

## 22. Höhere Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen:  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

### Definition

- (1)  $f$  sei auf  $I$  differenzierbar und  $x_0 \in I$ .  $f$  heißt in  $x_0$  zweimal differenzierbar genau dann, wenn  $f'$  in  $x_0$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  die zweite Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .
- (2)  $f$  heißt auf  $I$  zweimal differenzierbar genau dann, wenn  $f$  in jedem  $x \in I$  zweimal differenzierbar ist. In diesem Fall heißt  $f'' = (f')'$  die zweite Ableitung von  $f$  auf  $I$ .
- (3) Entsprechend definiert man (falls vorhanden):  $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$  bzw.  $f''', f^{(4)}, \dots$
- (4) Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  heißt auf  $I$   **$n$ -mal stetig differenzierbar** genau dann, wenn  $f$  auf  $I$   $n$ -mal differenzierbar ist und  $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$ .
- (5) Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $C^n(I) := \{g : I \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist auf } I \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$ ,  $C^0(I) := C(I)$ ,  $f^{(0)} := f$ ,  $C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$ .

### Beispiele:

$$(1) (\sin x)' = \cos x, (\sin x)'' = -\sin x, \dots$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x \text{ auf } \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$(3) f(x) := \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}. \text{ Für } x > 0: f'(x) = 2x, \text{ für } x < 0: f'(x) = -2x.$$

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\pm x^2}{x} = \pm x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \implies f$  ist in  $x = 0$  differenzierbar und  $f'(0) = 0$ . Also:  $f'(x) = 2|x| \forall x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  in  $x = 0$  nicht zweimal differenzierbar.

$$(4) f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}.$$

Für  $x \in (0, 1]$ :  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} + x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} (-\frac{1}{x^2}) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$ .

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .  $f$  ist also auf  $[0, 1]$  differenzierbar.

$x_n := \frac{1}{n\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann  $x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $f'(x_n) = (-1)^{n+1} \sqrt{n\pi} \nrightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies f'$  ist nicht stetig in  $x = 0$ . Also  $f \notin C^1([0, 1])$ . Für später:  $f'$  ist auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt.

### Satz 22.1 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I = \mathbb{R}$  falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ( $x \in I$ ).

$$(1) f \in C^\infty(I)$$

$$(2) \forall x \in I \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-k}.$$

$$(3) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

**Beweis**

(1) und

(2) folgen induktiv aus 21.9.

(3) folgt aus (2) und  $x = x_0$  ■

**Motivation:** Ist also  $f$  wie in 22.1, so gilt:  $f \in C^\infty(I)$  und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in I$ .

**Definition**

Sei  $f \in C^\infty(I)$  und  $x_0 \in I$ . Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  heißt die zu  $f$  (und  $x_0$ ) gehörende **Taylorreihe**.

**Motivation:** *Frage:* Wird  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  durch seine Taylorreihe dargestellt?

*Antwort:* Manchmal!

**Beispiele:**(1) Ist  $f$  wie in 22.1, so lautet die Antwort: ja!

$$(2) \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Übungsblatt:  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Dann:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Definition**

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^n(I)$  und  $x_0 \in I$ .  $T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  heißt das **Taylorpolynom** von  $f$ .

**Satz 22.2 (Satz von Taylor)**

Voraussetzungen wie in obiger Definition. Weiter sei  $f$   $n + 1$ -mal differenzierbar auf  $I$  und  $x \in I$ . Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**Beweis**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x_0 = 0$  und  $x > x_0$ .

$$\rho := (f(x) - T_n(x; 0)) \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \implies f(x) - T_n(x; 0) = \frac{\rho}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Zu zeigen ist:  $\exists \xi \in [0, x] : \rho = f^{(n+1)}(\xi)$ .

Definiere  $h : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \rho \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ . Nachrechnen:

$$h(0) = h(x) \text{ und } h'(t) = \rho \frac{(x-t)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

$$0 = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \stackrel{\text{MWS}}{=} h'(\xi) \quad \xi \in (0, x) \implies \rho \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \implies \rho = f^{(n+1)}(\xi). \quad \blacksquare$$

### Beispiele:

(1) Behauptung:  $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Bekannt:  $2 < e < 3$ .

Annahme:  $\exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$ . Dann:  $n \geq 2$  (Sonst:  $e = m \in \mathbb{N}$ , Wid!)  $f(x) := e^x, x_0 = 0, x = 1$

$$22.2 \implies \exists \xi \in (0, 1) \text{ mit } \frac{m}{n} = e = f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \mid \cdot n!$$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{n+1}}_{>0} \implies \frac{e^\xi}{n+1} \in \mathbb{N} \implies 1 \leq \frac{e^\xi}{n+1} < \frac{e}{n+1} <$$

$$\frac{3}{n+1} \stackrel{n \geq 2}{\leq} 1. \text{ Wid!}$$

(2) Behauptung:  $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Beweis:  $I = (-1, \infty)$ ,  $f(x) = \log(1+x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 1$ . Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Also gilt:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wegen dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \exists \xi_n \in (0, 1) : \log 2 = f(1) &= T_n(1; 0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}}_{=: c_n} \end{aligned}$$

zu zeigen:  $c_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

$$|c_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2}n!}{(n+1)!(1+\xi_n)^{n+1}} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}}_{\leq 1} \implies c_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

### Satz 22.3 (Bestimmung von Extrema durch höhere Ableitungen)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $f \in C^n(I)$ ,  $x_0 \in I$  und  $x_0$  sei ein innerer Punkt von  $I$ . Weiter gelte:  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

(1) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Minimum.

Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Maximum.

(2) Ist  $n$  ungerade  $\implies f$  hat in  $x_0$  kein relatives Extremum.

**Beweis**

$f \in C^n(I) \implies f^{(n)} \in C(I), f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Damit folgt nach §18:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f^{(n)}(x_0)f^{(n)}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in U_\delta(x_0). \quad (*)$$

Sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ . Nach dem Satz von Taylor existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit:

$$f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x; x_0)}_{\stackrel{\text{Vor.}}{=} f(x_0)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zu (1): Sei  $n$  gerade,  $x \neq x_0 \implies (x - x_0)^n > 0$ . Aus  $f^{(n)}(x_0) > 0$  folgt wegen (\*):

$$f^{(n)}(\xi) > 0 \implies \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n > 0 \implies f(x) > f(x_0)$$

$\implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Minimum. Analog: Aus  $f^{(n)}(x_0) < 0$  folgt:  $f$  hat in  $x_0$  ein relatives Maximum.

Zu (2): Sei  $n$  ungerade. Sei  $f^{(n)}(x_0) > 0$ . Aus  $x > x_0$  folgt:

$$(x - x_0)^n > 0, f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f(x) > f(x_0).$$

Analog: Aus  $x > x_0$  folgt:  $f(x) < f(x_0) \implies f$  hat in  $x_0$  kein Extremum.

Analog: Ist  $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$  für  $x > x_0$  und  $f(x) > f(x_0)$  für  $x < x_0$ . ■

**Beispiel**

*Bemerkung:* Dieses Beispiel zeigt, wann man den Satz *nicht* anwenden sollte.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt:  $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0 \implies f$  hat in  $x_0 = 0$  ein absolutes Minimum.