§ 1.

Der Raum $\mathbb{R}^n$

Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum.
$e_1 := (1, 0, \dots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Definition
Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

(1) $x \cdot y := xy := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ heißt das **Skalar-** oder **Innenprodukt** von x und y.

(2) $\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ heißt die **Norm** oder **Länge** von x.

(3) $\|x - y\|$ heißt der **Abstand** von x und y.

Beispiele:

(1) $\|e_j\| = 1\ (j = 1, \dots, n)$

(2) $n = 3 : \|(1, 2, 3)\| = (1 + 4 + 9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

Beachte:

(1) $x \cdot y \in \mathbb{R}$

(2) $\|x\|^2 = x \cdot x$

Satz 1.1 (Rechenregeln zur Norm)
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n)$

(1) $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z),\ x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$

(2) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(4) $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** (**CSU**)

(5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(6) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

(7) $|x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\ (j = 1, \dots, n)$

Beweis

(1) , (2), (3) nachrechnen.

(6) Übung.

(4) O.B.d.A: $y \neq 0$ also $\|y\| > 0$. $a := x \cdot x = \|x\|^2$, $b := xy$, $c := \|y\|^2 = y \cdot y$, $\alpha := \frac{b}{c}$. $0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) = a - 2\alpha b + \alpha^2 c = a - 2\frac{b}{c}b + \frac{b^2}{c^2}c = a - \frac{b^2}{c} \implies 0 \leq ac - b^2 \implies b^2 \leq ac \implies (xy)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$.

(5) $\|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) \overset{(1)}{=} x \cdot x + 2xy + y \cdot y = \|x\|^2 + 2xy + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|xy| + \|y\|^2 \overset{(4)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

(7) $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2 \implies$ 1. Ungleichung; $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \implies \|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \overset{(5)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \ldots + \|x_n e_n\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$ ■

Seien $p, q, l \in \mathbb{N}$. Es sei A eine reelle $p{\times}q$-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \qquad \|A\| := \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \alpha_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \textbf{ Norm} \text{ von A}$$

Sei B eine reelle $q{\times}l$-Matrix ($\implies AB$ existiert). **Übung**: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$. $Ax := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ (**Matrix-Vektorprodukt**).

Es folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Definition

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $A, U \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ heißt δ-Umgebung von x_0 oder **offene Kugel** um x_0 mit Radius δ.

(2) U ist eine **Umgebung** von $x_0 :\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$.

(3) A heißt **beschränkt** $:\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \forall a \in A$.

(4) $x_0 \in A$ heißt ein **innerer Punkt** von A $:\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A$.
$A^\circ := \{x \in A : x$ ist innerer Punkt von $A\}$ heißt das **Innere** von A. Klar: $A^\circ \subseteq A$.

(5) A heißt offen $:\iff A = A^\circ$. Zur Übung: A° ist offen.

Beispiele:

(1) offene Kugeln sind offen, $\mathbb{R}^n$ ist offen, $\emptyset$ ist offen.

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$, $A^\circ = U_\delta(x_0)$

(3) $n = 2$: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : x_2 = x_1^2\}$, $A^\circ = \emptyset$

Definition

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $A :\iff \forall \delta > 0 : (U_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. $\mathscr{H}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$.

(2) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Berührungspunkt** (BP) von $A :\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$. $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Berührungspunkt von } A\}$ heißt der **Abschluss** von A.
Klar: $A \subseteq \bar{A}$. Zur Übung: $\bar{A} = A \cup \mathscr{H}(A)$.

(3) A heißt **abgeschlossen** $:\iff A = \bar{A}$. Zur Übung: $\bar{A}$ ist abgeschlossen.

(4) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **Randpunkt** von $A :\iff \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n\backslash A) \neq \emptyset$. $\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist ein Randpunkt von } A\}$ heißt der **Rand** von A. Zur Übung: $\partial A = \bar{A}\backslash A^\circ$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, $\emptyset$ ist abgeschlossen;
$\bar{A} = \overline{U_\delta(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ (**abgeschlossene Kugel** um x_0 mit Radius δ)

(2) $\partial U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \delta\} = \partial\overline{U_\delta(x_0)}$

(3) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_2 = x_1^2\}$. $A = \bar{A} = \partial A$

Satz 1.2 (Offene und abgeschlossene Mengen)

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist abgeschlossen $:\iff \mathbb{R}^n\backslash A$ ist offen.

(2) Die Vereinigung offener Mengen ist offen.

(3) Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(4) Sind $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\implies \bigcap_{j=1}^n A_j$ ist offen

(5) Sind $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\implies \bigcup_{j=1}^n A_j$ ist abgeschlossen

Beispiel
$(n = 1)$. $A_t := (0, 1 + t)$ $(t > 0)$. Jedes A_t ist offen. $\bigcap_{t>0} A_t = (0, 1]$ ist nicht offen.

Beweis

(1) „$\implies$": Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n\backslash A$. Annahme: $\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \not\subseteq \mathbb{R}^n\backslash A \implies \forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A} \overset{\text{Vor.}}{=} A$, Widerspruch
„$\impliedby$": Annahme: $\subset \bar{A} \implies \exists x_0 \in \bar{A} : x_0 \notin A$; also $x_0 \in \mathbb{R}^n\backslash A$. Voraussetzung $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n\backslash A \implies U_\delta(x_0) \cap A = \emptyset \implies x_0 \notin \bar{A}$, Widerspruch!

(2) Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in M}$ eine Familie offener Mengen und $V := \bigcup_{\lambda \in M} A_\lambda$. Sei $x_0 \in V \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in A_{\lambda_0}$. A_{λ_0} offen $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq V$

(3) folgt aus (1) und (2) (Komplemente!)

(4) $D := \bigcap_{j=1}^m A_j$. Sei $x_0 \in D$. $\forall j \in \{1, \dots, m\} : x_0 \in A_j$, also eixistiert $\delta_j > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq A_j$. $\delta := \min\{\delta_j, \dots, \delta_m\} \implies U_\delta(x_0) \subseteq D$

(5) folgt aus (1) und (4) ■