

# 5 Lebesguesche Räume und Fourier-Reihen

Sei stets  $\emptyset \neq X \in \mathcal{B}_d$  versehen mit  $\mathcal{B}(X)$  und  $\lambda$ .

Ana III, 30.01.2009

## 5.1 Die $L^p$ -Räume

Für  $p \in [1, \infty)$  setze

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^p(X) &:= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \int_X |f|^p dx < \infty \right\}, \\ \mathcal{L}^\infty(X) &:= \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, (f.a.) beschränkt} \},\end{aligned}$$

sowie für messbare  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|f\|_p &:= \left( \int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \{ c > 0 : \exists N_c \text{ NM mit } |f(x)| \leq c \, \forall x \in X \setminus N_c \}.\end{aligned}$$

**Bemerkung.** Für stetige  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\sup_{x \in X} |f(x)| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$ . Denn sei  $N_c$  wie in der obigen Definition. Dann ist  $N_c^0 = \emptyset$  (anderenfalls existiert ein  $B \subset N_c$  mit  $\lambda(B) > 0$ , was ein Widerspruch ist). Aus  $|f(x)| \leq c$  für alle  $x \notin N_c$  folgt mit der Stetigkeit von  $f$ , dass  $|f(x)| \leq c \, \forall x \in X$ . Durch inf-Bildung erhält man  $\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Die andere Abschätzung ist klar mit  $N_c = \emptyset$ .

Wenn  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ ), dann sagt man “ $f_n$  gegen  $f$  im  $p$ -ten Mittel”.

TODO: Bild

Interpretation der 1-Norm in [Bsp 4.21](#). Man kann  $u(t, x) \geq 0$  als Konzentration eines Stoffes zur Zeit  $t \geq 0$  am Ort  $x \in X$  interpretieren. Dann folgt, dass

$$\int_X |u(t, x)| dx = \int_X u(t, x) dx$$

die Gesamtmenge des Stoffes zur Zeit  $t$  beschreibt.

Beachte:  $\mathcal{L}^1(X)$  ist nach Kapitel 2 ein Vektorraum. Ebenso ist  $\mathcal{L}^\infty(X)$  ein Vektorraum, denn wenn  $|f_j(x)| \leq c_j$  ( $\forall x \notin N_j$ ), wobei  $N_j$  Nullmengen sind, und  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ), dann gilt

$$|\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)| \leq |\alpha_1|c_1 + |\alpha_2|c_2 =: c \quad \forall x \notin N := N_1 \cup N_2 \quad (\text{NM}). \quad (*)$$

Dann folgt  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X)$ .

Zu  $\mathcal{L}^p$ : Wenn  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann gilt  $\alpha f \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$ . (Folgt aus der Definition).

Setze wie in Ana2  $p' := \frac{p}{p-1}$ , wenn  $1 < p < \infty$ ,  $1' := \infty$ ,  $\infty' = 1$ . Dann gilt  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$   $\forall p[1, \infty]$ .

$$p' = p \Leftrightarrow p = 2, \quad p \in [1, 2) \Leftrightarrow p' \in (2, \infty], \quad p'' = p.$$

**Satz 5.1.** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann gelten

a) Hölder-Ungleichung: Für  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$  gelten  $fg \in \mathcal{L}^1(X)$  und

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} \stackrel{p \in (1, \infty)}{=} \left( \int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int |g|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

(Für  $p = p' = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

b) Minkowski-Ungleichung: Für  $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$  gilt  $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$  und

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ferner ist  $\mathcal{L}^p(X)$  ein Vektorraum.

*Beweis.*  $fg$ ,  $|f + g|^p$  sind messbar ( $p < \infty$ ).

a)  $p = 1$ : Dann folgt  $g \in \mathcal{L}^\infty(X) \Rightarrow \exists$  Nullmenge  $N$ ,  $c > 0$  mit  $|g(x)| \leq c$  ( $\forall x \notin N$ ).  
Setze  $\tilde{g} := \mathbf{1}_{X \setminus N} \cdot g$ . Dann gilt

$$\int |fg| dx \stackrel{\text{Lem 3.5}}{=} \int |f| \cdot \underbrace{|\tilde{g}|}_{\leq c} dx \leq c \cdot \|f\|_1.$$

Infimumbildung über alle  $c$  liefert die Behauptung. Genauso für  $p = \infty$ .

