inoffizielles Skript

Algebraische Geometrie

Gehalten von Prof. Dr. F. Herrlich im Wintersemester 2011/12

getippt von Aleksandar Sandic*

27. Dezember 2016

*Aleksandar.Sandic@student.kit.edu

Inhaltsverzeichnis

Benannte Sätze

Sätze

Vorwort

Über dieses Skript

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Algebraische Geometrie“ von Prof. Dr. F. Herrlich im Wintersemester 2011/12 am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Prof. Dr. F. Herrlich ist für den Inhalt nicht verantwortlich. Die Vorlesung ist beendet und der Inhalt ist vollständig. Abgesehen von Designverbesserungen und eventuellen Korrekturen plane ich keine weiteren Änderungen.

Wer

Getippt wurde das Skript von Aleksandar Sandic. Es basiert auf einem Skript zur Vorlesung vom Wintersemester 2008/09, ich habe den Inhalt jedoch an die aktuelle Vorlesung angepasst. Die Übungsblätter und Musterlösungen wurden von Myriam Finster, der Übungsleiterin, getippt und von mir kopiert. Die Zeichnungen auf den Übungsblättern und in den Musterlösungen waren ursprünglich eigene Bilddateien, von Myriam Finster erstellt, ich habe sie mit TikZ im Code nachgebaut.

Das Originalsrkipt kann unter `http://mitschriebwiki.nomeata.de/AlgGeo.html` abgerufen werden.

Wo

Link zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/alggeo12011w/`

Link zum Skript: `http://mitschriebwiki.nomeata.de/AlgGeo2011.html`

Link zum Mitschriebwiki: `http://mitschriebwiki.nomeata.de/`

To Do

- Nichts mehr. Wenn jemand die übrigen Lösungen der Übungsaufgaben nachreichen möchte wäre ich dankbar, aber ich persönlich bin fertig mit dem Skript. Danke an Myriam für die Übungsblätter und Musterlösungen und danke an Chris für’s Korreturlesen und Vervollständigen.

Kapitel 1

Affine Varietäten

§ 1 Polynomringe

Sei k ein Körper, $n \geq 1$, $k[X_1, \ldots, X_n]$ Polynomring

Bemerkung + Erinnerung 1.1
a) Für $a_1, \ldots, a_n \in k$ ist

$$\begin{array}{rccc} \phi_{a_1,\ldots,a_n}: & k[X_1, \ldots, X_n] & \to & k \\ & f & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

ein Homomorphismus von Ringen

b) Ist A eine k-Algebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$, so ist $f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$ ein k-Algebra Homomorphismus $k[X_1, \ldots, x_n] \to A$

c) (UAE des Polynomrings)
Sei A eine k-Algebra, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann gibt es genau einen k-Algebra Homomorphismus $\phi : k[X_1, \ldots X_n] \to A$ mit $\phi(X_i) = a_i$

Folgerung 1.2
Jede endlich erzeugte k-Algebra ist Faktorring eines Polynomrings.
Denn: Seien $a_1, \ldots, a_n$ Erzeuger von A als k-Algebra. Sei $\phi : k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ *der* k-Algebra Homomorphismus mit $\phi(X_i) = a_i$.(Bem. + Erinn. 1.1 c))
ϕ ist surjektiv

$$\overset{\text{Homomorphiesatz}}{\Longrightarrow} A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\operatorname{Kern}(\phi)$$

Erinnerung 1.3 (Euklidischer Algorithmus)
Für $f, g \in k[X]$ mit $g \neq 0$ gibt es (eindeutige!) $q, r \in k[X]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$.

Folgerung 1.4
$k[X]$ ist Hauptidealring

Beweis
Sei $I \subset [X]$ Ideal. $I = (0)$ wird von 0 erzeugt. Sei also $I \neq 0$. Wähle: $g \in I - \{0\}$ mit kleinstem Grad.

Beh.: $I = (g)$, *denn:* Sei $f \in I - \{0\}$. Schreibe $f = q \cdot g + r$. $\deg(r) < \deg(g)$ und $r = f - qg \in I$.
$\Rightarrow r = 0$ □

Folgerung 1.5
$k[X]$ ist faktoriell (eindeutige Zerlegung in Primfaktoren).

Erinnerung: R Ring, $f \in R$ keine Einheit

$$f \text{ unzerlegbar } \Leftrightarrow \text{ Aus } f = g \cdot h \text{ folgt } g \in R^x \text{ oder } h \in R^x$$

Proposition 1.6
$k[X_1, \ldots, X_n]$ ist faktoriell für jedes $n \geq 1$.

Beweis (Beweisidee)
Induktion über n, $n = 1$ ist Folgerung 1.5.

Für Induktionsschritt: $k[X_1, \ldots, X_n] = k[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$ □

Satz 1 (Hilbertscher Basissatz)
Jedes Ideal in $k[X, \ldots, X_n]$ ist endlich erzeugbar. *Kurz:* $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist noethersch

Definition 1.7
Ein Ring R heißt ***noethersch***, wenn jedes Ideal in R endlich erzeugbar ist.

Satz 1'
R noethersch $\Rightarrow$ $R[X]$ noethersch. Daraus folgt Satz 1: $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist noethersch mit Induktion über n.

Beweis (Beweis von Satz 1)
Annahme: Es gibt Ideal $I \subset R[X]$, das sich nicht von endlich vielen Elementen erzeugen lässt.

Wähle $f_0 \in I - \{0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle $f_1 \in I - \{f_0\}$ vom kleinsten Grad. Wähle für $i \geq 2 \in I - \{f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}\}$ vom kleinsten Grad. Sei a_i der Leitkoeffizient von f_i, sei $J \subset R$ das von den $a_i, i \in \mathbb{N}$ erzeugte Ideal.

J ist endlich erzeugt. Œ J wird erzeugt von $a_1, \ldots, a_n$ $\Rightarrow$ es gilt $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$
Sei

$$g := f_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i X^{d_{n+1} - d_i}$$

$\Rightarrow \deg(g) < \deg(f_{n+1})$ *Aber*: $g \notin (f_0, \ldots, f_n)$, da sonst auch $f_{n+1} \in (f_0, \ldots, f_n)$ wäre. ↯ □

Bemerkung 1.8
Sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ Ideal. Dann ist auch R/I noethersch.

Beweis
Sei $J \subset R/I$ ein ideal. Sei $\Pi : R \to R/I$ die Restklassenabbildung. $\tilde{J} := \Pi^{-1}(J)$ ist nach Voraussetzung endlich erzeugbar. Die Bilder der Erzeuger von $\tilde{J}$ in J erzeugen J. □

Folgerung 1.9
Jede endlich erzeugbare k-Algebra ist noethersch.

Beweis
Siehe Folgerung 1.2, Bemerkung 1.8 und Satz 1 □

Proposition 1.10
Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ von Idealen in R stationär wird. (Das heißt es gibt n_0 mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$)

Beweis

„⇒“: Sei $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ Kette von Idealen. Sei $I := \bigcup_{d=0}^{\infty} I_d$. I ist Ideal. I ist endlich erzeugbar, $I = (a_1, \dots, a_r), a_i \in I_{n_1}$, $n_0 = \max_{i=1}^{r} n_i \Rightarrow I_n = I_{n_0}$ für $n \geq n_0$

„⇐“: Sei I Ideal, $\mathcal{I} := \{J \subset I \mid J \text{ Ideal in } R, J \text{ endlich erzeugt}\}$. $\mathcal{I} \neq \emptyset$, da $(0) \in \mathcal{I}$.

Behauptung: $\mathcal{I}$ enthält ein maximales Element I_0.

Wäre $I_0 \neq I$, so gäbe es $a \in I - I_0$. Dann wäre auch $(I_0, a) \in \mathcal{I}$ ↯ zu I_0 maximal.

Beweis der Behauptung: Ist (0) nicht maximal, so gibt es $(0) \subsetneq I_1 \subset \mathcal{I}$. Ist auch I_1 nicht maximal, so gibt es $I_1 \subsetneq I_2 \in \mathcal{I}$. $\Rightarrow$ erhalte Kette $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

Nach Voraussetzung wird diese Kette stationär ab einem n_0. $\Rightarrow$ I_0 ist maximal in I. □

§ 2 Nullstellenmengen und Verschwindungsideale

Sei k ein Körper.

Definition 2.1
Eine Teilmenge $V \subseteq k^n$ heißt ***affine Varietät***, wenn es eine Menge $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ von Polynomen gibt, sodass

$$V = V(F) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

Beispiel
$\emptyset = V(1) = V(k[X_1, \dots, X_n])$

$k^n = V(0) = V(\emptyset)$

$V(X(X-1)(Y-1))$ affine Varietät

Bemerkung 2.2

i) Für $F_1 \subseteq F_2 \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist $V(F_1) \supseteq V(F_2)$
ii) $V(f_1 \cdot f_2) = V(f_1) \cup V(f_2)$
iii) für $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ist
$$V(F) = V((F))$$
wobei (F) das von F erzeugte Ideal ist.
iv) Für jede affine Varietät $V \subseteq k^n$ gibt es endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_r$ mit
$$V = V(f_1, \dots, f_r)$$

Beweis

iii) jedes $f \in (F)$ hat die Form $f = \sum_{i=1}^{r} r_i f_f$ mit $r_i \in k[X_1, \dots, X_n], f_i \in F$.
$$x \in V(F) \Rightarrow f_i(x) = 0, i = 1, \dots, r$$
$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in V((F))$ □

Definition 2.3
Für eine Teilmenge $V \subset k^n$ heißt

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] | f(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}$$

das ***Verschwindungsideal***.

Beispiel

i) $I(\emptyset) = k[X_1, \dots, X_n]$
$I(k^n) = (0)$ falls k unendlich ist
ii) $I((0,0)) = (X, Y)$

Bemerkung 2.4
Für jede Teilmenge $V \subseteq k^n$ gilt:

i) $I(V)$ ist Radikalideal
ii) $V \subseteq V(I(V))$
iii) $\bar{V} := V(I(V))$ ist die kleinste Varietät, die V enthält. Insbesondere: $V = V(I(V))$, falls V affine Varietät.

iv) für affine Varietäten V_1, V_2 gilt:

$$V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow I(V_1) \supseteq I(V_2)$$

Also insbesondere: $V_1 = V_2 \Leftrightarrow I(V_1) = I(V_2)$

Definition 2.5
Ein Ideal I in einem Ring R heißt ***Radikalideal***, wenn gilt: Ist $f \in R$ und gibt es $n \geq 0$ mit $f^n \in I$, so ist $f \in I$

Beweis (von Bemerkung 2.4)

iii) Folgt aus (iv)

iv) Sei V' affine Varietät mit $V \subseteq V'$. Sei $V' = V(I')$ für ein Ideal I'.

Behauptung: $I' \subseteq I(V)$

Dann ist $V' = V(I') \supseteq V(I(V)) = \bar{V}$

Beweis der Behauptung: $f \in I' \Rightarrow$ für alle $x \in V'$ ist $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ für alle $x \in V \Rightarrow f \in I(V)$

Beispiel
$f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X], I = (f), V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$

Definition + Bemerkung 2.6
Für eine affine Varietät $V \subseteq k^n$ sei

$$A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

i) $A(V)$ ist die reduzierte k-Algebra (d. h. ohne nilpotente Elemente)

ii) Ist $V \subseteq V'$, so gibt es ***surjektiven k-Algebra Homomorphismus*** $A(V') \to A(V)$

Beweis

i) Sei $g \in A(V)$ mit $g^d = 0$ für ein $d > 0$, sei $\bar{f} \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $\bar{f} = g$

$$\Rightarrow f^d \in I(V)$$

$$\overset{I(V)\text{Radikalideal}}{\Rightarrow} f \in I(V) \Rightarrow g = 0$$ □

ii) Es ist $I(V') \subseteq I(V)$.

Homomorphiesatz $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd}
k[X_1, \dots, X_n] \arrow[rr] \arrow[dr] & & A(V) \\
& A'(V) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

§ 3 Zariski Topologie

Sei k ein Körper

Definition + Bemerkung 3.1
Die affinen Varietäten in k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Diese Topologie heißt ***Zariski-Topologie***.

Schreibweise: $\mathbb{A}^n(k)$ sei k^n mit dieser Topologie

Beweis

i) $k^n = V(0), \emptyset = V(k[X_1, \dots, X_n])$ sind affine Varietäten

ii) Seien $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$ affine Verietäten.
Behauptung: $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$

Zeige genauer: $V(I_1 \cdot I_2) \overset{a)}{\subseteq} V_1 \cup V_2 \overset{b)}{\subseteq} V(I_1 \cap I_2) \overset{c)}{\subseteq} V(I_1 \cdot I_2)$

c) folgt aus $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$

b) folgt aus $I_1 \cap I_2 \subset I_1$ und $I_1 \cap I_2 \subset I_2$

a) Sei $x \in V(I_1 \cdot I_2), x \notin V_1$
Dann gibt es $f \in I_1$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) \overset{x \in V(I_1 \cdot I_2)}{=} 0$ für alle $g \in I_2 \Rightarrow x \in V(I_2) = V_2$

iii) Seien $V_i = V(I_i), i \in J$ (J beliebige Menge), affine Verietäten.
Behauptung:

$$\bigcap_{i \in J} V_i = V(\underbrace{\bigcup_{i \in J} I_i}_{= \sum_{i \in J} I_i})$$

□

Beispiel 3.2

$$n = 1, V \subseteq \mathbb{A}^n(k) \Leftrightarrow V \text{ endlich oder } V = k$$

Bemerkung 3.3
Jeder Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis

$$\{x\} = V(X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n)$$

□

Folgerung 3.4
Ist k endlicher Körper, so ist die Zariski-Topologie auf k^n die diskrete Topologie.

