§ 10 Der Satz von Fubini

Die Bezeichnungen seien wie in den Paragraphen 8 und 9.

Satz 10.1 (Satz von Tonelli)
Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ messbar. (Aus §8 folgt dann, dass f^x, f_y messbar sind, wobei klar ist, dass $f^x, f_y \geq 0$ sind.)
Für $x \in \mathbb{R}^k$:

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y)\,dy$$

Für $y \in \mathbb{R}^l$:

$$G(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)\,dx$$

Dann sind F, G messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (*)$$

(iterierte Integrale)

Beweis
Fall 1: Sei $C \in \mathfrak{B}_d$ und $f = \mathbb{1}_C$. Die Behauptungen folgen dann aus 9.1.
Fall 2: Sei $f \geq 0$ und einfach. Die Behauptungen folgen aus Fall 1, 3.6 und 4.5.
Fall 3 - Der allgemeine Fall:
Sei (f_n) zulässig für f, also: $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, f_n einfach und $f_n \to f$ auf $\mathbb{R}^d$. Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n(x) := \int_{\mathbb{R}^l} f_n(x,y)\,dy$$

und nach Fall 2 ist F_n messbar.
Aus $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ folgt $0 \leq F_n \leq F_{n+1}$ und 4.6 liefert $F_n \to F$ auf $\mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f_n(z)\,dz \overset{Fall 2}{=} \lim \int_{\mathbb{R}^k} F_n(x)\,dx \overset{4.6}{=} \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx$$

Genauso zeigt man

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

■

Satz 10.2 (Satz von Fubini (Version I))
Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann existieren Nullmengen $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $N \subseteq \mathbb{R}^l$ mit

$$f^x\colon \mathbb{R}^l \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$
$$f_y\colon \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist integrierbar für jedes } y \in \mathbb{R}^l \setminus N$$

Setze

$$F(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\,dy & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^k \setminus M \\ 0 & \text{, falls } x \in M \end{cases}$$

und

$$G(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\,dx & \text{, falls } y \in \mathbb{R}^l \setminus N \\ 0 & \text{, falls } y \in N \end{cases}$$

Dann sind F und G integrierbar und es gelten folgende zwei Gleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y)\,dy$$

Es gilt also wieder $(*)$ aus 10.1.

Beweis
Wir zeigen nur die Aussagen über f^x, F und die erste der obigen beiden Gleichungen. Genauso zeigt man die Aussagen über f_n, G und die zweite Gleichung.
Aus 8.1 folgt, dass f^x messbar ist. Definiere

$$\Phi(x) := \int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Nach 10.1 ist Φ messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy \right) dx \overset{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\,dz < \infty$$

(denn mit f ist nach 4.9 auch $|f|$ integrierbar). Somit ist Φ integrierbar. Setze $M := \{\Phi = \infty\}$ was nach 4.10 eine Nullmenge ist. Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^l} |f^x(y)|\,dy = \Phi(x) < \infty \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Das heißt, $|f^x|$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ integrierbar und es gilt nach 4.9 auch

$$f^x \text{ ist integrierbar für jedes } x \in \mathbb{R}^k \setminus M$$

Aus 9.2 folgt, dass $M \times \mathbb{R}^l$ eine Nullmenge ist. Setze

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{, falls } z \in \mathbb{R}^d \setminus (M \times \mathbb{R}^l) \\ 0 & \text{, falls } z \in M \times \mathbb{R}^l \end{cases}$$

Aus 9.3 folgt, dass $\tilde{f}$ messbar ist. Klar ist, dass fast überall $f = \tilde{f}$ gilt. Es ist

$$\tilde{f}^x = \left(\mathbb{1}_{(M\times\mathbb{R}^l)^C} \cdot f\right)^x$$

Das heißt $\tilde{f}^x$ ist integrierbar für jedes $x \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$F(x) \overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y)\,dy}_{=:F^+(x)} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_-(x,y)\,dy}_{=:F^-(x)}$$

Nach 10.1 sind F^+ und F^- messbar. Die Dreiecksungleichung liefert nun

$$|F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^l} |\tilde{f}(x,y)|\,dy \overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^l} |f(x,y)|\,dy = \Phi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k$$

