

## 4. Geodätische Linien

Gegeben ist eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Levi-Civita-Zusammenhang  $D$ . Das Ziel ist es, ein Analogon für Geraden zu finden. Mögliche Charakterisierung von Geraden in der Euklidischen Geometrie sind:

- kürzeste Verbindung zweier Punkte (Variationseigenschaft).
- Kurven  $c(t)$  (mit Bogenlänge parametrisiert) mit  $c''(t) = 0$  (Differentialgleichung).

### 4.1. Definition von Geodätischen

Eine Geodätische (Linie) in  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist eine differenzierbare Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  so dass gilt:  $D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . (Das heißt: Geodätische sind autoparallele Vektorfelder).

Das Tangentialvektorfeld ist parallel.  $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} := d\gamma(\frac{\partial}{\partial t})$ .

Folgerungen aus der Definition:

- (1)  $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$  ist konstant.

**Beweis**

$$\|\gamma'\|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle. \text{ Also } \frac{d}{dt} \|\gamma'\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle + \langle \gamma', D_{\gamma'}\gamma' \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Ein (entarteter) Spezialfall ist  $\gamma(t)$  konstant  $p \in M$ .

- (2) Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert:

$$s(\gamma) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = k|t - a|$$

Ist  $k = 1$  so spricht man von einer normalen Geodätischen sowie von isometrischen Kopien von Intervallen.

- (3) Ob eine Kurve eine „Geodätische“ ist hängt von der Parametrisierung ab, nicht nur vom Bild  $\gamma(I) \subset M$ .

**Beispiel**

$\gamma_1(t) = (t, 0)$  ist eine Geodätische, aber  $\gamma_2(t) = (t^3, 0)$  nicht, da  $\|\gamma_2'\| = 3t^2$  nicht konstant ist.

### 4.2. Lokale Darstellung und Differentialgleichung für Geodätische

Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodätische in  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $\gamma(t_0)$  mit  $\varphi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ .

#### 4. Geodätische Linien

Dann ist  $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ . Die allgemeine Formel für Parallelfelder im lokalen Koordinaten (vgl 3.2) ergibt:

$$0 = D_{\gamma'} \gamma' = \sum_{k=1}^n \left( x''^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'^i x'^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

lokal gilt also:  $D_{\gamma'} \gamma' = 0$  ist äquivalent zu dem System von  $n$  Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''^k(t) = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t)) x'^i(t) x'^j(t) \quad (1)$$

### 4.3. Das Geodätische Vektorfeld auf $TM$

Das System 2. Ordnung (1) ist äquivalent zu System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x'^k &= y^k \\ y'^k &= - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x(t)) y^i(t) y^j(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Was ist die Interpretation der von  $y^i$  in der Mannigfaltigkeit? Die Geodätische  $t \mapsto \gamma(t)$  in  $M$  definiert differenzierbare Kurve  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$  in  $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$ . Lokale Koordinaten für  $TM$ : Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte in  $M$ ,  $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$  (nach Basissatz). Dies ergibt eine Darstellung von  $(p, v)$  als  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  mit  $v = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Speziell gilt  $(\gamma(t), \gamma'(t)) \rightarrow (x^1(t), \dots, x^n(t), x'^1(t), \dots, x'^n(t))$ .

#### Lemma 4.1

Es existiert genau ein Vektorfeld  $G \in \mathcal{V}(TM)$  auf  $TM$  dessen Integralkurven (vergleiche 1.7) von der Form  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$  sind, wobei  $\gamma(t)$  jeweils eine Geodätische in  $M$  ist.

#### Beweis

- (a) Eindeutigkeit (unter der Annahme der Existenz): Die Integralkurven von  $G$  auf  $TU$  sind nach Voraussetzung gegeben durch  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ . Diese Kurve ist aber Lösung von (2), also zu gegebener Anfangsbedingung eindeutig:

$$\tilde{G}(\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{\gamma}'(t) = G(\tilde{\gamma}(t))$$

- (b) Existenz: Wir definieren die Komponenten von  $G$  bezüglich Basisfelder lokal durch (2). Wegen (a) ist  $G$  auf ganz  $TM$  eindeutig. ■

#### Definition

$G$  heißt geodätisches Vektorfeld auf  $M$ . ( $G(p, v) \in T_{(p,v)}(TM) \subset T(TM)$ )

**Satz 4.1 (Lokale Integralkurve)**

Für jede Karte  $U$  und  $p \in M$  existiert ein offenes  $O \in TM$  mit  $(p, o) \in O$  eine Zahl  $\delta = \delta(p)$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : (-\delta, \delta) \times O \rightarrow TU \subset TM$ , so dass  $t \mapsto f(t, (q, v))$  die eindeutige Integralkurve von  $G$  ist mit  $f(0, (q, v)) = (q, v)$  für alle  $(q, v) \in O$ .

