

## § 2.

### Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Sei  $(a^{(k)})$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ , also  $(a^{(k)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots)$  mit  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ . Die Begriffe **Teilfolge** und **Umordnung** definiert man wie in Analysis I.  $(a^{(k)})$  heißt beschränkt :  $\iff \exists c \geq 0 : \|a^{(k)}\| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$ .

#### Definition (Grenzwert und Beschränktheit)

$(a^{(k)})$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \|a^{(k)} - a\| \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$  (  $\iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a\| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$ ). In diesem Fall heißt  $a$  der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a^{(k)})$  und man schreibt:  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)}$  oder  $a^{(k)} \rightarrow a \ (k \rightarrow \infty)$

#### Beispiel

$(n = 2)$ :  $a^{(k)} = (\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k^2})$  (Erinnerung:  $\frac{1}{n}$  konvergiert gegen 0);  $a := (0, 1)$ ;  $\|a^{(k)} - a\| = \|(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})\| = (\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4})^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \implies a^{(k)} \rightarrow (0, 1)$

#### Satz 2.1 (Konvergenz)

Sei  $(a^{(k)})$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Sei  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann:

$$a^{(k)} \rightarrow a \ (k \rightarrow \infty) \iff a_1^{(k)} \rightarrow a_1, \dots, a_n^{(k)} \rightarrow a_n \ (k \rightarrow \infty)$$

- (2) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

- (3) Ist  $(a^{(k)})$  konvergent  $\implies a^{(k)}$  ist beschränkt und jede Teilfolge und jede Umordnung von  $(a^{(k)})$  konvergiert gegen  $\lim a^{(k)}$ .

- (4) Sei  $(b^{(k)})$  eine weitere Folge,  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Es gelte  $a^{(k)} \rightarrow a$ ,  $b^{(k)} \rightarrow b$  Dann:

$$\begin{aligned} \|a^{(k)}\| &\rightarrow \|a\| \\ a^{(k)} + b^{(k)} &\rightarrow a + b \\ \alpha a^{(k)} &\rightarrow \alpha a \\ a^{(k)} \cdot b^{(k)} &\rightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

- (5) **Bolzano-Weierstraß**: Ist  $(a^{(k)})$  beschränkt, so enthält  $(a^{(k)})$  eine konvergente Teilfolge.

- (6) **Cauchy-Kriterium**:  $(a^{(k)})$  konvergent  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k)} - a^{(l)}\| < \varepsilon \ \forall k, l \geq k_0$

**Beweis**

(1) 1.1(7)  $\implies |a_j^{(k)} - a_j| \leq \|a^{(k)} - a\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i| \implies$  Behauptung.

(2) und

(3) wie in Analysis I.

(4) folgt aus (1)

(5) Sei  $(a^{(k)})$  beschränkt. O.B.d.A:  $n = 2$ . Also  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$  1.1(7)  $\implies |a_1^{(k)}|, |a_2^{(k)}| \leq \|a^{(k)}\| \forall k \in \mathbb{N} \implies (a_1^{(k)}), (a_2^{(k)})$  sind beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$ . Analysis 1  $\implies (a_1^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_1^{(k_{j_l})})$ .  $(a_2^{(k_{j_l})})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_2^{(k_{j_{l_l})}})$ . Analysis 1  $\implies (a_1^{(k_{j_{l_l})}})$  ist konvergent  $\xrightarrow{(1)} (a^{(k_{j_{l_l})}})$  konvergiert.

(6) „ $\implies$ “: wie in Analysis 1. „ $\longleftarrow$ “: 1.1(7)  $\implies |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(l)}\| (j = 1, \dots, n) \implies$  jede Folge  $(a_j^{(k)})$  ist eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , also konvergent  $\xrightarrow{(1)} (a^{(k)})$  konvergiert. ■

**Satz 2.2 (Häufungswerte und konvergente Folgen)**

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

(1)  $x_0 \in \mathcal{H}(A) \iff \exists$  Folge  $(x^{(k)})$  in  $A \setminus \{x_0\}$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$ .

(2)  $x_0 \in \bar{A} \iff \exists$  Folge  $(x^{(k)})$  in  $A$  mit  $x^{(k)} \rightarrow x_0$ .

(3)  $A$  ist abgeschlossen  $\iff$  der Grenzwert jeder konvergenten Folge in  $A$  gehört zu  $A$ .

(4) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i)  $A$  ist beschränkt und abgeschlossen

(ii) Jede Folge in  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu  $A$  gehört.

