

# Anhang A

## Übungen

### Übung 0 vom 24. April 2012

#### Aufgabe 1

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A$  eine abelsche Gruppe und  $x \in X$ .

Die **Wolkenkratzergarbe** auf  $X$  ist definiert durch  $\mathcal{W}(U) := \begin{cases} A & , x \in U \\ \{0\} & , x \notin U \end{cases}$  für  $U \subseteq X$  offen, mit Restriktionsabbildungen

$$\rho_V^U = \begin{cases} \{0\} \ni 0 \mapsto 0 \in \{0\} & , x \notin V, x \notin U \\ A \ni a \mapsto 0 \in \{0\} & , x \notin V, x \in U \\ \text{id}_A & , x \in V, x \in U \end{cases}$$

für  $V \subseteq U \subseteq X$  offen.

- a) Zeige, dass  $\mathcal{W}$  eine Garbe von abelschen Gruppen auf  $X$  ist.
- b) Berechne die Halme der Garbe.

#### Aufgabe 2

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf  $X$ . Ist  $x \in X$  ein Punkt, so bezeichne  $\mathcal{F}_x$  den Halm von  $\mathcal{F}$  in  $x$ . Nun definiert man die Menge

$$\text{Spé}(\mathcal{F}) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Definiere weiter eine Projektionsabbildung  $\pi: \text{Spé}(\mathcal{F}) \rightarrow X$  durch  $\mathcal{F}_x \ni s \mapsto x$ .

Für jede offene Menge  $U \subseteq X$  und für jedes  $s \in \mathcal{F}(U)$  erhält man eine Abbildung  $\bar{s}: U \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$  durch  $x \mapsto s_x$ , wobei  $s_x$  der Keim von  $s$  in  $x$  sei. Alle diese Abbildungen sind Schnitte von  $\pi$  über  $U$ , d. h. für jedes dieser  $\bar{s}$  gilt:  $\pi \circ \bar{s} = \text{id}_U$ . Nun macht man  $\text{Spé}(\mathcal{F})$  zu einem topologischen Raum, indem man ihm die feinste Topologie gibt, so dass alle diese  $\bar{s}$  für alle  $s$  und alle  $U$  stetig werden. Versehen mit dieser Topologie heißt  $\text{Spé}(\mathcal{F})$  der *Espace Étale* zur Prägarbe  $\mathcal{F}$ .

Sei nun  $\mathcal{F}^+$  die zu  $\mathcal{F}$  assoziierte Garbe. Zeige:

Für jede offene Menge  $U \subseteq X$  ist  $\mathcal{F}^+(U)$  die Menge aller **stetigen** Schnitte von  $\pi$  über  $U$ . Insbesondere ist  $\mathcal{F}$  genau dann eine Garbe, wenn für jedes offene  $U \subseteq X$  die Menge aller stetigen Schnitte von  $\pi$  über  $U$  gerade  $\mathcal{F}(U)$  ist.

#### Lösung 1

- a) Sei  $U$  offen,  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $s_i$  konsistente Familie.

Fall 1:  $x \in U \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \Rightarrow \mathcal{W}(U_i) = A \Rightarrow \mathcal{W}(U) = A$

Behauptung:  $s = s_i$  ist Amalgam

$\rho_{U_i}^U = \text{id}_A \rightsquigarrow s = s_i$  ist einziger Kandidat

Für  $j \in I$

- mit  $x \in U_j$ :

$$s_j = \text{id}_A(s_j) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j) = \rho_{U_i \cap U_i}^{U_j}(s_j) = \text{id}_A(s_i) = s_i = s = \rho_{U_j}^U(s)$$

- mit  $x \notin U_j$ :

$$s_j = 0, \rho_{U_0}^U(s) = 0$$

Fall 2:  $x \notin U \Rightarrow x \notin U_j \forall j \in I$

$$\Rightarrow \mathcal{W}(U) = \mathcal{W}(U_j) = \{0\}$$

b) Sei  $y \in X$ . Bestimme den Halm von  $\mathcal{W}$  in  $y$ .

$\mathcal{W}_y = \{[(U, s)]_y | s \in \mathcal{W}(U)\}$  mit  $[(U, s)]_y = [(U', s')]_y \Leftrightarrow \exists U'' \subseteq U \cap U', y \in U'' : s|_{U''} = s'|_{U''}$

Fall 1:  $\exists U \subseteq X$  offen,  $y \in U, x \notin U$

$$\Rightarrow [U', s] = [U, 0] \text{ für alle } U' \subseteq X \text{ offen, } s \in \mathcal{W}(U')$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_y = \{0\}$$

Fall 2:  $\forall$  offenen Umgebungen  $U$  von  $y : x \in U$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_y \cong A, \text{ denn: Sei } U \text{ offene Umgebung von } y$$

$$\varphi : \begin{cases} A & \rightarrow \mathcal{W}_y \\ a & \mapsto [U, a] \end{cases}$$

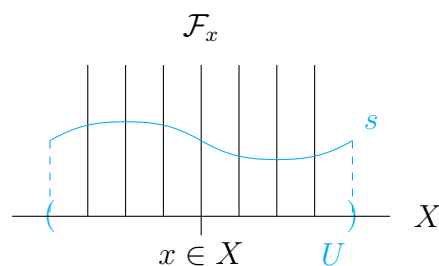
$$\psi : \begin{cases} \mathcal{W}_y & \rightarrow A \\ [U, a] & \mapsto a \end{cases}$$

$$[U, a]_y = [U, b]_y \Leftrightarrow a = a|_{U''} = b|_{U''} = b$$

## Lösung 2

$$s \in \mathcal{F}(U), x \in U \rightsquigarrow [U, s]_x \in \mathcal{F}_x$$

$$\bar{s} : \begin{cases} U & \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F}) \\ x & \mapsto [U, s]_x \in \mathcal{F}_x \end{cases}, \pi \circ \bar{s} = \text{id}_U$$



$\mathcal{F}^+$  assoziiert Garbe zu  $\mathcal{F}$ , also für  $U \subseteq X$  offen:

$$\mathcal{F}^+(U) := \{s : U \rightarrow \dot{\bigcup}_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in X : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x, \exists f \in \mathcal{F}(U_x), s(y) = f_y := [(U_x, f)]_y\}$$

Zu zeigen:  $\mathcal{F}^+(U) = \{\text{stetige Schnitte von } \pi \text{ über } U\}$

„ $\subseteq$ “: Sei  $s \in \mathcal{F}^+(U)$

$$\pi \circ s = \text{id} \Rightarrow s \text{ Schnitt}$$

Noch zu zeigen:  $s$  ist stetig

Nach Definition von  $\mathcal{F}^+$  gibt es Überdeckung  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  und Schnitte  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s|_{U_i} = \bar{s}_i$ . Die  $\bar{s}_i : U_i \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$  sind stetig. Sei  $\tilde{U} \subseteq \text{Spé}(\mathcal{F})$  offen.

$$\bar{s}_i^{-1}(\tilde{U}) = s^{-1}(\tilde{U}) \cap U_i \text{ offen}$$

$$s^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i \in I} (s^{-1}(\tilde{U}) \cap U_i) \text{ ist offen}$$

„ $\supseteq$ “: Sei  $s : U \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$  stetiger Schnitt von  $\pi$  über  $U$ , das heißt  $\forall x \in X : s(x) \in \mathcal{F}_x$ .

Noch zu zeigen:  $\forall x \in X \exists U_x \in \text{Off}(X)$  mit  $x \in U_x$  und ein  $f \in \mathcal{F}(U_x)$  sodass  $\forall y \in U$  gilt  $s(y) = f_y$

Sei  $x \in X$ ,  $s(x) = [U', s']_x \in \mathcal{F}_x$ ,  $s' \in \mathcal{F}(U')$

$\tilde{U} := \{[U', s']_y \in \mathcal{F}_y | y \in U'\}$  ist offen in  $\text{Spé}(\mathcal{F})$  und enthält  $s(x)$ .

$$[U', s']_y = [U'', s'']_y$$

$$\Rightarrow \exists U''' \subseteq U' \cap U'' : s'|_{U'''} = s''|_{U'''}$$

$$s''^{-1}(\tilde{U} \cap s'(U''')) = s'^{-1}(\tilde{U} \cap s'(U''')) \text{ offen}$$

$$\text{Setze } U_x := s^{-1}(\tilde{U})$$

$$s \text{ stetig} \Rightarrow U_x \text{ offen, } x \in U_x$$

$$\text{Außerdem: } \forall y \in U_x : \bar{s}'(y) = \underbrace{[U', s']_y}_{=[U_x, s'|_{U_x}]_y} \stackrel{\pi \circ s = \text{id}}{=} s(y)$$

$$\Rightarrow s'|_{U_x} \in \mathcal{F}(U_x) \text{ erfüllt Garbeneigenschaft.}$$

### zur Lösung:

In der Übung wollte ich zeigen, dass für offenes  $U' \subseteq X$  mit  $x \in U'$  und  $s' \in \mathcal{F}(U')$  die Menge  $\tilde{U} := \{[U', s']_y \in \mathcal{F}_y | y \in U'\}$  offen ist bezüglich der oben definierten Topologie auf  $\text{Spé}(\mathcal{F})$ .

Auf einmal scheint das Argument auf meinem Zettel wieder zu stimmen (war nur etwas knapp formuliert), deshalb schreibe ich es hier nochmal ausführlicher auf.

Zu zeigen ist ja, dass für jedes offene  $U'' \subseteq X$  und jedes  $s'' \in \mathcal{F}(U'')$  die Menge  $(\bar{s}'')^{-1}(\tilde{U})$  offen in  $X$  ist. Sei also  $U'' \in \text{Off}(X)$  und  $s'' \in \mathcal{F}(U'')$ .

Ist  $(\bar{s}'')^{-1}(\tilde{U}) = \emptyset$ , so ist nichts weiter zu zeigen, da  $\emptyset$  ja offen ist. Ist andernfalls  $y \in (\bar{s}'')^{-1}(\tilde{U})$ , so ist  $\bar{s}''(y) \in \tilde{U}$  und wegen  $\bar{s}''(y) \in \mathcal{F}_y$  folgt  $[U'', s'']_y = [U', s']_y$  ( $\tilde{U}$  enthält ja pro Halm höchstens ein Element). Folglich existiert ein offenes  $U''' \subseteq U' \cap U''$  mit  $y \in U'''$  und  $s'|_{U'''} = s''|_{U'''}$ . Somit ist  $U''' \subseteq (\bar{s}'')^{-1}(\tilde{U})$  eine offene Umgebung von  $y$  und  $(\bar{s}'')^{-1}(\tilde{U})$  offen.

# Übung 1 vom 1. Mai 2012

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

- a) Sei  $X := \{0, 1\}$  mit der diskreten Topologie versehen (d. h. jede Teilmenge ist offen). Bestimme alle Garben  $\mathcal{F}$  von Mengen auf  $X$ .
- b) Bestimme die Halme  $\mathcal{F}_x$  der Garben  $\mathcal{F}$  aus Teil a) in den Punkten  $x = 0$  und  $x = 1$ .

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  die Prägarbe der konstanten Funktionen auf  $X$ . Genauer sei für  $U \subseteq X$  offen  $\mathcal{F}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ ist konstant}\}$  und für  $V \subseteq U \subseteq X$  offen  $\rho_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V), f \mapsto f|_V$ .

- a) Zeige, dass  $\mathcal{F}$  im allgemeinen keine Garbe ist.
- b) Berechne die zu  $\mathcal{F}$  assoziierte Garbe  $\mathcal{F}^+$ .

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{B}$  eine Basis<sup>1</sup> der Topologie von  $X$ . Weiter sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Wir definieren eine  $\mathcal{B}$ -Garbe auf  $X$  als kontravarianten Funktor  $\mathcal{F}'$  von  $(\mathcal{B}, \subseteq)$  nach  $\mathcal{C}$ , der die  $\mathcal{B}$ -Garbeneigenschaft erfüllt:

Sind  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit  $U, U_i \in \mathcal{B}$  und  $(s_i)_{i \in I}$  mit  $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$  gegeben, so dass  $\rho_V^{U_i}(s_i) = \rho_V^{U_j}(s_j)$  für alle  $V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}$  gilt, dann existiert genau ein  $s \in \mathcal{F}'(U)$  mit  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$  für alle  $i \in I$ .

Sei zunächst  $\mathcal{C}$  die Kategorie der Mengen.

- a) Zeige, dass sich  $\mathcal{F}'$  eindeutig zu einer Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  fortsetzen lässt.  
*Hinweis:* Inverser Limes
- b) Es seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Garben auf  $X$  und für  $U \in \mathcal{B}$  Abbildungen  $\tilde{\varphi}(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  gegeben, die mit den Restriktionsabbildungen  $\rho_V^U$  kommutieren.  
Zeige, dass es einen eindeutigen Garbenmorphismus  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  gibt mit  $\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U)$  für alle  $U \in \mathcal{B}$ .
- c) Mache dir klar, dass a) und b) auch in der Kategorie der (abelschen) Gruppen, der Ringe und der  $R$ -Moduln gelten.

## Lösung 1

- a) Die offenen Mengen von  $X$  sind  $\text{Off}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ . Eine Garbe von Mengen auf  $X$  ordnet jedem Element aus  $\text{Off}(X)$  eine Menge zu, also

$$\emptyset \rightarrow M_\emptyset, \quad \{0\} \rightarrow M_0, \quad \{1\} \rightarrow M_1, \quad X \rightarrow M_X.$$

Zusätzlich brauchen wir noch Restriktionsabbildungen

$$M_0 \rightarrow M_\emptyset, \quad M_1 \rightarrow M_\emptyset, \quad M_X \rightarrow M_\emptyset, \quad M_X \rightarrow M_0, \quad M_X \rightarrow M_1,$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M_X & \longrightarrow & M_0 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_\emptyset \end{array}$$

<sup>1</sup>d. h. alle offenen  $U \subseteq X$  lassen sich als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{B}$  schreiben

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass  $M_\emptyset$  einelementig sein muss. Dann kommutiert das obige Diagramm automatisch.

Da die offenen Mengen  $\{0\}$  und  $\{1\}$  die offene Menge  $\{0, 1\}$  überdecken, besagt die Garbeneigenschaft, dass es zu jedem  $a \in M_0$  und jedem  $b \in M_1$  ein eindeutig bestimmtes  $c \in M_X$  geben muss mit  $\rho_{\{0\}}^X(c) = a$  und  $\rho_{\{1\}}^X(c) = b$ . Das bedeutet, dass  $M_X \cong M_0 \times M_1$  ist. Damit haben wir alle Garben von Mengen auf  $X$  charakterisiert.

b) Der Halm der Garbe  $\mathcal{F}$  in  $x$  ist definiert als

$$\mathcal{F}_x := \{ (U, f) \mid U \in \text{Off}(X), x \in U, s \in \mathcal{F}(U) \} / \sim,$$

wobei zwei Paare  $(U, s)$  und  $(U', s')$  äquivalent sein sollen, wenn es ein  $U'' \subseteq U \cap U'$  gibt mit  $\rho_{U''}^U(s) = \rho_{U''}^{U'}(s')$ .

Zwei Punkte  $(X, (a, b))$  und  $(X, (a', b'))$  beschreiben genau dann den gleichen Punkt in  $\mathcal{F}_0$ , wenn  $a = \rho_{\{0\}}^X((a, b)) = \rho_{\{0\}}^X((a', b')) = a'$ . Also ist  $\mathcal{F}_0 \cong M_0$ . Ebenso ist  $\mathcal{F}_1 \cong M_1$ .

## Lösung 2

a) Falls es in  $X$  offene Mengen  $U$  und  $U'$  gibt mit  $U \cap U' = \emptyset$ , dann ist  $\mathcal{F}$  keine Garbe:

Seien  $f_1 \in \mathcal{F}(U)$  mit  $f_1 \equiv 1$  und  $f_2 \in \mathcal{F}(U')$  mit  $f_2 \equiv 2$ . Da  $U \cap U' = \emptyset$ , ist  $f_1|_{U \cap U'} = f_2|_{U \cap U'}$  und  $(f_i)_{i \in \{1, 2\}}$  ist eine konsistente Familie für die offene Überdeckung  $U \cup U'$ . Da aber für  $f \in \mathcal{F}(U \cup U')$  nicht gleichzeitig  $f|_U \equiv 1$  und  $f|_{U'} \equiv 2$  gelten kann, gibt es zu der konsistenten Familie kein Amalgam.

b) Zunächst berechnen wir die Halme von  $\mathcal{F}$ :

$$[(U, f)]_x = [(U', f')]_x \Leftrightarrow \exists U'' \subseteq U \cap U' \text{ mit } x \in U'' : f|_{U''} = f'|_{U''} \Leftrightarrow f(x) = f'(x)$$

Die Halme sind also über  $[(U, f)]_x \mapsto f(x)$  alle isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

Es gilt

$$\mathcal{F}^+(U) := \left\{ s : U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U : s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x, \right. \\ \left. \exists f \in \mathcal{F}(U_x) \forall y \in U_x : s(y) = [(U_x, f)]_y =: f_y \right\}.$$

Benutzen wir die Isomorphismen  $\mathcal{F}_x \ni [(U, f)]_x \mapsto f(x) \in \mathbb{Z}$  der Halme mit  $\mathbb{Z}$ , sowie die Tatsache, dass  $f \in \mathcal{F}(U_x)$  konstant ist, so besagt die letzte Bedingung an  $s$ :

$$\forall x \in U \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x : \forall y \in U_x : s(y) = s(x).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(U) &= \{ s : U \rightarrow \mathbb{Z} \mid \forall x \in U \exists U_x \in \text{Off}(X), x \in U_x : s|_{U_x} \text{ ist konstant} \} \\ &= \{ s : U \rightarrow \mathbb{Z} \mid s \text{ ist lokal konstant} \}. \end{aligned}$$

## Lösung 3

a) Wir nutzen den Hinweis und definieren  $\mathcal{F}$  mit Hilfe des inversen Limes. Für  $U \in \text{Off}(X)$  setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &:= \varprojlim_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \\ &= \{ (s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \in \prod_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mathcal{F}(V) \mid \forall W \subseteq V \subseteq U, V, W \in \mathcal{B} : \rho_W^V(s_V) = s_W \} \end{aligned}$$

und für  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen sei

$$\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U'), (s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} \mapsto (s_V)_{V \subseteq U', V \in \mathcal{B}}.$$

Die Abbildung  $\rho_{U'}^U$  bildet die Familie  $(s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}}$  auf die Teilfamilie über den  $V \subseteq U'$  ab, also gilt  $\rho_U^U = \text{id}_U$  und  $\rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \rho_{U''}^U$  und wir haben eine Prägarbe von Mengen definiert.

Die Prägarbe  $\mathcal{F}$  stimmt auf den Mengen  $V \in \mathcal{B}$  mit  $\mathcal{F}'$  überein:

Die Abbildung

$$\psi(V): \mathcal{F}'(V) \rightarrow \mathcal{F}(V), s \mapsto (s|_{V'})_{V' \subseteq V, V' \in \mathcal{B}}$$

ist wohldefiniert, da eine  $\mathcal{B}$ -Garbe insbesondere ein kontravarianter Funktor von  $(\mathcal{B}, \subseteq)$  nach  $\mathcal{C}$  ist. Außerdem liefert uns die  $\mathcal{B}$ -Garbeneigenschaft eine wohldefinierte Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}(V): \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}'(V), (s_{V'})_{V' \subseteq V, V' \in \mathcal{B}} \mapsto s_V.$$

Sowohl  $\psi$  als auch  $\psi^{-1}$  kommutieren mit den Restriktionsabbildungen.

Weiter ist  $\mathcal{F}$  sogar eine Garbe von Mengen auf  $X$ :

Sei  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung,  $s_i = (s_{i,V})_{V \subseteq U_i, V \in \mathcal{B}} \in \mathcal{F}(U_i)$  und  $(s_i)_{i \in I}$  eine konsistente Familie. Ist  $s := (s_V)_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}}$  ein Amalgam zu der konsistenten Familie  $(s_i)_{i \in I}$ , so muss für alle  $V \subseteq U_i$ ,  $V \in \mathcal{B}$  wegen  $\rho_V^{U_i}(s) = s_i$  die Gleichheit  $s_V = s_{i,V}$  gelten. Da die Familie konsistent ist, gilt  $(s_{i,V})_{V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}} = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j) = (s_{j,V})_{V \subseteq U_i \cap U_j, V \in \mathcal{B}}$  und  $s_V$  ist auch für  $V \in U_i \cap U_j$  wohldefiniert.

Sei nun  $V \subseteq U$ ,  $V \in \mathcal{B}$  beliebig. Dann sind die  $(s_{V'})_{V' \subseteq V \cap U_i, V' \in \mathcal{B}}$  bereits alle definiert und stimmen auf den Schnitten  $U_i \cap U_j$  überein. Da  $\mathcal{B}$  eine Basis der Topologie ist, ist  $V = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{V' \subseteq V \cap U_i, V' \in \mathcal{B}} V'$  und nach der  $\mathcal{B}$ -Garbeneigenschaft gibt es dann genau ein  $s_V \in \mathcal{F}'(V) \cong \mathcal{F}(V)$  mit  $\rho_{V'}^V(s_V) = s_{V'}$  für alle  $i \in I$ ,  $V' \subseteq V \cap U_i$ ,  $V' \in \mathcal{B}$ . Folglich existiert das Amalgam  $s$  und da wir bei der Konstruktion keine Wahl zu treffen hatten, ist es auch eindeutig.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{F}$  bis auf Isomorphie eindeutig ist. Dafür verwenden wir den Aufgabenteil b):

Sei also  $\mathcal{G}$  eine weitere Garbe von Mengen auf  $X$ , mit  $\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}'(V) = \mathcal{F}(V)$  für alle  $V \in \mathcal{B}$ . Auf den Basismengen  $V$  der Topologie sind also  $\text{id}(V): \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  und  $\text{id}(V): \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  wohldefinierte Abbildungen, die mit den Restriktionen kommutieren. Nach b) existieren dann genau ein Garbenmorphismus  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  und ein Garbenmorphismus  $\varphi': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ , der  $\text{id}$  fortsetzt.

Weiterhin ist  $\varphi' \circ \varphi(V) = \text{id}_{\mathcal{F}(V)}$  und, wiederum nach b), gibt es genau einen Garbenmorphismus von  $\mathcal{F}$  nach  $\mathcal{F}$ , der diese fortsetzt. Da sowohl der Identitätsfunktor  $\text{id}_{\mathcal{F}}$ , als auch  $\varphi' \circ \varphi$  solche eine Fortsetzung sind, gilt  $\varphi' \circ \varphi \cong \text{id}_{\mathcal{F}}$ . Genauso zeigt man  $\varphi \circ \varphi' \cong \text{id}_{\mathcal{G}}$  und hat damit bewiesen, dass  $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$  ist.

