4. Der Integralsatz von Stokes

Definition
Sei $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ eine Fläche mit Parameterbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2, D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D, \Phi \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ und $S = \Phi(B)$.
Für $f : S \to \mathbb{R}$ stetig und $F : S \to \mathbb{R}^3$ stetig:

$$\left.\begin{aligned} \int_\Phi f \,\mathrm{d}\sigma &:= \int_B f\left(\Phi(u,v)\right) \cdot \|N(u,v)\| \,\mathrm{d}(u,v) \\ \int_\Phi F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma &:= \int_B F\left(\Phi(u,v)\right) \cdot N(u,v) \,\mathrm{d}(u,v) \end{aligned}\right\} \text{Oberflächenintegrale}$$

Beispiele 4.1

(1) Für $f \equiv 1 : \int_\Phi 1 \,\mathrm{d}\sigma =: \int_\Phi \mathrm{d}\sigma = I(\Phi)$

(2) Sei $B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$, $\Phi(u,v) := (u, v, u^2 + v^2)$, $F(x,y,z) = (x,y,z)$
Bekannt: $N(u,v) = (-2u, -2v, 1)$, $F\left(\Phi(u,v)\right) = (u, v, u^2+v^2) \Rightarrow \int_\Phi F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_B (u,v,u^2+v^2) \cdot (-2u,-2v,1) \mathrm{d}(u,v) = -\int_B (u^2+v^2) d(u,v) \overset{u=r\cos\varphi, v=r\sin\varphi}{=} -\int_0^{2\pi} (\int_0^1 r^3 \mathrm{d}r) \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Satz 4.2 (Integralsatz von Stokes)
B, D, Φ seien wie oben. B sei zulässig, $\partial B = \Gamma\gamma$, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wie in §2. Es sei $\Phi \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ sei offen, $F \subseteq G$ und $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$. Dann:

$$\underbrace{\int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma}_{\text{Oberflächenintegral}} = \underbrace{\int_{\Phi\circ\gamma} F(x,y,z) \,\mathrm{d}(x,y,z)}_{\text{Wegintegral}}$$

Beweis
$\varphi := \Phi \circ \gamma, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, also: $\varphi_j = \Phi_j \circ \gamma \quad (j = 1,2,3)$
Zu zeigen: $\int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t) \mathrm{d}t$
Es ist $\int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \int_B \underbrace{(\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)) \cdot (\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y))}_{=:g(x,y)} \mathrm{d}(x,y)$

Für $j = 1,2,3 : g_j(x,y) := (\underbrace{F_j(\Phi(x,y)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}(x,y)}_{=:u_j(x,y)}, \underbrace{-F_j(\Phi(x,y)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}(x,y)}_{=:v_j(x,y)}), \quad (x,y) \in D$

$F \in C^1, \Phi \in C^2 \Rightarrow g_j \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$
Nachrechnen: $g = \operatorname{div} g_1 + \operatorname{div} g_2 + \operatorname{div} g_3 \Rightarrow \int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma = \sum_{j=1}^3 \int_B \operatorname{div} g_j(x,y) \mathrm{d}(x,y)$
$\int_B \operatorname{div} g_j(x,y) \mathrm{d}(x,y) \overset{2.1}{=} \int_\gamma (u_j \mathrm{d}y - v_j \mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi} (u_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) - v_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t)) \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (F_j(\varphi(t)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \gamma(t) \gamma_2'(t) + F_j(\varphi(t)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \gamma(t) \gamma_1'(t)) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t) \mathrm{d}t \Rightarrow \int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma = \sum_{j=1}^3 \int_B \operatorname{div} g_j(x,y) \mathrm{d}(x,y) = \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} F_j(\varphi(t)) \cdot \varphi_j'(t) \mathrm{d}t$ ■

Beispiel
B, Φ, F seien wie in Beispiel 4.1.(2). $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Verifiziere 4.2
Hier: $\operatorname{rot} F = 0$, also $\int_\Phi \operatorname{rot} F \cdot n \mathrm{d}\sigma = 0$. $(\Phi \circ \gamma)(t) = (\cos t, \sin t, 1) \Rightarrow \int_{\Phi \circ \gamma} F(x, y, z) \, \mathrm{d}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, \mathrm{d}t = 0$