

Kapitel 3

„Gestänge“ (Linkages)

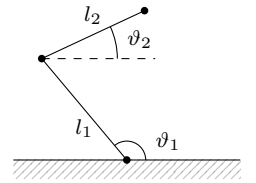
Betrachte einen (stilisierten) Roboterarm mit zwei Gelenken, eines in $0 \in \mathbb{R}^2$ fixiert, und zwei Stangen fixer Länge $l_1 > l_2$, die über das weitere Gelenk miteinander verbunden sind.

Der **Konfigurationsraum** C , das heißt der Raum aller möglichen Positionen beider Stangen, wird durch ihre Winkel zur x -Achse parametrisiert, das heißt $C = T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sein **Arbeitsbereich** W , das heißt die Menge der Positionen des Endpunktes, ist ein Annulus mit äußerem Radius $l_1 + l_2$ und innerem Radius $l_1 - l_2$. Das liefert die Parametrisierung

$$\alpha : C = T^2 \rightarrow W \quad (\vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto l_1 \cdot \vartheta_1 + l_2 \cdot \vartheta_2$$

Lemma

Es bezeichne Δ die Diagonale in T^2 und $\Delta^* = \{(\vartheta, -\vartheta) \mid \vartheta \in \mathbb{S}^1\}$. Das Komplement $T^2 \setminus \Delta \cup \Delta^*$ besitzt zwei Komponenten, deren jede von α diffeomorph auf W abgebildet wird.

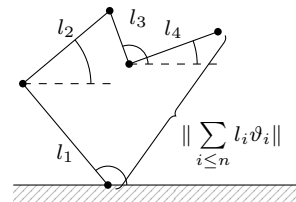


1 Abstandsfunktion von Roboterarmen

Zur Untersuchung der Abstandsfunktion $\|\sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i\|$ genügt die Betrachtung des Raumes aller möglichen „Gestalten“ des Armes, seines Modellraumes: Seine „Gestalt“ hängt nicht vom ersten Winkel, beziehungsweise seiner Länge im \mathbb{R}^2 ab. Der Modellraum sei definiert als

$$W = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 / \text{SO}(2).$$

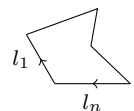
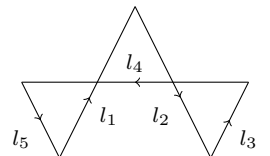
Durch die Abbildung $[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \mapsto (1, \vartheta_2 \vartheta_1^{-1}, \dots, \vartheta_n \vartheta_1^{-1})$ erhält man einen Diffeomorphismus $M \cong T^{n-1}$. Für jeden festen Abstand $\|\sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i\|$ ist das Urbild der Abstandsfunktion der Raum der geschlossenen Polygone mit Kantenlängen l_1, \dots, l_n .



2 Polygonräume

Jedes geschlossene Polygon ist, bis auf euklidische Bewegungen, durch l_1, \dots, l_n und die orientierten Winkel zwischen den Kanten charakterisiert. Normalisiert man die letzte Kante auf die x -Achse mit $\vartheta_n = -e_1$, so erhält man als Modulraum $M_l = \{(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \mid \sum l_i \vartheta_i = 0, \vartheta_n = -e_1\}$. Jede solche Normalisierung entspricht einer Drehung, also

$$M_l = \{(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \mid \sum l_i \vartheta_i = 0\} / \text{SO}(2)$$



wobei auch hier $\mathrm{SO}(2)$ diagonal auf dem n -Torus wirkt.

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ induziert einen Diffeomorphismus $\varphi_\sigma : T^n \rightarrow T^n$ durch $\varphi_\sigma(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = (\vartheta_{\sigma(1)}, \dots, \vartheta_{\sigma(n)})$. Da die Summation und $\mathrm{SO}(2)$ -Wirkung invariant unter der Permutation sind, erhält man so einen Diffeomorphismus $M_l \rightarrow M_{l_\sigma}$, mit $\tilde{l} = (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(n)})$. Das Diffeomorphismus hängt nicht von der Reihenfolge der Kantenlängen ab.

