9. Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformeln

Definition
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \Delta := \Delta_{z_1,z_2,z_3} := \{t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$

Δ heißt ein **Dreieck** (Δ ist kompakt)

$$\gamma_1(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)(t \in [0, 1])$$

$$\gamma_2(t) := z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2)(t \in [1, 2])$$

$$\gamma_3(t) := z_3 + (t - 2)(z_1 - z_3)(t \in [2, 3])$$

$\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 : [0, 3] \to \mathbb{C}$ ist ein stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) = \partial\Delta$.
Wir setzen (ausnahmsweise): $L(\partial\Delta) = L(\gamma)$ und $\int_{\partial\Delta} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$. ($f \in C(\partial\Delta)$)

Satz 9.1 (Lemma von Goursat)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in H(D)$.
Ist $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck, so gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

Beweis
Sei $\Delta = \Delta_{z_1,z_2,z_3}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma$ wie oben.
Fall 1: $z_1 = z_2$
Fall 1.1: $z_3 = z_1 : \gamma(t) = z_3 \, \forall t \in [0, 3]$. Dann: $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3' = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} 0 + \int_{\gamma_2} 0 + \int_{\gamma_3} 0 = 0$.
Fall 1.2: $z_3 \neq z_1 . \gamma_1(t) = z_1, \gamma_1' = 0$, also $\int_{\gamma_1} = 0, \gamma_2^- \sim \gamma_3 \Rightarrow \int_{\gamma_3} = \int_{\gamma_2^-} \stackrel{8.3}{=} - \int_{\gamma_2} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_2} = 0$.
Fall 2: Δ ist ein echtes Dreieck ($z_1 \neq z_2 \neq z_3, z_3 \neq z_1$). Verbinde die Mittelpunkte der Kanten von Δ durch Geraden.

Wir erhalten 4 Dreiecke[1] $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.
Es existieren stückweise glatte Wege $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mit $\mathrm{Tr}(\alpha_j) = \partial\Delta_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$.[2]
Die Summe der Integrale in entgegengesetzten Richtungen längs der Kanten von $\Delta_4 = 0$.
Also:

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$$

[1] Die Skizze taucht hier leider nicht auf, ich versuchs mal zu erklären: Verbindet man alle Seitenhalbierenden miteinander, so entstehen in einem Dreieck vier kleine Dreiecke. Diese nummeriert man nun gegen den Uhrzeigersinn mit 1,2,3, das mittlere aber nennt man 4.
[2] gegen den Uhrzeigersinn

Somit:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq \sum_{j=1}^{4} \underbrace{\left|\int_{\partial\Delta_j} f(z)dz\right|}_{=:a_j}$$

O.B.d.A: $a_1 = \max\{a_1, \dots, a_4\}$.$\Delta^{(1)} := \Delta_1$. Fazit: $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq 4|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)dz|$ und $L(\partial\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$ [3]
Verfahre mit $\Delta^{(1)}$ genauso wie mit Δ. Wir erhalten ein Dreieck $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)} \subseteq \Delta : |\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)dz| \leq 4|\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z)dz|, L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta^{(1)})$.

Also: $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq 4^2|\int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z)dz|$ und $L(\partial\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2^2}L(\partial\Delta)$.

Induktiv erhaelt man eine Folge $(\Delta^{(n)})$ von Dreiecken mit:
$\Delta \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \dots, |\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq 4^n|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)dz|$ und $L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{1}{2^n}L(\partial\Delta) (n \in \mathbb{N})$
8.9 $\Rightarrow \exists z_0 \in D : z_0 \in \Delta^{(n)} \forall n \in \mathbb{N}$.

Definiere: $\varphi : D \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & , z \neq z_0 \\ f'(z_0) & , z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in H(D) \Rightarrow \varphi \in C(D)$. Es ist
$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) =$
$\underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{=:f_1(z)} + \underbrace{(\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)}_{=:f_2(z)} \forall z \in D$.

