2 Messbare Funktionen und das Lebesgue-Integral

TODO: Einleitung mit Bildern

2.1 Messbare Funktionen

Definition 2.1. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf $Y \neq \emptyset$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$.

Bemerkung 2.2.

a) Sei $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. Dann ist f $\mathcal{A}'$-$\mathcal{B}'$-messbar für jede σ-Algebra $\mathcal{A}'$ auf X mit $A \subset \mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ auf Y mit $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.
Weiter ist die Einschränkung $f|_{X_0} : X_0 \to Y$ für jedes $X_0 \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}_{X_0}$-$\mathcal{B}$-messbar (vgl. (1.1)).

b) Wenn $A = \mathcal{P}(X)$ oder $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$, dann ist $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar.

c) Sei $A \subset X$. Setze $\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$. Sei $B \in \mathcal{B}_d$. Dann gilt:

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} A & , 1 \in B \text{ und } 0 \notin B, \\ A^c & , 1 \notin B \text{ und } 0 \in B, \\ X & , 1 \in B \text{ und } 0 \in B, \\ \emptyset & , 1 \notin B \text{ und } 0 \notin B \end{cases}$$

d) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X $\Rightarrow \mathbf{1}_A$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_1$-messbar $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$.
$\mathbf{1}_\Omega$ ist nicht $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbar.

Ana III, 10.11.2008

Satz 2.3. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ σ-Algebren auf $X, Y, Z \neq \emptyset$. Dann gelten:*

a) Wenn $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar und $g : Y \to Z$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-messbar, dann ist $h := g \circ f : X \to Z$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar.

b) Seien $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$, $B = \sigma(\mathcal{E})$, $f : X \to Y$. Dann gilt:
f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\ \forall E \in \mathcal{E}$.

Beweis. a) Sei $C \in \mathcal{C}$. Dann folgt, weil g messbar ist, dass $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ gilt. Da auch f messbar ist, gilt auch $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$.

b) "$\Rightarrow$" ist klar, denn $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$.
"$\Leftarrow$" zeigen wir mit dem Prinzip der guten Mengen:
$f_*(\mathcal{A}) = \{C \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra auf Y (siehe Übung). Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{E} \subset f_*(\mathcal{A})$. Mit Lem 1.6 folgt $\sigma(f_*(\mathcal{A})) = f_*(\mathcal{A})$, d.h., $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ \forall B \in \mathcal{B}$.

□

Definition 2.4. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, $X \in \mathcal{B}_d$. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}^k$ heißt Borel-messbar, wenn sie $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}_k$-messbar ist.

Ab jetzt sei stets $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ und "messbar" heiße stets Borel-messbar.

Satz 2.5 (Eigenschaften Borel-messbarer Funktionen)**.** *Seien $X \in \mathcal{B}_d$, $f, g : X \to \mathbb{R}^k$, wobei $f = (f_1, \dots, f_k)^T$. Dann gelten:*

a) f stetig $\Rightarrow$ f messbar

b) f messbar $\Leftrightarrow$ $f_1, \dots, f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar

c) f, g messbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot f + \beta \cdot g : X \to \mathbb{R}^k$ messbar

d) $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ und falls $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X$, dann ist $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ messbar

e) $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow \{x \in X : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{B}(X)$. (Analog für ">")

Beweis. a) $U \subset \mathbb{R}^k$ offen $\overset{\text{f stetig}}{\Rightarrow} f^{-1}(U) \subset \mathcal{O}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. Da $\mathcal{O}(X)$ Erzeuger von $\mathcal{B}(X)$ ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.3b).

b) "$\Rightarrow$": Die Projektionen $p_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, p_j(x) = x_j$, sind stetig und damit nach a) messbar. Damit $f_j = p_j \circ f$ messbar nach Satz 2.3a).
"$\Leftarrow$": Seien $a, b \in \mathbb{Q}^d$, $a \leq b$ (Erzeuger).
$f(x) \in (a, b] \Leftrightarrow f_j(x) \in (a_j, b_j] \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$.
$f^{-1}((a, b]) = \bigcap_{j=1}^k \underbrace{f_j^{-1}((a_j, b_j])}_{\in \mathcal{B}(X) \text{ nach Vor.}} \in \mathcal{B}(X)$, also ist f messbar nach Satz 2.3b).

c) Nach b) gilt: $h = (f, g)^T : X \to \mathbb{R}^{k+k}$ messbar. Ferner ist $\varphi : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}, \varphi(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ stetig und nach a) messbar.
$\overset{\text{Satz 2.3a)}}{\Rightarrow} \alpha \cdot f + \beta \ \cdot g = \varphi \circ h$ messbar.

d) Wie c) durch Stetigkeit der Multiplikation und Inversion.

e) Nach c) ist $h = f - g$ messbar.

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} &= \{x \in X : h(x) \geq 0\} \\ &= h^{-1}(\underbrace{\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}}_{\in \mathcal{B}_1}) \in \mathcal{B}(X).\end{aligned}$$

□

Beispiel. a) Sei $f : X \to \mathbb{R}^k$ messbar, $p \in [1, \infty]$. Dann ist $g : X \to \mathbb{R}, g(x) = |f(x)|_p$, messbar, denn es gilt $g = |\cdot|_p \circ f$ und $|\cdot|_p$ ist stetig.

b) Sei $X = A \cup B$, mit $A, B \in \mathcal{B}_d$ diskunkt und $f : A \to \mathbb{R}^k, g : B \to \mathbb{R}^k$ messbar. Dann ist $h : X \to \mathbb{R}^k, h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{Q}^n$, $a \leq b$ (Erzeuger). Dann gilt:

$$\begin{aligned}h^{-1}((a,b]) &= \{x \in X : h(x) \in (a,b]\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in (a,b]\} \cup \{x \in B : g(x) \in (a,b]\} \\ &= \underbrace{f^{-1}((a,b])}_{\in \mathcal{B}(A) \overset{(*)}{\subset} \mathcal{B}(X)} \cup \underbrace{g^{-1}((a,b])}_{\in \mathcal{B}(B) \overset{(*)}{\subset} \mathcal{B}(X)} \in \mathcal{B}(X)\end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$ nach Korollar 1.11:

$$\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}_d : C \subset A\} \subset \{C \in \mathcal{B}_d : C \subset X\} = \mathcal{B}(X)$$

