

17. Der Residuensatz und Folgerungen

Satz 17.1 (Residuensatz)

G sei ein Elementargebiet, es seien $z_1, \dots, z_k \in G$ ($z_j \neq z_l$ für $j \neq l$) und es sei $f \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$. Jedes z_j ist also eine isolierte Singularität von f . Weiter sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$.

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k n(\gamma, z_j) \text{Res}(f, z_j)$$

Beweis

$\forall j \in \{1 \dots k\}$ existiert ein $R_j > 0$: $\overline{U_{R_j}(z_j)} \subseteq G$ und $\overline{U_{R_j}(z_j)} \cap \overline{U_{R_l}(z_l)} = \emptyset$ ($j \neq l$). Sei $j \in \{1 \dots k\}$.

$\stackrel{14.4}{\Rightarrow}$ f hat auf $U_{R_j}(z_j)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}}_{\varphi_j(z)},$$

wobei $\varphi_j \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$

Definiere $g \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_k\})$ durch $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^k \varphi_j(z)$.

Dann hat g in z_j eine hebbare Singularität ($j = 1 \dots k$). Also $g \in H(G)$. G ist ein Elementargebiet $\Rightarrow g$ hat eine Stammfunktion auf $G \stackrel{8.6}{\Rightarrow} \int_{\gamma} g(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz$.

Noch zu zeigen: $\int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = 2\pi i n(\gamma, z_j) a_{-1}^{(j)}$ ($j = 1 \dots k$).

Die Reihe für φ_j konvergiert lokal gleichmäßig (14.3).

$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\gamma} \varphi_j(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz$. Sei $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Die Funktion $\frac{1}{(z - z_j)^n}$ hat auf $G \setminus \{z_j\}$

die Stammfunktion $\frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$

$\stackrel{8.6}{\Rightarrow} \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz = 0 \quad \forall n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \varphi_j dz = a_{-1}^{(j)} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_j)} dz = a_{-1}^{(j)} n(\gamma, z_j) 2\pi i$ ■

Folgerung 17.2

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

Dann:

(1) Cauchyscher Integralsatz für Elementargebiete

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(2) Cauchysche Integralformel

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

Beweis

(1) Alle z_j in 17.1 sind hebbare Singularitäten. $\stackrel{14.4}{\Rightarrow} \text{Res}(f(z_j)) = 0 \Rightarrow \text{Behauptung.}$

(2) Sei $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$. $g \in H(G \setminus \{z_0\})$ sei definiert durch $g(w) := \frac{f(w)}{w-z_0}$. Sei $r > 0$, so dass $U_r(z_0) \subseteq G$

$$\begin{aligned} &\stackrel{10.4}{\Rightarrow} f(w) = a_0 + a_1(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in U_r(z_0) \\ &\Rightarrow g(w) = \frac{a_0}{w-z_0} + a_1 + a_2(w - z_0) + \dots \quad \forall w \in \dot{U}_r(z_0) \\ &\Rightarrow \text{Res}(g, z_0) = a_0 = f(z_0) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(w) dw \stackrel{17.1}{=} n(\gamma, z_0)f(z_0) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für die Berechnung von Residuen an Polstellen

Satz 17.3

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und f habe in z_0 einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Es existiert also (siehe 13.2) ein $g \in H(D)$ mit:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in D \setminus \{z_0\}$$

und $g(z_0) \neq 0$. Dann:

- (1) $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$
- (2) Ist $m = 1$, so ist $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$

Beweis

(1) Sei $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$.

$$\begin{aligned} &\stackrel{10.4}{\Rightarrow} g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots + b_m(z - z_0)^m + \dots \quad \forall z \in U_r(z_0) \\ &\Rightarrow f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots \quad \forall z \in \dot{U}_r(z_0) \Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \\ &b_{m-1} \stackrel{10.4}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \end{aligned}$$

(2) Aus (1) folgt: $\text{Res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \quad \blacksquare$

Beispiel

(1) $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}$ hat in $z = i$ und in $z = -1$ jeweils einen Pol der Ordnung 1. Also:
 $\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$; $\text{Res}(f, -1) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

(2) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3 z}$ hat in $z = i$ einen Pol der Ordnung 3 und in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 1. Hier ist $g(z) = \frac{1}{z}$. $g'(z) = -\frac{1}{z^2}$, $g''(z) = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \text{Res}(f, i) = \frac{2}{i^3 2!} = i$

