20. Affine Räume

Man möchte vom Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ abstrahieren:

- statt $\mathbb{R}$ **beliebige** Körper K
- statt Dimension 3 **beliebige** Dimensionen $< \infty$

Aufgabe: Finde die „richtige“ Verallgemeinerung der vertrauten **geometrischen** Begriffe, sodass bekannte geometrische Sätze richtig bleiben.

Im Folgenden sei K stets ein beliebiger Körper.

20.1. Grundbegriffe

Definition: Sei V K-VRm mit $\dim(V) = n < \infty$.

(a) Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt **affiner Raum mit Richtungsvektorraum** V, falls $(V, +)$ auf A operiert, d.h. es existiert eine Paarung „+“ genannt **Translation** $V \times A \to A$, $(x, P) \mapsto x + P$, mit der Eigenschaft:

$$\forall P, Q \in A \exists_1 x \in V : Q = x + P$$

(b) Elemente von A heißen **Punkte**.
Der zu gegebenen Punkten P, Q eindeutig bestimmte Vektor x mit $Q = x + P$ heißt der **Translationsvektor von** P **nach** Q.
Schreibe: $x := \overrightarrow{PQ}$

(c) $\dim(A) := \dim(V)$ heißt **Dimension von** A.

Bemerkung: (1) Vorsicht in (1) wird das Zeichen „+“ für verschiedene Verknüpfungen benutzt.

(2) Es gilt für $P, Q, R, \in A$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP} &= 0 \\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{QP} &= -\overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

(3) A besteht aus genau einer Bahn:

$$\forall P \in A : A = V + P := \{x + P \mid x \in V\}$$

Beispiel: Der **affine Standardraum** $\mathbb{A}_n(K)$ ist definiert als Punktmenge $\mathbb{A} := K^n$ und $V := K^n$, mit Translation := Addition in K^n, d.h. für $P, Q \in K^n$ gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Definition: Eine Teilmenge $B \neq \emptyset$ eines affinen Raumes A heißt **(affiner) Teilraum** oder **lineare Varietät** von A, falls ein VRm $U_B \leq V$ existiert, sodass B affiner Raum ist, mit Richtungsvektorraum U_B (unter der in A gegebenen Operation).
Auch $B = \emptyset$ werde affiner Teilraum genannt.
Spezielle affine Teilräume B sind:

(a) **Gerade** $\iff \dim(B) = 1$

(b) **Ebene** $\iff \dim(B) = 2$

(c) **Hyperebene** $\iff \dim(B) = \dim(A) - 1$

Lemma:

(1) Ist $B \neq \emptyset$ affiner Teilraum, dann gilt:

$$U_B = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\}$$

(2) Sind $\emptyset \neq B \subseteq C$ affine Teilräume und $\dim(B) = \dim(C)$, dann ist $B = C$.

(3) Durch zwei Punkte $P \neq Q$ in A geht genau eine Gerade.

$$PQ := K \cdot \overrightarrow{PQ} + P = \{\lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P \mid \lambda \in K\} \leq A$$

Diese wird die **Verbindungsgerade** von P und Q genannt.

(4) Drei Punkte $P, Q, R \in A$ liegen genau dann auf **einer** Geraden, wenn gilt, dass $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ linear abhängig sind.

Beweis: (1) „$\supseteq$“ ✓

„$\subseteq$“ Da B affiner Teilraum mit Richtung U_B ist, gilt für alle $P, Q \in B$:

$$\exists_1 x \in B : x = \overrightarrow{PQ} \iff x + P = Q$$

(2) Aus (1) folgt mit $B \subseteq C$, dass $U_B \subseteq U_C$ gilt. Da diese die gleiche Dimension haben muss dann schon $U_B = U_C$ gelten. Für $P \in B \cap C$ gilt dann:

$$B = U_B + P = U_C + P = C$$

(3) Es ist klar, dass P und Q auf der Geraden PQ liegen, daher muss lediglich die Eindeutigkeit gezeigt werden.
Sei B eine Gerade mit $P, Q \in B$ und $U := U_B$. Da $P \neq Q$ ist, ist $\overrightarrow{PQ} \in U$ nicht der Nullvektor. Da außerdem $\dim U = 1$ ist, gilt:

$$U = K \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Daraus folgt:

$$B = U + P = PQ$$

(4) Sei $x := \overrightarrow{PQ}$ und $y := \overrightarrow{QR}$. Es existiert genau dann eine Gerade B mit $P, Q, R \in B$, wenn gilt:

$$\exists \text{ VRm } U : \dim U = 1, x, y \in U$$

Also genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. ∎

Satz 25 (Teilraumkriterium):
Sei A affiner Raum mit Richtung V und sei $\emptyset \neq B \subseteq A$. Dann sind äquivalent:

(1) B ist affiner Teilraum.