Mit Satz 2.3b) ist damit der Beweis erbracht. □

Beispiel. $X = \mathbb{R}^2$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{x} =: f(x,y), & (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \backslash (\{0\} \times \mathbb{R}) =: A \\ c =: g(x,y), & (x,y)^T \in \{0\} \times \mathbb{R} =: B \end{cases}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist und f, g stetig auf A bzw. B sind. Da $\mathbb{R}^2 = A \dot\cup B$ und A, B disjunkt, folgt mit b) aus dem obigen Beispiel, dass h messbar ist.

Um für Funktionenfolgen $f_j : X \to \mathbb{R}$ $j \in \mathbb{N}$, immer $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_j(x), \inf_{n \in \mathbb{N}} f_j(x)$ bilden zu können, setzt man $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Rechenregeln: Sei $a \in \mathbb{R}$.

- $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$, $\pm\infty + a = a \pm \infty = \pm\infty$
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a \in (0, \infty] \\ \mp\infty, & a \in [-\infty, 0) \end{cases}$
- Verboten bleiben: $+\infty + (-\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$ usw.

Ordnung: $-\infty < a < +\infty$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).

Konvergenz: Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}$ schreibe: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$,
falls $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists N_c \in \mathbb{N} : x_n \geq c\ \forall n \geq N_c$
(Konvergenz gegen $-\infty$ entsprechend mit "$\leq$")

Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

Notation: Setze für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}},\ a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \{f = g\} &:= \{x \in X : f(x) = g(x)\}, \\ \{f = a\} &:= \{x \in X : f(x) = a\}. \end{aligned}$$

(Analog für $\leq, <, =, >, \geq, \dots$)

Erinnerung: $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$

Definition. Definiere auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Borel'sche σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}_1$ durch

$$\overline{\mathcal{B}}_1 = \{B \cup E : B \in \mathcal{B}_1,\ E \subset \{-\infty, +\infty\}\}. \tag{2.1}$$

Man prüft leicht nach, dass $\overline{\mathcal{B}}_1$ wirklich eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist.
Offensichtlich gilt $\mathcal{B}_1 \subset \overline{\mathcal{B}}_1$.
Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, die $\mathcal{B}(X)$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbar sind, heißen ebenfalls (Borel-) messbar.

Lemma 2.6. *a)*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}}_1 &= \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_1 \\ &= \sigma(\{(a, \infty] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_2 \\ &= \sigma(\{[a, \infty] : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_3 \\ &= \sigma(\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}) =: A_4 \end{aligned}$$

b) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist messbar*

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{f \leq a\} \in \mathcal{B}(x)\ \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathcal{B}(x)\ \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathcal{B}(x)\ \forall a \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{B}(x)\ \forall a \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Als Spezialfall gelten die entsprechenden Äquivalenzen für Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$*, denn so ein* f *ist* $\mathcal{B}(X)$-$\overline{\mathcal{B}}_1$*-messbar genau dann, wenn es* $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}_1$*-messbar ist.*

Beweis. a) $A_1 \subset A_2$ folgt aus $[-\infty, a] = (a, \infty]^c \in A_2$ und Lem 1.6. Genauso $A_3 \subset A_4$.
$A_2 \subset A_3$ wegen $(a, \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, \infty] \in A_3$ und Lem 1.6.
$A_4 \subset \overline{\mathcal{B}}_1$ wegen $[-\infty, a) = \{-\infty\} \cup (-\infty, a) \in \overline{\mathcal{B}_1}$ und Lem 1.6.
<u>Es bleibt zu zeigen:</u> $\overline{\mathcal{B}}_1 \subset A_1$
Es gilt $\{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, -n] \in A_1 \Rightarrow (-\infty, a] = [-\infty, a] \backslash \{-\infty\}$
$\overset{\text{Lem 1.6}}{\underset{\text{Satz 1.9}}{\Rightarrow}} \mathcal{B}_1 \subset (A_1)$. Ebenso $\{+\infty\} \in A_1 \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_1 \subset A_1$.

b) folgt aus a) und Satz 2.3b).
Spezialfall folgt aus $f^{-1}(B \cup E) = f^{-1}(B)$ für $B \in \mathcal{B}(X)$ und $E \subset \{-\infty, +\infty\}$. □

Ana III, 14.11.2008

Definition. Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $n \in \mathbb{N}$.
Definiere $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \;\; x \in X$$

(Analog definert man $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n$)

<u>Falls</u>: $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$ existiert, setzt man

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n\right)(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}} \;\; (\forall x \in X).$$

Dabei gilt

$$\max_{1 \le n \le N} \{f_1, \dots, f_N\} = \sup\{f_1, \dots, f_N, f_N, \dots\}.$$

(min analog).

Satz 2.7. *Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann sind die Funktionen $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n$, $\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n$ und (falls $\forall x \in X$ existent) $\lim_{n \to \infty} f_n$ messbar.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\{(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) \le a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \le a\} \in \mathcal{B}(X)$ und $\{x \in X : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \ge a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : f_n(x) \ge a\} \in \mathcal{B}(X)$.
Mit Lem 2.6 folgt dann, dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ und $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ messbar sind. Damit sind auch $\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n = \inf_{j \in \mathbb{N}} \sup_{n \ge j} f_n$ und $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n = \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{n \ge j} f_n$ messbar.
Wenn existent für alle $x \in X$, dann ist somit auch $\lim_{n \to \infty} f_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} f_n$ messbar. □

Bemerkung. Satz 2.7 ist falsch für überabzählbare Suprema, denn:
Sei $\Omega \in \mathcal{B}_1$ aus Satz 1.26, $f_x := \mathbf{1}_{\{x\}}$, $x \in \Omega$. Dann sind alle f_x messbar, aber $\sup_{x \in \Omega} \mathbf{1}_{\{x\}} = \mathbf{1}_{\Omega}$ ist nicht messbar, da $\Omega \notin \mathcal{B}_1$.