- b) Seien also  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  zwei Garben und für alle  $V \in \mathcal{B}$  eine Abbildung  $\varphi(V): \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  gegeben, so dass die  $\varphi(V)$  mit den Restriktionsabbildungen kommutieren. Sei nun  $U \in \text{Off}(X)$  beliebig. Da  $\mathcal{B}$  eine Basis der Topologie auf  $X$  ist, gilt  $U = \bigcup_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} V$ . Damit ist  $\varphi(U)$  bereits eindeutig bestimmt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Sei  $f \in \mathcal{F}(U)$ . Für alle  $V \subseteq U, V \in \mathcal{B}$  sind die Schnitte  $\rho_V^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho_V^U(f)) \in \mathcal{G}(V)$  festgelegt und bilden eine konsistente Familie in  $\mathcal{G}$ . Da  $\mathcal{G}$  eine Garbe ist, ist  $\varphi(U)(f) \in \mathcal{G}(U)$  damit eindeutig bestimmt.

Ist  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen, dann ist jedes  $V \subseteq U', V \in \mathcal{B}$  auch in  $U$  enthalten. Es gilt  $\rho_V^{U'}(\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f))) = \rho_V^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(V)(\rho_V^U(f))$ , also ist  $\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f))$  ein Amalgam für die  $\varphi(V)(\rho_V^U(f))$  und es gilt  $\rho_{U'}^U(\varphi(U)(f)) = \varphi(U')(\rho_{U'}^U(f))$ .

- c) Hier muss man sich klar machen, dass  $\mathcal{F}(U)$  eine (abelsche) Gruppe/ein Ring/ein  $R$ -Modul ist, falls die  $\mathcal{F}'(V)$  es sind und dass die Restriktionsabbildungen in der entsprechenden Kategorie liegen. Auch in b) muss gezeigt werden, dass die  $\varphi(U)$  Morphismen aus der richtigen Kategorie sind.

*Anmerkung:* Natürlich hätte man bei dieser Aufgabe alles noch ein wenig kategorieller formulieren können und vor allem die UAE des inversen Limes mit ins Spiel bringen.

## Übung 2 vom 7. Mai 2012

Auf diesem Blatt bezeichne  $R$  immer einen kommutativen Ring mit Eins und  $k$  einen Körper.

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise die Proposition 1.14 aus der Vorlesung: Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig,  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{G}$  eine Garbe auf  $Y$ . Dann ist  $f^{-1}$  linksadjungiert zu  $f_*$  in der Kategorie der Garben, d. h. es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige das folgende Lemma von Krull:

- Sei  $S \subseteq R$  ein multiplikatives System und  $I \subseteq R$  ein Ideal, das disjunkt zu  $S$  ist. Dann gibt es ein Primideal  $\wp \subseteq R$ , das  $I$  enthält und ebenfalls zu  $S$  disjunkt ist.
- Es gilt:

$$\bigcap_{\substack{\wp \text{ Primideal in } R \\ I \subseteq \wp}} \wp = \sqrt{I}.$$

### Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeige:

- Jede **abgeschlossene, nicht leere**, irreduzible Teilmenge von  $\mathrm{Spec} R$  hat genau einen generischen Punkt.
- Die irreduziblen Komponenten von  $\mathrm{Spec} R$  entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in  $R$ .

### Aufgabe 4 (6 Punkte)

Bestimme  $\mathrm{Spec} R$  für folgende Ringe  $R$ :

- $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .
- $R = k[X]/(X^2)$ .
- $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$  mit  $S = k[X] \setminus (X)$ .
- $R = \mathbb{C}[A]$ , die von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  im Matrizenring  $\mathbb{C}^{n \times n}$  erzeugte  $\mathbb{C}$ -Unteralgebra.

*Hinweis: Hier kann die Lineare Algebra helfen.*

### Direkter Limes:

$(I, \leq)$  gerichtet  $:\Leftrightarrow$  teilgeordnet und jede endliche Teilmenge hat obere Schranke

Gerichtetes System in Kategorie  $\mathcal{K}$  zu  $(I, \leq)$  ist kovarianter Funktor von  $(I, \leq)$  nach  $\mathcal{K}$ . Der direkte Limes (falls er existiert) zu diesem gerichteten System ist ein  $\varinjlim A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$  zusammen mit  $\psi_j: A_j \rightarrow \varinjlim A_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A_j, \varinjlim A_i)$ , sodass:

$$\begin{array}{ccc}
 & A_j \xrightarrow{\rho_k^j} A_k & \\
 \psi_j \swarrow & & \searrow \psi_k \\
 & \varinjlim A_i & \\
 h_j \swarrow & & \searrow h_k \\
 & B &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A_j \xrightarrow{\rho_k^j} A_k & \\
 h_j \swarrow & & \searrow h_k \\
 & B &
 \end{array}$$



$\forall B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  zusammen mit  $h_j : A_j \rightarrow B$  mit Diagramme kommutieren (siehe oben)  
 $\Rightarrow \exists! f : \varinjlim A_i \rightarrow B : f \circ \psi_k = h_k \forall k \in I$

### Lösung 1

$X, Y$  Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $X$ ,  $\mathcal{G}$  Garbe auf  $Y$  (von abelschen Gruppen)

#### Erinnerung:

- direkte Bildgarbe:  $\forall V \subseteq Y : f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$
- Urbildgarbe:  $\forall U \subseteq X : f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} \mathcal{G}(V)$

Zu zeigen:  $f^{-1}$  adjungiert zu  $f_*$ , das heißt es gibt eine in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  natürliche Bijektion  
 $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$

Sei  $\alpha \in \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$

$\Rightarrow f_*\alpha : f_*f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  durch  $(f_*\alpha)(V) = \alpha(f^{-1}(V)) \rightsquigarrow$  es fehlt noch:  $\mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$

Sei  $V \in \text{Off}(Y)$ :

$$f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subseteq W \in \text{Off}(Y)} \mathcal{G}(W)$$

da  $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

Zum direkten Limes gehört  $\psi(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subseteq W \in \text{Off}(Y)} \mathcal{G}(W)$ .

Sei  $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \Rightarrow f^{-1}\beta : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f^{-1}f_*\mathcal{F}$ . Sei  $U \in \text{Off}(X)$ :

$$f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} f_*\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

$$f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V \in \text{Off}(Y)} \mathcal{G}(V)$$

Seien  $V', V'' \in \text{Off}(Y)$ ,  $f(U) \subseteq V' \subseteq V''$ ,  $\exists! f^{-1}\beta$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}(V'') & \xrightarrow{\rho_{V''}^{V'}} & \mathcal{G}(V') & & \\ \beta(V'') \downarrow & \swarrow // & \downarrow \beta(V') & & \mathcal{G}(V') \xrightarrow{\psi_{f^{-1}\mathcal{G}}} f^{-1}\mathcal{G}(U) \\ f_*\mathcal{F}(V'') & \xrightarrow{\rho_{V''}^{V'}} & f_*\mathcal{F}(V') & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} \swarrow \tilde{\psi}(V') \circ \beta(V') & & \searrow f^{-1}\beta \\ & f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) & \end{array} \\ \tilde{\psi}(V'') \searrow & \swarrow // & \swarrow \tilde{\psi}(V'') & & \\ & \varinjlim_{f(U) \subseteq V} f_*\mathcal{F}(V) & & & \end{array}$$

Es fehlt noch:  $\varphi_{\mathcal{F}} : f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$

Seien  $V', V''$  wie eben. Dann:  $U \subseteq f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V'')$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(f^{-1}(V'')) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \\ \rho \searrow & // & \swarrow \rho \\ & \mathcal{F}(U) & \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists! \varphi_{\mathcal{F}}(U) : f^{-1} f_* \mathcal{F}(U) : \varphi_{\mathcal{F}} \circ \tilde{\psi} = \rho$$

Definiere:

$$\begin{aligned} T_1 : \operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) &\ni \alpha \mapsto f_* \alpha \circ \psi_{\mathcal{G}} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}) \\ T_2 : \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}) &\ni \beta \mapsto \varphi_{\mathcal{F}} \circ f^{-1} \beta \in \operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Sei  $\alpha \in \operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ ,  $U \in \operatorname{Off}(X)$ . Sei dazu  $V \in \operatorname{Off}(Y)$  mit  $f(U) \subseteq V$ , also  $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho_U^{f^{-1}(V)} & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \\ f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = f_* f^{-1}\mathcal{G}(V) & \xleftarrow{\psi_{\mathcal{G}}(V)} & \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\psi_{f^{-1}\mathcal{G}}(V)} & f^{-1}\mathcal{G}(U) \\ \downarrow \alpha(f^{-1}(V)) = f_* \alpha(V) & & \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\tilde{\psi}(V)} & f^{-1} f_* \mathcal{F}(U) & & \\ \downarrow \rho_U^{f^{-1}(V)} & & \swarrow \varphi_{\mathcal{F}}(U) & & \\ & & \mathcal{F}(U) & & \end{array}$$

Additional labels in the diagram:  $\hat{\alpha}(U)$  on the bottom right arrow,  $f^{-1}(f_* \alpha \circ \psi_{\mathcal{G}})(U)$  on the dashed arrow from  $\mathcal{G}(V)$  to  $f^{-1} f_* \mathcal{F}(U)$ , and several  $//$  symbols indicating commutativity of various sub-diagrams.

Zu zeigen:  $\hat{\alpha} = \alpha$

## Lösung 2

a) Betrachte den kanonischen Ringhomomorphismus  $\varphi: R \rightarrow R_S$ . Sei  $I' = (\varphi(I))$  das von  $\varphi(I)$  erzeugte Ideal in  $R_S$ , also  $I' = \{\frac{f}{a} \in R_S \mid f \in I, a \in S\}$ .

Zunächst überlegen wir uns, dass  $I' \neq R_S$ , also  $1 \notin I'$ . Denn wäre  $1 \in I'$ , dann gäbe es ein  $f \in I$  und ein  $a \in S$  mit  $1 = \frac{f}{a}$  in  $R_S$ , d.h. es gäbe ein

$$s \in S \text{ mit } s(f - a) = 0.$$

Dann wäre  $sf = sa$  sowohl in  $I$  als auch in  $S$  – ein Widerspruch zur Disjunktheit!

Somit ist  $I'$  ein echtes Ideal und damit in einem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}'$  enthalten. Dann ist  $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$  ein Primideal, enthält  $I$  und hat leeren Schnitt mit  $S$ , denn sonst wäre für  $s \in S \cap \mathfrak{p}$  das Bild  $\varphi(s) \in \mathfrak{m}'$  eine Einheit in  $R_S$ .

b) „ $\supseteq$ “: Ist  $f \in \sqrt{I}$ , so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n \in I$ . Folglich gilt für alle  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ , dass  $f^n \in \mathfrak{p}$ , also auch  $f \in \mathfrak{p}$ .

„ $\subseteq$ “: Sei  $a \in R \setminus \sqrt{I}$  und  $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ . Dann ist  $S$  ein multiplikatives System und  $I \cap S = \emptyset$ . Nach a) gibt es dann ein Primideal  $\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{p} \supseteq I$  und  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Damit liegt  $a$  nicht im Schnitt über alle Primideale, die  $I$  enthalten.

## Lösung 3

$R$  kommutativer Ring mit Eins.

a)  $V \neq \emptyset$ , abgeschlossen, irreduzibel,  $V \subseteq \operatorname{Spec} R$

$$\Rightarrow \underbrace{V = V(I)}_{\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}}, I \text{ Primideal}$$

$$\Rightarrow \overline{\{I\}} = V(I(\overline{\{I\}})) = V(I) = V$$

Seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$  mit  $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$

$$\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) = \{\tilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \subseteq \tilde{\mathfrak{p}}\} \Rightarrow \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$$

$$\text{Analog } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$$

- b) Seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec } R$   
 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}} \Leftrightarrow \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \overline{\{\mathfrak{p}\}}$

#### Lösung 4

$\text{Spec} : \underline{\text{Ringe}} \rightarrow \underline{\text{Top.}}$  kontravarianter Funktor,  $\alpha : R \rightarrow R'$ ,  $\text{Spec}(\alpha) : \begin{cases} \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R \\ \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p}) \end{cases}$

Sei  $R$  Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $\pi : R \rightarrow R/I$  die kanonische Projektion, dann ist  $\text{Spec } \pi : \text{Spec } R/I \hookrightarrow \text{Spec } R$  injektiv.

$$\text{Bild}(\text{Spec } \pi) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

- a)  $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $I := n\mathbb{Z}$ ,  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\text{Bild}(\text{Spec } \pi) = \{(p) \in \text{Spec } \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{P}, p|n\}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : D(x) \subseteq D(y) \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} : x^m = z \cdot y$   
 $(x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, D(x) = \mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid x \in \mathfrak{p})$   
 $\rho_{D(x)}^{D(y)} : R_y \rightarrow R_x, \frac{a}{y^k} \mapsto \frac{a \cdot z^k}{x^{m \cdot k}}$
- b) Es gilt  $\text{Spec}(k[X]) = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}\}$ . Sei  $R = k[X]/(X^2)$ ,  $I := (X^2)$  und  $\pi : k[X] \rightarrow k[X]/I$ . Dann ist

$$\text{Bild}(\text{Spec } \pi) = \{(f) \in \text{Spec } k[X]/(X^2) \mid f \in k[X] \text{ irreduzibel}, (X^2) \subseteq (f)\} = \{(X)\}$$

und somit  $Y := \text{Spec } R = \{(X)\}$  einelementig. Die Strukturgarbe ist dann offensichtlich:

$$\mathcal{O}_Y(Y) = R \xrightarrow{\rho_\emptyset^Y \text{ eindeutig}} \{p\} = \mathcal{O}_Y(\emptyset)$$

- c) Nun sei  $R = k[X]_{(X)} = k[X]_S$  mit  $S = k[X] \setminus (X)$ . Der Ring ist als Teilring von  $k(X)$  nullteilerfrei und somit ist  $(0)$  ein Primideal. Außerdem ist der Ring lokal, mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times = (\frac{X}{1})$ . Sei nun  $\emptyset \neq \mathfrak{p} \in \text{Spec } R$  und  $f \in \mathfrak{p}$ . Dann schreiben wir  $f = \frac{X^e}{1} \cdot \frac{a}{b}$  mit  $a \in k[X], b \in k[X] \setminus (X), X \nmid a$ . Dann ist  $a \in S$  und  $\frac{a}{b}$  somit offensichtlich invertierbar, also gilt  $\frac{X^e}{1} \in \mathfrak{p}$ . Da  $\mathfrak{p}$  prim ist, ist  $\frac{X}{1} \in \mathfrak{p}$  und wegen  $\mathfrak{p} \subseteq (\frac{X}{1})$  folgt  $\mathfrak{p} = (\frac{X}{1})$ . Folglich besteht das Spektrum von  $R$  aus genau zwei Punkten:  $Y := \text{Spec } k[X]_{(X)} = \{(0), (\frac{X}{1})\}$ . Die offenen Mengen sind  $\emptyset, D(\frac{X}{1}) = \{(0)\}$  und  $Y$ . Auch hier ist die Strukturgarbe leicht anzugeben:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_Y(Y) & = & R & = & k[X]_{(X)} \\ \downarrow & & & & \searrow \\ \mathcal{O}_Y(D(\frac{X}{1})) & = & R_{\frac{X}{1}} & = & \text{Quot}(k[X]) = k(X) \\ \downarrow & & & & \swarrow \\ \mathcal{O}_Y(\emptyset) & = & \{p\} & & \end{array}$$

- d) Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus  $\Psi_A : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[A]$ . Der Kern von  $\Psi_A$  ist  $(\mathfrak{m}_A)$ , wobei  $\mathfrak{m}_A = \prod_{i=1}^e (X - \lambda_i)^{r_i}$  das Minimalpolynom von  $A$  ist, mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  von  $A$ . Nach dem Homomorphiesatz ist  $\mathbb{C}[A] \cong \mathbb{C}[X]/(\mathfrak{m}_A)$ . Unsere Vorüberlegungen liefern dann, genau wie in a) und b),

$$\text{Bild}(\text{Spec } \Psi_a) = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathbb{C}[X] \mid (\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{q}\} = \{(X - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$$

und somit  $\text{Spec } \mathbb{C}[A] = \{(A - \lambda_i) \mid \lambda_i \text{ ist EW von } A\}$ .

## Übung 3 vom 15. Mai 2012

Auf diesem Blatt bezeichne  $R$  immer einen kommutativen Ring mit Eins.

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema und  $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$  ein affines Schema. Zeige, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} R) &\rightarrow \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X)), \\ (\varphi, \varphi^\#) &\mapsto \varphi^\#(\operatorname{Spec} R) \end{aligned}$$

bijektiv ist.

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

- a) Zeige, dass  $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$  ein terminales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist, dass es also zu jedem affinen Schema  $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$  genau einen Morphismus  $(\varphi, \varphi^\#)$  von lokal geringten Räumen nach  $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$  gibt.
- b) Finde jeweils einen Ring  $R$ , so dass der Morphismus  $(\varphi, \varphi^\#)$  aus a)
- genau einen Punkt als Bild hat,
  - genau zwei Punkte als Bild hat,
  - unendlich viele Punkte als Bild hat, aber nicht surjektiv ist,
  - surjektiv ist.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige:

- a) Ein Element  $e \in R$  ist genau dann idempotent (d.h. es gilt  $e^2 = e$ ), wenn  $1 - e$  idempotent ist.
- b) Gibt es in  $R$  zwei Elemente  $e_1, e_2 \notin R^\times$ , so dass  $e_1 + e_2 = 1$  und  $e_1 \cdot e_2$  nilpotent ist, so enthält  $R$  mindestens drei idempotente Elemente.  
*Hinweis: Betrachte das Ideal  $I_n = (e_1^n, e_2^n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ .*
- c)  $\operatorname{Spec} R$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $R$  höchstens zwei idempotente Elemente enthält.
- d) Gib einen Ring  $R$  an, sodass  $\operatorname{Spec} R$  nicht zusammenhängend ist.

### Lösung 1

$(X, \mathcal{O}_X)$  Schema,  $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$  affines Schema

Zu zeigen:  $\begin{aligned} \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} R) &\rightarrow \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X)) \\ (\varphi, \varphi^\#) &\mapsto \varphi^\#(\operatorname{Spec} R) \end{aligned}$  ist bijektiv

Konstruiere die Umkehrabbildung. Sei  $\Phi : R \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$  Ringhomomorphismus. Konstruiere  $\varphi : X \rightarrow \operatorname{Spec} R$  stetig (bezüglich Zariski-Topologie).

Sei  $p \in X$ ,  $R \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\Psi_X} \mathcal{O}_{X,p} = \varinjlim_{p \in U \in \operatorname{Off}(X)} \mathcal{O}_X(U)$

$\mathcal{O}_{X,p}$  ist lokaler Ring mit maximalem Ideal  $m_p$ . Setze  $\varphi(p) := (\Psi_X \circ \Phi)^{-1}(m_p)$ .

*Behauptung:*  $\varphi$  ist stetig

*denn:* Es reicht das für Basismengen zu überprüfen  $\rightsquigarrow$  auf affinen Teilen reicht.

Sei  $\operatorname{Spec} S \subseteq X$ ,  $p \in S \subseteq \operatorname{Spec} S$

$$\begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & \mathcal{O}_{X,p} \\
 & & \downarrow \rho_{\text{Spec } S}^X & \Downarrow & \downarrow \cong \\
 S = \mathcal{O}_{\text{Spec } S}(\text{Spec } S) = \mathcal{O}_X(\text{Spec } S) & \xrightarrow{\Psi_{\text{Spec } S}} & & & \mathcal{O}_{\text{Spec } S|_p} = S_p
 \end{array}$$

$(\Psi_X \circ \Phi)^{-1}(m_p) = (\Psi_{\text{Spec } S} \circ \rho_{\text{Spec } S}^X \circ \Phi)^{-1}(p) = \Phi^{-1}(\rho_{\text{Spec } S}^X(p)) \Rightarrow$  auf allen affinen Teilen gilt:  $\varphi|_{\text{Spec } S}(p) = \Phi^{-1}(p) \rightsquigarrow$  nach Bemerkung 2.4 stetig.

Konstruiere Garbenmorphismus  $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$ . Sei  $f \in R$ ,  $D(f) = \{p \in \text{Spec } R \mid f \notin p\} \subseteq \text{Spec } R$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{O}_X(X) \\
 & \downarrow v & \downarrow i & \Downarrow & \downarrow \rho_{\varphi^{-1}(D(f))}^X \\
 (*) & \mathcal{O}_{\text{Spec } R}(D(f)) = R_f & \xrightarrow[h = \varphi^\#(D(f))]{\quad \quad \quad} & \varphi_* \mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(D(f))) & \\
 & & & & S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}
 \end{array}$$

UAE Lokalisierung: Falls  $(\rho \circ \Phi)(S) \subseteq \varphi_* \mathcal{O}_X(D(f))^\times \Rightarrow \exists! h : R_f \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X(D(f))$

$$\rho \circ \Phi = h \circ i$$

$$\varphi^{-1}(D(f)) = \{q \in X \mid \varphi(q) \in D(f)\} = \{q \in X \mid f \notin \varphi(q)\}$$

Für  $q \in \text{Spec } S \subseteq X$  gilt:

$$f \notin \varphi(q) = \Phi^{-1}((\rho_{\text{Spec } S}^X)^{-1}(q)) \Leftrightarrow \rho_{\text{Spec } S}^X(\Phi(f)) \in q \Leftrightarrow q \in D(\rho_{\text{Spec } S}^X(\Phi(f))) = S_{\rho_{\text{Spec } S}^X(\Phi(f))}$$

$\Rightarrow \rho_{\varphi^{-1}(D(f)) \cap \text{Spec } S}^X(\Phi(f))$  ist invertierbar.

$\mathcal{O}_X$  Garbe  $\Rightarrow$  Inverse von  $\varphi(\Phi(f))$  setzen sich zu „globalem“ Inversen zusammen.

$\xrightarrow{\text{UAE}} \exists! \varphi^\#(D(f)) : \mathcal{O}_{\text{Spec } R}(D(f)) \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X(D(f))$  mit (\*)  $\rightsquigarrow$  passt auch auf  $D(f) \cap D(g)$  zusammen.

$\xrightarrow[\text{Aufgabe 3}]{\text{Blatt 1}}$  eindeutige Fortsetzung Garbenmorphismus  $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$

Zeige:  $\varphi^\#$  induziert lokale Ringhomomorphismen auf Halmen.

Für  $q \in \text{Spec } S \subseteq X$  gilt  $\mathcal{O}_{X,q} = \mathcal{O}_{\text{Spec } S,q} = S_q$ . Setze  $p := \varphi(q) \subseteq \text{Spec } R$ .

$$\Rightarrow \varphi_p^\#(p) : \begin{cases} \mathcal{O}_{\text{Spec } R,p} = R_p & \rightarrow S_q \\ \frac{a}{b} & \mapsto \frac{\rho_{\text{Spec } S}^X(\Phi(a))}{\rho_{\text{Spec } S}^X(\Phi(b))} \end{cases}$$

Noch zu zeigen:  $f^\#(\text{Spec } R) = \Phi$

$$\text{Spec } R = D(1) \checkmark$$

$(\varphi, \varphi^\#) \rightarrow \varphi^\#(\text{Spec } R) \rightarrow (\varphi', (\varphi^\#)')$  ist Identität.

