

3 Lokale Eigenschaften

§14 Lokale Ringe zu Punkten

Erinnerung / Definition + Bemerkung 3.14.1

Sei V eine Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k) und $x \in V$.

(a)

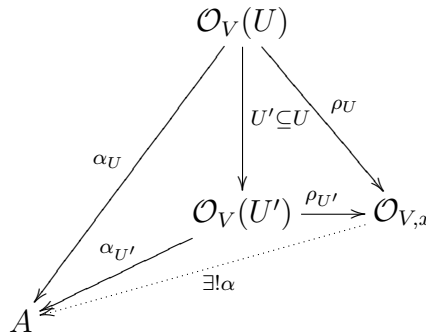
$$\mathcal{O}_{V,x} := \{[(U, f)] : U \subseteq V \text{ offen, } x \in U, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$$

heißt **lokaler Ring** von V in x , dabei sei $(U, f) \sim (U', f') \Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$

(b) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$m_x = \{[(U, f)] \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\}.$$

(c) $\mathcal{O}_{V,x} = \varinjlim_{U \subseteq V \text{ offen, } x \in U} \mathcal{O}_V(U)$



Bemerkung 3.14.2

Seien $V, x \in V$ wie in 3.14.1, sei weiter $V_0 \subseteq V$ offen und affin mit $x \in V_0$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{V_0}}$, wobei $k[V_0]$ der affine Koordinatenring von V_0 sei und $m_x^{V_0}$ das zu x gehörige maximale Ideal in $k[V_0]$, das heißt $m_x^{V_0} = \{f \in k[V_0] : f(x) = 0\}$.

(b) Ist V irreduzibel, so ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \{f = \frac{g}{h} \in k(V) : g, h \in k[V_0], h(x) \neq 0\}$.

Beweis Übung. □

Proposition 3.14.3

Seien V, W Varietäten, $x \in V, y \in W$. Ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$ (als k -Algebra), so gibt es (affine) offene Umgebungen $U_1 \subseteq V$ von x und $U_2 \subseteq W$ von y mit $U_1 \cong U_2$.

Beweis Übungsblatt 7 Aufgabe 1. □

Bemerkung 3.14.4

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ ein Morphismus von Varietäten. Für jedes $x \in V$ induziert φ einen k -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V,x} \text{ mit } \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x.$$

Beweis $\exists V, W$ affin (geeignet einschränken!).

Dann induziert φ einen k -Algebrenhomomorphismus

$$\varphi^\sharp : \begin{array}{ccc} k[W] & \longrightarrow & k[V] \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Dabei gilt für $f \in k[W]$:

$$(*) \quad f \in m_{\varphi(x)}^W \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^\sharp(f) \in m_x^V$$

$\Rightarrow \varphi^\sharp$ induziert einen Homomorphismus

$$\varphi_x^\sharp : \underbrace{k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{\cong \mathcal{O}_{W, \varphi(x)}} \longrightarrow \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{\cong \mathcal{O}_{V, x}}.$$

Aus $(*)$ folgt weiter:

$$\varphi_x^\sharp(\underbrace{m_{\varphi(x)}^W \cdot k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{=m_{\varphi(x)}}) \subseteq m_x^V k[V]_{m_x^V} = m_x \quad \square$$

§15 Dimension einer Varietät

Definition 3.15.1

Sei X ein topologischer Raum ($\neq \emptyset$). Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt irreduzible Teilmengen } \emptyset \neq V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \subseteq X\}$$

die **(Krull-)Dimension** von X .

Erinnerung / Definition 3.15.2

Sei R ein Ring (kommutativ mit Eins).

(a) Für ein Primideal $\wp \subseteq R$ heißt

$$\text{ht}(\wp) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{Es gibt Primideale } \wp_0 \subsetneq \dots \subsetneq \wp_n = \wp\}$$

die **Höhe** von \wp .

(b) $\dim R := \sup\{\text{ht}(\wp) : \wp \subset R \text{ Primideal}\}$ heißt **(Krull-)Dimension** von R .

Bemerkung 3.15.3

Sei V eine affine Varietät. Dann ist $\dim(V) = \dim(k[V])$.

