

# 13. Umordnungen und Produkte von Reihen

## Definition (Umordnung)

Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  *bijektiv*. Setzt man  $b_n := a_{\phi(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), so heißt  $(b_n)$   $(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$  eine **Umordnung** von  $(a_n)$   $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ .

## Beispiel

$(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, a_6, a_8)$  ist eine Umordnung von  $(a_n)$  (aber *keine* Teilfolge!).

## Hilfssatz

- (1) Sei  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und  $m_0 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $\phi(n) \geq m_0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $(b_n)$  ist eine Umordnung von  $(a_n) \iff (a_n)$  ist eine Umordnung von  $(b_n)$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

## Beweis

- (1)  $A := \{n \in \mathbb{N} : \phi(n) < m_0\}$ . z.z.:  $A$  ist endlich.

Annahme:  $A$  ist unendlich, etwa  $A = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ;  $\phi$  bijektiv  
 $\implies \phi(A)$  ist unendlich.

$n \in \phi(A) \implies n = \phi(n_k), n_k \in A \implies n < m_0 \implies \phi(A) \subseteq \{1, 2, \dots, m_0 - 1\}$ ,  
 Widerspruch!

- (2) Es sei  $b_n = a_{\phi(n)}$  und  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv,  $\phi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv.  $b_{\phi^{-1}(n)} = a_{\phi(\phi^{-1}(n))} = a_n \implies (a_n)$  ist eine Umordnung von  $(b_n)$ . ■

## Satz 13.1 (Riemannscher Umordnungssatz)

$(b_n)$  sei eine Umordnung von  $(a_n)$ .

- (1) Ist  $(a_n)$  konvergent, dann gilt:  $(b_n)$  ist konvergent und  $\lim b_n = \lim a_n$ .
- (2) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *absolut* konvergent, dann gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist *absolut* konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- (3) **Riemannscher Umordnungssatz:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent aber *nicht* absolut konvergent.
  - (i) Es gibt divergente Umordnungen von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
  - (ii) Ist  $s \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit Reihenwert  $s$ .

## Beweis

Für (1) und (2) sei  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und  $b_n = a_{\phi(n)}$ .

### 13. Umordnungen und Produkte von Reihen

(1) Sei  $a := \lim a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists m_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq m_0$ .

Aus Hilfssatz (1) folgt:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \phi(n) \geq m_0 \forall n \geq n_0$ . Für  $n \geq n_0 : |b_n - a| = |a_{\phi(n)} - a| < \varepsilon$ .

(2) Wir schreiben  $\sum$  statt  $\sum_{n=1}^{\infty}$ .

Fall 1:  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \sigma_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n. a_n \geq 0 \implies (s_n)$  ist wachsend, sei  $s := \lim s_n (= \sum a_n)$ . Es gilt:  $s_n \leq s \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $j := \max\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\}$ . Dann:  $\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\} \subseteq \{1, 2, \dots, j\} \implies \sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \dots + a_{\phi(n)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_j = s_j \leq s \implies (\sigma_n)$  ist wachsend und beschränkt.

6.3  $\implies (\sigma_n)$  ist konvergent. Weiter:  $\lim \sigma_n \leq s$ , d.h.  $\sum b_n \leq \sum a_n$ . Vertauschung der Rollen von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  liefert:  $\sum a_n \leq \sum b_n$ .

Fall 2, der allgemeine Fall:  $\sum |b_n|$  ist eine Umordnung von  $\sum |a_n| \xrightarrow{\text{Fall 1}} \sum |b_n|$  konvergiert und  $\sum |b_n| = \sum |a_n|$ . Noch z.z.:  $\sum b_n = \sum a_n$ .

$\alpha_n := a_n + |a_n|, \beta_n := b_n + |b_n|$ . Dann:  $\alpha_n, \beta_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\sum \alpha_n, \sum \beta_n$  konvergieren,  $\sum \beta_n$  ist eine Umordnung von  $\sum \alpha_n$ . Fall 1  $\implies \sum \beta_n = \sum \alpha_n$ .

