§ 8 Vorbereitungen auf das, was kommen mag

In diesem Paragraphen seien $k, l, d \in \mathbb{N}$ und $k + l = d$. $\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Für Punkte $z \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $z = (x, y)$, wobei $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$.

Definition

(1) $p_1 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ sei definiert durch $p_1(x, y) := x$

(2) $p_2 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ sei definiert durch $p_2(x, y) := y$

(3) Für $y \in \mathbb{R}^l$ sei $j_y \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $j_y(x) := (x, y)$

(4) Für $x \in \mathbb{R}^k$ sei $j^x \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^d$ definiert durch $j^x(y) := (x, y)$

Lemma 8.1
p_1, p_2, j_y, und j^x sind messbar.

Beweis
p_1, p_2, j_y und j^x sind stetig, also nach 3.2 messbar. ∎

Definition
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$.
Sei $y \in \mathbb{R}^l$, dann heißt $C_y := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in C\} = (j_y)^{-1}(C)$ der **y-Schnitt** von C.
Sei $x \in \mathbb{R}^k$, dann heißt $C^x := \{y \in \mathbb{R}^l : (x, y) \in C\} = (j^x)^{-1}(C)$ der **x-Schnitt** von C.

Lemma 8.2
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Dann ist $C_y \in \mathfrak{B}_k$ und $C^x \in \mathfrak{B}_l$.

Beweis
folgt aus 8.1. ∎

Beachte: Sei $A \in \mathbb{R}^k$ und $B \in \mathbb{R}^l$, sowie $C := A \times B \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann:

$$C_y = \begin{cases} \varnothing, \text{falls } y \notin B \\ A, \text{falls } y \in B \end{cases} \qquad C^x = \begin{cases} \varnothing, \text{falls } x \notin A \\ B, \text{falls } x \in A \end{cases}$$

Lemma 8.3
Sei $A \in \mathfrak{B}_k$ und $B \in \mathfrak{B}_l$. Dann ist $C := A \times B \in \mathfrak{B}_d$.

Beweis
Es ist
$$C = (A \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times B) = p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B)$$
Nach 8.1 sind $p_1^{-1}(A), p_2^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_d$ und somit ist auch $p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_d$ ∎

Definition
Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$.
Für $y \in \mathbb{R}^l$:
$$f_y(x) := f(x,y) \quad (x \in \mathbb{R}^k)$$
Für $x \in \mathbb{R}^k$:
$$f^x(y) := f(x,y) \quad (y \in \mathbb{R}^l)$$
Es ist $f_y = f \circ j_y$ und $f^x = f \circ j^x$.

Lemma 8.4
Ist $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so sind f_y und f^x messbar.

Beweis
folgt aus 8.1 und 8.3. ∎

Definition und Satz 8.5 (ohne Beweis)
Sei $C \in \mathfrak{B}_d$. Die Funktionen φ_C und ψ_C seien unter Beachtung von 8.2 definiert durch:
$$\varphi_C(x) := \lambda_l(C^x) \quad (x \in \mathbb{R}^k) \qquad\qquad \psi_C(x) := \lambda_k(C_y) \quad (y \in \mathbb{R}^l)$$
Dann sind φ_C und ψ_C messbar.

Bemerkung: Für $C \in \mathfrak{B}_d$ gilt:
$$\varphi_C(x) = \lambda_l(C^x) = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{C^x}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x,y)\,dy$$
$$\psi_C(y) = \lambda_k(C_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{C_y}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x,y)\,dx$$