Kapitel 1

Schemata

§ 1 Garben

Definition 1.1
Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine ***Prägarbe*** $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ besteht aus einer Abbildung $\mathrm{Off}(X) \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ und Morphismen $\rho_U^{U'} : \mathcal{F}(U') \to \mathcal{F}(U)$ für alle $U \subseteq U'$ offen, sodass gilt:

i) $\rho_U^U = \mathrm{id}_U$ für alle $U \in \mathrm{Off}(X)$
ii) $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$ für alle $U \subseteq U' \subseteq U''$ in $\mathrm{Off}(X)$

Bemerkung 1.2
Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist dasselbe wie ein kontravarianter Funktoren $\mathcal{F} : \mathrm{Off}(X) \to \mathcal{C}$.

Definition 1.3
Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ heißt ***Garbe***, wenn für jedes $U \in \mathrm{Off}(X)$, jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U und jede Familie $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I}$ mit $\rho_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gilt:
Es gibt *genau ein* $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle $i \in I$. Dieses s wird als ***Amalgam*** bezeichnet.

Beispiele
1) X quasi-projektive Varietät über einem Körper k, $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$ Ring der regulären Funktionen auf U.
   $\Rightarrow \mathcal{O}_X$ ist Garbe von Ringen auf X (k-Algebren)
2) X topologischer Raum, $\mathcal{C}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
   $\mathcal{C}_X$ ist Garbe von Ringen
3) Sei X topologischer Raum, G Gruppe, $\mathcal{G}(U) := G$ für alle $U \subseteq X$ offen, $\rho_U^{U'} = \mathrm{id}_G$. Seien U, U' offen in X mit $U \cap U' = \emptyset$
   $\widetilde{U} = U \cup U'$?!
   Finde kein $g \in \mathcal{G}(\widetilde{U}) = G$ mit $g = \begin{cases} \rho_U^{\widetilde{U}}(g) &= g_1 \neq g_2 \\ \rho_{U'}^{\widetilde{U}}(g) &= g_2 \neq g_1 \end{cases}$

Bemerkung 1.4
Sei X topologischer Raum, $\mathcal{F}$ Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ einelementig.

Beweis
Überdecke $\emptyset$ durch eine leere Menge von offenen Teilmengen! Jedes $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ erfüllt $\rho_\emptyset^{U_i}(s_i) = s$ für alle $i \in \emptyset$, $\emptyset = \bigcup\limits_{i\in\emptyset} U_i$. Also gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$. □

Definition 1.5
Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Prägarben auf X.

Ein ***Morphismus*** $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathrm{Off}(X) \to \mathcal{C}$, das heißt φ besteht aus Morphismen (in $\mathcal{C}$) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für jedes $U \in \mathrm{Off}(X)$, die die folgenden Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U') \arrow[r, "\varphi_{U'}"] \arrow[d, "\rho_U^{U'}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & \mathcal{G}(U') \arrow[d, "\rho_U^{U'}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd} \qquad \text{für alle } U \subseteq U' \text{ in } \mathrm{Off}(X)$$

Definition + Bemerkung 1.6
Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X.

a) Für ein $x \in X$ sei ein ***Halm*** definiert als

$$\mathcal{F}_x = \lim_{x \in U \in \mathrm{Off}(X)} \mathcal{F}(U) = \{(U,s) : x \in U \in \mathrm{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)\}\big/\sim$$

wobei $(U,s) \sim (U',s') :\Leftrightarrow \exists x \in U'' \subseteq U \cap U'$ mit $\rho^U_{U''}(s) = \rho^{U'}_{U''}(s')$. $\mathcal{F}_x$ heißt ***Halm*** von F in x.

b) Für $x \in U \in \mathrm{Off}(X)$ sei $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, s \mapsto (U,s)_\sim =: s_x$ der ***natürliche Morphismus***.

c) (UAE)
Für jedes $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und jede konsistente Familie $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to C$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ gibt es genau einen Morphismus $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to C$ mit $\varphi_x \circ \sigma_x = \varphi_U$ für alle U

$$(U,s)_\sim \mapsto \varphi_U(s)$$

d) Jeder Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert für jedes $x \in X$ einen Morphismus

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, dashed, "\varphi_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Bemerkung 1.7
Sei $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen auf X, $U \subseteq X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt:

$$s = 0 \Leftrightarrow s_x = 0 \text{ für alle } x \in U$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: ✓

„$\Leftarrow$“: Für jedes $x \in U$ gibt es Umgebung U_x mit $s|_{U_x} = 0$. $(s|_{U_x} = \rho^U_{U_x})$. Die $(U_x)_{x \in U}$ bilden offene Überdeckungen, die $s|_{U_x}$ bilden konsistente Familie, s und 0 sind beides Amalgam $\xRightarrow[\text{eigenschaft}]{\text{Gruppen-}} s = 0$ $\square$

Proposition 1.8
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben von abelschen Gruppen auf X, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus.

a) φ_U injektiv für jedes $U \in \mathrm{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ injektiv für alle $x \in X$

b) φ_U surjektiv für jedes $U \in \mathrm{Off}(X) \Rightarrow \varphi_x$ surjektiv für alle $x \in X$

c) φ_U bijektiv für jedes $U \in \mathrm{Off}(X) \Leftrightarrow \varphi_x$ bijektiv für alle $x \in X$

Beweis

a) „$\Rightarrow$“: Sei $x \in X, s_x \in \mathcal{F}$ mit $\varphi_x(s_x) = 0$.

$\exists$ Umgebung von x und $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x =$ Keim von s in x mit $\varphi_x(s_x) =$ Keim von $\varphi_U(s)$ in $x = \varphi_U(s)_s$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto, bend left] \arrow[ddd, bend right] & \varphi_U(s) \arrow[ddd, bend left] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x \\
s_x \arrow[r, mapsto, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ ŒE $\varphi_U(s) = 0 \xRightarrow[\text{injektiv}]{\varphi_U} s = 0$

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subset \mathrm{Off}(X), s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = 0$

$\Rightarrow$ für alle $x \in U$ ist $\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x = 0 \xRightarrow{\varphi \text{ injektiv}} s_x = 0 \overset{1.7}{\Longrightarrow} s = 0$

b) „$\Rightarrow$“: Sei $g_x \in \mathcal{G}_x$, (U, g) Repräsentant $\Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s) = g \Rightarrow \varphi_x(s_x) = g$

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto, bend left] \arrow[ddd, bend right] & \varphi_U(s) \arrow[ddd, bend left] \arrow[r, phantom, "="] & g \arrow[ddd, bend left] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] & \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathcal{G}_x & \\
s_x \arrow[r, mapsto, bend right] & 0 & g_x
\end{tikzcd}$$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}^\times$ die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen. $\varphi = \exp$, das heißt für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $\varphi(f) = e^{2\pi i f}$.

φ ist Garbenhomomorphisms ($e^{f+g} = e^f \cdot e^g$). φ_x ist surjektiv für jedes $x \in X$ (lokal gibt es zu jeder holomorphen Funktion ohne Nullstellen einen Logarithmus). $\varphi_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ ist nicht surjektiv! (zum Beispiel gibt es keine holomorphe Funktion $\log z$ auf ganz $\mathbb{C}$)

Schlimmer noch: φ_U ist nicht injektiv für jedes $U \in \mathrm{Off}(\mathbb{C})$, das nicht einfach zusammenhängend ist.

c) „$\Rightarrow$“: ✓

„$\Leftarrow$“: Sei $U \subseteq X$ offen, $g \in \mathcal{G}(U)$.
Für jedes $x \in U$ gibt es $s_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(s_x) = g_x$. Wähle Repräsentanten $(U_x, s^{(x)})$ von s_x, sodass $\varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x}$ (das geht!) (*denn*: Sei $(U, \tilde{s})$ Repräsentant von $s_x \Rightarrow \varphi_U(\tilde{s}) \sim_x g|_U \Rightarrow \exists x \in U_x \subset U : \varphi_U(\tilde{s})|_{U_x} = g|_{U_x}$)
Die U_x bilden offene Überdeckungen von U, die $s^{(x)}$ bilden konsistente Familie (*)
$\Rightarrow$ Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(s)|_{U_x} = \varphi_{U_x}(s^{(x)}) = g|_{U_x} \Rightarrow \varphi_U(s) = g$.
(*) zu zeigen: $s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$
denn: $\varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(x)}|_{U_x \cap U_y} = \varphi_{U_x \cap U_y}(s^{(y)}|_{U_x \cap U_y}$, $\varphi_{U_x \cap U_y}$ injektiv nach Voraussetzung und a) $\Rightarrow$ Behauptung □

Proposition + Definition 1.9
Sei X topoloischer Raum, $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X (mit Werten in $\mathcal{C}$)

a) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X und einen Morphismus $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, sodass $\vartheta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist.
b) $\mathcal{F}^+$ heißt ***zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe***.
c) (UAE)
Für jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$ gibt es genau einen Morphismus $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\varphi = \varphi^+ \circ \vartheta$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Beweis

a) Für $U \in \mathrm{Off}(X)$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(U) \;:=\; \{ & s : U \to \dot{\bigcup_{x \in U}} \mathcal{F}_x | s(x) \in \mathcal{F}_x \forall\, x \in X, \text{ zu jedem } x \in U \\ & \text{gibt es Umgebung } U_x \text{ und } f \in \mathcal{F}(U) \text{ mit } s(y) = f_y \\ & \text{für jedes } y \in U_y \} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}^+$ ist Garbe ✓
Sei $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ gegeben durch

$$\boxed{\vartheta_U(f)(x) = f_x \quad (U \in \mathrm{Off}(X), f \in \mathcal{F}(U))}$$

ϑ ist Morphismus: ✓
ϑ ist Isomorphismus: ✓ □

Definition + Bemerkung 1.10
Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X.

a) Sei Kern(φ) die Prägarbe Kern$(\varphi)(U) :=$ Kern(φ_U).
b) Kern(φ) ist Garbe.
c) φ heißt ***injektiv*** (oder ***Monomorphismus***) :$\Leftrightarrow$ Kern$(\varphi) = 0$

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \overset{\psi_1}{\to} \\ \qquad\quad \mathcal{F} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{G} \\ \mathcal{E}_2 \overset{\psi_2}{\to} \end{array}$$

