7. Quadratische Formen

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei A stets eine reelle und symmetrische $(n \times n)$-Matrix, $(A = A^\top)$. Also: $A = (a_{jk})$, dann $a_{jk} = a_{kj}$ $(k, j = 1, \dots, n)$

Definition
$Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $Q_A(x) := x(Ax^T)$. Q_A heißt die zu A gehörende **quadratische Form**. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$Q_A(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$$

Beispiel
Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R}), x_0 \in D, h \in \mathbb{R}^n, S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$.

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt die **Hesse-Matrix** von f in x_0. 4.1 $\Longrightarrow$ $H_f(x_0)$ ist symmetrisch. Aus 6.7 folgt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} Q_B(h) \text{ mit } B = H_f(x_0 + \eta h)$$

Definition

A heißt **positiv definit** (pd)	$:\Longleftrightarrow$	$Q_A(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
A heißt **negativ definit** (nd)	$:\Longleftrightarrow$	$Q_A(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
A heißt **indefinit** (id)	$:\Longleftrightarrow$	$\exists u, v \in \mathbb{R}^n : Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$

Beispiele:

(1) $(n = 2)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$
$Q_A(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Nachrechnen:

$$aQa(x, y) = (ax + by)^2 + (\det A)y^2 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Übung:

A ist positiv definit	$\Longleftrightarrow$	$a > 0, \det A > 0$
A ist negativ definit	$\Longleftrightarrow$	$a < 0, \det A > 0$
A ist indefinit	$\Longleftrightarrow$	$\det A < 0$

(2) $(n = 3)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
$Q_A(x, y, z) = (x + z)^2 \ \forall \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $Q_A(0, 1, 0) = 0$. A ist weder pd, noch id, noch nd.

(3) ohne Beweis ($\to$ Lineare Algebra). A symmetrisch $\implies$ alle **Eigenwerte** (EW) von A sind $\in \mathbb{R}$.

A ist positiv definit	$\iff$	Alle Eigenwerte von A sind > 0
A ist negativ definit	$\iff$	Alle Eigenwerte von A sind < 0
A ist indefinit	$\iff$	$\exists$ Eigenwerte λ, μ von A mit $\lambda > 0,\ \mu < 0$

Satz 7.1 (Regeln zu definiten Matrizen und quadratischen Formen)

(1) A ist positiv definit $\iff$ $-A$ ist negativ definit

(2) $Q_A(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(3) A ist positiv definit $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
A ist negativ definit $\iff \exists c > 0 : Q_A(x) \leq -c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis

(1) Klar

(2) $Q_A(\alpha x) = (\alpha x)(A(\alpha x)) = \alpha^2 x(Ax) = \alpha^2 Q_A(x)$

(3) „$\Leftarrow$“: Klar. „$\implies$“: $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial U_1(0)$ ist beschränkt und abgeschlossen. Q_A ist stetig auf K. 3.3 $\implies \exists x_0 \in K : Q_A(x_0) \leq Q_A(x)\ \forall x \in K$. $c := Q_A(x_0)$. A positiv definit, $x_0 \neq 0 \implies Q_A(x_0) = c > 0$. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; $z := \frac{1}{\|x\|}x \implies z \in K \implies$ $Q_A(z) \geq c \implies c \leq Q_A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\|x\|}^2 Q_A(x) \implies Q_A(x) \geq c\|x\|^2$ ■

Satz 7.2 (Störung von definiten Matrizen)

(1) A sei positiv definit (*negativ definit*). Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit: Ist $B = (b_{jk})$ eine weitere symmetrische $(n \times n)$-Matrix und gilt: $(*)\ |a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon\ (j, k = 1, \ldots, n)$, so ist B positiv definit (*negativ definit*).

(2) A sei indefinit. Dann existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ mit: ist $B = (b_{jk})$ eine weitere symmetrische $(n \times n)$-Matrix und gilt: $(*)\ |a_{jk} - b_{jk}| \leq \varepsilon\ (j, k = 1, \ldots, n)$, so ist $Q_B(u) > 0, Q_B(v) < 0$. Insbesondere: B ist indefinit.

Beweis

(1) A sei positiv definit $\overset{7.1}{\implies} \exists c > 0 : Q_A(x) \geq c\|x\|^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. $\varepsilon := \frac{c}{2n^2}$. Sei $B = (b_{jk})$ eine symmetrische Matrix mit $(*)$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ Q_A(x) - Q_B(x) \leq |Q_A(x) - Q_B(x)| = \left| \sum_{j,k=1}^{m} (a_{jk} - b_{jk}) x_j x_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^{n} \underbrace{|a_{jk} - b_{jk}|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|} \leq \varepsilon \|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2n^2}\|x\|^2 n^2 = \frac{c}{2}\|x\|^2$

(2) A sei indefinit. $\exists u, v \in \mathbb{R}^n :\ Q_A(u) > 0, Q_A(v) < 0$. $\alpha := \min\left\{\frac{Q_A(u)}{\|u\|^2},\ -\frac{Q_A(v)}{\|v\|^2}\right\} \implies \alpha > 0$. $\varepsilon := \frac{\alpha}{2n^2}$. Sei $B = (b_{jk})$ eine symmetrische Matrix mit $(*)$.
$Q_A(u) - Q_B(u) \overset{\text{Wie bei (1)}}{\leq} \varepsilon u^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2n^2} n^2 \|u\|^2 = \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\frac{Q_A(u)}{\|u\|^2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}Q_A(u) \implies$ $Q_B(u) \geq \frac{1}{2}Q_A(u) > 0$. Analog: $Q_B(v) < 0$. ■