

## 12. Das Schwarzsche Lemma

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

### Satz 12.1 (Schwarzsches Lemma)

Es sei  $f \in H(\mathbb{D})$ ,  $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$  und  $f(0) = 0$ .

Dann:

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1 \quad (*).$$

Ist  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , so ex. ein  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$  mit:  $f(z) = \lambda z$ .

### Beweis

O.b.d.A.:  $f \not\equiv 0$ . 11.8  $\Rightarrow \exists g \in H(\mathbb{D}) : f(z) = zg(z)$ . Sei  $z \in \mathbb{D}$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $r < 1$  und  $|z| < r$ . Dann:  $|g(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \stackrel{r \rightarrow 1}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 1$ . Also  $|g(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$ .  $f'(z) = g(z) + zg'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0)$  Also gilt (\*). Es sei  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \Rightarrow |g(0)| = 1$  oder  $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |g|$  hat ein Maximum in  $\mathbb{D}$ . 11.6  $\Rightarrow g$  konstant  $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : g(z) = \lambda \forall z \in \mathbb{D}$ . Dann:  $f(z) = \lambda z$ . Es ist  $|\lambda| = |g(0)| = 1$  oder  $|\lambda| = |g(z_0)| = 1 \Rightarrow \lambda \in \partial\mathbb{D}$ . ■

### Definition

Sei  $a \in \mathbb{D}$  und  $S_a \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\})$  def. durch  $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

### Beachte 1

$|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$ , also  $\frac{1}{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$ .  $S_a(a) = 0$ ,  $S_a(0) = -a$ .

### Satz 12.2

Sei  $a \in \mathbb{D}$ . Dann:

- (1)  $S_a$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$  injektiv.
- (2)  $S_a^{-1} = S_{-a}$  auf  $\overline{\mathbb{D}}$
- (3)  $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$
- (4)  $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$
- (5) Ist  $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ , so ist  $\lambda S_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

### Beweis

- (1) Nachrechnen.

## 12. Das Schwarzsche Lemma

$$(2) \quad w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \iff z - a = w - \bar{a}zw \iff z(1 + \bar{a}w) = w + a \iff z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w} = S_{-a}(w)$$

$$(3) \quad \text{Sei } |z| = 1, \text{ also } z = e^{it} (t \in \mathbb{R}). |S_a(z)| = \left| \frac{e^{it}-a}{1-\bar{a}e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it}-a}{e^{it}(e^{-it}-\bar{a})} \right| = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{it}||e^{-it}-\bar{a}|} = 1. \text{ Also:}$$

$$S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}, \quad \partial\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(\underbrace{S_{-a}(\partial\mathbb{D})}_{\substack{\text{wie oben} \\ \subseteq \partial\mathbb{D}}}) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D}).$$

$$(4) \quad \text{Sei } z \in \mathbb{D}. |S_a(z)| \stackrel{11.7}{\leq} \max_{|w|=1} |S_a(w)| \stackrel{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}} \quad \text{Sei } z \in \mathbb{D}, w := S_a(z). \text{ Annahme:}$$

$$|w| = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} |z| = |S_{-a}(w)| = 1 \quad \text{Wid. Also } S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Genauso } S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \text{ Dann}$$

$$\mathbb{D} \stackrel{(2)}{=} S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$$

(5) folgt aus (1) und (4). ■

### Satz 12.3

Sei  $f \in H(\mathbb{D})$

$f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  und  $f(0) = 0 \iff \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z.$

### Beweis

" $\Leftarrow$ ": Klar

" $\Rightarrow$ ": Dann  $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ,  $f^{-1}(0) = 0$ . Sei  $z \in \mathbb{D}$ ,  $w := f(z)$ ; dann:

$$z = f^{-1}(w), |z| = |f^{-1}(w)| \stackrel{12.1}{\leq} |w| = |f(z)| \stackrel{12.1}{\leq} |z| \quad \text{Also } |f(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad 12.1 \Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : f(z) = \lambda z \quad \forall z \in \partial\mathbb{D} \quad \blacksquare$$

### Satz 12.4

$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$

### Beweis

" $\supseteq$ ": 12.2 (5)

" $\subseteq$ ": Sei  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ ,  $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ .  $g := f \circ S_a$ ;  $g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  und  $g(0) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$ .

12.3  $\Rightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} : g(z) = \lambda z$ . Es ist  $f = g \circ S_a = \lambda S_a$  ■