φ Monomorphismus $\Leftrightarrow \varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

d) Sei $\mathcal{B}_\varphi$ die Prägarbe $\mathcal{B}_\varphi(U) := \mathrm{Bild}(\varphi_U)$
   $\mathrm{Bild}(\varphi_U) := \mathcal{B}_\varphi^+$
e) φ heißt ***surjektiv*** (oder ***Epimorphismus***) $:\Leftrightarrow \mathrm{Bild}(\varphi) = \mathcal{G}$

$$\mathcal{F} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{G} \begin{matrix} \overset{\psi_1}{\to} \mathcal{H}_1 \\ \overset{\psi_2}{\to} \mathcal{H}_2 \end{matrix}$$

   φ Epimorphismus $\Leftrightarrow \psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

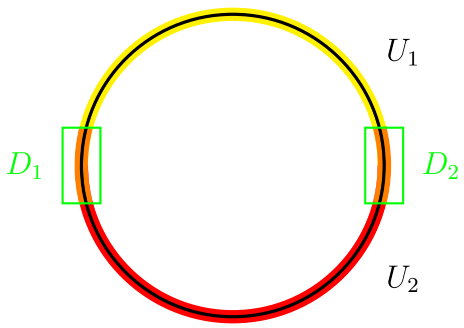
Beweis
a)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, "\varphi_{U'}"] \arrow[d, "\rho_U^{U'}"'] & \mathcal{G}(U') \arrow[d, "\rho_U^{U'}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $U \in \mathrm{Off}(X)$, $s_i \in \mathrm{Kern}(\varphi_{U_i}) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ konsistente Familie.
   Es gibt ein Amalgam $s \in \mathcal{F}(U)$. $\varphi_x(s_x) = 0$ für jedes $x \in U \overset{1.8a)}{\Longrightarrow} \varphi_U(s) = 0$
e) $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathcal{G} \Leftrightarrow \underbrace{\mathrm{Bild}(\varphi)_x}_{=\mathrm{Bild}(\varphi_x)} = \mathcal{G}_x$ für alle x
   φ Epimorphismus $\Leftrightarrow$ für jedes $x \in X$ ist φ_x surjektiv, das heißt $\mathrm{Bild}(\varphi_x) = \mathcal{G}_x$. $\square$

Definition 1.11
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen auf X, $i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ Monomorphismus.
a) $\mathcal{G}$ heißt ***Untergarbe*** von $\mathcal{F}$.
b) $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ ist Prägarbe auf X, die assoziierte Garbe $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ heißt ***Quotientengarbe***.

Beispiel
Sei $X = S^1$ (Einheitskreislinie)
$\mathcal{F} = \mathcal{C}$ (stetige Funktionen $S^1 \to \mathbb{R}$)
$\mathcal{G} =$ konstante Garbe $\mathbb{Z}$
$U = x$, U_1, U_2 wie im Bild



$$U_1 \cap U_2 = D_1 \cup D_2$$

Sei $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ mit $f_1|_{D_1} = 0, f_1|_{D_2} = 1, 0 = f_2 \in \mathcal{F}(U_2) \Rightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$ (!)
$\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ in $\mathcal{F}(U_1 \cap U_2)/\mathcal{G}(U_1 \cap U_2) \Rightarrow (\bar{f}_i \in \mathcal{F}(U_i)/\mathcal{G}(U_i))_{i=1,2}$ ist konsistente Familie.
Aber: Es gibt kein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_1} = f_1, f|_{U_2} = f_2$

Proposition 1.12
Sei X topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen, $x \in X$.

a) Die Zuordnung $\Phi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ induziert exakten kovarianten Funktor von der Kategorie $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ der Garben abelscher Gruppen auf X in die Kategorie $\underline{\mathrm{Ab}}$ der abelschen Gruppen.

   Dabei ist $\Phi_x(\varphi) = \varphi_x$ für $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus.

b) Die Zuordnung $\Phi_U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$ induziert linksexakten kovarianten Funktor $\underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (mit $\Phi_U(\varphi) = \varphi_U$)

Beweis
(*) Sei $0 \to \mathcal{F}' \overset{\varphi}{\to} \mathcal{F} \overset{\psi}{\to} \mathcal{F}'' \to 0$ exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$. *Achtung:* Das bedeutet *nicht*, dass für jedes $\widetilde{U} \in \mathrm{Off}(X)$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F}'(\widetilde{U}) \to \mathcal{F}(\widetilde{U}) \to \mathcal{F}''(\widetilde{U}) \to 0$ exakt sein muss.

Aber: (*) ist äquivalent zu: $0 \to \mathcal{F}'_y \overset{\varphi_y}{\to} \mathcal{F}_y \overset{\psi_y}{\to} \mathcal{F}''_y \to 0$ ist exakt für jedes $y \in X$

$\Rightarrow$ a)

b) Φ_U linksexakt bedeutet:

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \overset{\varphi_U}{\to} \mathcal{F}(U) \overset{\psi_U}{\to} \mathcal{F}''(U) \to 0 \text{ ist exakt} \qquad \square$$

   Das stimmt nach 1.8 und ...

Definition + Bemerkung 1.13
Sei $f : X \to Y$ stetig.

a) Sei $\mathcal{F}$ Garbe auf X.

   Dann ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ auf Y eine Garbe, sie heißt (direkte) ***Bildgarbe*** von $\mathcal{F}$ (unter f). Bezeichnung: $f_*\mathcal{F}$

b) Sei $\mathcal{G}$ Garbe auf Y.

   Die zur Prägarbe $U \mapsto \varinjlim_{\substack{f(U)\subseteq V \\ V \in \mathrm{Off}(Y)}} \mathcal{G}(V)$ assoziierte Garbe heißt ***Urbildgarbe*** von $\mathcal{G}$.

   Bezeichnung: $f^{-1}(G)$

c) f_* und f^{-1} sind kovariante Funktoren.

Beweis

a) Sei $U \subseteq Y$ offen, $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U, also $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ offene Überdeckung von $f^{-1}(U)$. $s_i \in \underbrace{f_*\mathcal{F}(U_i)}_{=\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$, $i \in I$, konsistente Familie.

   $\Rightarrow \exists$ Amalgam $s \in \underbrace{\mathcal{F}(f^{-1}(U))}_{=f_*\mathcal{F}(U)}$ mit $s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$ für alle $i \in I$.

c) Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus von Garben auf X.

   i) Definiere $\varphi_* : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ durch

$$(\varphi_*)_U = \varphi_{f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to f_x\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \qquad \square$$

   ii) Definiere $f^{-1}\varphi : f^{-1}\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{G}$ durch $(f_\varphi^{-1})_U = \varinjlim_{f^{-1}(U)\subseteq V \in \mathrm{Off}(Y)} \varphi_V$

$$\begin{tikzcd}
 & & & f^{-1}\mathcal{F}(U) \arrow[ddd, dashed, bend left] \\
 & \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_V"] \arrow[urr, bend left] & \mathcal{F}(V') \arrow[ur] \arrow[d, "\varphi_{V'}"] & \\
V' \subseteq V & \mathcal{G}(V) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \mathcal{G}(V') \arrow[dr] & \\
 & & & f^{-1}\mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.14
Sei $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $\mathcal{G}$ Garbe auf Y. Dann gibt es eine (natürliche) Bijektion

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Das bedeutet: f^{-1} ist linksadjungiert zu f_*.

Beweis
Definiere $\varphi_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ und $\psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{F}$
Dann:

$$T_1 : \begin{cases} \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ \alpha & \mapsto & f_*(\alpha) \circ \psi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G} \overset{f_*\alpha}{\to} f_*\mathcal{F} \end{cases}$$

Analog: $T_2 : \beta \mapsto \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}(\beta)$
Rest: Übung $\square$

§ 2 Affine Schemata

Behauptung: $\alpha : R \to R'$ Ringhomom, $\mathfrak{p} \subset R'$ Primideal $\Rightarrow \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ Primideal in R

Beweis: Seien $f, g \in R$ mit $f \cdot g \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha(f \cdot g)}_{=\alpha(f)\cdot\alpha(g)} \in \mathfrak{p} \overset{\text{Œ}}{\Longrightarrow} \alpha(f) \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$$

Definition + Bemerkung 2.1

Sei R ein Ring (das heißt kommutativer Ring mit Eins)

a) $\operatorname{Spec} R := \{\mathfrak{p} \subset R : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt ***Spektrum*** von R.

b) Für $I \subseteq R$ sei $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : I \subseteq \mathfrak{p}\}$. $V(I)$ heißt ***Nullstellenmenge*** (vanishing set) von I, es ist $V(I) = V((I))$.

c) Die $V(I)$, $I \subseteq R$ Ideal, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, der ***Zariski Topologie***.

d) Für $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ heißt $I(V) := \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$ ***Verschwindungsideal*** von V.

Beweis

c) $\emptyset = V(R)$

$\operatorname{Spec} R = V(0)$

$\bigcap\limits_{i \in I} V(I_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \{\mathfrak{p} \in I_i \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : I_i \subseteq \mathfrak{p} \forall\, i\} = V(\bigcup\limits_{i \in I} I_i) = V(\sum\limits_{i \in I} I_i)$

$V(I_1) \cup V(I_2) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : I_1 \subseteq \mathfrak{p} \text{ oder } I_2 \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I_1 \cdot I_2) \overset{?}{=} V(I_1 \cap I_2)$

$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$

$\mathfrak{p} \in V(I_1 \cdot I_2) \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p} \overset{\text{Œ}}{\Longrightarrow} I_1 \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$

$\Rightarrow V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$ □

Bemerkung 2.2

a) $V(I(V)) = \bar{V}$ für jedes $V \subseteq \operatorname{Spec} R$

b) $I(V(I)) = \sqrt{I}$ für jedes ideal $I \subseteq R$

Beweis

a) „$\supseteq$“: $V \subseteq V(I(V)) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R : \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$

„$\subseteq$“: Es ist $\bar{V} = \bigcap\limits_{V \subseteq V(I)} V(I)$ Ist I Ideal in R mit $V \subseteq V(I)$, so ist $I \subseteq I(V) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V} \mathfrak{p}$.

$\Rightarrow V(I) \supseteq V(I(V))$

$\Rightarrow V(I(V)) \subseteq \bigcap\limits_{I : V \subseteq V(I)} V(I) = \bar{V}$

b) $I(V(I)) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap\limits_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \overset{!}{=} \sqrt{I}$ (Übung) □

Proposition 2.3

Sei $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, $V \neq 0$. Dann gilt: V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal

Beweis

Wie in Algebraische Geometrie I, Proposition 4.4 □

Bemerkung 2.4
Jeder Ringhomomorphismus $\alpha : R \to R'$ induziert stetige Abbildung $f_\alpha : \operatorname{Spec} R' \to R$ durch $\mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, das heißt $\operatorname{Spec} : \begin{cases} \underline{\text{Ringe}} & \to & \underline{\text{Top}} \\ R & \mapsto & \operatorname{Spec} R \end{cases}$ ist kontravarianter Funktor.