Dann:  $\sum a_n = \sum (\alpha_n - |a_n|) = \sum \alpha_n - \sum |a_n| = \sum \beta_n - \sum |b_n| = \sum (\beta_n - |b_n|) = \sum b_n$ .

(3) ohne Beweis. ■

**Vereinbarung:** Für den Rest des Paragraphen seien gegeben:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . Wir schreiben  $\sum$  statt  $\sum_{n=0}^{\infty}$ . Weiter sei, falls  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergent,  $s := (\sum a_n)(\sum b_n)$ .

#### Definition

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$  heißt eine Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n : \iff \{p_0, p_1, p_2, \dots\} = \{a_j b_k : j = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots\}$  und jedes  $a_j b_k$  kommt in  $(p_n)_{n=0}^{\infty}$  genau einmal vor.

#### Satz 13.2 (Alle Produktreihen sind Umordnungen voneinander)

Sind  $\sum p_n$  und  $\sum q_n$  zwei Produktreihen von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , so ist  $\sum p_n$  eine Umordnung von  $\sum q_n$ .

#### Beweis

Übung. ■

#### Satz 13.3 (Absolute Konvergenz geht auf Produktreihen über)

Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, und ist  $\sum p_n$  eine Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , dann ist  $\sum p_n$  absolut konvergent und  $\sum p_n = s$ .

### Beweis

$\sigma_n = |p_0| + |p_1| + \dots + |p_n|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann existiert ein  $m \in \mathbb{N} : \sigma_n \leq (\sum_{k=0}^m |a_k|)(\sum_{k=0}^m |b_k|)$ .

$\alpha_k := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|$ ,  $(\alpha_k)$  konvergiert und  $\alpha_k \rightarrow \sum |a_k|$ ,  $(\alpha_k)$  ist wachsend  $\implies \alpha_k \leq \sum |a_n| \implies 0 \leq \sigma_n \leq (\sum |a_n|)(\sum |b_n|) \forall n \in \mathbb{N}_0 \implies (\sigma_n)$  ist beschränkt (und wachsend).

6.3  $\implies (\sigma_n)$  konvergiert  $\implies \sum p_n$  ist absolut konvergent. Noch z.z.:  $\sum p_n = s$ .

Dazu betrachten wir eine spezielle Produktreihe  $\sum q_n$  („Anordnung nach Quadraten“):

$$q_0 := a_0 b_0, \quad q_1 := a_0 b_1, \quad q_2 := a_1 b_1, \quad q_3 := a_1 b_0, \quad q_4 := a_0 b_2, \quad q_5 := a_1 b_2, \quad \dots$$

$$s_n := q_0 + q_1 + \dots + q_n$$

Nach dem schon Bewiesenen konvergiert  $\sum q_n$ , also auch  $(s_n)$ .

$$\text{Nachrechnen: } \underbrace{(a_0 + a_1 + \dots + a_n)}_{\rightarrow \sum a_n} \underbrace{(b_0 + b_1 + \dots + b_n)}_{\rightarrow \sum b_n} = s_{n^2+2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} s = \sum q_n.$$

Aus 13.1 und 13.2 folgt:  $\sum p_n = \sum a_n \sum b_n = s$ . ■

### Definition (Cauchyprodukt)

Setze  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), also:  $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  heißt **Cauchyprodukt** von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ .

### Satz 13.4 (Cauchyprodukt absolut konvergierender Folgen konvergiert)

Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, so konvergiert ihr Cauchyprodukt  $\sum c_n$  und  $\sum c_n = s$ .