**Beweis**

Nach 1.7 gilt lokal, dass Integralkurven von Vektorfeldern den Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichung entspricht. Die Existenz und Eindeutigkeit im Satz 4.1 folgt dann aus dem entsprechenden Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Differentialgleichungssystems zu gegebenen Anfangsbedingungen.

Dass  $f$  differenzierbar ist folgt aus der Tatsache, dass Lösungen von Differentialgleichungen (gewöhnlich, 1. Ordnung) differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängen (vergleiche zum Beispiel Arnold, „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, Gromoll-Klingenberg-Meyer, „Differentialgleichungen im Großen“, S.275)

Sei  $\pi : TM \rightarrow M; (q, v) \mapsto q$  die kanonische Projektion. Die offene Menge  $O \subset TM$  im Satz kann man wie folgt wählen: Es existiert ein  $V \subset U$  (offene Umgebung von  $p$ ) und  $\varepsilon_1 > 0$ , so dass  $O = \{(q, v) \in TU \cong U \times \mathbb{R}^n \mid q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon_1\}$  ■

Aus Satz 4.1 folgt dann:

**Satz 4.2 (Lokale Geodätische)**

Zu  $p \in M$  und einer Karte  $U$  um  $p$  existiert eine offene Menge  $V$  von  $p$ , Zahlen  $\delta = \delta(p) < 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $\gamma := \pi \circ f : (-\delta, \delta) \times O \rightarrow M$  (mit  $O$  definiert wie oben), so dass die Kurve  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$  die eindeutige Geodätische in  $M$  ist mit  $\gamma(0, q, v) = q$  und  $\gamma'(0) = v$ .

## 4.4. Die Exponential-Abbildung

**Lemma 4.2 (Homogenität von Geodätischen)**

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Falls die Geodätische  $\gamma(t, q, v)$  auf  $(-\delta, \delta)$  definiert ist, so ist die Geodätische  $\gamma(t, q, a \cdot v)$  auf  $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$  definiert und es gilt  $\gamma(t, q, a \cdot v) = \gamma(a \cdot t, q, v)$ .

**Beweis**

Betrachte die Kurve  $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M; t \mapsto \gamma(at, q, v)$ . Es gilt:  $h(0) = \gamma(0, q, v) = q$  sowie  $h'(0) = \frac{d}{dt}\gamma(at, q, v)|_{t_0} = a\gamma'(0, q, v) = av$ . Weiter ist  $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$ , also  $D_{h'}h' = D_{a\gamma'}a\gamma' = a^2 D_{\gamma'}\gamma' = a^2 \cdot 0 = 0$ .

Das heißt:  $h$  ist eine Geodätische mit  $h(0) = q$ ,  $h'(0) = av$ . Aus der Eindeutigkeit von Geodätischen (Satz 4.2) folgt, dass  $\gamma(at, q, v) = h(t) = \gamma(t, q, av)$ . ■

#### 4. Geodätische Linien

Nach Satz 4.2 ist (für  $q \in V = V(p)$ )  $\gamma(t, q, v)$  definiert für  $|t| < \delta = \delta(p)$  und  $\|v\| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(p)$ . Mit Lemma 4.2 folgt jetzt, dass  $\gamma(t, q, \frac{\delta}{2}v)$  für  $|t| < 2$  definiert ist. Dann ist die Geodätische  $\gamma(t, q, w)$  definiert für  $q \in V$ ,  $|t| < 2$  und  $w \in T_q M$ ,  $\|w\| < \varepsilon$ . Damit ist gezeigt:

##### Satz 4.3

Für jeden Punkt  $p \in M$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$  und eine differenzierbare Abbildung:

$$\gamma : (-2, 2) \times \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in T_q M, \|v\| < \varepsilon\}$$

so dass für ein festes  $(q, v)$  die Abbildung  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$  die eindeutige Geodätische in  $M$  ist mit Anfangsbedingung  $\gamma(0, q, v) = q$ ,  $\gamma'(0, q, v) = v$ .

