

# Kapitel 4

## Nichtsinguläre Kurven

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossener Körper.  $C$  sei irreduzible projektive Varietät der Dimension 1 über  $k$ .

$C$  nicht singulär  $\Leftrightarrow$  jedes  $x \in C$  nichtsingulär  
 $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{C,x}$  regulärer lokaler Ring für jedes  $x \in C$

### § 20 Diskrete Bewertungsringe

#### Proposition 20.1

Sei  $(R, m)$  ein nullteilerfreier lokaler noetherscher Ring der Dimension 1. Dann sind äquivalent:

- i)  $R$  ist regulär (das heißt  $\dim_k(m/m^2) = 1, k = R/m$ )
- ii)  $m$  ist Hauptideal
- iii) Es gibt  $t \in m$ , sodass jedes  $x \in R - \{0\}$  eine eindeutige Darstellung  $x = u \cdot t^n$  hat mit  $n \in \mathbb{N}, u \in R^\times$
- iv)  $R$  ist Hauptidealring

#### Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii): ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ✓

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei  $(0) \neq I \subset R$  Ideal,  $n$  minimal, sodass es ein  $x = u \cdot t^n \in I$  gibt.

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow t^n \in I \Rightarrow m^n \subseteq I \\ I \subseteq m^n \text{ nach Wahl von } n \end{array} \right\} \Rightarrow I = m^n = (t^n)$$

(iv) $\Rightarrow$ (i):  $R$  Hauptidealring  $\Rightarrow m = (t)$  für ein  $t \in m$ .  $\Rightarrow m/m^2$  wird von  $\bar{t}$  erzeugt  $\Rightarrow \dim_k(m/m^2) \leq 1$ .

Andererseits:  $\dim(m/m^2) \geq \dim R = 1$

□

#### Bemerkung 20.2

Sei  $(R, m)$  regulärer lokaler Ring der Dimension 1,  $K = \text{Quot}(R)$ . Dann gilt:

- a) Jedes  $x \in K^\times$  hat eindeutige Darstellung  $x = ut^n$  mit  $u \in R^\times, n \in \mathbb{Z}$
- b) Die Abbildung  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $ut^n \mapsto n$  erfüllt:

- i)  $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$
- ii)  $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$  für  $x + y \neq 0$

#### Definition + Bemerkung 20.3

Sei  $K$  ein Körper

- a) Eine surjektive Abbildung  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  mit i) und ii) heißt **diskrete Bewertung** auf  $K$ .
- b) Ist  $v$  diskrete Bewertung auf  $K$ , so ist  $\mathcal{O}_v := \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}$  lokaler Ring mit maximalem Ideal  $m_v = \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) > 0\}$ .
- c) Ein nullteilerfreier Ring  $R$  heißt **diskreter Bewertungsring**, wenn es eine diskrete Bewertung  $v$  auf  $K := \text{Quot}(R)$  gibt mit  $R = \mathcal{O}_v$ .
- d) Jeder reguläre lokale Ring der Dimension 1 ist diskreter Bewertungsring.

### Beweis

b)  $\mathcal{O}_v$  Ring:  $v(x) = v(1 \cdot x) = v(1) + v(x) \Rightarrow v(1) = 0$

$$0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$$

$$\Rightarrow v(-x) = v(x) \forall x \in K \Rightarrow \mathcal{O}_v \text{ ist Ring}$$

$\mathcal{O}_v$  lokal: Sei  $x \in \mathcal{O}_v - m_v$ , also  $v(x) = 0$

$$\Rightarrow v(x) + v\left(\frac{1}{x}\right) = v\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = v(1) = 0$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{1}{x}\right) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v$$

d) folgt aus 20.2 □

### Proposition 20.4

Jeder diskrete Bewertungsring ist regulärer Ring der Dimension 1.