Im Fall $n = 3$ nehmen wir $l_1 \geq l_2 \geq l_3$ an. Falls $l_1 = l_2 + l_3$ gilt, so ist das Dreieck entartet, es gilt $M_l = \{*\}$. Ist die Dreiecksungleichung strikt erfüllt, das heißt $l_1 < l_2 + l_3$, so existieren zwei Dreiecke mit genau diesen Kantenlängen, welche sich durch eine Spiegelung unterscheiden. Gilt $l_1 > l_2 + l_3$, so existiert kein Dreieck mit diesen Kantenlängen und $M_l = \emptyset$.

Lemma

Für $n \geq 3$ gilt genau dann $M_l = \emptyset$, wenn $l_i > l_1 + l_2 + \dots + \hat{l}_i + \dots + l_n$ für ein $i \leq n$ gilt.

Beweis

Offensichtlich ist die Bedingung hinreichend. Es gelte $l_i = \sum_{j \neq i} l_j$ für alle $i \leq n$. Für $n = 3$ ist die Aussage klar. Für $n \geq 4$ existiert ein $i \leq n$, so dass

$$l_i + l_{i+1} \leq l_1 + \dots + l_{i-1} + l_{i+2} + \dots + l_n$$

gilt, denn wäre dem nicht so, so gälte

$$2(l_i + l_{i+1}) > \sum l_i = \mathcal{L}$$

für alle i und es folgte

$$4 \cdot \mathcal{L} = \sum_{i \leq n} 2(l_i + l_{i+1}) > n \cdot \mathcal{L}.$$

Nach Induktion existiert ein geschlossenes Polygon mit Kantenlängen $l_1, l_2, \dots, l_i + l_{i+1} + \dots + l_n$, das heißt ein n -gon mit kollinearen Kanten der Längen l_i und l_{i+1} . Damit gilt $M_l \neq \emptyset$. \square

Wann ist M_l eine Mannigfaltigkeit? Ein **Längenvektor** $l = (l_1, \dots, l_n)$ heißt **generisch**, wenn es *keine* $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ gibt mit $\sum_{i \leq n} \varepsilon_i l_i = 0$.

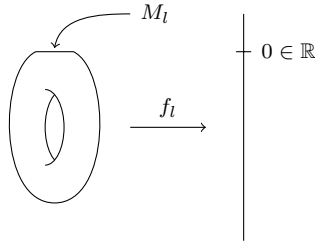
Satz

Ist $l \in \mathbb{R}_{>0}^n$ generisch, so ist M_l eine kompakte orientierbare $(n-3)$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Es sei $W = T^n / \mathrm{SO}(2)$ der Modulraum eines Roboterarmes mit n Stangen und

$$f_l : W \rightarrow \mathbb{R} \quad [\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \mapsto \left\| \sum_{i \leq n} l_i \vartheta_i \right\|^2$$

die **Höhenfunktion** zum Längenvektor $l = (l_1, \dots, l_n)$. Ist $f_l(p) = 0$, so ist der Arm geschlossen, das heißt p bestimmt ein geschlossenes ebenes n -gon mit Kantenlängen l_1, \dots, l_n , d. h. $p \in M_l$. Der Modulraum liegt als Nullstellenmenge von f_l in dem $(n-1)$ -Torus W ; M besteht genau aus den Maximalstellen von f_l .



Kollineare Konfigurationen sind (topologisch) interessante Punkte in W .

Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ heißt **kurz** (beziehungsweise **lang**), falls $\sum_{j \in \mathcal{J}} l_j < \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_i$ (beziehungsweise $\dots > \dots$) gilt, andernfalls heiße sie **ausgewogen**. \mathcal{J} ist genau dann ausgewogen, wenn sein Komplement \mathcal{J}^c ausgewogen ist. Es existiert genau dann ein ausgewogenes \mathcal{J} , wenn l nicht generisch ist.

Ist \mathcal{J} lang oder ausgewogen, so sei $p_{\mathcal{J}} = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \in W$ mit $\vartheta_i = 1$ für $i \in \mathcal{J}$ und $\vartheta_i = -1$ sonst. Insbesondere gilt $p_{\mathcal{J}} = p_{\mathcal{J}^c}$ für ausgewogenes \mathcal{J} .