$1 < p < \infty$ : Wenn  $\|f\|_p = 0$ . oder  $\|g\|_{p'} = 0$ , dann  $|f|^p = 0$  (f.ü.) oder  $|g|^{p'} = 0$  (f.ü.) (Lem 2.18). Dann folgt  $f = 0$  (f.ü.) oder  $g = 0$  (f.ü.). Also  $fg = 0$  (f.ü.), womit wir fertig sind.

Anderenfalls liefert die Young'sche Ungleichung (Ana2 Beweis von Satz 1.19) für festes  $x \in X$ :

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g(x)\|_{p'}^{p'}}.$$

Integralbildung auf beiden Seiten liefert

$$\int |f| \cdot |g| dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \underbrace{\int |f(x)|^p dx}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \cdot \|g\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Daraus folgt  $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ ,  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$ .

- b)  $p = 1$ : Kapitel 2.  $p = \infty$ : Die Behauptung folgt mit Infimumbildung über  $c_1, c_2$  in  $(*)$  mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Sei  $p \in (1, \infty)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p dx &= \|f + g\|_p^p = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} dx + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \left( \int |f + g|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad + \|g\|_p \cdot \left( \int |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Damit folgt  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ . Dass  $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$  gilt, folgt aus  $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)$ , was integrierbar ist.

□

**Beispiel 5.2.** Sei  $X = [1, \infty)$  und  $f(x) = x^{-\alpha}$ ,  $g(x) = x^{-\beta}$  für Konstanten  $\alpha, \beta > 0$ . Dann  $f \in \mathcal{L}^p(X) \Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$ ,  $g \in \mathcal{L}^{p'}(X) \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{p'}$ ,  $fg \in \mathcal{L}^1(X) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 1$ , wobei  $p \in (1, \infty)$ .

**Korollar 5.3.** Sei  $\lambda(X) < \infty$ . Dann  $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$  für alle  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  und  $\|f\|_p \leq \lambda(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q$  ( $\forall f \in \mathcal{L}^q(X)$ ). Mit  $p = 1$  folgt

$$\left( \frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f| dx \right)^q \leq \frac{1}{\lambda(X)} \cdot \int_X |f|^q dx.$$

Also folgt aus  $f_n \rightarrow f$  bezüglich der  $q$ -Norm, dass auch  $f_n \rightarrow f$  bezüglich der  $p$ -Norm. (Ersetze  $f$  durch  $f_n - f$ )

*Beweis.* Für  $q = p$  und  $p = \infty$  ist die Aussage klar. Sei  $p < q < \infty$ ,  $f \in \mathcal{L}^q(X)$ . Dann gilt für  $r := \frac{p}{q} \in (1, \infty) \Rightarrow r' = \frac{q}{q-p}$ ,  $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$  (\*):

$$\int_X |f|^p dx = \int_X 1 \cdot |f|^p \stackrel{\text{Hoelder}}{\leq}_{\text{mit } r} \left( \int_X (1^{r'}) dx \right)^{\frac{1}{r'}} \cdot \left( \int_X |f|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Damit folgt

$$\int_X |f|^p dx \leq \lambda(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left( \int_X |f|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{nach Vor.}}{\leq} \infty.$$

Durch die Abschätzung mit der  $p$ -ten Wurzel folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 5.4.** a) Sei  $X = (0, 1]$ ,  $f(x) = x^{-\alpha}$  für eine Konstante  $\alpha > 0$ . Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^p((0, 1]) \Leftrightarrow \int_0^1 x^{-\alpha p} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha p < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{p}.$$

Damit gilt  $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$  und mit  $p < q$  liegt  $f$  in  $\mathcal{L}^p(X)$ , aber nicht in  $\mathcal{L}^q(X)$ . Also gilt  $\mathcal{L}^q \subsetneq \mathcal{L}^p(X)$ .

b) Wenn  $\lambda(X) < \infty$ , dann gibt es keine Inklusion zwischen  $\mathcal{L}^p(X)$  und  $\mathcal{L}^q(X)$  (bezüglich  $\lambda$ ).

