

14 Lineare statistische Modelle

14.1 Definition

Es seien $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein (beobachtbarer) Zufallsvektor,
 $C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, s}}$ eine bekannte $n \times s$ -Matrix mit $\text{Rang}(C) = s$
 (insbesondere $n \geq s$), $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)^T$ unbekannter Parametervektor,
 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ ein (nicht beobachtbarer) Zufallsvektor mit

$$E(\varepsilon) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon \cdot \varepsilon^T) = \sigma^2 \cdot I_n$$

σ^2 unbekannt.

Ein **lineares Modell (LM)** wird beschrieben durch die Gleichung

$$X = C\vartheta + \varepsilon \quad (1)$$

also

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{ns} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

C heißt „Designmatrix“.

(1) heißt klassisch, falls $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$.

Bemerkungen:

- a) Im klassischen LM gilt: $X \sim \mathcal{N}_n(C\vartheta, \sigma^2 I_n)$.
 Die Beobachtungen X_1, \dots, X_n sind also unabhängig, aber nicht identisch verteilt.
- b) $\text{Rang}(C) = s \Leftrightarrow C^T C$ nicht singulär
 Denn³⁹:

$$\begin{aligned} C^T C \text{ singulär} &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : C^T C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : u^T C^T C u = (Cu)^T C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^s, u \neq 0 : C u = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Rang}(C) < s \end{aligned}$$

³⁹In der Hinrichtung multipliziere $C^T C u = 0$ mit u^T , in der Rückrichtung multipliziere $C u = 0$ mit C^T .

14.2 Beispiele

a) $X_i = \vartheta + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 1, C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

(wiederholte Messung)

b) $X_i = a + bt_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 2, a = \vartheta_1, b = \vartheta_2, C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix})$$

(einfache lineare Regression)

c) $X_i = a + bt_i + ct_i^2 + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$(s = 3, \vartheta = (a, b, c)^T, C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix})$$

(einfache quadratische Regression)

d) $X_i = \sum_{j=1}^s \vartheta_j \cdot f_j(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$
 f_1, \dots, f_s beliebige gegebene Funktionen! (allgemeine (lineare) Regression)

z.B. $f_j(t) = \sin(\omega_j \cdot t)$ (trigonometrische Regression)

e) $X_i = a + bu_i + cv_i + \dots + gz_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n & v_n & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

(multiple lineare Regression)

f) $X_{1,i} = \vartheta_1 + \varepsilon_{1,i}, i = 1, \dots, n_1$
 $X_{2,i} = \vartheta_2 + \varepsilon_{2,i}, i = 1, \dots, n_2$

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{1,n_1} \\ X_{2,1} \\ \vdots \\ X_{2,n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1,n_1} \\ \varepsilon_{2,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2,n_2} \end{pmatrix}$$

(2-Stichproben-Modell)

- g) $X_{i,j} = \vartheta_i + \varepsilon_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$
 (Modell der einfachen Varianzanalyse, 1-faktorielle ANOVA)
 z.B. Effekt $X_{i,j}$ bei k unterschiedlichen Behandlungen

14.3 Schätzung von ϑ

Sei $R(C) := \{C\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}^s\}$ s -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n .

14.1(1) besagt $EX \in R(C)$.

Forderung: $\|X - C\vartheta\|^2 = \min_{\vartheta}!$ (kleinste-Quadrate-Methode; vgl. 4.6)

Lösung:

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X) = (C^T C)^{-1} \cdot C^T X$$

Beweis:

Wegen $\mu(\vartheta) = C\vartheta$ folgt $M(\vartheta) = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \vartheta_j} \right)_{i,j} = C$ in 4.6 und somit die Normalgleichung $C^T C \vartheta = C^T X$.

Da $C^T C$ nach Bemerkung 14.1(b) invertierbar ist, ist

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X) = (C^T C)^{-1} \cdot C^T X$$

die (einzige) Lösung.