Sei  $p \in M$  und  $O$  wie in Satz 4.3.

##### Definition

Die Exponential-Abbildung (auf  $O$ ) ist:

$$\begin{aligned} \exp : O \subset TM &\rightarrow M \\ \exp(q, v) &:= \gamma(1, q, v) \\ &= \gamma(1, q, \|v\| \frac{v}{\|v\|}) \\ &= \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}) \end{aligned}$$

**Bemerkungen:** (1)  $\exp$  ist differenzierbar, da  $\gamma$  differenzierbar ist (vergleiche Satz 4.2)

(2) Meistens benutzt man die Einschränkung von  $\exp$  auf *einen* Tangentialraum:

$$\exp_p := \exp(p, \cdot) : B_\varepsilon(0) (\subset TM) \rightarrow M$$

Wobei  $B_\varepsilon(0)$  ein offener Ball mit Radius  $\varepsilon$  und 0 ist.

##### Satz 4.4

Für jeden Punkt  $p$  einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert ein  $r = r(p) > 0$ , so dass die Abbildung  $\exp_p : B_r(0) \subset T_p M \rightarrow \exp_p(B_r(0)) \subset M$  (mit  $B_r(0) := \{v \in T_p M \mid \|v\| < r\}$ ) ein Diffeomorphismus auf die offene Umgebung  $V := \exp_p(B_r(0))$  von  $p$  ist.

##### Beweis

Wir benutzen den Umkehrsatz für Mannigfaltigkeit (Satz 1.2). Zu zeigen ist:  $d \exp_p|_0 : T_p(B_r(0)) \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p(0)} M = T_p M$  ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Wähle dazu die Kurve  $c(t) = tv$  (mit  $c(0) = 0$ ,  $c'(0) = v$ ). Dann ist:  $d \exp_p|_0(v) = \frac{d}{dt}|_0(\exp_p \circ c)(t) = \frac{d}{dt}|_0 \exp_p(tv) = \frac{d}{dt}|_0 \gamma(1, p, tv) = \frac{d}{dt}|_0 \gamma(t, p, v) = v$ . Also ist  $d \exp_p|_0 = \text{id}$ , und damit ein Vektorraum-Isomorphismus. ■

**Definition**

Eine geodätische Normalumgebung von  $p \in M$  ist eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $\exp_p : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist.

$B_r(p) := \exp_p(B_r(0))$  heißt geodätischer Ball vom Radius  $r$ .

Die Koordinatenfunktionen der Karte  $\exp_p^{-1} : U = \exp_p(V) \rightarrow V \overset{\circ}{\subset} T_p M \cong \mathbb{R}^n$  heißen geodätische Normalkoordinaten.

**Beispiele**

- (1) Im  $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt sind die Geodätischen gerade die Geraden (mit Bogenlänge parametrisiert). Also, da  $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ,  $\exp_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die Identität.
- (2) In  $M = S^n$  mit der von  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik sind die Geodätischen die Großkreise (mit Bogenlänge parametrisiert, siehe 4.5). Durch Skizzen für die Fälle  $n = 1, 2$  motiviert:  $\exp_0$  ist ein Diffeomorphismus auf  $B_\pi(0)$ .
- (3) Der Name „Exponentialabbildung“ kommt aus der Lie-Theorie.  $G = U(1) \cong S^1$  sind die unitäre  $(1 \times 1)$ -Matrizen, dann steht der Tangentialraum am Punkt 1 senkrecht, also  $T_1 U(1) \cong i\mathbb{R}$ , und daher  $\exp_0(t) = e^t$ .
- (4) In der Lie-Gruppe  $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$  ist  $T_1 \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}, +)$ . Hier ist  $\exp_1(t) = e^t$ .
- (5)  $G = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^t = E\}$ . Hier ist  $T_E O(n)$  die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Für  $B \in T_E O(n)$  setze  $A := \exp(sB) := E + sB + \frac{s^2}{2}B^2 + \frac{s^3}{3!}B^3 + \dots$ . Es gilt:  $A \in O(n)$ .

**4.5. Minimaleigenschaft von Geodätischen**

Zur technischen Vorbereitung benötigen wir „Vektorfelder längs Flächen“. Sei  $A$  eine zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^2$  mit stückweise differenzierbarem Rand und  $M$  sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine parametrisierte Fläche in  $M$  ist eine differenzierbare Abbildung  $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow M; (u, v) \mapsto f(u, v)$ .