### Beweis

Es genügt zu zeigen, dass  $m_v$  Hauptideal ist (wegen 20.1!!). Sei dazu  $t \in m_v$  mit  $v(t) = 1$ . Sei  $x \in m_v \setminus \{0\}$ ,  $y := \frac{x}{t^{v(x)}} \in K^\times$ .

$$v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{O}_v^\times$$

$$\Rightarrow x = y \cdot t^{v(x)} \in (t)$$
□

### Beispiel

- 1) Sei  $k$  ein Körper,  $a \in k$ . Für  $f \in k(X)^\times$  sei  $\text{ord}_a(f)$  die Null-, beziehungsweise Polstellenordnung von  $f$  in  $a$ . Das heißt für  $f \in k[X]$  ist  $\text{ord}_a(f) = n$ , wenn  $f = (X - a)^n \cdot g$  mit  $g(a) \neq 0$ . Für  $f = \frac{g}{h}$ ,  $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$ , ist  $\text{ord}_a(f) = \text{ord}_a(g) - \text{ord}_a(h)$ .

$$\Rightarrow \text{ord}_a : k(X)^\times \rightarrow \mathbb{Z} \text{ ist diskrete Bewertung. Der zugehörige Bewertungsring ist } k[X]_{(X-a)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),a}$$

- 2) Für  $f = \frac{g}{h} \in k(X)^\times$ ,  $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$ , sei  $\text{ord}(f) := \deg(h) - \deg(g)$ .

$\text{ord}$  ist diskrete Bewertung auf  $k(X)$ :

$$\text{ord}\left(\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2}\right) = \text{ord}\left(\frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}\right) = \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2 + g_2 h_1)$$

$$\geq \min(\deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2), \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_2 h_1)) = \min(\text{ord}\left(\frac{g_1}{h_1}\right), \text{ord}\left(\frac{g_2}{h_2}\right))$$

Anmerkung:  $\text{ord}$  „=“  $\text{ord}_\infty$  wie in Beispiel 1.

### Bemerkung 20.5

Ist  $k$  algebraisch abgeschlossen, so ist jede diskrete Bewertung auf  $k(X)$  von der Form  $\text{ord}_a$  für ein  $a \in k \cup \{\infty\}$ .

### Beweis

Übung oder Vorlesung □

### Beispiel

- 3)  $K = \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  Primzahl. Schreibe  $a \in \mathbb{Q}^\times$  in der Form  $a = p^n \cdot \frac{b}{c}$ ,  $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $p \nmid bc$ . Setze  $v_p(a) := n$ .

$v_p : \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  ist diskrete Bewertung („ $p$ -adische Bewertung“).

$$\mathcal{O}_{v_p} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$

**Bemerkung 20.6**

Sei  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  diskrete Bewertung auf Körper  $K$ . Sei  $0 < \varrho < 1$ . Setze:

$$|x|_v := \begin{cases} \varrho^{v(x)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Dann erfüllt  $|\cdot|_v : K \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $|xy|_v = \varrho^{v(xy)} = \varrho^{v(x)+v(y)} = \varrho^{v(x)} \cdot \varrho^{v(y)} = |x|_v \cdot |y|_v$
- $|x+y|_v = \varrho^{v(x+y)} \leq \max(\varrho^{v(x)}, \varrho^{v(y)}) \leq \max(|x|_v, |y|_v) (\leq |x|_v + |y|_v)$

**Definition 20.7**

Sei  $C$  nichtsinguläre Kurve,  $P \in C$ . Dann ist  $\mathcal{O}_{C,P}$  diskreter Bewertungsring. Die zugehörige diskrete Bewertung auf  $k(C) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{C,P})$  heißt  $\text{ord}_P$ .  $\text{ord}_P$  heißt die **Ordnung** von  $f$  in  $P$ .

**Bemerkung 20.8**

Sie  $C$  nichtsinguläre Kurve,  $f \in k(C)^\times$ . Dann gibt es nur endlich viele  $P \in C$  mit  $\text{ord}_P(f) \neq 0$ .

