

7. Topologie Übung

Ferdinand Szekeresch

27. Dezember 2016

Aufgabe 1

p Primzahl, $\forall n \in \mathbb{N}$ setze $c_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit diskret. Topologie.

Betrachte Teilmenge $\mathbb{Z}_p := \prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$ der Tupel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\forall m \geq n : x_m \equiv x_n \pmod{p^n}$$

- (a) Beh: \mathbb{Z}_p ist Ring. zeige: \mathbb{Z}_p ist Teilring von $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$.

Nachrechnen: z. B. $(x_n), (y_n) \in \mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \forall m \geq n : x_m + y_m \equiv x_n + y_n \pmod{p^n} \Rightarrow (x_n) + (y_n) \in \mathbb{Z}_p$$

- (b) \mathbb{Z}_p ist kompakt. Denn: klar: $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist kompakt (da endlich)

$\xrightarrow{\text{Tichonoff}} \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ist kompakt.

Zeige: \mathbb{Z}_p ist abgeschlossen in $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$.

Beh: $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n \setminus \mathbb{Z}_p$ ist offen.

Bew: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} c_n \setminus \mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ und } x_m \not\equiv x_n \pmod{p^n}$$

Setze $U := \pi_n^{-1}(\{x_n\})$ ist offen in $\prod_{n \in \mathbb{N}} c_n$ und es ist $U \cap \mathbb{Z}_p = \emptyset$

\Rightarrow Beh.

- (c) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p, a \mapsto ((a + p^n\mathbb{Z}))_{n \in \mathbb{N}}$. Nachrechnen: Das ist ein Ringhomomorphismus. Sein Kern ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow$ der Homomorphismus ist injektiv.

- (d) Vergleiche Blatt 2, Aufgabe 4. Sei hier $p = 5$.

Beh: $\exists w = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_5$, sodass gilt: $w^5 = -1$, d.h. $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p^n}$.

Setze $x_1 := 2$ (denn $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$)

Weitere Folgenglieder werden induktiv definiert:

Sei x_n gefunden mit $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p^n}$

Zu zeigen: Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $(x_n + kp^n)^2 \equiv -1 \pmod{p^{n+1}}$

$$\begin{aligned} \leadsto a_p &\stackrel{!}{=} (x_n + kp^n)^2 + 1 = x_n^2 + 2kx_np^n + k^2p^{2n} + 1 = (x_n^2 + 1) + 2kx_np^n + k^2p^{2n} \\ &= bp^n + 2kp^n x_n + k^2p^{2n} = p^n(2kx_n + b) + p^{2n}k^2 \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$

Es muss gelten: $2kx_n + b \equiv 0 \pmod{p}$. Das geht, denn $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist Körper, x_n kann nicht kongruent $0 \pmod{p}$ sein, da $x_n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ wäre.

(e) Beh: \mathbb{Z}_p ist überabzählbar.

Bew: z. B. Finde Bijektion von \mathbb{Z}_p nach $[0, 1)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto 0, x_1 x_2 \dots$ Oder:

Fasse \mathbb{Z}_p auf als „Potenzreihen“ der form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad a_i \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra, $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein \mathbb{C} linearer Ringhomomorphismus.

Beh: φ ist stetige Linearform, d.h. $\exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{A} : |\varphi(f)| \leq \delta \|f\|$

Bew: Es gilt: $f - c = -c \left(1 - \frac{f}{c}\right)$. Es ist $\left\|\frac{f}{c}\right\| = \frac{1}{\|c\|} \cdot \|f\| < \frac{1}{|c|} \cdot |c| = 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{c}\right)^n$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-\frac{f}{c}} \Rightarrow (-c)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f}{c}\right)^n$ ist invers zu $f - c$.

Beh: Es gilt $|\varphi(f)| \leq \|f\|$ für alle $f \in \mathcal{A}$.

Bew: Es gilt: $f - \varphi(f) \in \text{Kern}(\varphi)$ (Klar, da φ Ringhomomorphismus ist $\varphi(f - \varphi(f) \cdot 1_A) = \varphi(f) - \varphi(f)\varphi(1_A) = 0$)

$\Rightarrow f - \varphi$ ist nicht invertierbar (da $\text{Kern}(\varphi)$ ein Ideal in \mathcal{A} , d.h. wäre $f - \varphi(f)$ invertierbar, wäre $\text{Kern}(\varphi) = \mathcal{A} \Rightarrow \varphi = 0$).

$\xRightarrow{\text{Beh. 1}} \text{Beh.}$

Aufgabe 2

Sei X norm. Raum, X seine Stone-Cech-Kompaktifizierung, K ein kompakter, normierter Raum, $\varphi : X \rightarrow K$ eine stetige Abbildung. Beh: φ kann eindeutig fortgesetzt werden zu einer stetigen Abbildung $\bar{X} \rightarrow K$.

Bew: X normal $\Rightarrow \bar{X}$ ex. und ist Teilmenge von $C_0(X, \mathbb{C})'$

K normal und kompakt $\Rightarrow \bar{K}$ ex. ist $\subseteq C_0(K, \mathbb{C})'$ und ist gleich K .

... Rest wird ins Netz gestellt