

# 21. Differenzierbarkeit

In diesem Paragraphen seien stets:  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

- (1)  $f$  heißt in  $x_0 \in I$  **differenzierbar** (db) genau dann, wenn der  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert und  $\in \mathbb{R}$  ist. ( $\iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  und ist  $\in \mathbb{R}$ ). In diesem Fall heißt  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  die **Ableitung von  $f$  in  $x_0$** .
- (2)  $f$  heißt auf  $I$  differenzierbar genau dann, wenn  $f$  in jedem  $x \in I$  differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch  $x \mapsto f'(x)$  eine Funktion  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, die **Ableitung von  $f$  auf  $I$** .

## Beispiele:

- (1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = c \forall x \in I$ .  $f$  ist differenzierbar auf  $I$ ,  $f'(x) = 0 \forall x \in I$ .
- (2) Sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(x) = x^n$ . Seien  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq x$ .  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \stackrel{\S 1}{=} x^{n-1} + x_0^{n-2}x + x_0^{n-3}x^2 + \dots + x_0x^{n-2} + x_0^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} \ (x \rightarrow x_0)$ .  $f$  ist also differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und  $f'(x) = nx^{n-1} \forall x \in \mathbb{R}$ . Kurz:  $(x^n)' = nx^{n-1}$  auf  $\mathbb{R}$ .
- (3)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ .  $x \neq 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \implies f$  ist in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar. (Beachte:  $f$  ist stetig in  $x_0$ )
- (4)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . 17.3  $\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \forall x_0 \in \mathbb{R}$ . Kurz:  $(e^x)' = e^x$ .

### Satz 21.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so ist  $f$  stetig in  $x_0$

## Beweis

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0 \ (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \blacksquare$$

### Satz 21.2 (Ableitungsregeln)

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine weitere Funktion,  $f$  und  $g$  ableitbar in  $x_0 \in I$ .

- (1) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

- (2)  $fg$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Es sei  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ .  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**Beweis**

(1) Klar. Für (2) und (3) beachte:  $f(x) \rightarrow f(x_0), g(x) \rightarrow g(x_0)$  ( $x \rightarrow x_0$ ) (wegen 21.1)

$$(2) \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \rightarrow f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$(3) h := \frac{f}{g} : \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \right) \rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0). \quad \blacksquare$$

**Beispiele:**

$$(1) f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) (\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x \text{ auf } \mathbb{R}.$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \text{ auf } \mathbb{R}.$$

**Satz 21.3 (Kettenregel)**

Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionen und  $g(J) \subseteq I$ . Weiter sei  $g$  differenzierbar in  $x_0 \in J$  und  $f$  differenzierbar in  $y_0 := g(x_0)$ . Dann ist  $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

**Beweis**  $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & , y \in I \setminus \{y_0\} \\ f'(y_0) & , y = y_0 \end{array} \right.$  ist differenzierbar in  $y_0 \implies h(y) \rightarrow f'(y) = f'(g(x))$  ( $y \rightarrow y_0$ ). 21.1  $\implies g(x) \rightarrow g(x_0) = y_0$  ( $x \rightarrow x_0$ )  $\implies h(g(x)) \rightarrow f'(g(x_0))$  Es ist  $f(y) - f(y_0) = h(y)(y - y_0) \forall y \in I \implies \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(g(x_0))g'(x_0)$  ( $x \rightarrow x_0$ )  $\blacksquare$

**Beispiele:**

$$(1) \text{ Sei } I = \mathbb{R}, a > 0, a^x = e^{x \log a} = f(g(x)) \text{ mit } f(x) = e^x, g(x) = x \log a \implies (a^x)' = f'(g(x))g'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a \text{ auf } \mathbb{R}$$

$$(2) I = [0, \infty), f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f'(0) = 0$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty)).$$

Es gilt:  $x = f(f^{-1}(x)) \forall x \geq 0$  Annahme:  $f^{-1}$  ist differenzierbar in  $x_0 = 0 \xrightarrow{21.3, (*), x_0 = 0}$

$$1 = \underbrace{f'(f^{-1}(0))}_{=0} \cdot (f^{-1})'(0) = 0 \text{ Widerspruch!}$$

Das heißt  $f^{-1}(x_0)$  ist in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

**Satz 21.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)**

$f \in C(I)$  sei streng monoton,  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$  und  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  differenzierbar in  $y_0 := f(x_0)$  und  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

