

§ 13 Der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^2

In diesem Paragraphen sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (fest), es sei $R : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und $R(0) = R(2\pi)$. Weiter sei

$$\gamma(t) := (x_0 + R(t) \cos t, y_0 + R(t) \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Dann ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener und rektifizierbarer Weg in \mathbb{R}^2 . Es sei

$$B := \{(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) : t \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

Dann ist B kompakt, also $B \in \mathfrak{B}_2$. Weiter ist $\partial B = \gamma([0, 2\pi]) = \Gamma_\gamma$. Sind B und γ wie oben, so heißt B **zulässig**.

Beispiel

Sei R konstant, also $R(t) = R > 0$, so ist $B = \overline{U_R(x_0, y_0)}$

Satz 13.1 (Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^2)

B und γ seien wie oben (B also zulässig). Weiter sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq D$ und $f = (u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann

- (1) $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) d(y)$
- (2) $\int_B v_y(x, y) d(x, y) = - \int_\gamma v(x, y) d(x)$
- (3) $\int_B \operatorname{div} f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

Folgerung 13.2

Mit $f(x, y) := (x, y)$ erhält man aus 13.1: Sind B und γ wie in 13.1, so gilt:

- (1) $\lambda_2(B) = \int_\gamma x dy$
- (2) $\lambda_2(B) = - \int_\gamma y dx$
- (3) $\lambda_2(B) = \frac{1}{2} \int_\gamma (x dy - y dx)$

Beispiel

Definiere

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \quad (R > 0)$$

und $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$, dann gilt:

$$\lambda_2(B) = \int_0^{2\pi} R \cos t \cdot R \cos t \, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi R^2$$

Beweis

Wir beweisen nur (1). ((2) beweist man analog und (3) folgt aus (1) und (2))

O.B.d.A: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und R stetig db. Also $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma(t) = \underbrace{(R(t) \cos t)}_{=\gamma_1(t)}, \underbrace{(R(t) \sin t)}_{=\gamma_2(t)}$. R

stetig differenzierbar. $A := \int_B u_x(x, y) d(x, y)$

Zu zeigen: $A = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt$.

Mit Polarkoordinaten, Transformations-Satz und Fubini:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(t)} u_x(r \cos t, r \sin t) r dr \right) dt$$

(1) $\beta(r, t) := u(r \cos t, r \sin t)$. Nachrechnen: $r\beta_r(r, t) \cos t - \beta_t(r, t) \sin t = u_x(r \cos t, r \sin t)r$.

Also:

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(t)} (r\beta_r(r, t) \cos t - \beta_t(r, t) \sin t) dr \right) dt$$

$$(2) \int_0^{R(t)} r\beta_r(r, t) dr = r\beta(r, t) \Big|_{r=0}^{r=R(t)} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \beta(r, t) dr}_{=:\alpha(t)} = R(t)\beta(R(t), t) - \alpha(t) = R(t)u(\gamma(t)) -$$

$$\alpha(t)$$

(3) $\Psi(s, t) := \int_0^s \beta(r, t) dr$. Mit dem zweiten Hauptsatz aus Analysis 1 folgt: $\Psi_s(s, t) = \beta(s, t)$
7.3 $\Rightarrow \Psi_t(s, t) = \int_0^s \beta_t(r, t) dr$.

Dann: $\alpha(t) = \Psi(R(t), t)$, also

$$\alpha'(t) = \Psi_s(R(t), t) \cdot R'(t) + \Psi_t(R(t), t) \cdot 1 = R'(t) \underbrace{\beta(R(t), t)}_{=u(\gamma(t))} + \int_0^{R(t)} \beta_t(r, t) dr$$

$$\Rightarrow \int_0^{R(t)} \beta_t(r, t) dr = \alpha'(t) - R'(t) \cdot u(\gamma(t)).$$

(4) Aus (1),(2),(3) folgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (R(t) \cdot u(\gamma(t)) \cdot \cos t - \alpha(t) \cos t - \alpha'(t) \sin t + R'(t) \cdot u(\gamma(t)) \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt - \int_0^{2\pi} (\alpha(t) \sin t)' dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt - \underbrace{[\alpha(t) \sin t]_0^{2\pi}}_{=0} \\ &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt \end{aligned}$$

■