Also ist $|F| \leq \Phi$ und Φ ist integrierbar. Aus 4.9 folgt, dass F und $|F|$ integrierbar sind und dann sind auch F^+ und F^- integrierbar (zur Übung). Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} F(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^k} F^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^k} F^-(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}_+(x,y)\,dy\right) dx - \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx \\
&\overset{10.1}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_+(z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_-(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

■

Satz 10.3 (Satz von Fubini (Version II))
Sei $\varnothing \neq X \in \mathfrak{B}_k$, $\varnothing \neq Y \in \mathfrak{B}_l$ und $D := X \times Y$ (nach §8 ist $D \in \mathfrak{B}_d$). Es sei $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Ist $f \geq 0$ auf D oder ist f integrierbar, so gilt

$$\int_D f(x,y)\,d(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy$$

Beweis
Definiere $\tilde{f}$ wie in 9.3 und wende 10.1 beziehungsweise 10.2 an. ■

Bemerkung: 10.1, 10.2 und 10.3 gelten natürlich auch für mehr als zwei iterierte Integrale.

"Gebrauchsanweisung" für Fubini:
Gegeben: $\varnothing \neq D \subseteq \mathfrak{B}_d$ und messbares $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$. Setze f auf $\mathbb{R}^d$ zu einer messbaren Funktion $\tilde{f}$ fort (zum Beispiel wie in 9.3). Aus 3.8 folgt dann, dass $\mathbb{1}_D\tilde{f}$ messbar ist und 10.1 liefert

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dz = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |\mathbb{1}_D\tilde{f}|\,dx\right) dy$$

Ist eines der drei obigen Integrale endlich, so ist $|\mathbb{1}_D \tilde{f}|$ integrierbar und damit ist nach 4.9 auch $\mathbb{1}_D \tilde{f}$ integrierbar.
Dann ist f integrierbar und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_D f(z)\,dz &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbb{1}_D \tilde{f}\right)(z)\,dz \\
&\overset{10.2}{=} \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \left(\mathbb{1}_D \tilde{f}\right)(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \left(\mathbb{1}_D \tilde{f}\right)(x,y)\,dx \right) dy
\end{aligned}$$

Beispiel

(1) Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ mit $a_i \le b_i$ $(i = 1, \ldots, d)$. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. D ist kompakt, also gilt $D \in \mathfrak{B}_d$. Nach 4.12(2) ist $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ und aus obiger Bemerkung folgt

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_d)\,d(x_1, \ldots, x_d) = \int_{a_d}^{b^d} \left(\cdots \left(\int_{a_2}^{b^2} \left(\int_{a_1}^{b^1} f(x_1, \ldots, x_d)\,dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_d$$

Die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden. Aus 4.13 folgt

$$\int_{a_i}^{b_i} \cdots\ \mathrm{d}x_i = \text{R-}\int_{a_i}^{b_i} \cdots\ \mathrm{d}x_i$$

Konkretes Beispiel
Sei $D := [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C([a,b])$ und $g \in C([c,d])$.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x)g(y)\,d(x,y) &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x)g(y)\,dx \right) dy \\
&= \int_c^d \left(g(y) \left(\int_a^b f(x)\,dx \right) \right) dy \\
&= \left(\int_a^b f(x)\,dx \right) \left(\int_c^d g(y)\,dy \right)
\end{aligned}$$

(2) Wir rechtfertigen die “Kochrezepte“ aus Analysis II, Paragraph 15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a,b]$. Weiter seien $h_1, h_2 \in C(I)$ mit $h_1 \le h_2$ auf I und

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Da h_1 und h_2 stetig sind, ist A kompakt und somit gilt $A \in \mathfrak{B}_2$. Aus 4.12(2) folgt dann $f \in \mathfrak{L}^1(A)$. Definiere

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, falls } (x,y) \in A \\ 0 & \text{, falls } (x,y) \notin A \end{cases}$$

Nach 9.3 ist $\tilde{f}$ messbar. Setze

$$M := \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in A\}$$

Dann gilt $|\tilde{f}| \leq M \cdot \mathbb{1}_A$. Wegen $\lambda_2(A) < \infty$ ist $M \cdot \mathbb{1}_A$ integrierbar und nach 4.9 ist $|\tilde{f}|$ und damit auch $\tilde{f}$ integrierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y)\,d(x,y)\\ &\overset{10.3}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx\\ &= \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx\end{aligned}$$

Damit ist 15.1 aus Analysis II bewiesen. Genauso zeigt man 15.3.