**Beweis**

Es ist  $\text{ord}_P(f) > 0 \Leftrightarrow f \in m_P \Leftrightarrow f(P) = 0$

$$\text{ord}_P(f) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in m_P \Leftrightarrow \frac{1}{f}(P) = 0$$

$$\Rightarrow \{P \in C : \text{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V\left(\frac{1}{f}\right)$$

$V(f)$  und  $V\left(\frac{1}{f}\right)$  sind echte abgeschlossene Teilmengen von  $C$ .

$\dim C = 1 \Rightarrow V(f), V\left(\frac{1}{f}\right)$  sind endlich. □

**Proposition 20.9**

Sei  $C$  nichtsinguläre Kurve,  $\emptyset \neq U \subseteq C$  offen,  $V$  projektive Varietät,  $f : U \rightarrow V$  Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\bar{f} : C \rightarrow V$  mit  $\bar{f}|_U = f$ .

**Beweis**

*Eindeutigkeit:* Seien  $g, h : C \rightarrow V$  Morphismen mit  $g|_U = h|_U = f$ .

$\{x \in C : g(x) = h(x)\}$  ist abgeschlossen.

$\Rightarrow g|_{\bar{U}} = h|_{\bar{U}}$ . Da  $\bar{U} = C$ , folgt  $g = h$ .

*Existenz:*  $\exists U = C \setminus \{P\}$  für ein  $P \in C$ . Sei  $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ , also  $\exists V = \mathbb{P}^n(k)$ .

$\exists f(U) \not\subset V(X_i)$  für ein  $i \in \{0, \dots, n\}$  (sonst  $V = \mathbb{P}^{n-1}(k)$ ).

$$\Rightarrow W := f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^n U_i\right) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow W$  ist dicht in  $U$ .

Sei  $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ f$ ,  $i, j = 0, \dots, n$

$h_{ij}$  ist reguläre Funktion auf  $W$  und damit Element von  $k(C)^\times$ .

Sei  $r_i := \text{ord}_P(h_{i0})$ ,  $i = 0, \dots, n$

Sei  $k$  so gewählt, dass  $r_k \leq r_j$  für alle  $j \neq k$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(h_{ik}) = \text{ord}_P\left(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}\right) = r_i - r_k \geq 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}$ ,  $i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow \exists$  Umgebung  $\tilde{U}$  von  $P$  in  $C$ , sodass  $h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}(\tilde{U})$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

$$\text{Setze } \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq P \\ \underbrace{(h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x))}_{\in \mathbb{P}^n(k), \text{ da } h_{kk}=1} & : x = P \end{cases}$$

Für  $x \in \overline{U} \setminus \{P\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \overline{f}(x) &= f(x) = \left( \left( \frac{X_0}{X_k} \circ f \right) (x) : \left( \frac{X_1}{X_k} \circ f \right) (x) : \dots : \left( \frac{X_n}{X_k} \circ f \right) (x) \right) \\ &= (h_{0k}(x) : \dots : h_{nk}(x)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{f}$  ist Morphismus.

□

## § 21 Divisoren

Sei  $C$  nichtsinguläre Kurve (also projektiv, irreduzibel, über algebraisch abgeschlossenem  $k$ ).

### Definition 21.1

- a) Ein **Divisor** auf  $C$  ist eine formale Summe  $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $P_i \in C$ .
- b)  $\text{Div}(C) = \{D = \sum_{i=1}^n n_i P_i \mid D \text{ ist Divisor auf } C\}$  mit der formalen Addition heißt **Divisorengruppe** von  $C$ .
- c) Für  $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$  heißt  $\deg(D) := \sum_{i=1}^n n_i$  der **Grad** von  $D$ .
- d)  $D = \sum_{i=1}^n n_i P_i$  heißt **effektiv**, wenn alle  $n_i \geq 0$  sind.  
Schreibweise:  $D \geq 0$