Satz 2.8. *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten:*

a) *Seien f, g messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wenn $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ für alle $x \in X$ definiert ist, dann ist $\alpha \cdot f + \beta \cdot g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Wenn $f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in X$ definiert ist, dann ist $f \cdot g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

b) *f messbar $\Leftrightarrow$ $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \max\{-f, 0\}$ messbar $\Rightarrow |f|$ messbar.*

Bemerkung zu b): $f = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{\Omega^c}$ ist mit Ω aus Satz 1.26 nicht messbar, aber $|f| = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d}$ ist messbar.

Beweis. a) Betrachte $f_n(x) = \max\{-n, \min\{n, f(x)\}\}$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Genauso für g. Da konstante Funktionen immer messbar sind, sind nach Satz 2.7 f_n, g_n $\forall n \in \mathbb{N}$ messbar.
Es gilt: $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$ $(n \to \infty)$ $\forall x \in X$ (auch dann, wenn $f(x), g(x) \notin \mathbb{R}$).
Sei $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ definiert. Dann gilt:
$\alpha \cdot f_n(x) + \beta \cdot g(x) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$.
(Das ist klar, wenn $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$. Sei deshalb etwa $\alpha = \beta = 1, f(x) = \infty, g(x) \in \mathbb{R}$. Sei $n > |g(x)|$. Dann $\alpha \cdot f_n(x) + \beta \cdot g_n(x) = n + g(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty = f(x) + g(x)$.)
Mit Satz 2.7 folgt dann, dass $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ messbar ist.
(Ähnlicher Beweis für $f \cdot g$. Beachte dabei: Falls $f(x) = 0, g(x) = \infty$ folgt: $f_n(x) \cdot g_n(x) = 0 \cdot n = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(x) \cdot g(x)$.)

b) Beide "$\Rightarrow$" folgen sofort aus Satz 2.7.
Erstes "$\Leftarrow$" folgt aus a) und $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.
Beachte: f_+ und f_- sind nur einzeln gleich 0.

$\square$

Bemerkung. Satz 2.7 und Satz 2.8 gelten genauso für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen.

Beispiel. Seien $f_j : X \to [0, \infty]$ messbar für $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert $g_n(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x) \in [0, \infty]$ für alle $x \in X$ und g_n ist nach Satz 2.8a) messbar für alle $n \in \mathbb{N}$.
Mit Satz 2.7 ist also $g := \sum_{j=1}^\infty f_j = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ ebenfalls messbar.

Definition 2.9. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn sie endlich viele Werte annimmt, d.h. $|f(X)| < \infty$. Seien $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ alle verschiedenen Funktionswerte von f. Setze $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$. Da f messbar ist, folgt nach Definition der Messbarkeit, dass $A_j \in \mathcal{B}(X)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$f = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \mathbf{1}_{A_j}$$

die Normalform von f.
Beachte: Die Vereinigung $X = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_n$ ist disjunkt.

Bemerkung 2.10. Linearkombinationen, Produkte, endliche Minima und Maxima einfacher Funktionen sind wieder einfach.

Satz 2.11. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gelten:*

a) Es existieren einfache Funktionen f_n mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (punktweise).

b) Ist f beschränkt, so gilt a) mit gleichmäßiger Konvergenz.

c) Sei $f \geq 0$. Dann gilt a) mit f_n, die $f_n \leq f_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ erfüllen.

Korollar 2.12. *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\Leftrightarrow$ es existieren einfache $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (punktweise).*

Beweis. Satz 2.11 und Satz 2.7. □

Beweis von Satz 2.11. c) Sei $f \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.Setze

$$B_{jn} := \begin{cases} [j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n}), & j = 0, \dots, n \cdot 2^{n-1} \\ [n, \infty), & j = n \cdot 2^n \end{cases},$$
$$A_{jn} := f^{-1}(B_{jn}) \in \mathcal{B}(X) \text{ (da } f \text{ messbar)}$$

für alle $j = 0, \dots, n{\cdot}2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt, dass die Vereinigung $X = \bigcup_{j=0,\dots,n\cdot 2^n} A_{jn}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ disjunkt ist. Setze außerdem für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n := \sum_{j=0}^{n\cdot 2^n} \underbrace{j \cdot 2^{-n}}_{=\min B_{jn}} \cdot \mathbf{1}_{A_{jn}}.$$

Dann ist f_n einfach und für $x \in A_{jn}$ gilt: $f_n(x) = j{\cdot}2^{-n} \leq f(x)$, also $f_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

TODO: BILD

Ferner gilt

$$A_{jn} = \begin{cases} A_{2j,n+1} \dot\cup A_{2j+1,n+1}, & j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \bigcup_{k=n\cdot 2^{n+1}}^{(n+1)\cdot 2^{n+1}} A_{k,n+1}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}.$$

Für $x \in A_{jn}$ gilt

$$f_n(x) = j \cdot 2^{-n} \begin{cases} = 2 \cdot j \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j,n+1} \\ \leq (2 \cdot j + 1) \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x), & x \in A_{2j+1,n+1} \end{cases}$$

Also gilt $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in A_{jn}$, falls $j < n \cdot 2^n$.
Sei $x \in A_{n\cdot 2^n}$. Dann gilt $f_n(x) = n = n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{-(n+1)} \leq k \cdot 2^{-(n+1)} = f_{n+1}(x)$ für alle $k \in \{n \cdot 2^{n+1}, \dots, (n+1) \cdot 2^{n+1}\}$.
Also: $f_n \leq f_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

A) Wenn $f(x) = \infty$, dann $x \in A_{n\cdot 2^n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty = f(x)$.