Sei $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0)$[4]. $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^{(m)} \subseteq U_\delta(z_0)$.
Für $z \in \partial\Delta^{(m)} : |z - z_0| \leq$ [5] $L(\partial\Delta^{(m)})$ und $|\varphi(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$.
Dann: $|f_2(z)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)}) \forall z \in \partial\Delta^{(m)}$. Also: $|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z)dz| \overset{8.4}{\leq} \varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2$.

f_1 hat auf D die Stammfunktion $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2 \overset{8.6}{\Rightarrow} |\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_1(z)dz| = 0$.

Dann: $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq 4^m|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z)dz| = 4^m|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f_2(z)dz| \leq 4^m\varepsilon L(\partial\Delta^{(m)})^2 = 4^m\varepsilon(\frac{1}{2^m}L(\partial\Delta))^2 = 4^m\varepsilon\frac{1}{4^m}L(\partial\Delta)^2 = \varepsilon L(\partial\Delta)^2$.

Fazit: $\forall\varepsilon > 0$ gilt: $|\int_{\partial\Delta} f(z)dz| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$. ∎

Hilfssatz 1:
Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ und $f \in C(U_r(z_0))$. Für jedes Dreieck $\Delta \subseteq U_r(z_0)$ gelte: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Dann besitzt f auf $U_r(z_0)$ eine Stammfunktion.

Beweis
Definiere: $F : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ wie folgt: Für $z \in U_r(z_0)$ sei $\gamma_z(t) := z_0 + t(z - z_0)$ $(t \in [0, 1])$. $F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$.

[3] Diese Gleichheit folgt aus geometrischen Überlegungen an Dreiecken.
[4] Folgt aus der Stetigkeit.
[5] $\max_{w,z\in\Delta} |w - z| \leq L(\partial\Delta)$

Sei $z_1 \in U_r(z_0)$. Sei $h \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ so, dass $\Delta_{z_0,z_1,z_1+h} \subseteq U_r(z_0)$.

$\gamma_0(t) := z_1 + th(t \in [0,1])$.
$\gamma_1 := \gamma_{z_1+h}^-$
Vorraussetzungen $\Rightarrow 0 = \underbrace{\int_{\gamma_{z_1}} f(w)dw}_{=F(z_1)} + \int_{\gamma_0} f(w)dw + \underbrace{\int_{\gamma_1} f(w)dw}_{=-F(z_1+h)} \Rightarrow F(z_1+h) - F(z_1)$

$= \int_{\gamma_0} f(w)dw$;
$\int_{\gamma_0} f(z_1)dw = \int_0^1 f(z_1)hdt = f(z_1)h$.

Also:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h} - f(z_1)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{\gamma_0}(f(w)-f(z_1))dw\right| = \left|\frac{1}{h}\int_0^1 (f(z_1+th)-f(z_1))hdt\right| \\
&= \left|\int_0^1 (f(z_1+th)-f(z_1))dt\right| \leq \int_0^1 \left|(f(z_1+th)-f(z_1))\right| dt
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(z_1+th) - f(z_1)| \leq \varepsilon$ für $0 < |h| < \delta$ und für $t \in [0,1] \Rightarrow$
$|\frac{F(z_1+h)-F(z_1)}{h} - f(z_1)| \leq \varepsilon$ für $0 < |h| < \delta$. D.h. F ist in z_1 komplex differenziebar und $F'(z_1) = f(z_1)$ ■

Folgerung:
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in H(D)$. Ist $z_0 \in D$, so existiert ein $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f besitzt auf $U_\delta(z_0)$ eine Stammfunktion.

Beweis
9.1 und Hilfssatz 1 ■

Definition
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$

(1) G heißt **sternförmig** $:\iff \exists z^* \in G$ mit: $S[z, z^*] \subseteq G$ I.d. Fall heißt z^* ein **Sternmittelpunkt** von G.
Beachte: sternförmig $\implies$ **Wegzusammenhang**.

(2) Ist G offen und sternförmig, so heißt G ein **Sterngebiet**

Beispiel
(1) Konvexe Mengen sind sternförmig

(2) $\mathbb{C}, U_\epsilon(z_0)$ sind Sterngebiete. $\mathbb{C}\backslash\{0\}, \dot{U}_\epsilon(z_0)$ sind Gebiete, aber keine Sterngebiete.

(3) $\mathbb{C}\_$ ist ein Sterngebiet. Jedes $z^* \in (0,\infty)$ ist ein Sternmittelpunkt von $\mathbb{C}\_$.