### Definition + Bemerkung 21.2

- a) Für  $f \in k(C)^\times$  heißt  $\text{div}(f) := \sum_{P \in C} \text{ord}_P(f) P$  der **Divisor von  $f$** .
- b)  $\text{div}(f)$  ist Divisor (wegen Bemerkung 20.8)
- c)  $D \in \text{Div}(C)$  heißt **Hauptdivisor**, wenn es ein  $f \in k(C)^\times$  gibt mit  $D = \text{div}(f)$ .
- d)  $\text{div} : k(C)^\times \rightarrow \text{Div}(C)$ ,  $f \mapsto \text{div}(f)$  ist Gruppenhomomorphismus.  $\text{Bild}(\text{div}) = \text{Div}_H(C)$  sind die Hauptdivisoren.
- e)  $\text{Cl}(C) := \text{Div}(C) / \text{Div}_H(C)$  heißt **Divisorenklassengruppe** von  $C$ .
- f)  $D, D' \in \text{Div}(C)$  heißen **linear äquivalent**, wenn  $D - D'$  Hauptdivisor ist.  
Schreibweise:  $D \equiv D'$

### Beispiel 21.3

$C = \mathbb{P}^1(k)$

Jedes  $f \in k(C)^\times = k(X)^\times$  lässt sich eindeutig schreiben in der Form  $f = \frac{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}{\prod_{j=1}^m (X - b_j)}$  mit  $a_i \neq b_j$

für alle  $i, j$  ( $a_i, b_j \in k$ ).

Dann ist  $\text{ord}_a(f) = \#\{i : a_i = a\} - \#\{j : b_j = a\}$  für  $a \in k$

$$\text{ord}_\infty(f) = m - n$$

$$\Rightarrow \text{div}(f) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j + (m - n) \cdot \infty \Rightarrow \deg(\text{div}(f)) = 0$$

Umgekehrt: Sei  $D \in \text{Div}(\mathbb{P}^1(k))$ ,  $\deg(D) = 0$

Schreibe  $D = \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m Q_j$

Sei zum Beispiel  $P_1 = \dots = P_d = \infty$ ,  $P_i \neq \infty$  für ein  $i > d$

$$\Rightarrow \text{für } f = \frac{\prod_{i=d+1}^n (X - P_i)}{\prod_{j=1}^m (X - Q_j)} \text{ gilt: } \text{div}(f) = D \Rightarrow \text{Cl}(\mathbb{P}^1(k)) \cong \mathbb{Z}, [D] \mapsto \deg(D)$$

### Ziel

$\deg(\text{div}(f)) = 0$  für jedes  $f \in k(C)^\times$

### Beobachtung

$f$  induziert Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  (Proposition 20.9)

**Strategie**

- i)  $\text{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$
- ii)  $\deg(f^*(D)) = \deg(f) - \deg(D)$

**Definition + Bemerkung 21.4**

Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven  $C_1, C_2$ .

- a) Sei  $Q \in C_2, P \in f^{-1}(Q), t \in m_Q$  Uniformierende (das heißt  $m_Q = (t)$ ). Dann heißt  $e_P = e_P(f) := \text{ord}_P(t \circ f)$  Verzweigungsordnung von  $f$  in  $P$ .
- b) Definiere Gruppenhomomorphismus

$$f^* : \text{Div}(C_2) \rightarrow \text{Div}(C_1)$$

$$\text{durch } f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

- c) Für  $g \in k(C_2)^\times$  gilt:

$$f^*(\text{div}(g)) = \text{div}(g \circ f)$$

- d)  $f^*$  induziert Gruppenhomomorphismus:

$$f^* : \text{Cl}(C_2) \rightarrow \text{Cl}(C_1)$$

**Beweis**

- a) zu zeigen:  $e_P(f)$  hängt nicht von der Wahl von  $t$  ab.

