

# 1 Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen „axiomatisch“, d.h.: Man legt in einer Definition die Eigenschaften der reellen Zahlen fest, die im folgenden verwendet werden dürfen. Ausblick:  $\mathbb{R}$  ist ein „ordnungsvollständiger, geordneter Körper“.

## 1.1 Geordnete Körper

**Definition.** Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine Abbildung  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$  ( $x, y \mapsto x * y$ ) heißt Verknüpfung auf  $M$ .

**Definition 1.1.** Seien  $K$  eine Menge,  $0 \in K$ ,  $1 \in K$  mit  $0 \neq 1$ , und „+“ und „ $\cdot$ “ Verknüpfungen auf  $K$ . Dann heißt  $(K, 0, 1, +, \cdot)$  ein *Körper*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle  $x, y, z \in K$  gelten:

a) Assoziativgesetze:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

b) neutrale Elemente:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

c) inverse Elemente:

- Zu jedem  $x \in K$  existiert ein  $a \in K$  mit  $x + a = 0$ .
- Zu jedem  $x \in K \setminus \{0\}$  existiert ein  $b \in K$  mit  $x \cdot b = 1$ .

d) Kommutativgesetze:

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

e) Distributivgesetz:

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Man schreibt oft  $K$  anstelle  $(K, 0, 1, +, \cdot)$ .

**Beispiel.** a)  $\mathbb{Q}$  mit den üblichen  $0, 1, +, \cdot$  ist ein Körper.

b)  $\mathbb{Z}$  ist kein Körper, da es kein  $b \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $2b = 1$ .

c) Weitere Beispiele in linearer Algebra und Analysis I.

*Bemerkung.* a) Wir schreiben  $-x$  für das Inverse Element von  $x \in K$  bzgl. der Addition und  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  für das Inverse Element von  $x \in K \setminus \{0\}$ . Man lässt „ $\cdot$ “ und überflüssige Klammern meist weg. Dabei gilt „ $\cdot$ “ vor „ $+$ “.

b) Die inversen Elemente sind eindeutig bestimmt (siehe LA). Man schreibt  $x - y$  statt  $x + (-y)$  und  $\frac{x}{y}$  statt  $x \cdot y^{-1}$ .

c) Es gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung (z.B.  $0 \cdot x = 0$ ,  $-(-x) = x$ , usw.) [siehe LA]. Im folgenden wird dies ohne Kommentar in Ana I verwendet.

**Definition 1.2.** Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine *Relation*  $R$  auf  $M$  ist eine Teilmenge von  $M \times M$ . Man schreibt  $x \sim_R y$  statt  $(x, y) \in R$ .

$R$  ist *Ordnungsrelation* (oder *Ordnung*), wenn gelten:

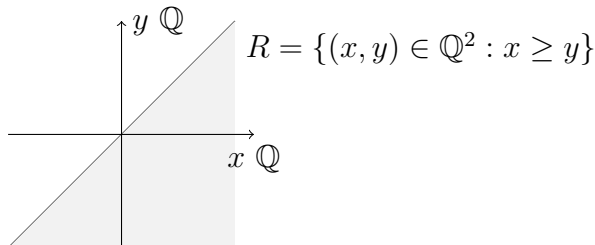
a)  $\forall x \in M : x \sim_R x$  (reflexiv).

b)  $\forall x, y, z \in M : \text{Wenn } x \sim_R y \text{ und } y \sim_R z, \text{ dann auch } x \sim_R z$  (transitiv).

c)  $\forall x, y \in M : \text{Wenn } x \sim_R y \text{ und } y \sim_R x, \text{ dann gilt } x = y$  (antisymmetrisch). Statt  $\sim_R$  schreibt man in diesem Fall meist  $\leq_R$  oder  $\geq_R$ . Eine Ordnung heißt *total*, wenn für beliebige  $x, y \in M$  stets  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt.

Man schreibt  $x < y$ , wenn  $x \leq y$  und  $x \neq y$ , sowie  $x \geq y$  statt  $y \leq x$  und  $y > x$  statt  $x < y$ .

**Beispiel.** a) Die übliche Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  erfüllt Definition 1.2 und ist total. Hier:



b) Die Relation „ $n$  teilt  $m$ “ für  $n, m \in M$  ist eine *nicht-totale* Ordnung, z.B. 2 und 3 teilen sich nicht.