Beweis
Noch zu zeigen: f_α stetig.
Sei $V = V(I) \subseteq \operatorname{Spec} R \Rightarrow f_\alpha^{-1}(V) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R' : \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq I\} = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \supseteq \alpha(I)\} = V(\alpha(I))$ □

Bemerkung 2.5
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.
Dann ist $m : \begin{cases} V & \to & \operatorname{Spec} k[V] \\ x & \mapsto & m_x \end{cases}$ injektiv und stetig.

Beweis
injektiv: ✓
m stetig: Sei $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} k[V]$ abgeschlossen.
$\Rightarrow m^{-1}(V(I)) = \{x \in V : m_x \in V(I)\} = \{x : I \subseteq m_x\} = \{x : f(x) = 0$ für alle $f \in I\} = V(I)$ □

Beispiel
Seien $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

Definition + Bemerkung 2.6
a) Ein Punkt $x \in X$ (X topologischer Raum) heißt ***generisch***, wenn $\overline{\{x\}} = X$ ist.
b) Jede irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ hat genau einen generischen Punkt.
c) Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R.

Bemerkung 2.7
Für jedes $f \in R$ ist $D(f) = \operatorname{Spec} R \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : f \notin \mathfrak{p}\}$ offen in $\operatorname{Spec} R$. Die $D(f), f \in R$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis
Sei $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ offen, $V = \operatorname{Spec} R - U \Rightarrow \exists I \subseteq R$ Ideal mit $V = V(I)$. Für $f \in I$ ist $f \in \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in V$, das heißt $V(I) \subseteq V(f) \Rightarrow D(f) \subseteq U$ □

Bemerkung 2.8
$\operatorname{Spec} R$ ist quasikompakt.

Beweis
Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$. Œ $U_i = D(f_i)$ für ein $f_i \in R$.
Dann gilt : $\bigcup_{i \in I} D(f_i) = \operatorname{Spec} R \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \emptyset \Leftrightarrow$ Die f_i, $i \in I$, erzeugen R

$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_k$ mit $1 = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu f_{i_\nu}$ für gewisse $a_\nu \in R$

$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{k} D(f_{i_\nu}) = \operatorname{Spec} R$ □

Definition + Bemerkung 2.9
Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$

a) Für $f \in R$ sei $\mathcal{O}_X(D(f)) := R_f$

b) Die Zuordnung $D(f) \mapsto R_f$ ist eine $\mathcal{B}$-Garbe von Ringen auf X für die Basis $\mathcal{B} = \{D(f) : f \in R\}$ der Zariski-Topologie auf X.

c) Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf X mit $\mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$ für jedes $f \in R$. $\mathcal{O}_X$ heißt ***Strukturgarbe*** auf X.

d) Für beliebiges $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U) = \{s : U \to \dot{\bigsqcup\limits_{\mathfrak{p}\in U}} R_\mathfrak{p} | s(\mathfrak{p}) \in R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in U\}$; für jedes $\mathfrak{p} \in U$ gibt es Umgebung $U_\mathfrak{p} \subseteq U$ von $\mathfrak{p}$ und $f, g \in R$ mit $g \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}$ sodass $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}(\mathfrak{q})$ für alle $\mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p}\}$

$g \notin \mathfrak{q}$ bedeutet $\mathfrak{q} \in D(g)$; $\frac{f}{g}(\mathfrak{q}) :=$ Bild von $\frac{f}{g}$ in $R_\mathfrak{q}$

e) $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_\mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in X$.

Beweis

b) Seien $f, g \in R$ mit $D(f) \subseteq D(g)$.

$\Rightarrow V(g) \subseteq V(f) \Rightarrow f \in \bigcap\limits_{(g)\in\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}$

$\Rightarrow \exists d \geq 1$ mit $f^d \in (g)$, das heißt $\exists h \in R$ mit $f^d = g \cdot h$

$\Rightarrow$ erhalte Homomorphismus $\begin{array}{ccc} R_g & \to & R_f \\ \frac{a}{g^k} & \mapsto & \frac{a \cdot h^k}{f^{d\cdot k}} \end{array}$

Wohldefiniertheit: $\frac{g}{1} \cdot \frac{h}{f^d} = 1$ in R_f, da $g \cdot h - f^d = 0$ in R_f.

Zeige: $D(f) \mapsto R_f$ ist $\mathcal{B}$-Garbe.

Sei also $f \in R$, $(D(f_i))_{i\in I}$ offene Überdeckung von $D(f)$, $g_i \in R_{f_i}$ konsistente Familie (das heißt $g_i = g_j$ in $\mathcal{O}_X(D(f_i) \cap D(f_j)) = \mathcal{O}(D(f_i f_j)) = R_{f_i f_j}$).

Zu zeigen: $\exists! g \in R_f$ mit $g = g_i$ in R_{f_i} für jedes i:

- Œ $f = 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ (X ist quasikompakt)
- *Eindeutigkeit:* Ist $g = h$ in R_{f_i}, $i = 1, \dots, n$, so ist $(g - h) \cdot f_i^d = 0$ für ein $d \geq 1$. Die f_i^d, $i = 1, \dots, n$, erzeugen R (!)

$$(f_1, \dots, f_n)^{n\cdot d} \subseteq (f_1^d, \dots, f_n^d)$$

$\Rightarrow g = h$

- *Existenz:* Schreibe $g_i = \frac{h_i}{f_i^N}$, $h_i \in R$, $N \geq 1$. Nach Voraussetzung ist $\overbrace{f_i^N f_j^N g_i}^{=f_j^N h_i} = \overbrace{f_j^N f_i^N g_j}^{f_i^N h_j}$ für ein (anderes) $N \geq 1$.

$(f_1^N, \dots, f_n^N) = R \Rightarrow \exists b_i \in R$ mit $1 = \sum\limits_{i=1}^n b_i f_i^N$

Setze $g := \sum\limits_{i=1}^n b_i h_i$

Dann ist für $j = 1, \dots, n$

$$f_j^N g = f_j \sum_{i=1}^n b_i h_i = \sum_{i=1}^n b_i f_j^N h_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i f_i^N}_{=1} h_j = h_j = f_j^N g_j \text{ in } R_{f_j}$$

$\Rightarrow g = g_j$ in R_{f_j} $\square$

Definition 2.10
Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe. Dann heißt $(X, \mathcal{O}_X)$ ***affines Schema***.

Beispiele
1) $R = k$ Körper $\Rightarrow X = \operatorname{Spec} k = \{(0)\}$, $\mathcal{O}_X(X) = k$
2) $R = k[X], k$ Körper. Ist $\{(0)\}$ offen? Nein!
   $k = \mathbb{Q}$: $\mathfrak{p} = (X^2 + X + 1)$ ist abgeschlossener Punkt

$$R_{\mathfrak{p}}/m_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$$

   $\Rightarrow \mathfrak{q} = (X - a), a \in k$, $R_{\mathfrak{q}}/m_{\mathfrak{q}} \cong k[X]/(X - a) \cong k$

Bemerkung 2.11
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ affines Schema, $X = \operatorname{Spec} R$. Dann ist für jedes $f \in R$ auch $(D(f), \mathcal{O}_X(f))$ affines Schema. *Genauer:* $(D(f), \mathcal{O}_X(D(f))) = (\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f})$

Beweis
$D(f) = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal} : f \notin R\}$
$\operatorname{Spec} R_f = \{\mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$

$$\begin{array}{ccc} R & \to & R_f \\ a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \not\ni f$, $\mathfrak{p} \cdot R_f = \mathfrak{q} \cdot R_f$
Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p} \overset{!}{\Rightarrow} \frac{x}{1} \notin \mathfrak{p} \cdot R_f$
Sei $x = \frac{a}{f^d}, a \in \mathfrak{p}, d \geq 1 \Rightarrow f^d \cdot x \in \mathfrak{p} \lightning$
Sei $h = \frac{g}{f^d} \in R_f$. *Zu zeigen:*

$$\underbrace{\mathcal{O}_x|_{D(f)}(D(h))}_{\mathcal{O}_X(D(f) \cap D(g) = R_{f \cdot g}} \cong \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}(D(h))}_{(R_f)_h = R_{f \cdot g}}$$

$\square$

§ 3 (Allgemeine) Schemata

Definition 3.1

a) Ein ***geringter Raum*** ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen.

b) Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***lokal*** geringter Raum, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring ist.

Bemerkung 3.2

Jedes affine Schema $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ist ein lokal geringter Raum.

Definition 3.3

a) Ein ***Morphismus*** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Garben.

b) Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ wie in a) sodass für jedes $x \in X$ der auf den Halmen induzierte Homomophismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ die Bedingung $f_x^\#(m_{f(x)}) \subseteq m_x$ erfüllt ($f_x^\#$ heißt dann lokaloer Homomophismus).
$(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} = \lim\limits_{f(x) \in U} \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(U)}_{x \in}) \to \mathcal{O}_{X,x}$

Beispiel

Sei R lokaler Ring, nullteilerfrei, $K = \operatorname{Quot}(R) \neq R$. Dann ist die Inklusion $R \hookrightarrow K$ *nicht* lokal.

Proposition 3.4

Die Kategorie der affinen Schemata mit Morphismen aus Definition 3.3 b) ist (anti-)äquivalent zur Kategorie der Ringe.