Bemerkung:

Es gilt⁴⁰:

$$E_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) = (C^T C)^{-1} C^T \underbrace{E_{\vartheta, \sigma^2}(X)}_{=C\vartheta} = \vartheta$$

d.h. $\hat{\vartheta}$ ist erwartungstreu für ϑ .

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) = (C^T C)^{-1} C^T \underbrace{\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(X)}_{=\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I_n} \cdot C (C^T C)^{-1} = \sigma^2 (C^T C)^{-1}$$

Beispiele:

- a) In 14.2(b) (einfache lineare Regression) ist (vgl. 4.7)

$$\hat{\vartheta}_1 = \bar{X} - \hat{\vartheta}_2 \bar{t}, \quad \hat{\vartheta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n t_i X_i - n \cdot \bar{t} \cdot \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

⁴⁰Beachte: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

b) In 14.2(g) (ANOVA) ist

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & \vdots & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \quad C^T C = \begin{pmatrix} n_1 & & & 0 \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_k \end{pmatrix}$$

und somit

$$\hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} X_{1,j} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} X_{k,j} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \bar{X}_{1+} \\ \vdots \\ \bar{X}_{k+} \end{pmatrix}$$

(+ bedeutet, dass hier summiert wird)

14.4 Satz (Gauß-Markov-Theorem)

Es sei $a \in \mathbb{R}^s$. Dann ist $T := a^T \hat{\vartheta}$ **besten linearer erwartungstreuer** Schätzer für $a^T \vartheta$. (BLUE)

Beweis:

Sei $S = S(X)$ linearer Schätzer für $a^T \vartheta$.

$$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}^n : S = b^T X$$

S erwartungstreu für $a^T \vartheta \Rightarrow$

$$E_{\vartheta, \sigma^2} S = b^T E_{\vartheta, \sigma^2} X = b^T C \vartheta \stackrel{!}{=} a^T \vartheta \quad \forall \vartheta$$

$$\Rightarrow b^T C = a^T \quad (*)$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(S) b^T \underbrace{\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2} X}_{\sigma^2 I_n} \cdot b = \sigma^2 b^T b$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) = a^T \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}) a = \sigma^2 a^T (C^T C)^{-1} a \stackrel{(*)}{=} \sigma^2 b^T C (C^T C)^{-1} C^T b$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(S) - \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) = \sigma^2 b^T (I_n - \underbrace{C(C^T C)^{-1} C^T}_{\substack{=: P \\ =: Q}}) b$$

Wegen $P = P^T = P^2$ folgt $Q = Q^T = Q^2$ (vgl. Aufgabe 44) folgt

$$b^T Q b = b^T Q^2 b = b^T Q^T Q b = \|Q b\|^2 \geq 0$$

\Rightarrow Behauptung

Beispiele:

a) 1-faktorielle ANOVA (14.2(g), Beispiel 14.3(b))

$$a^T = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{a_i}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{a_j}, 0, \dots, 0), \quad a^T \vartheta = \vartheta_i - \vartheta_j$$

Differenz der Erwartungswerte der i-ten und j-ten Gruppe.

$T = a^T \hat{\vartheta} = \bar{X}_{i+} - \bar{X}_{j+}$ ist BLUE für $a^T \vartheta$.

b) einfache lineare Regression

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ t^* \end{pmatrix}, \quad a^T \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 t^*$$

$T = a^T \hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 t^*$ ist BLUE.