(2) Es existieren $P \in A$ und $U \leq V$, sodass gilt:

$$B = U + P$$

(3) Falls $|K| > 2$, so ist auch äquivalent:

$$\forall P, Q \in B : P \neq Q \implies PQ \subseteq B$$

(4) Falls $A = \mathbb{A}_n(K)$, so ist auch äquivalent, dass B Lösungsmenge eines LGS ist.

Beweis: Die Äquivalenz ergibt sich aus folgendem Ringschluss:

$(1) \implies (2)$ Ist B affiner Teilraum, so gilt:

$$\exists U \leq V : \forall P \in U : B = U + P$$

$(2) \implies (1)$ $B = U + P$ ist affiner Teilraum, denn U operiert auf B und für $Q, R \in B$: gilt:

$$\exists x, y \in U : Q = x + P, R = y + P \text{ und}$$

$$\exists_1 \text{ Translation } \overrightarrow{QR} = y - x \in U$$

Daraus folgt, dass U affiner Teilraum ist.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Sei B affiner Teilraum mit $P, Q \in B, P \neq Q$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{PQ} \in U_B \\
&\Longrightarrow \forall \lambda \in K : \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + P \in B \\
&\Longrightarrow PQ \subseteq B
\end{aligned}$$

(3) $\Longrightarrow$ (2) Setze $U := \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in B\} \subseteq V$.
Zeige zunächst: Für alle $P \in B$ gilt:

$$U + P \subseteq B$$

D.h. für alle $y \in U$ gilt:

$$y + P \in B$$

„$\subseteq$“ Sei also $0 \neq y \in U$, dann existiert ein $Q \neq R \in B$, sodass gilt:

$$y = \overrightarrow{QR}$$

Setze $z := \overrightarrow{PQ}$.
Fall y, z linear abhängig:
Aus dem Lemma folgt, dass P, Q, R auf der Geraden $QR = \{\lambda \cdot y + P \mid \lambda \in K\} \overset{(3)}{\subseteq} B$ liegen. Insbesondere gilt:

$$y + P \in B$$

Fall y, z linear unabhängig:
Wähle $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Betrachte $S := \frac{\lambda}{\lambda - 1} y + P$, $N := \lambda z + P$.
Dann ist $N \in PQ \subseteq B$.
Annahme: $N = R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
N &= \lambda z + p \\
&= R \\
&= y + z + P
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass y und z linear abhängig sind. $\lightning$ Es gilt also $N \neq R$. Ferner gilt, dass S, N, R auf einer Geraden liegen, denn:

$$\overrightarrow{NR} = y + z - \lambda z = y + (1 - \lambda) z \text{ und}$$

$$\overrightarrow{SN} = \lambda z - \frac{\lambda}{1 - \lambda} y = \frac{\lambda}{\lambda - 1}((\lambda - 1) z - y)$$

sind linear abhängig.
Aus $N, R \in B$ folgt:

$$S \in NR \overset{(3)}{\subseteq} B$$

Außerdem gilt: $S \neq P$, also $SP \in B$ und damit $y + P \in B$
Es gilt sogar: $B = U + P$, da für alle $Q \in B$ gilt:

$$Q = \overrightarrow{PQ} + P \in U + P$$

„$\supseteq$“ ✓

Es bleibt zu zeigen: $U \leq V$ (Untervektorraum)
Seien $x, y \in U, \alpha \in K$. O.B.d.A lässt sich $x \neq 0$ annehmen, etwa $x = \overrightarrow{PQ}, P, Q \in B$. Dann gilt:

$$\alpha x + P \in PQ \subseteq B \implies \alpha x \in U$$

Also genügt es zu zeigen, dass $x + y$ in U liegt. Sei $P' := x + P$.
Dann gilt mit $x = \overrightarrow{PQ}$ und $y + P \in U + P \subseteq B$:

$$\begin{aligned} &(x + y) + P = x + (y + P) \in U + P' \subseteq B \\ &\implies x + y \in U \end{aligned}$$

■

20.2. Eigenschaften affiner Teilräume

Lemma:
Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge und $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie affiner Teilräume von A.
Dann ist $B := \bigcap_{i \in I} B_i$ affiner Teilraum von A mit Richtung $U_B = \bigcap_{i \in I} U_{B_i}$, falls $B \neq \emptyset$.

