18. Normale Endomorphismen

18.1. Die adjungierte lineare Abbildung

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$

Lemma:
Sei $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Falls $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle x, \Psi(y) \rangle_V \; \forall x \in V,\; y \in W,$$

so ist Ψ hierdurch eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\Psi' : W \to V$ ein Homomorphismus mit derselben Eigenschaft
$\implies$ Für $\Omega := \Psi - \Psi' \in \mathrm{Hom}(W, V)$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in V,\; y \in W : \langle x, \Omega(y) \rangle_V &= \langle x, \Psi(y) - \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle x, \Psi(y) \rangle_V - \langle x, \Psi'(y) \rangle_V \\ &= \langle \phi(x), y \rangle_W - \langle \phi(x), y \rangle_W \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\implies \langle \Omega(y), \Omega(y) \rangle_V = 0 \quad \implies \Omega(y) = 0 \, \forall y$
Also: $\Omega = 0$, d.h. $\Psi = \Psi'$. ∎

Definition: Falls Ψ existiert wie oben, so heißt Ψ der zu ϕ adjungierte Homomorphismus.
Schreibe: $\Psi =: \phi^*$ $\qquad \mathrm{Hom}^a(V, W) := \{\phi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \phi^* \text{existiert}\}$

Beispiel: $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ mit Standardskalarprodukt.
$A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $\phi := \Lambda_A : x \mapsto A \cdot x$

$$\langle \phi(x), y \rangle_W = \langle Ax, y \rangle_W = \overline{y}^T Ax = (y^* A)x = (A^* y)^* = \langle x, A^* y \rangle_V = \langle x, \Lambda_{A^*}(y) \rangle$$

Das heißt: $(\Lambda_A)^* = \Lambda_{A*}$. Insbesondere existiert die Adjungierte.

Proposition: (1) $\mathrm{Hom}^a(V, W) \leq \mathrm{Hom}(V, W)$

(2) Für die Abbildung $* : \mathrm{Hom}^a(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V)$, $\phi \mapsto \phi^*$ gilt:

$$(\alpha\phi + \beta\Psi)^* = \overline{\alpha}\phi^* + \overline{\beta}\Psi^*$$

Die Abbildung ist **semilinear**.

(3) Aus $\phi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$, $\Theta \in \mathrm{Hom}^a(W,U)$ folgt $\Theta \circ \phi \in \mathrm{Hom}^a(V,U)$ und $(\Theta \circ \phi)^* = \phi^* \circ \Theta^*$

(4) Aus $\phi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$ folgt $\phi^* \in \mathrm{Hom}^a(W,V)$ und $(\phi^*)^* = \phi$, sowie $\mathrm{Kern}\,\phi = \mathrm{Bil}(\phi^*)^\perp$.

Beweis: (1) +(2) Sei $\phi, \Psi \in \mathrm{Hom}^a(V,W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
$\overline{\alpha}\phi^* + \overline{\beta}\Psi^*$ ist die Adjungierte zu $\alpha\phi + \beta\Psi$, denn

$$\begin{aligned}\langle(\alpha\phi + \beta\Psi)(x), y\rangle &= \alpha \underbrace{\langle\phi(x), y\rangle}_{\langle x, \phi^*(y)\rangle} + \beta \underbrace{\langle\Psi(x), y\rangle}_{\langle x, \Psi^*(y)\rangle} \\ &= \langle x, \overline{\alpha}\phi^*(y) + \overline{\beta}\Psi^*(y)\rangle\end{aligned}$$

(3) Für alle $x \in V$, $y \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle\Theta \circ \phi(x), y\rangle &= \langle\Theta(\phi(x)), y\rangle \\ &= \langle\phi(x), \Theta^*(y)\rangle \\ &= \langle x, \phi^*(\Theta^*(y))\rangle\end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle\phi^*(y), x\rangle &= \overline{\langle x, \phi^*(y)\rangle} \\ &= \overline{\langle\phi(x), y\rangle} \\ &= \langle y, \phi(x)\rangle\end{aligned}$$

Das heißt ϕ^* hat die Adjungierte $(\phi^*)^* = \phi$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{Kern}(\phi) &\iff \phi(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in W : \underbrace{\langle\phi(x), y\rangle}_{\langle x, \phi^*(y)\rangle} = 0 \\ &\iff x \perp \phi^*(w)\end{aligned}$$

■

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\langle\phi(x), y\rangle = \langle x, \phi^*(y)\rangle$.