Satz 17.4 (Das Argumentenprinzip)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet, es sei $f \in M(G)$, f habe in G genau die Pole b_1, \dots, b_m (jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung angibt), f habe in G genau die Nullstellen a_1, \dots, a_n (jede Nullstelle sei so oft aufgeführt, wie ihre Ordnung angibt) und γ sei ein stückweise glatter und geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\}$. Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j)$$

Bemerkung: (1) in 17.4 ist $\{b_1, \dots, b_m\} = \emptyset$ oder $\{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$ zugelassen. I.d.Fall:

$$\sum_{j=1}^m n(\gamma, b_j) = 0 \text{ oder } \sum_{j=1}^n n(\gamma, a_j) = 0$$

(2) $n(\gamma, a_j) = n(\gamma, b_k)$ ($j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$). Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen von } f - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ (jeweils gezählt mit Vielfachheiten!)}$$

Beispiel

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)^2} \quad n=1, a_n=0, m=2, b_1=b_2=i; \gamma(t) = 2e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1 - 2 = -1$$

Beweis

(von 17.4) Sei β_1, \dots, β_p die paarweise verschiedenen Pole von f ($p \leq m$) und $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ die paarweise verschiedenen Nullstellen ($q \leq n$).

$$h := \frac{f'}{f}.$$

Dann: $h \in H(G \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p\})$.

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz \stackrel{17.1}{=} \sum_{j=1}^q n(\gamma, \alpha_j) \text{Res}(h, \alpha_j) + \sum_{j=1}^p n(\gamma, \beta_j) \text{Res}(h, \beta_j).$$

Sei $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$, $\beta \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, ν = Ordnung der Nullstelle von α von f und μ = Ordnung der Polstelle β von f .

Zu zeigen: $\text{Res}(h, \alpha) = \nu$ und $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$.

$\stackrel{11.8}{=} \exists \delta > 0 : U_{\delta}(\alpha) \subseteq G, \exists \varphi \in H(U_{\delta}(\alpha))$ und $f(z) = (z - \alpha)^{\nu} \varphi(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$ und $\varphi(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$.

Dann: $f'(z) = \nu(z - \alpha)^{\nu-1} \varphi(z) + (z - \alpha)^{\nu} \varphi'(z) \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha)$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - \alpha} + \underbrace{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}_{\text{holomorph auf } U_{\delta}(\alpha)} \quad \forall z \in U_{\delta}(\alpha) \Rightarrow \text{Res}(h, \alpha) = \nu.$$

Analog: $\text{Res}(h, \beta) = -\mu$ (statt 11.8 nimmt man 13.2) ■

Folgerungen 17.5

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) und $f, g \in H(G)$. Sei $N_f :=$ Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$ (gezählt mit Vielfachheiten!).

$$(1) \text{ Ist } f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \text{Tr}(\gamma) \Rightarrow N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(2) **Satz von Rouché**

Gilt (*) $|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$, so gilt $N_f = N_g$

Beweis

- (1) $\exists R > r : \overline{U_r(z_0)} \subseteq \overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Also: $\overline{U_r(z_0)} \subseteq U_R(z_0)$. $U_R(z_0)$ ist ein Elementargebiet. Seien a_1, \dots, a_n die Nullstellen von f in $U_R(z_0)$. (gezählt mit Vielfachheiten).

$$\stackrel{17.4}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{\stackrel{16.2}{=} \begin{cases} 1 & , a_j \in U_r(z_0) \\ 0 & , a_j \notin U_r(z_0) \end{cases}}$$

- (2) Für $s \in [0, 1] : h_s := f + s(g - f) \in H(G); N(s) := N_{h_s}$. Aus (*) folgt $h_s(z) \neq 0 \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall z \in \text{Tr}(\gamma)$.

$$\text{Aus (1): } N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'_s(z)}{h_s(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + s(g'(z) - f'(z))}{f(z) + s(g(z) - f(z))} dz$$

\Rightarrow die Funktion $s \mapsto N(s)$ ist stetig. Wegen $N(s) \subseteq \mathbb{N}_0 \quad \forall s \in [0, 1]$: $N(s)$ ist konstant. Also $N_f = N(0) = N(1) = N_g$ ■

Satz 17.6 (Satz von Hurwitz)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. (f_n) sei eine Folge in $H(G)$ und (f_n) konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. ($\stackrel{10.5}{\Rightarrow} f \in H(G)$).

