20. Satz von Fubini / Substitutionsregel

Satz 20.1 (Satz von Fubini)
Ohne Beweis: $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y): \ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$. Es sei $f \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

(1) $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^m$: für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ist $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgueintegrierbar über $\mathbb{R}^n$.

(2) Mit
$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}x & \text{, falls } y \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & \text{, falls } y \in N \end{cases}$$
gilt: $F \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y)\mathrm{d}y$

Satz 20.2 (Substitutionsregel)
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und beschränkt. $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sei auf U injektiv und Lipschitzstetig. Es sei $B := \bar{U}$ (B beschränkt und abgeschlossen). Dann lässt sich ϕ Lipschitzstetig auf B fortsetzen und für $A := \phi(B)$ gilt:
$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_B f(\phi(z))|\det \phi'(z)|\mathrm{d}z \ \forall f \in C(A, \mathbb{R})$$
(A beschränkt und abgeschlossen, im Allgemeinen ist auf der Nullmenge ∂U ϕ' nicht erklärt).

Polarkoordinaten (n=2):
$r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}, x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi$ $(r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi])$
$\phi(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. $\det \phi'(r,\varphi) = r$.

Beispiele:
(1) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}, f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$. $B := [0,1] \times [0,\pi] \implies$

$\phi(B) = A$. Dann:

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\ \mathrm{d}(r,\varphi)\\
&= \int_B r\sin\varphi\cdot r\cdot r\ \mathrm{d}(r,\varphi)\\
&= \int_0^\pi (\int_0^1 r^3\sin\varphi \mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}r^4\sin\varphi\right]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^\pi \frac{1}{4}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2) Behauptung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Beweis: $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$. Sei $\varrho > 0$. $Q_\varrho := [0,\varrho]\times[0,\varrho]$.

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\varrho} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^\varrho (\int_0^\varrho e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\\
&= (\int_0^\varrho e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2
\end{aligned}$$

$A_\varrho := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le\varrho^2,\ x,y\ge 0\}$, $B_\varrho = [0,\varrho]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, $\phi(B_\varrho) = A$.

$$\begin{aligned}
\int_{A_\varrho} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int_{B_\varrho} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}(r,\varphi)\\
&= \int_{B_\varrho} r\cdot e^{-r^2}\mathrm{d}(r,\varphi)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^\varrho r\cdot e^{-r^2}\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\varrho r\cdot e^{-r^2}\mathrm{d}r\\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\varrho\\
&= \frac{\pi}{2}(-\frac{1}{2}e^{-\varrho^2}+\frac{1}{2}) =: h(\varrho)
\end{aligned}$$

$h(\varrho)\to\frac{\pi}{4}$ $(\varrho\to\infty)$. $A_\varrho \subseteq Q_\varrho \subseteq A_{\sqrt{2}\varrho} \overset{f\ge 0}{\Longrightarrow} f_{A_\varrho} \le f_{Q_\varrho} \le f_{A_{\sqrt{2}\varrho}}$.

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_\varrho}\mathrm{d}(x,y)}_{=h(\varrho)} \le \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{Q_\varrho}\mathrm{d}(x,y)}_{=(\int_0^\varrho e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2} \le \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} f_{A_{\sqrt{2}\varrho}}\mathrm{d}(x,y)}_{=h(\sqrt{2}\varrho)}$$

$$\Longrightarrow (\int_0^\varrho e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2 \to \frac{\pi}{4}\ (\varrho\to\infty)$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Longrightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Zylinderkoordinaten (n=3):
$\phi(r,\varphi,z) := (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi, z), r\geq 0, \varphi\in[0,2\pi], z\in\mathbb{R}, \det\phi'(r,\varphi,z) = r.$

Beispiel
$A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\geq 0, x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq 1\}.$
$f(x,y,z) = y\sqrt{x^2+y^2}+z,\ B = [0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1].$

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\mathrm{d}(r,\varphi,z)\\
&= \int_B (r\sin\varphi r + z)r\mathrm{d}(r,\varphi,z)\\
&= \int_0^1 (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^1 (r^2\sin\varphi + rz)\mathrm{d}r) + \mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}z\\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten (n=3):
$r = \|(x,y,z)\| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},$
$x = r\cos\varphi\sin\nu,\ y = r\sin\varphi\sin\nu,\ z = \cos\nu\ (r\geq 0, \varphi\in[0,2\pi], \nu\in[0\pi]).$
$\phi(r,\varphi,\nu) = (r\cos\varphi\sin\nu, r\sin\varphi\sin\nu, r\cos\nu),\ \det\phi'(r,\varphi,\nu) = -r^2\sin\nu.$

Beispiel
$A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq\|(x,y,z)\|\leq 2,\ x,y,z\geq 0\}.$
$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.\ B = [1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}].$

$$\begin{aligned}
\int_a \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_B \frac{1}{r^2}\sin\nu\mathrm{d}(r,\varphi,\nu)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_1^2 \sin\nu\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi)\mathrm{d}\nu\\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$