Lemma:
Sei $\dim V < \infty$, $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi) \implies \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(\phi^*)$$

Beweis: Sei $u \neq 0$, $\phi(u) = \lambda \cdot u$. Dann gilt für alle $y \in V$:

$$0 = \langle(\phi - \lambda\,\mathrm{id})(u), y\rangle = \langle u, e(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^*(y)\rangle$$

Nach Proposition gilt $(\phi - \lambda \,\mathrm{id})^* = \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$.
Dann ist $0 = \langle u, \underbrace{(\phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y)}_{\neq u}\rangle$ (wegen der positiven Definitheit und $u \neq 0$).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} \text{ ist nicht surjektiv} &\iff \phi^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id} \text{ ist nicht injektiv} \\ &\iff \exists v \neq 0 : \phi^*(v) = \overline{\lambda} v \\ &\implies \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(\phi^*) \end{aligned}$$

■

18.2. Der Spektralsatz

Proposition: Sei $\phi \in \mathrm{End}^a(V)$

(1) Für $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}(\phi)$ mit $\lambda \neq \mu$ gilt:

$$E_\lambda(\phi) \perp E_\mu(\phi)$$

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$

(b) $\forall x, y \in V : \langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \langle \phi^*(x), \phi^*(y)\rangle$
ϕ heißt **normal**.

(3) Ist ϕ normal, dann folgt $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Kern}(\phi^*)$, insbesondere $E_\lambda(\phi) = E_{\overline{\lambda}}(\phi^*)$.

Beweis: (1) Seien $u \in E_\lambda(\phi)$, $v \in E_\mu(\phi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda\langle u, v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle \\ &= \langle \phi(u), v\rangle \\ &= \langle u, \phi^*(v)\rangle \\ &= \langle u, \overline{\mu} v\rangle \\ &= \mu\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Mit $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle u, v\rangle = 0$ ■

Satz 17 (Spektralsatz):
Sei $\dim V < \infty$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukt mit $\phi \in \mathrm{End}(V)$ normal.
Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ habe das charakteristische Polynom $f_\phi(T)$ nur reelle Nullstellen. Dann existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von ϕ.

Beweis: Sei $n := \dim V$, $\lambda_1 \in \operatorname{Spec}(\phi)$, $b_1 \neq 0 \in E_{\lambda_1}(\phi)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\|b_1\| = 1$.
Betrachte das orthogonale Komplement $U := b_1^\top$. Es gilt

$$V = \langle b_1 \rangle \oplus U,$$

wobei $\phi(U) \subseteq U$, $\phi^*(U) \subseteq U$ ist, denn für alle $u \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \phi(u), b_1 \rangle &= \langle u, \phi^*(b_1) \rangle \\ &= \langle u, \overline{\lambda_1} b_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\rangle u, b_1 \rangle}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Daraus folgt $\phi(u) \perp b_1$, das heißt $\phi(U) \perp b_1$, damit folgt $\phi(U) \subseteq U$.
Für ϕ^* ist die Vorgehensweise analog.
Insbesondere ist $\phi|_U \in \operatorname{End}(U)$.

Ferner gilt $(\phi|_U)^* = \phi^*|_U$, also

$$\begin{aligned}\phi|_U \; \phi^*|_U &= (\phi\phi^*)|_U \\ &\overset{\phi \text{ normal}}{=} (\phi^*\phi)|_U \\ &= \phi^*|_U \; \phi|_U\end{aligned}$$

Also ist ϕ normal.

Vollständige Induktion nach n:
$n - 1 \rightsquigarrow n$: U hat eine Orthonormalbasis $\{b_2, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $\phi|_U$.
Dann ist $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ die gesuchte Orthonormalbasis. ∎

Lemma (Transfer zu Matrizen):
Für beliebiges $\phi \in \operatorname{End}(V)$ sei s_ϕ die Sesquilinearform

$$s_\phi(x, y) := \langle \phi(x), y \rangle$$

B sei eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt:

(1) $D_{BB}(\phi^*) = D_{BB}(\phi)^*$

(2) $D_{BB}(s_\phi) = D_{BB}(\phi)^\top$

(3) ϕ ist normal, genau dann wenn für $A := D_{BB}(\phi)$ gilt:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

Beweis: Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.
Erinnere: $D_{BB}(\phi) = (x_{ij})$ ist definiert durch $\phi(b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$.