**Definition 1.3.** Ein *geordneter Körper*  $K = (K, \leq)$  besteht aus einem Körper  $K$  und einer *totalen* Ordnung  $\leq$ , sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

a)  $\forall x, y, z \in K : \text{Wenn } x < y, \text{ dann } x + z < y + z$ .

b)  $\forall x, y \in K : \text{Wenn } x > 0 \text{ und } y > 0, \text{ dann gilt } xy > 0$ .

$x \in K$  heißt *positiv* (*negativ*), wenn  $x \geq 0$  ( $x \leq 0$ ).  $x \in K$  heißt *strikt positiv* (*strikt negativ*), wenn  $x > 0$  ( $x < 0$ ). Man setzt

$$K_+ = \{x \in K : x \geq 0\}, \quad K_- = \{x \in K : x \leq 0\}$$

---

Es gelten  $K_+ \cap K_- = \{0\}$  (nach Def. 1.2 3), sowie  $K_+ \cup K_- = K$  (wegen der Totalität).

**Beispiel.**  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Ordnung ist ein geordneter Körper.

**Satz 1.4.** a)  $y > x \iff y - x > 0$ .

b) a)  $x < 0 \iff -x > 0$ .

b)  $x > 0 \iff -x < 0$ .

c) Wenn  $x > 0$  und  $y < 0$ , dann  $xy < 0$ .

d) Wenn  $x \neq 0$ , dann  $x^2 = x \cdot x > 0$ . Speziell:  $1 = 1^2 > 0$ .

e) Wenn  $x > 0$ , dann  $\frac{1}{x} > 0$ .

*Beweis.* a) Sei  $y > x$ . Addiere  $-x$  zu beiden Seiten. 1.3 1 liefert  $y - x > x - x = 0$ .

Sei  $y - x > 0$ . Addiere  $x$ . 1.3 1  $\implies y = y - x + x > x$ .

b) a) Setze  $y = 0$  in 1.

b) Ergibt sich, wenn man in 2a  $x$  durch  $-x$  ersetzt.

(Beachte:  $-(-x) = x$ ).

c) Seien  $x > 0, y < 0 \xrightarrow{2} -y > 0 \xrightarrow{1.3\ 2} 0 < x \cdot (-y) = -xy \xrightarrow{2} xy < 0$ .

d) Sei  $x \neq 0$ . Nach 2 und der Totalität der Ordnung gilt entweder  $x > 0$  oder  $-x > 0$ . 4 folgt also aus 1.3 2 und  $(-x)^2 = x^2$ .

e) Sei  $x > 0$ . Ann.  $\frac{1}{x} < 0$ . Dann  $-\frac{1}{x} > 0$  (nach 2) und somit  $-1 = x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) > 0$  nach 1.3 2. Nach 4 und 2 folgt  $\frac{1}{x} > 0$ . Da  $\frac{1}{x} \neq 0$  folgt die Behauptung, da die Ordnung total ist.

□

**Definition 1.5.** Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $x \in K$ .

Dann heißt  $|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$  der Betrag von  $x$ .

**Satz 1.6.** Seien  $K$  ein geordneter Körper und  $x, y \in K$ . Dann gelten:

a)  $|x| \geq 0, |x| = 0 \iff x = 0$ .

b)  $x \leq |x|, -x \leq |x|, |x| = |-x|$ .

c)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ .

$$d) |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$e) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

*Beweis.* a) - c) folgen leicht aus Def. 1.5 und Satz 1.4.

$$d) \text{ Da } x \leq |x|, y \leq |y|, \text{ folgt } x + y \stackrel{1.3 \ 1}{\leq} |x| + y \leq |x| + |y|.$$

Ebenso:  $-(x + y) \leq |x| + |y|$ . Somit:  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

e) Übungsblatt.