Lemma

Die kritischen Punkte von $f_l : W \setminus M_l \rightarrow \mathbb{R}$ sind genau die Konfigurationen $p_{\mathcal{J}}$ für lange Teilmengen \mathcal{J} . Jeder solche Punkt ist nicht-entartet und hat den Morse-Index $n - |\mathcal{J}|$.

Bevor wir mit dem eigentliche Beweis beginnen erinnern wir uns noch zunächst an die Vorlesung vom letzten Semester. Die **Hessesche** ist gegeben durch $H_f = \nabla^2 f$ für ein $f \in C^\infty(M)$ und es gilt (**ACHTUNG, stimmt nicht mit Kapitel 9.1 der alten VL überein!**)

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= X(df(Y)) - df(\nabla_X f) = X(Y(f)) - (\nabla_X f)(f) \\ &= [X, Y](f) + Y(Xf) - \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f}_{=[X, Y]f} - \nabla_Y Xf \\ &= Y(Xf) - \nabla_Y Xf = H_f(Y, X) \end{aligned}$$

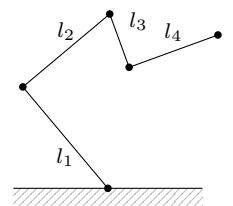
H_f ist im Allgemeinen nicht C^∞ -linear, aber in kritischen Punkten von f : Sei $X_p \in T_p M$, setze fort zu Vektorfeldern X und \tilde{X} auf M . Dann gilt

$$H_f(\tilde{X}, Y)|_p = \tilde{X}_p(Yf) - (\nabla_{\tilde{X}_p} Y)f = X_p(Yf) - \underbrace{df|_p(\nabla_{\tilde{X}_p} Y)}_{=0} = X_p(Yf).$$

In kritischen Punkten ist H_f C^∞ -linear und hängt nicht von der Wahl des Zusammenhangs ab. In lokalen Koordinaten sei dann $X_p = \sum_{i \leq n} \zeta^i \frac{d}{dx^i}$, $Y_p = \sum_{i \leq n} \eta^i \frac{d}{dx^i}$, und ζ^i, η^i konstant. Dann folgt

$$\begin{aligned} H_f(X_p, Y_p) &= X_p(Yf) = X_p\left(\sum_{i \leq n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{j \leq n} \zeta^j \left(\underbrace{\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \sum_{i, j \leq n} \eta^i \zeta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

Für den beweis des Lemmas setzen wir $l = (l_1, \dots, l_n)$ und $f_l : W \setminus M_l \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[u_1, \dots, u_n] \mapsto \|\sum l_i u_i\|^2$. Die kritischen Punkte von f_l sind genau die (kollinearen) Konfigurationen $p_{\mathcal{J}}$ für lange Teilmengen $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ ($\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i > \sum_{j \notin \mathcal{J}} l_j$ und $p_{\mathcal{J}} = (u_1, \dots, u_n)$ mit $u_i = 1$ für $i \in \mathcal{J}$ und $u_i = -1$ sonst). Jeder solche kritische Punkt $p_{\mathcal{J}}$ ist nicht ausgeartet und hat den Morse-Index $n - |\mathcal{J}|$.



Beweis (vom Lemma)

Wir betrachten die Abbildung

$$f_l : T^n \rightarrow W \xrightarrow{f_l} \mathbb{R} \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto -\left\| \sum l_i u_i \right\|^2$$

und setzen $u_i = e^{i\vartheta_i} = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_l(u) &= -\left(\sum l_i \cos \vartheta_i\right)^2 - \left(\sum l_i \sin \vartheta_i\right)^2 \\ &= -\left(\sum_{i \leq n} l_i^2 \cos^2 \vartheta_i + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j\right) \\ &\quad - \left(\sum_{i \leq n} l_i^2 \sin^2 \vartheta_i + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j\right) \\ &= -\left(\sum_{i \leq n} l_i^2 (\cos^2 \vartheta_i + \sin^2 \vartheta_i)\right) - 2 \sum_{i < j} l_i l_j \underbrace{(\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j)}_{=\cos(\vartheta_i - \vartheta_j)} \end{aligned}$$