Ein Vektorfeld längs  $f$  ist eine differenzierbare Abbildung  $V : A \rightarrow TM$  mit  $V(u, v) \in T_{f(u, v)} M$ . Die Parameterlinien  $f(u, v_0)$  bzw.  $f(u_0, v)$  mit  $v_0$  bzw.  $u_0$  fest definieren die „Tangential-Vektorfelder“

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) := df|_{(u, v)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{(u, v)} \right) \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) := df|_{(u, v)} \left( \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{(u, v)} \right)$$

Weiter definieren wir die kovariante Ableitung für ein Vektorfeld  $V$  längs  $f$  wie folgt:

$$\frac{DV}{\partial u}(u, v_0) := D_{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v_0)} V(u, v_0) \quad \text{sowie} \quad \frac{DV}{\partial v}(u_0, v) := D_{\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v)} V(u_0, v)$$

**Lemma 4.3 (Symmetrie)**

Sei  $M$  ein differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $D$  ein symmetrischer Zusammenhang auf  $M$ . Für eine parametrisierte Fläche  $f : A \rightarrow M$  gilt:

$$\frac{D}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{D}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

**Beweis**

In lokalen Koordinaten  $(U, \varphi)$  in der Umgebung eines Punktes von  $f(A) \subset M$  sei  $\varphi \circ f(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} D_{\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1, j}^n \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von  $D$  erhalten wir dann durch zurückrechnen

$$= \frac{D}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \blacksquare$$

**Satz 4.5 (Gauß-Lemma)**

Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  so dass  $\exp_p(v) =: q$  definiert ist. Für  $w \in T_v(T_p M) \cong T_p M$  gilt:

$$\langle d(\exp_p)|_v v, d(\exp_p)|_v w \rangle_q = \langle v, w \rangle_p$$

**Beweis**

Zerlege  $w = w_T + w_N$ , wobei  $w_T$  die Komponente in Richtung  $v$  und  $w_N$  die dazu orthogonale Komponente ist (also  $w_T = \langle v, w \rangle_{\|v\|} \frac{v}{\|v\|}$ ,  $w_N = w - w_T$ ). Das Differential

$$d \exp_p|_v : T_v(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p v} M = T_q M$$

ist linear. Also:

$$d \exp_p|_v (w_T + w_N) = d \exp_p|_v (w_T) + d \exp_p|_v (w_N)$$

Es gilt zunächst

$$d \exp_p|_v w_T = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(v + t w_T) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_q(t w_T) = w_T$$

sowie

$$d \exp_p|_v v = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(v + t v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_q(t v) = v$$

das heißt, das Gauß-Lemma gilt für  $w = w_T$ .

Ohne Einschränkung sei nun  $w = w_N$ . Nach Voraussetzung ist  $q = \exp_p(v)$ , also existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass die Exponentialabbildung definiert ist für:  $u := t v(s)$  wobei  $v(s)$  eine Kurve in  $T_p M$  mit  $v(0) = v$ ,  $\|v(s)\|$  konstant und  $v'(0) = w$  ( $\perp v$ ). Die Fläche  $A \subset \mathbb{R}^2$  ist jetzt die Menge der  $u$  für  $0 \leq t \leq 1$  und  $-\varepsilon < s < \varepsilon$ .

Betrachte jetzt die parametrisierte Fläche

$$f : A \rightarrow M; f(t, s) := \exp_p(t v(s))$$

Es gilt:  $f(t, s_0)$  ist eine Geodätische für ein festes  $s_0$ , sowie  $f(1, 0) = \exp_p v = q$ .

Wir haben für  $t = 1$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1,0)} \stackrel{\text{Lemma 1.3}}{=} (d \exp_p)_v(v'(0)) = d \exp_p|_v(w)$$

und für  $s = 0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(1,0)} = v = d \exp_p|_v(v)$$

Also ist zu zeigen:

$$\left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1,0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(1,0)} \right\rangle_q = 0 \quad (*)$$

Wir zeigen dazu zuerst:

$$\left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,s)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t,s)} \right\rangle_q$$

ist unabhängig von  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,s)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t,s)} \right\rangle_q &\stackrel{\text{Verträglichkeit}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_q + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \underbrace{\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} \right\rangle_q \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.3}}{=} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}_{\text{konstant (Geodätische!)} } = 0 \end{aligned}$$