B) Wenn $f(x) < \infty$, dann liegt x für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > f(x)$ in einem $A_{j(n),n}$ mit $j(n) < n \cdot 2^{-n}$. Dann folgt

$$f_n(x) = j(n) \cdot 2^{-n} \leq f(x) \leq f_n(x) + 2^{-n} \quad (*).$$

Und somit $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, woraus Behauptung c) folgt.

a) Setze $f_n := (f_+)_n - (f_-)_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f_n einfach. Nach c) gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f_+ - f_- = f$.

b) Wenn f beschränkt ist, tritt für $n > \|f\|_\infty$ in c) stets B) ein. Für alle $n > \|f\|_\infty$ gilt dann $(*)$ $\forall x \in X$, also $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (gleichmäßig).

□

2.2 Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Weiterhin sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$ versehen mit $\mathcal{B}(X)$ und $\lambda = \lambda_d$.

Bemerkung. Alles in dem Abschnitt 2.2 geht entsprechend für beliebige Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Vorgehen

A) Integral für einfache $f : X \to \mathbb{R}_+$.

B) Integral für jedes messbare $f : X \to [0, \infty]$.

C) Integral für gewisse messbare $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Ana III, 17.11.2008

Schritt A: Integral für einfache, positive Funktionen

Definition 2.13. Sei $f : X \to \mathbb{R}_+$ einfach mit Normalform $f = \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{1}_{A_k}$. Dann setzt man:

$$\int f(x)dx := \int_X f(x)dx = \sum_{k=1}^m y_k \lambda(A_k) \in [0, \infty]$$

Beachte: $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0, y_1, \ldots, y_m \geq 0$ und $f(x) = y_k \Leftrightarrow x \in A_k$
Problem: f hat viele Darstellungen, z.B.: $\mathbf{1}_A = 2 \cdot \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_A + 0 \cdot \mathbf{1}_{A^c}$
Frage: Ist $\int_x f dx$ unabhängig von der Darstellung von f?

Lemma 2.14. *Seien $B_j \in \mathcal{B}(X), j = 1, \ldots, n$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = X$ und $z_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ sowie $f = \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{1}_{B_j}$. Dann gilt:*

$$\int_X f(x)dx = \sum_{j=1}^n z_j \lambda(B_j)$$

Beweis. Durch iteratives Schneiden und Differenzmengenbilden erhält man disjunkte $C_i \in \mathcal{B}(X), i = 1, \dots, l$ sowie Mengen $I(j) \subset \{1, \dots, l\}$ und $J(i) \subset \{1, \dots, n\}$ mit: $(*) B_j = \biguplus_{i \in I(j)} C_i$ und $C_i \subset B_j, j \in J(i)$ $(\forall j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, l)$. Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \lambda(B_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i \in I(j)} \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^{l} \lambda(C_i) \sum_{j \in J(i)} z_j =: S$$

Setze für $i = 1, \dots, l : w_i := \sum_{j \in J(i)} z_j = f(x)$, wenn $x \in C_i$. Vereinige die C_i mit gleichem $w_i (i = 1, \dots, l)$ zu einer Menge $A_k \in \mathcal{B}(X)$ $(k = 1, \dots, m)$. Sei $f(x) = y_k$ für $x \in A_k$, d.h.: $A_k = f^{-1}(\{y_k\})$. Dabei sind $y_1, \dots, y_m$ die Funktionswerte von f, die paarweise verschieden sind. Da die C_i disjunkt sind, gilt $S = \sum_{k=1}^{m} y_k \lambda(A_k)$ und $f = \sum_{k=1}^{m} y_k \mathbf{1}_{A_k}$ ist die Normalform. Mit Def 2.13 folgt dann die Behauptung. $\square$

Lemma 2.15. *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ einfache Funktionen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann:*

a) $\int_X \mathbf{1}_A dx = \lambda(A)$

b) $\int_x (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_X f(x) dx + \beta \cdot \int_X g(x) dx$ *(Beachte Bem 2.10)*

c) $f \le g \Rightarrow \int_X f(x) dx \le \int_X g(x) dx$

Beweis. a): Folgt aus Def 2.13.

b),c): Es seien $f = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{1}_{A_j}, g = \sum_{k=1}^{m} z_k \mathbf{1}_{B_k}$ in Normalform. Seien C_i, $i = 1, \dots, l$ alle Schnitte der Form $A_j \cap B_k$, sodass $\{Ci : i = 1, ..., l\}$ disjunkt ist. Seien weiter $\overline{y_i} \in \{y_1, \dots, y_n\}$ und $\overline{z_i} \in \{z_1, \dots, z_m\}$ die Funktionswerte von f bzw. g auf C_i. Dann folgt: $f = \sum_{i=1}^{l} \overline{y_i} \mathbf{1}_{C_i}, g = \sum_{i=1}^{l} \overline{z_i} \mathbf{1}_{C_i}$.

b): Es gilt $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = \sum_{i=1}^{l} (\alpha \cdot \overline{y_i} + \beta \cdot \overline{z_i}) \mathbf{1}_{C_i}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_X (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) dx &\overset{\text{Lem 2.14}}{=} \sum_{i=1}^{l} (\alpha \cdot \overline{y_i} + \beta \cdot \overline{z_i}) \lambda(C_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{l} \overline{y_i} \lambda(C_i) + \beta \sum_{i=1}^{l} \overline{z_i} \lambda(C_i) \\ &\overset{\text{Lem 2.14}}{=} \int_X f dx + \int_X g dx. \end{aligned}$$

c): Nach Voraussetzung gilt $\overline{y_i} \le \overline{z_i}$. Damit und mit b),c) folgt:
$\int_X f dx = \sum_{i=1}^{l} \overline{y_i} \lambda(C_i) \le \sum_{i=1}^{l} \overline{z_i} \lambda(C_i) = \int_X g dx$.