Beweis Nach Proposition 1.3.2 ist eine abgeschlossene Teilmenge Z von V genau dann irreduzibel, wenn ihr Verschwindungsideal $I(Z)$ ein Primideal ist. Nach Satz 2 ist das eine Bijektion. \square

Proposition 3.15.4

(a) $\dim(k[X_1, \dots, X_n]) = n$

(b) Ist A eine nullteilerfreie k -Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten die gleiche Länge.

Beweis Algebra 2. \square

Bemerkung + Definition 3.15.5

Sei V eine Varietät, $x \in V$, $V_0 \subseteq V$ eine offene und affine Umgebung von x .

- (a) $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^{V_0}) (= \text{ht}(m_x^{V_0} \cdot k[V_0]_{m_x^{V_0}}))$
- (b) Ist V irreduzibel, so ist

$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim \mathcal{O}_{V,y} = \dim V \text{ für alle } x, y \in V.$$

- (c) $\dim_x V := \dim \mathcal{O}_{V,x}$ heißt **lokale Dimension** von V in x .
- (d) $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V, x \in Z\}$

Beweis b) Ist V affin (also $V = V_0$), so folgt die Aussage aus a) und Proposition 3.15.4(b). Im allgemeinen Falle überdecke V durch affine Varietäten V_i ($i = 1, \dots, n$). Da V irreduzibel ist, ist $V_i \cap V_j \neq \emptyset \forall i, j$.

$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_{V,x}$ ist unabhängig von x , also gleich $\dim V_i$ für jedes $i = 1, \dots, n$.

noch zu zeigen: $\dim V_i = \dim V$.

Sei $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d = V$ eine maximale Kette von irreduziblen Teilmengen. Dabei ist $Z_0 = \{z_0\}$ einpunktig. Es folgt $d = \dim \mathcal{O}_{V,z_0}$.

d) \square sei V affin. Die irreduziblen Komponenten Z_1, \dots, Z_n von V entsprechen den minimalen Primidealen in $k[V]$. Es gilt $x \in Z_i \Leftrightarrow m_x^V \supseteq I(Z_i) =: \mu_i$. Weiter ist $k[Z_i] = k[V]/\mu_i$. Es folgt: $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \text{ht}(m_x^V) = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\text{maximale Länge einer Primidealkette } \mu_i \subsetneq \wp_1 \subsetneq \dots \subsetneq m_x^V\} = \max_{i=1; \mu_i \subseteq m_x^V}^n \{\underbrace{\dim k[Z_i]}_{=\dim Z_i}\}.$ \square

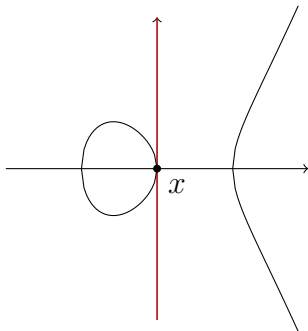
§16 Der Tangentialraum

Zunächst einige einführende Beispiele:

Beispiele

- 1.) $V = V(Y^2 - X^3 + X)$, $x = (0, 0)$.

Die Tangente in x an V ist die y -Achse, also $V(X)$. Der Tangentialraum in $x = (1, 0)$ ist derselbe, d.h. der Tangentialraum ist nicht als affiner Raum, sondern als Vektorraum zu verstehen.



- 2.) $V = V(Y^2 - X^3 + X^2)$ (Newton-Knoten), $x = (0, 0)$.
Hier kann man an den Nullpunkt 2 Tangenten anlegen ($y = x$ und $y = -x$). Der Tangentialraum, wie wir ihn definieren werden, ist der davon aufgespannte $\mathbb{A}^2(k)$.
- 3.) $V = V(Y^2 - X^3)$, $x = (0, 0)$.
Ist jeder beliebige eindimensionale Unterraum im Tangentialraum enthalten?
- 4.) $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$ (doppelter Kegel), $x = (0, 0, 0)$, $y = (1, 0, 1)$.

Definition + Bemerkung 3.16.1

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $x \in V$, $I = I(V)$.

- (a) Für $f \in I$ sei $f^{(1)} := f_x^{(1)} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) \cdot X_i$. Weiter sei I_x das von den $f^{(1)}$, $f \in I$, erzeugte Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ und $T_x := T_{V,x} := V(I_x)$. $T_{V,x}$ heißt **Tangentiairaum** an V in x .
- (b) T_x ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{A}^n(k)$.
- (c) Sind f_1, \dots, f_r Erzeuger von I , so wird I_x erzeugt von $f_1^{(1)}, \dots, f_r^{(1)}$.