Beweis: Sei $B \neq \emptyset$, dann existiert ein $P \in \bigcap_{i \in I} B_i$. Setze $U := \bigcap_{i \in I} U_{B_i} \leq V$.
Dann gilt für ein $Q \in A$:

$$\begin{aligned} Q \in U + P &\iff \forall i \in I : Q \in U_{B_i} + P \\ &\iff Q \in \bigcap_{i \in I} B_i \\ &\iff Q \in B \end{aligned}$$

Daraus folgt: $B = U + P$ ■

Definition: Sei M Teilmenge von A, C die Menge aller affinen Teilräume von A, die M enthalten.
Dann heißt:

$$[M] := \bigcap_{B \in C} B$$

die **affine Hülle** von M.
Für $M = \{P_1, \ldots, P_m\}$ schreibe: $[P_1, \ldots, P_m] := [M]$.

Beispiel: Sei $P \neq Q$, dann ist $[P, Q] = PQ$ die Gerade durch P und Q.

Lemma:
Seien $P_0, \dots, P_m \in A$ und sei $x_i := \overrightarrow{P_0P_i} \in V$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann gilt:

$$[P_0, \dots, P_m] = \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

Insbesondere ist $\dim [P_0, \dots, P_m] \leq m$.
Falls gilt: $\dim [P_0, \dots, P_m] = m$ sagt man, $P_0, \dots, P_m$ sind in **allgemeiner Lage**.

Beweis: „$\subseteq$" Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$P_i = x_i + P_0 \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$$

„$\supseteq$" Sei $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle + P_0$, und sei $B \supseteq \{P_0, \dots, P_m\}$ beliebiger affiner Teilraum. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{1, \dots, m\} : x_i = \overrightarrow{P_0P_i} \in U_B \\
\implies &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in U_B \\
\implies &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in U_B + P_0 = B
\end{aligned}$$

Da dies für einen beliebigen affinen Teilraum B gilt, der $\{P_0, \dots, P_m\}$ enthält, gilt dies für alle solche Teilräume. Sei C die Menge aller affinen Teilräume die $\{P_0, \dots, P_m\}$ enthalten. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\forall B \in C : \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in B \\
\iff &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in \bigcap_{B \in C} B \\
\iff &\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + P_0 \in [P_0, \dots, P_m]
\end{aligned}$$

■

Satz 26:
Seien $A_1 := U_1 + P_1, A_2 := U_2 + P_2$ affine Teilräume von A. Dann gilt:

(1) $U_{[A_1 \cup A_2]} = U_1 + U_2 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$

(2) $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (A_1 \cap A_2)$
$A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies \dim([A_1 \cup A_2]) = \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (U_1 \cap U_2) + 1$

Beweis: (1) Sei $y := \overrightarrow{P_1P_2}$ und $U := U_1 + U_2 + \langle y \rangle$.
Zu Zeigen: $U + P_1 = [A_1 \cup A_2]$, d.h. $U_{[A_1 \cup A_2]} = U$

„$\subseteq$" Für einen beliebigen affinen Raum $B \supseteq A_1 \cup A_2$ gilt: $U_B \geq U_1, U_2, \langle y \rangle$.
Also gilt für $x = x_1 + x_2 + \alpha y \in U$ mit $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$:

$$\begin{aligned} & x = x_1 + x_2 + \alpha y \in U_B \\ & \implies x + P_1 \in U_B + P_1 = B \\ & \implies x + P_1 \in \bigcap B = [A_1 \cup A_2] \end{aligned}$$

„$\supseteq$" **Zu zeigen:** $A_1 \cup A_2 \subseteq U + P_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1 + P_1 \subseteq U + P_1 \\ A_2 &= U_2 + P_2 = U_2 + y + P_1 \subseteq U + P_1 \end{aligned}$$