Es war  $t$  beliebig, also wählen wir  $t = 0$ .

$$(*) \iff \left\langle \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(0,0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(0,0)} \right\rangle_q = 0$$

Aber für ein festes  $t$  gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,0)} &= (d \exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)) \Big|_{s=0} \\ &= d \exp_p|_{tv}(tw) \end{aligned}$$

■

### Frage: Geodätische und Kürzeste

Ein Segment  $\gamma|_{[a,b]}$  einer Geodätischen  $\gamma : I \rightarrow M([a,b] \subset I)$  heißt minimierend, falls  $L(\gamma|_{[a,b]}) \leq L(c)$ , wobei  $c$  eine beliebige Kurve mit  $c(a) = \gamma(a)$ ,  $c(b) = \gamma(b)$  und  $L(\cdot)$  die Länge ist.

**Satz 4.6 (Geodätische sind lokal minimierend)**

Sei  $p \in M$ ,  $U$  eine normale Umgebung von  $p$  und  $B \subset U$  ein normaler Ball mit Zentrum  $p$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  ein geodätisches Segment mit  $\gamma(0) = p$ . Falls  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine beliebige, stückweise  $C^\infty$ -Kurve mit  $\gamma(0) = c(0)$  und  $\gamma(1) = c(1)$  ist, dann gilt  $L(\gamma) \leq L(c)$ , und falls  $L(\gamma) = L(c)$ , so ist  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .

**Beweis**

1. Fall:  $c([0, 1]) \subset B$ .  $\exp_p$  ist ein Diffeomorphismus, also können wir schreiben ("Polarkoordinaten"):  $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , wobei  $v(t)$  eine Kurve in  $T_p M$  ist mit  $\|v(t)\| = 1$  und  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  stückweise differenzierbar. Sei  $f(r, t) := \exp_p(r \cdot v(t))$  eine parametrisierte Fläche in  $B$ , die  $c$  enthält. Es gilt für fast alle  $t$ :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r' + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Nach dem Gauß-Lemma (4.5) ist  $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = 0$ , also

$$\left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 = \underbrace{\left\| \frac{df}{dr} \right\|^2}_{=1} |r'|^2 + \underbrace{\left\| \frac{df}{dt} \right\|^2}_{\geq 0} \geq |r'|^2.$$

Damit gilt  $\int_\varepsilon^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'| dt \geq \int_\varepsilon^1 r' dt = r(1) - r(\varepsilon)$ . (Beachte dass  $r$  bei 0 nicht differenzierbar ist, aber  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .) Also  $L(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \geq r(1) = c(1) = \text{Endpunkt von } c = L(\gamma)$ .

Die Gleichheit  $L(c) = L(\gamma)$  gilt dann, wenn Gleichheit in allen Abschätzungen oben gilt, also  $\left\| \frac{\delta f}{\delta t} \right\| = 0$ , also  $\frac{\delta f}{\delta t} = 0 \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} d\exp_p(rv') \iff rv' = 0 \implies v' = 0 \implies v$  ist konstant, also das heißt, dass die Richtung konstant ist. Weiter muss dann  $\int_\varepsilon^1 |r'| dt = \int_\varepsilon^1 r' dt$  sein, also  $|r'| = r' > 0$ , also ist  $c$  eine monotone Parametrisierung von  $\gamma$ , insbesondere  $c([0, 1]) = \gamma([0, 1])$ .

2. Fall:  $c([0, 1]) \not\subset B$ . Sei  $\varepsilon$  der Radius von  $B$  und  $t_1 \in [0, 1]$  der erste Parameterwert mit  $c(t_1) \in S_\varepsilon(p) = \partial B_\varepsilon(p) = \partial B$ . Dann ist

$$L(c) > L(c|_{[0, t_1]}) \stackrel{1. \text{ Fall}}{\geq} \varepsilon \geq L(\gamma') \geq L(\gamma).$$

■

**Fazit:** Aus „ $\gamma$  ist eine Geodätische“ folgt „ $\gamma$  ist lokal minimierend“. Doch gilt auch die Umkehrung?

**Satz 4.7**

Für jeden Punkt  $p$  einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert eine Umgebung  $W$  von  $p$  und  $\delta = \delta(p) > 0$ , so dass für alle  $q \in W$  gilt:

$$\exp_q : B_\delta(0) (\subset T_q M) \rightarrow M$$

ist ein Diffeomorphismus mit  $\exp_q(B_\delta(0)) \supseteq W$ . Das heißt:  $W$  ist eine normale Umgebung für jeden ihrer Punkte. Eine solche Umgebung von  $p$  heißt total normal.



