

## 6. Konvergente Folgen

### Definition (Umgebung)

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ :  $U_\varepsilon(a) : \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$  heißt  $\varepsilon$ -**Umgebung** von  $a$ .

$$x \in U_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Also gilt:  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

### Definition („für fast alle“)

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gemacht.  $A(n)$  gilt **für fast alle** (ffa)  $n \in \mathbb{N} \iff \exists m \in \mathbb{N}$  so dass  $A(n)$  wahr ist für alle  $n \geq m$ . Ein Beispiel ist  $n^2 \geq n + 17$  gilt ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

**Vereinbarung:** Alle vorkommenden Folgen seien Folgen in  $\mathbb{R}$ .

### Definition (Beschränkte Folgen)

$(a_n)$  heißt beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*) :  $\iff \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  ist beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*).

Ist  $(a_n)$  nach oben beschränkt, so setze

$$\sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Ist  $(a_n)$  nach unten beschränkt, so setze

$$\inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

**Beachte:**  $(a_n)$  ist beschränkt  $\iff \exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Definition (Konvergente Folge)

Sei  $(a_n)$  eine Folge.  $(a_n)$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}$ , so dass es für *jedes*  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$  gilt. In diesem Fall heißt  $a$  der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$  und man schreibt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  oder  $\lim a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) oder  $a_n \rightarrow a$ . Ist  $(a_n)$  nicht konvergent, so heißt  $(a_n)$  **divergent**.

$$\begin{aligned} \text{Also: } a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

### Satz 6.1 (Grenzwert und Beschränktheit konvergenter Folgen)

$(a_n)$  sei konvergent.

- (1) Dann ist der Grenzwert von  $(a_n)$  eindeutig bestimmt.
- (2)  $(a_n)$  ist beschränkt.

**Beweis**

(1) Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$ .

**Annahme:**  $a \neq b$ , etwa  $a < b$ .

$\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$ . Dann  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$  (\*)

$a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \rightarrow b \implies a_n \in U_\varepsilon(b)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zu (\*), also  $a = b$ .

(2) Sei  $a := \lim(a_n)$ . Zu  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq n_0$ . Dann:  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| =: c_1 \ \forall n \geq n_0$ .  $c_2 := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$ ,  $c := \max\{c_1, c_2\}$ . Dann:  $|a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Bemerkung (Endlich viele Elemente sind egal):** Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen und gilt  $a_n = b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $(a_n)$  konvergent  $\iff (b_n)$  konvergent. Im Konvergenzfall:  $\lim(a_n) = \lim(b_n)$ .

**Beispiele:**

(1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $a_n = c$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:  $|a_n - c| = 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\lim a_n = c$ .

(2)  $a_n = \frac{1}{n}$ . Behauptung:  $a_n \rightarrow 0$  (**Nullfolge**). Beweis: Sei  $\varepsilon > 0$ . 2.1(4)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0 : |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ .

(3)  $a_n = n$ . 2.1(3)  $\implies (a_n)$  ist nicht beschränkt.  $\xrightarrow{6.1(2)} (a_n)$  ist divergent.

(4)  $a_n = (-1)^n$ , also  $(a_n) = (-1, 1, -1, \dots)$   $|a_n| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n$  ist beschränkt. Annahme:  $(a_n)$  ist konvergent. Sei  $a := \lim a_n$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \ \forall n \geq n_0$ . Dann:  $2 = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |a_{n_0} - a + a - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  Widerspruch! Also:  $(a_n)$  ist divergent.

(5)  $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ . Behauptung:  $a_n \rightarrow 1$ .  $|a_n - 1| = |\frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1}| = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Bsp(2)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \implies |a_n - 1| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ .

(6)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .  $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . D.h.  $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . 2.1(4)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . Sei  $n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . D.h.  $a_n \rightarrow 0$ .

**Bemerkung:** Sei  $p \in \mathbb{Z}$  fest. Eine Funktion  $a : \{p, p+1, p+2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt ebenfalls Folge in  $\mathbb{R}$ . Schreibweise:  $a = (a_n)_{n \geq p} = (a_n)_{n=p}^\infty$ . Beispiele:  $(a_n)_{n=0}^\infty$ ,  $(a_n)_{n=-1}^\infty = (a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$

**Satz 6.2 (Konvergenzsätze)**

$(a_n), (b_n), (c_n)$  seien Folgen in  $\mathbb{R}$ .

(1)  $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \iff |a_n - a| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

(2) Sei  $a \in \mathbb{R}$  und es gelte  $|a_n - a| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $b_n \rightarrow 0$ . Dann:  $a_n \rightarrow a$ .