Wie steht es nun um die kritischen Punkte? Es gilt

$$\frac{\partial f_l}{\partial \vartheta_k} = -2l_k \sum_{i \leq n} l_i \sin(\vartheta_i - \vartheta_k) = -2l_k \sum_{i \leq n} l_i (\sin \vartheta_i \cos \vartheta_k - \cos \vartheta_i \sin \vartheta_k) = 0$$

genau dann, wenn

$$\underbrace{\cos \vartheta_k \sum_{i \leq n} l_i \sin \vartheta_i}_{=: y(u)} = \underbrace{\sin \vartheta_k \sum_{i \leq n} l_i \cos \vartheta_i}_{=: x(u)}$$

1. Fall: $x(u) = y(u) = 0 \Leftrightarrow -x^2(u) - y^2(u) = f_l(u) = 0 \Leftrightarrow u \in M_l$

2. Fall: $\tan \vartheta_k \equiv \frac{y(u)}{x(u)} \forall k \leq n \Leftrightarrow \vartheta_i \in \{\vartheta_1, \vartheta_1 + \pi, \vartheta_1 - \pi\} \Leftrightarrow u_i = \pm u_j \forall i, j \Leftrightarrow u$ ist kollineare Konfiguration

Es sei $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ eine lange Teilmenge, $p_{\mathcal{J}} = (u_1, \dots, u_n)$ mit $u_i = 1$ für $i \in \mathcal{J}$ und $u_i = -1$ für $i \notin \mathcal{J}$. Dann ist $\mathcal{L}_{\mathcal{J}} = \sum_{i \leq n} l_i u_i > 0$ und es gilt $f_l(p_{\mathcal{J}}) = -\mathcal{L}_{\mathcal{J}}^2$. Die Hessesche von f_l im Punkt $p_{\mathcal{J}}$ ist

$$\frac{\partial^2 f_l}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \begin{cases} -2l_i l_j \cos(\vartheta_j - \vartheta_i) & \text{falls } i \neq j \\ 2l_i \sum_{k \neq i} l_k \underbrace{\cos(\vartheta_i - \vartheta_k)}_{=u_i u_k} & \text{falls } i = k \end{cases}.$$

Es gilt

$$l_i \sum_{k \neq i} l_k u_i u_k = l_i u_i \sum_{k \neq i} l_k u_k = l_i u_i (\mathcal{L}_{\mathcal{J}} - l_i u_i) = l_i^2 \left(\frac{l_i \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{l_i} - 1 \right) \quad \text{und} \quad d_i = \frac{u_i \mathcal{L}_{\mathcal{J}}}{l_i},$$

also folgt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_l}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \begin{cases} -l_i l_j u_i u_j = (l_i u_i)(l_j u_j)(-1) \\ l^2(d_i - 1) = (l_i u_i)(l_i u_i)(d_i - 1) \end{cases}.$$

Wir setzen nun für drei Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} l_1 u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & l_n u_n \end{pmatrix}$$

und schreiben dann

$$\frac{1}{2}H_f(p_{\mathcal{J}}) = B^T(D - A)B.$$

Es genügt zu zeigen, dass $D - A$ auf $T_{[p_{\mathcal{J}}]}W$ nicht ausgeartet mit Signatur $n - |\mathcal{J}|$ ist:

$$\det(D - A) = \prod_{i \leq n} d_i \left(1 - \sum_{j \leq n} \frac{1}{d_j}\right)$$

Ohne Einschränkung sei $\mathcal{J} = \{k, k+1, \dots, n\}$. Dann gilt $u_i = 1$ und $d_i < 0$ für $i < k$, dann gilt für die Hauptminoren von Ordnung $l < k$

$$\det(D - A)_{ll} = \prod_{i \leq n} d_i \underbrace{\left(1 - \sum_{j \leq l} \frac{1}{d_j}\right)}_{\substack{>0 \\ <0}}.$$

