

21. Parameterabhängige Integrale

Satz 21.1

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Es sei $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

- (1) Für jedes (feste) $x \in A$ sei $y \mapsto f(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B .
- (2) Für jedes (feste) $y \in B$ sei $x \mapsto f(x, y)$ stetig auf A .
- (3) $\exists \phi \in L(B) : |f(x, y)| \leq \phi(y) \forall (x, y) \in A \times B$.

$F : A \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := \int_B f(x, y) dy$. Dann: $F \in C(A, \mathbb{R})$.

Beweis

Sei $x_0 \in A$. Sei (x_k) eine Folge in A mit $x_k \rightarrow x_0$. zu zeigen: $F(x_k) \rightarrow F(x_0)$.

Definiere $g, f_1, f_2, \dots : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(y) := f(x_0, y)$, $f_k(y) := f(x_k, y)$. Vor.(1) $\implies f_k \in L(B) \forall k \in \mathbb{N}$. Vor.(2) $\implies f_k(y) \rightarrow g(y) \forall y \in B$. Vor.(3) $\implies |f_k(y)| \leq \phi(y) \forall y \in B$.

$$18.6 \implies \underbrace{\int_B g(y) dy}_{=F(x_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_B f_k(y) dy}_{=F(x_k)}$$

■

Satz 21.2 (Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

- (1) Für jedes (feste) $x \in A$ sei $y \mapsto f(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B .
- (2) Für jedes (feste) $y \in B$ sei $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar auf A .
- (3) $\exists \phi \in L(B) : |f_{x_j}(x, y)| \leq \phi(y) \forall (x, y) \in A \times B, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

F sei wie in 21.1. Dann ist $F \in C^1(A, \mathbb{R})$, für jedes (feste) $x \in A$ ist $y \mapsto f_{x_j}(x, y)$ Lebesgueintegrierbar über B und $F_{x_j}(x) = \int_B f_{x_j}(x, y) dy \forall x \in A \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis

Sei $x_0 \in A, j \in \{1, \dots, n\}$. A offen $\implies \exists \delta > 0 : x_0 + te_j \in A$ für $|t| < \delta$. Sei (t_n) eine Folge in \mathbb{R} mit $t_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) und $0 < |t_k| < \delta \forall k$.

$$g(y) := f_{x_j}(x_0, y), \quad f_k(y) := \frac{f(x_0 + t_k e_j, y) - f(x_0, y)}{t_k} \quad (k \in \mathbb{N}, y \in B)$$

Vor.(1) $\implies f_k \in L(B) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Vor.(2) $\implies f_k(y) \rightarrow g(y) \quad \forall y \in B$. Vor.(3) $\implies |f_k(y)| \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|f_{x_j}(x_0 + \xi_k e_j, y)|}_{\leq \phi(y)} \quad \xi_k \text{ zwischen } 0 \text{ und } t_k$. 18.6 $\implies g \in L(B)$ und

$$\underbrace{\int_B g(y) dy}_{= \int_B f_{x_j}(x_0, y) dy} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(x_0 + t_k e_j) - F(x_0)}{t_k}$$

■

Satz 21.3

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $[a, b] \times [c, d] \subseteq D$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ sei stetig differenzierbar. Es sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $\alpha(x) := \int_c^{\varphi(x)} f(x, y) dy$. Dann ist α auf $[a, b]$ differenzierbar und

$$\alpha'(x) = \int_c^{\varphi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Beweis

$\beta(x, z) := \int_c^z f(x, y) dy$. Dann: $\alpha(x) = \beta(x, \varphi(x))$ ($x \in [a, b]$). Analysis 1 $\implies \beta$ ist partiell differenzierbar nach z und $\beta_z(x, z) = f(x, z)$. 21.2 $\implies \beta$ ist partiell differenzierbar nach x und $\beta_x(x, z) = \int_c^z f_x(x, y) dy$. β_x, β_z sind stetig. 5.2 $\implies \beta$ ist differenzierbar $\xrightarrow{5.4} \alpha$ ist differenzierbar und

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= \beta_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \beta_z(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \int_c^{\varphi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \end{aligned}$$