Bemerkung 3.5
Ist k unendlich, so ist $\mathbb{A}^n(k)$ nicht hausdorffsch.

Beweis
$n = 1$: ✓

$n \geq 2$: $x, y \in \mathbb{A}^n(k)$

Œ x und y liegen auf der X_1-Achse, das heißt

$$x, y \in V(X_2, \dots, X_n) =: W$$

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y. Dann sind

$$\left.\begin{array}{rl} & V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \\ \text{und} & V_x = V(I_x) = \mathbb{A}^n(k) - U_x \end{array}\right\} \text{affine Verietäten}$$

Da $x \in W$ gibt es $f \in I_x$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(W) \Rightarrow V(f) \cap W$ endlich $\Rightarrow V_x \cap W$ endlich.

Genauso $V_y \cap W$ endlich $\Rightarrow (V_x \cup V_y) \cap W$ endlich.

$$\Rightarrow U_x \cap U_y \cap W \neq \emptyset$$

□

Bemerkung 3.6
Sei k unendlicher Körper.

i) Für jedes $f \in k[X_1, \dots, X_n] - k$ (nicht-konstante Polynome) ist $D(f) := \mathbb{A}^n(k) - V(f)$ offene Teilmenge.
ii) Die $D(f)$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beweis

ii) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ offen.
Zeige: Zu jedem $x \in U$ gibt es $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $x \in D(f) \subseteq U$
denn: Sei $V := \mathbb{A}^n(k) - U, V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$.
Da $x \notin V$ gibt es $f \in I$ mit $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ und $D(f) \subseteq U$, da $V(f) \supseteq V(I) = V$ □

Definition + Erinnerung 3.7

a) Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Definiere Topologie auf Y durch:

$$U \subseteq Y \text{ offen } \Leftrightarrow \exists \tilde{U} \subseteq X \text{ offen mit } U = \tilde{U} \cap Y$$

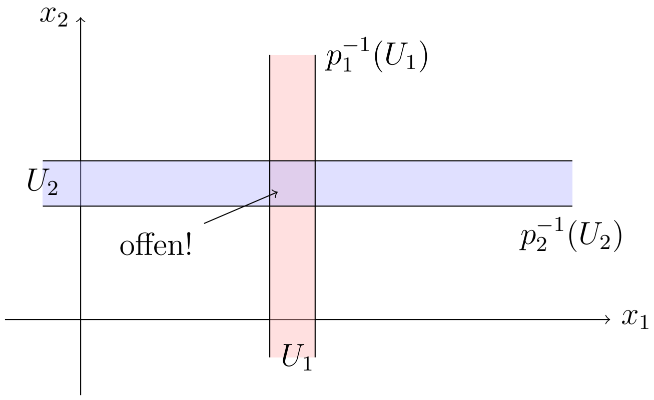
Diese Topologie heißt ***Spurtopologie***.

b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann heißt die Spurtopologie auf V auch ***Zariski-Topologie***.

c) Seien X_1, X_2 topologische Räume, $X_1 \times X_2$ das kartesische Produkt (als Mengen),

$$p_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$$

die Projektionen. Definiere die ***Produkttopologie*** auf $X_1 \times X_2$ als die gröbste Topologie, sodass p_1 und p_2 stetig sind. Das ist die kleinste Topologie, in der alle Mengen $p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$ offen sind, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist.



Frage
Ist die Zariski-Topologie auf k^2 die Produkttopologie auf $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$?

§ 4 Irreduzible Komponenten

Definition + Bemerkung 4.1
Sei X ein topologischer Raum.

a) X heißt ***reduzibel***, wenn es abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt mit $A \cup B = X$ und $A \neq X \neq B$. Eine Teilmenge von X heißt irreduzibel, wenn sie mit der induzierten Topologie irreduzibel ist.
b) Eine (bezüglich Inklusion) maximale irreduzibel Teilmenge von X heißt ***irreduzible Komponente*** von X
c) Irreduzible Komponenten sind abgeschlossen (Übung)

Beispiel 4.2
Sei X nichtleerer Hausdorffraum. Dann sind die einelementigen Teilmengen die irreduziblen Komponenten.

Denn: Sei X hausdorffsch, $x \neq y \in X$, *zeige:* X ist irreduzibel

Seien U_x, U_y offene Umgebungen von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$

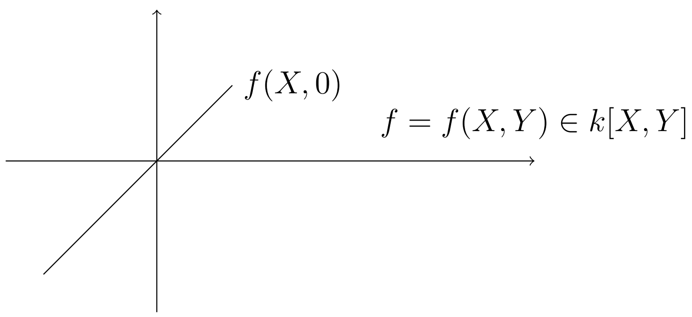
$$\Rightarrow V_x \cup V_y = X, V_x = X - U_x, V_y = X - U_y$$

$$x \notin V_x \neq X \neq V_y \not\ni y$$

Beispiel 4.3
$\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel, wenn k unendlich ist. *Denn:* echte abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^1(k)$ sind endlich.

Frage
Ist $\mathbb{A}^2(k)$ irreduzibel? Sei $\mathbb{A}^2(k) = V_1 \cup V_2, V_i = V(I)$. Seien $f_1, f_2 \in I_1$ bzw. $I_2, f_i \neq 0$. $\Rightarrow V_i \subset V(f_i), i = 1, 2$

$$\Rightarrow \underbrace{V(f_1) \cup V(f_2)}_{=V(f_1 \cdot f_2)} = \mathbb{A}^2$$



$V(f) \cup V(Y) = V(f(X, 0)) \subset \mathbb{A}^1(k)$

Entweder $V(f(X, 0))$ ist endlich *oder* $f(X, 0) = 0$, dann ist durch Y teilbar. **Genauso:** f ist durch $Y - \alpha X$ teilbar für jedes $\alpha \in k \Rightarrow f = 0$. **Antwort auf die Frage:** ja!

Proposition 4.4
Eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal ist.

Beweis
„$\Rightarrow$": Seien $f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $f \cdot g \in I(V)$. Sei $f \notin I(V)$, zu zeigen: $g \in I(V)$

$f \notin I(V) \Rightarrow \exists x \in V$ mit $f(x) \neq 0$

Nach Voraussetzung ist $V \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$

$$\Rightarrow V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V) \overset{V \text{ irred.}}{\Rightarrow} V(g) \cap V = V$$

$\Rightarrow V \subseteq V(g) \Rightarrow g \in I(V)$

„$\Leftarrow$“: Sei $I(V)$ Primideal, $V = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen V_1, V_2, also $V_i = V(I_i), i = 1,2$, für Ideale I_1, I_2. Sei $V \neq V_1$, also $V \subsetneq V(I_1)$.

$$\Rightarrow \exists x \in V, f \in I_1 \text{ mit } f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin I(V)$$

Wegen $V = V_1 \cup V_2 = V(I_1) \cup V(I_2) \overset{3.1}{=} V(I_1 \cdot I_2)$ ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow f \cdot g \in I(V)$ für jedes $g \in I_2$

$$\underset{I(V) \text{ prim}}{\overset{f \notin I(V)}{\Rightarrow}} g \in I(V) \text{ für jedes } g \in I_2$$

$\Rightarrow I_2 \subseteq I(V) \Rightarrow \underbrace{V(I_2)}_{=V_2} \supseteq \underbrace{V(I(V))}_{=V}$ $\square$

Folgerung 4.5
Eine affine Varietät$V \subset \mathbb{A}^n(k)$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow A(V) = k[X_1, \dots X_n]/I(V)$ ist nullteilerfrei.

Satz 2
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann gilt:

a) V ist endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten.

b) V hat nur endlich viele irreduzible Komponenten, diese sind eindeutig bestimmt.

Beweis

a) Sei $\mathcal{B} = \{V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, V ist *nicht* endliche Vereinigung von irreduziblen affinen Varietäten$\}$

$$\mathcal{I} = \{I(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

zu zeigen: $\mathcal{B} = \emptyset$, also auch $\mathcal{I} = \emptyset$

Wäre $\mathcal{I} \neq \emptyset$, so enthielte $\mathcal{I}$ ein maximales Element $I_0 = I(V_0)$ für ein $V_0 \in \mathcal{B}$. (*denn:* $k[X_1, \dots, X_n]$ ist noethersch, jede aufsteigende Kette von Elementen in $\mathcal{I}$ wird also stationär.) Da $V_0 \in \mathcal{B}$ ist V_0 reduzibel.

Sei also $V_0 = V_1 \cup V_2$ mit abgeschlossenen Teilmengen $V_1 \neq V_0 \neq V_2$ von V_0. Aus $V_i \subsetneq V_0$ folgt $I(V_i) \supsetneq \underbrace{I(V_0)}_{=I_0}$ (Bem. 2.4 iv))

$$\Rightarrow I(V_i) \notin \mathcal{I} \Rightarrow V_i \notin \mathcal{B}, i = 1,2$$

$\Rightarrow V_i$ ist endliche Vereinigung von irreduziblen Varietäten, also auch $V_0 \notin \mathcal{B}$ ↯

b) Sei $V = V_1, \dots, V_r$ mit irreduziblen Varietäten $V_1, \dots, V_r$. Œ $V_i \nsubseteq V_j$ für $i \neq j$ (sonst lasse V_i weg)

Behauptung: Dann ist jedes V_i irreduzible Komponente.

denn: Sei $W \subseteq V$ irreduzible Komponente mit $V_i \subseteq W$. Es gilt

$$W = \bigcup_{j=1}^{r} (V_i \cap W)$$

$\overset{W \text{ irred.}}{\Longrightarrow} \exists j$ mit $V_j \cap W = W$, also $W \subseteq V_j \Rightarrow V_i \subseteq V_j \Rightarrow i = j \Rightarrow W = V_i$

Eindeutigkeit: Sei W irreduzible Komponente von V. Aus $W = \bigcup_{j=1}^{r}(V_j \cap W)$ folgt $W \cap V_j = W$ für ein $j \Rightarrow W \subseteq V_j \overset{W \text{ irred. Komp.}}{\Longrightarrow} W = V_j$ □

Proposition 4.6
Die irreduzible Teilmenge eines topologischen Raumes X ist enthalten in einer irreduziblen Komponente von X.

§ 5 Der Hilbertsche Raum

V affine Varietät in $\mathbb{A}^n(k) \Rightarrow V(I(V)) = V$; $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ Ideal $\Rightarrow I(V(I)) \supseteq I$

Beispiel
$I = (X^2 + 1) \subset \mathbb{R}[X]$
$V(I) = \emptyset \Rightarrow I(V(I)) = \mathbb{R}[X]$

Satz 3
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Ist $I \subsetneq k[X_1, \ldots, X_n]$ Ideal, so ist $V(I) \neq \emptyset$.

b) Für jedes Ideal $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Der Beweise benutzt

Satz 3'
Ist k Körper, $n \geq 1, m \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ maximales Ideal, so ist $L := k[X_1, \ldots X_n]/m$ *algebraische* Körpererweiterung von k. Das heißt für jedes $\alpha \in L$ gibt es ein $f \in k[X]$ mit $f(\alpha) = 0$, also gibt es $d \geq 1$ und $b_0, \ldots, b_{d-1} \in k$ mit

$$\alpha^d + b_{d-1}\alpha^{d-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$k(\alpha) := k[X]/(f)$ ist Körper, der kleinste Teilkörper von L, der k und α enthält.

Folgerung 5.1
Ist k algebraisch abgeschlossen, so gibt es Bijektion zwischen den Mengen der

i) Punke $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in k^n

ii) Ideale $m_x = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$

iii) maximalen Ideale in $k[X_1, \ldots, X_n]$

Beweis
(i)⇒(ii): ✓

(ii)⇒(iii): m_x ist maximales Ideal. Die Abbildung $\varphi_x : k[X_1, \ldots, X_n] \to k, X_i \mapsto x_i, f \mapsto f(x)$ ist der Einsetzungshomomorphismus. Kern$(\varphi_x) = m_x$

(iii)⇒(i): Sei m maximales Ideal, $\varphi : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[X_1, \ldots, X_n]/m \xrightarrow[\text{Satz 3'}]{\sim} k \Rightarrow m =$ Kern(φ)
Sei $x_i = \varphi(X_i)$, dann ist $\varphi = \varphi_x$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow m = m_x$ □

Beweis (Beweis von Satz 3)

a) Sei $I \subsetneq k[X_1, \ldots, X_n]$ echtes Ideal. Sei m maximales Ideal mit $I \subseteq m$ (gibt es !) $\Rightarrow V(I) \supseteq V(m) \neq \emptyset$, da $m = m_x$ für ein $x \in k^n$ und $\{x\} = V(m_x)$

Beweis (von Satz 3')
Sei $x_i \in L$ die Restklasse von X_i. *Zu zeigen:* $x_1, \ldots, x_n$ sind algebraisch über k.

Induktion über n:

n=1: $m = (f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \Rightarrow L = k[X]/(f)$ ist k-Verktorraum der Dimension $d = \deg(f)$

$n \geq 2$: *Annahme:* x_1 ist transzendent.