**Beispiel.**  $p = 1$ ,  $X = [1, \infty)$ . Dann ist  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $\mathcal{L}^q(X) \forall q > 1$ , aber  $f \notin \mathcal{L}^1(X)$ .

Ferner liegt  $g(x) = \mathbf{1}_{[1,2)}(x) \cdot (2-x)^{-\frac{1}{q}}$  nicht in  $\mathcal{L}^q(X)$ , aber in  $\mathcal{L}^1(X)$ .

**Satz 5.5** (Majorisierte Konvergenz). Seien  $1 \leq p < \infty$ ,  $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  *messbar*,  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (f.ü.),  $|f_n|^p \leq g$  (f.ü.) für alle  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $g \in \mathcal{L}^p(X)$ . Dann gelten  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  und  $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis.*  $p = 1$ : **Satz von Lebesgue**. Sei also  $p > 1$ . Dann gilt  $|f|^p \leq g$  (f.ü.) und  $|f(x) - f_n(x)|^p \leq (f(x) + g(x))^p \leq (2 \cdot g(x)^{\frac{1}{p}})^p = 2^p \cdot g(x)$  (f.a.)  $x$ . Ferner gilt  $|f - f_n|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (f.ü.). **Lebesgue** angewendet auf  $|f - f_n|^p$  liefert  $\|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - f_n|^p dx \rightarrow 0$ . Dass  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  gilt, folgt aus  $|f|^p \leq g$  (f.ü.).  $\square$

**Beispiel.** Sei  $f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n})}$ ,  $X = \mathbb{R}$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Dann folgt  $f_n \in \mathcal{L}^p(X)$  und  $f_n \rightarrow 0$  punktweise. Aber es gilt  $\|f_n\|_p = n^{1-\frac{1}{p}} \nrightarrow 0$ . (Vergleiche **Bem 3.11**)

Ana III, 02.02.2009

Ab jetzt sei stets  $1 \leq p < \infty$ .

Es ergibt sich folgendes Problem:

$$\left( \int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \text{ (f.ü.)} \Leftrightarrow f = 0 \text{ (f.ü.)}.$$

Also ist die Normeigenschaft (N1) verletzt ((N2) und (N3) gelten allerdings in  $\mathcal{L}^p$ ). Damit ist  $\|\cdot\|_p$  ist keine Norm auf  $\mathcal{L}^p$ .

Ausweg: Definiere

$$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ messbar, } f = 0 \text{ (f.ü.)}\}.$$

Dann ist  $\mathcal{N}$  ein Untervektorraum von  $\mathcal{L}^p$ . Wir setzen

$$L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N} \text{ TODO} = \{\hat{f} = f + \mathcal{N} : f \in \mathcal{L}^p(X)\}. \quad (5.1)$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass auch  $L^p$  ein Vektorraum ist (bezüglich der kanonischen Verknüpfungen.) Beachte:

$$\hat{f} = \hat{g} \Leftrightarrow f = g \text{ (f.ü.) } \forall f \in \hat{f}, g \in \hat{g}.$$

Für  $\hat{f} \in L^1$  definiere

$$\int_X \hat{f} dx := \int_X f(x) dx \quad (5.2)$$

für einen beliebigen Repräsentanten  $f \in \hat{f}$ . Mit [Lem 3.5](#) folgt, dass (5.2) repräsentantenunabhängig ist, denn sei  $g$  ein weiterer Repräsentant von  $\hat{f}$ , d.h.  $\hat{f} = \hat{g}$ , dann gilt  $f = g$  (f.ü.).

Für das Integral in (5.2) gelten die bekannten Regeln. Somit ist  $\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$  für ein beliebiges  $f \in \hat{f}$  wohldefiniert. Vorsicht:  $\hat{f} \mapsto f(x)$  für einen Repräsentanten  $f \in \hat{f}$  und ein  $x \in X$  definiert keine Abbildung von  $L^p(X)$  nach  $\mathbb{R}$ !