Beispiele von oben:

- 1.) $I_x = (X)$, $T_x = V(X)$
- 2.) $I_x = (0)$, $T_x = \mathbb{A}^2(k)$
- 3.) $I_x = (0)$, $T_x = \mathbb{A}^2(k)$
- 4.) $I_x = (0)$, $T_x = \mathbb{A}^3(k)$;
 $I_y = (2X - 2Z) = (X - Z)$, $T_y = V(X - Z)$

Bemerkung 3.16.2

Jeder Morphismus $\varphi : V \rightarrow W$ von affinen Varietäten induziert für jedes $x \in V$ eine k -lineare Abbildung $d_x\varphi : T_{V,x} \rightarrow T_{W,\varphi(x)}$.

Beweis $\text{OE } x = 0, \varphi(x) = 0$.

Schreibe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Brauche k -Algebrenhomomorphismus:

$$(d_x\varphi)^\sharp : k[Y_1, \dots, Y_m]/I_{\varphi(x)} \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_x$$

Für $j = 1, \dots, m$ ist $\varphi^\sharp(Y_j) = Y_j \circ \varphi = \varphi_j \Rightarrow (\varphi^\sharp(Y_j))^{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0) \cdot X_i =: (d_x\varphi)^\sharp(Y_j)$.

Sei $f \in I_\varphi$, $\text{OE } f = g^{(1)}$ für ein $g \in I(V)$.

Schreibe $g^{(1)} = \sum_{j=1}^m a_j Y_j$, $a_j \in k = (d_x\varphi)^\sharp(f) = \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0) \cdot X_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i}(0)) \cdot X_i = (g \circ \varphi)^{(1)}$

$$\text{da } \frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial X_i}(0) = \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial g}{\partial Y_j}(\varphi(0))}_{=a_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_i}(0) \quad \square$$

Proposition + Definition 3.16.3

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $x \in V$. Dann ist T_x in natürlicher Weise isomorph zu dem Dualraum $(m_x/m_x^2)^\vee$ von m_x/m_x^2 . Der k -Vektorraum $(m_x/m_x^2)^\vee$ heißt **Zariski-Tangentiairaum** an V in x .

m_x/m_x^2 ist ein k -Vektorraum: Zunächst ist m_x/m_x^2 ein R -Modul für $R = \mathcal{O}_{V,x}$. Weiter ist $R/m_x = k$.

Da $m_x \cdot (m_x/m_x^2) = 0$ ist, hat m_x/m_x^2 eine Struktur als R/m_x -Modul.

Definition + Bemerkung 3.16.4

Sei V eine Varietät, $x \in V$.

- (a) x heißt **nichtsingulärer Punkt** (oder **regulärer Punkt**), wenn

$$\dim T_{V,x} = \dim_x V.$$

- (b) (Jacobi-Kriterium) Sei $U \subseteq V$ eine offene, affine Umgebung von x , $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ Erzeuger des Verschwindungsides $I(U)$. Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{i,j} = n - \dim_x V$$

(c) Ist x singulär, so ist $\dim T_{V,x} > \dim_x V$.

Beweis b) Sei $x \in V$, $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$.

$$\mathcal{J}_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$$

$T_{V,x}$ ist die Lösungsmenge des LGS $\mathcal{J}_f(x) \cdot X = 0$, denn $f_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \cdot X_j$.

c) Sei $\mathcal{J}_f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$.

$\Rightarrow \text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \max\{d : \exists (d \times d)\text{-Minor } M \text{ von } \mathcal{J}_f \text{ mit } \det M(x) \neq 0\}$

\Rightarrow Es gibt eine offene Teilmenge U von V , auf der $\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x))$ maximal ist. \square

Beispiele 3.16.5

(a) $V = (Y^2 - X^3 - X^2) =: V(f)$

$$\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right) = (-3X^2 - 2X, 2Y)$$

$$\text{Rang}(\mathcal{J}_f(x)) = \begin{cases} 0 & , -3X^2 - 2X = 0 \text{ und } Y = 0 \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ mit einem Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$.

$$x \in \mathbb{A}^n(k) \text{ singulärer Punkt von } V \Leftrightarrow 0 = f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x)$$

Proposition 3.16.6

$$\mathcal{T}_{V,x} \cong \left(m_x / m_x^2 \right)^* \quad \mathcal{O}_{V,x} / m_x \cong k$$

