := \Omega_{j+1} \times \dots \times \Omega_n$$
(Analog für Zufallsvektoren.)

Maximum-Likelihood-Schätzung
$\hat{\theta} : \mathcal{X} \to \Theta$ ist ML-Schätzwert, falls $\forall x \in \mathcal{X}$:
$$L_x(\hat{\theta}(x)) = \sup\{L_x(\theta) : \theta \in \Theta\}$$

Median
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac{1}{2})$ der Median von F bzw. von X.
empirischer: Sei $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ geordnete Stichprobe.
$$x_{\frac{1}{2}} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, n = 2k+1 \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}), n = 2k \end{cases}$$

Mittel
arithmetisches:
$$\overline{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$$
getrimmtes/gestutztes:
$$x_{t,\alpha} := \frac{1}{n - 2k}\sum_{j=k+1}^{n-k} x_{(j)}$$
mit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und $k := \lfloor n\alpha \rfloor$ heißt α-getrimmtes Mittel.

MQA

$$MQA_T(\theta) = E_\theta((T - \theta)^2)$$
$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} (T(x) - \theta)^2 \cdot P_\theta(X = x)$$

heißt mittlere quadratische Abweichung vom T an der Stelle θ.

Moment
k-tes:
$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$
k-tes absolutes:
$$E(|X|^k) = \int_{\mathbb{R}} |x|^k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$
k-tes zentrales:
$$E((X - EX)^k) = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$

Permutation

$$Per_k^n(mW) = M^k$$
$$Per_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_i \neq a_j (i \neq j)\}$$
$$|Per_k^n(mW)| = n^k$$
$$|Per_k^n(oW)| = n \cdots (n - k + 1) = n^{\underline{k}}$$

Quantil
empirisches: Ist $0 < p < 1$, so heißt
$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor np+1 \rfloor)}, np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(np)} + x_{(np+1)}), np \in \mathbb{N} \end{cases}$$
empirisches p-Quantil.

Quantil-Funktion
X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.
$$F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$
heißt Quantil-Funktion von X bzw. F.

Quartil
Sei F^{-1} die Quantil-Funktion, dann heißt $F^{-1}(\frac{1}{4})$ das untere und $F^{-1}(\frac{3}{4})$ das obere Quartil von F bzw. von X.
empirisch: Das $\frac{1}{4}$-Quantil heißt unteres und das $\frac{3}{4}$-Quantil oberes Quartil.

Quartilsabstand

$$x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}$$

Schätzer
$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ stat. Modell.
$$T : \mathcal{X} \to \tilde{\Theta}$$
heißt Schätzer für θ.

Schätzfolge
$\mathcal{X}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ Stichprobenraum für $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ und $T_n : \mathcal{X}_n \to \tilde{\Theta}$ Schätzer $\forall n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Schätzfolge.

Schätzwert
$T(x)$ für $x \in \mathcal{X}$.

Spannweite

$$x_{(n)} - x_{(1)}$$

Standardabweichung

$$\sigma_X := \sqrt{V(X)}$$

empirische:
$$s := \sqrt{s^2}$$

Standardisierung

$$X^* := \frac{X - EX}{\sqrt{V(X)}}$$

Statistisches Modell
$(\mathcal{X}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$, wobei $\mathcal{X}$ der Stichprobenraum einer Zufallvariable X, $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ Bild einer bijektiven Abbildung des Parameterraum Θ auf eine Klasse von W-Maßen $\mathcal{P}$ ist.

Streuungsmaß
$\sigma : \{a_1, \dots, a_s\}^n \to \mathbb{R}$ heißt ein Streuungsmaß, falls gilt:
$\sigma(x_1 + a, \dots, x_n + a) = \sigma(x_1, \dots, x_n)$

Test
nichtrandomisiert:
$$\varphi : \mathcal{X} \to \{0,1\}, x \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$$
randomisiert:
$$\varphi : \mathcal{X} \to [0,1]$$

Testfolge
$\mathcal{X}_n$ Stichprobenraum für $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\varphi_n : \mathcal{X}_n \to [0,1]$ Test $\forall n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Testfolge.

Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{12} : \Omega_1 \times \mathcal{P}(\Omega_2) \to [0,1]$$

heißt Übergangs-W-keit, falls $\forall \omega_1 \in \Omega_1$
$$P_{12}(\omega_1, \cdot) : \mathcal{P}(\Omega_2) \to [0,1]$$
ein W-Maß ist.