Es gilt

$$\begin{aligned} s_\phi(b_j, b_k) &= \langle \phi(b_j), b_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \underbrace{\langle b_i, b_k \rangle}_{=\delta_{ik}} \\ &= \alpha_{kj} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (2).

Sei $D_{BB}(\phi^*) = (\beta_{ij})$, das heißt

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{ji}} &= \overline{\langle \phi(b_i), b_j \rangle} \\ &= \langle b_j, \phi(b_i) \rangle \\ &= \langle \phi^*(b_j), b_i \rangle \\ &= \beta_{ij} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (1).

Es bleibt noch Behauptung (3) zu zeigen:

$$\phi \cdot \phi^* \iff \underbrace{D_{BB}(\phi\phi^*)}_{=AA^*} = \underbrace{D_{BB}(\phi^*\phi)}_{=A^*A}$$

■

Korollar (zum Spektralsatz):
Für $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)$ sei $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$ und $\Pi_\lambda := \Pi_{U_\lambda}$ (orthogonale Projektion). Dann gilt für $p(T) \in \mathbb{K}[T]$:

$$p(\phi) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)} p(\lambda) \cdot \Pi_\lambda$$

und

$$\phi^* = \sum_\lambda \overline{\lambda} \cdot \Pi_\lambda$$

Beweis: Da $U_\lambda \perp U_\mu$ für $\lambda \neq \mu$ folgt $\Pi_\lambda \Pi_\mu = \delta_{\lambda\mu}\Pi_\lambda$.
Spektralsatz: Aus $V = \bigoplus_\lambda U_\lambda$ folgt $\operatorname{id}_V = \sum_\lambda \Pi_\lambda$.
Aus $p(\phi)|_{U_\lambda} = p(\lambda) \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda}$ folgt $p(\phi) = \sum_\lambda p(\lambda)\Pi_\lambda$.
$\phi^*|_{U_\lambda} = \overline{\lambda} \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda}$ liefert

$$\begin{aligned} \phi^* &= \phi^* \cdot \operatorname{id}_{U_\lambda} \\ &= \phi^* \cdot \sum_\lambda \Pi_\lambda \\ &= \sum_\lambda \phi^* \Pi_\lambda \\ &= \sum_\lambda \overline{\lambda} \Pi_\lambda \end{aligned}$$

■

Satz 18:
Seien ϕ, $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ normal und $\phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \phi$.
Falls in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu Ψ, dann existiert eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren zu ϕ und Ψ.

Beweis: Seien $V = \bigoplus\limits_{\lambda} U_\lambda$, $U_\lambda := E_\lambda(\phi)$.
Zeige: $\Psi(U_\lambda) \subseteq U_\lambda$ und $\Psi|_{U_\lambda}$ sind diagonalisierbar.

Dazu:

$$\begin{aligned} u \in U_\lambda &\implies \phi(u) = \lambda u \\ &\implies \Psi(\phi(u)) = \Psi(\lambda u) = \lambda \Psi(u) \\ &\iff \phi(\Psi(u)) = \lambda \Psi(u) \qquad \implies \Psi(u) \in U_\lambda \end{aligned}$$

Analog: $\phi(E_\mu(\Psi)) \subseteq E_\mu(\Psi)$.
Da $V = \bigoplus\limits_{\mu} E_\mu(\Psi)$, gilt insbesondere für alle $u \in U_\lambda : u = \sum_\mu x_\mu \in E_\mu(\Psi)$. Es gilt sogar: jedes $x_\mu \in U_\lambda$, denn:

$$\phi(x_\mu =: x'_\mu \in E_\mu(\Psi)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_\mu{}^{\oplus} x_\mu = \lambda u & \\ &= \phi(u) \\ &= \sum_\mu \phi(x_\mu) \\ &= \sum_\mu{}^{\oplus} x'_\mu \end{aligned}$$

Da die Summe direkt ist, folgt für alle μ

$$\lambda \cdot x_\mu = x'_\mu = \phi(x_\mu),$$

das heißt $x_\mu \in U_\lambda$.

Insgesamt gezeigt:

$$U_\lambda = \bigoplus_\mu E_\mu(\Psi) \cap U_\lambda$$

(d.h. $\Psi|_{U_\lambda}$ ist diagonalisierbar). Damit folgt

$$V = \bigoplus_\lambda \bigoplus_\mu E_\mu(\Psi) \cap E_\lambda(\phi)$$

$\blacksquare$

18.3. Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition: $\phi \in \mathrm{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, falls $\phi^* = \phi$.