(2) **Fall $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$:** Nach Lemma gilt $U_{A_1 \cap A_2} = U_1 \cap U_2$, und dass $P_1 = P_2$ wählbar ist.
Daraus folgt $U = U_1 + U_2$ (mit $y = 0$). Also gilt: $[A_1 \cup A_2] = U_1 + U_2 + P_1$ mit:

$$\begin{aligned} \dim [A_1 + A_2] &= \dim (U_1 + U_2) \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2) \\ &= \dim A_1 + \dim A_2 - \dim (A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Fall $A_1 \cap A_2 = \emptyset$: Annahme: $y \in U_1 + U_2$.
Dann ist $y = x_1 + x_2$ für ein $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Daraus folgt:

$$x_1 + P_1 = -x_2 + y + P_1 = -x_2 + P_2 \in A_1 \cap A_2 \ \lightning$$

Also ist $y \notin U_1 + U_2$. Daraus folgt:

$$\dim U = \dim (U_1 + U_2) + 1$$

Der restliche Beweis erfolgt analog zum ersten Fall. ■

Definition: Affine Teilräume B, C von A heißen **parallel**, wenn gilt:

$$U_B \leq U_C \text{ oder } U_C \leq U_B$$

Schreibe: $B \parallel C$.

Beispiel: Man denke nicht nur an parallele Geraden oder Ebenen, sondern etwa auch an Gerade $\parallel$ Ebene.

Bemerkung:

(1) Auf den Teilräumen einer festen Dimension ist Parallelität eine Äquivalenzrelation.

(2) Aus $B \parallel C$ folgt: $(B \subseteq C) \vee (B \supseteq C) \vee (B \cap C = \emptyset)$

(3) Für alle $P \in A$ und alle affinen Teilräume $B \neq \emptyset$ existiert genau ein affiner Teilraum C mit:

(a) $P \in C$

(b) $B \parallel C$

(c) $\dim C = \dim B$

Beweis: (1) Leichte Übung!

(2) Sei $P \in B \cap C$ und o.B.d.A $U_B \leq U_C$. Dann gilt:

$$B = U_B + P \leq U_C + P = C$$

(3) Es muss $C = U_B + P$ gelten, da aus b) und c) folgt: $U_C = U_B$ ■

Satz 27:
Sei A affiner Raum mit $\dim A = n > 1$, $G \subseteq A$ Gerade und H Hyperebene in A.
Dann gilt:

(1) $G \cap H = \emptyset \implies G \parallel H$

(2) $G \not\parallel H \implies \exists P : G \cap H = \{P\}$

Bemerkung: $\dim G \cap H \leq \dim G = 1 \implies G \cap H = \begin{cases} \emptyset \\ \text{Punkt} \\ \text{Gerade} \end{cases}$

Beweis: (1) Sei $G \cap H = \emptyset$, dann ist $G \cup H$ echte Obermenge von H. Es gilt also:

$$H \subsetneq G \cup H \subseteq [G \cup H]$$

Daraus folgt für die Dimensionen:

$$\begin{aligned} n - 1 = \dim H < dim[G \cup H] \leq n \\ \implies \dim[G \cup H] = n \\ \implies [G \cup H] = A \end{aligned}$$

Aus der Dimensionsformel für die affine Hülle folgt:

$$\begin{aligned} n &= \dim[G \cup H] \\ &= \dim G + \dim H - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \\ &= n - \dim(U_G \cap U_H) + 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &\dim(U_G \cap U_H) = 1 = \dim U_G \\ &\implies U_G \cap U_H = U_G \\ &\implies U_G \subseteq U_H \\ &\implies G \parallel H \end{aligned}$$

(2) Aus (1) folgt, dass $G \cap H$ nicht die leere Menge ist, wenn G und H nicht parallel sind.
Sei nun $G' := G \cap H$ eine Gerade. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & G' \subseteq G \\ & \implies G' = G \\ & \implies G \subseteq H \\ & \implies G \parallel H \end{aligned}$$

Also kann $G \cap H$ auch keine Gerade sein, wenn G und H nicht parallel sind. Mit der Vorbemerkung folgt daraus, dass $G \cap H$ ein Punkt sein muss. ∎