Dann:

- (1) Ist $Z(f_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z(f) = \emptyset$ oder $f \equiv 0$
- (2) Sind alle f_n auf G injektiv $\Rightarrow f$ ist auf G injektiv oder f ist auf G konstant.

Beweis

- (1) Sei $f \not\equiv 0$ auf G ; $z_0 \in G$, $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ und $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$. (f_n) konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f . $\stackrel{10.5}{\Rightarrow} (f'_n)$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f' .

Übung: $(\frac{1}{f_n})$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

Fazit: $(\frac{f'_n}{f_n})$ konvergiert auf $\text{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $(\frac{f'}{f})$.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n}{f_n} dz}_{\stackrel{17.5}{N_{f_n}=0}} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz}_{\stackrel{17.5}{N_f}}$$

Also: $N_f = 0$. Somit: $f(z_0) \neq 0$

- (2) Sei $z_0 \in G$. $g_n = f_n - f_n(z_0)$, $g := f - f(z_0)$. $\tilde{G} := G \setminus \{z_0\}$. Dann:

(g_n) konvergiert auf \tilde{G} lokal gleichmäßig gegen g . $g_n(z) \neq 0 \quad \forall z \in \tilde{G}$

(1) $\Rightarrow g \equiv 0$ oder $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \tilde{G} \Rightarrow f$ ist auf G konstant oder $f(z) \neq f(z_0) \quad \forall z \in G \setminus \{z_0\}$ ■

Berechnung von Integralen

Satz 17.7

Sei $R(x, y) = R(x + iy) = R(z)$ eine rationale Funktion ohne Pole auf $\partial\mathbb{D}$. Weiter sei $R_1(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i})$ und $M := \{z \in \mathbb{D} : z \text{ ist ein Pol von } R_1\}$ (endlich)

Dann:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R_1, z)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) ie^{it} dt \\ &= \int_{\gamma} R_1(z) dz, \text{ wobei } \gamma(t) = ie^{it} \ (t \in [0, 2\pi]). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_{\gamma} R_1(z) dz \stackrel{17.1}{=} 2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R_1} \underbrace{n(\gamma, z)}_{\substack{= 1, z \in M \\ = 0, z \notin M}} \text{Res}(R_1, z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 17.8

Z und N seien Polynome. $R := \frac{Z}{N}$ habe auf \mathbb{R} keine Pole und es gelte (*) $\text{grad } N \geq \text{grad } Z + 2$ ($\implies \int_{\mathbb{R}} R(x) dx$ konvergiert absolut). Weiter sei $M := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, z \text{ ist Pol von } R\}$.

Dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in M} \text{Res}(R, z)$$

Beweis

(*) $\implies \exists m \geq 0 \exists c > 0 : |R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > c$. (**)

Sei $\delta > c$ so gross, dass alle Pole von R in $U_{\delta}(0)$ liegen.

$\gamma_1(t) := t \ (t \in [-\delta, \delta])$; $\gamma_2(t) := \delta e^{it} \ (t \in [0, \pi])$ $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$.

$$\int_{\gamma} R(z) dz = \int_{\gamma_1} R(z) dz + \int_{\gamma_2} R(z) dz.$$

$$\int_{\gamma_1} R(z) dz = \int_{-\delta}^{\delta} R(t) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt \ (\delta \rightarrow \infty).$$

Sei $z \in \text{Tr}(\gamma_2)$. Dann: $|z| = \delta > 0$, also nach (**): $|R(z)| \leq \frac{m}{|z|^2} = \frac{m}{\delta^2} \implies \left| \int_{\gamma_2} R(z) dz \right| \leq$

$$\frac{m}{|\delta|^2} L(\gamma_2) \leq \frac{m\pi\delta}{\delta^2} = \frac{m\pi}{\delta}$$

$\implies \int_{\gamma_2} R(z) dz \rightarrow 0 \ (\delta \rightarrow \infty)$. Dann: $\int_{\gamma} R(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \ (\delta \rightarrow \infty)$. 17.1 $\implies \int_{\gamma} R(z) dz =$

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z \text{ Pol von } R} \underbrace{n(\gamma, z)}_{\substack{= 1, z \in M \\ = 0, z \notin M}} \text{Res}(R, z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

