14. Matrizenwertige und vektorwertige Funktionen

Sei $m \in \mathbb{N}$. $\mathbb{M}_m$ sei der Vektorraum aller $(m \times m)$-Matrizen

$$A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{K}$ (wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). $\dim \mathbb{M}_m = m^2$

Sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m$, mit $a^{(k)}$ bez. wir die k-te Spalte von A, also $A = (a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$.

E sei die Einheitsmatrix in $\mathbb{M}_m$, also

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_m),\ e_k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T.$$

Für $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m : \bar{A} := (\overline{a_{jk}})$ (also: $A = \bar{A} \iff a_{jk} \in \mathbb{R}\ (j, k = 1, \ldots, m)$)

$\operatorname{Re} A := (\operatorname{Re} a_{jk}),\ \operatorname{Im} A := (\operatorname{Im} a_{jk})$. Dann: $A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$.

$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}),\ \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - \bar{A})$. Für $B \in \mathbb{M}_m : \overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

Sei $A \in \mathbb{M}_m$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein **Eigenwert** (EW) von A $:\iff \exists x \in \mathbb{K}^m : x \neq 0$ und $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt x ein **Eigenvektor** (EV) von A zum EW λ.

Ist $A \in \mathbb{M}_m,\ \lambda \in \mathbb{K},\ x \in \mathbb{K}^m$ und $Ax = \lambda x$, so gilt, falls $A = \bar{A} : A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$, wobei $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$, wenn $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

$p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ heißt das **charakteristische Polynom von** A. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ ist ein EW von $A \iff p(\lambda_0) = 0$. Ist λ_0 eine q-fache Nullstelle von p, so heißt q die (algebraische) Vielfachheit von λ_0.

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ EWe von A mit $\lambda_j \neq \lambda_\nu\ (j \neq \nu)$ und $x^{(j)}$ ein zu λ_j gehörender EV $(j = 1, \ldots, k)$, so sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ linear unabhängig im $\mathbb{K}^m$.

Bekannt aus der Linearen Algebra:

Satz 14.1 (Existenz der Jordan-Normalform)
Sei $A \in \mathbb{M}_m$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ seien die verschiedenen EWe von A mit den Vielfachheiten $q_1, \ldots, q_k$

(also: $\lambda_j \neq \lambda_\nu$ $(j \neq \nu)$) und $q_1 + \ldots + q_k = m$). Es ex. eine invertierbare Matrix $C = (c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}) \in \mathbb{M}_m$ mit:

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k) := \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{q_j}$$

Ist speziell $A = \bar{A}$, so kann man die EWe wie folgt anordnen:

$\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\ \lambda_{l+1} = \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{2l} = \overline{\lambda_l}\ (\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}),\ \lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Dann: $A_{l+1} = \bar{A}_1, \ldots, A_{2l} = \bar{A}_l;\ A_{2l+1}, \ldots, A_k$ sind reell.

$q := q_1 + \cdots + q_l$. $c^{(q+1)} = \overline{c^{(1)}}, \ldots, c^{(2q)} = \overline{c^{(q)}},\ c^{(2q+1)}, \ldots, c^{(m)} \in \mathbb{R}^m$.

Definition
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R}), |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ $(= \|(x, y)\|)$. Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ $z_n \to z$ bzgl. $|\cdot| \iff$ Re $z_n \to x$, Im $z_n \to y$

Definition
Sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{M}_m, \|A\| := (\sum_{j,k=1}^m |a_{jk}|^2)^{\frac{1}{2}}$.
$(\mathbb{M}_m, \|\cdot\|)$ ist ein NR. Sei $(A_n) = ((a_{jk}^{(n)}))$ eine Folge in $\mathbb{M}_m$
$A_n \to A$ bzgl. $\|\cdot\| \iff a_{jk}(n) \to a_{jk}$ für $j, k = 1, \ldots, m$.
Insbesondere: $(\mathbb{M}_m, \|\cdot\|)$ ist ein BR. Analysis II, §1:
$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|\, \forall A, B \in \mathbb{M}_m, \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|\, \forall A \in \mathbb{M}_m, x \in \mathbb{K}^m$

