

# 3 Kohomologie von Garben

## §9 $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben

### Definition 3.9.1

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum,  $\mathcal{F}$  eine Garbe von abelschen Gruppen auf  $X$ .  $\mathcal{F}$  heißt  $\mathcal{O}_X$ -**Modulgarbe**, wenn gilt:

- (i) Für jedes offene  $U \subseteq X$  ist  $\mathcal{F}(U)$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul
- (ii) Für  $U' \subseteq U \subseteq X$  offen ist  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$  ein  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modulhomomorphismus, wobei  $\mathcal{F}(U')$  durch den Ringhomomorphismus  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$  zum  $\mathcal{O}_X(U)$ -Modul wird.

### Bemerkung 3.9.2

Die  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben bilden mit den  $\mathcal{O}_X$ -linearen Abbildungen eine Kategorie  $\underline{\mathcal{O}_X - Mod}$ .

### Beispiele

Sei  $X$  eine nichtsinguläre Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  und  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  ein Divisor auf  $X$ .

Für offenes  $U \subseteq X$  sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D)(U) &:= \{f \in k(X) : \text{div } f|_U + D|_U \geq 0\} \\ &= \{f \in k(X) : \forall P \in U : \text{ord}_P(f) + n_P \geq 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(D)$  ist eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe, denn  $\text{div}(f \cdot g) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$ .

### Definition + Bemerkung 3.9.3

Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben.

- (a)  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  sei die zu  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$  assoziierte Garbe.
- (b) Für offenes  $U \subseteq X$  sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  sind  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben.

### Definition + Bemerkung 3.9.4

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von lokalgeringten Räumen.

- (a) Für jede  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  ist  $f_*\mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe auf  $Y$ .
- (b) Für jede  $\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe  $\mathcal{G}$  ist  $f^*\mathcal{G}$  eine  $f^*\mathcal{O}_Y$ -Modulgarbe und

$$f^*\mathcal{G} := f^*\mathcal{G} \otimes_{f^*\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

**Beweis** (a) Für offenes  $U \subseteq Y$  ist  $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  ein  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ -Modul.  $f_U^\#$  ist ein Ringhomomorphismus  $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ . Dadurch wird  $f_*\mathcal{F}(U)$  zu einem  $\mathcal{O}_Y(U)$ -Modul.

- (b) Den Garbenhomomorphismus  $f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  erhält man aus  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$

$$f^{-1}(f^\#) : f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow f^*f_*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$$

den hinteren Morphismus liefert 1.1.16 (d). □

## §10 Quasikohärente $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben

### Definition + Bemerkung 3.10.1

Sei  $X = \text{Spec } R$  ein affines Schema,  $M$  ein  $R$ -Modul. Für offenes  $U \subseteq X$  sei

$$\widetilde{M}(U) := \{s : U \rightarrow \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} : \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es eine Umgebung } U_{\mathfrak{p}} \text{ und Elemente } m_{\mathfrak{p}} \in M, f_{\mathfrak{p}} \in R - \mathfrak{p}, \text{ sodass}\}$$

$$\text{für alle } \mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}} \text{ gilt: } s(\mathfrak{q}) = \frac{m_{\mathfrak{p}}}{f_{\mathfrak{p}}} \in M_{\mathfrak{p}}\}$$

wobei  $M_{\mathfrak{p}} = M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$  ist.

### Proposition 3.10.2

Seien  $X = \text{Spec } R, M, \widetilde{M}$  wie in 10.1.

- (a) Für jedes  $\mathfrak{p} \in X$  ist  $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$ .
- (b) Für jedes  $f \in R$  ist  $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$  (insbesondere  $\widetilde{M}(X) \cong M$ ).

**Beweis** Wie für  $\mathcal{O}_X$ . □

### Bemerkung 3.10.3

$M \mapsto \widetilde{M}$  ist ein exakter, volltreuer Funktor  $R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ , denn:

Lokalisieren ist exakt, da  $R_{\mathfrak{p}}$  flacher  $R$ -Modul ist (was Tensorieren exakt macht).

### Bemerkung 3.10.4

- (a)  $\widetilde{M \otimes_R N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$
- (b)  $\widetilde{\bigotimes_i M_i} \cong \bigotimes_i \widetilde{M_i}$

**Beweis** (a)  $(M \otimes_R N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (N \otimes_R R_{\mathfrak{p}})$  □

### Bemerkung 3.10.5

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus,  $X = \text{Spec } R, Y = \text{Spec } R', \alpha : R' \rightarrow R$  der zugehörige Ringhomomorphismus.

- (a) Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist  $f_* \widetilde{M} \cong \widetilde{\alpha M}$  ( $\alpha M$  sei  $M$  aufgefasst als  $R'$ -Modul über  $\alpha$ ).
- (b) Für jeden  $R'$ -Modul  $N$  ist  $f^* \widetilde{N} = \widetilde{N \otimes_{R'} R}$

**Beweis** (a)

$$\begin{aligned} f_* \widetilde{M}(U) &= \widetilde{M}(f^{-1}(U)) \text{ als } \mathcal{O}_Y(U)\text{-Modul} \\ &= \widetilde{\alpha M}(U) \end{aligned}$$

$$(b) \quad f^* \widetilde{N}(X) = (f^{-1} \widetilde{N} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X) = N \otimes_{R'} R$$

□

### Definition 3.10.6

Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein Schema,  $\mathcal{F}$  eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

- (a)  $\mathcal{F}$  heißt **quasi-kohärent**, wenn es eine offene affine Überdeckung  $(U_i = \text{Spec } R_i)_{i \in I}$  von  $X$  und  $R_i$ -Moduln  $M_i$  gibt, sodass

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$$

für alle  $i \in I$  gilt.

(b)  $\mathcal{F}$  heißt **kohärent**, wenn in (a) jedes  $M_i$  endlich erzeugbarer  $R_i$ -Modul ist.

**Proposition 3.10.7**

Eine  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe  $\mathcal{F}$  auf einem Schema  $X$  ist genau dann quasi-kohärent, wenn für jedes offene affine  $U = \text{Spec } R \subseteq X$  ein  $R$ -Modul  $M$  existiert mit  $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$ .

**Beweis** 1. Schritt: Sei  $X$  affin, denn:

Sei  $U = \text{Spec } R \subseteq X$  offen und affin,  $(U_i = \text{Spec } R_i)$  die gegebene Überdeckung von  $X$ .  $(U \cap U_i)$  ist eine offene Überdeckung von  $U$ . Überdecke  $U \cap U_i$  durch  $D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$ . Dann gilt:

$$\mathcal{F}|_{D(f_{ij})} = (\mathcal{F}|_U)|_{D(f_{ij})} = \widetilde{M}_i|_{D(f_{ij})} = \widetilde{(M_i)_{f_{ij}}}$$

2. Schritt: FEHLT NOCH

□