

§ 18 Fourierreihen

In diesem Paragraphen sei stets $X = [0, 2\pi]$, $L^2 := L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ und $L^2_{\mathbb{R}} := L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Weiter sei $\{b_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ wie in 17.2.

Satz 18.1

Ist $f \in L^2$ und gilt mit einer Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in \mathbb{C} : $f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k b_k$, so gilt:

$$c_k = (f \mid b_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$\sigma_n := \sum_{|k| \leq n} c_k b_k$$

Aus der Voraussetzung folgt $\|\sigma_n - f\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $j \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq |j|$. Es gilt einerseits

$$(\sigma_n \mid b_j) = \sum_{|k| \leq n} c_k (b_k \mid b_j) = c_j, \text{ da gilt: } (b_k \mid b_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq j \\ 1, & \text{falls } k = j \end{cases}$$

Andererseits: $(\sigma_n \mid b_j) \rightarrow (f \mid b_j)$ für $n \rightarrow \infty$ wegen 16.6(3). Daraus folgt $c_j = (f \mid b_j)$ ■

Definition

Sei $f \in L^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

- (1) $S_n f := \sum_{|k| \leq n} (f \mid b_k) b_k$ heißt **n-te Fouriersche Partialsumme**. Also gilt:

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k \iff \|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0$$

- (2) $(f \mid b_k)$ heißt **k-ter Fourierkoeffizient von f**.

- (3) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f \mid b_k) b_k$ heißt **Fourierreihe von f**.

- (4) Für $n_0 \in \mathbb{N}_0$ setze $E_n := [b_{-n}, b_{-(n-1)}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_n]$ (lineare Hülle). Es ist dann

$$\dim E_n = 2n + 1$$

Beachte: Für $v \in E_n$ gilt $v(0) = v(2\pi)$.

Satz 18.2

Seien $f_1, \dots, f_n, f \in L^2$.

- (1) Gilt $f_\mu \perp f_\nu$ für $\mu \neq \nu$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n$), so gilt der Satz des Pythagoras

$$\|f_1 + \dots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \dots + \|f_n\|_2^2$$

- (2) Die Abbildung

$$S_n: \begin{cases} L^2 \rightarrow E_n \\ S_n f := \sum_{|k| \leq n} (f | b_k) b_k \end{cases}$$

ist linear und für jedes $v \in E_n$ gilt $S_n v = v$ und $(f - S_n f) \perp v$ mit $f \in L^2$.

- (3) Die **Besselsche Ungleichung** lautet:

$$\|S_n f\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f | b_k)|^2 = \|f\|_2^2 - \|(f - S_n f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

- (4) Für alle $v \in E_n$ gilt:

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \|f - v\|_2$$

Beweis

- (1) Es genügt den Fall $n = 2$ zu betrachten, der Rest folgt induktiv.

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_2^2 &= (f_1 + f_2 | f_1 + f_2) \\ &= (f_1 | f_1) + (f_1 | f_2) + (f_2 | f_1) + (f_2 | f_2) \\ &= (f_1 | f_1) + (f_2 | f_2) \\ &= \|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 \end{aligned}$$

- (2) Übung!

- (3) Es gilt

$$\|S_n f\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq n} (f | b_k) b_k \right\|_2^2 \stackrel{(1)}{=} \sum_{|k| \leq n} \|(f | b_k) b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f | b_k)|^2 \|b_k\|_2^2 = \sum_{|k| \leq n} |(f | b_k)|^2$$

und

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\|(f - S_n f)\|_2^2}_{\substack{\perp E_n \\ (2)}} + \underbrace{\|S_n f\|_2^2}_{\in E_n}$$

- (4) Sei $v \in E_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f - v\|_2^2 &= \left\| \underbrace{(f - S_n f)}_{\perp E_n} + \underbrace{(S_n f - v)}_{\in E_n} \right\|_2^2 \\ &\stackrel{(1)}{=} \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - v\|_2^2 \\ &\geq \|f - S_n f\|_2^2 \end{aligned}$$

■

Bemerkung 18.3

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $I := [a, b]$ ($a < b$) und $f_n, f, g \in C(I, \mathbb{K})$; es war $\|f\|_\infty := \max_{t \in I} |f(t)|$.

- (1) (f_n) konvergiert auf I gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (vgl. Analysis I/II).
- (2) $f \in L^p(I, \mathbb{K})$ und $\|f\|_p \leq (b - a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$ (siehe 16.2).
- (3) Gilt $f = g$ fast überall, so ist $f = g$ auf I .

Beweis

Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq I$: $f(x) = g(x) \forall x \in I \setminus N$.