□

**Definition 1.7.** Seien  $K$  ein geordneter Körper und  $a, b \in K$  mit  $a < b$ . Dann definiert man die *beschränkten Intervalle*

$$[a, b] = \{x \in K : a \leq x \leq b\}, [a, a] = \{a\} \text{ („abgeschlossen“),}$$

$$(a, b) = \{x \in K : a < x < b\} \text{ („offen“, statt } ]a, b[),$$

$$[a, b) = \{x \in K : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in K : a < x \leq b\},$$

und die *unbeschränkten Intervalle*

$$\left. \begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in K : x \geq a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in K : x \leq a\}, \end{aligned} \right\} \text{ („abgeschlossen“),}$$

$$\left. \begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in K : x > a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in K : x < a\}, \end{aligned} \right\} \text{ („offen“).}$$

**Beispiel.** Für welche  $x \in \mathbb{Q}$  gilt  $|2x - 3| + 2 > 3x - 5$ ? (\*)

*Lösung:* Betrag auflösen:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2}, \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}.$$

*Fall 1:*  $x \geq \frac{3}{2}$ . Dann:

$$(*) \iff 2x - 3 + 2 > 3x - 5 \iff 2x - 1 > 3x - 5 \stackrel{1.3 \ 1}{\iff} 4 > x.$$

Also: jedes  $x \in \left[\frac{3}{2}, 4\right)$  erfüllt (\*).

Fall 2:  $x < \frac{3}{2}$ . Dann:

$$(*) \iff 3 - 2x + 2 > 3x - 5 \xrightarrow{1.3 \ 1} 10 > 5x \xrightarrow{(\ddot{U}b)} x < 2.$$

Also: jedes  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  erfüllt (\*).

$\implies$  Lösungsmenge  $= (-\infty, 4)$ .

**Satz 1.8** (Bernoulli-Ungleichung). *Seien  $K$  ein geordneter Körper,  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

(Dabei wird  $y^n = y \cdots y$  induktiv definiert.)

*Beweis.* (per Induktion)

(IA) Beh. ist wahr für  $n = 1$ .

(IS) Beh. gelte für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

Dann:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)}_{>0, \text{ n.V. } [x > -1]} (1+x)^n \stackrel{(IV), \ddot{U}b}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \stackrel{1.3 \ 1}{\geq} 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

$\implies$  IS gilt  $\xrightarrow{\text{Ind.}} \text{Beh.}$

□

**Lemma 1.9.** *Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $a, b \in K$  mit  $a < b$ . Dann gilt*

$$a < \frac{a+b}{2} < b,$$

wobei  $2 := 1 + 1$ .

*Beweis.*  $2a = a + a \stackrel{1.3 \ 1}{<} a + b \stackrel{1.3 \ 1}{<} b + b = 2b$ . Division mit 2 liefert Beh.

□

## 1.2 Suprema und reelle Zahlen

**Definition 1.10.** Sei  $K$  geordneter Körper und  $M \subseteq K$  nichtleer.

- a)  $a \in K$  ist eine *obere (untere) Schranke* von  $M$ , wenn  $a \geq m$  ( $a \leq m$ ) für alle  $m \in M$ .  
 $M$  heißt *nach oben (unten) beschränkt*, wenn es eine obere (untere) Schranke besitzt.  
 $M$  heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und nach unten beschränkt ist. Andernfall heißt  $M$  *unbeschränkt*.

- b)  $x \in K$  heißt *Maximum* (*Minimum*) von  $M$ , wenn es eine *obere* (*untere*) Schranke von  $M$  ist und wenn  $x \in M$ . Man schreibt dann  $x = \max M$  ( $x = \min M$ ).

**Beispiel 1.11.** a) Sei  $M = (-\infty, b]$ . Dann hat  $M$  die obere Schranke  $b \in M$  gemäß Def. 1.7. Ferner hat  $M$  keine untere Schranke.

*Beweis. Ann.*  $\exists a \in K$  mit  $a \leq x \forall x \in M$ . Dann:  $a - 1 < a$  nach Satz 1.4.

$$\implies a - 1 \leq b \implies a - 1 \in (-\infty, b] \implies \text{falsch}.$$

$\implies M$  hat keine untere Schranke. □

- b) Sei  $N = (-\infty, b)$ . Dann hat  $N$  auch die obere Schranke  $b$ , aber  $b \notin N$ . *Beh.*  $N$  hat kein  $\max$ .

*Beweis. Ann.* Es gebe  $a = \max N$ . Da  $a \in N$ , folgt  $a < b$ . Somit folgt

$$a < \frac{a+b}{2} < b \text{ nach Lemma 1.9.} \implies \frac{a+b}{2} \in N \implies \text{falsch zu } a = \max N. \quad \square$$

*Bemerkung 1.12.* In Def. 1.10 hat  $M$  höchstens ein  $\max$  und höchstens ein  $\min$ .