## Lösung 2

a)  $(\text{Spec } \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}})$  ist terminales Objekt in der Kategorie der Schemata („affin“ ist über-

flüssig). Ist  $(X, \mathcal{O}_X)$  Schema,  $\exists! \Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \\ 1 & \mapsto 1 \end{cases}$  Ringhomomorphismus  $\xrightarrow{\text{Aufgabe 1}}$

$\exists! (\varphi, \varphi^\#) : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  Schemamorphismus

b) Genau ein Punkt im Bild:  $R = K$  Körper  $\Rightarrow \text{Spec } K = \{(0)\}$

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & K \\ 1 & \mapsto & 1 \end{cases}, \quad \Phi^{-1}((0)) = (p) \in \text{Spec } \mathbb{Z}, \quad p = \text{char } K, \quad \varphi((0)) = (p)$$

$$\varphi_p^\# : \begin{cases} \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}, p} \cong \mathbb{Z}_p & \rightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } K, (0)} = K_{(0)} = k \\ f & \mapsto & \Phi(f)/\Phi(g) \end{cases}$$

Genau zwei Punkte:  $R = \mathbb{Z}_{(p)}, \text{Spec } R = \{(0), (p)\}$

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}_{(p)} \\ 1 & \mapsto & 1 \end{cases}$$

$$\varphi((0)) = \Phi^{-1}((0)) = (0) \Rightarrow \text{Bild zweielementig}$$

$$\varphi((p)) = (p)$$

unendliches Bild, nicht surjektiv: Bemerkung: Ist  $R$  kommutativer Ring mit 1,  $S \subseteq R$  multiplikatives System,  $\Phi : R \rightarrow R_S, \text{Spec } \Phi : \text{Spec } R_S \rightarrow \text{Spec } R \Rightarrow \text{Bild}(\text{Spec } \Phi) = \{p \in \text{Spec } R \mid p \cap S = \emptyset\}$ .  $\text{Spec } \Phi$  ist Bijektion auf das Bild (sogar Homöomorphismus).

$$R = \mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(\text{Spec } \Phi) = \{(p) \in \text{Spec } \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{P}, p \nmid n\}$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(\text{Spec } \Phi) \neq \text{Spec } \mathbb{Z} \text{ für } n \geq 2$$

surjektiv:  $\text{id} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\text{id} : \text{Spec } \mathbb{Z} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$$

### Lösung 3

a) Sei  $e^2 = e$  dann ist  $(1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$ . Mit  $1 - (1 - e) = e$  folgt die andere Richtung.

b) Seien  $e_1, e_2 \in R \setminus R^\times$  mit  $e_1 + e_2 = 1, e_1 e_2$  nilpotent  $\Rightarrow R$  enthält mindestens drei idempotente Elemente.

$0, 1$  sind idempotent

$$I_n = (e_1^n, e_2^n), n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \sqrt{I_n} = R, \text{ denn: } e_1, e_2 \in \sqrt{I_n} \Rightarrow 1 = e_1 + e_2 \in \sqrt{I_n}$$

$$\bullet I_n = R, \text{ denn sonst: } I_n \subseteq m, m \text{ maximales Ideal} \Rightarrow \sqrt{I_n} \subseteq m \not\subseteq R \text{ zu } \sqrt{I_n} = R$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists \alpha_n, \beta_n \in R : \alpha_n e_1^n + \beta_n e_2^n = 1$$

$$e_1 e_2 \text{ nilpotent} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (e_1 e_2)^k = 0$$

$$x = \alpha_k e_1^k = 1 - \beta_k e_2^k \text{ ist idempotent}$$

$$x^2 = \alpha_k e_1^k (1 - \beta_k e_2^k) = \alpha_k e_1^k - \underbrace{\alpha_k \beta_k (e_1 e_2)^k}_{=0} = x$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $x$  weder 1 noch 0 ist. Wäre  $x = 0$ , so wäre  $\beta e_2^k = 1$ , also  $e_2 \in R^\times$ , was im Widerspruch zur gegenteiligen Voraussetzung steht. Analog folgt aus  $x = \alpha e_1^k = 1$ , dass  $e_1 \in R^\times$ .

c) Sei zunächst  $\text{Spec } R$  zusammenhängend. Wir nehmen an, es gäbe drei verschiedenen idempotente Elemente,  $0, 1$  und  $x$ . Nach a) ist dann auch  $1 - x$  idempotent. Setze  $V_1 = V(x)$  und  $V_2 = V(1 - x)$ . Die Mengen sind abgeschlossen (klar) und nichtleer: Wäre  $V_1 = \emptyset$ , so wäre  $x$  in keinem echten Ideal enthalten, also invertierbar und wegen  $x^2 = x$  gleich 1. Genauso folgt aus  $V_2 = \emptyset$ , dass  $1 - x \in R^\times$  und mit  $(1 - x)^2 = (1 - x)$ , dass  $x = 0$ .

Angenommen es gäbe ein  $\mathfrak{p} \in V(x) \cap V(1 - x)$ . Für dieses gälte  $x$  und  $1 - x \in \mathfrak{p}$ , also auch  $1 \in \mathfrak{p}$ , ein Widerspruch. Andererseits ist  $V(x) \cup V(1 - x) = V(x(1 - x)) = V(0) = \text{Spec}(R)$ . Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung von  $\text{Spec}(R)$  in abgeschlossene, nichtleere Teilmengen gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es höchstens zwei idempotente Elemente in  $R$ .

Nun sei  $\text{Spec}(R)$  nicht zusammenhängend. Wir finden ein drittes idempotentes Element. Sei  $\text{Spec}(R) = V_1 \cup V_2$  eine Zerlegung in abgeschlossene, disjunkte, nichtleere Teilmengen. Es ist  $V_1 = V(I_1)$  und  $V_2 = V(I_2)$ , für Ideale  $I_1, I_2 \subseteq R$ . Da ihr Durchschnitt  $V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2) = \emptyset = V(1)$  ist, folgt  $I_1 + I_2 = R$ , und es gibt  $e_1 \in I_1$ ,  $e_2 \in I_2$  mit  $e_1 + e_2 = 1$ . Andererseits ist weder  $e_1$  noch  $e_2$  eine Einheit, denn beide Verschwindungsmengen sind nichtleer. Außerdem ist  $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = \text{Spec}(R) = V(\sqrt{0})$  gleich der Verschwindungsmenge des Nilradikals. Also folgt  $I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{0}$  und damit ist  $e_1 e_2$  nilpotent.

- d) Es sei  $R$  ein beliebiger Ring mit 1 und  $S = R \times R$  mit der komponentenweisen Verknüpfung. Dann ist  $(1, 0)$  ein idempotentes Element in  $S$ , dass weder  $(0, 0)$  noch  $(1, 1)$  ist. Also ist  $\text{Spec } S$  nach c) nicht zusammenhängend.

## Übung 4 vom 22. Mai 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien  $R, S$  Ringe,  $X := \operatorname{Spec}(R)$ ,  $Y := \operatorname{Spec}(S)$  sowie  $\varphi: R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus und  $g: Y \rightarrow X$  der von  $\varphi$  induzierte Schemamorphismus. Zeige:

- Ein Element  $f \in R$  ist genau dann nilpotent, wenn  $D(f)$  leer ist.
- Der Ringhomomorphismus  $\varphi$  ist genau dann injektiv, wenn der induzierte Morphismus  $g^\#: \mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y$  injektiv ist. Ist das der Fall, so ist  $g$  dominant, d.h.  $g(Y)$  ist dicht in  $X$ .
- Ist  $\varphi$  surjektiv, so ist  $g$  ein Homöomorphismus von  $Y$  auf eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  und  $g^\#: \mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Y$  ist surjektiv.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Finde einen Ring  $R$  und eine Idealgarbe  $\mathcal{I}$  auf  $\operatorname{Spec}(R)$ , die nicht quasikohärent ist (und beweise, dass du solche  $R$  und  $\mathcal{I}$  gefunden hast).

*Hinweis: Diskrete Bewertungsringe können helfen.*

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweise die Proposition 4.5 aus der Vorlesung:

Eine Idealgarbe  $\mathcal{I}$  auf einem Schema  $X$  ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in M}$  von  $X$  durch affine Schemata  $U_i$  gibt, so dass  $\mathcal{I}|_{U_i}$  für jedes  $i \in M$  quasikohärent ist.

### Lösung 1

$X = \operatorname{Spec} R$ ,  $Y = \operatorname{Spec} S$ ,  $\varphi: R \rightarrow S$  Ringhomomorphismus  $\rightsquigarrow$  Schemamorphismus  $(g, g^\#)$

- a) Zu zeigen:  $f \in R$  nilpotent  $\Leftrightarrow D(f) = \text{emptyset}$

$$f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow f \in \sqrt{(0)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ (0) \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \Leftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : f \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow D(f) = \emptyset$$

- b)  $\varphi$  injektiv  $\Leftrightarrow g^\#$  injektiv

„ $\Leftarrow$ “:  $\varphi = g^\#(\operatorname{Spec} R)$

„ $\Rightarrow$ “: *Behauptung*: Es reicht zu zeigen:  $g^\#$  ist injektiv auf Basis der Topologie.

$$\text{Denn: } U \in \operatorname{Off}(X), U = \bigcup_{i \in I} U_i, g^\#(U_i) \text{ injektiv, } g^\#(U)(S) = 0 \Rightarrow g^\#(U)(S)|_{U_i} = g^\#(U_i)(S|_{U_i}) = 0 \xrightarrow[\text{injektiv}]{g^\#(U_i)} S|_{U_i} = 0 \xrightarrow{\text{Garbe}} S = 0$$

$$\text{Sei } f \in R, g^\#(D(f)) : \begin{cases} \mathcal{O}_X(D(f)) = R_f & \rightarrow & \mathcal{O}_Y(g^{-1}(D(f))) = \mathcal{O}_Y(D(\varphi(f))) \\ \frac{a}{f^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n} \end{cases}$$

Zu zeigen:  $g^\#(D(f))$  injektiv:

$$\text{Sei } \frac{a}{f^n} \in \mathcal{O}_X(D(f)) \text{ mit } g^\#(D(f))\left(\frac{a}{f^n}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^n} = 0$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \varphi(f)^m \cdot \varphi(a) = 0 \text{ in } S \xrightarrow{\varphi \text{ inj.}} f^m \cdot a = 0 \Rightarrow \frac{a}{f^n} = 0 \text{ in } R_f$$

Zu zeigen:  $\varphi$  injektiv  $\Rightarrow g$  dominant ( $g: Y \rightarrow X$ )

*Annahme*:  $\overline{g(Y)} \neq X$

$$\Rightarrow X \setminus \overline{g(Y)} \neq \emptyset \text{ offen} \Rightarrow \exists f \in R \text{ mit } D(f) \neq \emptyset \text{ und } D(f) \cap \overline{g(Y)} = \emptyset \Rightarrow g^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f)) = \emptyset \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \varphi(f)^m = 0 \xrightarrow{\varphi \text{ inj.}} f^m = 0 \xrightarrow{\text{a)}} D(f) = \emptyset \nmid$$



- c) Ist  $\varphi: R \rightarrow S$  surjektiv, so ist  $S \cong R/I$  mit  $I = \text{Kern}(\varphi)$ . Bei der Lösung von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 haben wir bereits eingesehen, dass  $g = \text{Spec}(\varphi)$  injektiv ist und dass  $\text{Bild}(g) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I)$ . Die Umkehrabbildung  $g^{-1}: V(I) \rightarrow \text{Spec}(S)$ ,  $\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + I$  ist folglich wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, dass  $g^{-1}$  stetig ist. Sei dazu  $V(J) \subseteq \text{Spec } S$  abgeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned} (g^{-1})^{-1}(V(J)) &= g(V(J)) = g(\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } S \mid J \subseteq \mathfrak{q}\}) \\ &= \{\mathfrak{p} \in V(I) \mid J \subseteq g^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\varphi^{-1}(J)) \end{aligned}$$

abgeschlossen. Somit ist  $g$  ein Homöomorphismus auf  $V(I)$ .

Nun sollte noch gezeigt werden, dass  $g^\#$  surjektiv ist, falls  $\varphi$  surjektiv ist. Nach Bemerkung 1.10 aus der Vorlesung sollten wir dazu zeigen, dass für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$  die induzierte Abbildung  $g_{\mathfrak{p}}^\#$  surjektiv ist.

Sei zunächst  $\mathfrak{p} \notin V(I)$ . Dann gibt es ein offenes  $U \subseteq X$  mit  $\mathfrak{p} \in U$  und  $U \cap V(I) = \emptyset$ . Dann ist  $g_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(\emptyset) = \{0\}$  und somit auch  $(g_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = \{0\}$ . Folglich ist  $g_{\mathfrak{p}}^\#: \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \rightarrow (g_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}}$  surjektiv.

Ist  $\mathfrak{p} \in V(I)$ , dann ist  $(g_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{q} \in V} \mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}$  mit  $\mathfrak{q} = g^{-1}(\mathfrak{p})$ .

Der Isomorphismus zwischen den Halmen kommt daher, dass  $g$  ein Homöomorphismus auf  $V(I)$  ist und  $\mathfrak{p} \in V(I)$ . Weiter gilt  $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} = S_{\mathfrak{q}} \cong (R/I)_{\mathfrak{p}+I} \cong R_{\mathfrak{p}}/IR_{\mathfrak{p}}$ . Mit der Identifizierung  $S \cong R/I$  wird  $g_{\mathfrak{p}}^\#$  zur kanonischen Projektion  $R_{\mathfrak{p}} \rightarrow R_{\mathfrak{p}}/IR_{\mathfrak{p}}$  und ist damit surjektiv.

## Lösung 2

Zum Beispiel:  $R = k[x]_{(x)}$ ,  $Y = \text{Spec } R = \{(0), (x)\}$ ,  $\text{Off}(Y) = \{\emptyset, U = \underbrace{\{(0)\}}_{=D(x)}, Y\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(Y) &= k[x]_{(x)} \\ \mathcal{O}_Y(U) &= k(x) \quad \swarrow \text{(inklusion)} \\ \mathcal{O}_Y(\emptyset) &= \{0\} \quad \swarrow \text{Nullabb.} \end{aligned}$$

Definiere Idealgarbe:  $\mathcal{I}(Y) = \{0\} \rightarrow \mathcal{I}(U) = k(x) \rightarrow \mathcal{I}(\emptyset) = \{0\}$ . Wäre  $\mathcal{I}$  quasikohärent, so gälte  $\mathcal{I}(U) = \rho_U^Y(\mathcal{I}(Y)) \cdot k(x) = 0$ .

$\Rightarrow \mathcal{I}$  nicht quasikohärent.

## Definition 4.4 (Präzisierung)

- a) Eine Garbe  $\mathcal{I}$  von abelschen Gruppen auf  $X$  (Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$ , Restriktionabbildung  $\rho$ ) heißt **Idealgarbe**, wenn  $\forall U \in \text{Off}(X) \mathcal{I}(U)$  Ideal in  $\mathcal{O}_X(U)$  ist und die Restriktionsabbildungen  $\tilde{\rho}$   $\mathcal{O}_X$ -linear sind:

$$\forall U' \subseteq U \in \text{Off}(X), r \in \mathcal{O}_X(U), i \in \mathcal{I}(U) : \tilde{\rho}_{U'}^U(r, i) = \underbrace{\rho_{U'}^U(r)}_{\in \mathcal{O}_X(U')} \cdot \tilde{\rho}_{U'}^U(i)$$

### Lösung 3

$\mathcal{F}$  Idealgarbe auf Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  mit Restriktionsabbildung  $\tilde{\rho}$  beziehungsweise  $\rho$ .

*Behauptung:*  $\mathcal{F}$  quasikohärent  $\Leftrightarrow \exists$  offene, affine Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i : \mathcal{F}|_{U_i}$  quasikohärent

„ $\Rightarrow$ “:  $\checkmark$  nach Definition

„ $\Leftarrow$ “: Schreibweise:  $R$  Ring,  $\mathcal{J} \subseteq R$  Ideal definiert quasikohärente Idealgarbe auf  $Y = \text{Spec } R$  durch  $\tilde{\mathcal{J}}(U) := \rho_U^X(\mathcal{J}) \cdot \mathcal{O}_Y(U)$

(\*)  $U_i \cong \text{Spec } R_i$ ,  $\mathcal{F}|_{U_i}$  quasikohärent, das heißt  $\exists \mathcal{J}_i \subseteq R_i$  Ideal mit  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{\mathcal{J}}_i$ .

Verfeinern der Überdeckung erhält (\*)  $\Rightarrow \mathcal{O}_E$  bilden  $U_i$  eine Basis der Topologie.

Zu zeigen:  $\forall \hat{U} \subseteq X$  offen, affin:  $\mathcal{F}_{\hat{U}}$  quasikohärent

$\hat{U} = \bigcup_{i \in I'} U_i \Rightarrow \mathcal{O}_E X = \text{Spec } R$ , also affin und  $\mathcal{O}_E U_i = D(g_i) \subseteq R$  mit  $g_i \in R \rightsquigarrow$

Insbesodnere  $\mathcal{O}_X(U_i) = R_{g_i}$ ,  $U_i \cong \text{Spec } R_{g_i}$ ,  $\mathcal{J} := \mathcal{F}(X)$

**Voraussetzung:**  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{\mathcal{J}}_i$ , zu zeigen:  $\mathcal{F} \cong \tilde{\mathcal{J}}$

Definiere Garbenmorphismus  $\alpha : \tilde{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{F}$  durch

$$\text{für } f \in R : \alpha(D(f)) : \begin{array}{ll} \tilde{\mathcal{J}}(D(f)) = \mathcal{J} \cdot R_f & \rightarrow \mathcal{F}(D(f)) \subseteq R_f \text{ Ideal} \\ \frac{a}{f^n} & \mapsto \frac{1}{f^n} \tilde{\rho}_{D(f)}^X(\alpha) \end{array}$$

**Behauptung 1:**  $\forall i \in I : \underbrace{\alpha(D(g_i))}_{U_i}$  ist Isomorphismus

$\xrightarrow[\text{Aufg. 3b)]}{\text{Blatt 1}} \alpha$  Garbenisomorphismus

**Behauptung 2:**  $\forall s \in \mathcal{F}(X)$  mit  $\tilde{\rho}_{D(f)}^X(s) = 0$  für ein  $f \in R$

$\Rightarrow \exists n \geq 0 : f^n \cdot s = 0$  in  $R$

**Behauptung 3:** Sei  $f \in R$

$\forall t \in \mathcal{F}(D(f)) \exists n \geq 0 : \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}_{D(f)}^X(s) = f^n(f)$

**Beweis 1:**

•  $\alpha(U_i)$  injektiv: Sei  $\frac{a}{g_i^n} \in \tilde{\mathcal{J}}(U_i)$ , also  $a \in \mathcal{J}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\underbrace{\alpha(U_i)(\frac{a}{g_i^n})}_{\frac{1}{g_i^n} \cdot \tilde{\rho}_{U_i}^X(a)} = 0$  in  $R_{g_i}$ .

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \underbrace{\tilde{\rho}_{U_i}^X(a) \cdot g_i^m}_{\tilde{\rho}_{U_i}^X(a \cdot g_i^m)} = 0 \text{ in } R$$

$$\xrightarrow{\text{Beh. 2}} \exists m' \in \mathbb{N} : g_i^{m'} \cdot a = 0 \text{ in } R$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g_i^n} = 0 \text{ in } R$$

•  $\alpha(U_i)$  surjektiv: Sei  $t \in \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\text{Beh. 3}} \exists n \geq 0 : \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}_{U_i}^X(s) = g_i^n \cdot t$   
 $\Rightarrow \alpha(U_i)(\frac{s}{g_i^n}) = \frac{1}{g_i^n} \cdot \tilde{\rho}_{U_i}^X(s) = t$

**Beweis 2:**

$s \in \mathcal{F}(X)$ ,  $\tilde{\rho}_{D(f)}^X(s) = 0$  für ein  $f \in R$

$s_i := \tilde{\rho}_{U_i}^X(s) \in \mathcal{F}(U_i) \subseteq R_{g_i}$

$D(f) \cap D(g_i) = D(g_i f) \subseteq D(g_i)$ ,  $\mathcal{F}(D(f g_i)) = \tilde{\mathcal{J}}_i(D(f g_i)) = \mathcal{J}_i R_{f g_i}$

$\tilde{\rho}_{D(f) \cap U_i}^{U_i}(s_i) = \tilde{\rho}_{D(f) \cap U_i}^X(s) = 0$  in  $R_{f g_i}$

$\xrightarrow[\rightsquigarrow \text{Überd. endl.}]{X \text{ quasikoh.}} \exists N > 0 : \forall i \text{ ist } f^N s_i = 0 \text{ in } R_{g_i} \xrightarrow{\text{Garbe}} f^N s = 0 \text{ in } R$

**Beweis 3:**

$$\begin{aligned}
 & t \in \mathcal{F}(D(f)), \rho_{D(fg_i)}^{D(f)}(f) \in \mathcal{J}_i R_{g_i f} \Rightarrow \exists n \geq 0, t_i \in \mathcal{J}_i : \tilde{\rho}_{D(fg_i)}^{D(f)}(t) = \frac{t_i}{f^n} \\
 & \xRightarrow[\text{endlich}]{\text{Überd.}} \exists N > 0 : \forall i \in I \exists t_i \in \mathcal{J}_i : \tilde{\rho}_{D(g_i f)}^{D(f)}(t) = \frac{t_i}{f^N} \\
 & \Rightarrow \rho_{D(fg_i g_j)}^{D(g_i)}(t_i) = \rho_{D(g_i g_j f)}^{D(g_i f)} \underbrace{\rho_{D(g_i f)}^{D(g_i)}(t_i)}_{f^N \rho_{D(g_i f)}^{D(f)}(t)} = \rho_{D(fg_i g_j)}^{D(f)}(f^N(t)) \\
 & \xRightarrow{\text{Beh. 2}} \exists m > 0 : f^m(t_i - t_j) = 0 \text{ in } D(g_i g_j) \\
 & \xRightarrow[\text{Überd.}]{\text{endliche}} \exists M > 0 : \forall i, j \in I \text{ gilt } f^M(t_i - t_j) = 0 \text{ in } D(g_i g_j) \\
 & \Rightarrow f^M t_i \text{ bilden konsistente Familie} \Rightarrow \exists s \in \mathcal{F}(X) : \tilde{\rho}_{D(f)}^X(s) = f^{M+N} t
 \end{aligned}$$

## Übung 5 vom 29. Mai 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Bestimme die folgenden Faserprodukte:

- a)  $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y]$  für die Inklusionen  $R \rightarrow R[X]$  und  $R \rightarrow R[Y]$ .  
 b)  $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R[Y]} \operatorname{Spec} R$  für die Ringhomomorphismen

$$R[Y] \rightarrow R, \quad Y \mapsto 0 \quad \text{und} \quad R[Y] \rightarrow R[X], \quad Y \mapsto X^2.$$

- c)  $\operatorname{Spec} L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$ , wobei  $L/k$  eine endliche separable Körpererweiterung ist und  $\bar{k}$  der algebraische Abschluss von  $k$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $S$  ein Schema und  $T$  ein  $S$ -Schema. Ergänze die Zuordnung  $X \mapsto X \times_S T$  zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der  $S$ -Schemata in die Kategorie der  $T$ -Schemata.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ . Wir betrachten die elliptische Kurve  $E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2(k)$ . Außerdem sei  $f: E \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  der von

$$k[X] \rightarrow k[X, Y]/(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) = k[E], \quad X \mapsto X$$

induzierte und  $g: E \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  der von  $k[Y] \rightarrow k[E], Y \mapsto Y$  induzierte Schemamorphismus.