Dann ist $k' = k(x_1) \cong \underbrace{k(X_1)}_{=\text{Quot}(k[X_1])}$ Teilkörpererweiterung von L. L wird über k' von $x_2, \dots, x_n$ erzeugt $\Rightarrow$ $L \cong k'[X_2, \dots, X_n]/m'$ für ein maximales Ideal m' in $k'[X_2, \dots, X_n]$

Nach Induktionsvoraussetzung ist L algebraisch über k', das heißt:

$$\begin{array}{rclll} x_i^{d_i} + \sum_{j=0}^{d_i-1} a_{ij} x_i^j & = & 0 & i = 2, \dots, n, d_i \geq 1 & a_{ij} \in k' \\ a_{ij} & = & \frac{c_{ij}}{b_{ij}} & & b_{ij}, c_{ij} \in k[X_1] \end{array}$$

$\square$

(1) Sei $R \subset k'$ die von den a_{ij} erzeugte k-Algebra.

(2) Dann sind $x_1, \dots, x_n$ ganz über $R \Rightarrow L$ ist ganze Ringerweiterung von R

(3) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

(1) $\Rightarrow R = k$ oder R ist kein Körper.

$R = k \Rightarrow$ für $\tilde{k} = k(x_2, \dots, x_n)$ ist $L = \tilde{k}[X_1]/m$, also algebraisch abgeschlossen.

$R \neq k \Rightarrow k(X_1)$ ist nicht endlich erzeugbar als k-Algebra.

(2) $\Rightarrow R$ ist Körper: Sei $a \in R \backslash \{0\}$. In L gibt es $\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j \left(\frac{1}{a}\right)^j \text{ für ein } d \geq 1, b_j \in R$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-j} = 0, 1 = a\left(-\sum_{j=0}^{d-1} b_j a^{d-1-j}\right)$$

b) Sei $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n], g \in I(V(I))$.

Zu zeigen: es gibt $d \geq 0$ mit $g^d \in I$.

Wähle Erzeuger $f_1, \dots, f_n$ von I (geht nach Satz 1). Betrachte in $k[X_1, \dots, X_n, Y]$ das von $f_1, \dots, f_n$ und $g \cdot Y - 1$ erzeugte Ideal J.

Behauptung: $V(J) = \emptyset$

denn: Sei $x = (x_1, \dots, x_n, y) \in V(J)$

Dann ist $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \dots, m$. $\Rightarrow$ für $x' = (x_1, \dots, x_n)$ ist $f_i(x') = 0 \Rightarrow x' \in V(I)$ $\Rightarrow g(x') = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow (gY - 1)(x) = g(x) \cdot y - 1 = -1 \neq 0$

Dann ist nach Satz 3 a) $J = k[X_1, \dots, X_n, Y]$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} b_i f_i + b(gY - 1) \text{ für geeignete } b_i, b \in k[X_1, \dots, X_n, Y]$$

Sei $R = k[X_1, \dots, X_n, Y]/(gY - 1)$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} \bar{b}_i f_i \text{ für } \bar{b}_i = b_i \operatorname{mod}(gY - 1)$$

Es gilt:

$$R \cong k[X_1, \dots, X_n][\frac{1}{g}]$$

$$\bar{b}_i = \frac{a_i}{g^{d_i}}, a_i \in k[X_1, \dots, X_n], d_i \geq 0$$

$\Rightarrow$ Für $d = \max d_i$ gilt

$$g^d = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(g^d \bar{b}_i\right)}_{\in k[X_1,\dots,X_n]} \cdot f_i \in I$$

□

Folgerung 5.2
Sei k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &:= \{V \subseteq k^n : V \text{ affine Varietät}\} \\ \mathcal{I}_n &:= \{I \subseteq k[X_1, \dots, X_n] : I \text{ Radikalideal}\} \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} I: &\ \mathcal{V}_n \to \mathcal{I}_n, \quad V \mapsto I(V) \\ V: &\ \mathcal{I}_n \to \mathcal{V}_n, \quad I \mapsto V(I) \end{aligned}$$

bijektiv und zueinander invers.

Bemerkung 5.3
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann entsprechen die Punkte in V bijektiv den maximalen Idealen in

$$k(V) = A(V) := k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

Beweis
Die maximalen Ideale in $A(V)$ entsprechen bijektiv den maximalen Idealen in $k[X_1, \dots, X_n]$, die $I(V)$ enthalten, also (Folgerung 5.1) den Punkten in k^n, die in V liegen. □

$x = (x_1, \dots, x_n), m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) = I(\{x\})$
$I(V) \subseteq I(\{x\})$
$V = V(I(V)) \supseteq V(I(\{x\})) = \{x\}$

§ 6 Morphismen affiner Varietäten

Definition + Bemerkung 6.1
Sei k ein Körper, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten.

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt ***Morphismus***, wenn es Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt mit
$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$
für alle $x \in V$.

b) Ein Morphismus $f : V \to W$ heißt ***Isomorphismus***, wenn es einen Morphismus $g : W \to V$ gibt mit
$$g \circ f = \mathrm{id}_W \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_V$$

c) Die affinen Varietäten über k bilden mit den Morphismen aus a) eine Kategorie $\mathrm{Aff}(k)$.

d) Jeder Morphismus $f : V \to W$ ist Einschränkung eines Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$

Beispiel 6.2

1) • Einbettungen
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^n(k) & \to & \mathbb{A}^m(k)(n \leq m) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

• Projektionen
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^n(k) & \to & \mathbb{A}^m(k)(n \geq m) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_m) \end{array}$$

• Permutation der Komponenten
$$(x_1, \ldots, x_n) \quad \mapsto \quad (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

2) Jedes $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ definert einen Morphismus
$$f : \mathbb{A}^n(k) \to A^1(k), x \mapsto f(x)$$

3) Sei $V = \mathbb{A}^1(k)$, $W = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.
$f : V \to W$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist Morphismus. f ist bijektiv mit Umkehrabbildung
$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{y}{x} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$
$g(f(x)) = g(x^2, x^3) = \frac{x^3}{x^2} = x$ (für $x \neq 0$)
$f(g(x,y)) = f(\frac{y}{x}) = (\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}) = (\frac{x^3}{x^2}, \frac{y^3}{y^2})$
Ist k unendlich, so ist g kein Morphismus!

4) Sei $\mathrm{char}(k) = p > 0$
$$f : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^n(k), (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^p, \ldots, x_n^p)$$
heißt ***Frobenius-Homomorphismus***.
Die Fixpunkte von f sind genau die Punkte, deren Koordninaten alle in $\mathbb{F}_p$ liegen („$\mathbb{F}_p$-wertige Punkte“)
$$(a^p = a \Leftrightarrow a \text{ Nullstelle von } X^p - X \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_p)$$

Bemerkung 6.3
Morphismen affiner Varietäten sind stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, $W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten, $f : V \to W$ Morphismus. Sei $Z \subseteq W$ abgeschlossen, also $Z = V(J)$ für ein Ideal $J \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$. Sei $I = \{g \circ f \in k[X_1, \dots, X_n] : g \in J\}$.
Behauptung: $V(I) = f^{-1}(Z)$
denn:

$$x \in f^{-1}(Z) \Leftrightarrow f(x) \in Z \Leftrightarrow f(x) \in V(J) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \forall g \in J \Leftrightarrow x \in V(I) \qquad \square$$

Definition + Bemerkung 6.4
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.
a) $k[V] := \{f : V \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ ist Morphismus}\}$ heißt ***affiner Koordinatenring*** von V.
b)

$$k[V] \cong A(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

Beweis
b) Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to k[V], f \mapsto f_{|V}$ Einschränkungshomomorphismus. φ ist surjektiv (Bemerkung 6.1 d))
Kern$(\varphi) = I(V) \overset{\text{Homomorphiesatz}}{\Longrightarrow}$ Behauptung $\square$

Proposition 6.5
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietät.
a) Jeder Morphismus $\varphi = f : V \to W$ induziert k-Algebrahomomorphismus

$$f^\# : k[W] \to k[V], g \mapsto g \circ f$$

b) Die Abbildung $\mathrm{Mor}(V, W) \to \mathrm{Hom}_k(k[W], k[V]), f \mapsto f^\#$ ist bijektiv.

Beweis
a) ✓
b) *injektiv:* Seien $f, \tilde{f} : V \to W$ Morphismen mit $f^\# = \tilde{f}^\#$
$\Rightarrow g \circ f = g \circ \tilde{f}$ für alle$g \in k[W]$
Insbesondere ist $\underbrace{p_i \circ f}_{=f_i} = \underbrace{p_i \circ \tilde{f}}_{=\tilde{f}_i}$ für die Projektion

$$p_i : W \to \mathbb{A}^1(k), (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

$\Rightarrow f = \tilde{f}$
surjektiv: Sei $\varphi : k[W] \to k[V]$ k-Algebra-Homomorphismus.
Definiere $f : V \to \mathbb{A}^m(k)$ durch $f(x) = (\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_n)(x))$
Behauptung:
(i) $f^\# = \varphi$
(ii) $f(V) \subseteq W$

Zu (i): für $i = 1, \dots, m$ gilt:

$$f^\#(p_i) = p_i \circ f = \varphi(p_i)$$

Da die p_i $k[V]$ erzeugen (als k-Algebra), folgt $f^\# = \varphi$
Zu (ii): Sei $g \in I(W), x \in V$
Zu zeigen: $g(f(x)) = 0$

$$\begin{tikzcd} k[X_1, \dots, X_n] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[X_1, \dots, X_n] \arrow[d] \\ k[W] \arrow[r, "\varphi"] & k[V] \end{tikzcd}$$

Lifte φ zu $\tilde{\varphi}$. Wähle dazu für jedes i ein Urbild von $\varphi(p_i)$. Dann ist $\tilde{\varphi}(I(W)) \subseteq I(V)$
$\Rightarrow g(f(x)) = g(\varphi(p_1)(x), \dots, \varphi(p_m)(x)) = \tilde{\varphi}(g)(x) = 0$ □

Bemerkung 6.6
Seien V, W affine Varietäten über k, $\varphi : k[W] \to k[V]$ k-Algebra-Homomorphismus und $f = f_\varphi : V \to W$ mit $f^\# = \varphi$. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$m_{f(x)} = \varphi^{-1}(m_x)$$

Beweis
$m_x = \{f \in k[V] : g(x) = 0\}$

$$\varphi^{-1}(m_x) = (f^\#)^{-1}(m_x) = \{h \in k[W] : h \circ f \in m_x\} = \{h \in k[W] : h(f(x)) = 0\} = m_{f(x)} \quad \square$$

Beispiel 6.7
$V = V(Y^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
$f : \mathbb{A}^1(k) \to V, x \mapsto (x^2, x^3)$

$$f^\# : \underbrace{k[V]}_{=k[X,Y]/(Y^2-X^3)} \to k[\mathbb{A}^1(k)] = k[T]$$

$f^\#(\overline{X}) = T^2$
$f^\#(\overline{Y}) = T^3$
$f^\#$ ist injektiv, aber nicht nicht surjektiv! ($T \notin \mathrm{Bild}(f^\#)$)
Es gilt aber: der von $f^\#$ auf dem Quotientenkörper induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus $f^\#(\frac{Y}{X}) = T$.

Satz 4
a) Die Zuordnung $V \mapsto k[V]$ induziert einen volltreuen kontravarianten Funktor

$$\Phi : \underline{\mathrm{Aff}(k)} \to \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}^{\mathrm{red}}} \text{ (endl. erzeugte } k\text{-Alg.)}$$

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist Φ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis

a) ✓

b) Noch zu zeigen: zu jeder k-Algebra $A \in k\,\mathrm{Alg}^{\mathrm{red}}$ gibt es affine Varietät V über k mit $k[V] \cong A$. A werde als k-Algebra erzeugt von $a_1, \ldots, a_n$. Sei $\varphi : k[X_1, \ldots, X_n] \to A$ der durch $\varphi(X_i) = a_i$ definierte k-Algebra-Homomophismus. φ ist surjektiv, da A von den a_i erzeugt wird.

$$\Rightarrow A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\,\mathrm{Kern}(\varphi)$$

Sei $V = V(\mathrm{Kern}(\varphi)) \Rightarrow I(V) \overset{\mathrm{HNS}}{=} \sqrt{\mathrm{Kern}(\varphi)} = \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]/I(V) \cong A$ □

§ 7 Die Garbe der regulären Funktionen

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper

Bemerkung 7.1
Sei $V \subset \mathbb{A}^n(k)$affine Varietät über k, $h \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt: $\overline{h}$ ist Einheit in $k[V] \Leftrightarrow V(h) \cap V = \emptyset$

Beweis

$$\begin{aligned} V \cap V(h) &= V(I(V) + (h)) = \emptyset \overset{\text{HNS}}{\Longleftrightarrow} I(V) + (h) = k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow 1 = f + gh \text{ für gewisse } f \in I(V), g \in k[X_1, \dots, X_n] \\ &\Leftrightarrow \overline{1} = \overline{g} \cdot h \text{ in } k[V] \end{aligned}$$

□

Definition + Bemerkung 7.2
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen, $p \in U$.

a) Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{A}^1(k)$ heißt ***regulär in p***, wenn es eine Umgebung $U_p \subseteq U$ von p gibt und $g, h \in k[V]$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U_p$ und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für alle $x \in U_p$.
b) $f : U \to \mathbb{A}^1(k)$ heißt ***regulär***, wenn f in jedem $p \in U$ regulär ist.
c) $\mathcal{O}(U) := \{f : U \to \mathbb{A}^1(k) : f \text{ regulär}\}$ heißt k-Algebra (oder Ring) der ***regulären Funktionen*** auf U.
d) Für jedes offene $U \subseteq V$ ist
$$\alpha_U : k[V] \to \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f_{|U}$$
ein k-Algebra-Homomophismus.
Zusatz: Ist U dicht, so ist α_U injektiv (Übung?)

