

20. Homotopie und einfacher Zusammenhang

Lemma 20.1

Sei $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und K kompakt. Dann existiert ein $r > 0$: $U_r(a) \subseteq D \forall a \in K$.

Beweis

$\forall a \in K \exists r_a > 0$: $U_{2r_a}(a) \subseteq D$. Dann: $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$.

2.3 $\implies \exists a_1, \dots, a_n \in K$: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{r_{a_j}}(a_j)$.

$r := \min\{r_{a_1}, \dots, r_{a_n}\}$. Sei $a \in K$ und $z \in U_r(a)$.

Zu zeigen: $z \in D$.

$\exists j \in \{1, \dots, n\}$: $a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$.

Dann: $|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j} \implies z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$ ■

Lemma 20.2

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. (γ also „nur“ stetig)

Dann existiert ein $r > 0$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, \dots, a_n\}$ von $[a, b]$ mit:

- (1) für $z_j := \gamma(a_j)$ gilt: $U_r(z_j) \subseteq D$ ($j = 0, \dots, n$)
- (2) $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ ($j = 0, \dots, n$)

Beweis

20.1 $\implies \exists r > 0$: $U_r(z) \subseteq D \forall z \in K := \text{Tr}(\gamma) \implies (1)$.

OBdA: $[a, b] = [0, 1]$. γ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig $\implies \exists \delta > 0$: $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r \forall s, t \in [0, 1]$ mit $|s - t| < \delta$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{1}{n} < \delta$. $a_j := \frac{j}{n}$ ($j = 0, \dots, n$) und $Z := \{a_0, \dots, a_n\}$. Sei $t \in [a_j, a_{j+1}]$.
 $\implies |t - a_j| < \delta, |t - a_{j+1}| < \delta \implies |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_j)}_{=z_j}| < r, |\gamma(t) - \underbrace{\gamma(a_{j+1})}_{=z_{j+1}}| < r \implies \gamma(t) \in$

$U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$. ■

In §8 haben wir $\int_{\gamma} f(z) dz$ definiert für γ stückweise glatt und $f \in C(\text{Tr}(\gamma))$. Jetzt definieren wir

$\int_{\gamma} f(z) dz$ für γ „nur“ stetig und f holomorph.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Seien r, z_j, Z wie in 20.2.
 $z_0 = \gamma(a_0) = \gamma(a)$, $z_n = \gamma(a_n) = \gamma(b)$
 $\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$ ($t \in [0, 1]$) ($j = 0, \dots, n-1$).
 $\Gamma := \gamma_0 \oplus \dots \oplus \gamma_{n-1}$ ist stückweise glatt. 20.2 $\implies \text{Tr}(\Gamma) \subseteq D$. Setze

$$(+)\quad \int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\Gamma} f(z)dz$$

Lemma 20.3

Bezeichnungen wie in obiger Definition.

- (1) Ist γ stückweise glatt, so stimmt obige Definition (+) mit der Definition von $\int_{\gamma} f(z)dz$ aus §8 überein.
- (2) Die Definition (+) ist unabhängig von der Zerlegung Z , solange Z die Eigenschaft aus 20.2 hat.
- (3) $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq (\max_{z \in \text{Tr}(\Gamma)} |f(z)|)L(\Gamma)$.

Beweis

- (1) $\tilde{\gamma}_j := \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$. Dann: $\gamma = \tilde{\gamma}_0 \oplus \tilde{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\gamma}_{n-1}$

Sei $j \in \{0, \dots, n-1\}$: $\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-$ ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet $U_r(z_j)$ (siehe 20.2).

$$\stackrel{9.2}{\implies} \int_{\tilde{\gamma}_j \oplus \tilde{\gamma}_j^-} f(z)dz = 0 \implies \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_j} f(z)dz.$$

$$\stackrel{\text{Summation}}{\implies} \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz.$$

- (2) Übung. (Ist \tilde{Z} eine weitere Zerlegung von $[a, b]$ mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup \tilde{Z}$. Verfahre ähnlich wie in (1).)
- (3) folgt aus 8.4 ■

Definition

$D \subseteq \mathbb{C}$ sei offen.

- (1) Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq D$, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
 γ_0 und γ_1 heißen **in D homotop** $\Leftrightarrow \exists H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$: H ist stetig, $H([0, 1]^2) \subseteq D$ und

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

In diesem Fall heißt H eine **Homotopie von γ_0 nach γ_1 in D**.

Anschaulich: Sei $s \in [0, 1]$.

$\Gamma_s(t) := H(t, s)$ ($t \in [0, 1]$), Γ_s ist ein Weg mit $\text{Tr}(\Gamma_s) \subseteq D$. $\Gamma_s(0) = H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\Gamma_s(1) = H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$
 „ γ_0 kann in D stetig nach γ_1 deformiert werden.“

- (2) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq D$. $z_0 : 0\gamma(0) = \gamma(1)$.
 $\gamma_{z_0}(t) := z_0$ ($t \in [0, 1]$) heißt ein **Punktweg**.

γ heißt **nullhomotop in D** $:\Leftrightarrow \gamma$ und γ_{z_0} sind in D homotop.
 „ γ lässt sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen.“

- (3) $G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. G heißt **einfach zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$ jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomotop.
 „ G hat keine Löcher.“

Satz 20.4

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet.

- (1) Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ und $\text{Tr}(\gamma_0), \text{Tr}(\gamma_1) \subseteq G$, so sind γ_0 und γ_1 homotop in G .
 (2) G ist einfach zusammenhängend

Beweis

- (1) $H(s, t) := \gamma_0(t) + s(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))$, ($s, t \in [0, 1]$). H ist eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 in G
 (2) folgt aus (1) ■