Unabhängigkeit
Ereignisse: $A_1, \dots, A_n$ unanbhängig, falls $\forall T \subseteq 1, \dots, n$
$$P(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} P(A_j)$$
Zufallsvariablen diskret:
$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, falls $\forall A_j \subseteq \Omega_j$ bzw. $\forall x_j \in \Omega_j$ gilt:
$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$
$$= \prod_{j=1}^n P(X_j \in A_j)$$
$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$= \prod_{j=1}^n P(X_j = x_j)$$
Zufallsvariablen indiskret:
$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, falls gilt:
$$F(x) = \prod_{j=1}^n F(x_j)$$
$$f(x) = \prod_{j=1}^n f(x_j)$$

Varianz
(Ex. falls $E(X^2)$ existiert.)
$$V(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 \cdot f(x)\ \mathrm{d}x$$
empirische:
$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (x_j - \overline{x}_n)^2$$

Verteilung
$X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ Zufallsvariable.
$P^X : \mathcal{P}(\tilde{\Omega}) \to [0,1], A' \mapsto P(X^{-1}(A'))$
heißt Verteilung von X.

Verteilungsfunktion
$P : \mathfrak{B}_1 \to [0,1]$ W-Maß.
$$F : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto P((-\infty, x])$$
heißt Verteilungsfunktion von P.

Verzerrung
Verzerrung eines Schätzers T an der Stelle θ:
$$b_T(\theta) = E_\theta(T) - \theta$$

Wahrscheinlichkeit
bedingte:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

W-Funktion
(Ω, P) W-Raum,
$$p : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto P(\{\omega\})$$
ist W-Funktion zum W-Maß P.

W-Maß
$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ heißt W-Maß auf Ω, falls gilt

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\sum_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j)$

W-Raum
(Ω, P) bzw. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω, P W-Maß auf Ω bzw. $\mathcal{A}$.
Laplace'scher: falls $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsvariable
(Ω, P) bzw. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ W-Raum, $\mathfrak{A}'$ σ-Algebra auf Ω'.
$$X : \Omega \to \Omega'$$
heißt Ω'-wertige Zufallsvariable, falls X $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-mb.

Zufallsvektor
X heißt Zufallsvektor, falls es eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable ist.

Sätze und Formeln

Bayes-Formel
Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^\infty P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cdot x^j \cdot y^{k-j}$$

Blockungslemma
Seien $A_1, \dots, A_n$ unabhängig, $1 \leq k \leq n - 1$, $C \in \sigma(A_1, \dots, A_k)$, $D \in \sigma(A_k + 1, \dots, A_n)$. Dann sind auch C und D unabhängig.

Cauchy-Schwarz

$$C(X,Y)^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$$

Erwartungswert

$$E(aX) = a \cdot EX$$
$$E(X + Y) = EX + EY$$
$$|EX| \leq E|X|$$

Sind X, Y unkorreliert gilt außerdem:
$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$$

Faltungsformel

für Dichten:

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t) \cdot f_Y(x-t) \, \mathrm{d}t$$

Gesetz großer Zahlen

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallvariablen mit existierender Varianz. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j - EX_1 \right| \geq \varepsilon \right) \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

Gesetz seltener Ereignisse

Ist $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ für ein $0 < \lambda < \infty$, so gilt:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \overset{n \to \infty}{\to} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Kovarianz

$$C(X,Y) = C(Y,X)$$
$$C(X,X) = V(X)$$
$$C(aX+b, cY+d) = ac \cdot C(X,Y)$$
$$\rho(aX+b, cY+d) = sgn(ac) \cdot \rho(X,Y)$$

X, Y sind unkorreliert,genau dann wenn:

$$C(X,Y) = 0$$

kleinste Quadrate

$$(a^*, b^*) := \arg \min_{a,b \in \mathbb{R}} E(Y - a - bX)^2$$

ist bestimmt durch

$$a^* = EY - b^* EX$$

$$b^* = \begin{cases} 0 & , V(X)V(Y) = 0 \\ \frac{C(X,Y)}{V(X)} & , V(X)V(Y) > 0 \end{cases}$$

Methoden zur Dichtebest.

Methode 1:

X reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F, stückweise stetiger Dichte f. Weiter sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, wobei $T'(x) \neq 0$. Dann besitzt $Y = T(X)$ die Verteilungsfunktion:

$$G(y) = F(T^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{T^{-1}(y)} f(x) \, \mathrm{d}x$$

(bzw. $1 - G(y)$ falls T monoton fallend), sowie die Dichte:

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 2:

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ k-dimensionaler Zufallsvektor mit positiver Dichte f. Weiter sei $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und injektiv, wobei $T'(x) \neq 0$. Dann besitzt $Y = T(X)$ die Dichte:

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|\det T'(T^{-1}(y))|}$$

Methode 3:

Ist $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ mit $s < k$, so lässt sich T häufig zu einer Abbildung $T' : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ergänzen, die die Voraussetzungen von Methode 2 erfüllt. Die Gewünschte Dichte ergibt sich dann aus Marginalverteilungsbildung.