Sei $x_0 \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(x_0) \cap I \not\subseteq N$ (andernfalls: $\lambda_1(N) \geq \lambda_1(U_\varepsilon(x_0) \cap I) > 0$). Das heißt, es existiert ein $x_\varepsilon \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$: $x_\varepsilon \notin N$. Also: $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap I$: $x_n \notin N$.

Also: $x_n \rightarrow x_0$.

Dann: $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$ ■

Satz 18.4 (Approximationssatz von Weierstraß)

Es sei $I = [a, b]$ wie in 18.3 und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- (1) Ist $f \in C(I, \mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein Polynom p mit Koeffizienten in \mathbb{K} mit:

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

- (2) Ist $a = 0$, $b = 2\pi$, $f \in C(I, \mathbb{K})$, $f(0) = f(2\pi)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $v \in E_n$ mit:

$$\|f - v\|_\infty < \varepsilon$$

Satz 18.5

Sei $f \in L^2$. Dann gilt: $f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f | b_k) b_k$ und

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f | b_k)|^2 \quad (\text{Parsevalsche Gleichung})$$

Insbesondere gilt: $(f | b_k) \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty)$.

Beweis

Zu zeigen: $\|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Parsevalsche Gleichung folgt dann aus 18.2.

Sei $\varepsilon > 0$. Wende 16.8(2) auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ an. Dies liefert eine stetige Funktion $g : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit: $K := \operatorname{supp}(g) \subseteq (0, 2\pi)$, K kompakt und $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Setze $g(0) := g(2\pi) := 0$. Dann ist g stetig auf $[0, 2\pi]$. Satz 18.4 liefert nun: $\exists n \in \mathbb{N} \exists v \in E_n$: $\|g - v\|_\infty < \varepsilon$.

Damit: $\|g - v\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|g - v\|_\infty < \sqrt{2\pi} \varepsilon$. Somit:

$$\begin{aligned} \|f - S_n f\|_2 &= \|f - g + g - S_n g + S_n g - S_n f\|_2 \\ &\leq \underbrace{\|f - g\|_2}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|g - S_n g\|_2}_{\stackrel{18.2(4)}{\leq} \|g - v\|_2} + \underbrace{\|S_n(g - f)\|_2}_{\stackrel{18.2(3)}{\leq} \|g - f\|_2} \\ &< 2\varepsilon + \sqrt{2\pi} \varepsilon = \varepsilon(2 + \sqrt{2\pi}) \end{aligned}$$

Sei $m \geq n$. Dann gilt: $E_n \subseteq E_m$, also $w := S_n f \in E_m$. Damit:

$$\|f - S_m f\|_2 \leq \|f - w\|_2 = \|f - S_n f\|_2 < \varepsilon(2 + \sqrt{2\pi}) \quad \blacksquare$$

Reelle Version

Sei $f \in L^2_{\mathbb{R}}$. Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

- (1) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Funktionen $t \mapsto \cos(kt)$ und $t \mapsto \sin(kt)$ mit $\cos(k \cdot)$ bzw. $\sin(k \cdot)$.
- (2) Für $k \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(f | e_k)$.
Für $k \in \mathbb{N}$: $\beta_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(f | e_k)$, $\beta_0 := 0$.

Definition

f heißt **gerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.
 f heißt **ungerade** (bezüglich π) genau dann, wenn gilt: $f(t) = -f(2\pi - t)$ für fast alle $t \in [0, 2\pi]$.

Satz 18.6

(Dieser Satz folgt aus 18.5 und "etwas" rechnen)

Sei $f \in L^2_{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

- (1) $S_n f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k \cdot) + \beta_k \sin(k \cdot))$
- (2) $f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k \cdot) + \beta_k \sin(k \cdot))$
- (3) $\frac{1}{\pi} \|f\|_2^2 = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ (Parsevalsche Gleichung)
Insbesondere gilt: $\alpha_k \rightarrow 0, \beta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$
- (4) Ist f gerade, so sind alle $\beta_k = 0$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$. Die Fourierreihe von f ist eine **Cosinusreihe**.
Ist f ungerade, so sind alle $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$. Die Fourierreihe von f ist eine **Sinusreihe**.

Beispiele:

$$(i) \quad f(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

f ist ungerade, also $\alpha_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$. Es ist $\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt) dt = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$.