Beweis

(i) Sie Zuordnung $R \to (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ist Funktor. Sei $\alpha : R \to S$ Ringhomomorphismus, $f_\alpha : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R, \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$. Nach Bemerkung 2.4 ist f_α stetig und $f_\alpha^{-1}(D(g)) = D(\alpha(g))$.
Definiere $f_\alpha^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}$ durch

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(g))}_{= R_g \ni \frac{a}{g^d}} & \to & (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(D(g)) = & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(f_\alpha^{-1}(D(g)) = & \underbrace{\mathcal{O}_{SpecS}(D(\alpha(g))}_{= S_{\alpha(g)}} \\ & \mapsto & \frac{\alpha(a)}{\alpha(g)^d} & \in & \end{array}$$

Noch zu zeigen: $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}$ ist lokal für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S$
Sei $\mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} R$, das heißt $\mathfrak{p} = f_\alpha(\mathfrak{q})$.
Das maximale Ideal $m_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $m_\mathfrak{q}$) in $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\mathfrak{p}} (= R_\mathfrak{p})$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S,\mathfrak{q}}$) ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ (beziehungsweise $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$).
Für $a = \frac{b}{f} \in m_\mathfrak{p}$ ($b \in \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}$) ist $(f_\alpha^\#)_\mathfrak{q}(a) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(f)} \in m_\mathfrak{q}$, da $b \in \mathfrak{q} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(b) \in \mathfrak{q}$ und $f \notin \mathfrak{p} = \alpha^{-1}(\mathfrak{q})$, also $\alpha(f) \notin \mathfrak{q}$. □

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels)

$\alpha : R \hookrightarrow K$, $\dim R = 1$ (zum Beispiel diskreter Bewertungsring)

$$\begin{array}{rccc} & \operatorname{Spec} K = \{(0)\} & \to & \operatorname{Spec} R = \{(0), m\} \\ & (0) & \mapsto & (0) \\ (f_\alpha^\#)_{(0)} : & R_{(0)} = K & \to & K \end{array}$$

Beweis (Fortsetzung des Beweises von Proposition 3.4)

(ii) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ affines Schema, $X = \operatorname{Spec} R$, so ist $R = \mathcal{O}_X(X)$. Ein Morphismus $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ induziert Homomophismus

$$f^\# : \underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R)}_{=R} \to \underbrace{f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} R)}_{\substack{=\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(f^{-1}(\operatorname{Spec} R))=S \\ f^{-1}(\operatorname{Spec} R)=\operatorname{Spec} S}}$$

Nachrechnen: Die Funktoren in (i) und (ii) sind zueinander invers. □

Definition 3.5

Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***Schema***, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X gibt und affine Schemata $(\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$ für jedes $i \in I$, sodass

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \underset{\text{geringter Raum}}{\overset{\text{als lokal}}{\cong}} (\operatorname{Spec} R_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i})$$

Bemerkung + Definition 3.6

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Schema, $U \subseteq X$ offen.

Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ auch ein Schema. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt ***offenes Unterschema*** von X.

Beweis

Sei $X = \bigcup\limits_{i\in I} \operatorname{Spec} R_i$ eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata.

$\Rightarrow U = \bigcup\limits_{i\in I} \underbrace{(U \cap \operatorname{Spec} R_i)}_{\subset \operatorname{Spec} R_i \text{ offen}}$, wobei $U \cap \operatorname{Spec} R_i \subset \operatorname{Spec} R_i$ offen, also $= \bigcup\limits_{j\in J} D(f_{ij})$, $f_{ij} \in R_i$

$(D(f_{ij}), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_i}|_{D(f_{ij})})$ ist affines Schema nach Bemerkung 2.11 □

Proposition 3.7 (Verkleben)

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Schemata, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen und $\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_Y|_V)$ Isomorphismus von Schemata (das heißt von lokal geringten Räumen). Sei $Z = (X \cup Y)/_\sim$ der topologische Raum, der durch Verkleben von X und Y längs φ ntsteht.

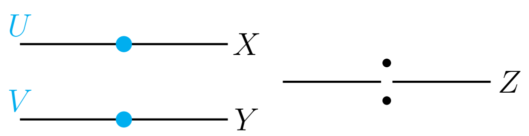
Dann gibt es genau eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z mit $\mathcal{O}_Z|_X = \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Z|_Y \cong \mathcal{O}_Y$.

Beweis

Die offenen Teilmengen von X und von Y bilden eine Basis der Topologie auf Z. □

Beispiel

$$\begin{matrix} X = \mathbb{A}^1, U = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \\ Y = \mathbb{A}^1, V = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \end{matrix} \quad \varphi = \mathrm{id}$$



Beispiele

1) Quasiprojektive Varietäten:

   $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, k Körper quasi-projektiver Varietäten. V besitzt endliceh Überdeckung durch affine Varietäten $V = \bigcup_{i=1}^r X_i$.

   V ist „Verklebung" dieser affinen Varietäten. Jedes X_i bestimmt affines Schema $\operatorname{Spec} k[X_i]$. Verklebe die $\operatorname{Spec} k[X_i]$ zu Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. X hat dieselben abgeschlossenen Punkte wie V (falls k algebraisch abgeschlossen).

   Beobachtung: $(X, \mathcal{O}_X)$ hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der gewählten affinen Überdeckung ab.

Proposition 3.8
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt:

a) Die Zuordnung $V \mapsto \operatorname{Spec} k[V]$ ist ein volltreuer, auf Objekten injektiver Funktor t von der Kategorie der affinen Varietäten$/k$ in die Kategorie der affinen Schemata.

b) t setzt sich fort zu volltreuem, auf Objekten injektivem Funktor

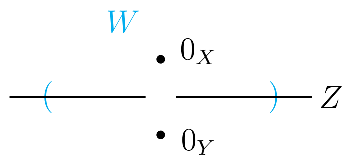
$$\text{quasiprojektive Varietäten}\big/_k \to \text{Schemata}$$

Bezeichnung 3.9
$\mathbb{A}^n_k := \operatorname{Spec} k[X_1, \ldots, X_n]$ (vergleiche $\mathbb{A}^n(k)$)

Beispiele

2) $X = Y = \mathbb{A}^1_k$, $U = V = D(T) = \mathbb{A}^1_k \setminus \{(T)\}$, $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$. Verklebe X und Y längs $\mathrm{id} : U \to V$.

Erhalte Schema Z mit offenen Einbettungen $i_X : X \to Z$, $i_Y : Y \to Z$ sodass $Z - \{0_X, 0_Y\}$ isomorph zu $U = V$ ist.



$i_X((T)) =: 0_X$, $i_Y((T)) =: 0_Y$

Es gilt:

(i) Z ist irreduzibel.

(ii) Sei $W \subseteq Z$ offen, $0_X \in W$, $0_Y \in W$, $f \in \mathcal{O}_Z(W)$. Dann ist $f(0_X) = f(0_Y)$.

(iii) Die Diagonale $\Delta = \{(z_1, z_2) \in Z \times Z : z_1 = z_2\}$ ist nicht abgeschlossen.

Folgerung: Z ist nicht isomorph zu einem affinen Schema. Beweis in der Übung.

Definition + Bemerkung 3.10
Sei $S := \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ graduierter Ring ($S_d \cdot S_e = S_{d+e}$)

a) $\operatorname{Proj}(S) := \{\mathfrak{p} \subset S : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \nsubseteq \mathfrak{p}\}$
($S_+ := \bigoplus_{d>0} S_d$) heißt ***homogenes Spektrum*** von S.

b) Für ein homogenes Ideal $I \subseteq S$ sei $V(I) : \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S, I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Die $V(I)$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Proj} S$ (***Zariski Topologie***).

c) Für homogenes $f \in S$ sei $D_+(f) := \operatorname{Proj} S - V(f)$. Die $D_+(f)$, $f \in S$ homogen, bilden Basis.

d) Für $f \in S$ homogen sei

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f)) := S_f^{\mathrm{hom}} = \left\{ \frac{a}{f^d} : a \text{ homogen vom Grad } d \cdot \deg(f) \right\}$$

e) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}$ von Ringen auf $\operatorname{Proj} S$ mit $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f)) = S_f^{\mathrm{hom}}$.

f) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ ist

$$\mathcal{O}_{ProjS,\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{hom}} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \text{ homogen}, \deg a = \deg b, b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

(lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot S_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{hom}} := \{\frac{a}{b} \in S_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{hom}} : a \in \mathfrak{p}\}$)

g) $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ ist Schema.

Beweis

g) $D_+(f)$, $\underbrace{\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(D_+(f))}_{\ni \mathfrak{p} \mapsto \{\frac{a}{f^d} \in S_f^{\text{hom}} : a \in \mathfrak{p}\}} \cong \operatorname{Spec} S_f^{\text{hom}}$ $\square$

Beispiel

$S = k[X_0, \dots, X_n]$

Dann: $\operatorname{Proj} S = t(\mathbb{P}^n(k)) =: \mathbb{P}^n_k$, denn $D_+(X_i) = \operatorname{Spec} k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$

§ 4 Abgeschlossene Unterschemata

Bemerkung + Definition 4.1
Sei R Ring, $I \subseteq R$ Ideal

a) Die Abbildung $V(I) \to \operatorname{Spec}(R/I), \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \mod I$ ist ein Homöomorphismus.
b) $(V(I), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I)})$ heißt ***abgeschlossenes Unterschema*** von $\operatorname{Spec} R$.
c) Die abgeschlossenen Unterschemata von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den Idealen in R.
d) Für abgeschlossene Unterschemata $Z_i \in \operatorname{Spec} R/I_i$ gilt: Z_2 ist abgeschlossenes Unterschema von Z_1 („$Z_2 \leq Z_1$“) $\Leftrightarrow I_1 \subseteq I_2$.
Es ist dann $Z_2 = V(I_2) \subseteq V(I_1) = Z_1$

Beispiel
$X = \mathbb{A}^1_k - \operatorname{Spec}[X]$, $Z_1 = \operatorname{Spec} k[X]/(X^2)$, $Z_2 = k[X]/(X^2 - X)$. Dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ als topologische Räume aber nicht als abgeschlossene (Unter-) Schemata.

Definition + Bemerkung 4.2
Sei $I \subseteq R$ Ideal, $Z = \operatorname{Spec} R/I$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema von $X = \operatorname{Spec} R$.

a) Für $U \subseteq X$ offen sei $I(U) := I \cdot \mathcal{O}_X(U)$, das Bild von I unter Restriktion. $\mathcal{I}$ ist Garbe von Idealen auf X.
b) Sei $j : Z \to X$ die Inklusion. Dann ist $j_* \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X/I$

Beweis
b) Für $f \in R$ ist $j_* \mathcal{O}_Z D(f) = \mathcal{O}_Z j^{-1} D(f) = \mathcal{O}_Z(D(f) n \mathbb{Z}) = \mathcal{O}_Z(D(\overline{f})) = (R/I)\overline{f} = R_f/IR_f = \mathcal{O}_X/I(D(f))$ □

Folgerung 4.3
In der Situation 4.2 wird $j : Z \to X$ zum Schemamorphismus, wobei

$$\begin{tikzcd} j^{\#}\mathcal{O}_X \arrow[rr] \arrow[dr] & & j_*\mathcal{O}_Z \\ & \mathcal{O}/\mathcal{I} \arrow[ur, "\sim\ \mathrm{b)}"'] & \end{tikzcd}$$

die Quotientenabbildung $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ ist.