*Beweis.* (nur für  $\max$ ): Seien  $x, y$  Maxima von  $M$ .  $\implies x \geq m \forall m \in M \implies x \geq y$ .

Genauso:  $y \geq x$ .

$$\implies x = y. \quad \square$$

**Definition 1.13.** Sei  $K$  ein geordneter Körper und  $M \subseteq K$  nichtleer.

- a) Sei  $M$  nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke von  $M$  gibt, dann heißt diese *Supremum* von  $M$  (man schreibt  $\sup M$ ).
- b) Sei  $M$  nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke von  $M$  gibt, so heißt diese *Infimum* von  $M$  ( $\inf M$ ).

**Beispiel 1.14.** Sei  $M = (-\infty, b)$ . *Beh.*  $b = \sup M$ .

*Beweis.* Nach Def. 1.7. ist  $b$  eine obere Schranke von  $M$ . *Ann.*  $x$  sei eine echt kleinere obere Schranke von  $M$ . Nach Lemma 1.9 gilt:

$$x < \frac{x+b}{2} < b \implies \frac{x+b}{2} \in M \implies \text{falsch}.$$

□

*Bemerkung 1.15.* a) Wenn es existiert, dann ist das Supremum gleich dem Minimum der oberen Schranke von  $M$ , sowie  $\inf M$  das Maximum der unteren Schranken von  $M$ .

- b) Nach 1 Bem. 1.12. besitzt also  $M$  höchstens ein  $\sup$  und höchstens ein  $\inf$ .

**Beispiel 1.16.** Seien  $K = \mathbb{Q}$ ,  $M = \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 \leq 2\}$ .

*Beh.*  $\sup M$  ex. *nicht* in  $\mathbb{Q}$ , wobei  $M$  beschränkt ist (mit oberer Schranke 2).

*Beweis.* Ann. es existiere  $s = \sup M \in \mathbb{Q}$ .

$\implies \exists$  teilerfremde  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $s = \frac{p}{q}$ . Nach Lemma 1.24 muss dann  $s^2 = 2$  gelten.

$\implies p^2 = 2q^2 \implies p^2$  gerade  $\implies p$  gerade  $\implies \exists r \in \mathbb{N} : p = 2r$

$\implies 2q^2 = 4r^2 \implies q^2 = 2r^2 \implies q$  gerade  $\implies \nexists p, q$  teilerfremd.

$\implies s$  kann nicht in  $\mathbb{Q}$  existieren.

(Beweis ohne Vorgriff: Amann/Escher Ana I. Bsp. I. 10.3.) □

*Bem.* Haben gezeigt „ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ “.

**Definition 1.17.** Ein geordneter Körper  $K$ , in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt *ordnungsvollständig*. Die *reellen Zahlen*  $\mathbb{R}$  sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.

*Bemerkung.* a)  $\mathbb{Q}$  ist nach Bsp. 1.16 nicht ordnungsvollständig.

b) Man kann  $\mathbb{R}$  mit den Eigenschaften aus Def. 1.17 mit Mitteln der Mengentheorie konstruieren (Cantor, Dedekind ~1880). Durch Def. 1.17 ist  $\mathbb{R}$  eindeutig bestimmt („bis auf einen ordnungserhaltenden Körperisomorphismus“).

Siehe:

- Ebbinghaus et al. „Zahlen“, 1992.
- E. Landau. Grundlagen der Analysis, 1934.
- Aman/Escher Thm. I.10.4.

c) Wenn man die 1 in  $\mathbb{R}$  mit der 1 in  $\mathbb{Q}$  identifiziert, dann ist  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  enthalten ( $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ), wobei für  $x, y \in \mathbb{Q}$  die Verknüpfungen  $+$ ,  $\cdot$  und die Relation  $\leq$  von  $\mathbb{R}$  mit denen von  $\mathbb{Q}$  übereinstimmen.

*Denn:* Man definiert in  $\mathbb{R}$ :  $2 := 1 + 1$ ,  $3 := 2 + 1, \dots$ . Dabei liefern  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\leq$  von  $\mathbb{R}$  auf  $1, 2, 3, \dots$  die bekannten Verknüpfungen von  $\mathbb{N}$ , z.B. gilt auch Satz 1.4:  $1 < 2 < 3 < \dots$

Damit liegt auch  $-n$  in  $\mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , für  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Der Rest der Behauptung ist leicht (aber langwierig) zu zeigen.

## Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und $\sup$ , $\inf$

**Satz 1.18.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer und nach oben (unten) beschränkt und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

a)  $s = \sup M$  ( $s = \inf M$ )

b)  $s$  ist eine obere (untere) Schranke und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s \quad (s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon)$$

*Beweis.* (Nur für sup): Sei  $B$  die Menge der oberen Schranken von  $M$ .  $1 \iff s = \min B \iff s$  ist obere Schranke von  $M$  und  $\forall \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \notin B$  (da  $s$  kleinste obere Schranke)  $\iff s$  ist obere Schranke von  $M$  und  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in M : s - \varepsilon < x_\varepsilon \iff 2 \quad \square$

**Satz 1.19.** Sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  nichtleer. Dann existiert  $\min M$ .

*Beweis.* Da  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  und 1 eine untere Schranke von  $\mathbb{N}$  ist, existiert  $x = \inf M$ . Nach Satz 1.18 mit  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  existiert ein  $m_0 \in M$  mit  $x \leq m_0 < x + \frac{1}{3} \leq m + \frac{1}{3}$  für alle  $m \in M$ . Für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \neq m_0$  gilt  $|m - m_0| \geq 1$ . Also gilt  $m_0 \leq m$  für alle  $m \in M \implies m_0 = \min M$ .  $\square$

**Satz 1.20.** a)  $\mathbb{R}$  ist „archimedisch geordnet“, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n_x \in \mathbb{N} : n_x > x$

b)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ .

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Wenn  $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann  $x = 0$ .

*Beweis.* a) Annahme: Die Behauptung sei falsch, d.h.  $\exists x_0 \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x_0$ . Somit existiert  $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Nach Satz 1.18 mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  existiert dann  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$s - \frac{1}{2} < m \xrightarrow{+1} s < s + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Da  $m + 1 \in \mathbb{N}$ , kann  $s$  kein Supremum sein.  $\nexists \implies 1$  gilt.

b) Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze  $x = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ . Nach 1 existiert  $n_x \in \mathbb{N}$  mit  $n_x > x = \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon > \frac{1}{n_x} \implies$  Beh. 2 mit  $n_\varepsilon = n_x$ .

c) folgt direkt aus 2.  $\square$

**Definition.** Seien  $M, N$  nichtleere Mengen. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt *injektiv*, wenn  $\forall x, y \in M$  mit  $x \neq y : f(x) \neq f(y)$ . Sie heißt *surjektiv*, wenn  $\forall z \in N \exists x \in M$  mit  $f(x) = z$ .  $f$  heißt *bijektiv*, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist, d.h.  $\forall z \in N \exists! x \in M$  mit  $f(x) = z$ . Für bijektive  $f : M \rightarrow N$  definiert man die Umkehrabbildung  $f^{-1} : N \rightarrow M$  durch  $f^{-1}(z) = x$ , wenn  $f(x) = z, z \in N$ .

**Definition 1.21.** Zwei Mengen  $M, N$  heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow N$  gibt.  $M$  hat die Mächtigkeit (Kardinalität)  $n \in \mathbb{N}$ , wenn  $M$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  gleichmächtig sind. Wenn dies für kein  $n \in \mathbb{N}$  der Fall ist, so ist  $M$  unendlich. Man schreibt dann  $\#M = n$  bzw.  $\#M = \infty$ .

**Beispiel.** Sei  $M = \{A, B, C\}$ . Dann ist  $f : M \rightarrow \{1, 2, 3\}$  mit  $f(A) = 1, f(B) = 3, f(C) = 2$  eine bijektive Abbildung  $\implies \#M = 3$ .



**Beachte:** Wenn  $\#M = n$ , dann gilt  $M = x_1, \dots, x_j$ , wobei  $x_j := f^{-1}(j)$  mit  $f$  aus Def. 1.21 und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Wenn  $M$  und  $N$  gleichmächtig sind, dann  $\#M = \#N$ , da die Verkettung bijektiver Abbildungen bijektiv ist.