Num:  $\|\hat{f}\|_p = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{N}$  für jeden Repräsentanten  $f \in \hat{f} \Rightarrow \hat{f} = 0$ . Weiter seien  $\hat{f}, \hat{g} \in L^p(X)$  mit Repräsentanten  $f, g$ , sowie  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gelten

- $\|\alpha \hat{f}\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} |\alpha| \cdot \|\hat{f}\|_p$
- $\|f + g\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|f + g\|_p \stackrel{\text{Satz 5.1b}}{\leq} \|f\|_p + \|g\|_p \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\hat{f}\|_p + \|\hat{g}\|_p.$

Also definiert  $\|\cdot\|_p$  eine Norm auf  $L^p(X)$ .

Seien  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in L^2(X)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Nach [Hoelder](#) existiert für beliebige Repräsentanten  $f \in \hat{f}, g \in \hat{g}$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = \int_X f(x) \cdot g(x) dx. \quad (5.3)$$

Es gelten

$$|(\hat{f}|\hat{g})| \leq \int_X |fg| dx \stackrel{\text{Hoelder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \|\hat{f}\|_p \cdot \|\hat{g}\|_p, \quad (5.4)$$

$$(\hat{f}|\hat{g}) = (\hat{g}|\hat{f}),$$

$$(\alpha \hat{f} + \beta \hat{h}|\hat{g}) = \alpha(\hat{f}|\hat{g}) + \beta(\hat{h}|\hat{g}) \quad (5.5)$$

und

$$(\hat{f}|\hat{f}) = \int_X |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2. \quad (5.6)$$

Damit ist  $(\cdot|\cdot)$  ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum  $L^2(X)$  mit zugehöriger Norm  $\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot|\cdot)}$ .

**Definition.** Ein Banachraum, dessen Norm wie in (5.6) von einem Skalarprodukt induziert wird, heißt Hilbertraum.

**Bemerkung.** Setze  $\infty^p := \infty$ . Dann ist die Abbildung  $\varphi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty], x \mapsto x^p$  messbar, da  $\varphi^{-1}([a, \infty]) = [a^{\frac{1}{p}}, \infty] \in \bar{\mathcal{B}}_1$  ( $\forall a \geq 0$ ).

**Theorem 5.6** (Riesz/Fischer). *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(X)$ ,  $1 \leq p < \infty$  eine Cauchy-Folge bezüglich der  $p$ -Norm. Dann gibt es ein  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  und eine Teilfolge  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , sodass  $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und  $f_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$  (f.ü.). Ferner ist  $L^p(X)$  ein Banachraum und  $L^2(X)$  ist ein Hilbertraum.*

*Beweis.* 1) Zweite Behauptung: Wenn  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^p(X)$  ist, dann gilt für Repräsentanten  $f_n \in \hat{f}_n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_p = \|f_n - f_m\|_p \leq \epsilon \quad (\forall n, m \geq N_\epsilon).$$

Damit ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^p(X)$ . Nach der ersten Behauptung existiert dann ein  $f \in \mathcal{L}^p(X)$ , sodass

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_p = \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $L^p(X)$  ein Banachraum und  $L^2(X)$  ist ein Hilbertraum.

2) Sei nun  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^p(X)$ . Wähle (mittels  $e_j := 2^{-j}$ ) eine Teilfolge  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit

$$\|f_l - f_{n_j}\|_p \leq \epsilon = 2^{-j}, \quad \forall l \geq n_j \quad (*)$$

Setze  $g_j := f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} s_N &:= \left( \int_X \left( \sum_{j=1}^N |g_j(x)| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \sum_{j=1}^N |g_j| \right\|_p \stackrel{\text{Satz 5.1b}}{\leq} \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^N 2^{-j} \leq 1 \quad (\forall N \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_X \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(X)| \right)^p}_{=: g(x) \text{ messbar}} dx &= \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^N |g_j(x)| \right)^p dx \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_X \underbrace{\left( \sum_{j=1}^N |g_j| \right)^p}_{=s_N^p} dx \leq 1. \end{aligned}$$

Also liegt  $g \in \mathcal{L}^p(X)$  und somit existiert eine Nullmenge  $N$  mit  $g(x)^p < \infty \forall x \notin N$  ( $\Leftrightarrow g(x) < \infty \forall x \notin N$ ) (wegen [Kor 2.24](#)). Mit unserem Wissen aus Ana1 folgt

$$\exists \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \notin N).$$

Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{m-1} g_j = f_{n_m} - f_{n_1} \quad (\forall m \in \mathbb{N}). \quad (**)$$

