

# 11. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

In diesem Paragraphen sei  $X$  stets ein Vektorraum (VR) über  $\mathbb{K}$ , wobei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## Definition

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine **Norm auf  $X$**  :  $\Longleftrightarrow$

- (i)  $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X; \|x\| = 0 \iff x = 0$
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecks-Ungleichung)

In diesem Fall heißt  $(X, \|\cdot\|)$  ein **normierter Raum** (NR). Meist schreibt man nur  $X$  statt  $(X, \|\cdot\|)$ .

## Beispiele:

- (1)  $X = \mathbb{K}^n$ , für  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :  $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Analysis II  $\implies (X, \|\cdot\|)$  ist ein normierter Raum.
- (2)  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sei beschränkt und abgeschlossen.  $X = C(A, \mathbb{R}^n)$ ;  $\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\|, x \in A\}$  ( $f \in X$ ). Dann ist  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  ein normierter Raum.
- (3)  $X = L(\mathbb{R}^n)$ . Für  $f \in L(\mathbb{R})$ :  $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$ ;  $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ ; Analysis II 16.1  $\implies \|\cdot\|_1$  hat die Eigenschaft (ii) und (iii) einer Norm,  $\|f\|_1 \geq 0$  aber  $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n$ .  
Es ist üblich, zwei Funktionen  $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$  als gleich zu betrachten, wenn  $f = g$  fast überall. In diesem Sinne:  $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  ist ein normierter Raum.

Für den Rest des Paragraphen sei  $(X, \|\cdot\|)$  stets ein normierter Raum. Wie in Analysis II zeigt man:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \ \forall x, y \in X$$

$\|x - y\|$  heißt Abstand von  $x$  und  $y$ .

## Definition

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X$

- (1)  $(x_n)$  heißt konvergent :  $\Longleftrightarrow \exists x \in X : \|x_n - x\| = 0 \ (n \rightarrow \infty)$   
In diesem Fall ist  $x$  eindeutig bestimmt (Beweis wie in  $\mathbb{R}^n$ ) und heißt der Grenzwert (GW) oder Limes von  $(x_n)$ . Man schreibt:

$$x_n \rightarrow x \ (x \rightarrow \infty) \text{ oder } x_n \rightarrow \infty \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  bedeutet die Folge  $(s_n)$  wobei  $s_n := x_1 + \dots + x_n \ (n \in \mathbb{N})$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  heißt konvergent :  $\Longleftrightarrow (s_n)$  ist konvergent.  
 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  heißt divergent :  $\Longleftrightarrow (s_n)$  ist divergent.  
Im Konvergenzfall:  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Wie üblich zeigt man: Aus  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$  folgt:

$$x_n + y_n = x + y$$

$$\alpha x_n \rightarrow \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

### Definition

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X$  und  $A \subseteq X$

- (1)  $A$  heißt **konvex** :  $\iff$  aus  $x, y \in A$  und  $t \in [0, 1]$  folgt stets:  $x + t(y - x) \in A$
- (2)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 : \|x\| \leq c \quad \forall x \in A$
- (3)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus  $A$  gehört zu  $A$
- (4)  $A$  heißt **kompakt** :  $\iff$  jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu  $A$  gehört.
- (5)  $(x_n)$  heißt eine Cauchyfolge (CF) in  $X$  :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

**Bemerkung:** (1) Wie in Analysis II:  $(x_n)$  konvergiert  $\implies (x_n)$  ist eine Cauchyfolge in  $X$

(2) Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $A$  ist kompakt :  $\iff A$  ist beschränkt und abgeschlossen (Analysis II, 2.2)

(3)  $A$  kompakt  $\implies A$  abgeschlossen

(4)  $X = C[a, b]$  mit  $\|\cdot\|_\infty$ . Sei  $(f_n)$  eine Folge in  $X$  und  $f \in X$ . Dann  $(f_n) \rightarrow f$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty \iff (f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  (Analysis I, Übungsblatt 10, Aufgabe 37)

### Beispiel

$X = C[-1, 1]$  mit  $\|\cdot\|_2 = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ .

$$f_n = \begin{cases} -1, & 1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

In der Übung:  $(f_n)$  ist eine Cauchyfolge in  $X$ , aber es existiert kein  $f \in X : f_n \rightarrow f$  (bezüglich  $\|\cdot\|_2$ )

### Definition

Ein normierter Raum  $X$  heißt **vollständig** oder ein **Banachraum** (BR) :  $\iff$  jede Cauchyfolge in  $X$  ist konvergent.