(in natürlicher Weise)

Beweis Sei $I = I(V)$ das Verschwindungsideal von V in $k[X_1, \dots, X_n]$. $\mathfrak{O}_x = (0, \dots, 0)$

Dann ist $\mathcal{M} := m_x^{\mathbb{A}^n} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow m_x^V = \mathcal{M}_x / I \cap \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x / I, \text{ da } I \subseteq \mathcal{M}_x$$

Beh. 1: $m_x / m_x^2 \cong m_x^V / (m_x^V)^2$

Denn: $\mathcal{O}_{x,V} \cong k[v]_{m_x^V}$

$$m_x = m_x^V k[V] m_x^V$$

$a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Homomorphismus $\rho : m_x^V \rightarrow m_x \rightarrow m_x / m_x^2$ mit Kern $(m_x^V)^2$

ρ ist surjektiv: Sei $p = q \cdot \frac{a}{b} \in m_x$ mit $q \in m_x^V$, $a, b \in k[V]$, $b \notin m_x^V$

Ansatz: Wähle $\tilde{a} (= q \cdot \tilde{b}) \in m_x^V \Rightarrow p - \frac{\tilde{a}}{1} = q \cdot \frac{a}{b} - \frac{q \cdot \tilde{b}}{1} = q \frac{a - \tilde{b}b}{b}$

Hätte gerne: $a - \tilde{b}b \in m_x^V$

????????????????????

Beh. 2: $m_x / (m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2 + I = \mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2 + I_x$

denn: $m_x / (m_x^V)^2 \cong \mathcal{M}_x / I / (\mathcal{M}_x / I)^2$

$$\cong (\mathcal{M}_x / I) / (\mathcal{M}_x^2 / I \cap \mathcal{M}_x^2)$$

$$\cong (\mathcal{M}_x / I) / (\mathcal{M}_x^2 + I / I)$$

$$\cong \mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2 + I$$

Definiere k -lineare Abbildung: $\alpha : (m_x / m_x^2)^* \rightarrow \mathcal{T}_x$ durch $l \mapsto (l(\overline{X_1}), \dots, l(\overline{X_n})) \in k^n$

Zu zeigen: α ist wohldefiniert, d.h. $\alpha(l) \in \mathcal{T}_x$

Sei also $f \in I_x$. Zu zeigen: $f(\alpha(l)) = 0$

$$f = g_x^{(1)} \text{ für ein } g \in I$$

$$\Rightarrow f(L(l)) = \sum \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i})$$

$$= l(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(x) \overline{X_i})$$

$$= l(g_x^{(1)}) = 0 \text{ weil } g_x^{(1)} \in I_x \subseteq \mathcal{M}_x^2 + I_x$$

Umkehrabbildung:

$$\beta : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_x & \longrightarrow & (m_x / m_x^2)^* \\ (l_1, \dots, l_n) & \longmapsto & (\overline{X_i} \mapsto l_i) \end{array}$$

Wohldefiniertheit von β : Ist $\sum \lambda_i X_i \in I_x$, so ist $\sum \lambda_i l_i = 0$, da jedes Polynom in I_x auf dem Tangentialraum verschwindet, $l_i \in \mathcal{T}_x$ \square

Definition 3.16.7

- (a) Ein lokaler Ring heißt **regulär**, wenn $\dim R = \dim_{R/m}(m/m^2)$ ist.
- (b) Sei V eine Varietät. Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann nichtsingulär, wenn $\mathcal{O}_{V,x}$ ein regulärer, lokaler Ring ist.

Definition + Bemerkung 3.16.8

Sei $V = V(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät.

- (a) Für $i = 1, \dots, r$ sei

$$f_i^1 := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \cdot Y_j \in k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$$

Dann heißt

$$\mathcal{T}_V = V(f_1, \dots, f_r, f_1^1, \dots, f_r^1) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}$$

Tangentialbündel über V .

- (b) Sei $p : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten. Dann ist $p(\mathcal{T}_V) = V$.
- (c) Für jedes $x \in V$ ist $p^{-1}(x) \cong T_{V,x}$.
- (d) Ist V eine beliebige Varietät und V_1, \dots, V_m eine affine Überdeckung von V , so verkleben sich die Tangentialbündel $\mathcal{T}_{V_1}, \dots, \mathcal{T}_{V_m}$ zu einer Varietät \mathcal{T}_V , dem **Tangentialbündel** über V .