### Beweis

Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I) \setminus \{y_0\}$  und  $y_n \rightarrow y_0$  und  $\alpha_n = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0}$ . Zu zeigen:  $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $x_n := f^{-1}(y_n) \implies y_n = f(x_n), x_n \in I, \forall n \in \mathbb{N} \implies \alpha_n = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ■

### Beispiele:

- (1)  $I = \mathbb{R}, f(x) = e^x, f^{-1}(y) = \log y$  ( $y > 0$ ). Sei  $y > 0$ , also  $y = e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )  $\implies (f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ . Kurz:  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$ .
- (2) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^\alpha$  ( $x > 0$ ), dann:  $f(x) = e^{\alpha \log x} \implies f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ . Kurz:  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  auf  $(0, \infty)$
- (3) Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  liefert Beispiel (2):  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  auf  $(0, \infty)$

### Definition

Zu  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in M$ .  $x_0$  heißt ein **innerer Punkt** von  $M$  genau dann, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $U_\delta(x_0) \subseteq M$ .

### Beispiele:

- (1)  $M$  ist offen genau dann, wenn jedes  $x \in M$  ein innerer Punkt von  $M$  ist.
- (2) Sei  $a < b, M \in \{[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]\}$ .  $x_0 \in M$  ist innerer Punkt von  $M$  genau dann, wenn  $x_0 \in (a, b)$
- (3)  $\mathbb{Q}$  hat keine inneren Punkte

### Definition

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ ,  $g$  hat in  $x_0$  ein **relatives Maximum** :  $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \leq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ ,  $g$  hat in  $x_0$  ein **relatives Minimum** :  $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \geq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .

Ein **relatives Extremum** ist ein relatives Maximum oder Minimum.

### Satz 21.5 (Erste Ableitung am relativen Extremum)

$f$  sei differenzierbar in  $x_0 \in I$ ,  $f$  habe in  $x_0$  ein relatives Extremum und  $x_0$  sei ein innerer Punkt von  $I$ . Dann gilt:  $f'(x_0) = 0$ .

### Beweis

$f$  habe in  $x_0$  ein relatives Maximum. Dann existiert  $\delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$  und  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0)$ .

$$\text{Sei } x \in U_\delta(x_0) \text{ und } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \quad \begin{matrix} (x \rightarrow x_0-) \\ > & \leq & (x \rightarrow x_0+) \end{matrix}$$

Also:  $f'(x_0) = 0$ . ■

**Bemerkungen:**

- (1) Die Voraussetzung „ $x_0$  ist ein innerer Punkt von  $I$ “ ist wesentlich. Beispiel:  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $x_0 = 0$  oder  $x_0 = 1$ .
- (2) Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$  und  $f'(x_0) = 0$ , so muss  $f$  in  $x_0$  *kein* relatives Extremum haben. Beispiel:  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

**Satz 21.6 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**

Sei  $I = [a, b]$  ( $a < b$ ),  $f, g \in C(I)$  und  $f$  und  $g$  seien differenzierbar auf  $(a, b)$ . Weiter sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ .

- (1) **Satz von Rolle:** Es sei  $f(a) = f(b)$ . Dann existiert  $\xi \in (a, b)$  :

$$f'(\xi) = 0.$$

- (2) **Mittelwertsatz (MWS) der Differenzialrechnung:**

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- (3) **Erweiterter Mittelwertsatz:** Es ist  $g(b) \neq g(a)$  und  $\exists \xi \in (a, b)$  :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Beweis**

- (1) 18.3  $\implies \exists s, t \in [a, b] : f(s) \leq f(x) \leq f(t) \forall x \in [a, b]$ .

Fall 1:  $s, t \in \{a, b\} \implies f$  ist auf  $I$  konstant  $\implies f' = 0$  auf  $I \implies$  Beh.

Fall 2:  $s \in (a, b)$  oder  $t \in (a, b)$ . Etwa:  $s \in (a, b) \implies s$  ist ein innerer Punkt von  $I$  und  $f$  hat in  $s$  ein Minimum. 21.5  $\implies f'(s) = 0$ .

- (2) folgt aus (3) mit  $g(x) = x$ .