*Bemerkung.* Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

**Satz 1.22.** a) Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = \infty$ . Speziell  $\#\mathbb{N} = \infty$

b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > a$ . Dann  $\#\{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\} = \infty$

*Beweis.* a) Annahme:  $\#\{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = n$ . Dann  $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  mit  $M := \{j \in \mathbb{N} : j \geq m\} = x_1, \dots, x_n$ . Dann  $y = x_1 + \dots + x_n + 1 \in \mathbb{N}$  und

$$y > \begin{cases} m & \implies y \in M \\ x_j, j \in \{1, \dots, n\} & \implies y \notin M \end{cases} \implies \text{↯}.$$

b) Zuerst konstruiert man ein  $q \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ . Nach Satz 1.20  $\exists n \in \mathbb{N} : b - a > \frac{1}{n} > 0$ , also

$$nb > 1 + na \quad (*)$$

Sei  $a \geq 0$ . Dann existiert nach Satz 1.20 und Satz 1.19 ein minimales  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > na$ . Sei  $a < 0$ . Dann erhält man genauso ein minimales  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l \geq -na$ , also  $-l \leq an$ . Somit liegt

$$m := \begin{cases} k & , a \geq 0 \\ 1 - l & , a < 0 \end{cases}$$

in  $\mathbb{Z}$  und  $na < m \leq an + 1 \stackrel{(*)}{<} nb \implies a < \frac{m}{n} < b$ ,  $q := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ . Nach Satz 1.20  $\exists j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $b - q > \frac{1}{j_0} > 0$ . Sei  $j \in J := \{k \in \mathbb{N} : k \geq j_0\} \implies q + \frac{1}{j} \in \mathbb{Q}$  und  $a < q + \frac{1}{j} \leq q + \frac{1}{j_0} < b$ ,  $\forall j \in J$ . Die Menge  $M = \{q + \frac{1}{j}, j \in J\}$  ist nach 1 unendlich da  $f : J \rightarrow M, f(j) = q + \frac{1}{j}$  bijektiv ist.

□

**Definition.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Dann setzt man

$$A + B := \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a + b\}$$

$$A \cdot B := \{x : \exists a \in A, b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}$$

$$\text{speziell: } y + B = \{y\} + B = \{x = y + b, b \in B\}$$

$$y \cdot B = \{y\} \cdot B = \{x = y \cdot b, b \in B\}$$

**Beispiel.**  $[0; 1] + [2; 3] = [2; 4]$

*Beweis.* „ $\subseteq$ “ ist klar. „ $\supseteq$ “ Sei  $x \in [2; 3]$ .

Wenn  $x \in [2; 3]$ , dann wähle  $a = x - 2 \in [0; 1]$  und  $b = 2$

Wenn  $x \in [3; 4]$ , dann wähle  $a = x - 3 \in [0; 1]$  und  $b = 3$

In beiden Fällen:  $a + b = x$

□

**Satz 1.23.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer.

a) Seien  $A$  und  $B$  nach oben beschränkt. Dann:

a) Wenn  $A \subseteq B$ , dann  $\sup A \leq \sup B$

b)  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c) Wenn  $A, B \subseteq (0, \infty)$ , dann  $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

b) Seien  $A$  und  $B$  nach unten beschränkt. Dann gelten 1b und 1a von 1) auch für das Infimum. Weiter gelten:

a')  $A \subseteq B \implies \inf A \geq \inf B$

d)  $-A$  ist nach oben beschränkt und  $\inf A = -\sup(-A)$ , wobei  $-A := (-1) \cdot A$ .

*Beweis.* a) Sei  $A \subseteq B$ . Wenn  $z$  eine obere Schranke von  $B$  ist, dann auch von  $A$ .  $\implies$  Beh. 1a.

b) Seien  $x = \sup A$  und  $y = \sup B$ . Dann  $x + y \geq a + b \forall a \in A, b \in B \implies x + y$  ist obere Schranke von  $A + B$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben (fest aber beliebig). Setze  $\eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ . Satz 1.18 liefert  $a_\eta \in A$  und  $b_\eta \in B$  mit  $x - \eta < a_\eta \leq x$  bzw.  $y - \eta < b_\eta \leq y \implies x + y - \underbrace{2\eta}_{\varepsilon} < \underbrace{a_\eta + b_\eta}_{\in A+B} \leq x + y \xrightarrow{1.18} \text{Beh. 1b (Rest in \text{Übungen}).}$

□

## Potenzen mit rationalen Exponenten

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b > 0$ ,  $r = \frac{m}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  gegeben.

