

## § 21.

# Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sei  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und  $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für Punkte im  $\mathbb{R}^{n+1}$  schreiben wir  $(x, y)$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$  und  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

### Definition

Ein **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung** hat die Form:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{oder kurz: } y' = f(x, y) \quad (\text{i})$$

Wir betrachten auch noch das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{wobei } (x_0, y_0) \in D) \quad (\text{ii})$$

### Satz 21.1 (Integralgleichung zur Lösbarkeit eines Anfangswertproblems)

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D := I \times \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Für  $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$  gilt:

$$y \text{ ist eine Lösung des AwP (ii)} \iff \forall x \in I : y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

In diesem Fall ist  $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ .

### Beweis

„ $\implies$ “ Es gilt:  $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$ ; da  $y$  und  $f$  stetig sind, folgt:  $y' \in C(I, \mathbb{R})$ . Weiter:

$$\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \int_{x_0}^x y'(t) dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \quad \forall x \in I.$$

Bringt man  $y_0$  auf die linke Seite, ergibt sich die Behauptung.

„ $\impliedby$ “ Es gelte für alle  $x \in I$ :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:  $y$  ist auf  $I$  differenzierbar und

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I.$$

Also erfüllt  $y$  die Differentialgleichung. Klar:  $y(x_0) = y_0$ . Also löst  $y$  das AwP. ■

### Definition

Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion.

- (1)  $g$  genügt auf  $D$  einer **Lipschitz-Bedingung (LB) bezüglich  $y$** , genau dann wenn gilt:

$$\exists L \geq 0 : \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D : \|g(x, y) - g(x, \bar{y})\| \leq L \|y - \bar{y}\|$$

- (2)  $g$  genügt auf  $D$  einer **lokalen Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$** , genau dann wenn für alle  $a \in D$  eine Umgebung  $U$  von  $a$  existiert, sodass  $g|_{D \cap U}$  auf  $D \cap U$  einer LB bezüglich  $y$  genügt.

### Satz 21.2 (Satz über die $\alpha$ -Norm)

Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  und für  $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$  sei  $\|y\|_\infty := \max\{\|y(x)\| : x \in I\}$  wie in §17 (also ist  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ein Banachraum).

Sei  $\alpha > 0$  mit  $\varphi_\alpha(x) := e^{-\alpha|x-x_0|}$  ( $x \in I$ ).

Für  $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$  sei  $\|y\|_\alpha := \max\{\varphi_\alpha(x) \cdot \|y(x)\| : x \in I\}$ .

Dann:

- (1)  $\|\cdot\|_\alpha$  ist eine Norm auf  $C(I, \mathbb{R}^n)$ .  
 (2) Seien  $c_1 := \min\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\}$ ,  $c_2 := \max\{\varphi_\alpha(x) : x \in I\}$ . Es gilt:

$$c_1 \|y\|_\infty \leq \|y\|_\alpha \leq c_2 \|y\|_\infty \quad \forall y \in C(I, \mathbb{R}^n)$$

- (3) Sei  $(g_k)$  eine Folge in  $C(I, \mathbb{R}^n)$  und  $g \in C(I, \mathbb{R}^n)$ .

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|g_k - g\|_\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 &\iff \|g_k - g\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff (g_k) \text{ konvergiert auf } I \text{ gleichmäßig gegen } g \end{aligned}$$

(ii)  $(g_k)$  ist eine Cauchy-Folge in  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$ , genau dann wenn  $(g_k)$  eine Cauchy-Folge in  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ist.

(iii)  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\alpha)$  ist ein Banachraum.

### Beweis

(1), (2) Nachrechnen.

(3) (i) und (ii) folgen aus (2); (iii) folgt aus (i) und (ii). ■

**Bezeichnung:** EuE = Existenz und Eindeutigkeit.

**Satz 21.3 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version I))**

Sei  $I = [a, b]$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $D := I \times \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$  und  $f$  genüge auf  $D$  einer LB bezüglich  $y$ . Dann ist das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{ii})$$

auf  $I$  eindeutig lösbar.

Ist  $g_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$  und  $(g_k)$  definiert durch

$$g_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g_k(t)) dt \quad (x \in I, k \geq 0),$$

dann konvergiert  $(g_k)$  auf  $I$  gleichmäßig gegen die Lösung des AwPs (ii).

**Beweis**

Da  $f$  auf  $D$  einer Lipschitz-Bedingung genügt, gilt:

$$\exists L > 0 : \|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L \|y - \bar{y}\| \quad \forall (x, y), (x, \bar{y}) \in D.$$

Es sei  $\alpha := 2L$ ;  $\varphi_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\alpha$  seien wie in 21.2,  $X := C(I, \mathbb{R}^n)$ . Definiere  $F : X \rightarrow X$  durch

$$(F(y))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Für  $y \in X$  gilt dann:

$$\begin{aligned} F(y) = y &\iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in I \\ &\stackrel{21.1}{\iff} y \text{ löst das AwP (ii)} \end{aligned}$$

Wir zeigen:  $\|F(y) - F(z)\| \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\alpha \quad \forall y, z \in X$ . **Alle** Behauptungen folgen dann aus 17.2.