Definition 4.4
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema

a) Eine Garbe $\mathcal{I}$ (von abelschen Gruppen) auf X heißt ***Idealgarbe***, wenn für jedes offene $U \subseteq X$ $\mathcal{I}(X)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$ ist und die Restriktionshomomorphismen $\mathcal{O}_X(U)$-linear sind.
b) Ist $X = \operatorname{Spec} R$ affines Schema, so heißt eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X ***quasikohärent***, wenn es ein Ideal I in R gibt mit $\mathcal{I}(U) = I\mathcal{O}_X(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$.
c) Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X heißt ***kohärent***, wenn für jedes offene affine Unterschema $U \subseteq X$ die Einschränkung $\mathcal{I}|_U$ quasikohärent ist.

Proposition 4.5
Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt durch affine Unterschemata U_i gibt, sodass $\mathcal{I}/U_i$ quasikohärent ist für jedes I. (Beweis Übung)

Definition + Bemerkung 4.6

a) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Ein abgeschlossenes Unterschema von X ist ein Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wobei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $\mathcal{O}_Y = {}^{\mathcal{O}_X}\!\big/_{\mathcal{I}}$ für eine quasikohärente Untergarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$.

b) Ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ abgeschlossenes Unterschema, so gilt für jedes offene $U \subseteq X$: $U \cap Y$ ist das abgeschlossene Unterschema von U, das zu $\mathcal{I}/U$ gehört. Ist U affin, so ist $\mathcal{I}/U$ die von $\mathcal{I}(U)$ induzierte Idealgarbe.

Definition + Bemerkung 4.7

a) Sei R ein Ring.
$N_R := \sqrt{(0)} = \{x \in R | \exists n \geq 1 : x^n = 0\}$ ist ein Ideal in R, das ***Nilradikal***.

b) Ein Ring R heißt ***reduziert***, wenn $N_R = (0)$ ist.

c) Ist $X = \operatorname{Spec} R$, so heißt $X_{\text{Red}} := \operatorname{Spec} {}^{R}\!\big/_{N_R}$ das zu X assoziierte ***reduzierte Schema***.

d) X_{Red} ist abgeschlossenes Unterschema von X und $X_{\text{Red}} \hookrightarrow X$ ist Homömorphismus.

e) Sei X ein Schema, $\mathcal{N}_X$ die durch $\mathcal{N}_X(U) =$ Nilradikal in $\mathcal{O}_X(U)$ definierte Idealgarbe. Dann gilt: $\mathcal{N}_X$ ist quasikohärent.

f) Das zu $\mathcal{N}_X$ assoziierte abgeschlossene Unterschema von X heißt $\mathcal{X}_{\text{red}}$. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ***reduziert***, wenn $\mathcal{X}_{\text{red}} \cong X$ als Schema, das heißt $\mathcal{N}_X = 0$.

Beweis

e) *Zu zeigen:* Für $f \in R$, R Ring, gilt: $\mathcal{N}_{(R_f)} = \mathcal{N}_R R_f$.
„$\supseteq$“: Sei $a \in \mathcal{N}_R$, also $a^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Für $x \in R_f$ ist $ax \in \mathcal{N}_{R_f}$
„$\subseteq$“: $x = \frac{a}{f^d} \in R_f, x^n = 0 \Rightarrow \frac{a^n}{f^{dn}} = 0 \Rightarrow a^n = 0$ $\square$

§ 5 Faserprodukte

Definition + Bemerkung 5.1
Seien X, Y, S Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to S$ Abbildungen.

a) $X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ heißt ***Faserprodukt***.

b) Es gilt: $X \times_S Y = \bigcup\limits_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$

c) Das Faserprodukt erfüllt folgende UAE:
Für alle Mengen Z, Abbildungen $\varphi : Z \to X$, $\psi : Z \to Y$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ gibt es genau eine $h : Z \to X \times_S Y$ mit $\varphi = \mathrm{pr}_X \circ h$, $\psi = \mathrm{pr}_Y \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"'] \arrow[dddl, bend left, "\mathrm{pr}_X"] \\
 & Y \arrow[dddr, bend left, "g"] & \\
Z \arrow[uurr, dashed, bend left, "\exists! h"] \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[ddrr, bend right] & & \\
 & X & \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

d) Das Faserprodukt ist der Limes des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Beweis
c) Setze $h(z) := (\varphi(z), \psi(z))$ □

Beispiele
1) $S = \{s\} \Rightarrow X \times_S Y = X \times Y$
2) $X \subseteq S, Y \subseteq S$, f, g die Inklusionen $\Rightarrow X \times_S Y = X \cap Y$
3) $Y \subseteq S$, $g : Y \hookrightarrow S \Rightarrow X \times_S Y = f^{-1}(Y)$
4) $X = Y \Rightarrow X \times_S Y = \mathrm{Equalizer}(f, g)$

Definition 5.2
Seien X, Y, S Schemata, $f : X \to S, g : Y \to S$ Morphismen.
Dann heißt ein Schema $X \times_S Y$ zusammen mit Morphismen $\mathrm{pr}_X : X \times_S Y \to X$ und $\mathrm{pr}_Y : X \times_S Y \to Y$, sodass $f \circ \mathrm{pr}_X = g \circ \mathrm{pr}_Y$ ist, ***Faserprodukt*** von X und Y über S, wenn die UAE aus 5.1 c) erfüllt ist.

Definition + Bemerkung 5.3
Sei S ein Schema.

a) Ein ***S-Schema*** ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \to S$.

b) Die S-Schmata bilden eine Kategorie $\underline{\mathrm{Sch}/S}$.

c) Das Faserprodukt $X \times_S Y$ ist das Produkt von $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ in $\underline{\mathrm{Sch}/S}$.

Beispiel
$S = \operatorname{Spec}$, k Körper

Ein Morphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ ist nach Übung 3, Aufgabe 1 vollständig bestimmt durch einen Ringhomomorphismus $k \to \mathcal{O}_X(X)$. Dieser macht $\mathcal{O}_X(X)$ zur k-Algebra und $\mathcal{O}_X$ zu einer Garbe von k-Algebren. Insbesondere sind k-Varietäten über den Funktor t k-Schemata. Das Faserprodukt von k-Varietäten ist das Produkt der k-Varietäten (im Sinne von Algebraische Geometrie I)(siehe unten).

Satz 1
Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert für alle S-Schemata $f : X \to S$ und $g : Y \to S$. Es ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis
(1) $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $S = \operatorname{Spec} R$ affin. f und g machen A und B zu R-Algebren.

Behauptung: Das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ erfüllt $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$.

Erinnerung: Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ von R-Moduln M, n „linearisiert“ die bilinieare Abbildung

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] & M \otimes_R N \\
(x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, "\Phi \text{ bilinear}"'] & x \otimes y \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi \text{ linear}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

- Sind $M = A$ und $N = B$ R-Algebren, so hat $A \otimes_R B$ eine Struktur als R-Algebra:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- $\begin{matrix} \sigma_A : A \to A \otimes_R B, a \mapsto a \otimes 1 \\ \sigma_B : B \to A \otimes_R B, b \mapsto 1 \otimes b \end{matrix}$ sind R-Algebren-Homomophismen.
- $A \otimes_R B$ erfüllt die richtige UAE

$$\begin{tikzcd}
& & A \otimes_R B \arrow[dll, dashed, bend right, "\exists!\gamma"'] & \\
C & A \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ur, "\sigma_A"] & & B \arrow[ul, "\sigma_B"'] \arrow[lll, bend right, "\beta"'] \\
& & R \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[ull, bend left] &
\end{tikzcd}$$

„Beweis:“ $\tilde{\gamma} : A \times B \to C$, $(a,b) \mapsto \alpha(a) \cdot \beta(b)$ ist bilinear, induziert also $\gamma : A \otimes B \to C$ linear. Nachrechnen: γ Ringhomomorphismus, γ eindeutig.

Also: $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ erfüllt die geforderte UAE für alle affinen Schemata Z.

Ist Z beliebiges Schema, so induzieren $\varphi : Z \to X$ und $\psi : Z \to Y$ R-Algebrahomomorphismen $\alpha : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$, $\beta : B \to \mathcal{O}_Z(Z)$.

α und β induzieren $\gamma : A \otimes_R B \to \mathcal{O}_Z(Z)$, also (Übung 3, Aufgabe 1) Morphismus $h : Z \to \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$.

(2) X, Y, Z nicht notwendig affin.

Überdecke S durch offene affine Schemata $S_i = \operatorname{Spec} R_i$ $(i \in I)$. Sei $X_i := f^{-1}(S_i)$, $Y_i := g^{-1}(S_i)$ (offen in X bewziehungsweise Y).

Überdecke X_i durch offene affine Schemata $X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$

Überdecke Y_i durch offene affine Schemata $Y_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$

Nach (1) existiert $X_{ij} \otimes_{S_i} Y_{ik}$ für alle i, j, k

Behauptung 1: Sei T ein Schema, V, W T-Schemata, $(V_l)_{l \in L}$ offene Überdeckung von V. Existiert $V_l \times_T W$ für jedes l, so existiert $V \times_T W$.

Wende Behauptung 1 an auf

- $T = S_i$, $V = X_i$, $W = Y_{ik}$, $V_l = X_{il} \Rightarrow X_i \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall\ i, k$
- $T = S_i$, $V = Y_i$, $W = X_i$, $V_l = Y_{il} \Rightarrow X \times_{S_i} Y_{ik}$ existiert $\forall\ i$

Behauptung 2: Für jedes i ist $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$

Dann wende Behauptung an auf

$$T = S, V = X, W = Y, V_l = X_l \Rightarrow X \times_S Y \text{ existiert}$$

Beweis 2:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \times_S Y_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{X_i}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{Y_i}"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "h"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rrr, bend left=15, "\psi"] \arrow[drr, bend right] & X_i \arrow[dr, "f|_{X_i}"'] & & Y_i \arrow[dl, "g"] \\
 & & S_i &
\end{tikzcd}$$

$$\Psi(Z) \subseteq g^{-1}(\underbrace{f(\overbrace{\varphi(Z)}^{\subseteq X_i})}_{\subseteq S_i}) \subseteq Y_i$$

Beweis 1: Verklebe die $V_l \times_T W$ längs $U_{lm} = \mathrm{pr}_l^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_l \times_T W$. Es gilt: $U_{lm} = (V_l \cap V_m) \times_T W$. Dann ist U_{lm}„="U_{ml}, lassen sich also verkleben zu Schema V. Zeige: $\tilde{V} = V \times_T W$ □

Bemerkung 5.4

a) $X \times_S S \cong X$ für jedes S-Schema

b) $(X \times_S T) \times_T Y \cong X \times_S Y$ für alle...