Satz 9.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, es sei $f \in H(G)$ und es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann:

(1) f besitzt auf G eine Stammfunktion F.

(2) $\int\limits_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

(3) Ist γ geschlossen, so ist $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$

Bemerkung: Für beliebige Gebiete ist 9.2 i.a. falsch.
Beispiel: $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ (s. 8.7)

Beweis

(1) Sei z^* ein Sternmittelpunkt von G. Definiere $F : G \to \mathbb{C}$ wie folgt: für $z \in G$ sei $\gamma_z(t) := z^* + t(z - z^*)(t \in [0,1])$. $\mathrm{Tr}(\gamma_z) = S[z, z^*] \subseteq G$. $F(z) := \int\limits_{\gamma_z} f(w)dw$. $f \in H(G) \stackrel{9.1}{\Longrightarrow}$ $\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$ Fast wörtlich wie in HS 1 zeigt man: $F \in H(G)$ und $F' = f$ auf G.

(2) folgt aus (1) und 8.5

(3) folgt aus (1) und 8.6 ∎

Bezeichnung
Seien G und f wie in 9.2. $z^* \in G$ sei ein Sternmittelpunkt von G. Für $z \in G$ setze: $F(z) := \int_{z^*}^z f(w)dw := \int\limits_\gamma f(w)dw$, wobei γ **irgendein** stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$, Anfangspunkt von $\gamma = z^*$ und Endpunkt von $\gamma = z$ ist.
Wegen 9.2(2) ist F wohldefiniert. Der Beweis von 9.2(1) zeigt: $F \in H(G)$ und $F' = f$ auf G.

Beispiel
[6] $G = \mathbb{C}\_$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $z^* = 1$, $F(z) := \int_1^z \frac{1}{w}dw$
Dann: $F'(z) = \frac{1}{z} = \mathrm{Log}'z \ \forall z \in G$
Dann existiert $c \in \mathbb{C} : F(z) = \mathrm{Log}z + c \ \forall z \in G$. $F(1) = 0 = \mathrm{Log}1 \implies c = 0$
Also: $\mathrm{Log}z = \int_1^z \frac{1}{w}dw (z \in \mathbb{C}\_)$

Hilfssatz 2
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $z_0 \in D$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ Weiter sei $z_1 \in U_r(z_0)$, $\rho > 0$ so, daß $\overline{U_\rho(z_1)} \subseteq U_r(z_0)$ und
$\gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}(t \in [0, 2\pi])$ Ist $g \in H(D\backslash\{z_1\})$, so gilt:

$$\int\limits_\gamma g(w)dw = \int\limits_{\gamma_0} g(w)dw$$

Beweis
O.B.d.A $\mathrm{Re}\, z_o = \mathrm{Re}\, z_1, \gamma_1$ und γ_2 seien stückweise glatte Wege. Wähle $R > r$ so, dass $U_R(z_0) \subseteq D$.
$G_1 := U_R(z_0)\backslash\{z_1 + t : t \le 0\}$. G_1 ist ein Sterngebiet, $\mathrm{Tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$. γ_1 ist geschlossen, $g \in H(G_1)$.9.2 $\implies \int\limits_{\gamma_1} g(w)dw = 0$. Analog: $\int\limits_{\gamma_2} g(w)dw = 0$. Also:
$0 = \int\limits_{\gamma_1} g(w)dw + \int\limits_{\gamma_2} g(w)dw = \int\limits_\gamma g(w)dw + \int\limits_{\gamma_0^-} g(w)dw = \int\limits_\gamma g(w)dw - \int\limits_{\gamma_0} g(w)dw$ ∎

[6]Dieses Beispiel trägt die Nummer 9.3

Satz 9.4 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)
$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in D, r > 0$ und $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Weiter sei $f \in H(D)$ und $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$.
Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Bemerkungen

(1) Die Werte von f in $U_r(z_0)$ sind festgelegt durch die Werte von f auf $\partial U_r(z_0)$

(2) Für $z = z_0 : f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{it}) dt$ (Mittelwertgleichung)