- a) Wir betrachten das Faserprodukt  $V = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$  mit
- $$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1(k) \end{array}.$$

Zeige, dass  $V$  reduzibel und singulär ist.

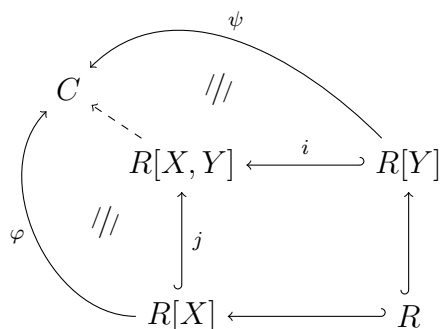
- b) Sei nun  $Y = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$  mit
- $$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1(k) \end{array}.$$

Ist das Faserprodukt noch immer singulär?

*Hinweis: Durch den Funktor  $t$  aus Proposition 3.8 können affine Varietäten als Schemata aufgefasst werden. Damit ist ihr Faserprodukt definiert.*

### Lösung 1

- a)  $\operatorname{Spec} R[X] \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R[Y] = \operatorname{Spec}(R[X] \otimes_R R[Y])$  mit  $R \hookrightarrow R[X], R \hookrightarrow R[Y]$



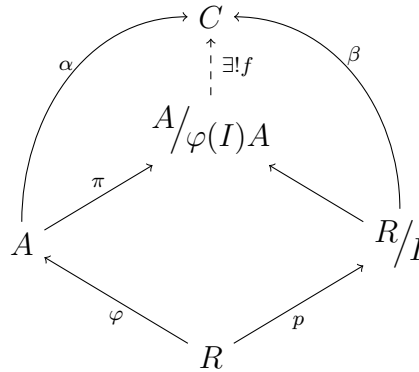
Genauso:  $\varphi = f \circ i$

**UAE Polynomring:**  $\exists! f: R[X, Y] \rightarrow C$  mit  $f(X) = \varphi(X), f(Y) = \psi(Y)$  und  $\psi: R[Y] \rightarrow C$  mit  $\psi(Y) = f(Y)$  ist eindeutig  $\Rightarrow f \circ i = \psi$

- b)  $\text{Spec } R[X] \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } R[Y], \quad \begin{array}{ccc} R[Y] & \twoheadrightarrow & R \\ Y & \mapsto & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} R[Y] & \rightarrow & R[X] \\ Y & \mapsto & X^2 \end{array}, \quad R = R[Y]/(Y) \text{ als } k[Y]\text{-Algebra.}$

*Behauptung:*  $A \otimes_R R/I \cong A/\varphi(I)A$ , wobei  $A$  durch  $\varphi : R \rightarrow A$  zur  $R$ -Algebra wird.

*Beweis:*



Es gilt  $\alpha(\varphi(I)) = \beta(p(I)) = \beta(0) = 0 \xrightarrow[\text{Satz von } A/\varphi(I)A]{\text{Homomorphie-}} \exists! f : A/\varphi(I)A \rightarrow C : f \circ \pi = \alpha$

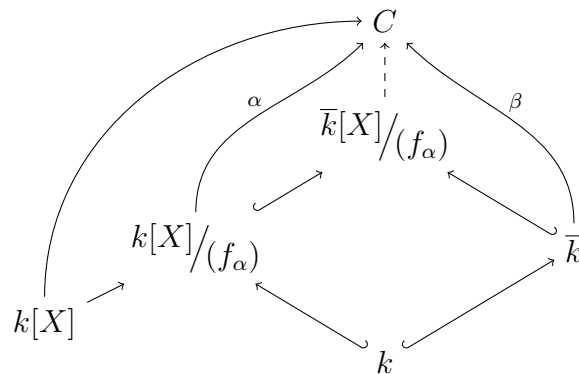
$$f \circ h \circ p = \alpha \circ \varphi = \beta \circ p \xrightarrow{p \text{ surj.}} f \circ h = \beta \quad \square$$

$$\Rightarrow \text{Spec}(R[X]) \otimes_{R[X]} R[Y]/(Y) = \text{Spec}(R[X]/(X^2))$$

- c)  $L/K$  endliche separable Körpererweiterung,  $\bar{k}$  algebraischer Abschluss von  $k$ ,  $\text{Spec } L \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k} \cong \text{Spec}(L \otimes_k \bar{k})$

Satz von primitiven Element  $\Rightarrow L = k(\alpha), \alpha \in L$  algebraisch,  $f_\alpha$  sei Minimalpolynom von  $\alpha$ .

$$L \cong k[X]/(f_\alpha), \quad k[X]/(f_\alpha) \otimes_k \bar{k} \cong \bar{k}[X]/(f_\alpha)$$



$$f_\alpha = \prod_{i=1}^d (X - \beta_i), \quad d = \deg f_\alpha, \quad \beta_i \in \bar{k}$$

$$\xrightarrow[\text{Restsatz}]{\text{Chinesischer}} \bar{k}[X]/(f_\alpha) = \prod_{i=1}^d \bar{k}[X]/(X - \beta_i) \cong \prod_{i=1}^d \bar{k}$$

$$\Rightarrow \text{Spec} \dots = \text{Spec} \left( \prod \bar{k}[X]/(X - \beta_i) \right) = \coprod \text{Spec} \left( \bar{k}[X]/(X - \beta_i) \right) = \coprod \text{Spec } \bar{k}$$

Koprodukt  $(\coprod)$  in der Kategorie der Schemata ist die disjunkte Vereinigung.

## Lösung 2

$S$  Schema,  $T$   $S$ -Schema, das heißt  $T \xrightarrow{b} S, X \mapsto X \times_S T$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \text{//} & \swarrow \\ & S & \end{array} \quad \text{konstruiere} \quad \begin{array}{ccc} X \times_S T & \xrightarrow{f \times_S T} & Y \times_S T \\ & \searrow \text{//} & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
X \times_S T & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X & & \\
\downarrow & \square & \downarrow a & & \uparrow \\
\text{UAE } Y \times_S T: & & T & \xrightarrow{\quad b \quad} & S \\
\exists ! f \times_S T & & \uparrow & \square & \uparrow c \\
Y \times_S T & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Y & & 
\end{array}$$

Noch zu zeigen:  $\text{id}_X \times_S T = \text{id}_{X \times_S T}$ ,  $(f \circ g) \times_S T = (f \times_S T) \circ (g \times_S T)$

Commutative diagram showing the relationship between various spaces and maps:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_S T & \xrightarrow{\quad} & X & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow f & \nearrow & \\
 Y \times_S T & \xrightarrow{\quad} & T & \xrightarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & Y & \parallel & \\
 \downarrow & \nearrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \downarrow g & \nearrow & \\
 Z \times_S T & \xrightarrow{\quad} & Z & & 
 \end{array}$$

The diagram includes several key features:

- Horizontal maps:  $X \times_S T \rightarrow X$ ,  $Y \times_S T \rightarrow T$ ,  $Z \times_S T \rightarrow Z$ ,  $T \rightarrow S$ , and  $S \rightarrow Y$ .
- Vertical maps:  $X \times_S T \rightarrow Y \times_S T$ ,  $Y \times_S T \rightarrow Z \times_S T$ ,  $X \rightarrow Y$  (labeled  $f$ ), and  $Y \rightarrow Z$  (labeled  $g$ ).
- Diagonal maps:  $X \times_S T \rightarrow T$ ,  $Y \times_S T \rightarrow X$ , and  $Z \times_S T \rightarrow Y$ .
- A curved arrow from  $X \times_S T$  to  $Z$ .
- A blue curved arrow from  $T$  to  $Y$ .
- A blue square on the map  $T \rightarrow S$ .
- A blue double slash on the map  $Y \rightarrow Z$ .
- Squares on the horizontal maps  $X \times_S T \rightarrow X$ ,  $Y \times_S T \rightarrow T$ , and  $Z \times_S T \rightarrow Z$ .

## Lösung 3

$k$  algebraisch abgeschlossen,  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ ,  $E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$

a)  $V = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$ ,  $I := (Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$ ,  $k[E] = k[X, Y]/I$ ,  $t(E) = \text{Spec}(k[E])$ ,  
 $t(\mathbb{A}^1(k)) = \text{Spec}(k[X])$ ,  $\text{Spec } A \times_{\text{Spec } B} \text{Spec } C \cong \text{Spec}(A \otimes_B C)$

$$\begin{array}{ccccc}
C & & & & \\
\downarrow & \searrow & & \searrow & \\
V & \xrightarrow{\quad} & E & & \\
\downarrow & & & \downarrow f & \\
E & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{A}^1(k) & & 
\end{array}$$

$$R = k[X, Y, Z] / \underbrace{(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), Z^2 - Y^2)}_{=: I}$$

Anmerkung:  $I = ((Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), Z^2 - X(X-1)(X-\lambda))$

UAE Polynomring:  $\exists! h' : k[X, Y, Z] \rightarrow C$  mit  $h'(X) = h_1(X) = h_2(X)$ ,  $h'(Y) = h_1(Y)$ ,  $h'(Z) = h_2(Y)$

$h'(I') = 0 \Rightarrow h'$  faktorisiert über  $R$

$$\Rightarrow t(V) = t(E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E) = \text{Spec}(k[X, Y, Z] / I')$$

$$\Rightarrow V = V(I') = V(Y^2 - Z^2, Y^2 - X^2(X-1)(X-\lambda)) \\ = V((Y-Z)(Y+Z), Y^2 - X^2(X-1)(X-\lambda))$$

$$(0, 0, 0) \in V(Y-Z, Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \cap V(Y+Z, Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$$

$\Rightarrow (0, 0, 0)$  singulärer Punkt

b)  $R = k[X, Y, Z] / I''$

$$\begin{array}{ccccc} & & y & \longleftarrow & y \\ & & x & \longleftarrow & x \\ z & x & R & \longleftarrow & k[E] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ x & y & k[E] & \longleftarrow & k[X] \\ & & y & \longleftarrow & x \end{array}$$

$$I'' = (Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), X^2 - Z(Z-1)(Z-\lambda))$$

$$k[E] \otimes_{k[X]} k[E] = R$$

$$\Rightarrow E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda), X^2 - Z(Z-1)(Z-\lambda))$$

$$A := \begin{pmatrix} -(X-1)(X-\lambda) - \frac{X(X-\lambda) - X(X-1)}{2X} & \frac{2Y}{0} & -(Z-1)(Z-\lambda) - \frac{0}{Z(Z-\lambda) - Z(Z-1)} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Kriterium:  $(x, y, z) \in V$  ist singulär  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A(x, y, z)) < \underbrace{n}_{=3} - \dim V$

$$\dim V \geq 1$$

Sei  $(x, y, z) \in V$  mit  $\text{Rang}(A(x, y, z)) < 2$

$$1. \text{ Spalte} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2y = 0 \wedge 1 - (Z-1)(Z-\lambda) - Z(Z-1) - Z(Z-\lambda) = 0 \nmid (x, y, z) \in V$$

$\Rightarrow V$  ist regulär.

### Bemerkung

$t$  ist injektiv auf Objekten und volltreu  $\Rightarrow$  man kann  $E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$  auch in Kategorie der affinen Varietäten berechnen

$\rightsquigarrow$  dort ist Faserprodukt  $\cong \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x) = f(y)\}$ ,  $g : X \rightarrow S$ ,  $f : Y \rightarrow S$

## Übung 6 vom 5. Juni 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung  $X \times_S Y \rightarrow \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$  aus Bemerkung 6.2, die das Faserprodukt von zwei  $S$ -Schemata  $f: X \rightarrow S$  und  $g: Y \rightarrow S$  in das topologische Faserprodukt von  $X$  und  $Y$  über  $S$  abbildet.

Zeige, dass die Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv ist.

*Hinweis: Es gibt ein Beispiel, bei dem das topologische Faserprodukt  $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$  einelementig ist.*

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $S$  ein Schema,  $\xi: X \rightarrow S$  ein  $S$ -Schema und  $Y \hookrightarrow S$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $S$ . Zeige:

- Der topologische Raum  $X \times_S Y$  ist homöomorph zu  $\xi^{-1}(Y)$ .
- Ist  $X \rightarrow S$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $S$ , so ist  $X \times_S Y$  homöomorph zu  $X \cap Y$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $Y = \text{Spec}(k[t])$ .

- Seien weiter

$$X = \text{Spec}(k[x, y, t]/(ty - x^2))$$

und  $f: X \rightarrow Y$  der Schemamorphismus, der von dem natürlichen  $k$ -Algebren-Homomorphismus  $k[t] \rightarrow k[x, y, t]/(ty - x^2), t \mapsto t$  induziert wird.

Zeige: Für  $a \in k \setminus \{0\}$  ist die Faser  $X_{(t-a)}$  irreduzibel und reduziert, wohingegen die Faser  $X_{(t)}$  zwar irreduzibel, aber nicht reduziert ist.

- Nun sei

$$Z = \text{Spec}(k[x, y, t]/(xy - t))$$

und  $f: Z \rightarrow Y$  der Schemamorphismus, der von dem natürlichen Homomorphismus  $k[t] \rightarrow k[x, y, t]/(xy - t), t \mapsto t$  induziert wird.

Zeige: Auch hier ist die allgemeine Faser  $Z_{(t-a)}$  irreduzibel und reduziert, wohingegen  $Z_{(t)}$  reduziert, aber nicht irreduzibel ist.

### Lösung 1

Blatt 5, Aufgabe 1c):  $\text{Spec } L \times_{\text{Spec } X} \text{Spec } \bar{k} = \overbrace{\prod_{i=1}^n \text{Spec } \bar{k}, L|k \text{ separabel, endlich, Spec } L, \text{Spec } k, \text{Spec } \bar{k}}^{n\text{-elementig}}$

alle einelementig

$\Rightarrow$  topologisches Faserprodukt ist auch einelementig.

*Beispiel:*  $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$

$\text{Spec } \mathbb{C} \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C}$  zweielementig

### Lösung 2

$S$  Schema,  $\xi: X \rightarrow S$ ,  $\eta: Y \hookrightarrow S$ ,  $Y$  abgeschlossenes Unterschema von  $S$ .

- Zu zeigen:  $X \times_S Y \cong \xi^{-1}(Y)$  homöomorph

Sei zunächst  $S = \text{Spec } R$  affin  $\Rightarrow Y = \text{Spec } R/I$ ,  $I \subseteq R$  Ideal

Schreibe  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \subseteq X$  offen und affin,  $U_i = \text{Spec } A_i$

$$\xi_i := \xi|_{U_i}: \underset{=\text{Spec } A_i}{U_i} \rightarrow \underset{=\text{Spec } R}{S} \rightsquigarrow \varphi_i: R \rightarrow A_i$$



$$X \times_S Y = \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \times_S Y = \bigcup_{i \in I} (U_i \times_S Y) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{\text{Spec}(A_i \otimes_R R/I)}_{A_i / \varphi_i(I) \cdot A} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{\text{Spec}(A_i / \varphi_i(I) \cdot A_i)}_{=: Z_i}$$

$$Z_i \cong \{p \in \text{Spec } A_i \mid \varphi_i(I) \subseteq p\} = V(\varphi_i(I)A_i) = \xi_i^{-1}(Y)$$

$$\text{Sei } p \in Z_i \Rightarrow \underbrace{\varphi_i^{-1}(\varphi_i(I))}_{\subseteq I} \subseteq \varphi_i^{-1}(p) = \xi(p) \Rightarrow \xi(p) \in \text{Spec}(R/I) = Y \Rightarrow Z_i \subseteq \xi^{-1}(Y)$$

$$\xrightarrow{\xrightarrow{X \times_S Y \rightarrow \xi^{-1}(Y)}} X \times_S Y = \xi^{-1}(Y)$$

$$\begin{array}{ccc} \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} = f^{-1}(Y) & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

in topologischen Räumen:

$$\text{Sei nun } S \text{ beliebig: } S = \bigcup_{i \in I} S_i, S_i \text{ offen und affin, } X_i := \xi^{-1}(S_i), Y_i := \eta^{-1}(S_i)$$

$$\begin{array}{ccc} ? & \xrightarrow{\quad} & \bigcup_{i \in I} X_i \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \bigcup_{i \in I} Y_i & \xrightarrow{\quad} & \bigcup_{i \in I} S_i \end{array}$$

$$X \times_S Y = \bigcup_{i \in I} X \times_S Y \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \bigcup_{i \in I} X_i \times_{S_i} Y_i \stackrel{\text{s.o.}}{=} \bigcup_{i \in I} \xi^{-1}(Y_i) = \xi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \xi^{-1}(Y)$$

$$\text{b) } \xi : X \hookrightarrow S \text{ abgeschlossenes Unterschema} \Rightarrow X \times_S Y \stackrel{\text{a)}}{=} \xi^{-1}(Y) \stackrel{\xi \text{ Inklusion}}{=} X \cap Y$$

### Lösung 3

$k$  algebraisch abgeschlossen,  $Y = \text{Spec}(k[t])$

$$\text{a) } X = \text{Spec}(k[x, y]/(ty - x^2))$$

Anmerkung: Großbuchstaben stehen in dieser Aufgabe für Schemata, Kleinbuchstaben für Variablen.

$$f : X \rightarrow Y \text{ induziert durch } \begin{array}{ccc} k[t] & \rightarrow & R \\ t & \mapsto & t \end{array}$$

Berechne Faser  $X_{(t-a)}$ :

$$p := (t - a) \in Y$$

$$\mathcal{O}_{Y,p} = k[t]_p$$

$$\text{Restklassenkörper: } \kappa(p) = \mathcal{O}_{Y,p}/m_{Y,p}$$

$$\kappa(p) = k[t]_p/p \cdot k[t]_p = k[t]_p/(t - a) \quad \text{Anmerkung: } (R/I)_{\pi(S)} = R_S/I \cdot R_S, \pi : R \rightarrow R/I$$

$$X_{(t-a)} = X \times_Y \text{Spec } \kappa(p)$$

$$= \text{Spec}(\underbrace{k[x, y, t]/(ty - x^2)}_A \otimes_{\underbrace{k[t]}_R} \underbrace{k[t]/(t - a)}_{R/I})$$

$$= \text{Spec}(k[x, y, t]/(ty - x^2, t - a))$$

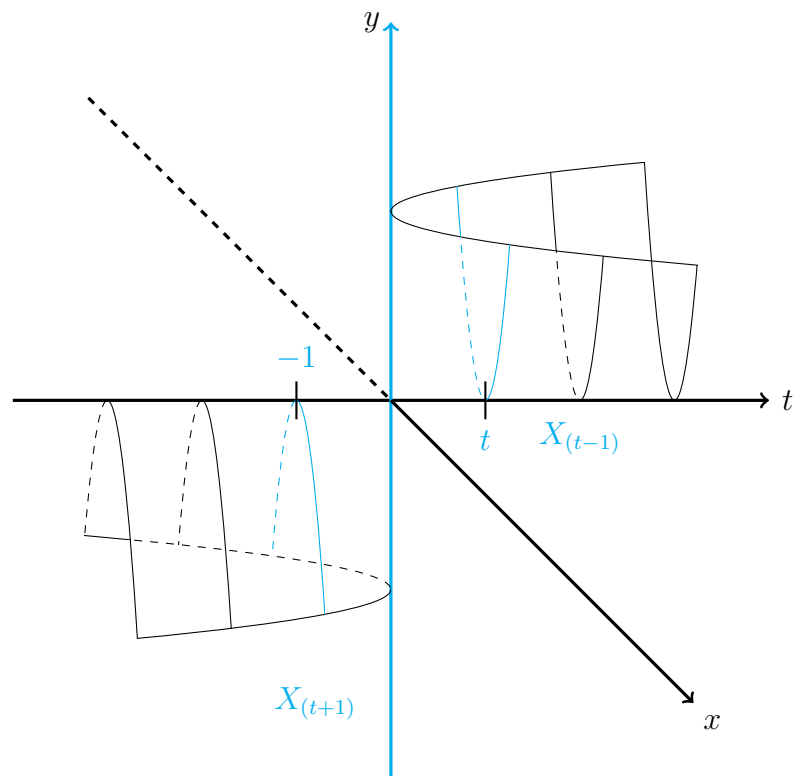
$$\cong \text{Spec}(k[x, y]/(ay - x^2)) \cong V(ay - x^2) \subseteq \text{Spec } k[x, y]$$

$$I := (ay - x^2)$$

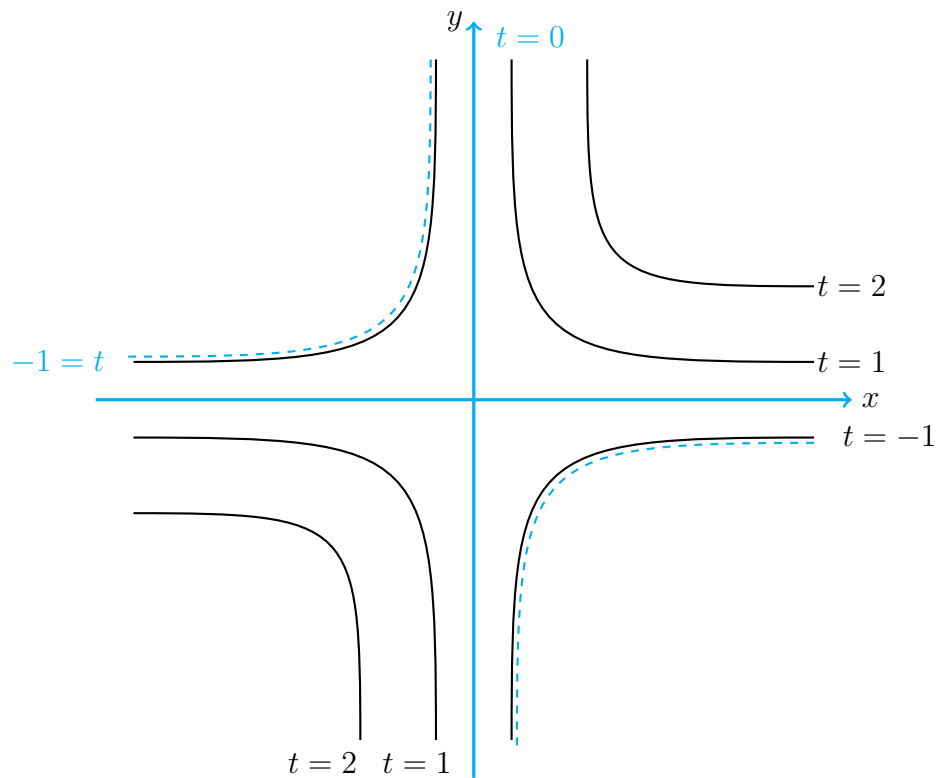
$$X_{(t-a)} \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow \sqrt{I} \text{ prim}$$

$a \neq 0$ :  $ay$  ist kein Quadrat in  $k[y]$   
 $\Rightarrow ay - x^2$  irreduzibel in  $k[y][x]$   
 $\Rightarrow I$  prim  
 $\Rightarrow \sqrt{I} = I$  prim  
 $\Rightarrow X_{(t-a)}$  irreduzibel  
 Außerdem  $k[x, y]/I$  ist nullteilerfrei  $\Rightarrow X_{(t-a)}$  reduziert

$a = 0$ :  $X_{(t)} = \text{Spec}(k[x, y]/x^2)$   
 $I = (x^2) \Rightarrow \sqrt{I} = (x)$  prim  
 $\Rightarrow X_{(t)}$  irreduzibel  
 $X$  nilpotent in  $k[x, y]/x^2 \Rightarrow X_{(t)}$  ist nicht reduziert



b)  $Z := \text{Spec}(k[x, y, t]/(xy - t))$



$$\kappa((t-a)) \cong k[t]/(t-a)$$

$$Z_{(t-a)} = \operatorname{Spec} \left( k[x, y, t]/(xy-t) \otimes_{k[t]} k[t]/(t-a) \right) = \operatorname{Spec} \left( k[x, y]/(xy-a) \right)$$

$a \neq 0$ :  $(xy-a)$  ist prim  $\Rightarrow Z_{(t-a)}$  reduziert und irreduzibel

$a = 0$ :  $Z_{(t)} = \operatorname{Spec} \left( k[x, y]/(xy) \right) \cong V(xy) \subseteq \operatorname{Spec} k[x, y]$

$$V(xy) = V(x) \cup V(y)$$

$\Rightarrow Z_{(t)}$  reduzibel

$\sqrt{(xy)} = (xy) \Rightarrow$  keine nilpotenten Elemente in  $k[x, y]/(xy) \Rightarrow Z_{(t)}$  reduziert

## Übung 7 vom 12. Juni 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  heißt *quasikompakt*, wenn es eine offene, affine Überdeckung  $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$  gibt, sodass jedes  $f^{-1}(V_i)$  quasikompakt ist. Zeige:

- Ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann quasikompakt, wenn für jede offene, affine Teilmenge  $V \subseteq Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  quasikompakt ist.
- Ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei  $k$  ein Körper und  $X$  die affine Gerade über  $k$  mit doppeltem Nullpunkt.  $X$  ist also das Schema, das entsteht, wenn wir  $U = \text{Spec } k[X]$  mit  $V = \text{Spec } k[Y]$  entlang  $D(X)$  und  $D(Y)$  vermöge des Isomorphismus  $k[Y, Y^{-1}] \rightarrow k[X, X^{-1}]$ ,  $Y \mapsto X$  verkleben.

