# 23. Minimal- und Maximallösung

Stets in diesem Paragraphen: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $(x_0, y_0) \in D$. Wieder betrachten wir das AWP

$$(A) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$L_{(A)}$ und $I_y$ für $y \in L_{(A)}$ seien wie in Paragraph 22 definiert.

**Definition**
$y^* \in L_{(A)}$ heißt eine **Maximallösung** von (A) $:\iff\ y \leq y^*$ auf $I_y \cap I_{y^*} \forall y \in L_{(A)}$.
$y_* \in L_{(A)}$ heißt eine **Minimallösung** von (A) $:\iff\ y \geq y_*$ auf $I_y \cap I_{y_*} \forall y \in L_{(A)}$

**Beispiel**
$D = \mathbb{R}^2, f(x,y) = \sqrt{|y|}$, AWP

$$(A) \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Für $\alpha \geq 0 : y_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & , x \geq \alpha \end{cases}$

Es gilt weiterhin $\tilde{y}_\alpha(x) := -y_\alpha(-x)$.
Nachrechnen: $y_\alpha(x), \tilde{y}_\alpha(x)$ lösen das AWP auf $\mathbb{R}$.

Für $\alpha, \beta \geq 0 : y_{\alpha,\beta} := \begin{cases} y_\alpha(x) & , x \geq \alpha \\ 0 & , -\beta \leq x \leq \alpha \\ \tilde{y}_\beta(x) & , x \leq -\beta \end{cases}$

Übung: Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $0 \in I$. y löst das AWP auf I $\iff\ y = 0$ auf I oder $\exists \alpha \geq 0 : y = (y_\alpha)_{|I}$ oder $\exists \alpha \geq 0 : y = (\tilde{y}_\alpha)_{|I}$ oder $\exists \alpha, \beta \geq 0 : y = (\tilde{y}_{\alpha,\beta})_{|I}$.

Damit ist $y_0$ eine Maximallösung und $\tilde{y_0}$ eine Minimallösung. Ab jetzt sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, D := I \times \mathbb{R}, f \in C(D, \mathbb{R})$ sei beschränkt, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, M := sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in D\}$.

Vorbemerkungen:

(1) Das AWP (A) hat Lösungen auf $I$ (12.4, Peano)

(2) $\mathcal{X} := C(I, \mathbb{R})$ mit $||.||_\infty$ ist ein BR.

(3) $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sei definiert durch $(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$ $(y \in \mathcal{X}, x \in I)$, T ist stetig; Für $y \in \mathcal{X}$ gilt: y löst das AWP auf $I \iff Ty = y$.

(4) Sei $y \in \mathcal{X}$ eine Lösung von (A) auf $I$: für $x, \tilde{x} \in I$: $|y(x) - y(\tilde{x})| = |y'(\xi)||x - \tilde{x}| = |f(\xi, y(\xi))||x - \tilde{x}| \leq M|x - \tilde{x}|$

**Satz 23.1**
Das AWP (A) hat eine Maximallösung $y^* : I \to \mathbb{R}$ und eine Minimallösung $y_* : I \to \mathbb{R}$.

**Beweis**
Wir zeigen nur die Existenz von $y^* : I \to \mathbb{R}$. $\mathcal{L} := \{y \in \mathcal{L}_{(A)} : I_y = I\}$. 12.4 $\implies \mathcal{L} \neq \emptyset$. Sei $y \in \mathcal{L}, x \in I : |y(x)| = |y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt| \leq |y_0| + |\int_{x_0}^x f(t, y(t))dt| \leq |y_0| + M|x - x_0| \leq \underbrace{|y_0| + M|b - a|}_{c}$.

Also: $y(x) \leq c \ \forall y \in \mathcal{L} \ \forall x \in I$. Es existiert also $y^*(x) := sup\{y(x) : y \in \mathcal{L}\}(x \in I)$. Sei $y \in \mathcal{L}$ (also $I_y = I$). Dann $y \leq y^*$ auf I. Sei $y \in \mathcal{L}_{(A)}$ (also $I_y \subseteq I$).

22.3 $\implies \exists \hat{y} \in \mathcal{L} : y = \hat{y}_{|I_y} \implies y \leq \hat{y} \leq y^*$ auf $I_y$.