Für $l \geq k$ gilt

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j \leq l} \frac{1}{d_j} &= 1 - \sum_{j \leq l} \frac{l_{\mathcal{J}}}{u_j \mathcal{L}_{\mathcal{J}}} = \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left(\mathcal{L}_{\mathcal{J}} - \sum_{j \leq l} l_j u_j \right) = \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left(\sum_{i \leq n} l_i u_i - \sum_{j \leq l} l_j u_j \right) \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{J}}^{-1} \left(\underbrace{\sum_{i > l} l_i u_i}_{\geq 0} \right) \begin{cases} > 0 & \text{für } k \leq l < n \\ = 0 & \text{für } l = n \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\text{sign}(\det(D - A)_{ll}) = \begin{cases} (-1)^l & \text{für } l < k \\ (-1)^{k-1} & \text{für } k \leq l < n \end{cases}$$

und $D - A$ hat $n - |\mathcal{J}|$ negative Eigenwert, $n - k = |\mathcal{J}| - 1$ positive Eigenwerte und genau einen Eigenwert 0. Da f_l invariant unter der $\text{SO}(2)$ -Wirkung ist, gilt in $p_{\mathcal{J}}$ in Richtung der Faser $H_{f_l}(p_{\mathcal{J}}, p_{\mathcal{J}}) = \frac{d^2}{d\lambda^2} f_l(\lambda p_{\mathcal{J}}) = 0$. Damit ist H_{f_l} auf W in $[p_{\mathcal{J}}]$ nicht ausgeartet und hat Signatur $n - |\mathcal{J}|$. \square

Satz

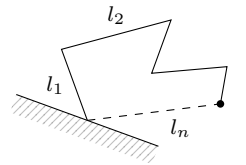
Ist $l = (l_1, \dots, l_n)$ **generisch**, das heißt gilt $\sum_{i \leq n} l_i u_i \neq 0$ für alle $u_i \in \{1, -1\}$, so ist M_l eine kompakte orientierbare $(n-3)$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Beweis

Seien $l' = (l_1, \dots, l_{n-1})$ und $f_{l'}^{-1} = (-l_n^2) = M_l$. Betrachte den „Roboterarm“ mit $(n-1)$ Segmenten und $f_{l'} : W = T^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$. Nach dem obigen Lemma hat $f_{l'}$ genau einen kritischen Wert $-a^2 \neq 0$, wenn eine kollineare Konfiguration (u_1, \dots, u_{n-1}) existiert mit $u_i \in \{1, -1\}$, so dass $-a^2 = \|\sum_{i \leq n} l_i u_i\|^2 = f_{l'}(u) \Leftrightarrow \pm a + \sum l_i u_i = 0 \Leftrightarrow (l_1, \dots, l_{n-1}, a)$ ist nicht generisch.

Das heißt $-l_n^2$ ist ein regulärer Wert von $f_{l'}$ und damit ist $f_{l'}^{-1}(-l_n^2) = M_l$ eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit in $W \cong T^{n-2}$ der Kodimension 1. \square

Was ist mit nicht-generischen Längenvektoren? Betrachte die Urbilder von kritischen Punkten.



Lemma (Morse-Lemma)

Es sei p ein nicht-entarteter kritischer Punkt von Index k einer glatten Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M . Dann existieren lokale Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)$ von M um p mit

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

Beweisskizze

Für $f(p) = 0$ schreibe

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d(f(tx^1, \dots, tx^n))}{dt} dt = \sum_{i \leq n} x^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) dt}_{=: g_i(x)}$$

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$$

wobei analog zu f für entsprechend \tilde{g}_{ij}

$$g_i(x) = \sum_{j \leq n} x^j \tilde{g}_{ij}(x)$$

$$f(x) = \sum_{i,j} x^i x^j \left(\frac{\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ji}}{2} \right) = \sum x^i x^j h_{ij}$$