Seien  $y, z \in X, x \in I$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt \right\| \\ &\stackrel{12.4}{\leq} \left| \int_{x_0}^x \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \|y(t) - z(t)\| dt \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^x \|y(t) - z(t)\| dt \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^x \|y(t) - z(t)\| \varphi_\alpha(t) \cdot \frac{1}{\varphi_\alpha(t)} dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x \|y - z\|_\alpha \cdot \frac{1}{\varphi_\alpha(t)} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq L\|y - z\|_\alpha \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi_\alpha(t)} dt \right| \\
 &= \frac{L}{\alpha} \|y - z\|_\alpha \left( \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} - 1 \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\alpha \frac{1}{\varphi_\alpha(x)}
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\alpha \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \quad \forall x \in I \\
 \implies \varphi_\alpha(x) \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\alpha \quad \forall x \in I
 \end{aligned}$$

Fazit:  $\|F(y) - F(z)\|_\alpha \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\alpha$ . ■

**Frage:** Warum haben wir in obigem Beweis nicht die  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm benutzt?

$$\begin{aligned}
 \|(F(y))(x) - (F(z))(x)\| &\stackrel{\text{wie oben}}{\leq} L \left| \int_{x_0}^x \|y(t) - z(t)\| dt \right| \\
 &\leq L \left| \int_{x_0}^x \|y - z\|_\infty dt \right| \\
 &\leq L \|y - z\|_\infty \left| \int_{x_0}^x 1 dt \right| \\
 &= L \|y - z\|_\infty |x - x_0| \\
 &\leq L(b - a) \|y - z\|_\infty \quad \forall x \in I
 \end{aligned}$$

Dann:  $\|F(y) - F(z)\|_\infty \leq L(b - a) \|y - z\|_\infty$  I.A. wird  $L(b - a)$  **nicht** kleiner 1 sein!

### Beispiel (zu 21.3)

Zeige, dass das AwP

$$\begin{cases} y' = 2x(1 + y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

auf  $\mathbb{R}$  genau eine Lösung hat.

Sei  $a > 0$  und  $I := [-a, a]$ ;  $f(x, y) = 2x(1 + y)$ . Dann gilt  $\forall x \in I, \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 |f(x, y) - f(x, \bar{y})| &= |2xy - 2x\bar{y}| \\
 &= 2|x||y - \bar{y}| \\
 &\leq 2a|y - \bar{y}|.
 \end{aligned}$$

Aus 21.3 folgt dann: das Anfangswertproblem hat auf  $I$  genau eine Lösung  $y : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ . Setze nun  $g_0(x) := 0$  und  $(g_k)$  sei definiert wie in 21.3. Induktiv sieht man (Übung!):

$$g_k(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}$$

Aus 21.3 folgt:  $(g_k)$  konvergiert auf  $I$  gleichmäßig gegen  $y$ .

Aus Analysis I folgt:  $(g_k)$  konvergiert auf  $I$  gleichmäßig gegen  $e^{x^2} - 1$ .

Also: Lösung des AwPs auf  $[-a, a]$ :  $y(x) = e^{x^2} - 1$ .

Es war  $a > 0$  beliebig, also ist  $y(x) = e^{x^2} - 1$  **die** Lösung des AwPs **auf**  $\mathbb{R}$ .

Ohne Beweis:

**Satz 21.4 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version II))**

Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $s > 0$ , es sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I, \|y - y_0\| \leq s\}$$

und  $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ . Weiter sei

$$M := \max\{\|f(x, y)\| : (x, y) \in D\} > 0$$

und  $f$  genüge auf  $D$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ . Außerdem sei

$$J := I \cap [x_0 - \frac{s}{M}, x_0 + \frac{s}{M}]$$

Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf  $J$  genau eine Lösung.

Ohne Beweis:

**Satz 21.5 (EuE-Satz von Picard-Lindelöf (Version III))**

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  **offen**,  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$  und  $f$  genüge auf  $D$  einer **lokalen** LB bezüglich  $y$ .

Dann hat das AwP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung.

(Nochmals, das heißt: Das AwP (ii) hat eine Lösung  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $J \subseteq \mathbb{R}$  Intervall) und für je zwei Lösungen  $\hat{y} : \hat{J} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$  von (ii) gilt:  $\hat{y} = \tilde{y}$  auf  $\hat{J} \cap \tilde{J}$  ( $\hat{J}, \tilde{J}$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ ))

**Definition**

Sei  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall) eine Lösung des AwPs (ii).

$y$  heißt **nicht fortsetzbar**, genau dann wenn aus  $\hat{y} : \hat{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\hat{J}$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ) ist Lösung von (ii) stets folgt, dass  $\hat{J} \subseteq J$  und auf  $\hat{J}$   $\hat{y} = y$  ist.

**Satz 21.6 (Eindeutigkeit einer nicht fortsetzbaren Lösung)**

Es seien  $D, (x_0, y_0)$  und  $f$  wie in 21.5. Dann besitzt das AwP (ii) eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung.

**Beweis**

Es sei

$$\mathfrak{M} := \{(y, I_y) : I_y \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall, } x_0 \in I_y, y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist Lösung von (ii)}\}$$

Aus 21.5 folgt, dass  $\mathfrak{M} \neq \emptyset$  ist und für  $(y_1, I_{y_1}), (y_2, I_{y_2}) \in \mathfrak{M}$  gilt:  $y_1 = y_2$  auf  $I_{y_1} \cap I_{y_2}$ .

$$I := \bigcup_{(y, I_y) \in \mathfrak{M}} I_y$$

ist ein Intervall. Definiere  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt: zu  $x \in I$  existiert ein  $(y_1, I_{y_1}) \in \mathfrak{M}$ , sodass für  $x \in I_{y_1}$  gilt:  $y(x) := y_1(x)$ .

**Übung:**  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  leistet das Gewünschte. ■