Damit:

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\cdot)}{2j+1}$$

Beachte: $(S_n f)(0) = 0 \rightarrow 0 \neq 1 = f(0)$ und $(S_n f)(2\pi) = 0 \rightarrow 0 \neq -1 = f(2\pi)$.

$$(ii) \quad f(t) := \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

f ist gerade, das heißt $\beta_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(kt) dt$, $\alpha_0 = \pi$.

$$\text{Für } k \geq 1: \quad \alpha_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit:

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2}$$

Satz 18.7

Sei $f \in L^2$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f|b_k)| < \infty$. Dann:

(1) Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k)b_k(t)$ konvergiert auf $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Setzt man $g(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k)b_k(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, so ist g stetig, $g(0) = g(2\pi)$ und $f = g$ f.ü. auf $[0, 2\pi]$.

(2) Ist f stetig, so gilt $f = g$ auf $[0, 2\pi]$, also:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|b_k)b_k(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Insbesondere: $f(0) = f(2\pi)$

Beweis

(1) $f_k(t) := (f|b_k)b_k(t)$;

$$|f_k(t)| = |(f|b_k)| \cdot |b_k(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |(f|b_k)| \quad \forall t \in [0, 2\pi] \forall k \in \mathbb{Z}$$

Aus Analysis I, 19.1(2) (Konvergenzkriterium von Weierstraß) folgt: Die Reihe in (1) konvergiert auf $[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Aus Analysis I, 19.2 folgt: g ist stetig. Klar: $g(0) = g(2\pi)$.

$$s_n(t) := \sum_{|k| \leq n} f_k(t) \quad (n \in \mathbb{N}_0, t \in [0, 2\pi]).$$

Aus 18.5 folgt: $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. $\|g - s_n\|_2 \stackrel{18.3(2)}{\leq} \|g - s_n\|_\infty \sqrt{2\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
Also: $\|g - s_n\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ Aus 16.5 folgt: $f = g$ f.ü.

(2) $f = g$ f.ü. $\stackrel{18.3(3)}{\implies} f = g$ auf $[0, 2\pi]$. ■

Satz 18.8

$f \in L^2_{\mathbb{R}}$ und die Folgen (α_k) und (β_k) seien definiert wie im Abschnitt “Reelle Version”. Weiter gelte: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty$. Dann gelten die Aussagen in 18.7 für die Reihen in 18.6.

Satz 18.9

Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $f(0) = f(2\pi)$.

- (1) Es ist $(f' | b_k) = ik(f | b_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- (2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f | b_k)| < \infty$ (d.h.: die Voraussetzungen von 18.7 sind erfüllt)

Beweis

(1)

$$\begin{aligned} (f' | b_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \\ &\stackrel{P.I.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-ikt} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) (-ik) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f(2\pi) - f(0)) + ik(f | b_k). \end{aligned}$$

- (2) Setze $\sigma_n := \sum_{|k| \leq n} |(f | b_k)|$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Es genügt zu zeigen: (σ_n) ist beschränkt. Klar: $0 \leq \sigma_n$.

$$\begin{aligned} \sigma_n - |(f | b_0)| &= \sum_{0 < |k| \leq n} |(f | b_k)| \stackrel{(1)}{=} \sum_{0 < |k| \leq n} \underbrace{\frac{1}{|k|}}_{:=u_k} \underbrace{(f' | b_k)}_{:=v_k} \\ &= \sum_{0 < |k| \leq n} u_k v_k \stackrel{\text{CS-Ugl.}}{\leq} \left(\sum_{0 < |k| \leq n} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{0 < |k| \leq n} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 \sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{0 < |k| \leq n} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\stackrel{18.2(3)}{\leq} \|f'\|_2} \\ &\leq \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel

- (1) f sei wie im Beispiel (2) vor 18.7. Es war:

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\cdot)}{(2j+1)^2} \quad \left(\alpha_{2j+1} = \frac{1}{(2j+1)^2}, \alpha_{2j} = 0 \right)$$

Aus 18.7 bzw. 18.8 folgt:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, folgt

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

und man erhält durch Umstellen eine Auswertung für diese eigentlich kompliziert wirkende Reihe:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

(dass diese Reihe konvergiert, ist eine einfache Übung aus Ana I; ihren Wert aber haben wir bislang noch nicht berechnet)

(2) $f(t) = (t - \pi)^2 \quad (t \in [0, 2\pi])$. f ist gerade bzgl. π , also ist $\beta_k = 0$. Es ist

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi^2, & k = 0 \\ \frac{4}{k^2}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{nachrechnen!})$$

Also:

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(j\cdot)}{j^2}$$

Aus 18.9 bzw. 18.7(2) folgt:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(jt)}{j^2} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Setzt man nun $t = 0$, erhält man

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}, \text{ also } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Damit erhält man z.B. auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