*Ziel:* Definiere  $a^{\frac{m}{n}}$  und zeige Potenzgesetze. Vorausgesetzt wird dabei der Fall

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ mal}} & \text{für } m > 0 \\ 1 & \text{für } m = 0 \\ \frac{1}{a^{|m|}} & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

Wir verwenden (wobei  $a, b > 0$ )

$$a < b \iff a^n < b^n \quad (1.1)$$

*Beweis.* „ $\implies$ “  $a < b \implies a^2 < ab$  und  $ab < b^2$  induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

„ $\impliedby$ “ Sei  $a^n < b^n$ . Annahme:  $a \geq b \xrightarrow{\text{wie oben}} a^n \geq b^n \implies \text{↯}$

*Hauptschritt:* Fall  $m = 1$ . Sei  $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\}$ . Dann

a)  $M \neq \emptyset$ , da  $0 \in M$

- b)  $M$  hat obere Schranke  $1 + a$ , denn Annahme:  $1 + a$  hat keine obere Schranke:  
 $x > 1 + a$  für  $x \in M \xRightarrow{(1.1)} x^n \geq (1 + a)^n \geq (1 + a) \cdot 1^{n-1} > a \nless$

□

$$\text{Def. 1.17} \implies \exists w = \sup M \quad (1.2)$$

**Lemma 1.24.**  $w$  ist die einzige positive reelle Lösung der Gleichung  $y^n = a$ .

*Beweis.* a) Annahme:  $w^n < a$ . Sei  $\varepsilon \in (0; 1]$ . Dann  $(w + \varepsilon)^n \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j}$

$$= w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \underbrace{w^j}_{\geq 0} \underbrace{\varepsilon^{n-j-1}}_{\leq 1} \leq w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j \stackrel{\text{Bsp. 0.3}}{=} w^n + \varepsilon(1 + w)^n.$$

$$\text{Wähle speziell } \varepsilon = \min \left\{ 1, \frac{a - w^n}{(1 + w)^n} \right\} \in (0; 1]$$

$$\implies (w + \varepsilon)^n \leq w^n + \frac{a - w^n}{(1 + w)^n} (1 + w)^n = a$$

$$\implies w + \varepsilon \in M \implies \nless \text{ zu } w = \sup M \implies w^n \geq a.$$

- b) Ähnlich sieht man  $w^n \leq a \implies w^n = a$

- c) Es gelte  $v^n = a$  für ein  $v \in \mathbb{R}_+$ . Wenn  $v < (>) w$ , dann  $v^n < (>) w^n$  nach (1.1)  
 $\implies \nless \text{ zu } v^n = a = w^n \implies v = w$

□

**Folgerung.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $y = \sqrt{x^2}$  die einzige positive Lösung von  $y^2 = x^2$ . Weitere Lösung ist  $|x|$

$$\xRightarrow{\text{Eind.}} \sqrt{x^2} = |x| \quad (1.3)$$

**Definition 1.25.** Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $q = \frac{m}{n}$ ,  $w$  wie in (1.2). Dann setzen wir  $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} := w$  und  $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$

**Satz 1.26.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ ,  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Dann gelten:

$$a) a^p b^p = (ab)^p$$

$$b) a^p a^q = a^{p+q}$$

$$c) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$d) a > b > 0 \implies \begin{cases} a^p > b^p, & p > 0 \\ a^p < b^p, & p < 0 \end{cases}$$

*Beweis.* a) Seien  $a, b > 0$ ,  $p = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Zu zeigen:  $a^p b^p = (ab)^p$  Dann:  
 $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \cdots}_{n\text{-mal}} = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{1.24}{=} ab \stackrel{1.24}{\implies} a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ .  $n$ -te Potenz liefert  
 Beh. 1. b), c) gehen so ähnlich.

b) Sei  $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  mit  $a > b > 0$ . Zu zeigen:  $\begin{cases} p > 0 & \implies a^p > b^p \\ p < 0 & \implies a^p < b^p \end{cases}$

Annahme:  $a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $a \stackrel{\text{Def.}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{1.1}{\leq} (b^{\frac{1}{n}})^n \stackrel{\text{Def.}}{=} b^{\frac{1}{n}} \implies a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$   $n$ -te Potenz, 1.1, Übung 2.5, 1 für  $m < 0$  liefern 4