(iii)  $A$  ist kompakt

**Beweis**

(1) Wie in Analysis 1

(2) Fast wörtlich wie bei (1)

(4) Wörtlich wie in Analysis 1

(3) „ $\implies$ “: Sei  $(a^{(k)})$  eine konvergente Folge in  $A$  und  $x_0 := \lim a^{(k)} \xrightarrow{(2)} x_0 \in \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$ .  
 „ $\longleftarrow$ “: z.z.:  $\bar{A} \subseteq A$ . Sei  $x_0 \in \bar{A} \xrightarrow{(2)} x_0 \in A$ . Also:  $A = \bar{A}$ . ■

**Satz 2.3 (Überdeckungen)**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  sei abgeschlossen und beschränkt

- (1) Ist  $\varepsilon > 0 \implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_\varepsilon(a^{(j)})$
- (2)  $\exists$  abzählbare Teilmenge  $B$  von  $A : \bar{B} = A$ .
- (3) **Überdeckungssatz von Heine-Borel:** Ist  $(G_\lambda)_{\lambda \in M}$  eine Familie offener Mengen mit  $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in M} G_\lambda$ , dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in M : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m G_{\lambda_j}$ .

### Beweis

- (1) Sei  $\varepsilon > 0$ . Annahme: Die Behauptung ist falsch. Sei  $a^{(1)} \in A$ . Dann:  $A \not\subseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \exists a^{(2)} \in A : a^{(2)} \notin U_\varepsilon(a^{(1)}) \implies \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$ .  $A \not\subseteq U_\varepsilon(a^{(1)}) \cup U_\varepsilon(a^{(2)}) \implies \exists a^{(3)} \in A : \|a^{(3)} - a^{(2)}\| \geq \varepsilon, \|a^{(3)} - a^{(1)}\| \geq \varepsilon$  etc.. Wir erhalten so eine Folge  $(a^{(k)})$  in  $A$ :  $\|a^{(k)} - a^{(l)}\| \geq \varepsilon$  für  $k \neq l$ . 2.2(4)  $\implies (a^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $\xrightarrow{2.1(6)} \exists j_0 \in \mathbb{N} : \|a^{(k_j)} - a^{(k_l)}\| < \varepsilon \forall j, l \geq j_0$ , Widerspruch!
- (2) Sei  $j \in \mathbb{N}$ .  $\varepsilon := \frac{1}{j}$ . (1)  $\implies \exists$  endl. Teilmenge  $B_j$  von  $A$  mit  $(*) A \subseteq \bigcup_{x \in B_j} U_{\frac{1}{j}}(x)$ .  
 $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \implies B \subseteq A$  und  $B$  ist abzählbar. Dann:  $\bar{B} \subseteq \bar{A} \stackrel{\text{Vor.}}{=} A$ . Noch zu zeigen:  $A \subseteq \bar{B}$ . Sei  $x_0 \in A$  und  $\delta > 0$ : zu zeigen:  $U_\delta(x_0) \cap B \neq \emptyset$ . Wähle  $j \in \mathbb{N}$  so, daß  $\frac{1}{j} < \delta$   $(*) \implies \exists x \in B_j \subseteq B : x_0 \in U_{\frac{1}{j}}(x) \implies \|x_0 - x\| < \frac{1}{j} < \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in U_\delta(x_0) \cap B$ .
- (3) Teil 1: Behauptung:  $\exists \varepsilon > 0 : \forall a \in A \exists \lambda \in M : U_\varepsilon(a) \subseteq G_\lambda$ . Beweis: Annahme: Die Behauptung ist falsch.  $\forall k \in \mathbb{N} \exists a^{(k)} \in A : (**) U_{\frac{1}{k}}(a^{(k)}) \not\subseteq G_\lambda \forall \lambda \in M$ . 2.2(4)  $\implies (a^{(k)})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a^{(k_j)})$  und  $x_0 := \lim_{j \rightarrow \infty} a^{(k_j)} \in A \implies \exists \lambda_0 \in M : x_0 \in G_{\lambda_0}$ ;  $G_{\lambda_0}$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq G_{\lambda_0}$ .  $a^{(k_j)} \rightarrow x_0 (j \rightarrow \infty) \implies \exists m_0 \in \mathbb{N} : a^{(m_0)} \in U_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$  und  $m_0 \geq \frac{2}{\delta}$ . Sei  $x \in U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \implies \|x - x_0\| = \|x - a^{(m_0)} + a^{(m_0)} - x_0\| \leq \|x - a^{(m_0)}\| + \|a^{(m_0)} - x_0\| \leq \frac{1}{m_0} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \implies x \in U_\delta(x_0) \implies x \in G_{\lambda_0}$ . Also:  $U_{\frac{1}{m_0}}(a^{(m_0)}) \subseteq G_{\lambda_0}$ , Widerspruch zu  $(**)$ !
- Teil 2: Sei  $\varepsilon > 0$  wie in Teil 1. (1)  $\implies \exists a^{(1)}, \dots, a^{(m)} \in A : A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_\varepsilon(a^{(j)})$ . Teil 1  $\implies \exists \lambda_j \in M : U_\varepsilon(a^{(j)}) \subseteq G_{\lambda_j} (j = 1, \dots, m) \implies A \subseteq \bigcup_{j=1}^m G_{\lambda_j}$  ■