Beweis

a) *Zeige:* X erfüllt die UAE von $X \times_S S$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[urr, bend left, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rrr, bend left=15, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & S \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
 & & S &
\end{tikzcd}$$

Es gilt $\mathrm{id}_S \circ \psi = f \circ \varphi$ im unteren Dreieck, also auch im Oberen.

b) *Zeige:* $X \times_S Y$ erfüllt die UAE von $(X \times_S T) \times_T Y$

Erhalte: $h : X \times_S Y \to X \times_S T$ aus

$$\begin{tikzcd} & & X \times_S T \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_T"] & \\ X \times_S Y \arrow[urr, dashed, bend left, "h"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[rrr, bend left, "g \circ \mathrm{pr}_Y"] & X \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "f \circ g"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rlcl} g: & Y & \to & T \\ f: & X & \to & S \\ h: & T & \to & S \end{array}$$

Betrachte:

$$\begin{tikzcd} & & X \times_S Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\ Z \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists! \Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \times_S T \arrow[dr, "\mathrm{pr}_T"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & & T & \end{tikzcd}$$

Es gilt: $f \circ \mathrm{pr}_X = t \circ g \circ \mathrm{pr}_Y$

$$\begin{tikzcd} & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\ Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_X \circ \varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "t \circ g"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

Zu zeigen: $\boxed{f \circ \mathrm{pr}_X} \circ \varphi = t \circ g \circ \psi = \boxed{t \circ \mathrm{pr}_T} \circ \varphi$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & & X \times_S Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"] & \\ Z \arrow[urr, dashed, bend left, "\exists! \Phi"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_X \circ \varphi"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] & X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "t \circ g"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

Wir wissen: $\mathrm{pr}_T \circ \varphi = g \circ \psi$

Zu zeigen: (i) $h \circ \Phi = \varphi$

(ii) $\mathrm{pr}_Y \circ \Phi = \psi \checkmark$

Für (i) ist zu zeigen: (i$_1$) $\underbrace{\mathrm{pr}_X \circ h}_{\mathrm{pr}_X} \circ \Phi = \mathrm{pr}_X \circ \varphi \checkmark$

(i$_2$) $\underbrace{\underbrace{\mathrm{pr}_T \circ h}_{g \circ \mathrm{pr}_Y} \circ \Phi}_{g \circ \psi} = \mathrm{pr}_T \circ \varphi$

Damit ist die Existenz von Φ gezeigt. Eindeutigkeit in der Übung. $\square$

§ 6 Punkte

Definition + Bemerkung 6.1
Sei X ein Schema, $x \in X$

a) $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ heißt ***Restklassenkörper*** von X im Punkt x.

Beispiele

1) $X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$

$x = p \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{F}_p$

$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = \mathbb{Q}$

2) $X = \mathbb{A}^1_k$

$x = (X - a)\ (a \in k) \Rightarrow \kappa(x) = k$

$x = (0) \Rightarrow \kappa(x) = k(X) = \operatorname{Quot}(k[X])$

3) $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[X, Y]$

$x = (f),\ f$ irreduzibel $\Rightarrow \kappa(x) = \operatorname{Quot}(k[V]) = k(V)\ (V = V(f))$

b) Sei $f : X \to S$ ein Morphismus, $s := f(x)$. f induziert Homomorphismus $\kappa(s) \to \kappa(x)$.

c) Für einen Körper k gibt es genau dann einen Morphismus $\iota : \operatorname{Spec} k \to X$ mit $\iota(0) = x$, wenn $\kappa(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von k ist.

d) In der Situation c) heißt x ***k-wertiger Punkt*** von x.

Beweis

b) f induziert lokalen Homomorphismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, das heißt $f_x^\#(m_s) \subseteq m_x \Rightarrow f_x^\#$ induziert $\kappa(s) \to \kappa(x)$.

c) Sei $U = \operatorname{Spec} R$ affine Umgebung von x.

ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : R \to k$ mit $\operatorname{Kern}(\alpha) = \mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}$ das zu x gehörige Primideal in R ist.

Es ist $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_\mathfrak{p}$, also $\kappa(x) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p}$

Also: ι existiert $\Leftrightarrow \exists \alpha : \begin{array}{ccc} R & \to & k \\ \mathfrak{p} & \mapsto & (0) \end{array}$, also $\overline{\alpha} : \kappa(x) \to k$

„$\Leftarrow$“: $\alpha : R \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot R_\mathfrak{p} \xrightarrow{\overline{\alpha}} k$ $\square$

Bemerkung 6.2
Seien X, Y S-Schemata.

Dann ist die Abbildung $\left\{\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \to & \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\} \\ z & \mapsto & (\operatorname{pr}_X(z), \operatorname{pr}_Y(z)) \end{array}\right.$ surjektiv.

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "\operatorname{pr}_X"'] \arrow[dr, "\operatorname{pr}_Y"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Beweis
Abbildung wohldefiniert: ✓

Seien $x \in X, y \in Y$ mit $f(x) = g(y) =: s \in S$. Seien $\kappa : \kappa(s), \kappa(x), \kappa(y)$ die Restklassenkörper. Œ $\kappa \subseteq \kappa(x)$, $\kappa \subseteq \kappa(y)$. Sei k ein Körper mit $\kappa(x) \subseteq k$, $\kappa(y) \subseteq k$ (zum Beispiel Komposition). Sei $Z := \operatorname{Spec} k$.

Nach 6.1 c) gibt es Morphismen $\varphi : Z \to X, \varphi(0) = x$, $\psi : Z \to Y, \psi(0) = y$. Es ist $f \circ \varphi = g \circ \psi \Rightarrow \exists h : Z \to X \times Y$ mit $\mathrm{pr}_X \circ h = \varphi, \mathrm{pr}_Y \circ h = \psi$. Setze $z := h(0)$. □

Definition + Bemerkung 6.3
Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata, $y \in Y$

a) $X_y = f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$ heißt ***Faser*** von f über y. Dabei ist $\iota : \operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y$ der zu y gehörige Morphismus aus 6.1.
b) $\mathrm{pr}_X : X_y \to X$ ist injektiv.
c) $\mathrm{pr}_X(X_y) \to \{x \in X : f(x) = y\}$ ist bijektiv.
d) Ist y abgeschlossen, so ist X_y abgeschlossenes Unterschema.

Beweis

c) Folgt aus b) und 6.2.
d) Folgt aus c).
b) Seien $x_1, x_2 \in X_y$ mit $\mathrm{pr}_X(x_1) = \mathrm{pr}(x_2) =: x \in X \Rightarrow f(x) = y$. Sei $Z = \operatorname{Spec} \kappa(x)$ und $\iota : Z \to X$ mit $\iota(0) = x$. Sei $\psi : Z \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$ der von $f_*^\#$ induzierte Morphismus (6.1 b)).

   Nach 6.1 b) ist $\kappa(x) \subseteq \kappa(x_i)$, $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[urr, bend left, "h_1"] \arrow[urr, "h_2"'] \arrow[rrr, bend left, "\psi"] \arrow[r, "\iota"'] & X \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} \kappa(y) \arrow[dl] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

   $\overset{6.1c}{\Longrightarrow} \exists$ Morphismen $h_i : Z \to X_y$ mit $h_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$

   Es gilt: $\mathrm{pr}_Z \circ h_i = \psi$, $i = 1, 2$
   $\mathrm{pr}_X \circ h_i = \iota$ nach Definition von h_i

   $\xRightarrow{\text{Eindeutigkeit}} h_1 = h_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ □

Beispiele

1) $f : \underset{=\operatorname{Spec} k[X]}{\text{„}\mathbb{A}_k^1\text{“}} \to \mathbb{A}_k^1$, „$x \mapsto x^2$“; f werde induziert von $\alpha : k[X] \to k[X], X \mapsto X^2$

   Sei $y = (X - a) \Rightarrow X_y = \mathbb{A}_k^1 \times_{\mathbb{A}_k^1} \operatorname{Spec} k = \operatorname{Spec}(\underbrace{k[X] \otimes_{k[X]} k}_{\cong k[X]/\alpha(X-a)})$

$$k[X]\big/\alpha(X - a) = k[X]\big/(X^2 - a) = \begin{cases} k \oplus k & \text{falls } a \in (k^\times)^2 \\ k[X]\big/(X^2) & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

2) $X = (x, y)$-Ebene $\cup$ (z, w)-Ebene in $\mathbb{A}_k^4$
   $= V(z, w) \cup V(x, y) = V(xz, yz, xw, yw)$

   $f : X \to \mathbb{A}_k^2, (x, y, z, w) \mapsto (x + z, y + w)$ wird induziert von $\alpha : k[s, t] \to k[X, Y, Z, W] \to k[V], s \mapsto X + Z, t \mapsto Y + W$.

Sei y = „$(0,0)$“ $= (s,t) \Rightarrow V_y = V \times_{\mathbb{A}^2_k} \operatorname{Spec} k = \operatorname{Spec}(k \otimes_{k[s,t]} k) \cong {k[V]}/{\alpha(s,t)} =$
${k[V]}/{(X+Z, Y+W)} = {k[X,Y,Z,W]}/{(X+Z, Y+W, XZ, YZ, XW, YW)}$
$= {k[X,Y]}/{(-X^2, -XY, -Y^2)} =: R$
Beachte: $\dim_k R = 3$

Definition + Bemerkung 6.4
Sei X ein Schema, T ein weiteres Schema.

a) Ein T-***wertiger Punkt*** von X ist ein Morphismus $T \to X$.
b) Der Funktor $h_X : \underline{\mathrm{Sch}} \to \underline{\mathrm{Sets}}$, $T \mapsto \operatorname{Hom}(T, X)$ heißt ***Punktfunktor*** zu X. h_X ist kontravarianter Funktor.
c) Die H_X definieren Funktor $h : \underline{\mathrm{Sch}} \to \underline{\mathrm{Fun}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets})$. Dieser Funktor ist Kovariant. ($\underline{\mathrm{Fun}}(\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets})$ ist die Kategorie der kontravarianten Funktoren von Schemata nach Mengen; op steht für „opposite“)

Beispiele

1) Sei $T = \operatorname{Spec}({k[\varepsilon]}/{(\varepsilon^2)})$ (k ein Körper), $X = \mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[X,Y]$. Ein T-wertiger Punkt von X ist ein Ringhomomorphismus $\alpha : k[X,Y] \to {k[\varepsilon]}/{(\varepsilon^2)}$. Sei α surjektiv, $\alpha^{-1}((\varepsilon)) = (X,Y)$.
   Also $\alpha(X) = a\varepsilon$, $\alpha(Y) = b\varepsilon$ $(a, b \in k) \Rightarrow \alpha(bX - aY) = 0$. α bestimmt also nicht nur einen Punkt x von X, sondern auch eine „Richtung“ in x.
2) $T = \operatorname{Spec} R$, R diskreter Bewertungsring.
   $T = \{t_0, t_1\}$, $t_0 \in \overline{\{t_1\}}$, $K := \operatorname{Quot} R$, X ein Schema, $\kappa(t_0) = k$, $\kappa(t_1) = K$

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(T, X) &= \{(x_0, x_1, x_2) : x_0, x_1 \in X, x_0 \neq x_1, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, \iota : \kappa(x_1) \to K \\ &\qquad \text{Homomorphismus mit } \iota(\mathcal{O}_{\overline{\{x_1\}}, x_0}) \subseteq R \text{ und } \iota(m_{x_0}) \subseteq m\}\end{aligned}$$

§ 7 Endlichkeitseigenschaften

Definition 7.1
Sei X ein Schema.

a) X heißt ***lokal noethersch***, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, sodass die R_i noethersch sind.

b) X heißt ***noethersch***, wenn es eine endliche Überdeckung wie in a) gibt.