$\square$

Schritt B: Integral für messbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$

Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Nach Satz 2.11 gilt:

$$\exists \text{ einfache } f_n : X \to \mathbb{R}_+ \text{mit} f_n \leq f_{n+1} \ (\forall n \in \mathbb{N}), f_n \to f \ (\text{pw}, n \to \infty) \tag{2.2}$$

Nach Lem 2.15 gilt:

$$\int f_n dx \leq \int f_{n+1} dx \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int f_n dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n dx \in [0, \infty]$$

Definition 2.16. Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und $f_n, n \in \mathbb{N}$ wie in (2.2). Dann setze:

$$\int f dx = \int_X f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x) dx \in [0, \infty]$$

Lemma 2.17. *Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:*

$$\int_X f(x) dx = \sup \left(\left\{ \int_X g(x) dx : g : X \to \mathbb{R}_+ \text{einfach}, 0 \leq g \leq f \right\} \right) =: S$$

Beweis. Sei f_n wie in (2.2). Da $\int f dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n dx$, gilt $\int f dx \leq S$.
<u>Zu $\geq$</u>: Sei g einfach mit $0 \leq g \leq f$ und $g = \sum_{k=1}^m y_k \mathbf{1}_{A_k}$ (Normalform). Sei $\alpha > 1$ fest, aber beliebig, und $B_n = \{x \in X : \alpha f_n(x) \geq g(x)\} =: \{\alpha f_n \geq g\}$ $(n \in \mathbb{N})$
Aus Satz 2.5 folgt dann: $B_n \in \mathcal{B}(X) \forall n \in \mathbb{N}$. Beachte dabei $\alpha \cdot f_n \geq \mathbf{1}_g (*)$
Sei $x \in X$. Wenn $f(x) = 0$, dann folgt wegen $0 \leq g \leq f$:
$g(x) = 0 \Rightarrow x \in B_n \forall n \in \mathbb{N}$
Wenn $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\alpha} g(x)$. Da $f_n(x) \to f(x)$, folgt:
$\exists n(x) \in \mathbb{N} : f_n(x) \geq \frac{1}{\alpha} g(x), \forall n \geq n(x) \Rightarrow x \in B_n \forall n \geq n(x)$
$\Rightarrow X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Ferner $B_n \subset B_{n+1}$, da $f_n \leq f_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(**)$
Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int g(x) dx &\overset{\text{Def 2.13}}{=} \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k) \underset{(**)}{\overset{\text{Satz 1.14}}{=}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k \cap B_n) \\
&\overset{\text{Lem 2.14}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g(x) \cdot \mathbf{1}_{B_n}(x) dx \underset{(*)}{\overset{\text{Lem 2.15}}{\leq}} \lim_{n\to\infty} \int \alpha \cdot f_n(x) dx \\
&\overset{\text{Lem 2.15}}{=} \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int f_n(x) dx \overset{\text{Def 2.16}}{=} \alpha \cdot \int f(x) dx.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $\alpha \to 1$: $\int g dx \leq \int f(x) dx \overset{\sup g}{\Rightarrow} S \leq \int f dx$. □

Lemma 2.18. *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Dann:*

a) $\int_x (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_X f(x) dx + \beta \cdot \int_X g(x) dx$

b) $f \leq g \Rightarrow \int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$

c) $\int_X f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \lambda(\{f > 0\}) = 0$

Beweis. a) Seien f_n, g_n wie in (2.2). Nach Bem 2.10 und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ erfüllen $\alpha f_n + \beta g_n$ (2.2) für $\alpha f + \beta g$.
Damit gilt

$$\begin{aligned}\int (\alpha f + \beta g) dx &\overset{\text{Def 2.16}}{=} \lim_{n\to\infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n) dx \\ &\overset{\text{Lem 2.15}}{=} \lim_{n\to\infty} (\alpha \int f_n dx + \beta \int g dx) \\ &\overset{\text{Def 2.16}}{=} \alpha \int f dx + \beta \int g dx.\end{aligned}$$

b) Sei $A = \{f > 0\} \in \mathcal{B}(X)$, seien f_n wie in (2.2) für f.

i) Sei $\lambda(A) = 0$. Da $0 \leq f_n \leq f$, gilt $f_n(x) = 0$, wenn $x \notin A$. Dann folgt $f_n \leq \mathbf{1}_A \|f_n\|_\infty \overset{\text{Lem 2.15}}{\Rightarrow} 0 \leq \int f_n dx \leq \int \|f_n\|_\infty \mathbf{1}_A dx = \|f\|_\infty \lambda(A) = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \int f_n dx \overset{\text{Def 2.16}}{=} \int f dx$.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &\overset{\text{Lem 2.17}}{=} \sup_{0 \leq u \leq f, u \text{ einfach}} \int u(x) dx \\ &\overset{f\leq g}{\leq} \sup_{0\leq u \leq g, u \text{ einfach}} \int u(x) dx = \int g(x) dx.\end{aligned}$$

iii) Sei $\int f dx = 0$. Setze $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A, f \geq \frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n}$. Damit $0 = \int f dx \overset{\text{b)}}{\geq} \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} dx \overset{\text{Lem 2.15}}{=} \frac{1}{n}\lambda(A_n) \geq 0 \Rightarrow \lambda(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \lambda(A) = \lambda(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \overset{\text{Satz 1.14}}{\leq} \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n) = 0$.

□

Theorem 2.19 (Monotone Konvergenz, B. Levi)**.** *Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar und $f_n \leq f_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann:*

$$\int_X f(x) dx = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n(x) dx$$

Bemerkung. a) Konvergenzaussage ist ohne Monotonie falsch:
Bsp: $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]} \to f = 0$ (glm.), aber $\int f_n dx = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0 = \int f dx$.