Hier:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$$

$$C^T C = \begin{pmatrix} n & n\bar{t} \\ n\bar{t} & \sum t_i^2 \end{pmatrix}, \quad (C^T C)^{-1} = \frac{1}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum t_i^2 & -\bar{t} \\ -\bar{t} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_1) = \sigma^2 \frac{\frac{1}{n} \sum t_i^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_2) = \sigma^2 \frac{1}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (\text{vgl. 4.7})$$

$$\text{Cov}_{\vartheta, \sigma^2}(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2) = \frac{-\sigma^2 \bar{t}}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (= 0, \text{ falls } \bar{t} = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\vartheta, \sigma^2}(T) &= \sigma^2 a^T (C^T C)^{-1} a \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \left(\frac{1}{n} \sum t_i^2 - 2t^* \bar{t} + (t^*)^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \right) \end{aligned}$$

14.5 Schätzung von σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(X) = \frac{1}{n} \underbrace{\|X - C\hat{\vartheta}\|^2}_{=:\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{n} \|\hat{\varepsilon}\|^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n}$$

($\hat{\varepsilon}$ Residuenvektor)

Bemerkung:

$\hat{\sigma}^2$ ist asymptotisch erwartungstreu, aber nicht erwartungstreu für σ^2 , da nach Aufgabe 44

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-s} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-s} \|\hat{\varepsilon}\|^2$$

erwartungstreu für σ^2 ist.

Ab jetzt stets klassisches lineares Modell ($\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I_n)$)!

14.6 Satz

Im (klassischen) linearen Modell gilt:

- a) $(\hat{\vartheta}, \hat{\sigma})$ ist ML-Schätzer für (ϑ, σ^2)
- b) $\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_s(\vartheta, \sigma^2 (C^T C)^{-1})$
- c) $\frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-s}^2$
- d) $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\sigma}^2$ sind stochastisch unabhängig

Beweis:

$$\text{a) } X \sim \mathcal{N}_n(C\vartheta, \sigma^2 I_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x, \vartheta, \sigma^2) &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - (C\vartheta)_i)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{\|x - C\vartheta\|^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &=: L_x(\vartheta, \sigma^2) \end{aligned}$$

Maximieren von L_x bezüglich ϑ bei festem σ^2 führt auf Minimierung von $\|x - C\vartheta\|^2$, Lösung ist $\hat{\vartheta}$.

$$\frac{\partial \log L_x(\hat{\vartheta}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \|x - C\hat{\vartheta}\|^2$$

b) folgt aus Bemerkung 14.3 und Normalverteilungs-Annahme

c)

$$\begin{aligned} \varepsilon^T \varepsilon &= (X - C\vartheta)^T (X - C\vartheta) \\ &= (X - C\hat{\vartheta} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta))^T (X - C\hat{\vartheta} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta)) \\ &= (\hat{\varepsilon} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta))^T (\hat{\varepsilon} + C(\hat{\vartheta} - \vartheta)) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\varepsilon^T \varepsilon}{\sigma^2}}_{\sim \chi_n^2} &= \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}_{\sim \chi_s^2} + \underbrace{(\hat{\vartheta} - \vartheta)^T \frac{C^T C}{\sigma^2} (\hat{\vartheta} - \vartheta)}_{(1)} + 2 \underbrace{\hat{\varepsilon}^T C}_{(2)} \frac{(\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

(1) nach Hilfssatz 13.6 und (b)

(2) $= \varepsilon^T (I_n - P)^T C = \varepsilon^T (I_n - P) C = 0$

Zu zeigen: $\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2} \sim \chi_{n-s}^2$

Die charakteristische Funktion von χ_k^2 ist

$$\varphi_{\chi_k^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_k(x) dx = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$$

Unabhängigkeit von $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\varepsilon}$ nach (d)

$$\Rightarrow (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} = \varphi_{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}(t) \cdot (1 - 2it)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_{\frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2}}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n-s}{2}}$$

Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen

$$\Rightarrow \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi_{n-s}^2$$

d) $\hat{\vartheta} = (C^T C)^{-1} C^T X = (C^T C)^{-1} C^T (C\vartheta + \varepsilon) = \vartheta + (C^T C)^{-1} C^T \varepsilon$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= X - C\hat{\vartheta} \\ &= (I_n - C(C^T C)^{-1} C^T) X \\ &= (I_n - P)(C\vartheta + \varepsilon) \\ &= \underbrace{(I_n - P)C}_{C-C=0} \vartheta + (I_n - P)\varepsilon \\ &= (I_n - P)\varepsilon \\ (&= Q\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underbrace{\text{Cov}(\hat{\vartheta}, \hat{\varepsilon})}_{s \times n \text{ Matrix}} &= \text{Cov}(\vartheta + (C^T C)^{-1} C^T \varepsilon, (I_n - P)\varepsilon) \\
&= \text{Cov}((C^T C)^{-1} C^T \varepsilon, (I_n - P)\varepsilon) \\
&= \underbrace{(C^T C)^{-1} C^T}_{s \times n} \cdot \underbrace{\text{Cov}(\varepsilon, \varepsilon)}_{=\text{Var}(\varepsilon)=\sigma^2 I_n} \cdot \underbrace{(I_n - P)^T}_{n \times n} \\
&= \sigma^2 (C^T C)^{-1} \underbrace{((I_n - P)C)^T}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= (I_n - P)\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, (I_n - P)\sigma^2(I_n - P)^T) = \mathcal{N}_n(0, \sigma^2(I_n - P)) \\
\hat{\varepsilon}, \hat{\vartheta} &\text{ normalverteilt und unkorreliert} \Rightarrow \hat{\vartheta}, \hat{\varepsilon} \text{ unabhängig} \\
&\Rightarrow \hat{\vartheta}, \hat{\sigma}^2 \text{ stochastisch unabhängig.}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$\hat{\varepsilon} \sim \mathcal{N}_n(0, (I_n - P)\sigma^2)$, d.h. die $\hat{\varepsilon}_i$ haben nicht die gleiche Varianz.

14.7 Konfidenzbereiche für ϑ

a) elliptischer Konfidenzbereich für ϑ :

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta} - \vartheta &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(C^T C)^{-1}) \\
\Rightarrow (\hat{\vartheta} - \vartheta)^T \frac{C^T C}{\sigma^2} (\hat{\vartheta} - \vartheta) &\sim \chi_s^2; \quad \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-s}^2
\end{aligned}$$

Beide Größen sind stochastisch unabhängig.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\frac{1}{s}(\hat{\vartheta} - \vartheta)^T C^T C (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\frac{n}{n-s} \hat{\sigma}^2} \sim F_{s, n-s} \\
&\Rightarrow C_E := \{y \in \mathbb{R}^s : \frac{\frac{1}{s}(\hat{\vartheta} - y)^T C^T C (\hat{\vartheta} - y)}{\hat{s}^2} \leq F_{s, n-s, 1-\alpha}\}
\end{aligned}$$

erfüllt $P_{\vartheta, \sigma^2}(C_E(X) \ni \vartheta) = 1 - \alpha \quad \forall \vartheta, \sigma^2$, d.h. C_E ist ein (exakter) $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

b) Konfidenzintervall für ϑ_j :

Sei $(C^T C)^{-1} =: (b_{ij})_{s \times s}$. $\hat{\vartheta}_j \sim \mathcal{N}(\vartheta_j, b_{jj}\sigma^2)$

$$\stackrel{14.6(c), (d), 2.1}{\Rightarrow} \frac{\frac{\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j}{\sigma \sqrt{b_{jj}}}}{\sqrt{\frac{n}{n-s} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} = \frac{\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j}{\hat{s} \cdot \sqrt{b_{jj}}} \sim t_{n-s} (\sim \sqrt{F_{1, n-s}})$$

$$\Rightarrow P_{\vartheta, \sigma^2}(|\hat{\vartheta}_j - \vartheta_j| \leq t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}) = 1 - \alpha$$

d.h. $\hat{\vartheta}_j \pm t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}$ ist zweiseitiges $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für ϑ_j .