Beispiel
Quasiprojektive Varietäten sind noethersch.

Proposition 7.2

a) Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.

b) Ein Schema X ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes offene affine Unterschema $U = \operatorname{Spec} R$ gilt: R ist noethersch

Beweis

a) folgt aus b)

b) Sei $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ offen in X, R_i noethersch. Sei $U = \operatorname{Spec} R$ offen in X.

Zu zeigen: R ist noethersch

Es gilt: $U \cap U_i$ ist offen in U_i für jedes i. $\Rightarrow U \cap U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} D(f_{ij})$ für geeignete $f_{ij} \in R_i$.

$D(f_{ij}) = \operatorname{Spec}(R_i)_{f_{ij}}$, $R_{ij} := (R_i)_{f_{ij}}$ ist noethersch

$D(f_{ij})$ ist auch offen in U.

$\Rightarrow \exists g_{ijk} \in R$ mit $D(f_{ij}) = \bigcup\limits_k D(g_{ijk})$

Sei $\varphi_{ij} : R \to R_{ij}$ der von $D(f_{ij}) \hookrightarrow U$ induzierte Ringhomomorphismus

$\Rightarrow R_{g_{ijk}} \overset{(!)}{\cong} (R_{ij})_{\varphi_{ij}(g_{ijk})} \Rightarrow R_{g_{ijk}}$ ist noethersch

Die $D(g_{ijk})$ überdecken U.

U ist quasikompakt $\Rightarrow$ endlich viele der g_{ijk} genügen zum Überdecken. Nenne sie $g_1, \dots, g_r$. Sei nun $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ Kette von idealen in R. Für $i = 1, \dots, r$ sei $\varphi_i : R \to R_{g_i}$ der natürliche Homomorphismus $\Rightarrow \varphi_i(I_1) \cdot R_{g_i} \subseteq \varphi_i(I_2) \cdot R_{g_i} \subseteq \dots$ wird stationär

Behauptung: Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt:

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i})$$

Beweis der Behauptung:

„$\subseteq$": ✓

„$\supseteq$": Sei $b \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} \varphi_i^{-1}\left(\varphi_i(I) \cdot R_{g_i}\right)$

Für jedes $i = 1, \dots, r$ gibt es $a_i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i(b) = \frac{b}{1} = \frac{a_i}{g_i^n}$ in R_{g_i}. $\Rightarrow \exists m_i$ mit $g_i^{m_i}(g_i^{n_i} b - a_i) = 0$ in $R \Rightarrow g_i^{m_i + n_i} b = g_i^{m_i} a_i \in I \Rightarrow \exists M$ mit $g_i^M b \in I$ für $i = 1, \dots, r$

Nach Voraussetzung ist $\left.\begin{array}{r}(g_1, \dots, g_r) = R \\ \Rightarrow (g_1^M, \dots, g_r^M) = R\end{array}\right\} \Rightarrow b \in I$ □

Definition + Proposition 7.3
Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Schemata.

a) f heißt ***lokal von endlichem Typ***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} A_i)_{i \in I}$ von Y gibt und für jedes $i \in I$ eine offene affine Überdeckung $(U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij})_{j \in J_i}$ von $f^{-1}(U_i) \subseteq X$, so dass B_{ij} (durch den von f induzierten Homomorphismus) endlich erzeugte A_i-Algebra ist $\forall\, i \in I, j \in J_i$.

b) f heißt ***von endlichem Typ***, wenn in a) jedes $f^{-1}(U_i)$ eine endliche Überdeckung der gewünschten Art hat.

c) Ist f (lokal) von endlichem Typ, so gibt es für jedes offene affine $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ eine endliche offene affine Überdeckung $U_i = \operatorname{Spec} B_i$ von $f^{-1}(U)$, so dass B_i endlich erzeugte A-Algebra ist.

Beweis
c) Ähnlich 7.2 □

Beispiele 7.4

1) Jeder Morphismus von quasiprojektiven Varietäten$/k$ ist von endlichem Typ.
2) Insbesondere ist für jede quasiprojektive Varietät V/k der „Strukturmorphismus" $V \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ.
3) $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ ist nicht lokal von endlichem Typ.

Definition 7.5
Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt ***endlich***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} A_i)_{i \in I}$ von Y gibt, so dass für jedes $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ affin ist (also $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec} B_i$) und dabei B_i als A_i-Modul endlich erzeugt ist.

Bemerkung 7.6
Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ endlich für jedes $y \in Y$.

Beweis
Sei $U = \operatorname{Spec} A$ affine Umgebung von $y \Rightarrow f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} B$

B ist nach Voraussetzung endl. erzeugter A-Modul. Weiter ist $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist endlich-dimensionaler $\kappa(y)$-Vektorraum $\Rightarrow$ $B \otimes_A \kappa(y)$ hat nur endlich viele Primideale □

§ 8 Eigentliche Morphismen

Definition 8.1
Sei $f : X \to X$ ein Morphismus von Schemata.

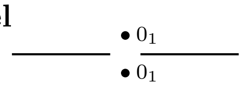
a) Der von id_X induzierte Morphismus $\Delta = \Delta_f : X \to X \times_S X$ heißt ***Diagonalmorphismus*** (oder Diagonale) zu f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "\Delta = \Delta_f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrrd, bend left, "\mathrm{id}"] & & X \times_S X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
& X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& & S &
\end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{pr}_1(\Delta(X)) = \mathrm{pr}_2(\Delta(X))$

b) f heißt ***separiert*** (oder auch X heißt separiert über S), wenn Δ einen abgeschlossene Einbettung ist.

Erinnerung 8.2
Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist

Beispiel
Sei $X =$  $\mathbb{A}^1_k$ mit doppeltem Nullpunkt (§3 Beispiel 2), $F : X \to \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus. f ist nicht separiert, da $\Delta(X)$ nicht abgeschlossen is in $X \times_k X$, denn $(0_1, 0_2) \notin \Delta$ aber $\in \Delta$.

Bemerkung 8.3
Jeder Morphismus affiner Schemata ist separiert.

Beweis
Sei $f : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ Morphismus, induziert von Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$. Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$.

$\Delta : X \to X \times_Y X$ wird induziert von $\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \to & B \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossene Einbettung. □

Bemerkung 8.4
Offene und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.

Beweis
Sei $i : U \hookrightarrow X$ offene abgeschlossene Einbettung. $\Rightarrow U \times_X U \cong U$ und für $\Delta : U \to U \times_X U \cong U$ gilt $\Delta = \mathrm{id}_U$. □

Definition 8.5
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

a) f heißt ***universell abgeschlossen***, wenn für jeden Morphismus $g : Y' \to Y$ gilt: $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ ist abgeschlossen.

b) f heißt ***eigentlich***, wenn es von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

Beispiel
$\mathbb{A}_k^1 \to$ Spec ist abgeschlossen, aber nicht universell abgeschlossen.
Denn:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_k^2 = \mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \mathbb{A}_k^1 \arrow[d] \\
\mathbb{A}_k^1 \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

pr_1 ist nicht abgeschlossen.
$V = V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$, $\mathrm{pr}_1(V) = ?$
$V = V(XY - 1) \Rightarrow \mathrm{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$
$\Rightarrow \mathrm{pr}_1(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen (Œ k algebraisch abgeschlossen)

Definition 8.6
a) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***Bewertungsring***, wenn für jedes $x \in K = \operatorname{Quot} R$ gilt: $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. R ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m = \{x \in R : x^{-1} \notin R\}$, $(x+y)^{-1} =$ Übung??
b) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, R ein Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot} R$, $U = \operatorname{Spec} K$, $T = \operatorname{Spec} R$.

Ein kommutatives Diagramm $\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h_0"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "h_1"'] & Y \end{tikzcd}$ heißt ***Bewertungsdiagramm*** für f.

Satz 2
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, X noethersch, f von endlichem Typ für „eigentlich". Dann gilt:

a) f ist genau dann $\left\{\begin{matrix} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{matrix}\right\}$, wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K = U \arrow[rr, "h_2"] \arrow[d, "i"'] & & X \arrow[d, "f"] & (*) \\
\operatorname{Spec} R = T \arrow[rr, "h_1"'] \arrow[urr, dashed, "h"] & & Y &
\end{tikzcd}$$

$\left\{\begin{matrix} \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{matrix}\right\}$ einen Morphismus $h : T \to X$ gibt sodass (*) kommutiert

Dabei sei R ein Bewertungsring und $K = \operatorname{Quot}(R)$.

b) Sind X und Y noethersch und f von unendlichem Typ, so genügt es, Bewertugnsdiagramme zu diskreten Bewertungsringen zu betrachten.

Erinnerung
R Bewertungsring $:\Leftrightarrow R$ nullteilerfrei, für $x \in \operatorname{Quot}(R)^\times$ ist $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.