Zeige, dass  $X$  nicht separiert über  $k$  ist.

### Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeige, dass ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  genau dann separiert ist, wenn das Bild von  $X$  unter der von  $f$  induzierten Diagonalabbildung  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  abgeschlossen ist.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien  $S$  ein Schema und  $X, Y$  zwei  $S$ -Schemata. Weiter seien zwei Morphismen  $f$  und  $g$  von  $X$  nach  $Y$  gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von  $X$  übereinstimmen. Zeige:

- Ist  $X$  reduziert und  $Y$  separiert über  $S$ , so gilt  $f = g$ .
- Die Aussage ist falsch, wenn  $X$  nicht reduziert ist oder wenn  $Y$  nicht separiert ist.

### Lösung 1

$f: X \rightarrow Y$  quasikomp.  $\Leftrightarrow \exists$  offene, affine Überd.  $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$  mit  $\forall i \in I: f^{-1}(V_i)$  quasikomp.

- Behauptung:*  $f$  quasikompakt  $\Leftrightarrow$  für alle  $V \subseteq Y$  offen, affin gilt  $f^{-1}(V)$  quasikompakt

„ $\Rightarrow$ “: ✓

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ ,  $V_i = \text{Spec } R_i$ ,  $f^{-1}(V_i)$  quasikomp.,  $V = \text{Spec } R \subseteq Y$ ,  $V = \bigcup_{i \in I} V \cap V_i$ .

Überdecke  $\underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{quasikomp.}}$  affin:  $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j \in J_i} \text{Spec } A_{ij} \Rightarrow \text{OE } J_i \text{ endlich}$

$f|_{\text{Spec } A_{ij}}: \text{Spec } A_{ij} \rightarrow \text{Spec } R_i \rightsquigarrow \varphi_{ij}: R_i \rightarrow A_{ij}$

Sei  $x \in V \cap V_i \Rightarrow x \in \text{Spec } R_i \Rightarrow \exists g_{x,i} \in R_i: x \in D(g_{x,i})$ ,  $D(g_{x,i}) = \text{Spec } R_i[\frac{1}{g_{x,i}}]$

$f^{-1}(D(g_{x,i})) \cap \text{Spec } A_{ij} = \text{Spec } A_{ij}[\frac{1}{\varphi_{ij}(g_{x,i})}]$  quasikompakt

$V = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{x \in V \cap V_i} (D(g_{x,i})) \stackrel{V}{\underset{\text{quasikomp.}}{=}} \bigcup_{\text{endl.}} D(g_{x,i})$

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{\text{endl.}} f^{-1}(D(g_{x,i})) = \bigcup_{\text{endl.}} \bigcup_{j \in J_i} f^{-1}(D(g_{x,i})) \cap \text{Spec } A_{ij} = \bigcup_{\text{endl.}} \bigcup_{j \in J_i} \text{Spec } A_{ij}[\frac{1}{\varphi_{ij}(g_{x,i})}]$

ist quasikompakt, da endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen.

- $f$  lokal von endlichem Typ  $\Leftrightarrow \exists Y = \bigcup \text{Spec } R_i: f^{-1}(\text{Spec } R_i) = \bigcup_{j \in J} \text{Spec } A_{ij}$ ,  $A_{ij}$  endlich erzeugte  $R_i$ -Algebra

$f$  von endlichem Typ  $\Leftrightarrow$  zusätzlich  $J$  endlich

*Zu zeigen:* von endlichem Typ  $\Leftrightarrow$  lokal von endlichem Typ und quasikompakt

„ $\Leftarrow$ “:  $\checkmark$

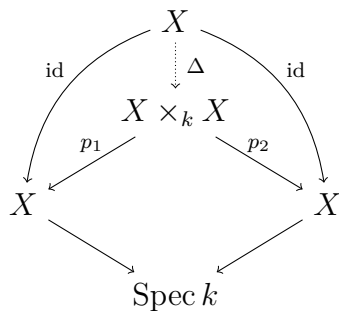
„ $\Rightarrow$ “: Zu zeigen:  $f$  quasikompakt

$$Y = \bigcup \operatorname{Spec} R_i, f^{-1}(\operatorname{Spec} R_i) = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Spec} A_{ij}, J \text{ endlich}$$

$\Rightarrow$  endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen  $\checkmark$  (endliche Vereinigung von quasikompakten Mengen ist quasikompakt)

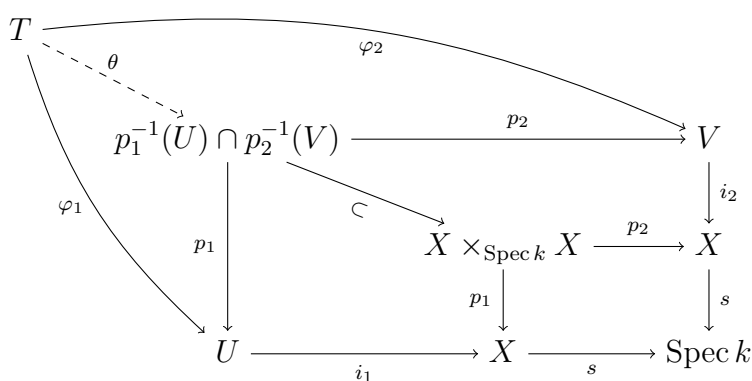
## Lösung 2

Wir wollen eine offene, affine Teilmenge  $W \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$  finden, so dass  $W \cap \Delta(X)$  kein abgeschlossenes Unterschema von  $W$  ist. Damit das klappen kann, sollte  $W$  etwas mit  $U \cap V$  zu tun haben. Es gilt:  $U \cap V \cong D(x) \cong D(y) \cong \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$ , durch  $k[x, x^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}], x \mapsto t$  und  $k[y, y^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}], y \mapsto t$ .



**Beh.:** Es gilt  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \cong U \times_{\operatorname{Spec} k} V \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ .

Wir zeigen, dass  $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$  die UAE von  $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$  erfüllt. Dazu seien ein Schema  $T$  mit  $\operatorname{Spec} k$ -Morphismen  $\varphi_1: T \rightarrow U$  und  $\varphi_2: T \rightarrow V$  vorgegeben mit  $s \circ i_1 \circ \varphi_1 = s \circ i_2 \circ \varphi_2$ .



Aus der UAE von  $X \times_k X$ , angewendet auf  $i_1 \circ \varphi_1$  und  $i_2 \circ \varphi_2$ , erhalten wir  $\theta: T \rightarrow X \times_{\operatorname{Spec} k} X$  das diese Morphismen faktorisiert. Daraus folgt, dass  $p_1(\theta(T)) \subseteq U$  und  $p_2(\theta(T)) \subseteq V$  gilt, wir also einen eindeutigen Morphismus  $\theta: T \rightarrow p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)$  erhalten haben.

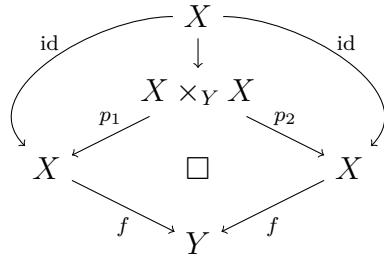
Wir erhalten  $\Delta^{-1}(U \times_{\operatorname{Spec} k} V) = \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)) = U \cap V$ , also einen Morphismus  $\Delta|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow U \times_{\operatorname{Spec} k} V \cong \operatorname{Spec} k[x, y]$  von affinen Schemata mit zugehörigem Ringhomomorphismus

$$\varphi: \begin{cases} k[x, y] & \rightarrow & k[t, t^{-1}] \\ x & \mapsto & t \\ y & \mapsto & t \end{cases}.$$

Da  $\varphi$  nicht surjektiv ist, wird der Ringhomomorphismus nicht von einem Ideal in  $k[x, y]$  induziert und  $\Delta_* \mathcal{O}_X|_{U \times_{\operatorname{Spec} k} V}$  ist nicht quasikohärent. Also ist  $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$  das  $W$ , das wir finden wollten.

## Lösung 3

$f: X \rightarrow Y$  separiert  $\Leftrightarrow \Delta_f(X) \subseteq X \times_Y X$  abgeschlossen



$f$  separiert  $\Leftrightarrow \Delta_f(X) \subseteq X \times_Y X$   
abgeschlossenes Unterschema

„ $\Rightarrow$ “: Nach Definition

„ $\Leftarrow$ “: •  $\Delta_f$  hat Linksinverse  $p_1 \Rightarrow \Delta_f$  injektiv

• Noch zu zeigen:  $\underbrace{\mathcal{O}_{\Delta_f(X)}}_{(\Delta_f)_* \mathcal{O}_X} = \mathcal{O}_{X \times_Y X / \mathcal{I}}, \mathcal{I}$  quasikohärente Idealgarbe auf  $X \times X$ .

$\rightsquigarrow$  finde offene, affine Überdeckung  $X \times_Y X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , sodass  $\forall i \in I : \mathcal{I}_{U_i}$  quasikohärent.

$$Y = \bigcup \text{Spec } R_i$$

$$X = \bigcup \underbrace{f^{-1}(\text{Spec } R_i)}_{X_i}, X_i = \bigcup \text{Spec } A_{ij}$$

$\Rightarrow \text{Spec } A_{ij} \times_{\text{Spec } R_i} \text{Spec } A_{ij}$  überdecken  $\Delta_f(X)$

$f|_{\text{Spec } A_{ij}} : \underbrace{\text{Spec } A_{ij}}_{=: Z_{ij}} \rightarrow \text{Spec } R_i$  separiert

$\Rightarrow \Delta_f|_{Z_{ij}} : Z_{ij} \rightarrow Z_{ij} \times_{\text{Spec } R_i} Z_{ij}$  ist abgeschlossene Einbettung

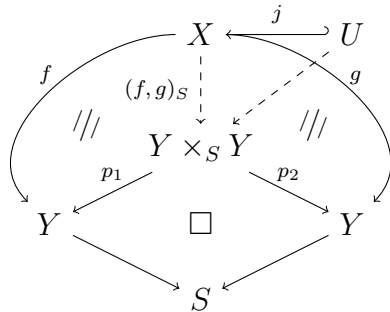
$\Rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_f(X)|_{Z_{ij}}} = \mathcal{O}_{Z_{ij} \times_{\text{Spec } R_i} Z_{ij} / I}, I$  quasikohärent

$$\mathcal{I}|_{Z_{ij}} = I$$

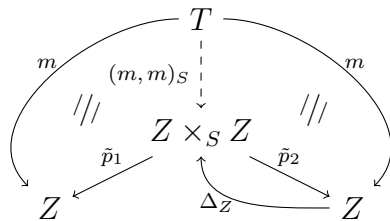
#### Lösung 4

$X, Y$   $S$ -Schemata,  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y, f = g$  auf  $U \subseteq X$  offen, dicht.

a) *Behauptung*:  $X$  reduziert,  $Y \rightarrow S$  separiert  $\Rightarrow f = g$



$f \circ j = g \circ j : U \rightarrow Y$  faktorisiert über  $p_i \circ (f, g)_S$   
 $\Rightarrow (f, g)_S \circ j = (f \circ j, g \circ j)_S = (f \circ j, f \circ j)_S$



$\Rightarrow \tilde{p}_i \circ \Delta_Z = \text{id}_Z \Rightarrow \tilde{p}_i \circ \Delta_Z \circ m = m$   
 $\Rightarrow (m, m)_S = \Delta_Z \circ m$

$$\Rightarrow \underbrace{(f, g)_S \circ j}_{=: h} = (f \circ j, f \circ j) = \Delta_f \circ (f \circ j)$$

$h(j(U)) \subseteq \Delta_Y(Y) \Rightarrow j(U) \subseteq h^{-1}(\Delta_Y(Y))$ .  $\Delta_Y(Y)$  ist abgeschlossen  $\xrightarrow{h \text{ stetig}} h^{-1}(\Delta_Y(Y))$   
ist abgeschlossen  $\xrightarrow{U \text{ dicht}} h^{-1}(\Delta_Y(Y)) = X \Rightarrow h(X) \subseteq \Delta_Y(Y) \Rightarrow \forall y \in h(X) : p_1(y) = p_2(y)$ . Für alle  $x \in X$  gilt  $f(x) = p_1(h(x)) = p_2(h(x)) = g(x) \Rightarrow$  topologisch:  $f = g$

Noch zu zeigen:  $f^\# = g^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ , beziehungsweise  $f^\# - g^\# = 0$

*Behauptung:* Für alle  $V \subseteq Y$  offen, affin,  $W \subseteq f^{-1}(Y)$  offen, affin gilt  $f = g : W \rightarrow V \Rightarrow f = g$

*Denn:*  $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$  affine, offene Überdeckung,  $V' \subseteq Y$  offen,  $S \in \mathcal{O}_Y(V')$

$t := (f^\#_{V'} - g^\#_{V'})(S) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) = 0 \Leftrightarrow t_i := t|_{f^{-1}(V_i \cap V')} = 0 \forall i \in I$ ,  $f^{-1}(V_i \cap V') = \bigcup W_j$  offen, affin. Nach Voraussetzung:  $f = g : W_j \rightarrow V_i \cap V' \Rightarrow t_i|_{W_j} = (f^\#|_{W_j} - g^\#|_{W_j})(S) = 0 \xrightarrow{\text{Garbe}} t_i = 0$

Sei also  $\mathbf{O} X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$ . Seien  $\varphi, \psi : A \rightarrow B$  Ringhomomorphismen zu  $f, g$ ,  $f|_U = g|_U$  als Garbenmorphismus  $\Rightarrow$  für alle  $\mathfrak{p} \in U$  ist  $\varphi_{\mathfrak{p}} = \psi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$

Sei  $a \in A$ . Annahme:  $\varphi(a) \neq \psi(a)$

*Behauptung:*  $D(\varphi(a) - \psi(a)) = \emptyset$ , sonst  $U \cap D(\varphi(a) - \psi(a)) \neq \emptyset$ , enthält  $q$

$\Rightarrow 0 = \varphi_q(\frac{a}{1}) - \psi_q(\frac{a}{1}) = \frac{\varphi(a) - \psi(a)}{1} \in B_q \Leftrightarrow t \notin q : \underbrace{t(\varphi(a) - \psi(a))}_{\notin q} = \frac{0}{\in q} \in B_q$

$\xrightarrow[\text{Aufg. 1}]{\text{Blatt 4}} \varphi(a) - \psi(a) \in \sqrt{0} \stackrel{B \text{ red.}}{=} \{0\}$

b)  $X$  aus Aufgabe 2 ist nicht separiert  $\rightsquigarrow$  wähle das  $X$  als  $Y$

$\Rightarrow Y = U \cup V$ ,  $f : \text{Spec } k[x] \xrightarrow{\sim} U$ ,  $g : \text{Spec } k[x] \xrightarrow{\sim} V$

$D(X) \xrightarrow{f|_{D(X)}} U \cap V \xrightarrow{g^{-1}|_{U \cap V}} D(X)$  ist Identität  $\Rightarrow f \equiv g$  auf  $D(X) \subseteq \text{Spec } k[x]$  offen dicht, aber  $f((x)) \neq g((x))$ .

In der Übung hat noch ein Beispiel dafür gefehlt, dass die Aussage aus a) nicht gilt, falls  $X$  nicht reduziert ist.

Ist  $X = \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2)$ ,  $Y = \text{Spec } k[x, y]$  und seien  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die Restklassen von  $x$  und  $y$  in  $k[x, y]/(xy, y^2)$ . Dann sind

$$\varphi : k[x, y] \rightarrow k[x, y]/(xy, y^2), \quad x \mapsto \bar{x}, \quad y \mapsto \bar{y}$$

und

$$\psi : k[x, y] \rightarrow k[x, y]/(xy, y^2), \quad x \mapsto \bar{x}, \quad y \mapsto 0$$

zwei unterschiedliche Ringhomomorphismen, liefern also unterschiedliche Schemamorphismen

$$f : \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2) \rightarrow \text{Spec } k[x, y]$$

und

$$g : \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2) \rightarrow \text{Spec } k[x, y].$$

Diese sind beide abgeschlossene Einbettungen mit Bild jeweils  $V(xy, y^2) = V(y) \subset \text{Spec } k[x, y]$ , also die “ $x$ -Achse” in der affinen Ebene. Weiter ist  $D(x) \cap V(y)$  offen und dicht in  $V(y)$ , also auch  $D(\bar{x}) = f^{-1}(D(x)) = g^{-1}(D(x)) \subset \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2)$  offen und dicht. Wir behaupten dass  $f$  und  $g$  auf  $D(\bar{x})$  übereinstimmen. Dazu reicht es, zu zeigen, dass die induzierten Morphismen

$$\varphi_x = \psi_x : k[x, y, x^{-1}] \rightarrow (k[x, y]/(xy, y^2))_{\bar{x}}$$

übereinstimmen. Aber in  $(k[x, y]/(xy, y^2))_{\bar{x}}$  gilt  $\bar{x}\bar{y} = 0$  und  $0 = \bar{x}^{-1}\bar{x}\bar{y} = \bar{y}$ , also stimmen  $\varphi_x$  und  $\psi_x$  auf  $x$  und  $y$  – und damit überall – überein.

## Übung 8 vom 19. Juni 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass für Morphismen von noetherschen Schemata gilt:

- Die Verkettung von separierten Morphismen ist separiert.
- Seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  Schemamorphismen. Ist  $g \circ f$  separiert, so auch  $f$ .
- Die Eigenschaft, separiert zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

- Zeige: Ist  $Y \subset \mathbb{P}^2(k)$  eine irreduzible Kurve und  $y \in \mathbb{P}^2_k$  ihr generischer Punkt, so ist  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k, y}$  ein diskreter Bewertungsring.
- Finde eine irreduzible quasiprojektive Fläche  $X$  über  $k$  und eine irreduzible Kurve  $Y \subset X$  mit generischem Punkt  $y \in t(X)$ , so dass  $\mathcal{O}_{t(X), y}$  kein diskreter Bewertungsring ist.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

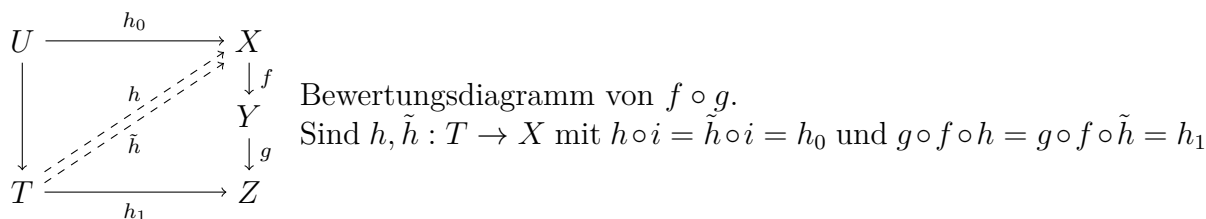
Es sei  $X$  ein Schema von endlichem Typ über einem Körper  $k$ , d.h.  $X \rightarrow \text{Spec } k$  ist von endlichem Typ. Zeige:

- Ein Punkt  $x \in X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn die Körpererweiterung  $\kappa(x)/k$  endlich ist. Hierbei sei  $\kappa(x)$  der Restklassenkörper im Punkt  $x$ .
- Die abgeschlossenen Punkte von  $X$  sind dicht in  $X$ .
- Wenn  $X$  nicht von endlichem Typ über einem Körper ist, dann stimmen a) und b) im Allgemeinen nicht.

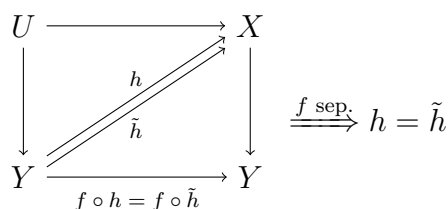
*Hinweis: Erwinnere dich an die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz.*

### Lösung 1

- Zu zeigen:  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  separiert  $\Rightarrow g \circ f$  separiert. Sei  $R$  diskreter Bewertungsring,  $R = \text{Quot}(R)$ ,  $U = \text{Spec } k$ ,  $T = \text{Spec } R$ .