Erinnerung (Analysis II, §12): Sei $y = (y_1, \ldots, y_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$. Es gelte: $y_j \in R[a, b]$ $(j = 1, \ldots, m)$. $\int_a^b y(x)dx = (\int_a^b y_1(x)dx, \ldots, \int_a^b y_m(x)dx) (\in \mathbb{R}^m)$
$\| \int_a^b y(x)dx\| \leq \int_a^b \|y(x)\|dx$

Definition
Sei $\varphi \in C([a, b])$ und $\varphi > 0$ auf $[a, b]$.
Für $y \in C([a, b], \mathbb{R}^m) : \|y\| := \max\{\varphi(x)\|y(x)\| : x \in [a, b]\}$ Wie in §13: $(C([a, b], \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ ist ein BR. Und Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|$ = glm. Konvergenz auf $[a, b]$.

Satz 14.2 (Konvex und Kompakt)
Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $M \geq 0$.
$A := \{y \in C(I, \mathbb{R}^m) : y(x_0) = y_0, \|y(x) - y(\overline{x})\| \leq M|x - \overline{x}| \, \forall x, \overline{x} \in I\}$
Dann ist A eine konvexe und kompakte Teilmenge des Banachraumes $(C(I, \mathbb{R}^m), \| \cdot \|)$.

Beweis
Wie in 11.5 ∎

Definition
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $[a, b] \subseteq I$, $A : I \to \mathbb{M}$ sei eine Matrixwertige Funktion.

$$A(x) = (a_{jk}(x)) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & \cdots & a_{mm}(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{jk} : I \to \mathbb{R}.$$

A heißt **in x_0 stetig** $\iff$ alle a_{jk} sind in x_0 stetig.
A heißt **auf I stetig** $\iff$ alle a_{jk} sind auf I stetig.
A heißt **auf I differenzierbar** $\iff$ alle a_{jk} sind auf I differenzierbar.
etc. ...

Sind alle $a_{jk} \in R[a, b]$: $\int_a^b A(x)dx := (\int_a^b a_{jk}(x)dx)$
Übung: $\| \int_a^b A(x)dx\| \leq \int_a^b \|A(x)\|dx$
Ist $B : I \to \mathbb{M}$ eine weitere Funktion und $y : I \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, A, B und y seien auf I differenzierbar:
$(AB)' = A'B + AB'$ (Reihenfolge beachten!), $(Ay)' = A'y + Ay'$
$(\det A)' = \sum_{k=1}^m \det(a^{(1)}, \ldots, a^{(k-1)}, (a^{(k)})', a^{(k+1)}, \ldots, a^{(m)})$
wobei $A = (a^{(1)}, \ldots, a^{(m)})$ (Beweis: Übung)

Jetzt sei $z = (z_1, \ldots, z_m) : I \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion und $W = (w_{jk}) : I \to \mathbb{M}$ eine Funktion und $w_{jk} : I \to \mathbb{C}$.
Sei $z = u + iv$ mit $u, v : I \to \mathbb{R}^m$. $U := \text{Re } W$ und $V := \text{Im } W$.
Dann: $W = U + iV, U, V : I \to \mathbb{M}$ (reellwertig)
Konvergenz, Stetigkeit, Ableitung, Integral, ... werden über Real- und Imaginärteil definiert.
z.B.: $W'(x) = U'(x) + iV'(x), z'(x) = u'(x) + iv'(x)$,
$\int_a^b W(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i \int_a^b V(x)dx$
Sei $(A_n)_{n=0}^\infty = ((a_{jk}^{(n)}))$ eine Folge in $\mathbb{M}$. $S_n := A_0 + A_1 + \ldots + A_n$.
$\sum_{n=0}^\infty A_n$ heißt **konvergent** $:\iff (S_n)$ ist konvergent $\iff$ alle $\sum_{n=0}^\infty a_{jk}^{(n)}$ sind konvergent.
$\sum_{n=0}^\infty A_n$ heißt **divergent** $:\iff (S_n)$ ist divergent $\iff$ ein $\sum_{n=0}^\infty a_{jk}^{(n)}$ ist divergent.
Im Konvergenzfall: $\sum_{n=0}^\infty A_n = \lim_{n\to\infty} S_n = (\sum_{n=0}^\infty a_{jk}^{(n)})$
$\sum_{n=0}^\infty A_n$ heißt **absolut konvergent** $:\iff \sum_{n=0}^\infty \|A_n\|$ ist konvergent.

