

# Kapitel 1

## Banachräume und lineare Operatoren

### 1.1 Banachräume und metrische Räume

Es sei  $X$  ein VR über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , wobei  $X = 0$  solange nichts anderes gesagt wird.

**Definition 1.1** Eine Halbnorm  $p$  auf  $X$  ist eine Abb.  $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+^0$  mit

$$(a) \quad p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}, x \in X \quad (\text{Homogenität})$$

$$(b) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \quad (\triangle\text{-Ungleichung})$$

$$(c) \quad p(x) = 0 \implies x = 0 \quad \forall x \in X \quad (\text{Definitheit})$$

so heißt  $p$  Norm und  $(X, p)$  normierter VR ( $nVR$ ). Man schreibt meist  $\|x\| = p(x)$  und  $p$

#### Bemerkung 1.2

$$(a) \quad \text{Es gilt: } |||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$$

$$(b) \quad ||x|| = \text{"Länge" von } x$$

$\triangle$ -Ungl. = Hier geht es um eine kleine Zeichnung rein!

$$(c) \quad 1.1 \ a) \implies p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$$

**Definition 1.3** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , wenn

$$(1.1) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ||x_n - x|| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \quad (x_n) \text{ ist eine Cauchy-folge (CF) in } X, \text{ wenn}$$

$$(1.2) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad ||x_n - x_m|| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Ein  $nVR (X, || \cdot ||)$  heisst Banachraum, wenn er vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge hat einen Grenzwert. Wenn die Norm klar ist, so schreibt man  $X$  statt  $(X, || \cdot ||)$ .

**Bemerkung 1.4**

(a) Eine konvergente Folge ist CF, da

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq 2\epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, N_\epsilon \text{ aus (1.1)}$$

(b) Wenn  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \rightarrow y$  in  $X$  ( $n \rightarrow \infty$ ), so gilt  $x = y$ , wegen Def. 1.1 c) und

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \leq 2\epsilon \quad \text{für } n \geq \max\{N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)\}.$$

(wobei  $N_\epsilon(x), N_\epsilon(y)$  aus (1.1)), hier ist  $\epsilon > 0$  beliebig

$$\implies \|x - y\| = 0 \xrightarrow{1.1c)} x = y$$

(c) CF und konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind beschränkt, d.h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$

**Beweis** Nach (1.2)  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\|x_n - x_N\| \leq 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\implies \|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leq 1 + \|x_N\| \quad \forall n \geq N.$$

Ferner:  $\|x_n\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_N\|\}$  für  $n = 1, \dots, N$  ■

**Beispiel 1.6**

(a)  $X = \mathbb{K}^d$  mit  $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1 \dots d} |x_k|, \text{ wobei } x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d.$$

$(X, \|\cdot\|_p)$  ist BR für  $1 \leq p \leq \infty$  (BR = Banachraum).

(b)  $X = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$

Dabei sind  $f + g, \alpha f$  für  $f, g \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \text{gegeben durch: } (f + g)(t) &= f(t) + g(t) \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Bekannt ist:  $X$  ist VR.

$$\text{Supremumsnorm für } f \in X : \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad (= \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|).$$

Klar:  $\|f\|_\infty \in [0, \infty), \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\alpha f(t)| = |\alpha| \|f\|_\infty$$

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\implies (X, \|\cdot\|_\infty)$  ist nVR.

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine CF in  $(X, \|\cdot\|_\infty)$

$\implies |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n(t) - f_m(t)\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, \text{ wobei } \epsilon > 0 \text{ bel.,}$   
gilt für alle  $t \in [0, 1]$ . (\*)

$\implies (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  ist CF in  $\mathbb{K} \xrightarrow{\mathbb{K} \text{ vollst.}} \exists f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad t \in [0, 1].$

Sei  $t \in [0, 1], \varepsilon > 0, N_\varepsilon$  aus (\*),  $n \geq N_\varepsilon$

$$|f(t) - f_n(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(t) - f_n(t)\|_\infty \leq \varepsilon$$

Da  $N_\varepsilon$  unabhängig von  $t$ , gilt  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$ .

D.h.:  $f_n \rightarrow f$  glm. in  $t \in [0, 1]$ . z.Z. bleibt Stetigkeit von  $f$ .

(c) Haben  $f_n \in X = C([0, 1])$

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $t, s \in [0, 1]$  gegeben, wähle  $n = N_\varepsilon$ . Dann  $\exists \delta = \delta(n) = \delta(\varepsilon)$ , so dass:

$|f_n(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon$  wenn  $|t - s| \leq \delta$  ( $f_n$  glm. stetig)