(3) Es gelte  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ .

(i) gilt  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$

(ii) gilt  $a = b$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies c_n \rightarrow a$ .

- (iii)  $|a_n| \rightarrow |a|$
- (iv)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- (v)  $\alpha a_n \rightarrow \alpha a \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (vi)  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- (vii) Ist  $b \neq 0$ , so existiert ein  $m \in \mathbb{N}$ :  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq m$  und die Folge  $(\frac{1}{b_n})_{n \geq m}$  konvergiert gegen  $\frac{1}{b}$

### Beweis

- (1) folgt aus der Definition der Konvergenz
- (2)  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $|a_n - a| \leq b_n \quad \forall n > m$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ :  $b_n \leq \varepsilon \quad \forall n > n_1$ .  $m_0 := \max\{m, n_1\}$ .  
Dann:  $|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$ .
- (3)
  - (i) Annahme:  $b < a$ .  $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ .  $a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_n > a - \varepsilon$   
 $\text{ffa } n \in \mathbb{N}. b_n \rightarrow b \implies b_n \in U_\varepsilon(b) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies b_n < b + \varepsilon \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies$   
 $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zur Voraussetzung  $\implies a_n < b_n$   
 $\text{ffa } n \in \mathbb{N}$ .
  - (ii) Sei  $\varepsilon > 0$ .  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \implies a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies c_n \in$   
 $U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$ .
  - (iii)  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \implies |a_n| \rightarrow |a|$
  - (iv) Zur Übung
  - (v) Zur Übung
  - (vi)  $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$ .  
 6.1(2)  $\implies \exists c > 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |a_n b_n - ab| \leq c \cdot |b_n - b| + |b| |a_n - a| =: \alpha_n$ .  
**(iv),(v)**  $\implies \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} a_n b_n \rightarrow ab$ .
  - (vii) (iii)  $\implies |b_n| \rightarrow b \implies |b| > 0$ .  $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$ ;  $|b_n| \rightarrow |b| \implies |b_n| \in U_\varepsilon(|b|) \quad \text{ffa } n \in$   
 $\mathbb{N} \implies |b_n| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}: b_n \neq 0 \quad \forall n > m$ . Für  $n > m$ :  $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| =$   
 $|\frac{b-b_n}{b_n \cdot b}| = \frac{|b-b_n|}{|b_n| |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| =: \beta_n. \beta_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . ■

### Beispiel

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 - 3n + 8} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

### Definition (Monotonie)

- $(a_n)$  heißt **monoton wachsend** :  $\iff a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **streng monoton wachsend** :  $\iff a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

## 6. Konvergente Folgen

- $(a_n)$  heißt **monoton fallend** :  $\iff a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **streng monoton fallend** :  $\iff a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **monoton** :  $\iff (a_n)$  ist monoton wachsend oder fallend.
- $(a_n)$  heißt **streng monoton** :  $\iff (a_n)$  ist streng monoton wachsend oder fallend.

### Satz 6.3 (Monotoniekriterium)

$(a_n)$  sei monoton wachsend (*fallend*) und sei nach oben (*unten*) beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n \ (\inf_{n=1}^{\infty} a_n)$ .

### Beweis

$a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$ .  $a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $\{a_1, a_2, \dots\} \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Für  $n > n_0$ :  $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ . ■

### Beispiel

$$\begin{aligned} a_1 &:= \sqrt[3]{6}, a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n} \ (n \in \mathbb{N}) \\ a_2 &:= \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1 \text{ (wegen Satz 5.1 (1))} \\ a_3 &:= \sqrt[3]{6 + a_2} > \sqrt[3]{6 + a_1} = a_2 \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

### Beweis

$n = 1$ : s.o.

$$n \longrightarrow n+1: a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} \stackrel{\text{IV}}{>} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}. \quad \blacksquare$$

Also:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{6} < 2 \\ a_2 &= \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $a_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

### Beweis

$n = 1$ : s.o.

$$n \longrightarrow n+1: a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2. \quad \blacksquare$$

Also:  $(a_n)$  ist nach oben beschränkt. Aus 6.3 folgt:  $(a_n)$  ist konvergent.

$$\begin{aligned} a &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ a_{n+1} &= \sqrt[3]{6 + a_n} \implies a_{n+1}^3 = 6 + a_n \implies a^3 = 6 + a \\ \implies 0 &= a^3 - a - 6 = (a-2)(a^2 + 2a + 3) = (a-2) \underbrace{((a+1)^2 + 2)}_{>0} \implies a = 2 \end{aligned}$$