Daraus folgt

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x) =: f(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \notin N.$$

Setze  $f(x) := 0 \forall x \in N$ . Dann ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  [messbar](#) und  $f_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$  (f.ü.). Ferner gilt

$$|f_{n_m}| \stackrel{(**)}{\leq} |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{m-1} |g_j| \leq |f_{n_1}| + g =: h,$$

wobei  $h \in \mathcal{L}^p(X)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Mit [Satz 5.5](#) folgt dann  $f \in \mathcal{L}^p(X)$  und  $\|f_{n_m} - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .

Für  $\epsilon > 0$  wähle  $m$  mit  $2^{-m} \leq \epsilon$  und  $\|f - f_{n_m}\|_p \leq \epsilon$ . Sei  $l \geq n_m =: N_\epsilon$ . Dann gilt

$$\|f_l - f\|_p \leq \|f_l - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p \stackrel{(*)}{\leq} 2\epsilon.$$

□

**Beispiel 5.7.** Sei  $X = [0, 1]$ ,  $I_n = [0, 1], [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \dots$ . Setze  $f_n := \mathbf{1}_{I_n}$ . Damit  $\|f_n\|_p = \lambda(I_n)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Aber:  $\forall x \in [0, 1] \exists$  eine Teilfolge  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $f_{n_j}(x) = 1 \nrightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Also gilt  $f_n(x) \nrightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für jedes  $x \in [0, 1]$ .

Also folgt aus Konvergenz  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $\mathcal{L}^p(X)$  nicht die punktweise Konvergenz  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $\mathbb{R}$ .

**Korollar 5.8.** Seien  $\hat{f}_n \in L^p(X) \cap L^q(X)$ ,  $1 \leq p, q < \infty$  und  $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{f}$  in  $L^p(X)$ ,  $\hat{f}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{g}$  in  $L^q(X)$ . Dann gilt  $f = g$  (f.ü.) für alle Repräsentanten  $f \in \hat{f}$  und  $g \in \hat{g}$ , also  $\hat{f} = \hat{g} \in L^p(X) \cap L^q(X)$ .

*Beweis.* Seien  $f, g, h$  Repräsentanten von  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}$ . Dann folgt mit [Thm 5.6](#), dass Teilfolgen  $(n_m)$ ,  $(n_{m_l})$  und Nullmengen  $N_1, N_2$  existieren, sodass

$f_{n_m}(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x) \forall x \notin N_1$ ,  $f_{n_{m_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \forall x \notin N_2$ . Daraus folgt, dass  $f(x) = g(x) \forall x \notin N_1 \cup N_2$  gilt, wobei  $N_1 \cup N_2$  selbst auch eine Nullmenge ist. □

**Bemerkung 5.9.** Die Abbildung  $J : \mathcal{L}^p(X) \cap C(X) \rightarrow L^p(X)$ ,  $Jf = \hat{f}$  ist injektiv und linear. Wir identifizieren deshalb  $\mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$  mit dem neuen Teilraum  $L^p(X)$ .

*Beweis.* Seien  $f, g \in \mathcal{L}^p(X) \cap C(X)$  mit  $\hat{f} = \hat{g}$ . Dann folgt, dass eine Nullmenge  $N$  existiert, sodass  $f(x) = g(x) \forall x \notin N$ . Sei  $y \in N$ . Dann existiert  $x_n \notin N$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  (da  $N^0 = \emptyset$ ). Aus der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  folgt  $f(y) = g(y)$ .  $\square$

Im Folgenden schreiben wir  $f$  statt  $\hat{f}$  und identifizieren  $L^p(x)$  mit  $\mathcal{L}^p(X)$ .

**Bemerkung 5.10.** Stetig sind

- a)  $L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_p$ . (Gilt in jedem normierten Vektorraum)
- b)  $L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_X f(x)dx$ , denn, wenn  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  in  $L^1$ , dann gilt

$$\left| \int_X f_n dx - \int_X f dx \right| \leq \int_X |f_n - f| dx = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- c)  $L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (f|g)$  (Beweis siehe Übung).