Ana III, 21.11.2008

b) Die Konvergenzaussage ist im allgemeinen falsch für fallende Folgen.
Bsp: $f_n := \mathbf{1}_{[n,\infty]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (punktweise), $f_n \geq f_{n+1}$, aber $\int_\mathbb{R} f_n dx \underset{\text{Funktion}}{\overset{\text{einfache}}{=}} \lambda_1([n, \infty]) = \infty$ und $\int_\mathbb{R} 0 dx = 0$.

c) Die Konvergenzaussage ist im allgemeinen sinnlos fürs Riemannintegral.
Bsp: Sei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, $A_n := \{q_1, \dots, q_n\}$, $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$. Dann ist f_n Riemann-integrierbar mit $f_n \leq f_{n+1}$, aber $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemannintegrierbar, obwohl R-$\int_{\mathbb{R}} f_n dx = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Thm 2.19. Nach Satz 2.7 ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ messbar. Zweites "=" folgt aus $\int f_n dx \leq \int f_{n+1} dx$ und Lem 2.18b). Nach (2.2) gibt es $\forall n \in \mathbb{N}$ einfache $u_{nj} : X \to \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{N}$ mit $u_{nj} \leq u_{n,j+1} \leq f_n$ $(*)$ und $u_{nj} \xrightarrow{j\to\infty} f_n$ (punktweise).
Ziel: Konstruiere zu f einfache v_j wie in (2.2) mit $v_j \leq f_j$.
Setze: $v_j = \max\{u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{jj}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist v_j nach Bem 2.10 einfach.

$$\begin{array}{cccccc}
u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1j} & \leq & u_{1j+1} \\
 & u_{22} & \dots & u_{2j} & \leq & u_{2j+2} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & u_{jj} & \leq & u_{jj+1}
\end{array}$$

Wegen $(*)$: $v_j \leq v_{j+1}$ und $v_j \leq \max\{f_1, \dots, f_j\} \underset{\text{Monotonie}}{\overset{\text{nach Vor.}}{=}} f_j \leq f$ $(**)$.
Ferner gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq n \Rightarrow u_{nj} \leq v_j$, damit:
$f_n \overset{\text{nach Vor.}}{=} \sup_{j\in\mathbb{N}} u_{nj} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} v_j$ $(***)$.
Es folgt $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \overset{(***)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{j\in\mathbb{N}} v_j) \leq f$, also $f = \sup_{j\in\mathbb{N}} v_j$, d.h., v_j erfüllt (2.2) für f. Per Definition gilt dann

$$\int_X f dx \overset{\text{Def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_X v_j dx \underset{\text{Lem 2.18}}{\overset{(**)}{\leq}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_X f_j dx \underset{\text{Lem 2.18}}{\overset{(**)}{\leq}} \int_X f dx.$$

□

Korollar 2.20. *a) Seien $f_j : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx$$

b) Sei $\omega : X \to [0,\infty]$ messbar. Setze für $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(A) := \int_X \mathbf{1}_A(x) \cdot \omega(x) dx$$

(Dann ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$ und wird Gewicht oder Dichte genannt.)

Beweis. a) Es gilt

$$\underbrace{\int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j\right) dx}_{} = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j\right) dx \overset{\text{Thm 2.19}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right) dx$$

$$\overset{\text{Lem 2.18}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_X f_j dx = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j dx}_{}.$$

b) Zeige die Maßeigenschaft.

(M1) : $\mu(\emptyset) = \int_X \mathbf{1}_\emptyset(x)\omega(x)dx = \int_X 0dx = 0$.

(M2) : Seien $A_n \in \mathcal{B}(X)$ disjunkt, $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}(x) \cdot \omega(x)dx \\
&= \int_X \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n}\right)(x) \cdot \omega(x)dx \\
&\overset{\text{a)}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_X \mathbf{1}_{A_n}(x)\omega(x)dx \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.21. *Seien $f : X \to [0,\infty]$ messbar und $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind $f|_Y : Y \to [0,\infty]$ auf Y und $\mathbf{1}_Y \cdot f : X \to [0,\infty]$ auf X messbar und es gilt*

$$\int_Y f dx = \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx.$$

Beweis. $f|_Y$ ist messbar wegen Bemerkung 2.2 und $\mathbf{1}_Y \cdot f$ ist messbar nach Satz 2.5d). Setze

$$g := \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} : X \to \mathbb{R}_+, \quad z_j \in \mathbb{R}_+,\ B_j \in \mathcal{B}(X).$$

Dann ist g einfach und es gelten $g|_Y = \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j \cap Y}$ und

$$\begin{aligned}
\int_Y g dx &\overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^n z_j \cdot \lambda(B_j \cap Y) = \int_X \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j\cap Y} dx \\
&= \int_X \sum_{j=1}^n z_j \cdot \mathbf{1}_{B_j} \cdot \mathbf{1}_Y dx = \int_X \mathbf{1}_Y \cdot g dx.
\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für einfache Funktionen.
Für den allgemeinen Fall, in dem $f : X \to [0,\infty]$ beliebig ist und messbar ist, gibt es nach Satz 2.11 einfache $f_n : X \to [0,\infty]$ mit $f_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$. Dann gelten auch $f_n|_Y \nearrow f|_Y$ und $\mathbf{1}_Y \cdot f_n \nearrow \mathbf{1}_Y \cdot f$ $(x \to \infty)$, also

$$\int_Y f dx \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n dx \overset{f_n \text{ einfach}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_n dx \overset{\text{Def}}{=} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx$$

□

Schritt C: Integral für $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktionen

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Nach Satz 2.8 sind dann auch $f_+, f_- : X \to [0, \infty]$ messbar.