Ist  $t'$  weitere Uniformierende, so ist  $t' = u \cdot t$  für ein  $u \in \mathcal{O}_{C_2, Q}^\times$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(t' \circ f) = \text{ord}_P(u \cdot t \circ f) = \text{ord}_P((u \circ f) \cdot (t \circ f)) = \underbrace{\text{ord}_P(u \circ f)}_{=0} + \text{ord}_P(t \circ f)$$

- b) zu zeigen:  $\#\{D \in C_1 : f(P) = Q\}$  ist endlich.

Denn  $\underbrace{f^{-1}(\{Q\})}_{\neq C_1, \text{ da } f \text{ surj.}}$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(\{Q\})$  endlich

- c) Es ist

$$f^*(\text{div } g) = \sum_{Q \in C_2} \text{ord}_Q(g) \cdot f^*Q = \sum_{Q \in C_2} \text{ord}_Q(g) \cdot \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$

und

$$\text{div}(g \circ f) = \sum_{P \in C_1} \text{ord}_P(g \circ f) P = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \text{ord}_P(g \circ f) \cdot P$$

Zu zeigen ist also:

$$\underbrace{\text{ord}_P(g \circ f)}_{=:s} = \underbrace{\text{ord}_Q(g)}_{=:r} \cdot e_P(f) \text{ für alle } P \in C_1$$

Seien  $t_P$  und  $t_Q$  Uniformisierende in  $P$  beziehungsweise  $Q = f(P)$ . Dann gibt es Einheiten  $u, u' \in \mathcal{O}_{C_1, P}$  und  $v \in \mathcal{O}_{C_2, Q}$  mit  $g \circ f = u \cdot t_P^s, g = v \cdot t_Q^r, t_Q \circ f = u' t_P^{e_P(f)}$

$$\Rightarrow u \cdot t_P^s = g \circ f = (v \cdot t_Q^r) \circ f = (v \circ f) \cdot (t_Q \circ f)^r = \underbrace{(v \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C_1, P}} \cdot u'^r t_P^{r \cdot e_P(f)} \Rightarrow s = r \cdot e_P(f)$$

- d) folgt aus b)

□

**Folgerung 21.5**

Sei  $C$  nichtsinguläre Kurve,  $f \in k(C)^\times$ . Dann definiert  $f$  einen Morphismus  $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$  und es gilt:

$$\text{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$$

**Beweis**

Der erste Teil folgt aus 20.9. Für  $P$  mit  $f(P) = 0$  ist  $e_P(f) = \text{ord}_P(X \circ f) = \text{ord}_P(f)$ ; ist  $f(P) = \infty$ , so ist  $\frac{1}{f}(P) = 0$  und  $\text{ord}_P(f) = -\text{ord}_P(\frac{1}{f})$ .  $\square$

**Bemerkung + Definition 21.6**

Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver Morphismus nichtsingulärer Kurven. Dann induziert  $f$  Körperhomomorphismus  $f^\# : k(C_2) \rightarrow k(C_1)$ .  $f^\#$  macht  $k(C_1)$  zu einer endlichen Körpererweiterung von  $k(C_2)$ .

$\deg(f) := [k(C_1) : k(C_2)]$  heißt **Grad** von  $f$ .

**Beweis**

Die Existenz von  $f^\#$  steht in 13.7. Da  $\dim C_1 = \dim C_2 = 1$ , ist  $\text{trdeg}(k(C_1)) = \text{trdeg}(k(C_2)) = 1$  (Folgerung 19.8), also  $k(C_1)|k(C_2)$  algebraisch. Außerdem ist  $k(C_1)|k(C_2)$  endlich erzeugt, weil  $k(C_1)$  schon über  $k$  endlich erzeugt ist.  $\square$

**Satz 11**

- a) Sei  $C$  eine nichtsinguläre Kurve. Dann hat jeder Hauptdivisor auf  $C$  Grad 0.  
 b) Sei  $f : C_1 \rightarrow C_2$  surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven. Dann gilt für jeden Divisor  $D$  auf  $C_2$ :

$$\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg D$$

- c) Sei  $f$  wie in b). Dann gilt für jedes  $Q \in C_2$ :

$$\deg(f^*(Q)) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P = \deg f =: n$$

**Beweis**

- b) folgt offensichtlich aus c).