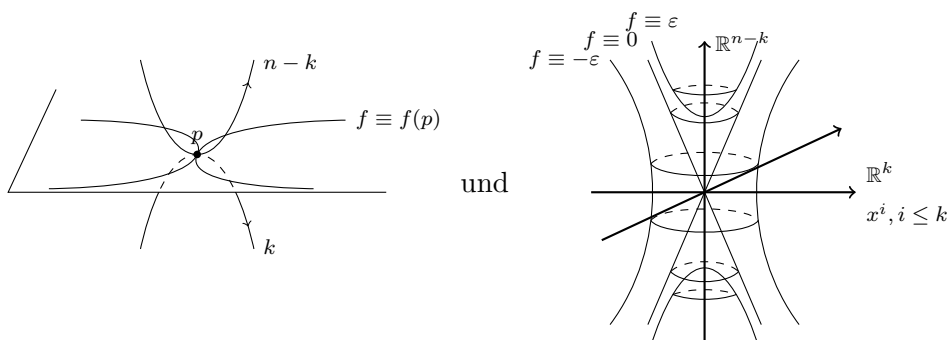
und dementsprechend

$$H_f(0) = (h_{ij})_{ij}.$$

„Verbiege“ nun die Koordinaten so, dass gilt

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \sigma \\ & & & +1 & \\ \sigma & & & & \ddots & \\ & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

Lokal hat f um p entlang k Kurven in linear unabhängige Richtungen Maxima und entsprechend $n - k$ Minima.



Allgemein gilt $f(q) = c - (x^1)^2 - \dots - (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2 = c - \sum_{i \leq k} (x^i)^2 + \sum_{i > k} (x^i)^2$, und mit $x = (x^1, \dots, x^k)$ und $y = (y^1, \dots, y^{n-k}) = (x^{k+1}, \dots, x^n)$ schreibe $f(q) = c - \|x\|^2 + \|y\|^2$. Es gilt genau dann $f(q) = c$, wenn $\|x\| = \|y\|$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder $x(q) = y(q) = 0$ gilt, oder $\zeta \in \mathbb{S}^{k-1}$, $\eta \in \mathbb{S}^{n-k-1}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, mit $x(q) = r\zeta$ und $y(q) = r\eta$. Es existiert also eine Umgebung U von p , so dass

$$f^-(c) \cap U \cong C(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}) = \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \times [0, 1] / \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \times \{0\}$$

und

$$\bar{x}(t\zeta^1, \dots, t\zeta^k, t\eta^1, \dots, t\eta^{n-k}) \leftarrow [\zeta, \eta, t] \quad (\square)$$

Eine weitere Folgerung des Morse-Lemmas ist, dass nicht-entartete kritische Punkte stets isoliert sind. Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$ ist genau dann **ausgewogen** bezüglich eines Längenvektors (l_1, \dots, l_n) , das heißt $\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i = \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_i$, wenn entweder $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ oder sein Komplement $\mathcal{J} = \mathcal{J}^c$ eine lange Teilmenge in $\{1, \dots, n-1\}$ bezüglich $l' = (l_1, \dots, l_{n-1})$ ist und $f_{l'} = (p_{\mathcal{J}}) = -l_n^2$.

In einer Umgebung eines kritischen Punktes ist $f_{l'}^-(-l_n^2)$ homöomorph zu einem Kegel über dem Produkt der Spären der Dimensionen

$$\text{ind}(p_{\mathcal{I}}) - 1 = (n-1) - |\mathcal{J}| - 1 = n - |\mathcal{J}| - 2$$

und

$$(n-1) - \text{ind}(p_{\mathcal{J}}) - 1 = |\mathcal{J}| - 2.$$

Damit gilt der folgende Satz:

Satz

Ist $l = (l_1, \dots, l_n)$ ein nicht-generischer Längenvektor, so ist M_l kompakt und bis auf endlich viele Punkte eine $(n-3)$ -Mannigfaltigkeit. Eine Umgebung jeder dieser unendlich vielen Singularitäten ist homöomorph zu

$$C(\mathbb{S}^{n-|\mathcal{J}|-2} \times \mathbb{S}^{|\mathcal{J}|-2}),$$

wobei \mathcal{J} eine bezüglich l ausgeartete Teilmenge ist.