Beweis
Sei $z_1 \in U_r(z_0)$. Sei $\epsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq U_r(z_0)$ und
$|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon \; \forall w \in U_\delta(z_1)$.
Sei $0 < \rho < \delta; \gamma_0(t) := z_1 + \rho \cdot e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$.
Für $w \in \mathrm{Tr}(\gamma_0) : |w - z_1| = \rho < \delta$, also $|f(w) - f(z_1)| \leq \epsilon$.
Also: $|\frac{f(w)-f(z_1)}{w-z_1}| \leq \frac{\epsilon}{\rho} \; \forall w \in \mathrm{Tr}(\gamma_0)$.
8.4 $\implies |\int\limits_{\gamma_0} \frac{f(w)-f(z_1)}{w-z_1} dw| \leq \frac{\epsilon}{\rho} L(\gamma_0) = \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon$.
Definiere $g : D \backslash \{z_1\} \to \mathbb{C}$ durch $g(w) := \frac{f(w)}{w-z_1}$.
Dann: $g \in H(D \backslash \{z_1\})$.
Somit:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_1} dw &= \int\limits_{\gamma} g(w) dw = \int\limits_{\gamma_0} g(w) dw \\ &= \int\limits_{\gamma_0} \frac{f(z_1) + f(w) - f(z_1)}{w-z_1} dw \\ &= f(z_1) \cdot \underbrace{\int\limits_{\gamma_0} \frac{dw}{w-z_1}}_{\overset{8.7}{=} 2\pi i} + \underbrace{\int\limits_{\gamma_0} \frac{f(w)-f(z_1)}{w-z_1} dw}_{=:A} \\ &= 2\pi i f(z_1) + A \end{aligned}$$

$\implies |\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_1} dw - 2\pi i f(z_1)| = |A| \overset{\text{s.o.}}{\leq} 2\pi\epsilon$.
$\epsilon > 0$ beliebig $\implies f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_1} dw$ ∎

Beispiel
Berechne $I = \int\limits_{\gamma} \frac{e^{\sin z} + \cos(e^z) z^2}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it} (t \in [0, 2\pi])$
$f(z) := e^{\sin z} + \cos(e^z) z^2$
9.4 $\implies I = 2\pi i f(0) = 2\pi i$

Satz 9.5
γ sei ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$, es sei $D := \mathbb{C}\setminus\mathrm{Tr}(\gamma)$ (D offen). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n : D \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F_n(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^n} dw,$$

wobei $\varphi \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$.
Dann ist $F_n \in H(D)$ und $F_n' = nF_{n+1}$ auf D ($n \in \mathbb{N}$)

Beweis
Sei $z_0 \in D$. Wir zeigen : F_n ist in z_0 komplex differenziebar und $F_n'(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$.
o.B.d.A: $z_0 = 0$. Dann ist $0 \in D$, also $0 \notin \mathrm{Tr}(\gamma)$. Sei $w \in Tr(\gamma)$ und $z \in D\setminus\{0\}$:
Nachrechnen:

$$\frac{1}{(w-z)^n} - \frac{1}{w^n} = \frac{z}{(w-z)^n w^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1}(w-z)^k$$

$h(z,w) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1}(w-z)^k - \frac{n}{w}$

Dann folgt (Nachrechnen!):

$$\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z,w) dw$$

Weiter gilt $\exists r > 0 : U_r(z_0) \subseteq D$. Sei $\epsilon > 0$. $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \mathrm{Tr}(\gamma)$ ist kompakt und h ist auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\delta > 0 : \delta < \frac{r}{2}$ und $|h(z_1,w) - h(z_2,w)| \leq \epsilon$ $\forall z_1, z_2 \in U_\delta(0)$ $\forall w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$.
Es ist $h(0,w) = 0$ $\forall w \in \mathrm{Tr}(\gamma) \Rightarrow |h(z,w)| \leq \epsilon$ $\forall z \in U_\delta(0)$ $\forall w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$
$M := \max_{w\in\mathrm{Tr}(\gamma)} |\varphi(w)|$; $w \in \mathrm{Tr}(\gamma) \Rightarrow |w| = |w-0| \geq \frac{r}{2}$
$\Rightarrow |w|^n \geq \frac{r^n}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{|w|^n} \leq \frac{2^n}{r^n}$
$\Rightarrow \frac{|\varphi(w)|}{|w|^n} |h(z,w)| \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon$ $\forall z \in U_\delta(0)$
$\Rightarrow \underbrace{\int_\gamma |\frac{\varphi(w)}{w^n} h(z,w) dw|}_{=|\frac{F_n(z)-F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0)|} \leq M \frac{2^n}{r^n} \epsilon L(\gamma) = \epsilon(\frac{M2^n}{r^n} L(\gamma))$ $\forall z \in U_\delta(0)$ ∎