Beispiel
1) $V = \mathbb{A}^1(k), U = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$
2) $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(k), U = V - \{0, 0\} \Rightarrow g = \frac{y}{x} \in \mathcal{O}_V(U)$
3) $f \in k[X_1, \dots, , X_n] \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}(D(f))$

Bemerkung 7.3
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

a) Für offene Teilmengen $U'' \subseteq U' \subseteq U$ gilt:
   (i) $\varrho^U_{U'} : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U'), f \mapsto f_{|U'}$ ist k-Algebra Homomorphismus
   (ii) $\varrho^U_{U''} = \varrho^{U'}_{U''} \circ \varrho^U_{U'}$
b) Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U (mit Indexmenge I).Dann gilt:
   (i) Für $f \in \mathcal{O}_V(U)$ ist $f = 0 \Leftrightarrow f_{|U_i} = 0 \forall i \in I$
   (ii) Für jedes $i \in I$ sei $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gegeben.
   Ist $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$ für alle i, j, so gibt es $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $f_{|U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Folgerung + Definition 7.4
Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}_V(U)$ ist eine Garbe von Ringen auf dem topologischen Raum V.

Allgemeiner:

a) ist ***Prägarbe***

b) ist die ***Garbeneigenschaft***

Beispiel
X topologisher Raum, R ein Ring. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{F}(U) = R, \varrho^U_{U'} = \mathrm{id}_R$. Ist $\mathcal{F}$ Garbe? Prägarbe: JA! Garbe nein, falls es disjunkte offene Mengen gibt!

Bemerkung 7.5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

a) Jede absteigene Kette $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ von abgeschlossenen Teilmengen von V wird stationär („V ist noetherscher topologischer Raum")
b) U ist quasikompakt, das heißt jede offene Überdeckung von U hat endliche Teilüberdeckung.

Beweis
a) $V_i = V(I_i)$, I_i Ideal in $k[V]$
   $V_i \supseteq V_{i+1} \Rightarrow I_{i+1} \supseteq I_i$
   $k[V]$ ist noethersch $\Rightarrow$ Behauptung
b) Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von U.
   Besitzt (U_i) keine endliche Teilüberdeckung, so gibt es Folge $(U_{I_k})_{k=1,2,\dots}$ mit $U_{i_{k+1}} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$.
   $W_k := \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$ ist offen in $V \overset{a)}{\Rightarrow} (W_k)$ wird stationär. □

Satz 5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät.

a) $\mathcal{O}_v(V) \cong k[V]$
b) $\mathcal{O}_v(\underbrace{D(f)}_{=\mathbb{A}^n(k)\setminus V(f)}) \cong k[V]_f = k[f]_{\{f^d : d\geq 0\}}$ für alle $f \in k[V]\setminus\{0\}$

Beweis
a) Ist ein Spezielfall von b) für $f = 1$.
b) Definiere

$$\begin{aligned} \alpha : k[V]_f &\to \mathcal{O}_V(D(f)) \\ \tfrac{g}{f^d} &\mapsto (x \mapsto \tfrac{g(x)}{f(x)^d}) \qquad (x \in D(f)) \end{aligned}$$

α wohldefiniert: Sei $\frac{g_1}{f^{d_1}} = \frac{g_2}{f^{d_2}}$ in $k[V]_f$

$\Rightarrow f^d(g_1 \cdot f^{d_2} - g_2 \cdot f^{d_1}) = 0$ für ein $d \geq 0$

für $x \in D(f)$ ist $g_1(x)f(x)^{d_2} - g_2(x)f(x)^{d_1} = 0$

$\Rightarrow \frac{g_1(x)}{f(x)^{d_1}} = \frac{g_2(x)}{f(x)^{d_2}}$

α injektiv: Sei $\frac{g(x)}{f(x)^d} = 0$ für alle $x \in D(f)$

$\Rightarrow g(x) = 0$ für alle $x \in V$

$\Rightarrow f \cdot g = 0$ in $k[V]$

$\Rightarrow g = 0$ in $k[V]_f$

α surjektiv: Sei $g \in \mathcal{O}_V(D(f))$

$\Rightarrow$ für jedes $p \in D(f)$ gibt es Umgebung $U_p \subseteq D(f)$ und $g_p, h_p \in k[V]$ mit $g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} \forall x \in U_p$

Behauptung 1: ŒE $U_p = D(h_p)$
denn: es gibt $\tilde{h}_p \in k[V]$ mit $D(\tilde{h}_p) \subseteq U_p (\subseteq D(h_p))$
$\Rightarrow V(\tilde{h}_p) \supset V(h_p) \Rightarrow \tilde{h}_p \in I(V(h_p)) \overset{HNS}{=} \sqrt{(h_p)}$
$\Rightarrow \exists d \geq 0, h \in k[V]$ mit $\tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$
Setze $\hat{g}_p = hg_p, \hat{h} = \tilde{h}_p^d = h \cdot h_p$
Dann gilt für jedes $x \in D(\hat{h}_p) = D(\tilde{h}_p)$

$$g(x) = \frac{g_p(x)}{h_p(x)} = \frac{g_p(x) \cdot h(x)}{h_p(x) \cdot h(x)} = \frac{\hat{g}_p(x)}{\hat{h}_p(x)}$$

7.5 $\Rightarrow D(f) = \boxed{D(h_1) \cup \cdots \cup D(h_r)}$ (1) für geeignete $h_i := h_{p_i}, 1 = 1, \ldots, r$
Nach Behauptung 1 ist ŒE $g = \frac{g_i}{h_i}$ auf $D(h_i)$
Behauptung 2: $g_i h_j = g_j h_i$ in $k[V]$ für alle i, j
denn: es ist $g_i h_j = g_j h_i$ auf $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$
$\Rightarrow h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i) = 0$ in $k[V]$ (*)
setze $\tilde{g}_i = g_i h_i, \tilde{h}_i = h_i^2$. Dann wird aus (*)

$$\tilde{g}_i \tilde{h}_j - \tilde{g}_j \tilde{h}_i = 0$$

(1) $\Rightarrow V(f) = \bigcup_{i=1}^r V(h_i) \Rightarrow f \in I(V(h_1, \ldots, h_r)) \overset{HNS}{\Rightarrow} f \in \sqrt{(h_1, \ldots, h_n)}$
$\Rightarrow \exists d \geq 0, b_i \in k[V]$ mit $f^d = \sum_{i=1}^r b_i h_i$
Setze $\tilde{g} := \sum_{i=1}^r b_i g_i \in k[V]$
Dan gilt für alle $i = 1, \ldots, r$ und alle $x \in D(h_j)$:

$$g(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{g_j(x) f(x)^d}{h_j(x) f(x)^d} = \frac{(g_j \sum_{i=1}^r b_i h_i)(x)}{(h_j f^d)(x)} \overset{\text{Beh. 2}}{=} \frac{h_j (\sum_{i=1}^r b_i g_i)}{h_j f^d}(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{f(x)^d}$$ □

Proposition 7.6
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine Varietäten. Dann gilt: $f : V \to W$ ist Morphismus $\Leftrightarrow f$ stetig und für jedes offene $U \subseteq W$ und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

Beweis
„$\Rightarrow$“: f stetig nach Bemerkung 6.3. Sei $g \in \mathcal{O}_W(U), p \in f^{-1}(U)$. In einer Umgebung U' von $p' = f(p)$ ist $g(y) = \frac{g_{p'}(y)}{h_{p'}(y)}$ für geeignete $g_{p'}, h_{p'} \in k[W]$. Für $x \in f^{-1}(U')$ ist also $g(f(x)) = \frac{g_{p'}(f(x))}{h_{p'}(f(x))}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} g_p' \circ f &= f^\#(g_p') \in k[V] \\ h_p' \circ f &= f^\#(h_p') \in k[V] \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen: für $i = 1, \ldots, m$ ist $p_i \circ f$ ein Polynom, wobei $p_i \in k[W]$ die Restklasse von X_i ist.
Nach Satz 5 a) ist $k[W] = \mathcal{O}_W(W) \Rightarrow p_i \circ f \in \mathcal{O}_V(V) = k[V]$ □

Definition + Bemerkung 7.7
a) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ heißt ***quasi-affine Varietät***, wenn U Zariski-offen in einer affinen Varietät V ist.

b) Eine Abbildung $f : U_1 \to U_2$ zwischen quasi-affinen Varietäten U_1, U_2 heißt ***Morphismus*** (oder ***reguläre Abbildung***), wenn f stetig ist und für jedes offene $U \subseteq U_2$ und jedes $g \in \mathcal{O}_{U_2}(U)$ gilt:

$$g \circ f \in \mathcal{O}_{U_1}(f^{-1}(U))$$

(hier sei $\mathcal{O}_{U_2} := \mathcal{O}_{\bar{U}_2}$, $\bar{U}_2$ der Z-Abschluss von U_2)

c) $f : \overbrace{U_1}^{\subseteq \mathbb{A}^n(k)} \to \overbrace{U_2}^{\subseteq \mathbb{A}^m(k)}$ ist genau dann regulär, wenn es reguläre Funktionen $f_1, \dots, f_n$ auf U_1 gibt mit $f(x) = (f_1(x), \dots, n_m(x))$ für alle $x \in U_1$

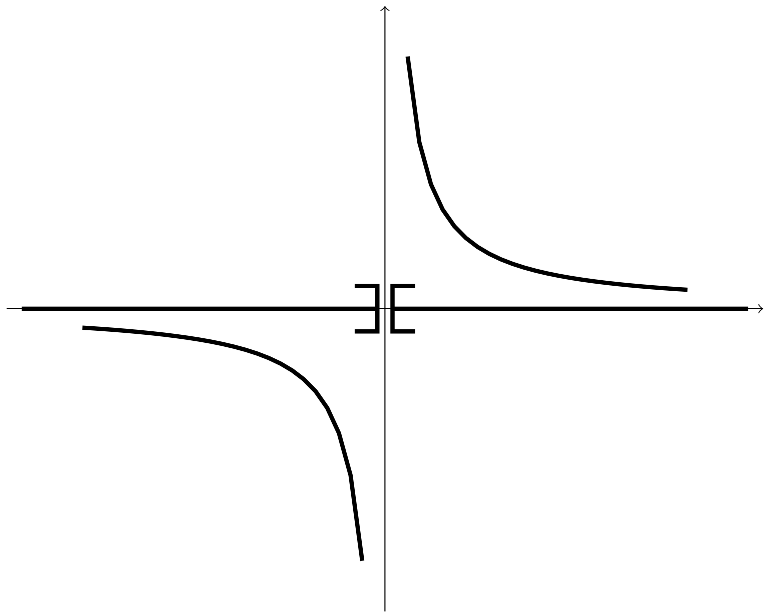
d) Die quasi-affinen Varietäten über k bilden eine Kategorie, die $\underline{\mathrm{Aff}(k)}$ als volle Unterkategorie enthält.

e) Eine quasi-affine Varietät heißt ***affin*** (als abstrakte Varietät), wenn sie isomorph ist zu einer affinen Varietät.

Bemerkung 7.8
Für $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ist $D(f)$ (abstrakt) affin.

Beispiel: $n = 1, f(x) = x, D(f) = \mathbb{A}^1(k) - \{0\}$

$V = V(XY - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$
$\varphi : V \to \mathbb{A}^1(k)$
$(x, y) \mapsto x$
$\Psi : \mathbb{A}^1(k) - \{0\} \to V, x \mapsto (x, \frac{1}{x})$



Beweis
Sei $g = f \cdot X_{n+1} - 1 \in k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ und $V = V(g) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$, V ist affine Varietät, $\varphi : D(f) \to V, x \mapsto (x, \frac{1}{f(x)})$ ist Morphismus mit Umkehrabbildung $\Psi : V(g) \to D(f), (x_1, \dots, x_(n+1)) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. $\square$

§ 8 Rational Abbildungen und Funktionenkörper

k sei wieder algebraisch abgeschlossen

Definition + Bemerkung 8.1
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ (quasi-)affine Varietät.

a) Eine ***rationale Funktion*** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist. Dabei ist $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U\cap U'} = f'|_{U\cap U'}$
b) In jeder Äquivalenzklasse gibt es ein maximales Element $(U_{\max}, f_{\max}), U_{\max} =: \mathrm{Def}(f)$ heißt ***Definitionsbereich*** der natürlichen Funktion. $V \setminus \mathrm{Def}(V)$ heißt ***Polstellenmenge*** der rationalen Funktion.
c) Die rationalen Funktionen auf V bilden eine k-Algebra $\mathrm{Rat}(V)$.
d) Ist V irreduzibel, so ist $\mathrm{Rat}(V) = \mathrm{Quot}(k[V]) =: k(V)$. $k(V)$ heißt ***Funktionenkörper***.