Der Diffeomorphietyp von M_l hängt nicht von der Reihenfolge der Längen l_1, \dots, l_n ab, das heißt $\sigma \in S_n$ definiert einen Diffeomorphismus von M_l auf $M_{\sigma(l)}$.

$$[M_l \hookrightarrow \mathbb{R}^n]$$

Satz (Ferber-Schütz)

Es sei $l = (l_1, \dots, l_n)$ ein geordneter Längenvektor, das heißt $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n > 0$, und es bezeichne σ_k (beziehungsweise μ_k) die Anzahl der kurzen (beziehungsweise ausgewogenen) Teilmengen $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|\mathcal{J}| = k+1$ und $1 \in \mathcal{J}$. Dann ist $H_k(M_l; \mathbb{Z})$ frei abelsch vom Rang $\sigma_k + \mu_k + \sigma_{(n-3)} - k$, wobei $n-3 = \dim M_l$.

Beispiel

Sei $l = (3, 2, 2, 1, 1)$, $n = 5$ und $\dim M_l = 2$. Es existieren keine ausgewogenen Teilmengen, das heißt $\mu_k = 0$.

$$\sigma_0 = \#_{1 \in \mathcal{J}, |\mathcal{J}|=1} \text{ kurze } \mathcal{J} = \#\{\{1\}\} = 1$$

$$\sigma_1 = \#_{1 \in \mathcal{J}, |\mathcal{J}|=2} \text{ kurze } \mathcal{J} = \#\{\{1, 4\}, \{1, 5\}\} = 2$$

$$\sigma_2 = \#_{1 \in \mathcal{J}, |\mathcal{J}|=3} \text{ kurze } \mathcal{J} = 0$$

Damit:

$$\underbrace{\chi^{(M_l)}}_{=2-2g} = \sum (-1)^k \beta_k = (1 + 0 + 0) - (2 + 0 + 2) + (0 + 0 + 1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Also:



3 Walkers Vermutung

Welche Invarianten von M_l bestimmen den Längenvektor von l (bis auf geeignete Äquivalenz)? Für $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ und $t \in \mathbb{R}_{> 0}$ gilt $M_l \cong M_{tl}$. Zur Definition der geforderten Äquivalenz betrachtet man zunächst Längenvektoren im Inneren $A \subset \Delta^{n-1} - \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum l_i = 1\}$ des Standardsimplex.

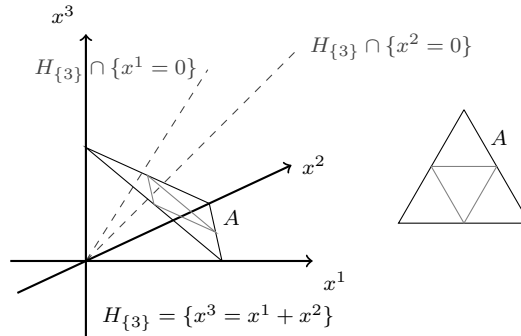
Weiter zerlegt man A wie folgt in Teilmengen niedrigerer Dimension. Für jedes $\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ definiert

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} l_i = \sum_{i \notin \mathcal{J}} l_i$$

eine Hyperebene $H_{\mathcal{J}}$. Es bezeichnen $A^{(k)} \subset A$ die Menge der Längenvektoren l , welche in mindestens $(n-1) - k$ solcher Hyperebenen $H_{\mathcal{J}}$ enthalten sind, das heißt

$$A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \subset A^{(n-1)} \subsetneq A.$$

Ein **k -Stratum** ist eine Zusammenhangskomponente von $A^{(k)} \setminus A^{(k-1)}$. Zwei Längenvektoren liegen in demselben Stratum, falls sie die gleichen kurzen Teilmengen besitzen.



Maximale Strata, Zusammenhangskomponenten von $A^{(n-1)} \setminus A^{(n-2)}$, heißen **Kammern**. Betrachte die Involution (Spiegelung an der x -Achse)

$$\tau : M_l \rightarrow M_l \quad [u_1, \dots, u_n] \mapsto [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n]$$

Ist n ein Fixpunkt von τ , so gilt $u_i \in \mathbb{R}$, $u_i = \pm 1$ für alle $i \leq n$, und somit ist jeder Fixpunkt eine kollineare Konfiguration. Insbesondere besitzt τ für generische l keine Fixpunkte.