Beispiele 3.16.9

$$V = V(\underbrace{Y^2 - X^3 - X^2}_{=:f}) \quad \mathcal{T} = V(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ) \subseteq \mathbb{A}^4$$

Beh: \mathcal{T}_V hat 2 irreduzible Komponenten \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 .

Äquivalent dazu: $I := I(Y^2 - X^3 - X^2, -(2X + 3X^2)W + 2YZ)$ ist kein Primideal.

$$\underbrace{X^2(W^2(2 + 3X)^2 - 4Z^2(X + 1))}_{\notin I} =$$

$$\underbrace{(WX(2 + 3X) - 2YZ)(WX(2 + 3X) + 2YZ)}_{\in I} - \underbrace{4Z^2X^2(X + 1) + 4Z^2Y^2}_{=4Z^2 \underbrace{(Y^2 - X^2(X + 1))}_{\in I}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = V(Y^2 - X^3 - X^2, W^2(2 - 3X)^2 - 4Z^2(X + 1)) \subset \mathcal{T}_V$$

$$\mathcal{T}_2 = V(Y^2 - X^3 - X^2, X) \subset \mathcal{T}_V = V(X, Y) = \mathbb{A}^2 \text{ über dem Nullpunkt.}$$

$$\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = V(X, Y, W^2 - Z^2)$$

§17 Der singuläre Ort einer Varietät

Definition 3.17.1

Für eine Varietät V heißt

$$\text{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ ist singulärer Punkt}\}$$

der *singuläre Ort* von V .

Satz 6

Sei V eine Varietät über k . Dann ist $\text{Sing}(V)$ echte Untervarietät von V .

Beweis OE sei V affin in $\mathbb{A}^n(k)$, V irreduzibel. Sei $d = \dim V$.

Sing(V) ist abgeschlossen: Sei $V = V(f_1, \dots, f_r)$, $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, n}}$.

Dann ist $\text{Sing}(V) = \{x \in V : \text{Rg}(\mathcal{J}(x)) < n - d = d'\} =$

$\{x \in V : \det(M(x)) = 0 \text{ für alle } (d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}\} =$

$(\bigcap_{M(d' \times d')\text{-Minoren } M \text{ von } \mathcal{J}} V(\det(M))) \cap V$.

Sing(V) $\neq V$:

Fall 1: $V = V(f)$ Hyperfläche, f quadratfreies Polynom

$\Rightarrow \text{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0, j = 1, \dots, n\}$

Wäre $\text{Sing}(V) = V$, so wäre $\frac{\partial f}{\partial X_j} \in I(V) = (f)$ für $j = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0$ für $j = 1, \dots, n \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{char}(k) = 0 : & f \in k, \text{Wid!} \\ \text{char}(k) = p : & f(X_1, \dots, X_n) = g(X_1^p, \dots, X_n^p) = g^p, \text{Wid!} \end{cases}$

Fall 2 V ist beliebig. Dann folgt die Behauptung aus der folgenden Proposition. □

Proposition 3.17.2

Jede irreduzible Varietät V der Dimension d ist birational Äquivalent zu einer Hyperfläche in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

Beweis Ziel: Finde eine irreduzible Hyperfläche $W \subseteq \mathbb{A}^{d+1}(k)$ mit $k(W) \cong k(V)$. Dann folgt die Proposition aus Korollar 7.5.

Sei X_1, \dots, X_d Transzendenzbasis von $k(V)$ (Noether-Normalisierung von $k(V)$).

Dann ist $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$ endlich.

OE Sei $k(V)/k(X_1, \dots, X_d)$ einfach (falls $\text{char}(k) = p$, so gibt es eine Transzendenzbasis mit dieser Eigenschaft).

Sei $y \in k(V)$ ein primitives Element.

Sei $y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \dots + a_1y + a_0$ das Minimalpolynom.

Sei $a_i = \frac{f_i}{g_i}$ mit $f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$.

Sei $g = \prod g_i$, $W := V(g^m y^m + g^m a_{m-1} y^{m-1} + \dots + g^m a_0)$.