Satz 9.6
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in H(D)$. Dann:

(1) $f' \in H(D)$

(2) f ist auf D beliebig oft komplex differenzierbar

(3) **Cauchysche Integralformeln für Ableitungen**
Ist $z_0 \in D, r > 0, \overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$), so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \forall z \in U_r(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis
Sei z_0, r, γ wie in (3).

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n}dw \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Tr}(\gamma), n \in \mathbb{N}$$

$9.4 \Rightarrow f = F_1$ auf $U_r(z_0)$;
$9.5 \Rightarrow F_1 \in H(U_r(z_0))$ und $F_1' = F_2$ auf $U_r(z_o)$. Also: $f' = F_2$ auf $U_r(z_0)$. $9.5 \Rightarrow F_2 \in H(U_r(z_0))$, also $f' \in H(U_r(z_0))$. $z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow$ (1).
$f' = F_2$ auf $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

$f'' = F_2' = 2F_3$ auf $U_r(z_0) \Rightarrow$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw \quad \forall z \in U_r(z_0)$$

Weiter mit Induktion und 9.5 ∎

Satz 9.7 (Satz von Morera)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$
Dann:

$$f \in H(D) \iff \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ für jedes Dreieck } \Delta \subseteq D$$

Beweis
" $\Rightarrow$ " : 9.1
" $\Leftarrow$: Sei $z_0 \in D, r > 0$ und $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann mit HilStammfunktionsatz 1 und den Vorraussetzungen $\Rightarrow \exists F \in H(U_r(z_0)) : F' = f$ auf $U_r(z_0)$
$9.6 \Rightarrow f \in H(U_r(z_0))$. Da $z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow f \in H(D)$ ∎

Hilfssatz 3 Seien G_1 und G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und es sei $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.
Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Gebiet.

Beweis
$G_1 \cup G_2$ ist offen. Sei $\varphi : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ lokal konstant. $\varphi_j := \varphi_{|G_j}$ $(j = 1, 2)$
G_j Gebiet $\Rightarrow$ φ_j ist auf G_j konstant. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ φ ist auf $G_1 \cup G_2$ konstant. ∎

Definition
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.
G heißt ein **Elementargebiet** (EG) $:\iff \forall f \in H(G) \exists F \in H(G) : F' = f$ auf G.

Beispiel
(1) Aus 9.2: Sterngebiete sind Elementargebiete

(2) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist kein Elementargebiet, denn die Funktion $\frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine Stammfunktion (siehe 8.7).

Satz 9.8
Seien G_1 und G_2 Elementargebiete, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ und es sei $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend. Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Elementargebiet.

Bemerkung: (1) Sind G_1 und G_2 Gebiete, so muß $G_1 \cap G_2$ nicht zusammenhängend sein.

(2) Es gibt Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.

Beweis
Hilfssatz 3 $\Rightarrow G_1 \cup G_2$ ist ein Gebiet.
Vorraussetzungen $\Rightarrow G_1 \cap G_2$ ist ein Gebiet.
Sei $f \in H(G_1 \cup G_2), f_j := f_{|G_j}\ (j = 1, 2)$,
$\exists F_j \in H(G_j) : F_j' = f_j = f$ auf $G_j\ (j = 1, 2)$
Für $z \in G_1 \cap G_2 : (F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z) = 0$
$4.2 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : F_1(z) = F_2(z) + c \quad \forall z \in G_1 \cap G_2$

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & , z \in G_1 \\ F_2(z) + c & , z \in G_2 \end{cases}$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $G_1 \cup G_2$ ■

Definition
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und $g : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. g ist auf D **beschränkt** $:\iff \exists c \geq 0 : |g(z)| \leq c \quad \forall z \in D$

Definition
Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt eine **ganze Funktion**.(**entire function**)