- a) folgt aus b) mit 21.5.

- c) Beweis nur im folgenden affinen Beispiel (die Aussage ist lokal, daher ist affines Beispiel sinnvoll):  $\square$

**Beispiel**

$C_2 = \mathbb{A}^1(k)$ ,  $C_1 = V(h) \subset \mathbb{A}^2(k)$ ,  $h(X, Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \dots + a_1(X)Y + a_0(X) \in k[X, Y]$  irreduzibel,  $f : C_2 \rightarrow C_1$ ,  $(x, y) \mapsto x$

Es ist  $k(C_1) = k(X)[Y]/(h)$  und  $f^\# : k(X) \hookrightarrow k(X)[Y]/(h)$  die natürliche Einbettung.

Also:  $\deg(f) = n$

Für  $x_0 \in k = \mathbb{A}^1(k)$  ist  $f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \in k^2 : h(x_0, y) = 0\}$ .

$h(x_0, y) = 0$  ist ein Polynom vom Grad  $n$  in  $y$  mit Koeffizienten in  $k$ , hat also, mit Vielfachheit gezählt,  $n$  Nullstellen. Zu zeigen ist also:

*Behauptung:* Ist  $y_0 \in k$   $e$ -fache Nullstelle von  $h(x_0, y)$ , so gilt für den Punkt  $P = (x_0, y_0) \in C_1$ :

$$e_P(f) = e$$

*Beweis:*  $\mathfrak{O}_P(x_0, y_0) = (0, 0)$

Dann ist  $h(0, y) = y^e \cdot \tilde{g}(y)$  (\*) mit  $\tilde{g}(0) \neq 0$  ( $e \geq 1$ )

Es ist  $\tilde{g}(y) = g(0, y)$ , wobei  $g(x, y) = y^{n-e} + a_{n-1}(x)y^{n-e-1} + \dots + a_{e+1}(x)y + a_e(x)$

Aus  $\tilde{g}(0) \neq 0$  folgt  $g(0, 0) \neq 0$ , also  $g \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times$

Weiter folgt aus (\*):  $a_0(0) = \dots = a_{e-1}(0) = 0$

$\Rightarrow a_i(x) = x \cdot \tilde{a}_i(x), i = 0, \dots, e-1$  ( $\tilde{a}_i \in k[X]$ )

$\Rightarrow 0 = h(x, y) = y^e g(x, y) + x \cdot b(x, y)$  (\*\*) mit  $b(x, y) = \tilde{a}_{e-1}(x)y^{e-1} + \dots + \tilde{a}_1(x)y + \tilde{a}_0(x)$

Gesucht ist  $e_P(f) = \text{ord}_P(t \circ f) = \text{ord}_P(f^\#(t))$  für einen Erzeuger von  $m_{C_2, f(t)}$ .

Da  $C_2 = \mathbb{A}^1(k)$  und  $f(P) = 0$ , ist  $t = x$  eine mögliche Wahl  $\Rightarrow e_P(f) = \text{ord}_P(x)$

Dazu muss  $x$  in der Form  $u \cdot s^d$  geschrieben werden für einen Erzeuger  $s$  von  $m_{C_1, P}$  und ein  $u \in \mathcal{O}_{C_1, P}$ .

1. Fall:  $e = 1$

Dann folgt aus (\*\*):  $y = -x \cdot b(x, y) \cdot g(x, y)^{-1} \in (x)$

$\Rightarrow x$  erzeugt  $m_P \Rightarrow \text{ord}_P(x) = 1 = e$

2. Fall:  $e > 1$

*Behauptung:* In diesem Fall ist  $\tilde{a}_0(0) \neq 0$

Dann ist  $b(0, 0) \neq 0$ , also  $b \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times$  und damit  $x = y^e \cdot \underbrace{g \cdot b^{-1}}_{=u \in \mathcal{O}_{C_1, P}^\times}$

$\Rightarrow m_P$  wird von  $y$  erzeugt und  $\text{ord}_P(x) = e$ .

hier fehlen ein paar Sachen (sicher?)



