

## 4. Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem §en sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion.

### Definition

- (1)  $f$  heißt in  $z_0 \in D$  **komplex differenzierbar** (komplex differenzierbar) :  $\iff$  es ex.  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h})$ . I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die Ableitung von  $f$  in  $z_0$  und wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet.
- (2)  $f$  heißt auf  $D$  **holomorph** (analytisch) :  $\iff f$  ist zu jedem  $z \in D$  differenzierbar.
- (3)  $H(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$ .

### Beispiele:

- (1)  $D = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, f(z) := z^n$ .  
Wie in  $\mathbb{R}$  zeigt man:  $f \in H(\mathbb{C})$  und  $f'(z) = nz^{n-1} \forall z \in \mathbb{C}$ .
- (2)  $D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
 $Q(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{z_0 + h} - \bar{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ ; z.B. ist  $Q(h) = 1$ , falls  $h \in \mathbb{R}$  und  $Q(h) = -1$ , falls  $h \in i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$ . Also ex.  $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h)$  **nicht**.  $f$  ist also in **keinem**  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

Sei  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$ . Fasst man  $D$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  auf, und schreibt man  $z = (x, y)$  statt  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), so ist  $f = (u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine vektorwertige Funktion.  
 $f(z) = u(z) + iv(z) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ .

**Erinnerung (Ana II):**  $f$  heißt im  $(x_0, y_0) \in D$  reell differenzierbar :  $\iff$  es ex. reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

### Beispiel

$D = \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ , reelle Auffassung:  $f(x, y) = (x, -y)$ .  $f$  ist in **jedem**  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  reell differenzierbar, aber in **keinem**  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

### Satz 4.1

Sei  $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ ; Sei  $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0 \in D$  ( $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ).

$f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar. :  $\iff f$  ist in  $(x_0, y_0)$  reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD):

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

Ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar, so ist  $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$

### Beweis

Sei  $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  und  $s = h + ik \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $\alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$ )

$f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und  $f'(z_0) = a \iff \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0+s) - f(z_0) - as}{|s|} = 0$

$$\begin{aligned} \xLeftrightarrow{\text{Zerlegen}} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} & \left( \underbrace{\frac{u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h + \beta k)}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} \right. \\ & \left. + i \underbrace{\frac{v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) - \beta h - \alpha k}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \varphi_1(h,k) \rightarrow 0, \varphi_2(h,k) \rightarrow 0 ((h,k) \rightarrow (0,0))$$

$$\iff u \text{ und } v \text{ sind in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar, } u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta) \text{ und } v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$$

$$\iff f \text{ ist in } (x_0, y_0) \text{ reell differenzierbar und es gelten die CRD. Ist } f \text{ in } z_0 \text{ komplex differenzierbar} \implies f'(z_0) = a = \alpha + i\beta = u_x(z_0) + iv_x(z_0) \quad \blacksquare$$

### Folgerung 4.2

Es sei  $f \in H(D)$

$$(1) \quad f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(2) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(3) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{Ist } D \text{ ein Gebiet so gilt:}$$

$$(i) \quad f \text{ ist auf } D \text{ konstant} \iff f' = 0 \text{ auf } D.$$

$$(ii) \quad \text{Ist } f(D) \subseteq \mathbb{R} \text{ oder } \subseteq i\mathbb{R}, \text{ so ist } f \text{ auf } D \text{ konstant.}$$

### Beweis

$u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ .

$$(1) \quad " \implies " \text{ klar!}$$

$$" \Leftarrow " \quad 4.1 \implies u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Ana II} \implies u, v \text{ sind auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(2) \quad f(D) \subseteq \mathbb{R} \implies v = 0 \text{ auf } D \implies v_x = v_y = 0 \text{ auf } D \xrightarrow{\text{CRD}} u_x = u_y = 0 \text{ auf } D. \text{ Weiter wie bei (1).}$$

$$(3) \quad \text{Sei } f(D) \subseteq i\mathbb{R}, g := if \implies g \in H(D), g(D) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(2)} g \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.} \implies f \text{ ist auf } D \text{ lokal konstant.}$$

$$(4) \quad \text{folgt aus (1),(2),(3) und 3.4} \quad \blacksquare$$

**Satz 4.3**

Sei  $z_0 \in D$  und  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar.

(1)  $f$  ist in  $z_0$  stetig.

(2) Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Funktion und  $g$  sei komplex differenzierbar in  $z_0$

(i) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ist  $\alpha f + \beta g$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$

(ii)  $fg$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(iii) Ist  $g(z_0) \neq 0$ , so ex. ein  $\delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq D, g(z) \neq 0 \forall z \in U_\delta(z_0)$ ,  
 $\frac{f}{g} : U_\delta(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar und

$$\frac{f'}{g}(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(3) **Kettenregel:** Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, E$  offen,  $f(D) \subseteq E$  und  $h : E \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $f(z_0)$ . Dann ist  $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  komplex differenzierbar in  $z_0$  und

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

**Definition**

Sei  $f \in H(D)$  und  $z_0 \in D$ .  $f$  heißt in  $z_0$  **zweimal komplex differenzierbar** :  $\iff f'$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar. I.d. Fall:  $f''(z_0) := (f')'(z_0)$  (2. Ableitung von  $f$  in  $z_0$ ). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von  $f$  in  $z_0$ , bzw. auf  $D$ . Übliche Bezeichnungen:  $f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(0)} := f$