Bemerkung: (1) ϕ ist selbstadjungiert impliziert ϕ ist normal.

(2) Ist $\dim V < \infty$, B Orthonormalbasis und $A := D_{BB}(\phi)$, dann ist ϕ selbstadjungiert genau dann wenn $A = A^*$, d.h. A ist hermitesch.

Hintergrund: Viele Problem in Physik und Technik führen auf hermitesche Matrizen.

Satz 19:
(1) $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $A = A^\top$ impliziert $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ (oder: das charakteristische Polynom hat nur reelle Nullstellen).

(2) Für hermitesche A gilt:

$$A \text{ ist positiv definit} \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) : \lambda > 0$$

Beweis: (1) Sei $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ und $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Dann:

$$\begin{aligned}
\lambda\langle v, v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle \\
&= \langle Av, v\rangle \\
&= \langle v, A^* v\rangle \\
&= \langle v, Av\rangle \\
&= \langle v, \lambda v\rangle \\
&= \overline{\lambda}\ \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2\neq 0}
\end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = \overline{\lambda}$, das heißt $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) A ist nach Definition genau dann positiv definit wenn $s_A(x, y) = x^\top A\overline{y}$ positiv definit ist.
Für eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren von $A = A^*$ gilt

$$Ab_i = \lambda b_i$$

und Basisdarstellung

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \rightsquigarrow x = \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha_i}\overline{b_i}$$

und somit

$$\begin{aligned} s_A(x,x) &= x^\top A\overline{y} \\ &= \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_i}\overline{b_i} \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{Ab_j}_{\lambda_j b_j} \\ &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j\lambda_j\overline{b_i}^\top b_j \\ &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j\lambda_j \underbrace{\overline{\langle b_i, b_j\rangle}}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2\lambda_i \end{aligned}$$

Also: $s_A(x,x) = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2\lambda_i$.
Dann folgt:

$$s_A(x,x) \geq 0 \,\forall x \iff \forall \lambda_i \geq 0$$

und

$$s_A(x,x) = 0 \implies x = 0$$

genau dann, wenn alle λ_i größer Null sind. ∎

Bemerkung: Für selbstadjungierte, reelle A ist die Extravoraussetzung im Spektralsatz immer erfüllt.

Korollar:
Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim V < \infty$ und $\phi \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu ϕ.

Definition: Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\phi \in \operatorname{End}(V)$.
Dann heißt $\rho(\phi) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Spec}(\phi)\}$ der **Spektralradius** von ϕ. Für $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ setze $\rho(A) := \rho(\Lambda_A)$.

Bemerkung: Auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist durch

$$\|A\| := \sup\{\|A\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$$

eine Norm definiert.

Satz 20:
Es gilt $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$.
Falls $m = n$ und A normal ist, gilt sogar $\|A\| = \rho(A)$.

Beweis: A^*A ist selbstadjungiert, das heißt es gilt $(A^*A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^*A$.
Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren, etwa $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle \\
&= \langle x, A^*Ax \rangle \\
&\overset{x=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i}{=} \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i b_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underbrace{\overline{\mu_i}}_{=\mu_i}
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &\leq \sum_i |\alpha_i|^2 \underbrace{\max\{|\mu_i|\}}_{=\rho(A^*A)} \\
&= \rho(A^*A)\|x\|^2
\end{aligned}$$

Sei $x = \sum_i \alpha_i b_i$ die Basisdarstellung. Dann ist $\|Ax\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \mu_i$, also alle $\mu_i \geq 0$.
Weiterhin: $A^*Ab_i = \mu_i b_i$ und $\rho(A^*A) = \mu_{\max} = \mu_{i_0}$, dazu b_{i_0}. Mit $x := b_{i_0}$ folgt $\|Ax\|^2 = \mu_{\max}$.
Speziell für normales A $(m = n)$:
Es gilt $E_\lambda(A) = E_{\overline{\lambda}}(A^*)$. Dann:

$$\mu_i = \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$$

und damit folgt

$$\|A\| = |\mu_{\max}| = \rho(A)$$

■

Vorsicht: Im allgemeinen ist $\|A\| \neq \rho(A)$.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\rho(A) = 0$ aber $\|A\| = 1$. Es ist

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$