(3) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ und $f(x,y) := \frac{1}{x}\cos(xy)$. D ist abgeschlossen und somit ist $D \in \mathfrak{B}_2$. Außerdem ist f stetig, also messbar.
Behauptung:

$$f \in \mathfrak{L}^1(D) \text{ und } \int_D f(x,y)\,d(x,y) = \sin(1)$$

Beweis: Setze $X := (0,\infty)$, $Y := [0,\infty)$ und $Q := X \times Y$. Sei nun

$$\tilde{f}(x,y) := \frac{1}{x}\cos(xy) \text{ für } (x,y) \in Q$$

$\tilde{f}$ ist eine Fortsetzung von f auf $X \times Y$. $\tilde{f}$ ist also messbar. Es ist

$$\begin{aligned}\int_D |f|\,d(x,y) &= \int_Q \mathbb{1}_D \cdot |\tilde{f}|\,d(x,y)\\ &\overset{10.1}{=} \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_D(x,y)\frac{1}{x}|\cos(xy)|\,dy\right) dx\\ &\int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}|\cos(xy)|\,dy\right) dx\\ &\leq \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,dy\right) dx\\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < \infty\end{aligned}$$

Also ist $|f|$ integrierbar und dann nach 4.9 auch f, also $f \in \mathfrak{L}^1(D)$. Dann:

$$\begin{aligned}\int_D f\,d(x,y) &= \int_X \left(\int_Y \mathbb{1}_D(x,y)\frac{1}{x}\cos(xy)\,dy\right) dx\\ &\overset{\text{wie oben}}{=} \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\cos(xy)\,dy\right) dx\\ &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\sin(xy)\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{x}}\right) dx\\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\sin(1)\,dx\\ &= \sin(1)\end{aligned}$$

Vorbemerkung: Sei $x > 0$. Für $b > 0$ gilt
$$\int_0^b e^{-xy}\,dy = -\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_0^b = -\frac{1}{x}e^{-xb} + \frac{1}{x} \xrightarrow{b\to\infty} \frac{1}{x}$$
und daraus folgt $\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$

Beispiel

(4) Sei
$$g := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{, falls } x > 0 \\ 1 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$
g ist stetig auf $[0,\infty)$. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass $\int_0^\infty g(x)\,dx$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent ist. Aus 4.14 folgt, dass $g \notin \mathfrak{L}^1([0,\infty))$

Behauptung: $\int_0^\infty g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

Beweis: Setze $X := [0,R]$ mit $R > 0$, $Y := [0,\infty)$ und $D := X \times Y$, sowie
$$f(x,y) := e^{-xy}\sin x \text{ für } (x,y) \in D$$
Es ist $D \in \mathfrak{B}_2$ und f stetig, also messbar. Es ist weiter $f \in \mathfrak{L}^1(D)$ (warum?) und
$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,d(x,y) &\overset{10.3}{=} \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^R \left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\right)dx \\ &= \int_0^R \sin x \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\right)dx \\ &\overset{\text{Vorbemerkung}}{=} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx =: I_R\end{aligned}$$
Dann gilt
$$I_R \overset{10.3}{=} \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^R e^{-xy}\sin x\,dx\right)}_{=:\varphi(y)} dy$$
Zweimalige partielle Integration liefert (nachrechnen!):
$$\varphi(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y\sin R + \cos R)$$
Damit gilt
$$I_R = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y\sin R + \cos R)\,dy$$
Aus Analysis 1 ist bekannt, dass das erste Integral gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert und das zweite Integral setzen wir gleich $\tilde{I}_R$.
Es gilt
$$\begin{aligned}|\tilde{I}_R| &\le \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}e^{-yR}(y|\sin R| + |\cos R|)\,dy \\ &\le \int_0^\infty \frac{y+1}{y^2+1}e^{-yR}\,dy \\ &\le 2\int_0^\infty e^{-yR}\,dy \\ &\overset{\text{Vorbemerkung}}{=} \frac{2}{R}\end{aligned}$$

Das heißt also $\tilde{I}_R \to 0$ $(R \to \infty)$ und damit folgt die Behauptung durch

$$I_R = \frac{\pi}{2} - \tilde{I}_R \to \frac{\pi}{2} \ (R \to \infty)$$