Definition 2.22. Sei $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$. Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt (Lebesgue-) integrierbar, wenn $\int_X f_+ dx, \int_X f_- dx < \infty$.
In diesem Fall definiert man (Lebesgue-) Integral) durch

$$\int_X f dx := \int_X f(x) dx := \int_X f_+(x) dx - \int_X f_-(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Hiervon ist $f : X \to \mathbb{R}$ ein Spezialfall. Man setzt

$$\mathcal{L}^1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und integrierbar}\}.$$

Bemerkung. Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Wegen $f_- = 0$ gilt

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow \int_X f(x) dx < \infty$$

Bemerkung. Für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiert man das Integral $\int f dx$ völlig analog, indem man $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbare Funktionen betrachtet und überall $\lambda(A)$ durch $\mu(A)$ ersetzt.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß, d.h.: $\mu(A) := |A|$. Schreibe $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ als $a_n = f(n)$. Dann $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls existent.

Satz 2.23. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind äquivalent:*

a) f ist integrierbar.

b) Es existieren integrierbare $u, v : X \to [0, \infty]$ mit $f = u - v$ (wobei u und v nie gleichzeitig ∞-wertig sind.).

c) Es existiert ein integrierbares $g : X \to [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.

d) Die messbare Funktion $|f| : X \to [0, \infty]$ ist integrierbar.

Wenn a)-d) gelten, dann $\int_X f dx = \int_X u dx - \int_X v dx$.
Weiter folgt $\mathcal{L}^1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \int_X |f| dx < \infty\}$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz von a),b),c) und d) durch einen Ringschluss.

- a) $\Rightarrow$ b): Wegen Lem 2.21 gilt $u = f_+,\ v = f_-$ (f_+, f_- nie gleichzeitig ∞).
- b) $\Rightarrow$ c): $g := u + v$ ist integrierbar nach Lem 2.18. $|f| = |u + v| \leq u + v = g$.
- c) $\Rightarrow$ d): Aus Lem 2.18b) folgt $\int |f| dx \leq \int g dx < \infty$.
- d) $\Rightarrow$ a): Es gilt $0 \leq f_+, f_- \leq |f| \Rightarrow f_+, f_-$ integrierbar $\overset{\text{Def 2.22}}{\Rightarrow} f$ ist integrierbar.

Letze Behauptung: Nach b) gilt: $\exists u, v \geq 0 : f = f_+ - f_- = u - v \Rightarrow f_+ + v = f_- + u \Rightarrow \int_X f_+ + \int_X v dx = \int_X f_- dx + \int_X u dx \Rightarrow \int_X f dx = \int_X u dx - \int_X v dx$, da alle Integrale endlich sind. $\square$

Ana III, 24.11.2008

Korollar 2.24. *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt $\lambda(\{|f| = \infty\}) = 0$.*

Beweis. Betrachte $A := \{|f| = \infty\} \in \mathcal{B}_d$. Es gilt $|f| \geq n \cdot \mathbf{1}_A$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $n \cdot \lambda(A) \overset{\text{Lem 2.15}}{=} \int_X n \cdot \mathbf{1}_A dx \overset{\text{Lem 2.18}}{\leq} \int_X |f| dx =: C \overset{\text{Satz 2.23}}{<} \infty$
$\Rightarrow 0 \leq \lambda(A) \leq \frac{C}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. $\square$

Satz 2.25. *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:*

a) $\alpha \cdot f$ und (soweit überall definiert) $f + g$ sind integrierbar und es gelten:

$$\int_X \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int_X f(x) dx,$$
$$\int_X (f(x) + g(x)) dx = \int_X f(x) dx + \int_X g(x) dx.$$

Somit ist $\mathcal{L}^1(X)$ ein Vektorraum und das Integral eine lineare Abbildung von $\mathcal{L}^1(X)$ nach $\mathbb{R}$.

b) Die Funktionen $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ sind integrierbar.

c) Wenn $f \leq g$, dann $\int_X f(x) dx \leq \int_X g(x) dx$. (Das Integral ist monoton.)

d) $|\int_X f(x) dx| \leq \int_X |f(x)| dx$.

e) Sei $\emptyset \neq Y \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind $f|_Y$ und $\mathbf{1}_Y \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\int_Y f|_Y(x) dx = \int_X \mathbf{1}_Y(x) \cdot f(x) dx.$$

f) Seien $\lambda(X) < \infty$ und $h : X \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann liegt h in $\mathcal{L}^1(X)$ und $|\int_X h(x) dx| \leq \|h\|_\infty \cdot \lambda(X)$.

Beweis. a) Es gilt

$$(\alpha \cdot f)_\pm = \begin{cases} \alpha \cdot f_\pm, & \alpha \geq 0 \\ [(-\alpha) \cdot (-f)]_\pm = (-\alpha) \cdot f_\mp, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Ferner sind nach Satz 2.23 und Lem 2.18 die Funktionen $\alpha \cdot f_\pm$ $(\alpha \geq 0)$ und $(-\alpha) \cdot f_\mp$ $(\alpha \leq 0)$ integrierbar. Somit folgt die Integrierbarkeit von $\alpha \cdot f$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\int \alpha \cdot f dx &\overset{\text{Def 2.22}}{=} \int (\alpha \cdot f)_+ dx - \int (\alpha \cdot f)_- dx \\
&= \begin{cases} \int \alpha \cdot f_+ dx - \int \alpha \cdot f_- dx. & \alpha \geq 0 \\ \int (-\alpha) \cdot f_- dx - \int (-\alpha) \cdot f_+ dx. & \alpha \leq 0 \end{cases} \\
&\underset{\text{Def 2.22}}{\overset{\text{Lem 2.18}}{=}} \alpha \cdot \int f dx. \qquad \text{(Beachte } -\alpha > 0 \text{ für } \alpha < 0)
\end{aligned}$$

Ferner gilt $f + g = \underbrace{f_+ + g_+}_{=:u} - \underbrace{(f_- + g_-)}_{=:v}$. Dabei sind u, v nach Lem 2.18 und Satz 2.23 integrierbar und nie gleichzeitig ∞-wertig.