**Beweis**

(Skizze) Betrachte  $F : U (\subset TM) \rightarrow M \times M$ , wobei  $F(q, v) := (q, \exp_q(v))$ . Die Jacobi-Matrix von  $F$  im Punkt  $(p, 0)$  ist  $J_p := \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix}$ , wobei  $E$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix ist.  $J_F$  ist regulär in  $(p, 0)$ . Weiter ist  $F$  ein lokaler Diffeomorphismus von einer  $(p, 0)$ -Umgebung  $U' \subset U$  auf eine Umgebung  $W'$  um  $F(p, 0) = (p, p)$ . Wähle nun die Umgebung  $W$  von  $p$  so, dass  $W \times W \subset W'$ . ■

**Bemerkung:** Nach Satz 4.6 und 4.7 gilt: Für je zwei Punkte  $q_1, q_2 \in W$  (wie in Satz 4.7) existiert *genau eine* minimierende Geodätische der Länge  $< \delta$ , welche  $q_1$  und  $q_2$  verbindet. Damit kann man die Radialsymmetrie verlassen und hat mehr „Beweglichkeit“.

**Korollar (Geodätische erkennen)**

Sei  $\gamma$  eine stückweise differenzierbare Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , mit der Bogenlänge parametrisiert. Falls  $L(\gamma) \leq L(c)$  für irgendeine stückweise differenzierbare Vergleichskurve  $c$ , die  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  verbindet, so ist  $\gamma$  eine Geodätische.

Es gilt also: „ $\gamma$  minimierend  $\implies \gamma$  Geodätische“ (keine Lokalität zunächst!).

**Beweis**

Sei  $t \in [a, b]$  und  $W$  eine total normale Umgebung von  $\gamma(t)$ . Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall  $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ , so dass  $t \in I$  und  $\gamma(I) \subset W$ .  $\gamma|_I$  ist stückweise differenzierbar und minimierend (sonst wäre  $\gamma$  nicht minimierend). Nach Satz 4.6 ist  $L(\gamma|_I)$  die Länge eines radialen geodätischen Segments (da  $W$  total normal) von  $\gamma(t_1)$  nach  $\gamma(t_2)$ . Da  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, folgt nach Satz 4.6, dass  $\gamma|_I$  eine Geodätische in der Umgebung von  $t$  ist.  $t$  war beliebig, woraus die Behauptung folgt. ■

**Anwendungen:**

- (1) Eine Riemann'sche Isometrie bildet Geodätische auf Geodätische ab.

**Beweis**

$\varphi : M \rightarrow N$  sei eine Isometrie;  $\gamma$  ist eine Geodätische, dann ist  $L(\varphi \circ \gamma) = L(\gamma)$ . Also:  $\gamma$  ist minimierend, dann  $\varphi \circ \gamma$  minimierend. Dann folgt die Behauptung aus dem Korollar.

Alternativ:  $D_{\gamma'} \gamma' = 0 \implies D_{(\varphi \circ \gamma)'} (\varphi \circ \gamma)' = 0$ . ■

- (2) Geodätische von  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind Großkreise.

**Beweis**

Sei  $c$  ein Großkreis, das heißt  $c = S^n \cap \sigma$ , wobei  $\sigma$  eine 2-dimensionale Ebene in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch 0 ist. Wähle  $p, q \in c$  genügend nahe, so dass es nach Satz 4.7 genau eine Geodätische  $\gamma$  zwischen  $p, q$  existiert. Dann ist die euklidische Spiegelung  $R$  an  $\sigma$  eine euklidische Isometrie von  $S^n$ .  $R$  fixiert  $c$  punktweise und bildet  $\gamma$  auf  $\tilde{\gamma}$  ab (auch durch  $p, q$ ). Also muss wegen Eindeutigkeit  $\gamma = \tilde{\gamma}$  gelten und  $\gamma$  bleibt punktweise fest, das heißt  $\gamma \subset c =$  die Fixpunkte von  $R = S^n \cap \sigma$ . Damit ist der Großkreis selber die Geodätische  $\gamma$ . ■