Beweis

a) $\sim$ ist transitiv: Sei $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2), (U_2, f_2) \sim (U_3, f_3) \Rightarrow f_1|_{U_1\cap U_2\cap U_3} = f_3|_{U_1\cap U_2\cap U_3}$
$U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ist (offen und) *dicht* in $V \Rightarrow f_1|_{U_1\cap U_3} = f_3|_{U_1\cap U_3}$ (Ü4, A5)

b)
$$U_{\max} = \bigcup_{\substack{\exists\ f\in\mathcal{O}_V(U)\\ \text{mit}(U,f)\in\text{ Klasse}}} U$$

c) $f \pm g, f \cdot g$ sind auf $\mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$ regulär
d) V irreduzibel $\Leftrightarrow I(V)$ Primideal $\Leftrightarrow k[V]$ ist nullteilerfrei
Definiere:
$$\begin{aligned} \alpha : k(V) &\to \mathrm{Rat}(V) \\ \tfrac{g}{h} &\mapsto (D(h), \tfrac{g}{h}) \end{aligned}$$
□

α *ist wohldefiniert*, weil $D(h)$ dicht (V irreduzibel)
α *ist injekiv*: ✓
α *ist surjektiv*: Sei $[(U, f)] \in \mathrm{Rat}(V)$, also $f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow \exists\ U' \subseteq U$ offen, $g, h \in k[V]$ mit $f = \frac{g}{h}$ auf U'. V irreduzibel, also U' dicht $\Rightarrow (U, f) \sim (U', \frac{g}{h}) \sim (D(h), \frac{g}{h}) \Rightarrow \alpha(\frac{g}{h}) = [(U, f)]$

Definition + Bemerkung 8.2
Seien V, W affine Varietäten.

a) Eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f_U), wobei $U \subseteq V$ offen und dicht, $f_U : U \longrightarrow W$ regulär. Es ist $(U, f_U) \sim (U', f'_U) :\Leftrightarrow f_U|_{U\cap U'} = f_{U'}|_{U\cap U'}$.
b) Rationale Funktionen auf V sind rationale Abbildungen $V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k)$.
c) Jede rationale Abbildung hat einen maximalen Definitionsbereich.

Warnung: $V \overset{f}{\dashrightarrow} W \overset{g}{\dashrightarrow} Z$ ist im Allgemeinen keine rationale Abbildung, denn $\mathrm{Def}(g) \cap f(\mathrm{Def}(f)) = \emptyset$ ist möglich.

Definition 8.3
Ein Morphismus $f : V \to W$ (von quasi-affinen Varietät) heißt ***dominant***, wenn $f(V)$ dicht in W ist.

Bemerkung + Definition 8.4

a) Die irreduziblen affinen Varietät bilden mit den dominanten rationalen Abbildungen eine Kategorie.

b) Die Isomorphismen in dieser Kategorie heißen ***birationale Abbildungen***.

Explizit: $f : V \dashrightarrow W$ birational $\Leftrightarrow \exists g : W \dashrightarrow V$, sodass $g \circ f$ und $f \circ g$ die Identität auf ihren Definitionsbereichen sind.

c) „birational" lässt sich auch für reduzible Varietäten definieren.

Beispiel 8.5

a) Sei $V = V(X, Y) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, $\left.\begin{array}{rrcrcrcl} f: & V & \to & \mathbb{A}^1(k), & (x,y) & \mapsto & x \\ g: & \mathbb{A}^1(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right\}$ beide dominant

$g \circ f$ ist auf $f^{-1}(D(g))$ regulär. Das ist *nicht dicht* in $\mathbb{A}^1(k)$!

b) $\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbb{A}^2(k) & \dashrightarrow & \mathbb{A}^2(k) \\ (x,y) & \mapsto & (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \end{array}$ ist rationale Abbildung mit

$$\mathrm{Def}(\sigma) = \mathbb{A}^2(k) - V(XY)$$

$\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Def}(\sigma)}$

c) $V = V(Y^2 - X^3)$, $\begin{array}{rrcrcrcl} \varphi: & \mathbb{A}^1(k) & \to & V, & x & \mapsto & (x^2, x^3) & \text{bijektiver Morphismus} \\ \psi: & V & \dashrightarrow & \mathbb{A}^1(k), & (x,y) & \mapsto & \frac{y}{x} & \text{ist rationale Abbildung} \end{array}$

φ ist birational (ψ auch!)

Beweis

a) Sei $f : V \dashrightarrow W$ und $g : W \dashrightarrow Z$ dominante rationale Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathrm{Def}(g)) \subseteq V$ nichtleer, offen und damit dicht $\Rightarrow g \circ f$ ist rationale Abbildung $V \dashrightarrow Z$

$\mathrm{Bild}(g \circ f) = g(\underbrace{f(\mathrm{Def}(f))}_{\text{dicht in } W})$ ist dicht in Z. □

Proposition 8.6

Sei $f : V \to W$ Morphismus affiner Varietäten und $f^\# : k[W] \to k[V]$ der zugehörige k-Algebren-Homomophismus. Dann gilt:

$$f^\# \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ dominant}$$

Folgerung 8.7

Jede dominante rationale Abbildung $f : V \dashrightarrow W$ zwischen irreduziblen affinen Varietäten induziert einen Körperhomomorphismus

$$f^\# : k(W) \to k(V)$$

Satz 6

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Dann ist die Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten über k mit dominanten rationalen Abbildungen äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten Körpererweiterungen von k mit k-Algebrenhomomorphismus.

Beweis

Die Zuordnung $V \to k(V), f \mapsto f^\#$ ist Funktor. Zu zeigen bleibt:

i) zu jeder endlich erzeugten Körpererweiterung $K|k \exists V$ mit $k(V) \cong K$

ii) $f \mapsto f^\#$ ist Projektion $\Phi : \mathrm{Rat}(V, W) \to \mathrm{Hom}_k(k(W), k(V))$

Beweis:

i) Seien $g_1, \dots, g_n$ Erzeuger von K über k, sei $A := k[g_1, \dots, g_n]$. Dann ist $K = \mathrm{Quot}(A)$
Sei $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ gegeben durch $\varphi(X_i) = g_i$ und $V := K(\mathrm{Kern}(\varphi))$
$\Rightarrow V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist affine Varietät mit $k[V] \cong A$
$\Rightarrow k(V) \cong K$

ii) Φ *injektiv:* Seien $f, g : V \dashrightarrow W$ mit $f^\# = g^\#$. Wähle $U = D(h) \subseteq \mathrm{Def}(f) \cap \mathrm{Def}(g)$ offen, affin. $f|_U$ und $g|_U$ sind Morphismen $U \to W$.

Die induzierten k-Algebren-Homomophismen $g_U^\#, f_U^\# : k[W] \to k[U] \subset k(V)$. Es gilt: $f_{U'}^\# = f^\#|_{k[U]}$

Φ *surjektiv:* Sei $\alpha : k(W) \to k(V)$ k-Algebren-Homomophismus. Wähle Erzeuger $g_1, \dots, g_n$ von $k[W]$ (als k-Algebra). Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $\alpha(g_i)$ rationale Funktion auf V.

Da V irreduzibel, ist $\bigcap_{i=1}^n Def(\alpha(g_i))$ offen, affin (für geeignetes $g \in k[V]$). Nach Konstruktion induziert α einen k-Algebren-Homomophismus

$$\alpha : k \to \mathcal{O}_U(U) = k[U]$$

$\overset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow} \alpha = f^\#$ für einen Morphismus $f : U \to W$

Außerdem U dicht in $V \Rightarrow (U, f)$ ist rationale Abbildung (f ist dominant, da $f^\#$ injektiv, dann α Homomophismus zwischen Körpern) $\square$

Kapitel 2

Projektive Varietäten

§ 9 Der Projektive Raum

Definition 9.1
Sei k ein Körper, $n \geq 0$
$\mathbb{P}^n := \{\text{Geraden durch } 0 \text{ in } k^{n+1}\}$

Bemerkung 9.2
$\mathbb{P}^n(k) = {}^{\textstyle (k^{n+1} \setminus \{0\})}\big/_{\textstyle\sim}$ Äquivalenzklassen, wobei $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn ein $\lambda \in k \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\lambda \cdot x_i = y_i$ für $i = 0, \ldots, n)$

Beispiel
0) $n = 0$: $\mathbb{P}^0(k)$ hat genau einen Punkt
1) $n = 1$: $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$
2) $k = \mathbb{R}$, $n = 1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1/\{\pm 1\}$
$n = 2$: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ „Kreuzhaube“ (nicht orientierbare geschlossene Fläche)
3) $k = \mathbb{C}$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \overset{1)}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
4) $k = \mathbb{F}_2, n = 2$: $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ hat 7 Punkte

Schreibweise: Die Klasse von $(x_0, \ldots, x_n)$ wird mit $(x_0 : \ldots : x_n)$ bezeichnet.

Bemerkung 9.3
Für $n \geq 1$ und $i = 1, \ldots, n$ sei

$$U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : x_i \neq 0\}$$

a) U_i ist wohldefinierte Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$ und $\bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i = \mathbb{P}^n(k)$

b) $\varrho_i : \begin{cases} U_i & \to & k^n \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{cases}$ ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : k^n & \to & U_i \\ (y_1, \ldots, y_n) & \mapsto & (y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n) \end{array}$$

c) $\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{P}^n(k) - U_i & \to & \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \mapsto & (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots : x_n) \end{cases}$ ist bijektiv

Umkehrabbildung:

$$(y_1 : \ldots : y_n) \mapsto (y_1 : \ldots : y_{i-1} : 0 : y_i : \ldots : y_n)$$

Beweis
b)

$$\begin{aligned}\varrho_i \circ \psi_i(y_1, \ldots, y_n) &= \varrho_i(y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i \circ \varrho_i(x_1 : \ldots : x_n) &= \psi_i(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}) \\ &= (\tfrac{x_0}{x_i} : \ldots : \tfrac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \tfrac{x_{i+1}}{x_i} : \ldots : \tfrac{x_n}{x_i}) \sim (x_1 : \ldots : x_n)\end{aligned}$$ □

Folgerung 9.4
$\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \dot\cup \mathbb{P}^{n-1}(k) = k^n \dot\cup k^{n-1} \dot\cup \mathbb{P}^{n-2}(k) = \ldots = k^n \dot\cup k^{n-1} \dot\cup \ldots \dot\cup k \dot\cup \{0\}$

§ 10 Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$

Bemerkung 10.1
Sei $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen vom Grad $d > 0$.

a) Für $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ und $\lambda \in k$ gilt:

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \dots, x_n)$$

b) f hat wohlbestimmte Nullstellenmenge $V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$

Definition 10.2
Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***projektive Varietät***, wenn es eine Menge $F \subset k[X_0, \dots, X_n]$ von homogenen Polynomen gibt mit $V = \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \forall f \in F\}$

Beispiel 10.3

a) $V(X_0, \dots, X_n) = \emptyset$

b) $H_i := V(X_i)$ „=“ $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^n(k) - U_i$
   H_i heißt Hyperebene

c) $V(X_0X_1 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ projektive Varietät
   $V \cap U_0 = V(\frac{x_1}{x_0} - (\frac{x_2}{x_0})^2) \subseteq U_0$ „=“ $\mathbb{A}^2(k)$
   $= V(y - x^2)$ Parabel
   $V \cap U_2 = V(\frac{x_0}{x_2}\frac{x_1}{x_2} - 1) \subset U_2 = \mathbb{A}^2(k)$
   $= V(xy - 1)$ Hyperbel

Warnung: Ist $V \subset \mathbb{P}^n(k), v \neq 0$, so ist

$$I_0(V) := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] : f \text{ homogen}, f(x) = 0 \forall x \in V\}$$

kein Ideal!

Denn: ist $f \in I_0(V), \deg(f) \geq 1 \Rightarrow f^2 \in I_0(V)$, aber $f + f^2$ ist nicht homogen.

Definition 10.4

a) Für $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ sei $I(V) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ das von $I_0(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogen, $f(x) = 0 \forall x \in V\}$ erzeugte Ideal. $I(V)$ heißt ***Verschwindungsideal***.

b) Ein Ideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ heißt ***homogen***, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt werden kann.

c) Für ein homogenes Ideal $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ sei

$$V(I) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle homogenen } f \in I\}$$

Definition + Bemerkung 10.5

a) Ein Ring R heißt ***graduiert***, wenn es eine Zerlegung $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ gibt mit abelschen Gruppen R_d, sodass $R_dR_e \subseteq R_{d+e}$ für alle $d, e \geq 0$

b) Eine k-Algebra S heißt ***graduiert***, wenn $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$ graduierter Ring ist und $S_0 = k$. Dann ist jedes S_d ein k-Vektorraum.

c) Die Elemente von R_d heißen ***homogen*** vom Grad d.

d) Ein Ideal $I \subseteq R$ heißt ***homogen***, wenn es von homogenen Elementen erzeugt werden kann.

e) I homogen $\Leftrightarrow I = \bigoplus_{d=0}^{\infty}(I \cap R) \Leftrightarrow$ für jedes $a \in I, a = \sum_{d=0}^{n} a_d$, $a_d \in R_d$ ist $a_d \in I$ für jedes $d = 0, \dots, n$

f) Ist $I \subset R$ homogenes Ideal, so ist R/I graduierter Ring mit $(R/I)_d = R_d/I \cap R_d$

g) Summe, Produkt, Durchschnitt und Radikal von homogenen Idealen ist homogen.

Beweis

e) „$\Leftarrow$“: ✓

„$\Rightarrow$“: Seien $(a_i)_{i \in J}$ homogene Erzeuger von I, $a_i \in R_{d_i}$, sei $a \in I$ beliebig, schreibe

$a = \sum_{\text{endl.}} r_i a_i$ mit $r_i \in R$. Sei $r_i = \sum_{d=0}^{n} r_{i,d}$ mit $r_{i,d} \in R$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad r_i a_i = \sum_{d=0}^{n} \underbrace{r_{i,d} a_i}_{\in I \cap R_{d+d_i}} \quad &\Rightarrow \quad r_i a_i \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I) \\ &\Rightarrow \quad a \in \bigoplus_{d \geq 0} (R_d \cap I) \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} \pi : \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d &\to R/I \\ r \bmod I \cap R_d &\mapsto r \bmod I \end{aligned}$$ ist surjektiver Homomorphismus.

