

11. Unendliche Reihen

Definition

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} . Die Folge (s_n) mit $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (oder mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n$).

s_n heißt die **n-te Teilsumme** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und a_n heißt **n-tes Reihenglied** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent (divergent)** : $\iff (s_n)$ konvergiert (divergiert).

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ der **Reihenwert** oder die **Reihensumme** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (Im Konvergenzfall hat also das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zwei Bedeutungen).

Bemerkung: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(2) Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n \geq p}$ eine Folge. Dann definiert man entsprechend $s_n := a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ ($n \geq p$) und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$. Meist gilt: $p = 1$ oder $p = 0$.

Beispiele:

(1) Die **harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$a_n = \frac{1}{n}, s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{10.2} (s_n) \text{ divergiert.}$$

$$\text{Also: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

(2) Die **geometrische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) :

$$\xrightarrow{7.3} (s_n) \text{ konvergiert} \iff |x| < 1. \text{ In diesem Fall: } s_n \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{Also: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ist konvergent} \iff |x| < 1. \text{ In diesem Fall: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. §7 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(5) $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ Sei $\varepsilon > 0$.

$$I_n := (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}). a_n \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Länge von $I_n := |I_n|$; $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$; $s_n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}) \rightarrow \varepsilon$ ($n \rightarrow \infty$) (*Unendliche geometrische Reihe*). D.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$. Die Rationalen Zahlen können so mit abzählbaren Intervallen überdeckt werden, dass die Summe der Intervalle beliebig klein ist.

Satz 11.1 (Cauchy- und Monotoniekriterium sowie Nullfolgeeigenschaft)

(a_n) sei eine Folge in \mathbb{R} und $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

- (1) Cauchy-Kriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :$

$$\left| \underbrace{\sum_{k=m+1}^n a_k}_{=s_n - s_m} \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0.$$
- (2) Monotoniekriterium: Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so folgt daraus: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann:
- (i) $a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) Für $\nu \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots$ konvergent und für $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_\nu \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$

Beweis

- (1) Wende Cauchy-Kriterium (10.1) auf (s_n) an.
- (2) $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \implies s_n$ ist monoton wachsend $\xrightarrow[6.3]{\text{Vor.}} (s_n)$ konvergiert.
- (3) Sei $s := \lim s_n$, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
- (i) $s_n - s_{n-1} = a_n \implies a_n \rightarrow s - s = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) Für $n \geq \nu + 1 : \sigma_n := a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_n = s_n - (a_1 + \dots + a_\nu) = s_n - s_\nu$
 $\implies \sigma_n \rightarrow s - s_\nu \quad (n \rightarrow \infty)$
 $\implies \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $r_\nu = s - s_\nu$
 $\implies r_\nu \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$ ■

Satz 11.2 (Rechenregeln bei Reihen)

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis

klar. ■

Definition

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** : $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

Satz 11.3 (Dreiecksungleichung für Reihen)

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Voraussetzung und Satz 11.1(1) folgt:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0 \\ \implies \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0 \\ \xrightarrow{11.1(1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad \sigma_n := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \implies |s_n| \leq \sigma_n \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beispiel

Die **alternierende Harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Hier: $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. $|a_n| = \frac{1}{n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut.

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. (Später: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log 2$)

Beweis: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{>0} \implies (s_{2n}) \text{ ist monoton wachsend. Analog:}$$

$$(s_{2n-1}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad (*)$$

Dann gilt $s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \stackrel{(*)}{=} s_{2n-1} - \frac{1}{2n} < s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1 \implies (s_{2n})$ und (s_{2n-1}) sind beschränkt. 6.3 $\implies (s_{2n})$ und (s_{2n-1}) sind konvergent. Aus $(*)$ folgt dann $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$. A16 $\implies (s_n)$ hat genau einen Häufungswert. 9.3 $\implies (s_n)$ ist konvergent.