- c) quaderförmiger Konfidenzbereich für ϑ („Bonferroni-Methode“):
 Regel von den kleinen Ausnahmewahrscheinlichkeiten:

$$P(A_j) \geq 1 - \frac{\alpha}{s}, j = 1, \dots, s \Rightarrow P\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right) \geq 1 - \alpha$$

Denn:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{j=1}^s A_j\right)^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^s A_j^C\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^s \underbrace{P(A_j^C)}_{\leq \frac{\alpha}{s}} \geq 1 - \alpha$$

Somit gilt für

$$C_Q(x) := \times_{j=1}^s [\hat{\vartheta}_j(x) - r(x), \hat{\vartheta}_j(x) + r(x)]$$

mit $r(x) := t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2s}} \cdot \hat{s} \sqrt{b_{jj}}$:

$$P_{\vartheta, \sigma^2}(C_Q(X) \ni \vartheta) \geq 1 - \alpha \quad \forall \vartheta, \sigma^2$$

d.h. C_Q ist quaderförmiger $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich für ϑ .

Bemerkung:

C_E hat kleineres Volumen wie C_Q , aber C_Q ist leichter zu interpretieren.

- d) Konfidenzintervall für $a^T \vartheta$:

$$a^T \hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}(a^T \vartheta, \sigma^2 \cdot a^T (C^T C)^{-1} a)$$

$$\Rightarrow \frac{a^T (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\hat{s} \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}} = \frac{\frac{a^T (\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\sigma \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}}}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2}}} \sim t_{n-s}$$

\Rightarrow Mit $r := t_{n-s, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{a^T (C^T C)^{-1} a}$ ist $[a^T \hat{\vartheta} - r, a^T \hat{\vartheta} + r]$ $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für $a^T \vartheta$.

Beispiel:

einfache lineare Regression (vgl. Beispiel 14.4(b))

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ t^* \end{pmatrix}, \quad r = t_{n-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{s} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum_i (t_i - \bar{t})^2}}$$

$[\hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 \cdot t^* - r, \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 \cdot t^* + r]$ ist $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für $a^T \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot t^*$.

14.8 Tests von linearen Hypothesen im linearen Modell

$$X = C\vartheta + \varepsilon, \varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \cdot I_n)$$

Zu testen sei „lineare Hypothese“

$$H_0 : H\vartheta = h \text{ gegen } H_1 : H\vartheta \neq h$$

Dabei: H $r \times s$ -Matrix, $\text{Rang}(H) = r$ (insbesondere $r \leq s$), $h \in \mathbb{R}^r$ gegeben

$$H_0 \hat{=} \Theta_0 := \{(\vartheta, \sigma^2) \in \underbrace{\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}_{>0}}_{=\Theta} : H\vartheta = h\}, \quad H_1 \hat{=} \Theta \setminus \Theta_0$$

14.9 Beispiele

a) $X_j = \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot t_j + \varepsilon_j, j = 1, \dots, n$ (einfache lineare Regression)

$$H_0 : \vartheta_2 = 0 \text{ gegen } H_1 : \vartheta_2 \neq 0$$

„Lineare Hypothese“: $H = (0, 1), h = 0$ ($s = 2, r = 1$)

$$H_0 : H \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Möglicher Test: Verallgemeinerter Likelihood-Quotienten-Test
Testgröße Λ_n bzw. $\log \Lambda_n$.

$$\Lambda_n := \frac{\sup_{(\vartheta, \sigma^2) \in \Theta_0} f(x, \vartheta, \sigma^2)}{\sup_{\Theta} f(x, \vartheta, \sigma^2)}$$

Unter H_0 : $X_j = \vartheta_1 + \varepsilon_j, X_j \sim \mathcal{N}(\vartheta_1, \sigma^2)$, ML-Schätzer für ϑ_1 : \bar{X}_n

Ohne Restriktion: ML-Schätzer = KQ-Schätzer⁴¹ = $\hat{\vartheta}$ (Satz 14.6(a))

Als Schätzer für σ^2 wird aber üblicherweise in beiden Fällen der Schätzer $\hat{\sigma}^2$ aus Obermodell verwendet!