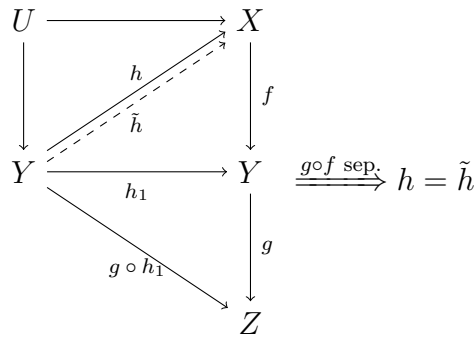


$g$  separiert  $\Rightarrow f \circ h = f \circ \tilde{h}$

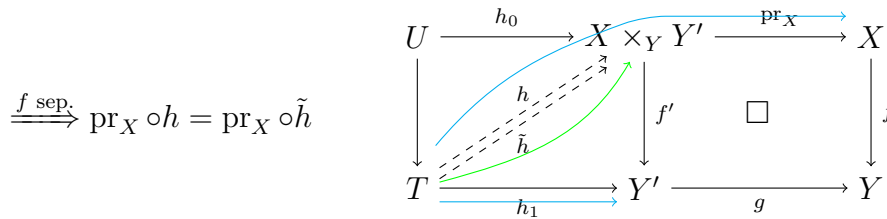


- Zu zeigen:  $g \circ f$  separiert  $\Rightarrow f$  separiert





c)  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y' \rightarrow Y$



UAE  $X \times_Y Y' : \exists! \rightarrow$ ,  $h, \tilde{h}$  gehen als  $\rightarrow \Rightarrow h = \tilde{h} \Rightarrow$  Behauptung

## Lösung 2

$k$  algebraisch abgeschlossener Körper

a)  $Y \subseteq \mathbb{P}^2(k)$  irreduzible Kurve,  $y \in \mathbb{P}^2_k = t(\mathbb{P}^2(k))$  ihr generischer Punkt. Zu zeigen:  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k, y}$  ist diskreter Bewertungsring, das heißt noethersch, nullteilerfrei, 1-dimensional, regulär.

$$\text{Proj}(k[X_0, X_1, X_2]) = \mathbb{P}^2_k \text{ wird überdeckt von } D_f(X_0) \cup D_f(X_1) \cup D_f(X_2)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \text{Spec}(k[\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}]) \\ \Downarrow \\ \mathbb{A}^2_k \end{array}$$

$\rightsquigarrow$  Wähle offene affine Umgebung  $V \cong \mathbb{A}^2_k$  von  $y \Rightarrow y \in \text{Spec}(k[X_1, X_2])$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ t \\ U \cong \mathbb{A}^2(k) \end{array}$$

$\underbrace{Y \cap U}_{V(f)} \subseteq \mathbb{A}^2(k)$  ist irreduzible Kurve in  $\mathbb{A}^2(k)$ ,  $f \neq 0$ ,  $f$  irreduzibel

$\{y\}$  liegt dicht in  $Y \Rightarrow \forall U \subseteq \mathbb{A}^2_k$  offen:  $U \cap \{y\} \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap Y \neq \emptyset$  (\*)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k, y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k, y} = \varinjlim_{\substack{Y \subseteq U \subseteq \mathbb{A}^2_k \\ \text{offen}}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k}(U) \stackrel{(*)}{=} \varinjlim_{\substack{Y \cap U \neq \emptyset \\ = V(f)}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k}(U) = \varinjlim_{\substack{D(g) \cap V(f) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow (g) \notin (f)}} = \lim_{g \notin (f)} k[X_1, X_2]_g =$$

$$k[X_1, X_2]_{(f)}$$

- $\dim k[X_1, X_2]_{(f)} = \text{ht}((f)) = 1 \checkmark$
- nullteilerfrei (nullteilerfreie Ring wurde lokalisiert)  $\checkmark$
- noethersch (noetherscher Ring wurde lokalisiert)  $\checkmark$
- lokal (lokalisiert)  $\checkmark$
- regulär  $\checkmark$

b) Finde:  $X$  irreduzible Fläche über  $k$ ,  $Y \subseteq X$  irreduzible Kurve mit generischem Punkt  $y \in t(X)$ , sodass  $\mathcal{O}_{t(X), y}$  kein diskreter Bewertungsring ist.

Sei  $X = V(y^2 - x^3 + x^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$  und  $Y = V(X, Y) \subseteq X \rightsquigarrow \text{Spec}(k[Z]) = t(Y) \hookrightarrow t(X) = \text{Spec}\left(k[X, Y, Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right)$

$\rightsquigarrow \text{Spec}(k[Z]) = t(Y) \hookrightarrow t(X) = \text{Spec}\left(k[X, Y, Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right)$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \Psi & \begin{array}{ccc} 0 & \hookleftarrow & x \\ 0 & \hookleftarrow & y \\ z & \hookleftarrow & z \end{array} & \Psi \\ (0) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & (x, y) \end{array}$$

wie in a)  $\mathcal{O}_{t(X), (x, y)} \cong \left(k[X, Y, Z]/(y^2 - x^3 + x^2)\right)_{(x, y)}$

Zeige: nicht regulär

Restklassenkörper:  $\tilde{k} = \mathcal{O}_{t(X), (x, y)} / (x, y) \cdot 0 \dots = k(z)$

$m = (x, y), m/m^2 = (x, y)/(x^2, xy, y^2), x, y$  sind i. u. über  $\tilde{k}$  in  $\mathcal{O}_{t(X), (x, y)} \Rightarrow \dim_{\tilde{k}} m/m^2 \geq 2$ , aber  $\dim \mathcal{O}_{t(X), (x, y)} = 1$

### Lösung 3

$X \rightarrow \text{Spec } k$  von endlichem Typ  $\Rightarrow \exists$  offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i = \text{Spec } A_i, A_i$  endlich erzeugte  $k$ -Algebren

a) Zu zeigen:  $x \in X$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow K(x)|k$  endliche Körpererweiterung

(\*) **Behauptung:**  $x$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow \forall i \in I : \{x\} \cap U_i$  abgeschlossen

„ $\Rightarrow$ “:  $\exists i \in I : x \in U_i = \text{Spec } A_i$

$x$  abgeschlossen in  $U_i \Rightarrow x$  maximales Ideal

$$K(x) = A_{ix}/x \cdot A_X \cong (A_i/x)_{A_i/x \setminus \{0\}} \stackrel{x \text{ max.}}{=} A_i/x$$

$\xrightarrow{\text{HNS}}$  Körpererweiterung ist algebraisch ( $\rightsquigarrow$  endlich)

„ $\Leftarrow$ “: Behauptung  $\rightsquigarrow$  bleibt zu zeigen:  $\forall i \in I : \{x\} \cap U_i$  abgeschlossen

•  $x \notin U_i \Rightarrow \{x\} \cap U_i = \emptyset$  ist abgeschlossen ✓

•  $x \in U_i : x = p \in \text{Spec } A_i$

$k \hookrightarrow A_i/p \hookrightarrow K(x)$  endliche Körpererweiterung  $\Rightarrow$  algebraische

**Behauptung:**  $A_i/p$  Körper

$r \in A_i/p \setminus \{0\} \Rightarrow \exists d \in \mathbb{N}_0, a_i \in k, a_0 \neq 0$  mit

$$r^d + a_{d-1}r^{d-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{1}{a_0}(r^{d-1} + a_{d-1} \cdot r^{d-2} + \dots + a_1) \in A_i/p \Rightarrow r \in (A_i/p)^\times \Rightarrow \text{Behauptung}$$

$\Rightarrow p$  maximales Ideal  $\Rightarrow \{p\}$  abgeschlossen

Beweis von (\*): „ $\Leftarrow$ “:  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i \setminus \{x\}}_{\text{offen}}$  offen

b) abgeschlossene Punkte liegen dicht

Zeige: Für eine Basis der Topologie: Jede Basismenge enthält abgeschlossene Punkte  $D(f) \subseteq U_i \subseteq X$  offen, affin bilden Basen.

Sei also  $\text{Spec}(A_{if}) = D(f) \subseteq U_i \subseteq X$  offen.  $X \rightarrow \text{Spec } k$  von endlichem Typ  $\Rightarrow A_i$  endlich erzeugte  $k$ -Algebra,  $R := A_{if}$  endlich erzeugte  $k$ -Algebra.  $R$  enthält maximales Ideal  $m$ .

$\xrightarrow{\text{HNS}}$   $K(x) = R/m$  ist endliche Körpererweiterung  $\stackrel{(a)}{\Rightarrow} m$  abgeschlossener Punkt.

c) Gegenbeispiel zu a):

„ $\Rightarrow$ “:  $X = \operatorname{Spec} k(t)$ ,  $k \hookrightarrow k(t)$  induziert  $X \rightarrow \operatorname{Spec} k$ ,  $(0) \in \operatorname{Spec} k(t)$  ist abgeschlossen, aber  $K((0)) = k(t)$  ist nicht endlich über  $k$ .

„ $\Leftarrow$ “: Gilt nicht über  $\operatorname{Spec} k$ , aber  $X = \operatorname{Spec} k[s] \rightarrow \operatorname{Spec} k[t]$ ,  $s^2 \leftarrow t \Rightarrow (0) \in X$  nicht abgeschlossen.  $K_X((0)) = k(t) \rightarrow K_Y((0)) = k(s)$ ,  $t \mapsto s^2$  hat Grad 2.

Gegenbeispiel zu b):  $k[t]_{(f)}$ ,  $f \neq 0$  irreduzibel

Allgemein:  $R$  diskreter Bewertungsring:

- offene Mengen in  $\operatorname{Spec} R$ :  $\{\emptyset, \{(0)\}, \operatorname{Spec} R\}$
- abgeschlossene Mengen in  $\operatorname{Spec} R$ :  $\{\emptyset, m, \operatorname{Spec} R\}$
- abgeschlossene Punkte:  $m, \{\overline{m}\} = \{m\} \neq \operatorname{Spec} R \rightsquigarrow$  nicht dicht

## Übung 9 vom 26. Juni 2012

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  heißt **quasi-endlich**, wenn  $f^{-1}(y)$  für alle  $y \in Y$  eine endliche Menge ist.

Finde ein Beispiel für einen Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$ , so dass

- $f$  lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ ist.
- $f$  von endlichem Typ, aber nicht endlich ist.
- $f$  quasi-endlich, aber nicht endlich ist.
- $f$  eigentlich, aber nicht endlich ist.
- $f$  quasi-endlich, aber nicht lokal von endlichem Typ ist.
- $f$  von endlichem Typ, aber nicht quasi-endlich ist.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  heißt **projektiv**, wenn es für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\ & \searrow f & \swarrow \text{pr}_Y \\ & Y & \end{array}$$

tatives Diagramm

gibt, in dem  $i$  eine abgeschlossene Einbettung ist.

Dabei sei  $\mathbb{P}_Y^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$ .

Zeige:

- Ist  $Y = \text{Spec}(R)$  affin, so ist  $\mathbb{P}_Y^n \cong \mathbb{P}_R^n$ .
- Die Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.
- Abgeschlossene Einbettungen sind projektiv.
- Projektiv zu sein ist stabil unter Basiswechsel.
- Projektive Morphismen noetherscher Schemata sind eigentlich.

*Hinweis:* Erwähne dich an die Segre-Einbettung von Blatt 7, Aufgabe 4, aus der Algebraischen Geometrie I.

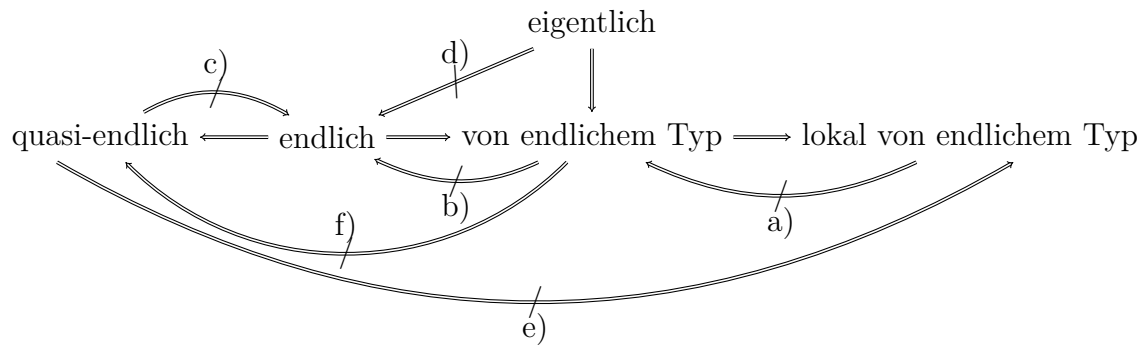
### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei  $X$  eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ . Zeige:

- Für jedes  $f \in k(X)^\times$  ist  $\mathcal{L}(\text{div}(f))$  isomorph zu  $\mathcal{O}_X$ .
- Für jeden Divisor  $D$  auf  $X$  gibt es eine offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  und rationale Funktionen  $f_i \in k(X)$ , sodass  $\mathcal{L}(D)(U_i) = \frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X(U_i)$  für jedes  $i \in I$  gilt.
- Für je zwei Divisoren  $D_1$  und  $D_2$  auf  $X$  ist  $\mathcal{L}(D_1 + D_2)$  isomorph zu  $\mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$ .

### Lösung 1

Schemamorphismus  $f: X \rightarrow Y$  quasi-endlich  $\Leftrightarrow \forall y \in Y: |f^{-1}(y)| < \infty$



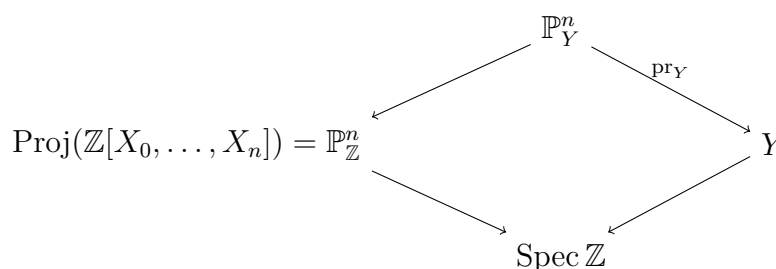
- a)  $Y = \operatorname{Spec} k$ ,  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Spec} k[t]$ ,  $k \hookrightarrow k[t]$  induziert  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  ist lokal von endlichem Typ.  $X = \operatorname{Spec}(\underbrace{\prod_{i \in \mathbb{N}} k[t]}_{\text{nicht endl. erz. über } k})$
- b)  $f$  von endlichem Typ, aber nicht endlich.  
 $X = \operatorname{Spec} k[t]$ ,  $Y = \operatorname{Spec} k$ ,  $k \hookrightarrow k[t]$  induziert  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f^{-1}(Y) = \operatorname{Spec} k[t]$ ,  $k[t]$  nicht endlich erzeugt als  $k$ -Modul.
- c) Sei  $L|K$  unendliche Körpererweiterung.  $\Rightarrow L$  ist nicht endlich erzeugt als  $k$ -Modul  $\Rightarrow f : \operatorname{Spec} L \rightarrow \operatorname{Spec} k$  nicht endlich.  $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Spec} L$  ist endlich.
- d)  $f : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \operatorname{Spec} k$  ist eigentlich,  $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \mathbb{P}_k^n$  ist nicht affin.
- e) Beispiel aus c):  $L$  ist nicht endlich erzeugt als  $k$ -Algebra.
- f) Beispiel aus b):  $f^{-1}(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Spec} k[t]$  ist unendlich.

**Anmerkungen zur Lösung:** Die Aufgabe haben wir in der Übung bereits gelöst. Da aber die Diskussion zu der Lösung zu einem falschen Ende gekommen ist, hier noch eine Anmerkung:

In der Definition von quasi-endlich ist mit  $f^{-1}(y)$  die Faser (als Schema) über  $y$  gemeint. In meinen Gegenbeispielen für c), e), f) hatte ich immer  $Y = \operatorname{Spec} k$ , also  $Y$  einelementig, gewählt. Auf Übungsblatt 6 Aufgabe 2 haben wir aber schon eingesehen, dass  $f^{-1}(Y)$ , aufgefasst als topologischer Raum, homöomorph zum Urbild von  $Y$  unter  $f$  ist, wenn wir  $f$  als stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  auffassen. In meinen Gegenbeispielen gab es daher keinen Unterschied zwischen „topologisches Urbild nehmen“ und „Ausrechnen der Faser mit anschließendem Vergessen der Strukturgarbe“.

## Lösung 2

$f : X \rightarrow Y$  projektiv  $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$  mit  $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}_Y^n$ ,  $i$  abgeschlossene Einbettung.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\ & \searrow f & \downarrow \text{pr}_Y \\ & & Y \end{array}$$


a) Zu zeigen:  $Y = \operatorname{Spec} R \Rightarrow \mathbb{P}_Y^n \cong \mathbb{P}_R^n$

$D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n$  überdecken  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n$

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] \otimes_{\mathbb{Z}} R) = \operatorname{Spec}(R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]) = \mathbb{A}_R^n \\ \Rightarrow \mathbb{P}_Y^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times \operatorname{Spec} R \cong \mathbb{P}_R^n$$

b) **Behauptung 1:** Abgeschlossene Einbettung zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

**Beweis:** Sei  $i: X \hookrightarrow Y$  abgeschlossene Einbettung,  $g: Z \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \longrightarrow & X \\ i' \downarrow & \quad \quad \quad & \downarrow i \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Zu zeigen: } i' \text{ ist abgeschlossene Einbettung} \\ i' \text{ ist injektiv } \checkmark \text{ (Monotonie, UAE)} \end{array}$$

Sei  $\mathcal{O}_X, Y, Z$  affin,  $X = \operatorname{Spec} R, Y = \operatorname{Spec} S, Z = \operatorname{Spec} T$ .

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_S T & \longleftarrow & R \\ \uparrow & \quad \quad \quad & \uparrow \\ T & \longleftarrow & S \end{array} \quad \begin{array}{l} R \text{ wird als } S\text{-Modul von } 1 \text{ erzeugt} \Rightarrow \{1 \otimes t \mid t \in T\} \\ \text{erzeugt } R \otimes_S T \text{ als } S\text{-Modul.} \\ \Rightarrow \begin{array}{ccc} T & \rightarrow & R \otimes_S T \\ t & \mapsto & 1 \otimes t \end{array} \text{ surjektiv} \end{array}$$

Seien also  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  projektiv und  $m, n$  die natürlichen Zahlen, für die es eine abgeschlossene Einbettungen  $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n$  bzw.  $i': Y \hookrightarrow \mathbb{P}_Z^m$  gibt, über die  $f$  bzw.  $g$  faktorisiert.

Betrachte das Faserprodukt von  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m$  und  $Y$  über  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m$ . Da für Schemata allgemein  $A \times_B B = B$  und  $(A \times_R B) \times_S C = A \times_R (B \times_S C)$  gilt, gilt auch  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m} Y \cong \mathbb{P}_Y^n$ . Somit ist das obere rechte Viereck im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m \\ & \searrow f & \downarrow \operatorname{pr}_Y & & \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{i'} & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m \\ & & & \searrow g & \downarrow \operatorname{pr}_Z \\ & & & & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ein Faserprodukt und nach Behauptung 1 ist damit } \tilde{i} \text{ eine abgeschlossene Einbettung.} \end{array}$$

Weiter erinnern wir uns an die Segre-Einbettung  $\Psi: \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \rightarrow \mathbb{P}^N(k)$  mit  $N = (n+1)(m+1) - 1$  von Übungsblatt 7 Aufgabe 3 aus der Algebraischen Geometrie I. Dort haben wir gelernt, dass das Bild abgeschlossen in  $\mathbb{P}^N(k)$  ist, nämlich  $V(J)$  für ein  $J$ , das wir konkret angegeben hatten. Nun kann man sich klar machen, dass die durch  $J$  gegebenen Gleichungen alle schon über  $\mathbb{Z}$  definiert sind und die Konstruktion somit auch über  $\mathbb{Z}$  klappt. Alternativ (da wir das Tensorprodukt dieses Semester nicht mehr scheuen) definieren wir in Analogie zu  $\Psi$  einen Schemamorphismus  $\Psi': \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$  lokal auf  $D_+(x_r) \times D_+(y_s)$  durch den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[\frac{z_{ij}}{z_{rs}} \mid (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{x_0}{x_r}, \dots, \frac{x_n}{x_r}] \otimes \mathbb{Z}[\frac{y_0}{y_s}, \dots, \frac{y_m}{y_s}] \\ \xrightarrow{\quad} \frac{z_{ij}}{z_{rs}} \mapsto \frac{x_i}{x_r} \otimes \frac{y_j}{y_s}.$$

Aus der lokalen Darstellung von  $\Psi'$  folgt sofort, dass  $\Psi'$  eine abgeschlossene Einbettung ist.

Basiswechsel mit dem Morphismus  $\text{pr}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N}$  liefert  $j: \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m \times Z \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ . Nach Behauptung 1 ist  $j$  wieder eine abgeschlossene Einbettung. Die Komposition von abgeschlossenen Einbettungen ist eine abgeschlossene Einbettung, also ist  $j \circ \tilde{i} \circ i$  eine abgeschlossene Einbettung und das folgende kommutative Diagramm beweist, dass  $g \circ f$  ein projektiver Morphismus ist.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N \\
 & \searrow f & \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow & & \swarrow \text{pr}_Z \\
 & & Y & \xrightarrow{i'} & \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^m & & \\
 & & & \searrow g & \downarrow \text{pr}_Z & & \\
 & & & & Z & & 
 \end{array}$$

c) Zu zeigen: abgeschlossene Einbettungen sind projektiv

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^0 \cong \text{Spec } \mathbb{Z} \Rightarrow Y \cong Y \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathbb{Z} \cong Y \times \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^0 = \mathbb{P}_Y^0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & i & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}_Y^0 \\
 & & & \nwarrow & \\
 & & & \text{pr}_Y & 
 \end{array}$$

$\Rightarrow f$  projektiv

d) Sei  $f: X \rightarrow Y$  projektiv und  $g: Y' \rightarrow Y$  ein beliebiger Schemamorphismus (der Basiswechsel).

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y Y' & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\
 f' \downarrow & & \downarrow f & \swarrow \text{pr}_Y & \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y & & 
 \end{array}$$

Zu zeigen ist nun, dass auch  $f'$  projektiv ist.

Dazu machen wir uns klar, dass  $\mathbb{P}_{Y'}^n = \mathbb{P}_Y^n \times_Y Y'$  und, dass  $\mathbb{P}_{Y'}^n \times_{\mathbb{P}_Y^n} X = Y' \times_Y X$ . Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Y Y' & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X \\
 i' \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathbb{P}_{Y'}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_Y^n \\
 \text{pr}_{Y'} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_Y \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f \end{array}$$

Der Morphismus  $i$  ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Einbettung, nach Behauptung 1 also auch  $i'$ . Die beiden inneren Vierecke sind Faserprodukte und somit auch das äußere Viereck. Damit gilt  $\text{pr}_{Y'} \circ i' = f'$  und  $f'$  ist ein projektiver Schemamorphismus.

e) Seien  $X, Y$  noethersche Schemata und  $f: X \rightarrow Y$  ein Schemamorphismus. Wir zeigen, dass  $f = \text{pr}_Y \circ i$  eigentlich ist.

Nach Proposition 8.10 ist  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  eigentlich. Alle beteiligten Schemata sind noethersch, also ist nach Folgerung 8.9. „eigentlich“ stabil unter Basiswechsel und  $\text{pr}_Y$  eigentlich.

Abgeschlossene Einbettungen sind nach Bemerkung 8.4 separiert und nach Bemerkung 7.6 endlich (also insbesondere von endlichem Typ). Nach Behauptung 1 ist eine abgeschlossene Einbettung auch universell abgeschlossen. Damit ist  $i$  eigentlich.

Die Komposition von eigentlichen Morphismen ist eigentlich und somit ist  $f$  eigentlich.