Sei $\sum_{d=0}^{n} r_d \bmod I \cap R_d \in \operatorname{Kern} \pi \Leftrightarrow \sum r_d \in I \overset{I \text{ hom.}}{\Longleftrightarrow} r_d \in I$ für alle d

$\Rightarrow r_d \in R_d \cap I \forall d \Rightarrow \sum_d r_d \bmod I \cap R_d = 0$ in $\bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d/I \cap R_d$

$\Rightarrow \pi$ injektiv $\Rightarrow \pi$ ist Isomorphismus.

g) Seien I_1, I_2 homogen mit homogenem Erzeuger $(a_i)_{i \in J}$ bzw. $(b_i)_{i \in J}$.

- $I_1 + I_2$ wird von den a_i und den b_i erzeugt.
- $I_1 \cdot I_2$ wird von den $a_i b_i$ erzeugt.
- $\bigoplus_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap I_2) \cap R_d) = \bigoplus_{d=0}^{\infty}((I_1 \cap R_d) \cap (I_2 \cap R_d)) = \bigoplus_d (I_1 \cap R_d) \cap \bigoplus_d (I_2 \cap R_d) = I_1 \cap I_2$

Sei I homogen, $x \in \sqrt{I}$, schreibe $x = \sum_{d=0}^{n} x_d$.

Zu zeigen: $x_d \in \sqrt{I}$ für alle d

$x \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists m \geq 1$ mit $x^m \in I$

$x^m = (\sum_{d=0}^{n} x_d)^m = x_n^m +$ Terme niedrigeren Grades

$\Rightarrow x_n^m \in I \Rightarrow x_n \in \sqrt{I} \Rightarrow x - x_n \in \sqrt{I}$

$\overset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} x_d \in \sqrt{I}$ für jedes d □

Bemerkung + Definition 10.6

a) Für jede Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist $I(V)$ ein Radikalideal.

b) Die projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ bilden die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$. Diese heißt ***Zariski-Topologie***.

c) Eine projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ Primideal ist.

d) Jede projektive Varietät besitzt eine eindeutige Zerlegung in endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis

a) *Zu zeigen:* $\sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$

Sei $f \in \sqrt{I(V)}$ homogen, $m \geq 1$ mit $f^m \in I(V)$

$\Rightarrow f^m(x) = 0 \forall x \in V$

$\Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in V$

$\Rightarrow f \in I(V)$

$\overset{\sqrt{I} \text{ homogen}}{\Longrightarrow} \sqrt{I(V)} \subseteq I(V)$ □

Definition + Bemerkung 10.7

Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät, $V \neq 0$

a) $\widetilde{V} := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(k) | (x_0 : \ldots : x_n) \in V\} \cup \{(0, \ldots, 0)\}$ heißt ***affiner Kegel*** über V.

b) $\widetilde{V}$ ist affine Varietät.

Genauer: ist $V = V_{\text{proj}}(I)$ für ein homogenes Ideal $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$, so ist $\widetilde{V}$ die Nullstellenmenge von I in $\mathbb{A}^{n+1}(k)(V_{\text{aff}}(I))$

c) $I(\widetilde{V}) = I(V)$, falls k unendlich

Beweis

c) Für homogene Polynome $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ gilt:

$$f \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(\widetilde{V})$$

Zu zeigen: $I(\widetilde{V})$ ist homogenes Ideal

Sei also $f \in I(\widetilde{V}), f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, f_i homogen vom Grad i. Für jedes $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \widetilde{V}$ und jedes $\lambda \in k$ ist $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \in \widetilde{V} \Rightarrow 0 = f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i=0}^{d} \lambda^i f_i(x)$ für jedes $\lambda \in k$

$\overset{k \text{ unendl.}}{\Longrightarrow}$ dieses LGS ist nur durch $f_i(x) = 0$ für alle i lösbar $\Rightarrow f_i \in I(\widetilde{V})$ □

Proposition 10.8 (Projektiver Nullstellensatz)

Sei k algebraisch abgeschlossen, $n \geq 0, I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ homogenes Radikalideal. Ist $I \neq (X_0, \ldots, X_n)$, so ist $I(V(I)) = I$.

Beweis

Ist $I = k[X_0, \ldots, X_n]$, so ist $V(I) = \emptyset$, also $I(V(I)) = k[X_0, \ldots, X_n]$. Ist $I \neq k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen, so ist $I \subseteq (X_0, \ldots, X_n)$.

Sei $V_{\text{aff}}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ die affine Nullstellenmenge, und $V = V_{\text{proj}}(I) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die projektive Nullstellenmenge von $I \Rightarrow \widetilde{V} = V_{\text{aff}}(I)$

Dann ist $(0, \ldots, 0) \in V_{\text{aff}}(I)$, aber $\{(0, \ldots, 0)\} \neq V_{\text{aff}}(I)$. Für $(x_0, \ldots, x_n) \in V_{\text{aff}}(I) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ ist $(x_0, \ldots, x_n) \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$. Nach Bemerkung 10.7 c) ist $I(V) = I(\widetilde{V}) = I(V_{\text{aff}}(I)) \overset{\text{HNS}}{=} I$ □

Definition 10.9

Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät, $I(V) \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ das Verschwindungsideal. Dann heißt $K[V] := {}^{k[X_0, \ldots, X_n]}\big/_{I(V)}$ ***homogener Koordinatenring*** zu V.

§ 11 Homogenisieren und Dehomogenisieren

Definition + Bemerkung 11.1
Sei k ein Körper, $n \geq 1$

a) $H : \begin{cases} k[X_1, \ldots, X_n] & \to & k[X_0, \ldots, X_n] \\ f = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} \end{cases}$ (f_i homogen vom Grad i, $f_d \neq 0$) heißt ***Homogenisierung***.

b) $D : \begin{cases} k[X_0, \ldots, X_n] & \to & k[X_1, \ldots, X_n] \\ f & \mapsto & f(1, X_1, \ldots, X_n) \end{cases}$ heißt ***Dehomogenisierung***.

c) $D \circ H = \mathrm{id}$

d) Für jedes homogene $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ sei $\nu = \nu_{x_0}(F)$ mit $F = X_0^{\nu} \cdot \widetilde{F}$ wobei $X_0 \nmid \widetilde{F}$.

e) D ist k-Algebren-Homomophismus. Im Allgemeinen:

$$\begin{array}{rcl} H(f+g) & \neq & H(f) + H(g) \\ H(f \cdot g) & = & H(f) \cdot H(g) \end{array}$$

Beweis

c) Sei $f = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i \in k[X_1, \ldots, X_n] \Rightarrow H(f) = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} \Rightarrow D(H(f)) = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i = f$

d) $\widetilde{F}$ ist homogen. Schreibe $\widetilde{F} = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}$ mit $f_i \in f[X_1, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad i. $f_d \neq 0$, weil $X_0 \nmid \widetilde{F} \Rightarrow D(F) = D(\widetilde{F}) = \sum_{i=0}^{d} f_i \Rightarrow H(D(F)) = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i} = \widetilde{F}$

e) Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i, g = \sum_{i=0}^{e} g_i \Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{d+e} (\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}) \Rightarrow H(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-k}$
$H(f) \cdot H(g) = (\sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-i}) \cdot (\sum_{i=0}^{e} g_i X_0^{e-i}) = \sum_{k=0}^{d+e} (\sum_{i=0}^{k} f_i X_0^{d-i} g_{k-i} X_0^{e-(k-i)}) = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} X_0^{d+e-}$

Proposition 11.2
Sei $\mathbb{P}^n(k) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i, U_i = D(X_i)$. Mit der Zariski-Topologie von $\mathbb{P}^n(k)$ ist U_i homomorph zu $\mathbb{A}^n(k)$.

Beweis
Œ $i = 0$

Zeige:

$\varrho := \varrho : \begin{cases} U_0 & \to & k^n \\ (x_0, : \ldots : x_n) & \mapsto & (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \end{cases}$ und $\varphi : \begin{cases} k^n & \to & U_0 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1 : x_1 : \ldots : x_n) \end{cases}$
sind stetig

ϱ stetig:

Zeige: $\varrho^{-1}(V) = \varphi(V)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$

Sei $V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$, seien $f_1, \ldots, f_r$ Erzeuger von $I \Rightarrow V = \bigcap\limits_{i=1}^{r} V(f_i) \Rightarrow \varphi(V) = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \varphi(V(f_i))$

Also Œ $r = 1$, d. h. $V = V(f)$ für ein $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$

Behauptung: $\varphi(V(f)) = V(H(f)) \cap U_0$

denn: Sei $f = \sum_{i=0}^{d} f_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V(f) \Leftrightarrow$ für $\varphi(x) = (1 : x_1 : \ldots : x_n)$ gilt
$0 = H(f)(\varphi(x)) = \sum_{i=0}^{d} f_i X_0^{d-1} (1 : x_1 : \ldots : x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x) = f(x)$

φ stetig:

Wie oben genügt es zu zeigen, dass $\varrho(V(F) \cap U_0) = V(D(F))$ für jedes homogene $F \in k[X_0, \dots, X_n]$.

denn: $(x_0 : \dots : x_n) \in \varrho(V(F) \cap U_0)$

$\Leftrightarrow x_0 \neq 0$ und $F(x_0 : \dots : x_n) = 0$

$0 = F(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$

$0 = D(F)(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = D(F)(\varrho(x_0 : \dots : x_n))$ □

Definition + Proposition 11.3

Sei k algebraisch abgeschlossen.

a) Für ein Radikalideal $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ sei I^* das von den $H(f), f \in I$ erzeugte Ideal.

b) Es gilt $\varphi(V(I)) = V(I^*) \cap U_0$

c) $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$ (Zariski-Abschluss von $\mathbb{P}^n(k)$)

alternativ: $\overline{V(I)} = V(I^*)$

$\overline{V(I)}$ Zariski-Abschluss in $\mathbb{P}^n(k)$, identifiziere dabei $\mathbb{A}^n(k)$ mit $\varphi(\mathbb{A}^n(k)) = U_0 \subset \mathbb{P}^n(k)$

Beweis

c) „$\subseteq$“: ✓

„$\supseteq$“: Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen mit $V(I) \subset V$. Sei $V = V(\mathcal{J})$ für ein homogenes Ideal $\mathcal{J} \subset k[X_0, \dots, X_n]$

Behauptung: $\mathcal{J} \subseteq I^*$ (denn dann ist $V = V(\mathcal{J}) \supseteq V(I^*)$)

denn: Sei $F \in \mathcal{J}$ homogen, $x = (y_1, \dots, y_n) \in V(I)$. Dann ist Dehomogenisierung bezüglich x_0: $D_0(F)(x) = 0$ (weil $\varphi(x) \in V \subseteq V(F)$)

$\Rightarrow D_0(F) \in I(V(I)) \overset{\text{HNS}}{=} I$

$\widetilde{F} = H_0(D_0(F)) \in I^* \overset{F = X_0^\nu \cdot \widetilde{F}}{\Rightarrow} F \in I^* \Rightarrow \mathcal{J} \subseteq I^*$ □

Beispiel

$V = \{(x, x^2, x^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k) : x \in k\} = V(y - x^2, z - x^3)$

$\overline{V} \neq V(x_0 y - x^2, x_0^2 z - x^3)$ (Übung)

Definition + Bemerkung 11.4

a) Eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ heißt ***quasi-projektive Varietät***, wenn W offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist.

b) W quasi-projektiv $\Leftrightarrow$ es gibt $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen und $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen, sodass $W = V \cap U$

c) Die Zariski-Topologie auf einer quasi-projektiven Varietät besitzt eine Basis aus (abstrakt) affinen Varietäten.

d) Jede quasi-projektive Varietät ist quasikompakt.

Beweis

c) Sei $U \subseteq W$ offen. Für $i = 0, \dots, n$ ist $U \cap U_i$ offen in $U_i \cap W$ und damit in der affinen Varietät $\overline{U_i \cap W}$ (Zariski-Abschluss in $\mathbb{A}^n(k) = \varrho_i(U_i)$).

Nach Bemerkung 3.6 ii) bilden die $D(f)$, $f \in k[V_i]$, eine Basis der Zariski-Topologie auf V_i. $D(f)$ ist (abstrakt) affin nach Bemerkung 7.8.

d) $W \cap U_i$ ist quasi-kompakt für jedes i nach Bemerkung 7.5 b) $\Rightarrow$ W ist auch quasi-kompakt. □

§ 12 Reguläre Funktionen

Bemerkung 12.1
Sind $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(F) = \deg(G)$, so ist $\frac{F}{G}$ wohldefinierte Funktion auf $D(G) = \mathbb{P}^n(k) - V(G)$.

Beweis
klar! □

Definition 12.2
Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät, $f : W \to k$ Abbildung.

a) f heißt ***regulär in*** $x \in W$, wenn es eine Umgebung $U_x \subseteq W$ von x gibt und homogene Polynome $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $f(y) = \frac{F}{G}(y)$ für alle $y \in U_x$ (insbesondere $U_x \subseteq D(G)$).
b) f heißt ***regulär***, wenn es in jedem $x \in W$ regulär ist.