⌜Denn: Sei z.B. $f(x) = \infty$. Dann gilt $f_+(x) = \infty,\ f_-(x) = 0$. Dann ist $u(x) = \infty$. Ferner gilt $g(x) \neq \infty$ nach Voraussetzung, woraus $v(x) = g_-(x) \neq \infty$.⌟

Aus Satz 2.23 folgt, dass $f + g$ integrierbar ist und es gilt

$$\begin{aligned}
\int (f+g) dx &= \int (f_+ + g_+) dx - \int (f_- + g_-) dx \\
&= \left(\int f_+ dx + \int g_+ dx \right) - \left(\int f_- + \int g_- dx \right) \\
&\overset{\text{Def 2.22}}{=} \int f dx + \int g dx.
\end{aligned}$$

b) $\max\{f, g\}$ ist messbar nach Satz 2.7, Ferner gilt $0 \leq \max\{f, g\} \leq |f| + |g|$, wobei $|f| + |g|$ nach a) und Satz 2.23 integrierbar ist. Dann folgt mit Satz 2.23, dass $\max\{f, g\}$ integrierbar ist. Für das Minimum zeigt man es genauso.

c) Sei $f \leq g$. Dann gilt $f_+ \leq g_+$ und $f_- = (-f)_+ \geq (-g)_+ = g_-$. Damit folgt

$$\int f dx = \int f_+ dx - \int f_- dx \overset{\text{Lem 2.18}}{\leq} \int g_+ - \int g_- dx = \int g dx.$$

d) Da $\pm f \leq |f|$ gilt, liefern a) und c)

$$\pm \int f dx = \int \pm f dx \leq \int |f| dx.$$

e) $f|_Y$ ist auf Y und $\mathbf{1}_Y \cdot f$ ist nach Bem 2.2, Satz 2.5 und Satz 2.7 auf X messbar. Klar ist, dass

$$(f|_Y)_\pm = f_\pm|_Y \text{ und } (\mathbf{1}_Y \cdot f)_\pm = \mathbf{1}_Y \cdot f_\pm \tag{$*$}$$

gelten. Nach Lem 2.18 gilt $\int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_\pm dx \leq \int_X f_\pm dx \overset{\text{n. Vor.}}{<} \infty$.
Mit $(*)$ und Def 2.22 ist also $\mathbf{1}_Y \cdot f$ untegrierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_X \mathbf{1}_Y \cdot f dx &\underset{\text{Def 2.22}}{\overset{(*)}{=}} \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_+ dx - \int_X \mathbf{1}_Y \cdot f_- dx \\ &\overset{\text{Lem 2.21}}{=} \int_Y (f_+)|_Y dx - \int_Y (f_-)|_Y dx \overset{(*)}{=} \int_Y f|_Y dx.\end{aligned}$$

f) Sei nun $\lambda(X) < \infty$. Da $|h| \leq \|h\|_\infty \mathbf{1}_X$ integrierbar ist, ist nach Satz 2.23 integrierbar und nach d) und c) folgt

$$\left|\int_X h dx\right| \leq \int_X |h| dx \leq \|h\|_\infty \cdot \lambda(X).$$

□

Beispiel. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ einfach mit Normalform $f = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}$, wobei $y_k = 0$, falls $\lambda(A_k) = \infty$. Dann ist f integrierbar und $\int_X f(x)dx = \sum_{k=1}^m y_k \cdot \lambda(A_k)$.

Beweis. Satz 2.25a), da $\int \mathbf{1}_{A_k} = \lambda(A_k)$. □

Ana III, 28.11.2008

Bemerkung 2.26. a) Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $X = A \dot\cup B$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{B}_d$. Dann gilt

$$\int_X f dx = \int_X (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) \cdot f dx \overset{\text{Satz 2.25}a)}{=} \int_X \mathbf{1}_A \cdot f dx + \int_X \mathbf{1}_B \cdot f dx$$

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und Riemannintegrierbar. Nach Satz 2.25f) ist f Lebesgueintegrierbar.
Weiter gilt $R - \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$.
Wir schreiben von nun an auch, $\int_a^b f(x)dx$ für das Lebesgueintegral. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für das Lebesgueintegral aus Ana I.

Beweis. Es gilt

$$R - \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\underbrace{a + j \cdot \frac{b-a}{n}}_{=:t_{jn}}) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} u_n dx,$$

wobei

$$u_n = \sum_{j=1}^n f(t_{jn}) \cdot \mathbf{1}_{[t_{j-1,n}, t_{j,n}]}.$$

Ferner $\|f-u_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (da f gleichmäßig stetig ist, vergleiche Ana1 §6). Damit gilt

$$\begin{aligned}|\int_{[a,b]} f(x)dx - \int_{[a,b]} u_n dx| &\overset{\text{Satz 2.25}}{\leq} \int_{[a,b]} |f-u_n|dx \\ &\overset{\text{Satz 2.25}}{\leq} \|f-u_n\|_\infty \cdot (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

$\square$

c) Warnung: Es gibt stetige, uneigentlich Riemannintegrierbare Funktionen, die nicht Lebesgueintegrierbar sind.

Beispiel. Sei $X=[1,\infty]$, $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$. Aus Ana I §6 wissen wir: f ist uneigentlich Riemannintegrierbar und

$$|f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n} \cdot \mathbf{1}_{[\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}, \pi\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\pi]} =: g$$

für ein $c>0$. Damit folgt

$$\int_X g(x)dx \overset{\text{Bem 2.10}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2n} \cdot \int_X \mathbf{1}_{[\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}, \pi\cdot n+\frac{3}{4}\cdot\pi]} = \frac{c\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Damit folgt, dass g nicht integrierbar ist und Lem 2.18 liefert

$$\int_X |f|dx \geq \int_X g(x)dx = \infty.$$

Also ist f nach Satz 2.23 nicht integrierbar.