W ist eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$

$k[W] = k[X_1, \dots, X_d, gY]/(\dots) \Rightarrow k(W) \cong k(V)$ □

Bemerkung 3.17.3

Sei V eine Varietät, $x \in V$. Dann gilt:

$\mathcal{O}_{V,x}$ nullteilerfrei \Leftrightarrow es gibt genau eine irreduzible Komponente Z von V mit $x \in Z$.

Beweis \Leftarrow V affin. Seien $V_1 \neq V_2$ irreduzible Komponenten von V . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &\in V_1 \cap V_2 \\ \Leftrightarrow I(V_1) + I(V_2) &\subseteq m_x^V \\ \Leftrightarrow \mu_{i,x} := I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x} &\text{ ist minimales Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \ (i = 1, 2) \text{ mit } \mu_{1,x} \neq \mu_{2,x} \\ \Leftrightarrow (0) &\text{ nicht Primideal in } \mathcal{O}_{V,x} \\ \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} &\text{ nicht nullteilerfrei} \end{aligned}$$

(das vorletzte " \Leftarrow " folgt mit der Übung: $\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal in } R} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$) □

Proposition 3.17.4

Sei V eine Varietät, $x \in V$. Gibt es irreduzible Komponenten $V_1 \neq V_2$ von V mit $x \in V_1 \cap V_2$, so ist x singulärer Punkt von V .

Beweis Es genügt zu zeigen:

Proposition 3.17.5

Jeder reguläre lokale Ring R ist nullteilerfrei.

Beweis (mit Import von (1), \cdot , (3); siehe unten) Sei $d = \dim R$. Induktion über d :

$d=0$: $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$ (Nakayama)

$d=1$: $\dim(m/m^2) = 1 \Leftrightarrow R$ ist diskreter Bewertungsring, also insbesondere nullteilerfrei.

$d>1$: Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primideale von R . $\mathfrak{p}_i \neq m$, da $\dim R \geq 1$, außerdem $m \neq m^2$.

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \exists a \in m \text{ mit } a \notin \mathfrak{p}_i, i = 1, \dots, r$$

Behauptung

a ist ein Primelement in R .

Dann gibt es ein i mit $\mathfrak{p}_i \subseteq (a)$

Für jedes $b \in \mathfrak{p}_i$ gibt es also $q \in R$ mit $b = q \cdot a$

$$\Rightarrow q \in \mathfrak{p}_i, \text{ da } \mathfrak{p}_i \text{ Primideal, } a \notin \mathfrak{p}_i$$

$$\Rightarrow \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (a) \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot m$$

$$\stackrel{(Nakayama)}{\Rightarrow} \mathfrak{p}_i = 0$$

□

Beweis (der Behauptung) Zeige: $S := R/(a)$ ist regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$.

$$\text{Es ist } m_S = m/(a) \text{ und } m_S/m_S^2 = m/(a)/m^2/m^2 \cap (a) \cong m/(a)/m^2 + (a)/(a) \cong m/m^2 + (a)$$

$$\text{Da } a \notin m^2, \text{ ist } m_S/m_S^2 \subsetneq m/m^2 \Rightarrow \dim(m_S/m_S^2) \leq d-1.$$

Noch zu zeigen: $\dim S = d-1$

Sei \mathfrak{p} minimales Primideal in R , das in einer Kette der Länge d vorkommt und $R' := R/\mathfrak{p}$. Dann ist $\dim R' = \dim R = d$ und R' nullteilerfrei. Da $a \notin \mathfrak{p}$, ist $\bar{a} \neq 0$ in $R' \Rightarrow \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes minimale (Primideal \mathfrak{q} in R' mit $\bar{a} \in \mathfrak{q}$)

$$\Rightarrow \dim S = \dim R'/(\bar{a}) = \dim R'/\mathfrak{q} = d-1$$

□

Import:

- (1) Jeder noethersche Ring hat nur endlich viele minimale Primideale.
- (2) Vermeiden von Primidealen: Sei R ein Ring, $\mathfrak{p}_0 \subseteq R$ ein Ideal, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ Primideale. Ist $I \subseteq R$ Ideal mit $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i, i = 0, \dots, r$, so ist $I \not\subseteq \bigcap_{i=0}^r \mathfrak{p}_i$
- (3) Krullscher Hauptidealsatz: Sei R nullteilerfrei, noethersch, $x \in R, x \neq 0, x \notin R^\times$.
Dann hat jedes Primideal, das x enthält und minimal mit dieser Eigenschaft ist, Höhe 1.