Bewertung: G abelsche Gruppe, $\leq$ Totalordnung auf G, sodass aus $x \leq y$ folgt: $x + a \leq y + a \; \forall \; a \in G$, $v : k^\times \to G$ Homomophismus mit $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Beispiel
Sei $X = \mathbb{A}^1_k$, $Y = \operatorname{Spec} k$, $f : X \to Y \dots$
$K = k(T)$, $R = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[T], \deg h \geq \deg g\}$, R diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(R)$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k(T) & k[T] \arrow[l] \arrow[dl, dashed, "h?"'] \\ R \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Es gibt kein h, da $k[T] \hookrightarrow k(T)$ *nicht* über R faktorisiert: $T \notin R$

Bemerkung

Beweisskizze

I) „separiert“

„$\Rightarrow$“: Seien h, h' Fortsetzungen von h_0.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "h'"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sei $\tilde{h} : T \to X \times_Y X$ der von h und h' induzierte Morphismus.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[drr, bend left, "h'"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & X \times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist $h(t_1) = h'(t_1) = h_0(t_1) =: x_1 \Rightarrow \tilde{h}(t_1) \in \Delta(X)$

$\Delta(X)$ ist nach Voraussetzung abgeschlossen $\Rightarrow$ $\tilde{h}(t_0) \in \overline{\{\tilde{h}(t_1)\}} \subseteq \Delta(X) \Rightarrow h(t_0) = h'(t_0) \Rightarrow h = h'$, weil $h^\#$ und $h'^\#$ durch h_0 festgelegt sind.

„$\Leftarrow$“: Genügt zu zeigen: $\Delta(X)$ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$. Weil X noethersch ist, können wir verwenden:

Proposition 8.7
Sei $f : X \to Y$ ein quasikompakter Morphismus von Schemata.

Dann gilt: $f(X)$ ist abgeschlossen in $Y \Leftrightarrow$ für jedes $y_1 \in f(X)$ und jedes $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$ ist $y_0 \in f(X)$ („abgeschlossen unter Spezialisierung“)

Beweis
[Har77] Chapter II, Lemma 4.5 □

Sei also $x_1 \in \Delta(X)$, $x_0 \in \overline{\{x_1\}} \subseteq X \times_Y X$. Sei $Z := \overline{\{x_1\}}$ mit der reduzierten Struktur $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z,x_0}$, $K = \mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \operatorname{Quot} \mathcal{O}$.

Proposition + Definition 8.8
Sei K ein Körper, $R \subset K$ ein lokaler Ring.

a) (R_1, m_1) ***dominiert*** (R_2, m_2), wenn $R_2 \subseteq R_1$ und $m_2 = m_1 \cap R_2$.

b) R ist Bewertungsring $\Leftrightarrow$ R ist maximal bezüglich Dominanz

c) R wird dominiert von einem Bewertungsring.

Beweis
[AM94] Chapter 5, Theorem 5.11 $\square$

Sei also $R \subset K$ Bewertungsring, der $\mathcal{O}$ dominiert. Nach Vorüberlegung gibt es Morphismus $h : T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$ mit $h(t_1) = x_1$, $h(t_0) = x_0$.

Sei $h_i := \mathrm{pr}_i \circ h$, $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "i"'] \arrow[drr, bend left, "h_0"] & & \\
T \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "h_2"] \arrow[dr, bend right, "h_1"'] & X \times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
 & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f \circ h_1 = f \circ h_2$

Da $x_1 \in \Delta(X)$ ist $h_1|_U = h_2|_U$, $U = \operatorname{Spec} K$.

$\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} h_1 = h_2 \Rightarrow h$ faktorisiert über $\Delta \Rightarrow x_0 \in \Delta(X)$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h_1"'] \arrow[drr, "h"] \arrow[drrr, bend left, "h_1"] & & & \\
 & X \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
 & & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

II) „eigentlich“

„$\Rightarrow$“: Eindeutigkeit von h folgt aus I

Existenz von h: Im Basiswechseldiagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y T \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r, "h_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ist f' nach Voraussetzung abgeschlossen.

Sei $\varphi : U \to X \times_Y T$ der von h_0 und i induzierte Morphismus

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[rrrr, bend left, "h_0"] & & X \times_Y T \arrow[rr] \arrow[dl, "f'"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& T \arrow[rr, "h_1"'] & & Y &
\end{tikzcd}$$

Da $i = f' \circ \varphi$ ist und i dominant, ist auch f' dominant $\xRightarrow{f' \text{ abg.}}$ f' surjektiv

Sei $z_1 = \varphi(t_1) \in X \times_Y T$, also $f'(z_1) = t_1$ (generischer Punkt), $Z := \overline{\{z_1\}}$ mit reduzierter Struktur.

Auch $f'|_Z$ ist surjektiv, also gibt es $z_0 \in Z$ mit $f'(z_0) = t_0$. f' induziert lokalen Ringhomomorphismus $R = \mathcal{O}_{T,t_0} \to \mathcal{O}_{Z,z_0}$ und Einbettung $K = \kappa(t_1) \hookrightarrow \kappa(z_1)$. φ induziert $\kappa(z_1) \hookrightarrow \kappa(t_1) = K$, also $\kappa(z_1) \cong K$.

$\xRightarrow{\text{Prop. 8.8}} R \cong \mathcal{O}_{Z,z_0} \xRightarrow{\text{§3 Bsp.2}} \exists\, h : t \to X$ mit $h(t_i) = \mathrm{pr}_X(z_i)$, $i = 0, 1$

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen: Wenn es zu jedem Bewertungsdiagramm genau eine Fortsetzung h von h_1 gibt, so ist f eigentlich.

Es genügt zu zeigen: f' ist universell abgeschlossen. Sei also Bewertungsdiagramm

$$\begin{tikzcd}
X' = X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Zu zeigen: f' ist abgeschlossen. Sei dafür $Z' \subseteq X'$ abgeschlossen, $y_1 = f'(z_1) \in f'(Z')$ und $y_0 \in \overline{\{y_1\}}$.

Zu zeigen: $y_0 \in f'(Z')$ (das genügt nach Proposition 8.7)

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{Z,y_0}$, wobei $Z = \overline{\{y_1\}}$ (mit reduzierter Struktur)

$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}) = \kappa(y_1) \underset{(f')^\#}{\hookrightarrow} \kappa(z_1) =: K$

$K|\kappa(y_1)$ ist endliche Körpererweiterung (da f von endlichem Typ) $\xRightarrow{\text{Prop.8.8}}$ Es gibt Bewertungsring R von K, der $\mathcal{O}$ dominiert $\Rightarrow$ Es gibt Morphismus $h_1 : T = \operatorname{Spec} R \to Y'$ mit $h_1(t_i) = y_i$, $i = 0, 1$. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K = U \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h'"] \arrow[urr, dashed, "h"'] & Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

ein Bewertungsdiagramm für f. Nach Voraussetzung gibt es $h : T \to X$ mit ...

Die UAE des Faserprodukts liefert $h' : T \to X'$ mit $f'(h'(t_0)) = h_1(t_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in f'(Z')$.

$h'(t_0) := z_0 \in \overline{\{h'(t_1)\}} = \overline{\{z_1\}} \in Z'$ □

Folgerung 8.9

Für Morphismen noetherscher Schemata gilt:

a) Die Komposition $\left\{ \begin{matrix} \text{separierter} \\ \text{eigentlicher} \end{matrix} \right\}$ Morphismen ist $\left\{ \begin{matrix} \text{separiert} \\ \text{eigentlich} \end{matrix} \right\}$.

b) $\left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich}\end{array}\right\}$ ist stabil unter Basiswechsel.

c) Ist $g \circ f \left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich und } g \text{ separiert}\end{array}\right\}$, so ist $f \left\{\begin{array}{c}\text{separiert}\\ \text{eigentlich}\end{array}\right\}$.

Beweis
Bewertungskriterium anwenden $\square$

Proposition 8.10
Der Strukturmorphismus $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist eigentlich.

Folgerung 8.11
Sei k ein Körper

a) $\mathbb{P}^n_k$ ist eigentlich über $\operatorname{Spec} k$.
b) Sind V, V' projektive Varietäten über k, $f : V \to V'$ Morphismus, so ist der induzierte Morphismus $t(V) \to t(V')$ eigentlich.

Beweis
b) Sei $\underset{\subseteq \mathbb{P}^n_k}{X} := t(V)$, $\underset{\subseteq \mathbb{P}^m_k}{Y} := t(V')$ (abgeschlossene Unterschemata)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "g \circ f"] & & Y \arrow[d] \arrow[dl, "g"'] \\
\mathbb{P}^n_k \arrow[r, "a)"'] & \operatorname{Spec} k & \mathbb{P}^m_k \arrow[l, "a)"]
\end{tikzcd}$$

Aus 8.9 a) und 8.9 c) folgt: f ist eigentlich. $\square$

Beweis (von Proposition 8.10)
$\mathbb{P}^n_k$ ist von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ✓

Sei
$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
T \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists! h"] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$
ein Bewertungsdiagramm.

Zu zeigen: $\exists! h : T \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

Sei $\xi_1 : h_0(t_1)$; Œ $\xi_1 \in \bigcap_{i=0}^n U_i$ ($U_i = D(X_i)$) (sonst ist $\xi_1 \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{Z}}$ Induktion über n) $\Rightarrow \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}, \xi_1}$ für alle $i, j \Rightarrow$ Das Bild $\tilde{f}_{ij}$ von $\frac{x_i}{x_j}$ in $\underbrace{\kappa(\xi_1)}_{=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}, \xi_1}/m_{\xi_1}}$ ist $\neq 0 \Rightarrow f_{ij} := h_0^\#(\tilde{f}_{ij}) \in K^\times$

Sei $v : K^\times \to G$ die zu R gehörige Bewertung. Wähle $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $v(f_{j0}) = \min_{k=1}^n v(f_{k0}) \Rightarrow v(f_{ij}) = v(f_{i0}) - v(f_{j0}) \geq 0$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow f_{ij} \in R$ für $i = 0, \dots, n \Rightarrow \frac{X_i}{X_j} \mapsto f_{ij}$ definiert Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}] \to R$, also Morphismus $h : T \to U_j \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$

Eindeutigkeit von h: Sei $\underset{\neq h}{h'} : T \to U_k$ eine weitere Fortsetzung von h_0.

Dann ist $k \neq j$, weil $U_j \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist (8.3). Sei $\beta : \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_k}, \dots, \frac{X_n}{X_k}] \to R$ der zugehörige Ringhomomorphismus $\Rightarrow \beta(\frac{X_i}{X_k}) = h_0^\#(\frac{X_i}{X_k}) = f_{ik} \in R^\times$

Es ist $\underset{\in R^\times}{f_{ik}} = \underset{\in R^\times}{f_{ij}} \cdot \underset{\in R^\times}{f_{jk}} \Rightarrow \beta$ induziert denselben Morphismus $T \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ wie α. $\square$