### Beweis

Sei  $\sum p_n$  die Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , die durch „Anordnung nach Diagonalen“ entsteht. ( $p_0 = a_0 b_0, p_1 = a_0 b_1, p_2 = a_1 b_0, p_3 = a_0 b_2, p_4 = a_1 b_1, p_5 = a_0 b_3, \dots$ ). Dann:  $c_0 = a_0 b_0 = p_0, c_1 = p_1 + p_2, c_2 = p_3 + p_4 + p_5$ .  $\sum c_n$  entsteht also aus  $\sum p_n$  durch Setzen vom Klammern. 13.3  $\implies \sum p_n$  konvergiert absolut und  $\sum p_n = s \xrightarrow{12.6}$  Behauptung. ■

### Beispiel

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  ist  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  absolut konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . Für  $|x| < 1$ :  $\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , wobei  $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n x^n = (n+1)x^n$ .  
 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

### Satz 13.5 ( $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$ )

Erinnerung:  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

$$(1) \quad E(x+y) = E(x)E(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad \text{allgemein: } E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E(x_1)E(x_2) \cdots E(x_n) \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad E(x) > 1 \quad \forall x > 0.$$

$$(3) \quad E(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, E(-x) = \frac{1}{E(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(4) \quad \text{Aus } x < y \text{ folgt: } E(x) < E(y).$$

$$(5) \quad E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

**Beweis**

$$(1) \quad E(x)E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

$$\implies E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

$$(2) \quad x > 0 : E(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \dots}_{>0} > 1.$$

$$(3) \quad 1 = E(0) = E(x + (-x)) \stackrel{(1)}{=} E(x)E(-x). \text{ Wir wissen: } E(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

$$\text{Sei } x < 0 \implies -x > 0 \implies E(-x) > 0 \implies E(x) > 0.$$

$$(4) \quad \text{Sei } x < y \implies y - x > 0 \stackrel{(2)}{\implies} 1 < E(y - x) \stackrel{(1)}{=} E(y)E(-x) \stackrel{(3)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \implies E(x) < E(y).$$

$$(5) \quad \text{Seien } n, m \in \mathbb{N}. E(n) = E(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}}) \stackrel{(1)}{=} E(1)^n = e^n.$$

$$e = E(1) = E(n \cdot \frac{1}{n}) = E(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ mal}}) = E(\frac{1}{n})^n \implies E(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}} (= \sqrt[n]{e}).$$

$$E(\frac{m}{n}) = E(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ mal}}) \stackrel{(1)}{=} E(\frac{1}{n})^m = (e^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}}. \text{ Also: } E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ mit } r \geq 0.$$

$$\text{Sei } r \in \mathbb{Q} \text{ und } r < 0. \text{ Dann: } -r > 0 \implies E(-r) = e^{-r} \stackrel{(3)}{\implies} E(r) = e^r. \quad \blacksquare$$

**Definition ( $e^x$ )**

$$e^x := E(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Hilfssatz 13.6**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

**Beweis**

$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ,  $0 \leq \alpha_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\alpha_n)$  ist also beschränkt.  $\alpha = \limsup \alpha_n$ . Wegen 9.3 genügt es zu zeigen:  $\alpha = 0$ . Annahme:  $\alpha > 0$ . Setze  $x := \frac{2}{\alpha}$ ;  $a_n = \frac{x^n}{n!} \implies \sum a_n$  ist konvergent.  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = |x| \cdot \alpha_n \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \alpha = 2 > 1 \xrightarrow{12.3} \sum a_n$  ist divergent, Widerspruch! ■

**Beispiel 13.7**

Behauptung: Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

konvergieren absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definition (Kosinus und Sinus)**

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(Kosinus)}$$

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(Sinus)}$$

**Beweis**

Nur für die erste Reihe:

$$a_n := (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \implies \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{x^2}{((2n)!)^{\frac{1}{n}}} = \frac{x^2}{(((2n)!)^{\frac{1}{2n}})^2} \xrightarrow{13.6} 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{wegen 12.3}). \quad \blacksquare$$