### Beispiele:

- (1) Sei  $X$  und  $\|\cdot\|_2$  wie im obigen Beispiel. Dann ist  $X$  kein Banachraum.
- (2)  $\mathbb{R}^n$  ist mit der üblichen Norm ein Banachraum (Siehe Analysis II)
- (3)  $C[a, b]$  ist mit  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum (Analysis I, Übungsblatt 10, Aufgabe 37)
- (4)  $L(\mathbb{R}^n)$  ist mit  $\|\cdot\|_1$  ein Banachraum (Analysis II, 18.1)

### Definition

$X$  sei ein normierter Raum,  $x_0 \in X$  und  $\epsilon > 0$ .

- (1)  $U_\epsilon(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$  heißt  $\epsilon$  - Umgebung von  $U$
- (2)  $D \subseteq X$  heißt offen  $:\Leftrightarrow \forall x \in D \exists \epsilon = \epsilon(x) > 0 : U_\epsilon(x) \subseteq D$

Wie in Analysis 2 zeigt man:

### Satz 11.1 (Verweis auf Analysis 2.3(3))

- (1)  $D$  ist offen  $:\Leftrightarrow X \setminus D$  ist abgeschlossen.
- (2) Ist  $A \subseteq X$  kompakt, so gilt die Aussage des Satzes 2.3(3) aus Analysis 2 wörtlich

### Definition (Operator)

$X$  sei ein normierter Raum,  $A \subseteq X$  und  $T : A \rightarrow X$  eine Abbildung.  $T$  heißt auch ein **Operator** auf  $A$ , man schreibt meist  $T_x$  statt  $T(x)$  ( $x \in A$ ).

- (1)  $x^*$  heißt ein **Fixpunkt** von  $T : \Leftrightarrow T_{x^*} = x^*$ .
- (2)  $T$  heißt in  $x_0 \in A$  stetig  $:\Leftrightarrow$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x_0 : T_{x_n} \rightarrow T_{x_0}$ .  
(Übung:  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|T_x - T_0\| < \epsilon \forall x \in U_\delta(x_0) \cap A$ )
- (3)  $T$  heißt stetig auf  $A : \Leftrightarrow T$  ist stetig in jedem  $x \in A$ .
- (4)  $T$  heißt auf  $A$  **kontrahierend**  $:\Leftrightarrow \exists L \in [0, 1) : \|T_x - T_y\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in A$

### Beispiel (Wichtig!)

$x = C[a, b]$  ist mit  $\|\cdot\|_\infty$  ein Banachraum. Definiere  $T : X \rightarrow X$  durch  $(T_y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$  ( $x \in [a, b]$ ) wobei  $x_0 \in [a, b]$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. ( $T_y \in C^1[a, b]$ )

Behauptung:  $T$  ist stetig auf  $X$ .

### Beweis

Sei  $z_0 \in X$ . Sei  $z \in X$  mit  $\|z - z_0\| \leq 1$ .  $\forall t \in [a, b] : |z(t)| \leq \|z\|_\infty = \|z - z_0 + z_0\|_\infty \leq \|z - z_0\|_\infty + \|z_0\|_\infty \leq 1 + \|z_0\|_\infty =: \gamma$

$R := [a, b] \times [-\gamma, \gamma]$ . D.h.  $(t, z(t)) \in R \forall t \in [a, b] \forall z \in X$  mit  $\|z - z_0\|_\infty \leq 1$ .

$f$  ist glm. stetig auf  $R$  (da  $R$  kompakt). Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : |f(\alpha) - f(\beta)| < \epsilon \forall \alpha, \beta \in R$  mit  $\|\alpha - \beta\| < \delta$  und  $\delta \leq 1$ .

Sei  $z \in X$  mit  $\|z - z_0\|_\infty < \delta \leq 1$ . Dann:  $\|(t, z(t)) - (t, z_0(t))\| = \|(0, z(t) - z_0(t))\| = |z(t) - z_0(t)| \leq \|z - z_0\|_\infty < \delta \forall t \in [a, b]$

$$\implies |f(t, z(t)) - f(t, z_0(t))| < \epsilon \forall t \in [a, b]$$

$$\implies |(T_z)(x) - (T_{z_0})(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(t, z(t)) - f(t, z_0(t))) dt \right| \leq \epsilon |x - x_0| \leq (b - a) \forall x \in [a, b]$$

$$\implies \|T_z - T_{z_0}\|_\infty \leq \epsilon(b - a) \implies T \text{ ist stetig in } z_0. \quad \blacksquare$$

**Satz 11.2 (Fixpunktsatz von Banach)**

$X$  sei ein Banachraum.  $A \subseteq X$  sei abgeschlossen,  $T : A \rightarrow X$  sei kontrahierend, also  $\exists L \in [0, 1) : \|T_x - T_y\| \leq L\|x - y\| \forall x, y \in A$  und es sei  $T(A) \subseteq A$ . Dann hat  $T$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in A$ .