## § 22 Der Satz von Riemann-Roch

Sei weiterhin  $C$  nichtsinguläre Kurve.

### Definition + Bemerkung 22.1

Sei  $D = \sum_{P \in C} n_P \cdot P \in \text{Div}(C)$

- a)  $L(D) := \{f \in k(C)^\times \mid D + \text{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$  ist  $k$ -Vektorraum, der **Riemann-Roch-Raum** zu  $D$ .
- b)  $l(D) := \dim L(D)$
- c)  $L(0) = k$
- d) Ist  $\deg(D) < 0$ , so ist  $L(D) = 0$
- e) Ist  $D' \equiv D$  für ein  $D' \in \text{Div}(C)$ , so ist  $l(D') = l(D)$

### Beweis

- a)  $\text{div}(f) \geq -D \Leftrightarrow \text{ord}_P(f) \geq -n_P \quad \forall P$   
 $\text{ord}_P(f+g) \geq \min\{\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g)\}$
- e) Sei  $D' = D + \text{div}(g)$  für ein  $g \in k(C)^\times$ . Dann ist  $L(D') \rightarrow L(D); f \mapsto f \cdot g$  ein Isomorphismus von  $k$ -Vektorräumen.

$$\text{Denn: } D + \text{div}(fg) = \underbrace{D + \text{div}(g)}_{=D'} + \text{div}(f) \geq 0$$

$$(h \cdot \frac{1}{g} \leftrightarrow h)$$

□

### Proposition 22.2

Sei  $D \in \text{Div}(C)$

- a)  $l(D+P) \leq l(D) + 1$
- b)  $l(D) \leq \deg(D) + 1$  (falls  $\deg(D) \geq 1$ )

Insbesondere ist  $L(D)$  endlich dimensionaler Vektorraum

### Beweis

- a) Es ist  $L(D) \subseteq L(D+P)$ . Ist  $f \in L(D+P) - L(D)$ , dann ist  $\text{ord}_P(f) = -(n_P + 1)$ . Ist  $L(D+P) \neq L(D)$ , so wähle  $f \in L(D+P) - L(D)$ .

*Behauptung:*  $L(D+P)$  wird erzeugt von  $L(D)$  und  $f$ .

*Denn:* Sei  $g \in L(D+P) - L(D)$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(g) = -n_P - 1$$

$$\Rightarrow f = ut^{-n_P-1}, g = u't^{-n_P-1} \text{ für ein } t \in m_P \text{ mit } m_P = (t) \text{ } (u, u' \in \mathcal{O}_P^\times)$$

$$\text{Sei } h := u(P)g - u'(P)f \in L(D+P)$$

$$= (u(P) \cdot u' - u'(P) \cdot u)t^{-n_P-1}$$

$$\Rightarrow \text{ord}_P(h) \geq -(n_P + 1) + 1 \Rightarrow h \in L(D)$$

$$\Rightarrow g = \frac{1}{u(P)} \cdot (h - u'(P)f) \in L(D) + (f)$$

- b) Induktion über  $d = \deg(D)$

$$d = -1: L(D) = 0$$

$$d \geq 0: \text{ Sei } P \in C, D' = D - P$$

$$\xrightarrow{\text{I. V.}} l(D') \leq \deg(D') + 1 = d$$

$$\xrightarrow{\text{a)}} l(D) = l(D' + P) \leq d + 1$$

□

**Satz + Definition 12 (Riemann-Roch)**

a) Es gibt ein  $\gamma \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $D \in \text{Div}(C)$  gilt:

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - \gamma$$

b) Das kleinste  $\gamma$ , für das a) erfüllt ist, heißt **Geschlecht** von  $C$  ( $g(C) = g$ ).

c) Es gibt einen Divisor  $K \in \text{Div}(C)$  („kanonischer Divisor“), sodass für jedes  $D \in \text{Div}(C)$  gilt:

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Dabei ist  $K = \text{div } \omega$  für ein (beliebiges) Differential  $\omega \in \Omega(C)$ . Zum Beispiel  $\omega = \text{d}f$  für ein  $f \in k(C)^\times$ ;  $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(\frac{\text{d}f}{\text{d}t_P})$ ,  $t_P$  Uniformisierende in  $P$ .

**Beispiel**

1)  $C = \mathbb{P}^1(k)$ ,  $\omega = \text{d}x$ ,  $\text{div } \omega = ?$

Für  $a \in k$  ist  $t_a := x - a$  Uniformisierende,  $\frac{\text{d}x}{\text{d}(x-a)} = 1$

In  $\infty$  ist  $\frac{1}{x}$  Uniformisierende.

$$\frac{\text{d}x}{\text{d}(\frac{1}{x})} = (-\frac{1}{x})^{-2} \Rightarrow \text{ord}_\infty(\text{d}x) = -2$$

$\Rightarrow K = -2 \cdot \infty$  ist kanonischer Divisor auf  $\mathbb{P}^1(k)$ .

2)  $C = \overline{V(Y^2 - X^3 + X)}$ ,  $\omega = \frac{\text{d}y}{x} \Rightarrow \text{div } \omega = 0$  (Rechnung selber)

**Folgerung 22.3**

a)  $l(K) = g$

$$(\text{setze } D = 0 \text{ in Satz 12 c) ein: } \underbrace{l(0)}_{=1} - l(K) = \underbrace{\deg 0}_{=0} + 1 - g$$

b)  $\deg K = 2g - 2$

$$(\text{setze } K \text{ in Satz 12 c) ein: } \underbrace{l(K)}_{=g} - \underbrace{l(0)}_{=1} = \deg K + 1 - g$$

**Beweis (von Satz 12)**

a) Setze  $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$

Es gilt:

- $s(D) = s(D')$  falls  $D' \equiv D$
- $D' \leq D \Rightarrow s(D') \leq s(D)$

Sei nun  $f \in k(C)^\times$  und  $N := f^*(0)$  der Nullstellendivisor.

**Behauptung 1:** Für jedes  $D \in \text{Div}(C)$  gibt es  $D'$  mit  $D' \equiv D$ , sodass  $D' \leq m \cdot N$  für ein  $m \geq 1$ .

**Behauptung 2:** Es gibt  $\gamma \geq 0$  mit  $s(m \cdot N) \leq \gamma \forall m \geq 1$ .

Aus Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt 12 a).

**Beweis 1:** Sei  $D = \sum_{P \in C} n_P P$

$$\text{Gesucht: } h \in k(C)^\times \text{ mit } n_P + \text{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \text{ord}_P(f) & : \text{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \text{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$$

Ersetze dann  $D$  durch  $D' = D + \text{div}(h)$ .

Seien  $P_1, \dots, P_r \in C$  die Punkte mit  $\text{ord}_P(f) \leq 0$  und  $n_P > 0$ .

$$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \in m_{P_i}$$

$$h := \prod_{i=1}^r h_i^{-n_{P_i}} \text{ tut's}$$

*Beweis 2:*  $[k(C) : k(f)] = \deg(f) =: r$

Sei  $g_1, \dots, g_r$  Vektorraum-Basis von  $k(C)$  über  $k(f)$ .  $\Rightarrow$  jede Polstelle von  $g_i$  ist auch Polstelle von  $f$ .  $\Rightarrow \frac{g_i}{f^j} \in L(mN)$  mit  $i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, m \Rightarrow \deg(mN) = mr \Rightarrow l(mN) \geq mr - r(\gamma_0 - 1)$   $\square$