Bemerkung 12.3
Eine Funktion $f : W \to k$ ($W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektiv) ist regulär $\Leftrightarrow$ $f|_{U_i \cap W} = f \circ \varphi_i$ regulär für $i = 0, \dots, n$ wobei

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_i : & \mathbb{A}^n(k) & \to & U_i \subset \mathbb{P}^n(k) \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n) \\ & (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n) \end{array}$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: Sei $x \in W \cap U_i$, $f = \frac{F}{G}$ in Umgebung U_x von x, Œ $U_x \subset U_i$.
$\Rightarrow f \circ \varphi_i = \frac{F \circ \varphi_i}{G \circ \varphi_i} = \frac{D_i(F)}{D_i(G)}$ auf $U_x \Rightarrow f \circ \varphi_i$ regulär im Sinne von Definition 7.2.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \in W \cap U_i$, $f = \frac{g}{h}$ in einer Umgebung $U_x \subseteq U_i$ von x, $g, h \in k[X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n]$.
Sei $G = H_i(g)$, $H = H_i(k)$. Ist $\deg(G) < \deg(H)$, ersetze G durch $\widetilde{G} = G \cdot X_i^{\deg(H) - \deg(G)}$
$\Rightarrow \frac{\widetilde{G}}{H}$ ist reguläre Funktion im Sinne von Definition 12.2 auf U_x und $f = \frac{\widetilde{G}}{H}$ auf U_x. □

Definition + Bemerkung 12.4
Sei $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät.

a) Für $U \subseteq W$ sei $\mathcal{O}_W(U) := \{f : U \to k | f \text{ regulär}\}$.
b) $\mathcal{O}_W(U)$ ist k-Algebra.
c) $U \mapsto \mathcal{O}_W(U)$ ist Garbe von k-Algebren.

Satz 7
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietät.

a) Ist V zusammenhängend, so ist $\mathcal{O}_V(V) = k$.
b) Sei $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(F) \geq 1, F \notin I(V)$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_V(D(F)) \cong k[V]_{(F)} := \left\{ \frac{G}{F^r} : G \in k[V] \text{ homogen}, \deg(G) = r \deg(F) \right\}$$

(homogene Lokalisierung)

Beweis
b) Definiere: $\psi : k[V]_{(F)} \to \mathcal{O}_V((F)), \frac{G}{F^r} \mapsto (x \mapsto \frac{G}{F^r}(x))$

ψ ist wohldefinierter k-Algebren-Homomophismus.

ψ injektiv: Ist $\frac{G}{F^r}(x) = 0$ für alle $x \in D(F)$, so ist $D(F) \subseteq V(G) \Rightarrow F \cdot G = 0$ auf ganz V, das heißt $F \cdot G \in I(V) \Rightarrow \frac{G}{F^r} = 0$ in $k[V]_{(F)}$

ψ surjektiv: Sei $h \in \mathcal{O}_V(D(F))$

Für $i = 0, \dots, n$ mit $D(F) \cap U_i \neq 0$ ist $h \circ \varphi_i$ regulär auf $D(F) \cap U_i = D(f_i)$, wobei $f_i = D_i(F) \overset{\text{Satz 5b)}}{\Longrightarrow} h \circ \varphi_i = \frac{g_i}{f_i^{r_i}}$ für ein $g_i \in k[X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n]$ und ein $r_i > 0$.

Homogenisiere bezüglich X_i: erhalte $\frac{G_i}{F^{r_i} X_i^{e_i}}$, Œ $r_i = 1$ (sonst ersetze F durch F^{r_i}) $\Rightarrow$

Auf $D(F) \cap U_i \cap U_j$ ist $\frac{G_i}{F \cdot X_i^{e_i}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}}$, also $G_i F X_j^{e_j} = G_j F X_i^{e_i} = 0$

$$G_i F X_j^{e_j+1} X_i - G_j F X_i^{e_i+1} X_j = 0 \text{ in } k[V] \qquad (*)$$

$F \in (X_0, \dots, X_n)$

$\overset{!}{\Rightarrow} \exists m \geq 1$ mit $F^m \in (X_0^{e_0+1}, \dots, X_n^{e_n+1})$

Das heißt $F^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1}, H_i \in k[X_0, \dots, x_n]$ homogen. Setze $G := \sum_{i=0}^{n} H_i G_i X_i$

$\Rightarrow F^{m+1} G_j X_j = \sum_{i=0}^{n} H_i F X_i^{e_i+1} G_j X_j \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n} H_i F X_j^{e_j+1} G_i X_i = G \cdot F X_j^{e_j+1}$

$\Rightarrow$ Auf $D(F) \cap U_j$ ist $\frac{G}{F^{m+1}} = \frac{G_j}{F \cdot X_j^{e_j}} = h \circ \varphi_j \Rightarrow h = \psi\left(\frac{G}{F^{m+1}}\right)$

a) Œ V irreduzibel

denn: Sei $V = \bigcup_{j=1}^{r} V_j, V_j$ irreduzibel. Ist $h|_{V_j} = c_j$ konstant für jedes j, so ist $c_i = c_j$ falls $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Da V zusammenhängend ist, ist h konstant.

Sei also V irreduzibel, $f \in \mathcal{O}_V(V) \overset{10.6}{\Longrightarrow} I(V)$ ist Primideal, also $k[V]$ nullteilerfrei, sei also $L := \mathrm{Quot}(k[V])$

Sei $f_i = f|_{V \cap U_i} \in \mathcal{O}_V(U \cap U_i)$. Falls $V \cap U_i \neq \emptyset$, so ist $f_i = \frac{G_i}{X_i^{d_i}}$ (nach Teil b)) für ein homogenes $G_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ vom Grad d_i.

Ist für $j \neq i$ auch $V \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $V \cap U_i \cap U_j$ dicht in V und $\frac{G_i}{X_i^{d_i}} = \frac{G_j}{X_j^{d_j}} =: f \in L$.

Behauptung 1: f ist ganz über $k[V]$

Dann gibt es ein $m \geq 1$ und $a_0, \dots, a_{m-1} \in k[V]$, so dass

$$\begin{aligned} f^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j f^j &= 0 \qquad | \cdot X^{d_i \cdot m} \\ \underbrace{G_i^m}_{\deg = d_i \cdot m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cdot \underbrace{G_i^j \cdot X_i^{d_i(m-j)}}_{\deg = d_i j + d_i m - d_i j = d_i m} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Œ $a_j \in k$ für alle j

$\Rightarrow f$ algebraisch über $k \overset{k \text{ alg. abg.}}{\Longrightarrow} f \in k$

Bew. von Beh. 1: Sei $d := \sum_{i=1}^{n} d_i$ und $k[V]_d$ die homogenen Elemente vom Grad d.

Behauptung 2: $k[V]_d \cdot f^j \subseteq k[V]_d$ für alle $j \geq 0$

Dann ist insbesondere $X_0^d \cdot f^j \in k[V]$ für jedes $j \geq 0$

$\Rightarrow k[V][f]$ ist in einem endlich erzeugbaren $k[V]$-Modul enthalten $\Rightarrow k[V][f]$ ist selbst endlich erzeugter $k[V]$-Modul (da $k[V]$ noethersch ist)

$\Rightarrow f$ ist ganz über $k[V]$

Bew. von Beh. 2: $k[V]_d$ wird erzeugt von den $X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n}$ mit $\sum_{i=1}^{n} j_i = d = \sum_{i=1}^{n} d_i$.
Es gibt also ein i mit $j_i \geq d_i$
$\Rightarrow X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n} \cdot \frac{G_i}{X_i^{d_i}} = X_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot X_i^{j_i - d_i} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n} G_i \in k[V]_d \underset{\text{Ind. über } j}{\Longrightarrow}$ Beh. 2 $\square$

§ 13 Morphismen

Definition + Bemerkung 13.1
Seien $V \subseteq \mathbb{P}^n(k), W \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ quasiprojektive Varietäten.

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt ***Morphismus***, wenn es zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $U_x \subset V$ und homogene Polynome $F_0, \dots, F_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ vom gleichen Grad gibt, sodass $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_n(y))$ für jedes $y \in U_x$

b) f ist genau dann Morphismus, wenn für alle $i = 0, \dots, n$ und $j = 0, \dots, m$ mit $U_{ij} := f^{-1}(W \cap U_j) \cap U_i$ gilt: $f|_{U_{ij}} : U_{ij} \to W \cap U_j$ ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten

c) Die Morphismen $V \to \mathbb{A}^1(k)$ entsprechen bijektiv den regulären Funktionen auf V.

d) Morphismen sind stetig

e) Die quasiprojektiven Varietäten über k bilden mit den Morphismen eine Kategorie $\underline{\mathrm{Var}(k)}$

Beispiel 13.2

1) Sei k unendlicher Körper.

Sei $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{P}^2(k) \setminus \{(0:0:1)\} & \to & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0 : x_1) \end{array}$

f ist Morphismus.

Behauptung: f lässt sich nicht fortsetzen zu Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$

denn: $\tilde{f}^{-1}(1 : 1)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{P}^2$, enthält alle $(\lambda : \lambda : 1) \in \mathbb{P}^2 : \lambda \neq 0$ Das ist unendliche, also dichte Teilmenge von $V(X_0 \pm X_1)$

$(0 : 0 : 1) \in V(X_0 - X_1) \cap V(X_0 + X_1)$ ↯

2) Sei $E = V(X_0X_2^2 - X_1^3 + X_0^2X_1)$

$E \cap U_0 = V(y^2 - x^3 + x)$ mit $y = \frac{x_2}{x_0}, x = \frac{x_1}{x_0}$

Sei $f : E \setminus \{P_2\} \to \mathbb{P}^1(k), (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1)$:

$P_2 = (0 : 0 : 1) \in E$

Behauptung: f lässt sich in P_2 fortsetzen.

Sei $f(x_0 : x_1 : x_2) := \begin{cases} (x_0 : x_1) & ,(x_0 : x_1 : x_2) \neq (0:0:1) = P_2 \\ (x_1^2 : x_2^2 + x_1x_0) & ,(x_0 : x_1 : x_2) \neq (1:0:0) = P_0 \end{cases}$

f ist wohldefiniert, denn für $\overbrace{(x_0 : x_1 : x_2)}^{=:P} \in E \setminus \{P_0, P_2\}$

$(x_0 : x_1) = (x_0\overbrace{(x_2^2 + x_1x_0)}^{\neq 0, \text{ weil aus } x_2^2+x_1x_0=0 \text{ folgt: } x_1=0 \text{ also muss auch } x_2=0, \text{ d.h. } P=P_2} : x_1(x_2^2 + x_1x_0)) \overset{P\in E}{=} (x_1^3 : x_1(x_2^2+x_1x_0)) = (x_1^2 : x_2^2+x_1x_0), x_1 \neq 0$
da sonst $P = P_2$ oder $P = P_0$

Beweis (Beweis von Bemerkung 13.1)

b) Œ $i = 0, x \in U_{0j}$

„$\Rightarrow$“: Sei $f(y) = (F_0(y) : \dots : F_m(y))$ in einer Umgebung $U_x \subseteq U_0$ von x.

$\Rightarrow f(y) = (F_0(1 : y_1 : \dots : y_n) : \dots : F_m(1 : y_1 : \dots : y_n)) = (f_0(y) : \dots : f_m(y)) = (\frac{f_0(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_{j-1}(y)}{f_j(y)}, \frac{f_{j+1}(y)}{f_j(y)}, \dots, \frac{f_n(y)}{f_j(y)})$

$f_i := D_0(F_i) \Rightarrow f$ ist Morphismus von quasiaffinen Varietäten.

„$\Leftarrow$“: Sei $f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$ (für $y \in U_x$) mit $f_i = \frac{g_i}{h_i}, g_i, h_i \in k[X_1, \dots, X_n]$

Sei $G_i := H_0(g_i), H_i = H_0(h_i)$ (Homogenisierung bezüglich X_0)

Für geeignete Exponenten ist dann:

$f(y) = (H_1(y) \cdot \ldots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_0} : G_1(y) \cdot H_1(y) \cdot \ldots \cdot H_n(y) \cdot X_0^{e_1} : \ldots : G_n(y) \cdot H_1(y) : \ldots : H_{n-1}(y) \cdot X_0^{e_n})$ □

Bemerkung 13.3

Seien V, W quasiprojektive Varietäten, $f : V \to W$ Abbildungen. Dann gilt: f Morphismus $\Leftrightarrow$ f stetig und für jedes $U \subset W$ offen und jedes $g \in \mathcal{O}_W(U)$ ist $g \circ f \in \mathcal{O}_V(f^{-1}(U))$

Beweis

„$\Rightarrow$“: f stetig nach Bemerkung 13.1 d)

Nach 13.1 c) ist $g : U \to \mathbb{A}^1(k)$ Morphismus.

$\Rightarrow g \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{A}^1(k)$ Morphismus $\overset{13.1\ c)}{\Longrightarrow}$ $g \circ f$ regulär

„$\Leftarrow$“: Folgt aus 13.1 b) und Bemerkung 7.7. □

Bemerkung 13.4

Sei $f : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ Morphismus. Dann gibt es homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $f(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$ für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$

Beweis

Übung? □

Beispiel 13.5

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$

Dann ist die Abbildung $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(k) & \to & \mathbb{P}^1(k) \\ (x_0 : x_1) & \mapsto & (cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0) \end{array}$ ein Isomorphismus, Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}$

Definition + Bemerkung 13.6

Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät, k algebraisch abgeschlossen.

a) Eine ***rationale Funktion*** auf V ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f), wobei $U \subseteq V$ offen, dicht, $f \in \mathcal{O}_V(U)$. Dabei ist $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$

b) Ist V irreduzibel, so bilden die rationalen Funktionen auf V einen Körper, den ***Funktionenkörper*** $k(V)$.

c) Ist V irreduzibel, so ist $k(V) = \mathrm{Quot}(k[U])$ für jede offene, dichte, affine Teilmenge $U \subseteq V$.

d) Ist V irreduzibel und projektiv mit homogenem Koordinatenring $k[V]$, so ist $k(V) = \{\frac{f}{g} \in \mathrm{Quot}(k[V]) : f, g \text{ homogen vom gleichen Grad}\} =: \mathrm{Quot}_0(k[V])$.