- (3)  $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$  ( $x \in I$ ). Dann gilt:  $h \in C(I)$ ,  $h$  ist differenzierbar auf  $(a, b)$ .

$$h(a) = h(b) \xrightarrow{(1)} \exists \xi \in (a, b) : 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

$$\implies (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Aus (1) folgt:  $g(a) \neq g(b)$  (sonst existierte  $x_0 \in (a, b)$  mit  $g'(x_0) = 0$ ).

$$\implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

### Folgerungen 21.7

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $I$ .

- (1) Ist  $f' = 0$  auf  $I \implies f$  ist auf  $I$  konstant  
 $\geq$  wachsend  
 $\leq$  fallend  
 $>$  streng wachsend  
 $<$  streng fallend

- (2) Ist  $f' = g'$  auf  $I \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$  auf  $I$ .

### Beweis

- (1) Seien  $x_1, x_2 \in I$  und  $x_1 < x_2$ . 21.6 (2)  $\implies \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \implies \text{Beh.}$

- (2)  $h := f - g \implies h' = 0$  auf  $I \xrightarrow{(1)} \text{Beh.}$  ■

### Beispiele:

- (1) Es existiert genau ein  $x_0 \in \mathbb{R} : e^{-x_0} = x_0$ .

#### Beweis

$f(x) := e^{-x} - x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ . 18.2  $\implies \exists x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = 0$ , also:  $e^{-x_0} = x_0$ .

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7} f$  ist streng fallend  $\implies f$  hat genau eine Nullstelle, nämlich  $x_0$ .  $\implies \text{Beh.}$  ■

- (2) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und  $f' = f$  auf  $\mathbb{R} \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

#### Beweis

$h(x) := \frac{f(x)}{e^x} \implies h'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7} \exists c \in \mathbb{R} : h(x) = c \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{Beh.}$  ■

### Satz 21.8 (Die Regeln von de l'Hospital)

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $(a, b)$  differenzierbar und es sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  ( $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen). Weiter existiere  $L := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ( $L = \pm\infty$  zugelassen) und es gelte

(I)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} g(x) = 0$  oder

(II)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

### Beweis

Nur unter der Voraussetzung (I) und nur für  $x \rightarrow a$ .

Fall 1:  $a \in \mathbb{R}$ .  $f(a) := g(a) := 0 \xrightarrow[21.1]{(I)} f, g \in C[a, b]$ .

Sei  $x \in (a, b)$ . 21.6 (3)  $\implies \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \rightarrow L$  (für  $x \rightarrow a$ , da dann auch  $\xi \rightarrow a$ ).

Fall 2:  $a = -\infty$ . Substituiere  $x = \frac{1}{t}$ , also  $t = \frac{1}{x}$  ( $x \rightarrow a = -\infty \iff t \rightarrow 0-$ ).

$\varphi(t) := f(\frac{1}{t}) = f(x)$ ,  $\psi(t) := g(\frac{1}{t}) = g(x)$ . z.z.:  $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L$  ( $t \rightarrow 0-$ )

$$\varphi'(t) = f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}) = f'(x)(-x^2)$$

$$\psi'(t) = g'(x)(-x^2)$$

$$\implies \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-) \xrightarrow{\text{Fall 1}} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-).$$

■

**Beispiele:**

$$(1) \quad a, b > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+tz)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+tz} \cdot t}{1} = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(5) \quad \text{Für } t \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{x})^x = e^t \quad (\text{insbesondere } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{n})^n = e^t, \quad n \in \mathbb{N})$$

**Beweis**

$$\varphi(x) := (1 + \frac{t}{x})^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{t}{x}) \stackrel{z=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+tz)}{z} = t$$

$$\implies \varphi(x) \rightarrow e^t \quad (x \rightarrow \infty).$$

■

### Satz 21.9 (Ableitung von Potenzreihen)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0-r, x_0+r)$ , ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  ( $x \in I$ )

(1) Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$  hat den Konvergenzradius  $r$ .