Dann⁴²:

$$\log \Lambda_n = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}_{=: SS_0} - \underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - (\hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 t_i))^2}_{=: SS_1 (= n\hat{\sigma}^2)} \right]$$

Als Testgröße wird

$$T := \frac{SS_0 - SS_1}{\frac{SS_1}{n-2}}$$

verwendet. Es gilt:

⁴¹Kleinste-Quadrate-Schätzer

⁴²SS: sum of squares

- (i) $\frac{SS_1}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$ (nach 14.6(c))
- (ii) $\frac{SS_0}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ unter H_0 (nach 2.2)
- (iii) $SS_0 - SS_1$ und SS_1 stochastisch unabhängig (ohne Beweis)

$$\underbrace{\frac{SS_0}{\sigma^2}}_{\substack{H_0 \\ \sim \chi_{n-1}^2}} = \frac{SS_0 - SS_1}{\sigma^2} + \underbrace{\frac{SS_1}{\sigma^2}}_{\sim \chi_{n-2}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SS_0 - SS_1}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1-(n-2)}^2 = \chi_1^2 \text{ unter } H_0 \text{ (vgl. Beweis von 14.6(c))}$$

Damit $T \sim F_{1,n-2}$ unter H_0 .

- b) $X_{i,j} = \vartheta_j + \varepsilon_{i,j}$ ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i$) (einfache Varianzanalyse⁴³)

$$H_0 : \vartheta_1 = \dots = \vartheta_k$$

(„kein Effekt des zu untersuchenden Faktors“)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=: H \in \mathbb{R}^{k-1 \times k}} \cdot \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: h \in \mathbb{R}^{k-1}}$$

$$\text{Rang}(H) = k - 1 (= r)$$

Testgröße: (vgl. Aufgabe 45)

$$\text{Sei } \bar{X}_{i+} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}, \bar{X}_{++} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} X_{i,j}, n = \sum_{i=1}^k n_i, \\ \text{SQZ} = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_{i+} - \bar{X}_{++})^2, \text{SQI} = \sum_{i,j} (X_{i,j} - \bar{X}_{i+})^2$$

$$\sum_{i,j} (X_{i,j} - \bar{X}_{++})^2 = \text{SQI} + \text{SQZ}$$

$$T := \frac{\frac{\text{SQZ}}{k-1}}{\frac{\text{SQI}}{n-k}} \sim F_{k-1, n-k} \text{ unter } H_0$$

⁴³ $k \hat{=} s$

14.10 Die Testgröße bei allgemeinen linearen Hypothesen

$$\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_j(\vartheta, \sigma^2(C^T C)^{-1})$$

$$\Rightarrow H\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}_r(H\vartheta, \sigma^2 \underbrace{H(C^T C)^{-1}H^T}_{=:B})$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sigma^2} (H\hat{\vartheta} - H\vartheta)^T B^{-1} (H\hat{\vartheta} - H\vartheta)}{\frac{\hat{s}^2}{\sigma^2}} \sim \frac{\frac{\chi_r^2}{r}}{\frac{\chi_{n-s}^2}{n-s}} \sim F_{r,n-s}$$

(Zähler und Nenner sind stochastisch unabhängig.)

Sei

$$T := \frac{\frac{1}{r} (H\hat{\vartheta} - h)^T (H(C^T C)^{-1}H^T)^{-1} (H\hat{\vartheta} - h)}{\hat{s}^2} \sim F_{r,n-s} \quad \text{unter } H_0$$

Der sogenannte **F-Test** im linearen Modell besitzt die Gestalt:

H_0 ablehnen, falls $T \geq F_{r,n-s,1-\alpha}$.

Kein Widerspruch zu H_0 , falls $T < F_{r,n-s,1-\alpha}$.

Bemerkung:

Für die Beispiele aus 14.9 stimmt die obige Testgröße mit den Testgrößen aus 14.9(a) bzw. (b) überein.