Markow-Ungleichung

Sei $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für jede Zufallsvariable Y mit $E_\varphi(|Y|) < \infty$ und jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(\varepsilon) > 0$:

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} E_\varphi(|Y|)$$

Quantilsfunktion

$$F(x) \geq p \iff x \geq F^{-1}(p)$$
$$F(F^{-1}(p)) \geq p$$
$$F(F^{-1}(p)) = p \iff p \in F(\mathbb{R})$$

Außerdem ist F^{-1} monoton wachsend und linksseitig stetig.

Siebformel/Poincare-Sylvester

Für $1 \leq \nu \leq n$ sei

$$S_\nu := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\nu \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\nu})$$

(Summation über ν-elementige Teilmengen.) Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} S_\nu$$

Steiner-Formel

$$\forall a \in \mathbb{R} : V(X) = E(X-a)^2 - (EX-a)^2$$

Stetigkeit

Es gilt:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} P(A_j)$$

für jede aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$. Ebenso gilt:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} P(A_j)$$

für jede absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$.

Subadditivität

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

totale W-keit

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung von Ω. Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$$

Transformationsformel

$$E(g(Z)) = \sum_{z \in \mathbb{R}^k} g(z) \cdot P(Z = z) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x) \, \mathrm{d}x$$

Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot V(X)$$

Varianz

$$V(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} E(X-a)^2$$
$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$
$$V(X) \geq 0$$
$$V(X) = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R} : P(X = a) = 1$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)$$
$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} V(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} C(X_i, X_j)$$

(siehe auch Steiner-Formel)

ZGWS

Sei $X_n \sim Bin(n, p_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n(1-p_n) = \infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq b \right) = \Phi(b)$$

Verteilungen

Binomialverteilung

$X \sim Bin(n,p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
$$EX = np$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Ist $Y \sim Bin(m,p)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Bin(n+m, p)$.

Exponentialverteilung

$X \sim Exp(\lambda)$

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$
$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$
$$EX = \frac{1}{\lambda}$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

geometrische Verteilung

$X \sim G(p) = Nb(1,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem ersten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$$P(X = k) = p \cdot (1-p)^k$$
$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p \cdot (1-p)^k$$
$$EX = \frac{1-p}{p}$$
$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ist $Y \sim G(p)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Nb(2,p)$.

Gleichverteilung

$X \sim U(A)$

diskrete:

Sei $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

$$P(X = x_j) = \frac{1}{n}$$
$$EX = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$
$$V(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 \right)$$

indiskrete:

Sei $A \in \mathfrak{B}_1$.

$$P(B) = \frac{\lambda_1(A \cap B)}{\lambda_1(A)}$$
$$F_X(x) = \frac{\lambda_1(A \cap (-\infty, x])}{\lambda_1(A)}$$
$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda_1(A)} \cdot \mathbb{1}_A(x)$$

hypergeometrische Verteilung

$X \sim Hyp(n,r,s)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen k der r roten von insgesamt $r+s$ Kugeln zu ziehen.

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$
$$EX = \frac{rn}{r+s}$$
$$V(X) = \left(\frac{rs}{r+s}\right)\left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\left(\frac{r+s-n}{r+s-1}\right)$$

Multinomialverteilung

$X = (X_1, \ldots, X_s) \sim Mult(n, p_1, \ldots, p_s)$

$$P(X = x) = \binom{k}{x_1, \ldots, x_s} \cdot \prod_{j=1}^{s} p_j^{x_j}$$
$$X_k \sim Bin(n, p_k)$$
$$\sum_{j=1}^{k} X_{i_j} \sim Bin(n, \sum_{j=1}^{k} p_{i_j})$$
$$C(X_i, X_j) = -np_i p_j$$
$$\rho(X_i, X_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

negative Binomialverteilung

$X \sim Nb(r,p)$

Gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vor dem r-ten Treffer in einem Bernoullischen Versuchsschema mit Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Nieten gezogen werden.

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$$
$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$$
$$EX = r \cdot \frac{1-p}{p}$$
$$V(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Ist $Y \sim Nb(s,p)$ und X, Y unanhängig, so gilt $X + Y \sim Nb(r+s, p)$.

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y$$
$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$
$$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x)$$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$EX = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2$$

Ist $Y \sim N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ und X, Y unanhängig, so gilt $X + Y \sim N(\mu + \tilde{\mu}, \sigma^2 + \tilde{\sigma}^2)$.

mehrdimensionale:

$X \sim N_k(\mu, \Sigma)$

Dabei seien $Y_1, \ldots, Y_k \sim N(0,1)$ unabhängig, $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ regulär, $\Sigma = A \cdot A^\perp$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ und $X := A \cdot Y + \mu$. Dann gilt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \cdot \det \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\perp \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

Poisson-Verteilung

$X \sim Po(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$EX = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

Ist $Y \sim Po(\mu)$ und X, Y unabhängig, so gilt $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$. In diesem Fall ist

$$P^{X|X+Y=n} = Bin\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$