§ 20.

Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

In diesem §en seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f \in C(I), g \in C(J), x_0 \in I$ und $y_0 \in J$.

Definition
Die Differentialgleichung:

$$y' = f(x)g(y) \tag{i}$$

heißt **Dgl. mit getrennten Veränderlichen**.
Wir betrachten auch noch das AwP:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{ii}$$

Satz 20.1 (Lösungen)
Sei $y_0 \in J^0$ (also ein innerer Punkt von J) **und** $g(y) \neq 0 \; \forall y \in J$. Dann existiert ein Intervall I_{x_0} mit $x_0 \in I_{x_0} \subseteq I$ und:

(1) Das AwP (ii) hat eine Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$.

(2) Die Lösung aus (1) erhält man durch Auflösen der folgenden Gleichung nach $y(x)$.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)} \,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t) \,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

(3) Sei $U \subseteq I$ ein Intervall und $u : U \to \mathbb{R}$ eine Lösung des AwPs (ii), so ist $U \subseteq I_{x_0}$ und $u = y$ auf U (wobei y die Lösung aus (1) ist).
Insbesondere ist das AwP (ii) eindeutig lösbar.

Beweis
Definiere $G \in C^1(J)$ und $F \in C^1(I)$ durch:

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} \,\mathrm{d}t \qquad\qquad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t) \,\mathrm{d}t$$

Dann ist $G' = \frac{1}{g}, F' = f$ und $F(x_0) = 0 = G(y_0)$.
Da für alle $y \in J$ gilt:

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$$

ist entweder $G' > 0$ auf J oder $G' < 0$ auf J.
Also existiert die Umkehrabbildung $G^{-1} : G(J) \to J$, $K := G(J)$ ist ein Intervall und es gilt:

$$\begin{aligned} y_0 \in J^0 &\implies 0 = G(y_0) \in K^0 \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq K \end{aligned}$$

Da F stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|F(x)| = |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap I =: M_0$$

M_0 ist ein Intervall, $x_0 \in M_0 \subseteq I$ und $F(M_0) \subseteq K$. Sei

$$\mathfrak{M} := \{M \subseteq I \mid M \text{ ist Intervall}, x_0 \in M, F(M) \subseteq K\}$$

Da $M_0 \in \mathfrak{M}$ ist, ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Sei

$$I_{x_0} := \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$$

dann ist $I_{x_0} \in \mathfrak{M}$. Definiere nun $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ durch:

$$y(x) := G^{-1}(F(x))$$

so ist y auf I_{x_0} differenzierbar und es gilt:

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$$

Weiter gilt:

$$\forall x \in I : G(y(x)) = F(x) \tag{+}$$

also gilt $(*)$. Differenzierung von $(+)$ liefert:

$$\begin{aligned} &\forall x \in I_{x_0} : G'(y(x)y'(x) = F'(x) \\ \implies &\forall x \in I_{x_0} : \frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x) \\ \implies &\forall x \in I_{x_0} : y'(x) = f(x)g(y(x)) \end{aligned}$$

(3) Es ist $u'(t) = f(t)g(u(t))$ für alle $t \in U$ **und** $u(U) \subseteq J$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{u'(t)}{g(u(t))} \\ \implies F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{u'(t)}{g(u(t))}\, \mathrm{d}t \\ &\overset{Subst.}{=} \begin{cases} s = u(t) \\ \mathrm{d}s = u'(t)\, \mathrm{d}t \\ t = x_0 \implies s = u(x_0) = y_0 \end{cases} = \int_{y_0}^{u(x)} \frac{1}{g(s)}\, \mathrm{d}s = G(u(x)) \end{aligned}$$

Also: $\forall x \in U : F(x) = G(u(x))$. Somit gilt:

$$F(U) = G(u(U)) \subseteq G(J) = K$$

D.h. $U \in \mathfrak{M}$ und daher ist: $U \subseteq I_{x_0}$.
Weiter gilt:

$$\forall x \in U : u(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x) \qquad \blacksquare$$

Für die Praxis: Trennung der Veränderlichen (TDV):

$$\begin{aligned} & y' = f(x)g(y) \\ \to\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \\ \to\ & \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\ \mathrm{d}x \\ \to\ & \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\ \mathrm{d}x + c \end{aligned} \tag{iii}$$

Die allgemeine Lösung von (i) erhält man durch Auflösen der Gleichung (iii) nach y.
Zur Lösung von (ii) passt man die Konstante c der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ an.

Beispiele:

(1) Sei $y' = 2xe^{-y}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2xe^{-y} \\ &\to e^y\ \mathrm{d}y = 2x\ \mathrm{d}x \\ &\to \int e^y\ \mathrm{d}y = \int 2x\ \mathrm{d}x + c \\ &\to e^y = x^2 + c \\ &\to y = \log(x^2 + c) \end{aligned}$$

Ist z.B. $c = 0$, so ist $y(x) := \log(x^2)$ eine Lösung auf $(0, \infty)$, oder $y(x) = \log(x^2)$ ist eine auf $(-\infty, 0)$.
$c = 2 : y(x) = \log(x^2 + 2)$ ist eine Lösung auf $\mathbb{R}$.
$c = -1 : y(x) = \log(x^2 - 1)$ ist eine Lösung auf $(1, \infty)$.
Löse das AwP:

$$\begin{cases} y' = 2xe^{-y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Allg. Lösung der Dgl:

$$\begin{aligned} & y(x) = \log(x^2 + c) \\ \Longrightarrow\ & 1 = y(1) = \log(1 + c) \\ \Longrightarrow\ & e = 1 + c \iff c = e - 1 \end{aligned}$$

$y(x) = \log(x^2 + e - 1)$ ist Lösung des AwPs auf $\mathbb{R}$.

(2) $y' = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2}$. Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1+y}{y^2} \\ \to\ & \frac{y^2}{y+1}\ \mathrm{d}y = \frac{x^2}{x-1}\ \mathrm{d}x \\ \to\ & \frac{y^2}{2} - y + \log(1+y) = \frac{x^2}{2} + x + \log(x-1) + c \end{aligned}$$

(Lösungen in impliziter Form)