Noch zu zeigen: $y^* \in \mathcal{L}$.

Sei $I \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Seien $j, k \in \mathbb{N}$. Dann ex. ein $y_{jk} \in \mathcal{L} : y_{jk}(x_j) \geq y^*(x_j) - \frac{1}{k}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in I : y_k(x) := max\{y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{kk}(x)\}$.
Übung: $y_k \in \mathcal{L} \ \forall k \in \mathbb{N}$. Für $k, j \in \mathbb{N}, j \leq k : y_k(x_j) \geq y_{jk}(x_j) > y^*(x_j) - \frac{1}{k}$.

Vorbemerkung (4) und 11.4 $\implies$ $(y_k)$ enthält eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge. o.B.d.A $(y_k)$ konvergiert gleichmäßig auf I. $\hat{y}(x) := \lim_{k\to\infty} y_k(x)(x \in I)$. $Ty_k = y_k \ \forall k \in \mathbb{N}, T$ stetig $\implies T\hat{y} = \hat{y} \implies \hat{y} \in \mathcal{L}$.

Es ist $\hat{y} \leq y^*$ auf I. Sei $x_j \in I \cap \mathbb{Q}$. $\hat{y}(x_j) = \lim_{k\to\infty} y_k(x_j) \geq \lim_{k\to\infty}(y^*(x_j) - \frac{1}{k}) = y^*(x_j) \implies \hat{y} = y^*$ auf $I \cap \mathbb{Q}$.

Annahme: $\exists \xi \in I : \hat{y}(\xi) < y^*(\xi) \implies \exists u \in \mathcal{L} : \hat{y}(\xi) < u(\xi)$. Für $x_\mu \in I \cap \mathbb{Q}$ hinreichend nahe bei $\xi : \hat{y}(x_\mu) < u(x_\mu) \leq y^*(x_\mu)$, Widerspruch.

D.h. $\hat{y} \geq y^*$ auf $I$. Also $y^* = \hat{y}$ auf I, somit gilt $y^* \in \mathcal{L}$. ■

**Definition**
$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y_*(x) \leq y \leq y^*(x)\}$ heißt **Lösungstrichter** von (A).

**Satz 23.2**
Sei $(\sigma, \tau) \in T$. Dann existiert eine Lösung $v : I \to \mathbb{R}$ von (A) auf $I$ mit $v(\sigma) = \tau$.

**Beweis**
Betrachte das AWP $(B) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\sigma) = \tau \end{cases}$. 12.4 (Peano) $\implies (B)$ hat eine Lösung $w : I \to \mathbb{R}$ auf I. Ist $\sigma = x_0 \implies \tau = y_0 \implies v := w$ leistet das Verlangte. Sei also $\sigma \neq x_0$, etwa $x_0 < \sigma$. Ist $w(x_0) = y_0 \implies v := w$ leistet das Verlangte. Sei also $w(x_0) \neq y_0$. Es ist $y_*(\sigma) \leq \tau = w(\sigma) \leq y^*(\sigma)$.

Fall 1: $w(x_0) > y_0 = y^*(x_0) \implies w(x_0) - y^*(x_0) > 0$ und $w(\sigma) - y^*(\sigma) \leq 0$. Zwischenwertsatz $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y^*(\xi)$

Definiere: $v : I \to \mathbb{R}$ durch $v(x) := \begin{cases} y^*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$ $v(x_0) = y^*(x_0) = y_0$, $v(\sigma) = w(\sigma) = \tau$.
12.3 $\implies$ $v$ löst das AWP (A) auf $I$.

Fall 2: $w(x_0) < y_0 = y_*(x_0) \implies w(x_0) - y_*(x_0) < 0$ und $w(\sigma) - y_*(\sigma) \geq 0$. Zwischenwertsatz $\implies \exists \xi \in [x_0, \sigma] : w(\xi) = y_*(\xi)$

Definiere: $v : I \in \mathbb{R}$ durch $v(x) := \begin{cases} y_*(x), & x \in [a, \xi] \\ w(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$ $v(x_0) = y_*(x_0) = y_0$, $v(\sigma) = w(\sigma) = \tau$.
12.3 $\implies$ $v$ löst das AWP (A) auf $I$ ■