(2)  $f$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $f'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$ , also  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)'$

**Beweis**

$$(1) \quad \limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \implies \text{Behauptung.}$$

(2) Später

■

**Beispiele:**

$$(1) \quad (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

$$(2) (\cos x)' = -\sin x$$

**Satz 21.10 (Eigenschaften trigonometrischer Funktionen)**

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1, |\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1, |\sin x| \leq |x|$
- (2) Additionstheoreme:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- (3)  $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} > 0 \forall x \in (0, 2)$ ; insbesondere:  $\sin 1 > \frac{5}{6}$ .
- (4)  $\exists \xi_0 \in (0, 2)$  mit  $\cos \xi_0 = 0$  und  $\cos x \neq 0 \forall x \in [0, \xi_0), \pi := 2\xi_0$  (Pi). Also:  $\pi \in (0, 4)$  ( $\pi \approx 3, 14..$ ),  $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos x \neq 0 \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$ .
- (5)  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
- (6)  $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$   
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$   
 $\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x$   
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$
- (7) Für  $x \in [0, \pi] : \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$
- (8)  $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$ .  
 $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

**Beweis**

- (1)  $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x - 1. f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) + 2 \sin x \cos x = 0. 21.7 \implies f$   
ist auf  $\mathbb{R}$  konstant.  $f(0) = 0 \mid \cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$ , ObdA  $x \neq 0$ .  
 $\sin x = \sin x - \sin 0 \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} |x| \leq |x|$
- (2) Sei  $y \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := (\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 + (\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)^2$ . Klar:  $f(0) = 0$ . Nachrechnen:  $f' = 0$  auf  $\mathbb{R}$ .  $21.7 \implies f \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}$ .
- (3) Für  $x \in (0, 2) : \sin x = \underbrace{(x - \frac{x^3}{3!})}_{>0} + \underbrace{(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!})}_{>0} + \dots \implies \text{Behauptung.}$
- (4)  $\cos 0 = 1 > 0. \cos 2 = \cos(1+1) = \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2 \sin^2 1 = 1 - 2 \sin^2 1 \stackrel{(3)}{<} 1 - 2 \frac{25}{36} < 0. 18.2 \implies \exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$ , In  $(0, 2)$ :  $(\cos x)' = -\sin x \stackrel{(3)}{<} 0 \implies \cos x$   
ist in  $(0, 2)$  streng monoton fallend  $\implies \cos x \neq 0 \forall x \in [0, \xi_0)$
- (5)  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1. (3) \implies \sin \frac{\pi}{2} > 0 \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .
- (6) Die erste Behauptung mit kann mit Potenzreihen, der Rest mit den Additionstheoremen bewiesen werden.
- (7) „ $\Leftarrow$ “: klar, „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in [0, \pi]$  und  $\cos x = 0 \stackrel{(4)}{\implies} x \geq \frac{\pi}{2}, y := \pi - x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$  und  
 $\cos y = \cos(x + \pi) \stackrel{(6)}{=} -\cos(-x) = -\cos(x) \stackrel{(4)}{\implies} y \leq \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ .

(8) In den gr. Übungen ■**Definition 21.11 (Tangens)**

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ;  $f(x) := \tan x$  ( $x \in I$ ). Dann:  $f \in C(I)$ .  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ ,  
 $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$  auf  $I \implies f$  ist auf  $I$  streng monoton  
 wachsend  $\implies \exists f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I$ ,  $\arctan x := f^{-1}(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) **Arcustangens**. Sei  $y = \tan x$  ( $x \in I$ ).  
 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$ . Also:  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Definition**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall;  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in I$ .  $f$  wird in einer Umgebung von  $x_0$  durch eine Potenzreihe dargestellt :  $\iff \exists \delta > 0$  und  $\exists$  eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  mit Konvergenzradius  $\geq \delta$  und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \forall x \in I \cap U_{\delta}(x_0)$ .

**Beispiele:**

(1)  $I = (-\infty, 1)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  für  $x \in (-1, 1)$ . Also:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  für  $x \in (-1, 1)$

(2)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  ( $x \in (-1, 1)$ )

(3)  $I = (-1, \infty)$ ,  $f(x) = \log(1+x)$ . Behauptung: (\*)

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in (-1, 1))}$$

**Beweis**

$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  ( $x \in (-1, 1)$ ) 21.9  $\implies g$  ist auf  $(-1, 1)$  differenzierbar und  
 $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x) \forall x \in (-1, 1)$ . 21.7  $\implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) =$   
 $g(x) + c \forall x \in (-1, 1) \xrightarrow{x=0} 0 = f(0) = g(0) + c = c \implies f(x) = g(x) \forall x \in (-1, 1) \implies$   
 Behauptung. In den gr. Übungen wird gezeigt (Abelscher Grenzwert-Satz): (\*) gilt noch  
 für  $x = 1$ . Also:  $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  ■