Satz (Hausmann, Rodriguez '04)

Falls l und l' in denselben Straten liegen, so sind M_l und $M_{l'}$ τ -äquivariant diffeomorph.

Walkers Vermutung

Es seien $l, l' \in A$ generische Längenvektoren. Falls die ganzzahligen Kohomologieringe von M_l und $M_{l'}$ graduert isomorph sind, so existiert ein $\sigma \in S_n$ so, dass l und $\sigma(l')$ in derselben Kammer liegen.

Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)

Es seien $l, l' \in A$ geordnete Längenvektoren. Falls dann ein Isomorphismus graduierter Ringe von $H^*(M_l; \mathbb{Z})$ nach $H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$ existiert, welcher mit τ^* kommutiert, so liegen l und l' in demselben Stratum. Insbesondere sind dann M_l und $M_{l'}$ τ -äquivalent diffeomorph.

Betrachte den Modulraum N_l der geschlossenen Polygone in \mathbb{R}^3 mit Kantenlängen l_1, \dots, l_n , das heißt

$$N_l = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{S}^2 \times \dots \times \mathbb{S}^2 \mid \sum l_i u_i = 0\} / \text{SO}(3)$$

Hier lässt sich zeigen, dass für generische l N_l eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2(n-3)$ ist.

Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)

Es sei $n \neq 4$ und es seien $l, l' \in A$ generische geordnete Längenvektoren. Falls $H^*(M_l; \mathbb{Z})$ und $H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$ isomorph (siehe oben) sind, so liegen l und l' in derselben Kammer.

Für $n = 4$ ist die Aussage falsch: Die Längenvektoren $l = (2, 1, 1, 1)$ und $l' = (2, 2, 2, 1)$ liegen in unterschiedlichen Kammern. Es gilt

$$M_l \cong \mathbb{S}' \quad M_{l'} \cong \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \quad N_l \cong \mathbb{S}^2 \cong N_{l'}$$

Ein Längenvektor heißt **normal**, falls gilt

$$\bigcap_{\substack{|\mathcal{J}|=3 \\ \text{lang und ausgew.}}} \mathcal{J} \neq \emptyset.$$

Eine Kammer heißt **normal**, wenn sie einen normalen Längenvektor enthält; damit sind alle darin normal.

Satz (Faber, Hausmann, Schütz '07)

Es seien l und l' geordnete Längenvektoren und es gäbe einen Isomorphismus $H^*(M_l; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M_{l'}; \mathbb{Z})$. Falls l normal ist, so ist l' normal und l und l' liegen in denselben Straten.

Dieser Satz liefert uns

- 1) Die Anzahl der S_n -Bahnen von normalen Kammern ist höchstens so groß wie die Anzahl der Diffeomorphie Typen von M_l für generische l . Diese Anzahl wiederum ist höchstens so groß wie die Anzahl der S_n -Bahnen von Kammern.

$$\# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{norm. Kammern} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} \text{Diffeom.-Typen} \\ \text{von } M_l, l \text{ generisch} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{v. Kammern} \end{matrix}$$

- 2) Die Anzahl der S_n -Bahnen von normalen Strata ist höchstens so groß wie die Anzahl der Diffeomorphie Typen von M_l . Diese Anzahl wiederum ist höchstens so groß wie die Anzahl der S_n -Bahnen von Strata.

$$\# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{norm. Strata} \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} \text{Diffeom.-Typen} \\ \text{von } M_l \end{matrix} \leq \# \begin{matrix} S_n\text{-Bahnen} \\ \text{v. Strata} \end{matrix}$$

Für große n existieren wenige nicht-normale Strata: Es sei $\mathcal{N}_n \subseteq A^{(n-1)}$ die Vereinigung aller normalen Strata. Dann gilt

$$\frac{\text{vol}(A^{(n-1)} \setminus \mathcal{N}_n)}{\text{vol}(A^{(n-1)})} \leq \frac{n^6}{2^n}.$$