# 9. Oberer und unterer Limes

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei $(a_n)$ stets eine *beschränkte* Folge in $\mathbb{R}$. 8.2 $\implies$ $\mathscr{H}(a_n) \neq 0$.

**Satz 9.1 (Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Häufungswerte)**
$\mathscr{H}(a_n)$ ist beschränkt. Weiter existieren $\max \mathscr{H}(a_n)$ und $\min \mathscr{H}(a_n)$

**Beweis**
$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in \mathscr{H}(a_n)$. 8.1 $\implies$ $\exists$TF$(a_{n_k})$ von $(a_n)$ mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$, 6.2 $\implies$ $|a_{n_k}| \to |\alpha|$ $(k \to \infty)$; $|a_{n_k}| \leq c \; \forall k \in \mathbb{N} \overset{k\to\infty}{\implies} |\alpha| \leq c$. Also: $|\alpha| \leq c \; \forall \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$. $\mathscr{H}(a_n)$ ist also beschränkt. Sei $s := \sup \mathscr{H}(a_n)$, z.Z.: $s \in \mathscr{H}(a_n)$ (analog zeigt man: $\inf \mathscr{H}(a_n) \in \mathscr{H}(a_n)$)
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\mathscr{H}(a_n) \implies \exists \alpha \in \mathscr{H}(a_n) : \alpha > s - \varepsilon$.
Wähle $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(\alpha) \subseteq U_\varepsilon(s) \implies a_n \in U_\delta(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(s)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies s \in \mathscr{H}(a_n)$. ∎

**Definition**
$\limsup a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n := \max \mathscr{H}(a_n)$ heißt **oberer Limes** oder **Limes superior** von $(a_n)$

$\liminf a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n := \min \mathscr{H}(a_n)$ heißt **unterer Limes** oder **Limes inferior** von $(a_n)$

**Beachte:** $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \; \forall \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$.

**Beispiele:**

(1) Ist $(a_n)$ konvergent $\overset{8.1}{\implies} \mathscr{H}(a_n) = \{\lim a_n\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.

(2) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n$; $|a_n| = (1 + \frac{1}{n})^n \overset{7.6}{\leq} 3 \implies (a_n)$ ist beschränkt.
$a_{2n} = (a + \frac{1}{2n})^{2n} \implies (a_{2n})$ ist eine Teilfolge von $(a_n)$ und von der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n) \overset{8.1}{\implies}$ $a_{2n} \to e$ $(n \to \infty)$. Analog: $a_{2n-1} = -(1 + \frac{1}{2n-1})^{2n-1} \to -e$. Also: $e, -e \in \mathscr{H}(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R} : e \neq \alpha \neq -e$.
Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass: $\underbrace{(U_\varepsilon(e) \cup U_\varepsilon(-e))}_{=:U} \cap U_\varepsilon(\alpha) \neq \emptyset$ $(*)$
Etwa $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{|\alpha - e|, |\alpha + e|\}$. $a_{2n} \to e \implies a_n \in U_\varepsilon(e)$ ffa gerade $n$. $a_{2n-1} \to -e \implies a_n \in U_\varepsilon(-e)$ ffa ungerade $n$. $\implies a_n \in U$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \neq \mathscr{H}(a_n)$. Fazit: $\mathscr{H}(a_n) = \{e, -e\}$, $\limsup a_n = e$, $\liminf a_n = -e$.

**Satz 9.2 (Eigenschaften des Limes superior und inferior)**
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$\alpha = \liminf a_n \iff \forall \varepsilon > 0$ gilt:

(1) $\alpha - \varepsilon < a_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$

(2) $a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

$\alpha = \limsup a_n \iff \forall \varepsilon > 0$ gilt:

(1) $\alpha - \varepsilon < a_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

(2) $a_n < \alpha + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis**
*nur für* $\liminf$.

„$\implies$“: Sei $\alpha = \liminf a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. $\alpha \in \mathscr{H}(a_n) \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \implies$ (ii).
**Annahme:** (i) gilt nicht. D.h.: $a_n \leq \alpha - \varepsilon$ für unendlich viele $n$, etwa für $n_1, n_2, n_3, \dots$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Dann ist $a_{n_k}$ eine Teilfolge von $(a_n)$ mit $a_{n_k} \leq \alpha - \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$. $a_{n_k}$ ist beschränkt. $\overset{8.2}{\implies}$ $(a_{n_k})$ enthält eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$; $\beta := \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_{k_j}}$. $(a_{n_{k_j}})$ ist auch eine Teilfolge von $(a_n)$ $\overset{8.1}{\implies}$ $\beta \in \mathscr{H}(a_n) \implies \alpha \leq \beta$. $a_{n_{k_j}} \leq \alpha - \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N} \overset{j\to\infty}{\implies} \beta \leq \alpha - \varepsilon \implies \alpha \leq \alpha - \varepsilon$, Widerspruch!

„$\Leftarrow$“: für jedes $\varepsilon > 0$ gelte (i) und (ii). Sei $\varepsilon > 0$ $\overset{\text{(i),(ii)}}{\implies}$ $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \implies \alpha \in \mathscr{H}(a_n)$. Sei $\beta < \alpha$. Zu zeigen: $\beta \neq \mathscr{H}(a_n)$. $\varepsilon := \frac{\alpha-\beta}{2} \implies \beta + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$. (i) $\implies a_n > \alpha - \varepsilon = \beta + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\beta)$ für höchstens endlich viele $n \implies \beta \neq \mathscr{H}(a_n)$. ∎

**Satz 9.3 (Äquivalenzaussagen zur Konvergenz)**
Die folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\liminf a_n = \limsup a_n$

(2) $(a_n)$ hat genau einen Häufungswert

(3) $(a_n)$ ist konvergent

**Beweis**

(1) (1) $\iff$ (2) Klar.

(2) (3) $\implies$ (2) 8.1.

(3) (2) $\implies$ (3) Sei $\mathscr{H}(a_n) = \{\alpha\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$.
Sei $\varepsilon > 0 \overset{9.2}{\implies} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N} \implies a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$. ∎

**Folgerung 9.4**
Sei $(b_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(b_n)$ ist konvergent genau dann, wenn $(b_n)$ beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. **Beweis** „$\implies$": 6.1, 9.3; „$\Leftarrow$": 9.3

**Beispiel**
auf die Voraussetzung „$(b_n)$ beschränkt"kann in 9.4 nicht verzichtet werden!
**Beispiel:** $(b_n) = (1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots)$

**Satz 9.5 (Rechenregeln für den Limes superior und inferior)**
Sei $(b_n)$ eine weitere beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

(1) aus $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup a_n \leq \limsup b_n$
aus $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ folgt $\liminf a_n \leq \liminf b_n$

(2) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$

(3) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \ \forall \alpha \geq 0$
$\liminf(\alpha a_n) = \alpha \liminf a_n \ \forall \alpha \geq 0$

(4) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$
$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$

**Beweis:** Übung