□

## 1.3 Komplexe Zahlen

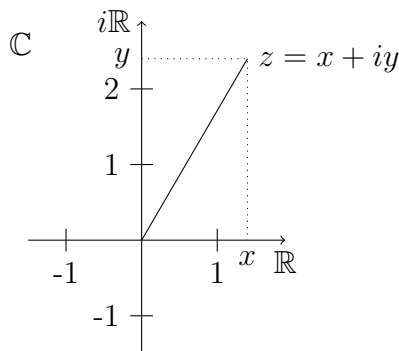
Ausgangspunkt: Löse  $x^2 = -1$  Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung keine Lösung in einem geordneten Körper, insbesondere keine Lösung in  $\mathbb{R}$ . Idee: Konstruiere einen nicht geordneten Körper, der  $\mathbb{R}$  enthält und in dem  $x^2 = -1$  lösbar ist.

**Ansatz.** Auf  $\mathbb{R}^2$  gibt es (Vektor-)addition:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}$

Def.:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

Bsp.:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Neue Bezeichnungen: 1 statt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $i$  statt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x + iy = z$  statt  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  (also  $i^2 = -1$ )



**Definition.**  $\mathbb{C} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$  Fasse  $\mathbb{R} = \{z = x + i \cdot 0 = x, x \in \mathbb{R}\}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf.

Seien  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  für  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ . Dann setzt man

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot w := (xu - yr) + i(yu + xv) \in \mathbb{C}$$

**Beachte.** Auf der rechten Seite der obigen Definition stehen in den Klammern nur reelle Ausdrücke, die somit wohldefiniert sind. Falls  $z = x \in \mathbb{R}$  und  $w = u \in \mathbb{R}$ , so erhält man wieder die reellen  $+$ ,  $-$  Lineare Algebra:  $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$  ist ein Körper.

**Definition 1.27.** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $x$  der Realteil von  $z$ ,  $y$  der Imaginärteil von  $z$ ,  $|z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{x^2 + y^2}$  der Betrag von  $z$  und  $\bar{z} := x - iy$  das konjugiert Komplexe von  $z$ . Man schreibt  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$ .

*Bemerkung.* Für  $z = x \in \mathbb{R}$  gilt  $|x|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} \stackrel{??}{=} |x|_{\mathbb{R}}$ . Somit schreiben wir  $|z|$  statt  $|z|_{\mathbb{C}}$  für  $z \in \mathbb{C}$ .

Sei  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ . Dann ist  $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$  die offene Kreisscheibe in  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und Radius  $r$ ,  $\bar{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$  die abgeschlossene Kreisscheibe,  $s(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$  die Kreislinie.

Ferner: Sei  $z = x \in \mathbb{R}$ . Dann  $B(x, r) \cap \mathbb{R} = \{x - r, x + r\}$ .

**Satz 1.28.** Für  $w, z \in \mathbb{C}$  gelten:

$$a) \quad \bar{\bar{z}} = z, |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (\implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0)$$

$$b) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$c) \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

$$d) \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |\bar{z}| = |z|$$

$$e) \quad |z| \geq 0, z = 0 \iff |z| = 0$$

$$f) \quad |zw| = |z| \cdot |w|$$

$$g) \quad |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$h) \quad |z - w| \geq ||z| - |w||$$

*Beweis.* Seien  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  für  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ .

$$a1) \quad \bar{\bar{z}} = \overline{x + i(-y)} = x - i(-y) = z$$

$$a2) \quad z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

b1) ist klar

$$b2) \quad \overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu) = xu - yv - ixv - iyu = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}$$

$$c1) \quad z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \iff \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x$$

c2) genauso

$$\text{d1) } |\operatorname{Re} z| = |x| \stackrel{??}{=} \sqrt{x^2} \stackrel{1.26}{\leq} \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

d2) genauso

$$\text{d3) } |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$$

e1) klar

$$\text{e2) } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0, y = 0$$

$$\text{f) } |zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

$$\text{g) } |z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + \underbrace{z\bar{w} + \overline{zw}}_{=2 \operatorname{Re}(z\bar{w})} + |w|^2 \leq$$

$$|z|^2 + 2 \underbrace{|z\bar{w}|}_{|z| \cdot |w|} + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \stackrel{\sqrt{\cdot}}{\implies} \text{Beh.}$$

□