Wie in Ana 1 zeigt man:

Satz 14.3 (Rechenregeln für Matrixreihen und -folgen)
$(A_n), (B_n)$ seien Folgen in $\mathbb{M}_m, A, B \in \mathbb{M}_m$.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ konvergiert absolut $\iff$ alle $\sum_{n=0}^{\infty} a_{jk}^{(n)}$ konvergieren absolut. In diesem Fall ist $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ konvergent und
$\| \sum_{n=0}^{\infty} A_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ seien absolut konvergent.
$C_n := A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \ldots + A_m B_0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ absolut und $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = (\sum_{n=0}^{\infty} A_n)(\sum_{n=0}^{\infty} B_n)$

(3) Aus $A_n \to A, B_n \to B$ folgt: $A_n B_n \to AB$

Definition
$A^0 := E (A \in \mathbb{M})$

Satz 14.4 (Absolute Konvergenz von Matrixreihen)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$
($r = \infty$ ist zugelassen)
$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-r, r)$. Sei $A \in \mathbb{M}_m$ und $\|A\| < r$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ absolut konvergent.

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

Beweis
$\|A^2\| \leq \|A\|^2$, allgemein (induktiv): $\|A^n\| \leq \|A\|^n,\ \forall n \geq 1$
$\implies \|a_n A^n\| \leq \|a_n\| \|A\|^n = |a_n| c^n, c := \|A\| < r$
Analysis I $\implies \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| c^n$ ist konvergent $\xrightarrow{\text{Majorantenkrit.}} \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n A^n\|$ ist konvergent $\implies$ Beh. ■

Beispiele 14.5
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (= e^x); e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ $(A \in \mathbb{M})$
Spezialfall: $m = 1$ Dann: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(r = 1)$. Sei $A \in \mathbb{M}$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ absolut, falls $\|A\| < 1$.

Behauptung
$(E - A)$ ist invertierbar und $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (E - A)^{-1}$

Beweis
$B := \sum_{n=0}^{\infty} A^n, S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k = E + A + \ldots + A^n$
$S_n(E - A) = (E - A) \cdot S_n = S_n - AS_n = E + A + \ldots + A^n - (A + A^2 + \ldots + A^n + A^{n+1}) = E - A^{n+1}$
$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0 (n \to \infty) \implies A^{n+1} \to 0$
$\implies \underbrace{(E - A)S_n}_{\to (E-A)B} = \underbrace{S_n(E - A)}_{\to B(E-A)} \to E$
$\implies (E - A)B = B(E - A) = E \implies (E - A)$ ist invertierbar und
$(E - A)^{-1} = B$ ■

Satz 14.6 (Matrixexponentialrechnung)
Seien A,B $\in \mathbb{M}_m$.

(1) $e^0 = E$, $e^{\alpha A} = e^\alpha E$ $(\alpha \in \mathbb{K})$

(2) $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$

(3) Ist $A = \text{diag}(A_1, ..., A_k)$, dann $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, ..., e^{A_k})$

(4) Ist $C \in \mathbb{M}_m$ invertierbar $\implies e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^AC$

(5) Ist $AB = BA \implies e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A$

(6) e^A ist invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Beweis
(1),(2) klar
(3) $A^n = diag(A_1^n, ..., A_k^n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies$ Beh.
(4) $(C^{-1}AC)^2 = C^{-1}ACC^{-1}AC = C^{-1}A^2C$. Induktiv: $(C^{-1}AC)^n = C^{-1}A^nC \implies$ Beh.
(5) $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k}$ (da AB=BA). Rest: wie in AI (13.5), beachte Cauchyprodukt (14.3(2))
(6) $e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A = e^{A-A} = e^0 = E$ ∎