### Lösung 3

$X$  nichtsinguläre projektive Kurve über algebraisch abgeschlossenem Körper  $k \Rightarrow \forall p \in X : \mathcal{O}_{X,p}$  ist diskreter Bewertungsring

a) Zu zeigen:  $\forall f \in k(X)^\times : \mathcal{L}(\text{div}(f)) \cong \mathcal{O}_X$

$$\text{div}(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) \cdot p$$

$$\mathcal{L}(\text{div}(f)) = \{g \in k(X)^\times \mid \underbrace{\text{div } g + \text{div } f \geq 0}_{\Leftrightarrow \text{div}(g \cdot f) \geq 0} \} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{L}(\text{div}(f)) \Leftrightarrow g \cdot f \in \mathcal{O}_X(U)$$

b)  $D = \sum_{p \in X} e_p \cdot p$ ,  $P = \{p \in X \mid e_p \neq 0\} = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Sei  $U \subseteq X$  offen,  $|U \cap P| \leq 1 \rightsquigarrow$  solche  $U$  überdecken  $X$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{L}(D)(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$

1. Fall:  $U \cap P = \emptyset$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(D)(U) = \{g \in k(X)^\times \mid \forall p \in U : \text{ord}_p(g) \geq 0\} \cup \{0\} = \mathcal{O}_X(U)$$

2. Fall:  $U \cap P = \{p_i\}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(D)(U) = \{g \in k(X) \mid \forall q \in U, q \neq p_i : \text{ord}_q(g) \geq 0 \text{ und } \text{ord}_{p_i}(g) + e_{p_i} \geq 0\}$$

Wähle Uniformisierende  $t_i$  von  $\mathcal{O}_{X,p_i} \Rightarrow \text{ord}_{p_i}(t_i) = 1$ . Mache  $U$  eventuell kleiner, so dass  $\text{ord}_q(t_i) = 0 \forall q \in U \setminus \{p_i\}$ .

$$\Rightarrow \text{ord}_{p_i}(t_i^{e_{p_i}} g) = e_{p_i} \cdot \underbrace{\text{ord}_{p_i}(t_i)}_{=1} + \text{ord}_{p_i}(g) \quad \forall q \in U \setminus \{p_i\} : \text{ord}_q(t_i^{e_{p_i}} g) = \text{ord}_q(g)$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{L}(D)(U) \Leftrightarrow t_i^{e_{p_i}} \cdot g \in \mathcal{O}_X(U) \Leftrightarrow g \in \frac{1}{t_i^{e_{p_i}}} \cdot \mathcal{O}_X(U)$$

c) Zeige:  $\mathcal{L}(D_1 + D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$

$\mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)(U)$  ist garbenassoziiert zu  $U \mapsto \mathcal{L}(D_1)(U) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)(U)$ . Wähle Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  wie in b). Auf  $U_i$  sei  $t_i$  Uniformisierende.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(D_1)(U_i) = \frac{1}{t_i^{e_{p_i}}} \mathcal{O}_X(U_i), \mathcal{L}(D_2)(U_i) = \frac{1}{t_i^{\tilde{e}_{p_i}}} \mathcal{O}_X(U_i) \quad (D_1 = \sum e_p \cdot p, D_2 = \sum \tilde{e}_p \cdot p)$$

$$\mathcal{L}(D_1 + D_2)(U) = \frac{1}{t_i^{e_{p_i} + \tilde{e}_{p_i}}}$$

$\Rightarrow$  lokal haben wir Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(D_1)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{L}(D_2)(U_i) & \rightarrow & \mathcal{L}(D_1 + D_2)(U_i) \\ \frac{f}{t_i^{e_p}} \otimes \frac{g}{t_i^{\tilde{e}_p}} & \mapsto & \frac{fg}{t_i^{e_p + \tilde{e}_p}} \\ h(\frac{1}{t_i^{e_p}} \otimes \frac{1}{t_i^{\tilde{e}_p}}) & \mapsto & \frac{h}{t_i^{e_p + \tilde{e}_p}} \end{array}$$



## Übung 10 vom 3. Juli 2012

### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge von  $X$  und  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $U$ . Ist  $j: U \hookrightarrow X$  die Inklusion, so ist die **durch Null fortgesetzte Garbe**,  $j_!(\mathcal{F})$ , definiert als die zur Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{für } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe auf  $X$ .

Sei nun  $X$  ein Schema und  $U \neq X$  ein offenes, dichtes Unterschema von  $X$ .

Zeige, dass  $j_!(\mathcal{O}_U)$  nicht quasikohärent ist.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $X$  und  $Y$  noethersche Schemata und  $f: X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus.

- Zeige: Ist  $\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, so ist  $f_*(\mathcal{F})$  eine kohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe.
- Finde ein Beispiel dafür, dass a) selbst für Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  falsch ist, wenn  $f$  nicht endlich ist.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei  $X$  ein noethersches Schema und  $\mathcal{F}$  eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe auf  $X$ . Zeige:

- Die Garbe  $\mathcal{F}$  ist genau dann lokal frei, wenn für jedes  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{F}_x$  ein freier  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul ist.
- Ist  $A$  ein lokaler Ring und sind  $M$  und  $N$  endlich erzeugte  $A$ -Moduln mit  $M \otimes_A N \cong A$ , dann gilt  $M \cong A \cong N$ .

*Hinweis: Lemma von Nakayama*

- Gibt es eine kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$ , so ist  $\mathcal{F}$  lokal frei vom Rang 1, d.h. invertierbar.

### Lösung 1

$X$  top. Raum,  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{F}$  Garbe auf  $U$ ,  $j: U \hookrightarrow X$ , Prägarbe  $\mathcal{P}: V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & , V \subseteq U \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \rightsquigarrow$

assoziierte Garbe  $j_!(\mathcal{F})$

$X$  Schema,  $U \subseteq X$  offen, dicht,  $U \neq X$

*Zu zeigen:*  $j_!(\mathcal{O}_U)$  nicht quasikohärent

Sei  $\text{Spec } R \cong V \subseteq X$  offen, affin, irreduzibel,  $V \not\subseteq U$  (existiert, da  $U \neq X$ ).  $U$  dicht  $\Rightarrow V \cap U \neq \emptyset$ . Sei  $x \in U \cap V \rightsquigarrow x \in \text{Spec } R \Rightarrow \mathcal{O}_{U,x} = R_X$

$$j_!(\mathcal{O}_U)_X = \mathcal{O}_{U \cap V, x} = \mathcal{O}_{U, x} = R_X$$

*Annahme:*  $j_!(\mathcal{O}_U)$  ist quasikohärent

$\Rightarrow j_!(\mathcal{O}_U)|_V = j_!(\widetilde{\mathcal{O}_U})(V)$  (die Tilde geht über den ganzen Term)

Sei  $s \in j_!(\mathcal{O}_U)(V)$ ,  $x \in V \setminus U$ . Für alle  $U_x$  Umgebung von  $x$  gilt  $\mathcal{P}(U_x) = 0$

$\Rightarrow j_!(\mathcal{O}_U)_X = 0$

$\Rightarrow s_X = 0$

$\Rightarrow \exists U_x \subseteq V$  offene Umgebung von  $x$  mit  $s|_{D(f)} = 0$ , insbesondere gibt es  $f \in R \setminus \{0\}$  mit

$s|_{D(f)} = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: f^n \cdot s = 0 \xrightarrow[R \text{ nullteilerfrei}]{f \neq 0} s = 0$

$\Rightarrow j_!(\mathcal{O}_U)|_V \equiv 0 \not\equiv$

## Lösung 2

$X, Y$  noethersche Schemata,  $f : X \rightarrow Y$  endlich

a) Zu zeigen:  $\mathcal{F}$  kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\Rightarrow f_*(\mathcal{F})$  kohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe

$\mathcal{F}$  kohärent  $\Leftrightarrow X$  noethersch und für alle  $U \subseteq X$  offen, affin gibt es endlich erzeugten  $R$ -Modul  $M_U$  mit  $\mathcal{F}|_U = \tilde{M}_U$

Sei  $\text{Spec } S \cong V \subseteq Y$  offen, affin.  $f^{-1}(V) = \text{Spec } R$  affin, offen in  $X$ ,  $R$  endlich erzeugter  $S$ -Modul ( $S$ -Modul durch  $f$ ).

$\mathcal{F}$  kohärent  $\Rightarrow \exists$  endlich erzeugter  $R$ -Modul  $N$  mit  $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} = \tilde{N}$ ,  $f|_{f^{-1}(V)} : \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } S, \rightsquigarrow \alpha : S \rightarrow R$

Bemerkung 9.7  $\Rightarrow f_*\tilde{N} = {}_\alpha\tilde{N}$ , wobei  ${}_\alpha N = N$ , aufgefasst als  $S$ -Modul durch  $\alpha$ .

$N$  endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $R$  endlich erzeugter  $S$ -Modul  $\Rightarrow {}_\alpha N$  endlich erzeugter  $S$ -Modul

$\Rightarrow f_*\mathcal{F}|_V = f_*\tilde{N} = {}_\alpha\tilde{N} \Rightarrow f_*\mathcal{F}$  kohärent

b)  $k \hookrightarrow k[x]$ ,  $k[x]$  nicht endl. erzeugbar als  $k$ -Modul  $\Rightarrow f : \underbrace{\text{Spec } k[x]}_X \rightarrow \underbrace{\text{Spec } k}_Y$  nicht endlich

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \Rightarrow \mathcal{F}$  kohärent  $\checkmark$

$f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{F}(X) = k[x] \rightarrow$  nicht kohärent

## Lösung 3

$X$  noethersches Schema,  $\mathcal{F}$  kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modulring

a) Zu zeigen:  $\mathcal{F}$  lokal frei  $\Leftrightarrow \forall x \in X : \mathcal{F}_x$  ist freier  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul

Hier habe ich in der Übung einen Fehler gemacht (das mit dem von den Relationen erzeugten Untermodul macht leider doch keinen Sinn), daher hier noch einmal mein Weg (Jonathans gilt noch), in richtig:

„ $\Rightarrow$ “:  $\checkmark$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U = \text{Spec } R$  eine offene affine Umgebung von  $x \in X$ . Die Garbe  $\mathcal{F}$  ist kohärent, also existiert ein endlich erzeugter  $R$ -Modul  $M$ , so dass  $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ . Weiter ist  $\mathcal{F}_x = M_x$  ein freier  $\mathcal{O}_{X,x} = R_x$ -Modul. Wie in der Übung, wähle ich freie Erzeuger  $[(U_1, s_1)], \dots, [(U_n, s_n)]$  von  $\mathcal{F}_x$  als  $R_x$ -Modul. Da wir ohne Einschränkung  $U$  durch  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  ersetzen können, gilt ohne Einschränkung  $U = U_1 = \dots = U_n$ . Dann können wir die  $s_i$  zu einem Erzeugendensystem  $\{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+m}\}$  von  $M$  ergänzen. In  $\mathcal{F}_x$  gilt  $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$  mit  $\alpha_{i,j} \in R_x$ . Es gibt demnach eine offene affine Umgebung  $V_j \subseteq U$  von  $x$ , auf der gilt  $s_{n+j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} s_i$ . Wieder schneiden wir diese (endlich vielen)  $V_j$  und finden im Schnitt eine offene, affine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $\mathcal{F}|_V = \tilde{N}$ , wobei  $N = \langle s_1|_V, \dots, s_n|_V \rangle_{R\text{-Mod}}$ . Dieser Modul ist frei, den jede Relation in  $N$  würde eine Relation in  $\mathcal{F}_x$  ergeben (wähle  $V$  irreduzibel - wie in Aufgabe 1), im Widerspruch dazu, dass  $M_x = N_x$  frei in den  $s_i$  ist.

b) Zeige:  $A$  lokaler Ring,  $M, N$  endlich erzeugte  $A$ -Moduln,  $M \otimes_A N \cong A \Rightarrow M \cong N \cong A$

Sei  $m$  maximales Ideal von  $A$ ,  $k := A/m$

$$A/m \otimes_A M \otimes_A N \cong A/m \otimes_A A = A/m = k$$

Behauptung:  $k \otimes_A (M \otimes_A N) \cong (k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N)$

Denn:  $a \otimes m \otimes n \mapsto (a \otimes m) \otimes (1 \otimes n)$

$A$ -lineare Fortsetzung  $\rightsquigarrow \varphi : k \otimes_A \dots \rightarrow \dots$

$$(ab \otimes m) \otimes (1 \otimes n) = (a \otimes m) \otimes (b \otimes n) \Rightarrow \varphi \text{ surjektiv} \Rightarrow \dim_k(k \otimes_A M) \otimes_k (k \otimes_A N) \leq 1$$

Annahme: „ $= 0$ “

$$\Rightarrow k \otimes_A M = 0 \text{ oder } k \otimes_A N = 0$$

$$\text{OE } k \otimes_A M = 0 \quad (k \otimes_A M = A/m \otimes_A M = M/mM)$$

$$\Rightarrow M = mM + 0 \xrightarrow{\text{Nakayama}} M = 0$$

$$\Rightarrow A = M \otimes_A N = 0 \nsubseteq$$

$$\Rightarrow \dim_k(k \otimes_A M) = 0$$

$$M/mM \cong A/m \xrightarrow{\text{Nakayama}} M \cong A, \quad N \cong A \text{ analog}$$

$$M = mM + (X) \text{ } A\text{-Modul}$$

c) Zeige:  $\mathcal{G}$  kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe,  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X \Rightarrow \mathcal{F}$  lokal frei von Rang 1

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{O}_{X,x} \\ = \mathcal{F}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_X$$

$$\stackrel{b)}{\Rightarrow} \mathcal{F}_X \cong \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\text{Bew. v. a)}} \mathcal{F} \text{ ist lokal frei von Rang 1.}$$

## Übung 11 vom 10. Juli 2012

Auf diesem Blatt bezeichne  $k$  immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte das integrale Schema  $X := \text{Proj}(k[x, y, z]/(y^2z - x^3))$ .

- Finde einen Primdivisor  $W$  auf  $X$ , für den  $\text{ord}_W$  keine diskrete Bewertung auf  $k(X) = \text{Quot } \mathcal{O}_{X,W}$  mit Bewertungsring  $\mathcal{O}_{X,W}$  ist.
- Berechne den Hauptdivisor von  $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{\bar{z}}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein noethersches integrales separiertes Schema. Sei weiter  $V$  eine echte abgeschlossene Teilmenge von  $X$  und  $U := X \setminus V$ . Zeige:

- Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Cl}(X) &\rightarrow \text{Cl}(U) \\ \sum n_i Y_i &\mapsto \sum n_i (Y_i \cap U) \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus. Dabei gehe die Summe auf der rechten Seite nur über die nichtleeren Schnitte  $Y_i \cap U$ .

- Ist  $\text{codim}_X V \geq 2$ , so ist die Abbildung in a) ein Isomorphismus.
- Ist  $V$  irreduzibel und  $\text{codim}_X V = 1$ , so ist die Sequenz

$$\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$$

exakt. Dabei sei die erste Abbildung definiert durch  $k \mapsto k \cdot V$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $R := k[x, y, z]/(xy - z^2)$  und  $X := \text{Spec}(R)$ . Zeige:

- $X$  ist ein noethersches integrales separiertes Schema, das nicht lokal faktoriell ist.
- $\text{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

*Hinweis: Benutze Aufgabe 2 c) mit  $V := x$ -Achse. Zeige:  $2 \cdot V = \text{div}(y)$ , wobei  $y$  als rationale Funktion auf  $X$  aufgefasst wird. Benutze Proposition 11.3 und zeige, dass  $V$  kein Hauptdivisor ist.*

- $\text{CaCl}(X) = 0$ .

*Hinweis: Cartier-Divisoren sind die Weil-Divisoren, die lokal Hauptdivisoren sind.*

### Lösung 1

$$X = \text{Proj}\left(k\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right]/\left(\frac{y^2}{z^2} - \left(\frac{x}{z}\right)^3\right)\right)$$

- Finde Primdivisor  $W$ , so dass  $\text{ord}_W$  nicht diskrete Bewertung auf  $k(X) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,W})$  mit Bewertungsring  $\mathcal{O}_{X,W}$  ist.

Ein singulärer Punkt von  $X$  ist  $(x, y) \hat{=} (0 : 0 : 1)$ .  $W = \{(x, y)\}$  ist integrales, abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1  $\rightsquigarrow$  Primdivisor  $\rightsquigarrow$  affine Umgebung von  $W$ :

$$D_+(z) = \text{Spec}\left(k\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right]/\frac{y^2}{z^2} - \left(\frac{x}{z}\right)^3\right) \cong \text{Spec}\left(k[x, y]/y^2 - x^3\right)$$

$$(*) \quad \pi : R \twoheadrightarrow R/I, \quad I \trianglelefteq \text{Ideal}, \quad \varphi : R \rightarrow R_s, \quad (R/I)_{\pi(s)} \cong R_s/\varphi(I)R_s$$

$$\mathcal{O}_{X,W} = (k[x, y]/y^2 - x^3)_{(x,y)}$$

$$\mathcal{K}(W) = \mathcal{O}_{X,W}/m_W \stackrel{(*)}{\cong} (k[x, y]/(y^2 - x^3, x, y))_{(0)} \cong k$$

$$\text{ord}_W x = \dim_{\mathcal{K}(W)} (\mathcal{O}_{X,W}/(x)) \stackrel{(*)}{=} \dim_k \underbrace{(k[y]/y^2)_{(y)}}_{\cong \mathbb{1}k + \bar{y}k} = 2$$

$$\text{ord}_W y = \dim_k (\mathcal{O}_{X,W}/(y)) \stackrel{(*)}{=} \dim(k[x]/x^3)_{(x)} = 3$$

$\text{ord}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{ord}_W y - \text{ord}_W x = 3 - 2 = 1 \geq 0$ , aber  $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}_{X,W} \Rightarrow$  Bewertungsring zu  $\text{ord}_W$  nicht  $\mathcal{O}_{X,W}$ .

b) Hauptdivisor zu  $\frac{x+y}{z}$ :

Das Schema  $X$  ist 2-dimensional. Primdivisoren haben Kodimension 1, sind hier also eindimensional und entsprechen damit den abgeschlossenen Punkten in der projektiven Varietät, die von dem Funktor  $t$  aus Proposition 3.8 auf  $X$  abgebildet wird. Für die Punkte  $(0:0:1)$  und  $(0:1:0)$ , d.h. für die Primdivisoren  $W = \{(x, y)\}$  und  $\hat{W} = \{(x, z)\}$ , rechnen wir die Ordnung von  $\frac{x+y}{z}$  wie folgt aus:

$$\text{ord}_W x + y = \dim_k (k[x, y]/(y^2 - x^3, x + y))_{(x,y)} = \dim_k \underbrace{(k[x]/x^2 - x^3)_{(x)}}_{\substack{x^2 \text{ (1-x)} \\ \text{Einh. in} \\ k[x]_{(x)}}} = 2$$

$$(k[x]/x^2 - x^3)_{(x)} = (k[x]/x^2)_{(x)}$$

$\hat{W} = \{(x, z)\} \rightsquigarrow$  gehört zu  $(0:1:0)$ , hat affine Umgebung  $D_+(y) = \text{Spec} \left( k\left[\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right]/\frac{z}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \right) \cong \text{Spec} \left( k[x, z]/z - x^3 \right)$

$$\frac{x+y}{z} \rightsquigarrow \frac{x+1}{z}$$

$$\mathcal{O}_{X,\hat{W}} = (k[x, z]/z - x^3)_{(x,z)}, \mathcal{K}(\hat{W}) \cong k, \mathcal{O}_{X,\hat{W}}/(z) \cong (k[x]/x^3)_{(x)} \Rightarrow \text{ord}_{\hat{W}} z = 3$$

$$\mathcal{O}_{X,\hat{W}}/(x+1) \cong (k[z]/z+1)_{(z)} \cong 0 \Rightarrow \text{ord}_{\hat{W}}(x+1) = 0 \Rightarrow \text{ord}_{\hat{W}} \frac{x+1}{z} = -3$$

Alle anderen Punkte auf  $X$  haben die Form  $(a:b:1)$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$  und gehören zu Primdivisoren der Form  $\tilde{W} = \{(x-a, y-b)\}$ . Wegen  $b^2 = a^3$  folgt aus  $a = 0, b = 0$  und umgekehrt, es gilt also  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$ . Eine affine Umgebung von  $\tilde{W}$  ist

$$D_+(z) = \text{Spec} \left( k\left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] / \left( \left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{z}\right)^3 \right) \right) \cong \text{Spec} (k[x, y]/(y^2 - x^3)) .$$

Daher gilt  $\mathcal{O}_{X,\tilde{W}} \cong (k[x, y]/(y^2 - x^3))_{(x-a, y-b)}$  und  $\kappa(\tilde{W}) = \mathcal{O}_{X,\tilde{W}}/m_{\tilde{W}} \cong k$ . Die rationale Funktion  $\frac{x}{z} + \frac{y}{z}$  wird zu  $x + y$ .

Gilt  $a + b \neq 0$ , so ist  $x - a + y - b \neq x + y$ . Da  $x + y$  Grad 1 hat und  $k$  nullteilerfrei ist, liegt  $x + y$  nicht in  $(x - a, y - b)$ , ist also eine Einheit in  $\mathcal{O}_{X,\tilde{W}}$ . Hier gilt demnach  $\mathcal{O}_{X,\tilde{W}}/(x + y) = 0$  und  $\text{ord}_{\tilde{W}}(x + y) = 0$ .

Gilt  $a + b = 0$ , so ist  $x - a + y - b = x + y$  und  $x + y$  ist keine Einheit. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X,\tilde{W}}/(x + y) &\cong (k[x, y]/(y^2 - x^3, x + y))_{(x-a, y-b)} \\ &\cong (k[x]/(x^2 - x^3))_{(x-a, -x-b)} \\ &\stackrel{a+b=0}{\cong} (k[x]/(x^2(1-x)))_{(x-a)} \end{aligned}$$

Wegen  $a \neq 0$  ist  $x^2$  in obigem Ring auf jeden Fall eine Einheit. Ist zusätzlich  $a \neq 1$ , so ist auch  $(1 - x)$  eine Einheit und wie oben gilt  $\mathcal{O}_{X, \tilde{W}}/(x + y) = 0$  und  $\text{ord}_{\tilde{W}}(x + y) = 0$ . Für  $a = 1$  (also  $b = -1$ ) ist

$$\mathcal{O}_{X, \tilde{W}}/(x + y) \cong (k[x]/(1 - x))_{(0)} \cong k$$

also gilt  $\text{ord}_{\tilde{W}}(x + y) = 1$ .

Der Divisor zu  $x + y$  hat somit die folgende Gestalt:

$$\text{div}\left(\frac{x + y}{z}\right) = 2 \cdot \{(x, y)\} - 3 \cdot \{(x, z)\} + \{(x - 1, y + 1)\}$$

## Lösung 2

- a) Sei  $Y$  ein Primdivisor auf  $X$ , d.h. ein integrales abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 1. Ohne Einschränkung betrachten wir nur die  $Y$  mit  $Y \cap U \neq \emptyset$ .

Das Unterschema  $Y \cap U$  ist abgeschlossen in  $U$ . Da  $X$  irreduzibel ist, liegt  $U$  dicht in  $X$  und die Dimensionen von  $Y$  und  $U \cap Y$  sind gleich. Die Reduziertheit von  $Y$  überträgt sich direkt auf alle Unterschemata, also insbesondere auf  $Y \cap U$ . Eine Zerlegung von  $Y \cap U$  in echte abgeschlossene Teilmengen induziert eine Zerlegung von  $Y$ , also folgt aus der Irreduzibilität von  $Y$  die von  $Y \cap U$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $Y \cap U$  ein Primdivisor auf  $U$  ist.