Sei  $x_0 \in A$  beliebig und  $x_{n+1} := T_{x_n}$  ( $n \geq 0$ ). Dann:

$$(i) \quad x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$(ii) \quad x_n \rightarrow x^*$$

$$(iii) \quad \|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_0 - x_1\| \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

$(x_n)$  heißt **Folge der sukzessiven Approximation**.

**Beweis**

Sei  $x_0 \in A$ . Definiere  $x_{n+1} := T_{x_n}$  ( $n \geq 0$ )  $\implies (i)$ .

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T_{x_k} - T_{x_{k-1}}\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\| \quad (\forall k \geq 1)$$

$$\text{Induktiv: } \|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \|x_k - x_0\| \quad \forall k \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Seien } m, n \in \mathbb{N}, m > n. \quad \|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (L^{m-1} + L^{m-2} + \cdots + L^n) \|x_1 - x_0\| = \\ &\underbrace{L^n (1 + L + \cdots + L^{m-1-n})}_{\leq \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \frac{1}{1-L}} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| (*) \end{aligned}$$

$(*) \implies (x_n)$  ist eine Cauchy-Folge in  $X$ .  $X$  Banachraum  $\implies \exists x^* \in X : x_n \rightarrow x^*$ .  $(iii)$  folgt aus  $(*)$  mit  $m \rightarrow \infty$

$A$  abgeschlossen  $\implies x^* \in A$

$$\begin{aligned} \|T_{x^*} - x^*\| &= \|T_{x^*} - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*\| \leq \underbrace{\|T_{x^*} - x_{n+1}\|}_{=T_{x_n}} + \|x_{n+1} - x^*\| \leq \underbrace{L\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\|}_{\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)} \implies \\ \|T_{x^*} - x^*\| &= 0 \implies T_{x^*} = x^* \end{aligned}$$

Sei  $z \in A$  und  $T_z = z$ .  $\|x^* - z\| = \|T_{x^*} - T_z\| \leq L\|x^* - z\|$ ; wäre  $\|x^* - z\| \neq 0 \implies L \geq 1$ , Wid., also  $x^* = z$ . ■

Ohne Beweis:

**Satz 11.3 (Fixpunktsatz von Schauder)**

$X$  sei ein normierter Raum,  $A \subseteq X$  sei konvex und kompakt und  $T : A \rightarrow X$  sei stetig und  $T(A) \subseteq A$ . Dann hat  $T$  einen Fixpunkt (in  $A$ ).

**Satz 11.4 (Konvergente Teilfolgen von Funktionen)**

Sei  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 0$  und  $(y_n)$  eine Folge in  $C(I)$  mit:  $y_n(x_0) = y_0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $|y_n(x) - y_n(\bar{x})| \leq M|x - \bar{x}| \forall n \in \mathbb{N} \forall x, \bar{x} \in I$ . Dann enthält  $(y_n)$  eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Beweis**

$\mathcal{F} := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ .  $\mathcal{F}$  ist auf  $I$  gleichstetig.  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I : |y_n(x)| = |y_n(x) - y_0 + y_0| \leq |y_n(x) - y_0| + |y_0| = |y_n(x) - y_n(x_0)| + |y_0| \leq M|x - x_0| + |y_0| \leq M(b - a) \cdot |y_0| \implies \mathcal{F}$  ist gleichmäßig beschränkt. 1  $\implies$  Behauptung. ■

**Satz 11.5 (Konvexe und Kompakte Teilmenge)**

$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 0$ ,

$A := \{y \in C(I) : y(x_0) = y_0 \text{ und } |y(x) - y(\bar{x})| \leq M|x - \bar{x}| \forall x, \bar{x} \in I\}$

Dann ist  $A$  eine nicht leere, konvexe und kompakte Teilmenge des Banachraumes  $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Beweis**

$$A \neq \emptyset \quad (y(x) \equiv y_0 \implies y \in A)$$

Übung:  $A$  ist konvex.

Sei  $(y_n)$  ein Folge in  $A$ . 11.4  $\implies (y_n)$  enthält eine auf  $I$  gleichmäßig konvergente Teilfolge

$$(y_{n_k}), y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k}(x) \quad (x \in I) \xrightarrow{\text{AI}} y \in C(I)$$

$$\text{z.zg: } y \in A. \quad y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k}(x_0) = y_0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x, \bar{x} \in I : |y_{n_k}(x) - y_{n_k}(\bar{x})| \leq M|x - \bar{x}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |y(x) - y(\bar{x})| \leq M|x - \bar{x}|. \text{ Also: } y \in A \blacksquare$$