Folgerung 14.7
(1) $e^{it} = cos(t) + i \cdot sin(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$, $|e^{it} = 1|$

(2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(3) $cos(nt) + i \cdot sin(nt) = (cos(t) + i \cdot sin(t))^n$ $\forall n \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R}$

(4) Ist $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}) \implies e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (cos(y) + i \cot sin(y))$. Und $|e^z| = e^x$

Beweis
(1) $z := it$ $(t \in \mathbb{R})$. $z^2 = -t^2, z^3 = -it^3, z^4 = t^4, ...$
Einsetzen in Potenzreihe und Aufspalten in geraden Exponententeil und ungerade Exponententeil $\implies$ Beh., $|e^{it}| = |cos(t) + i \cdot sin(t)| = cos^2(t) + sin^2(t) = 1$.
(2) folgt aus 14.5(5)
(3) $cos(nt) + i \cdot sin(nt) = e^{int} = (e^{it})^n = (cos(t) + i \cdot sin(t))^n$
(4) folgt aus (2) und (1). ∎

Satz 14.8 (Ableitung der Matrixexponentfunktion)
Sei A $\in \mathbb{M}_m$ und $\phi(x) := e^{xA}$ für x aus $\mathbb{R}$. ϕ ist auf $\mathbb{R}$ db und $\phi'(x) = Ae^{xA} = e^{xA}A$.

Beweis
Sei $A^n = (a_{jk}^{(n)})(n \in \mathbb{N}_0)$. Dann: $\phi(x) = (\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} a_{jk}^{(n)}}_{f_{jk}(x)}) = (f_{jk}(x))$. f_{jk} ist eine Potenzreihe

mit KR $= \infty \implies f_{jk}$ ist auf $\mathbb{R}$ db und $f'_{jk}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a_{jk}^{(n)} \implies \phi$ db auf $\mathbb{R}$ und $\phi'(x) = (f_{jk}(x)) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} a_{jk}^{(n+1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^{n+1} = Ae^{xA}$ ■

Beispiel (für e^{xA})
Sei $q \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}$ und $A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_q$.

Dann $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$,

$(A - \lambda E)^2 = A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$,

$\vdots$

$(A - \lambda E)^{q-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda E)^n = 0 \ \forall n \geq q$

$e^{xA} = e^{\lambda x E + x(A-\lambda E)} = e^{\lambda x E} e^{x(A-\lambda E)} = e^{\lambda x} e^{x(A-\lambda E)} = e^{\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (A-\lambda E)^n = e^{\lambda x} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{n!} (A-\lambda E)^n$

$$= e^{\lambda x} \underbrace{(E + x(A - \lambda E) + \frac{x^2}{2}(A - \lambda E)^2 + ... + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!}(A - \lambda E)^{q-1})}_{=:B(x)}$$

Dann: $B(x) \in \mathbb{M}_q$ und in der k-ten Spalte von B(x) stehen Polynome in x vom Grad $\leq k - 1$.

Z.B. $(q = 3, \lambda = 2)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_q$. Dann $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - 2E)^n = 0 (\forall n \geq 3)$

$$\implies e^{xA} = e^{2x} (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Aus obiger Betrachtung und 14.5(3) folgt:

Satz 14.9 (Exponierung von Matrizen entlang der Diagonalen)
Seien $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}$, $m = q_1 + \dots + q_k$, $A \in \mathbb{M}_m$, $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ mit

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{q_j} \quad (j = 1..k)\,,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ (vgl. 14.1).
Dann: $e^{xA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 x} B_1(x), \dots, e^{\lambda_k x} B_k(x))$, wobei $B_j(x) \in \mathbb{M}_{q_j}$ und in der ν-ten Spalte von $B_j(x)$ stehen Polynome in x vom Grad $\leq \nu - 1$ $(j = 1..k)$.