Nun betrachten wir ein  $f \in k(X) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,Y})$ . Dann ist  $f|_U$  ein Element im Funktionenkörper  $k(U) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{U,Y \cap U})$  und da die Ordnung eine lokale Eigenschaft ist und  $U \cap Y \neq \emptyset$  gilt, ist  $\text{ord}_Y f = \text{ord}_{Y \cap U} f|_U$ . Hauptdivisoren werden also auf Hauptdivisoren abgebildet und damit ist die angegebene Abbildung wohldefiniert.

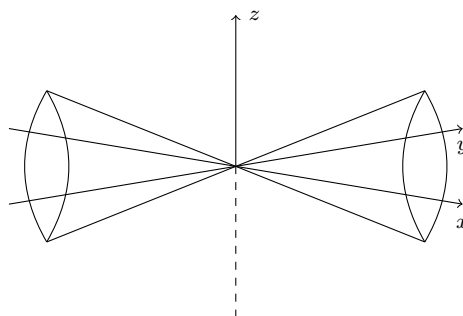
Es bleibt noch die Surjektivität zu zeigen: Sei  $Y \subseteq U$  ein Primdivisor. Es gilt  $\bar{Y} \cap U = Y$ , weil  $Y$  abgeschlossen in  $U$  ist. Da  $U$  dicht in  $X$  ist gilt  $\text{codim}_X(\bar{Y}) = \text{codim}_U(Y) = 1$ . Wir haben also einen Primdivisor auf  $X$  gefunden, der auf  $Y$  abgebildet wird.

- b) Ist die Kodimension von  $V$  mindestens 2, so kann  $V$  keine Teilmenge von Kodimension 1 enthalten. Daher gilt für alle Primdivisoren  $Y$  in  $X$ ,  $Y \cap U \neq \emptyset$  und die oben definierte Abbildung ist injektiv.
- c) Nach a) wissen wir bereits, dass  $\varphi: \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$  surjektiv ist. Es bleibt also zu zeigen, dass  $\text{Kern}(\varphi) = \text{Bild}(i)$  mit  $i: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X), k \mapsto k \cdot V$ .

Wegen  $U \cap V = \emptyset$  ist  $\varphi(V) = 0$  und somit  $\text{Kern}(\varphi) \supseteq \text{Bild}(i)$ . Ist umgekehrt  $W$  ein Primdivisor aus  $\text{Kern}(\varphi)$ , so gilt  $U \cap W = \emptyset$ , also  $W \subseteq V$ . Da  $V$  und  $W$  beide irreduzibel sind und dieselbe Dimension haben, folgt  $V = W$ , was  $\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Bild}(i)$  beweist.

## Lösung 3

$$R = k[x, y, z]/(xy - z^2), \quad X = \text{Spec } R$$



- a) Zu zeigen:  $X$  noethersches, integres, separiertes Schema, nicht lokal faktoriell (das heißt nicht alle  $\mathcal{O}_{X,x}$  sind faktoriell)

$X$  ist noethersch, **integer**, separiert ✓

Betrachte  $p = (x, y, z)$ ,  $R_p = \left( k[x, y, z] / xy - z^2 \right)_{(x, y, z)}$

$xy = z^2$ ,  $x, y, z$  sind keine Einheiten,  $x, y, z$  sind irreduzibel.

- b)  $V := V((y, z))$  („ $x$ -Achse“) ist irreduzibel, hat Kodimension 1.

Aufgabe 2 c):  $\mathbb{Z} \xrightarrow[k \mapsto k \cdot V]{\quad} \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}\left( \overset{X \setminus V}{U} \right) \rightarrow 0$  exakt.  $y$  rationale Funktion auf  $X$ .

In  $X$ :  $y = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$

$\mathcal{O}_{X,V} = \left( k[x, y, z] / xy - z^2 \right)_{(y, z)} \xrightarrow[\Rightarrow y = \frac{1}{x} z^2]{x \text{ Einh.}} (k[x, z])_{(z)}$

$k(V) = \mathcal{O}_{X,V} / (z) \cong k[x]_{(0)} \cong k(x)$ ,  $\mathcal{O}_{X,V} / (y) = \left( k[x, z] / z^2 \right)_{(z)}$

$\dim_{k(X)} y = 2 \Rightarrow \text{div } y = 2 \cdot V$   
 $\parallel$   
 $\kappa(V)$

$X \setminus V = \text{Spec}(D(y)) = \text{Spec } R$ ,  $R_y = k[x, y, y^{-1}, z] / xy - z^2 \cong k[y, y^{-1}, z] = k[y, z]_y$

$R$  noethersch  $\Rightarrow R_y$  noethersch  $\xrightarrow{\text{Prop. 11.3}} \text{Cl}(X \setminus V) = 0$

Wir wissen, dass  $\text{Cl}(X)$  von  $V$  erzeugt wird und dass  $2 \cdot V$  ein Hauptdivisor ist. Zu zeigen bleibt, dass  $V$  kein Hauptdivisor ist, was wir in zwei Schritten beweisen:

**Behauptung 1:**  $q := (y, z)$  ist kein Hauptideal (Erinnerung:  $V = V(q)$ ).

Wäre  $q$  ein Hauptideal, so gäbe es ein  $f$  mit  $f|y$  und  $f|z$ . Die einzige Relation in  $R$  verändert den Grad eines Polynoms nicht und kann nicht auf Elemente von Grad 1 angewendet werden, also müsste  $f$  sogleich  $x$  und  $y$  sein, was nicht möglich ist.

**Behauptung 2:** Wäre  $V = \text{div}(f)$  für ein  $f \in k(X)$ , so wäre  $q$  ein Hauptideal.

Siehe Beweis von Proposition 6.2 im Hartshorne.

- c) Aus dem Beweis von Satz 3 b) sehen wir, dass der Hinweis stimmt und Cartier-Divisoren genau die Weil-Divisoren sind, die lokal Hauptdivisoren sind.  $V$  ist kein Hauptdivisor, auch nicht lokal (er hat nur an einer Stelle einen Wert  $\neq 0$ , so dass „lokal“ hier keine Abschwächung ist). Es gibt folglich keinen Cartier-Divisor zu  $V$ . Dagegen ist  $2 \cdot V$  ein Hauptdivisor, also erst recht lokal ein Hauptdivisor und somit in  $\text{CaCl}(X)$  gleich 0. Das zeigt die Behauptung.

## Übung 12 vom 17. Juli 2012

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

In einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  seien zwei Objekte  $A$  und  $B$  mit injektiven Auflösungen  $0 \rightarrow A \rightarrow I^\bullet$  und  $0 \rightarrow B \rightarrow J^\bullet$  gegeben sowie ein Morphismus  $f: A \rightarrow B$ . Zeige:

- a) Der Morphismus  $f$  kann zu einem Morphismus der Kettenkomplexe fortgesetzt werden, d.h. es gibt Morphismen  $\alpha^k: I^k \rightarrow J^k$  für  $k \geq 0$ , die das folgende Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots \\ & & f \downarrow & & \alpha^0 \downarrow & & \alpha^1 \downarrow & & \alpha^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\psi} & J^0 & \xrightarrow{e^0} & J^1 & \xrightarrow{e^1} & J^2 & \xrightarrow{e^2} & \dots \end{array}$$

- b) Ist  $(\beta^k)_{k \geq 0}$  eine weitere Fortsetzung von  $f$  auf die Kettenkomplexe, so sind  $(\alpha^k)_{k \geq 0}$  und  $(\beta^k)_{k \geq 0}$  „(ketten)homotop“, d.h. es gibt für  $k \geq 0$  diagonale Morphismen  $h^k: I^k \rightarrow J^{k-1}$  mit  $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$  (dabei ist  $J^{-1} = B$ ).
- c) Nun sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{F}$  eine Garbe von abelschen Gruppen auf  $X$ . Zeige, dass die Garbenkohomologie  $H^i(X, \mathcal{F})$  nicht von der gewählten injektiven Auflösung von  $\mathcal{F}$  abhängt.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $k$  ein Körper,  $X := \text{Spec}(k[x, y]) = \mathbb{A}_k^2$  und  $U := X \setminus \{(0, 0)\}$ . Betrachte eine offene affine Überdeckung von  $U$  und berechne die Čech-Kohomologie der Strukturgarbe auf  $U$  bezüglich dieser Überdeckung. Gib eine schöne Basis für den (unendlichdimensionalen) Vektorraum an, der dir dabei über den Weg läuft.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechne die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf der Sphäre  $S^2$  für die folgenden zwei Überdeckungen von  $S^2$ :

- a) durch zwei echte offene Teilmengen.
- b) durch drei echte offene Teilmengen, so dass der Schnitt von je zweien homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe und der Schnitt von allen dreien homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben ist. Natürlich sollte man sich dafür zunächst per Skizze davon überzeugen, dass eine solche Überdeckung existiert.

### Aufgabe 4 (zum Nachdenken, keine Abgabe)

In der Vorlesung haben wir die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf  $S^1$  zu einer Überdeckung berechnet, die aus zwei einfach zusammenhängenden Teilmengen  $U$  und  $V$  besteht.

Mache dir an geeigneten Beispielen klar, dass die Kohomologie sich nicht mehr ändert, wenn man die Überdeckung noch weiter verfeinert, d.h. durch  $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ersetzt mit  $U_i \subseteq U$  oder  $U_i \subseteq V$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

### Lösung 1

$\mathcal{A}$  abelsche Kategorie,  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $0 \rightarrow A \rightarrow I^\bullet$ ,  $0 \rightarrow B \rightarrow J^\bullet$  injektive Auflösungen,  $f: A \rightarrow B$

- a) Setze  $f$  zu Morphismus  $(\alpha^k)_{k \geq 0}$  der Kettenkomplexe fort,  $\alpha^k: I^k \rightarrow J^k$ . Seien  $\alpha^{-1} = f, \alpha^0, \dots, \alpha^n$  gegeben.



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & I^0 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow I^n \longrightarrow I^{n+1} \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^{n-1} & & \downarrow \alpha^n & & \downarrow \alpha^{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\psi} & J^0 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow J^{n-1} \xrightarrow{e^{n-1}} J^n \xrightarrow{e^n} J^{n+1}
 \end{array}$$

$\alpha^n: I^n \rightarrow J^n$  induziert  $\alpha^n: I^n/\text{Kern}(d^n) \rightarrow J^n$

Für  $x \in \text{Kern}(d^n) = \text{Bild}(d^{n-1})$  gilt: es gibt ein  $y \in I^{n-1}$  mit  $d^{n-1}(y) = x \Rightarrow e^n(\alpha^n(x)) = e^n(\alpha^n(d^{n-1}(y))) = e^n(\underbrace{e^{n-1}(\alpha^{n-1}(y))}_{=0}) = 0 \Rightarrow e^n \circ \alpha^n$  ist auf  $I^n/\text{Kern}(d^n)$  wohldefiniert.

$J^{n+1}$  injektiv,  $I^n/\text{Kern}(d^n) \hookrightarrow I^{n+1}$  Monomorphismus  $\Rightarrow$  Es gibt Fortsetzung  $\alpha^{n+1}: I^{n+1} \rightarrow J^{n+1}$  von  $e^n \circ \alpha^n$ . Nach Konstruktion gilt:  $\alpha^{n+1} \circ d^n = e^n \circ \alpha^n$

- b) Seien  $(\alpha^k)_{k \geq 0}$  und  $(\beta^k)_{k \geq 0}$  Fortsetzungen von  $f$  auf die Kettenkomplexe. Wir konstruieren diagonale Morphismen  $h^k: I^k \rightarrow J^{k-1}$  mit  $\alpha^k - \beta^k = h^{k+1} \circ d^k + e^{k-1} \circ h^k$ , wobei  $J^{-1} = B$ ,  $I^{-1} = A$  und  $J^{-2} = 0$ .

Setzen wir  $h^{-1}: A \rightarrow 0$  und  $h^0: I^0 \rightarrow B$  konstant 0, so gilt  $f - f = h^0 \circ \varphi + 0 \circ h^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & \dots \\
 & & \downarrow f-f & & \downarrow h^0 & & \downarrow \alpha^0 - \beta^0 \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\psi} & J^0 & \xrightarrow{e^0} & \dots
 \end{array}$$

Seien nun  $h^{-1}, \dots, h^n$  mit der gewünschten Eigenschaft gegeben.

Für  $x \in \text{Kern}(d^n) = \text{Bild}(d^{n-1})$  gilt: Es gibt ein  $y \in I^{n-1}$  mit  $d^{n-1}(y) = x$ , also gilt

$$\begin{aligned}
 (\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n)(x) &= (\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n)(d^{n-1}(y)) \\
 &= (\alpha^n \circ d^{n-1} - \beta^n \circ d^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
 &= (e^{n-1} \circ \alpha^{n-1} - e^{n-1} \circ \beta^{n-1} - e^{n-1} \circ h^n \circ d^{n-1})(y) \\
 &= (e^{n-1} \circ (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} - h^n \circ d^{n-1}))(y) \\
 &= (e^{n-1} \circ e^{n-2} \circ h^{n-1})(y) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 I^n & \xrightarrow{d^n} & I^{n+1} \\
 \downarrow \alpha^n & \searrow & \downarrow \alpha^{n+1} \\
 J^n & \xrightarrow{e^n} & J^{n+1}
 \end{array}$$

$\alpha^n: I^n \rightarrow J^n$  induziert  $\alpha^n: I^n/\text{Kern}(d^n) \rightarrow J^n$

Also faktorisiert  $\alpha^n - \beta^n - e^{n-1}h^n$  über  $I^n/\text{Kern}(d^n)$  und induziert einen Morphismus  $\tilde{h}^{n+1}: I^n/\text{Kern}(d^n) \rightarrow J^n$ . Da  $J^n$  injektiv ist und  $I^n/\text{Kern}(d^n) \hookrightarrow I^{n+1}$  ein Monomorphismus, gibt es eine Fortsetzung  $h^{n+1}: I^{n+1} \rightarrow J^n$  von  $\tilde{h}^{n+1}$ . Nach Konstruktion gilt  $h^{n+1} \circ d^n = \alpha^n - \beta^n - e^{n-1} \circ h^n$ .

- c) Mit Hilfe von a) und b) zeigen wir nun, dass die Garbenkohomologie nicht von der gewählten injektiven Auflösung abhängt.

Seien  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^\bullet$  und  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow J^\bullet$  zwei injektive Auflösungen der Garbe  $\mathcal{F}$  auf dem Schema  $X$ . Nach a) lässt sich  $\text{id}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  zu  $(\alpha^k)_{k \geq 0}: I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  und zu  $(\beta^k)_{k \geq 0}: J^\bullet \rightarrow I^\bullet$  fortsetzen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 \xrightarrow{d^1} \dots \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^1 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\psi} & J^0 & \xrightarrow{e^0} & J^1 \xrightarrow{e^1} \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\psi} & J^0 & \xrightarrow{e^0} & J^1 \xrightarrow{e^1} \dots \\
 & & \downarrow f & & \downarrow \beta^0 & & \downarrow \beta^1 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 \xrightarrow{d^1} \dots
 \end{array}$$

Dann sind  $(\text{id})_{k \geq 0}$  und  $(\beta^k \circ \alpha^k)_{k \geq 0}$  beides Fortsetzungen von  $\text{id}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  nach  $I^\bullet \rightarrow I^\bullet$ . Nach b) gibt es also Morphismen  $h^k: I^k \rightarrow I^{k-1}$  so dass  $\beta^k \circ \alpha^k - \text{id} = h^{k+1} \circ d^k + d^{k-1} \circ h^k$ . Wir entfernen die erste Spalte, wenden den globalen Schnittfunktor an und erhalten das folgende Diagramm von abelschen Gruppen (die zum Garbenmorphismus  $g$  gehörige Abbildung auf ganz  $X$ ,  $g(X)$ , nennen wir  $\tilde{g}$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, I^0) & \xrightarrow{\tilde{d}^0} & \Gamma(X, I^1) & \xrightarrow{\tilde{d}^1} & \Gamma(X, I^2) \xrightarrow{\tilde{d}^2} \dots \\ & & \downarrow \tilde{\beta}^0 \circ \tilde{\alpha}^0 - \text{id} & \nearrow \tilde{h}^0 & \downarrow \tilde{\beta}^1 \circ \tilde{\alpha}^1 - \text{id} & \nearrow \tilde{h}^1 & \downarrow \tilde{\beta}^2 \circ \tilde{\alpha}^2 - \text{id} \nearrow \tilde{h}^2 \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, I^0) & \xrightarrow{\tilde{d}^0} & \Gamma(X, I^1) & \xrightarrow{\tilde{d}^1} & \Gamma(X, I^2) \xrightarrow{\tilde{d}^2} \dots \end{array}$$

Für  $k \geq 0$  gilt: Wegen  $\alpha^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \alpha^{k-1}$  und  $\beta^k \circ d^{k-1} = d^{k-1} \circ \beta^{k-1}$ , ist  $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \text{id}$  auf  $H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$  wohldefiniert. Sei  $\bar{x} = x + \text{Bild}(\tilde{d}^{k-1}) \in H^k(\Gamma(X, I^\bullet))$ , d.h.  $x \in \text{Kern}(\tilde{d}^k)$ . Dann gilt:

$$(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \text{id})(\bar{x}) = \overline{(\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k - \text{id})(x)} = \overline{\tilde{h}^{k+1} \circ \underbrace{\tilde{d}^k(x)}_{=0} + \underbrace{\tilde{d}^{k-1} \circ \tilde{h}^k(x)}_{\in \text{Bild}(\tilde{d}^{k-1})}} = 0$$

Es folgt  $\tilde{\beta}^k \circ \tilde{\alpha}^k = \text{id}$ . Ganz analog erhält man  $\tilde{\alpha}^k \circ \tilde{\beta}^k = \text{id}$  und somit  $H^k(\Gamma(X, I^\bullet)) = H^k(\Gamma(X, J^\bullet))$ .

### Lösung 2

$k$  Körper,  $X := \text{Spec}(k[x, y]) = \mathbb{A}_k^2$ ,  $U = X \setminus \{(0, 0)\}$ . Überdecke  $U$  affin durch  $D(x)$  und  $D(y) \rightsquigarrow$  Koordinatenringe  $k[x, y]_x$ ,  $k[x, y]_y$

In Schemawelt:  $U_1 := \text{Spec}(k[x, y, \frac{1}{x}])$ ,  $U_2 := \text{Spec}(k[x, y, \frac{1}{y}])$

$$\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$$

Berechne die Čech-Kohomologie von  $\mathcal{O}_U$ :

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U(U_1) \times \mathcal{O}_U(U_2) = k[x, y, \frac{1}{x}] \times k[x, y, \frac{1}{y}]$$

$$C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U(U_1 \cap U_2) = k[x, y]_{xy} = k[x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}]_{xy}$$

$$k \geq 2: C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = 0$$

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d} C^1 \rightarrow 0$$

$$d^0: \begin{cases} C^0 & \rightarrow C^1 \\ (f, g) & \mapsto g - f \end{cases}$$

$$f \in k[x, y, \frac{1}{x}], g \in k[x, y, \frac{1}{y}] \text{ mit } f - g = 0 \text{ in } k[x, y]_{xy} \Rightarrow f = g \in k[x, y] \Rightarrow \text{Kern}(d^0) \cong k[x, y] = \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U)$$

$$\text{Sei } f = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} f_{ij} x^i y^j, g = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0}} g_{ij} x^i y^j \rightsquigarrow g - f = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} (f_{ij} - g_{ij}) x^i y^j + \sum_{\substack{i < 0 \\ j \geq 0}} f_{ij} x^i y^j + \sum_{\substack{j < 0 \\ i \geq 0}} g_{ij} x^i y^j$$

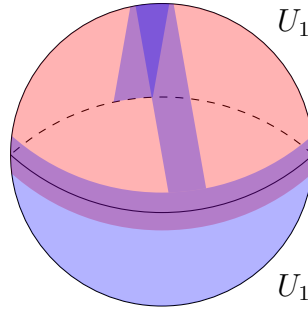
$$\Rightarrow \text{Bild}(d^0) = \{k = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0 \vee j \geq 0}} h_{ij} x^i y^j\}$$

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_U) = \text{Kern}(d^1) / \text{Bild}(d^0) = \langle x^i y^j \mid i < 0, j < 0 \rangle \quad k\text{-Vektorraum}$$

### Lösung 3

Čech-Kohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf der  $S^2$

- a)  $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$ ,  $U_1, U_2$  echte, offene, *zusammenhängende* Teilmengen



$U_1 \cap U_2$  ist zusammenhängend

$$\Rightarrow C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \text{ für alle } k \geq 2 \text{ gilt } C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$$

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \rightarrow 0$$

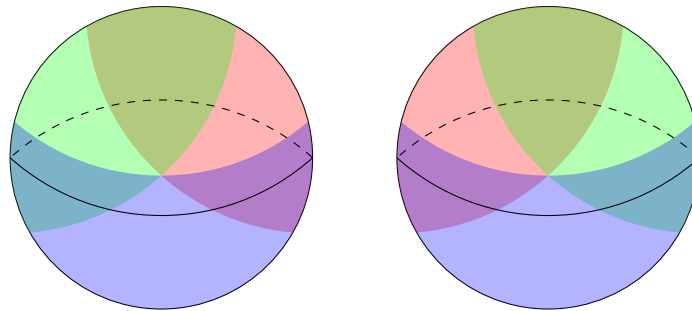
$$d^0 : \begin{cases} C^0 & \rightarrow & C^1 \\ (f, g) & \mapsto & g - f \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Kern}(d^0) = \mathbb{Z} \\ \text{Bild}(d^0) = \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0, \text{ für alle } k \geq 2 \text{ gilt } \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$$

- b)  $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ ,  $U_i \cap U_j \cong \text{Kreisscheibe}$  für  $i \neq j$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben.

Vorderseite

Rückseite



$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1) \times \mathbb{Z}(U_2) \times \mathbb{Z}(U_3) \cong \mathbb{Z}^3, C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_2 \cap U_3) \times \mathbb{Z}(U_1 \cap U_3) \times \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}^3, C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \cong \mathbb{Z}, \text{ für alle } k \geq 3 \text{ gilt } C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$$

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \rightarrow 0$$

$$d^0 : \begin{cases} C^0 & \rightarrow & C^1 \\ (f, g, h) & \mapsto & (h - g, h - f, g - f) \end{cases}$$

$$\text{Kern}(d^0) = \{(f, f, f) | f \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{Bild}(d^0) = \{(h - g, h - f, g - f) | h, g, f \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 | x = y - z\} \cong \mathbb{Z}^2$$

$$d^1 : \begin{cases} C^1 & \rightarrow & C^2 \cong \mathbb{Z} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, x - y + z) \end{cases}, \text{ Kern}(d^1) \cong \mathbb{Z}^2, \text{ Bild}(d^1) \cong \mathbb{Z}$$

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \text{Kern}(d^1) / \text{Bild}(d^0) = \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}^2 = 0, \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}, \text{ für alle } k \geq 3 \text{ gilt } \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$$