Beweis

c) Sei $U \subseteq V$ offen, dicht, affin.

$\alpha : \mathrm{Rat}(V) \to \mathrm{Rat}(U), [(U', f)] \mapsto [(U' \cap U, f|_{U' \cap U})]$

α ist injektiv nach Definition der Äquivalenzrelation.

α ist surjektiv, weil U dicht in V ist.

Nach 8.1 d) ist $\mathrm{Rat}(U) \cong \mathrm{Quot}(k[U])$.

d) $\begin{array}{ccc} \mathrm{Quot}_0(k[V]) & \to & \mathrm{Rat}(V) \\ \frac{f}{g} & \mapsto & [(D(g), x \mapsto \frac{f}{g}(x))] \end{array}$ ist bijektiver Homomorphismus von k-Algebren. □

Definition + Bemerkung 13.7
Seien V, W quasiprojektive Varietäten

a) Eine ***rationale Abbildung*** $f : V \dashrightarrow W$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, f) wo $U \subset V$ offen, dicht und $f : U \to W$ Morphismus.

b) Eine rationale Abbildung f heißt ***dominant***, wenn $f(U) \subset W$ dicht ist für einen Vertreter (U, f) der Klasse (und damit für jeden).

c) Die Zuordnung $V \mapsto k(V)$ induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{irred. quasi-proj. Var.}/k \\ +\text{dominante rat. Abb.} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{endl. erz. Körpererw. } K|k \\ +k\text{-Alg-Hom.} \end{array} \right\}$$

§ 14 Graßmann-Varietäten

Definition + Bemerkung 14.1
Sei k ein Körper, $n \geq 1$, V ein n-dimensionaler k-Vektorraum. Für $0 \leq d \leq n$ sei $G(d,n)(V) := \{U \subseteq V : U \text{ Untervektorraum, } \dim U = d\}$. *Speziell* $G(d,n) := G(d,n)(k^n)$
Jeder Isomorphismus $V \to k^n$ induziert eine Bijektion $G(d,n)(V) \to G(d,n)$

Beispiel
1) $G(0,n)$ und $G(n,n)$ sind einelementig.
2) $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$

Bemerkung 14.2
Für jedes $d = 0, \ldots, n$ gibt es eine „natürliche“ Bijektion $G(d,n) \to G(n-d,n)$

Beweis
Sei $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ der Dualraum von V.
Die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} G(d,n) & \to & G(n-d,n)(V^*) \\ U & \mapsto & \{l \in V^* : U \subseteq \mathrm{Kern}(l)\} \\ \bigcap\limits_{l \in U^*} \mathrm{Kern}(l) & \leftarrow\!\shortmid & U^* \end{array}$$

sind zueinander invers. $\square$

Einschub 14.3
Λ^d sei k-Vektorraum mit Basis $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$ für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n$ wobei $e_1, \ldots, e_n$ einen Basis von V sei. $\Lambda^d V$ ist $\binom{n}{d}$-dimensionaler k-Vektorraum.

Die Abbildung $\wedge = \wedge_d : \begin{array}{rcl} V^d & \to & \Lambda^d V \\ (e_{i_1}, \ldots e_{i_d}) & \mapsto & (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}) \end{array}$ ist multilinear und alternierend.

Dann: $(v_1, \ldots v_n) \mapsto$?

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i \qquad \begin{array}{rcl} (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & \sum\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n \\ \sigma \in S_d}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \cdot \lambda_{1 i_1} \cdot \lambda_{2 i_2} \cdot \ldots \lambda_{d i_d} \\ & = & \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} \cdot \sum\limits_{\sigma \in S_d} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} \lambda_{\sigma(1) i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{\sigma(d) i_d} \end{array}$$

a) $\Lambda^d V$ ist $\binom{n}{d}$-dimensionaler k-Vektorraum mit Basis

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n\}$$

b) $V^d \to \Lambda^d V, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ ist multilinear und alternierend.

Bemerkung 14.4
Die Abbildung $\Psi : G(d,n)(V) \to \mathbb{P}(\Lambda^d V), U \mapsto [u_1 \wedge \ldots \wedge u_d]$ ist wohldefiniert und injektiv, dabei sei $u_1, \ldots, u_d$ eine Basis von U.

Beweis
Sei $v_1, \ldots, v_d$ weitere Basis von U. Dann gibt es $A \in \mathrm{GL}_d(k)$ mit $A \cdot u_i = v_i, i = 1, \ldots, d$.

$\Rightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_d = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{1i} u_i \wedge \ldots \wedge \sum\limits_{i=1}^{d} a_{di} u_i \overset{\text{s. o.}}{=} \det(A) u_1 \wedge \ldots \wedge u_d$

$\Rightarrow \Psi$ wohldefiniert

Ψ *injektiv*:

Behauptung: $U = \{v \in V : \overbrace{v \wedge (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d)}^{\in \Lambda^{d+1} V} = 0\}$
Beweis der Behauptung:

$$v \wedge (u_1 \wedge \ldots \wedge u_d) = 0 \Leftrightarrow v u_1, \ldots, u_d \text{ lin. unabh. } \Leftrightarrow v \in \langle u_1, \ldots, u_d \rangle = U \qquad \square$$

Definition + Bemerkung 14.5
Sei $d \geq 2$ und $\omega \in \Lambda^d V$

a) ω heißt ***total zerlegbar***, wenn es linear unabhägige Vektoren $v_1, \ldots, v_d$ in V gibt mit $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$.
b) $[\omega] \in \mathrm{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \omega$ total zerlegbar
c) Die Abbildung $\varphi_\omega : V \to \Lambda^d V, v \mapsto v \wedge \omega$ ist linear.
d) Für $v \in V$ gilt: $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^d V$ mit $\omega = v \wedge \omega'$
e) Für unabhägige $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt:

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathrm{Kern}(\varphi_\omega) \Leftrightarrow \exists \omega' \in \Lambda^{d-k} V \text{ mit } \omega \in v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u\omega'$$

f) $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) \leq d$
g) $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi_\omega)) = d \Leftrightarrow \omega$ total zerlegbar

Beweis
b) und c) klar
d) ist Spezialfall von e)
f) und g) folgen aus e)
e) Ergänze zur Basis $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ von V. Schreibe $\omega = \sum\limits_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots i_d \leq n \\ \underline{i} = (i_1, \ldots, i_d))}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d}$

Für $j = 1, \ldots, k$ ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_\omega(v_j) &= \omega v_j = \sum_{\underline{i}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \\ &= \sum_{\substack{\underline{i} \\ j \in \underline{i}}} \lambda_{\underline{i}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d} \wedge v_j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_{\underline{i}} \neq 0$ höchstens wenn $\{1, \ldots, k\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_d\}$

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\substack{\underline{i} = (1, \ldots, k, i_{k+1}, \ldots, i_d) \\ k < i_{k+1} < \ldots < i_d \leq n}} \lambda_{\underline{i}} v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge v_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge v_d \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge \underbrace{\sum_{k < i_{k+1} < \ldots < i_d \leq n} \lambda_{\underline{i}} v_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge v_{i_d}}_{=: \omega' \in \Lambda^{d-k} V} \end{aligned} \qquad \square$$

Proposition 14.6
$\mathrm{Bild}(\Psi)$ ist Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$, das heißt Ψ ist eine Bijektion von $G(d, n)$ auf eine projektive Varietät.

Beweis
Für $\omega \in \Lambda^d V$ ist $\varphi_\omega : V \to \Lambda^d V$ linear. Sei L_ω die Abbildungsmatrix von φ_ω bezüglich der Basen $e_1, \ldots, e_n$ und $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d}$. Sei $L_\omega = \left(l_{ij}^{(\omega)}\right)_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,\binom{n}{d+1}}}$, $l_{ij} : \Lambda^d V \to k$ ist linear (!)

(Die l_{ij} heißen ***Plücker Koordinaten*** auf $\Lambda^d V$)

$[\omega] \in \text{Bild}(\Psi) \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi_\omega)) \geq d \Leftrightarrow \text{Rang}(L_\omega) \leq n-d$

$\Leftrightarrow$ Jede $(n-d+1) \times (n-d+1)$-Untermatrix von L hat Determinante 0

Diese Determinanten sind homogene Polynome f_{IJ} vom Grad $n-d+1$ in den $l_{ij}(\omega)$ ($|I| = |J| = n-d+1, I \subset \{1, \dots, \binom{n}{d}\}, J \subset \{1, \dots, n\}$)

$\Rightarrow \text{Bild}(\Psi) = V(f_{IJ} : |I| = |J| = n-d+1)$ ist abgeschlossen. □

Proposition + Definition 14.7
Für $n \geq 1$ und $1 \leq d \leq n$ sei

$$\mathcal{F}_{d.n}(k) := \{(\omega, v) \in \mathbb{P}(\Lambda^d k^n) \times k^n : \omega = \Psi(U) \in \text{Bild}(\Psi), v \in U\}$$

a) $\mathcal{F}_{d,n}(k)$ ist quasiprojektive Varietät.
b) $\pi_{d,n} := \pi : \mathcal{F}_{d,n}(k) \to G(d,n), (\omega, v) \mapsto \omega$ ist surjektiver Morphismus.
c) Für jedes $\omega = \Psi(U) \in G(d,n)$ ist $\pi^{-1}(\omega) = U \subset \{\omega\} \times k^n$
d) $\mathcal{F}_{d,n}(k)$ heißt ***tautologisches Bündel***.

Beweis
a) Es ist $U = \{v \in k^n : v \wedge (\overbrace{u_1 \wedge \ldots \wedge u_d}^{=\omega}) = 0\} = \text{Kern}(\varphi_\omega) = \{v \in k^n : L_\omega v = 0\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{d,n}(k)$ ist die Menge aller Paare (ω, v) mit $f_{IJ}(\omega) = 0$ für alle I, J wie oben *und* $\sum_{j=1}^n l_{ij}(\omega) v_j = 0$ □

Beispiel
$d=1$: $\mathcal{F}_{1,n}(k) = \{((x_1 : \ldots : x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) \times k^n : (y_1 : \ldots : y_n) = (x_1 : \ldots : x_n)$ oder $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)\}$

Gleichungen: $y_i x_j = y_j x_i$ für alle i, j, konkret $n = 3, \omega = (x_1 : x_2 : x_3)$

$$\varphi_\omega : \begin{array}{ccc} k^3 & \to & \Lambda^2 k^3 \\ v & \mapsto & v \wedge \omega \end{array} \quad \text{(Basis } e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\omega(e_1) &=& e_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &=& x_2 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_1 \wedge e_3 \\ \varphi_\omega(e_2) &=& e_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &=& -x_1 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_2 \wedge e_3 \\ \varphi_\omega(e_3) &=& e_3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &=& -x_1 e_1 \wedge e_3 + x_2 e_2 \wedge e_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow L_\omega = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$$

$$L_\omega \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2y_1 - x_1y_2 = 0 \\ x_3y_1 - x_1y_3 = 0 \\ x_3y_2 - x_2y_3 = 0 \end{array}$$

Kapitel 3

Lokale Eigenschaften

§ 15 Lokale Ringe

Definition 15.1
Sei k ein Körper, V quasiprojektive Varietät über k, $x \in V$.

a) $\mathcal{O}_{V,x} = \{[(U,f)]_\sim : U$ offene Umgebung von $x, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$ mit

$$(u,f) \sim (U',f') :\Leftrightarrow f|_{u\cap U'} = f'|_{U\cap U'}$$

   $\mathcal{O}_{V,x}$ heißt ***lokaler Ring*** von V in x.

b) Die Elemente von $\mathcal{O}_{V,x}$ heißen ***Keime*** von regulären Funktionen. *Schreibweise*: $(U,f)_\sim =: f_x$

Beispiel
$V = \mathbb{A}^1(k), x = 0$
U offen $\Rightarrow U = \mathbb{A}^1(k) - \{x_1,\dots,x_n\}, x_i \neq 0$
$f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f = \frac{g}{h}$ auf $h(y) \neq 0$ für $y \neq x_i$ $(i = 1,\dots,n)$
$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),0} = \{\frac{g}{h} : g,h \in k[X], h(0) \neq 0\} = k[X]_{(X)}$ mit der Notation (R Ring, $\mathfrak{p}$ Primideal)

$$R_\mathfrak{p} = \left\{\frac{a}{b} : a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\right\}$$

$\mathfrak{p} \cdot R$ ist das einzige maximale Ideal in $R_\mathfrak{p}$.

Bemerkung 15.2
Seien k, V, x und $\mathcal{O}_{V,x}$ wie in 15.1.

a) Die Abbildung $\varphi_x : \mathcal{O}_{V,x} \to k, f_x \mapsto f(x)$ ist surjektiver k-Algebra-Homomophismus („Einsetzungshomomorphismus“).

b) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\} = \mathrm{Kern}(\varphi_x)$.

Beweis

a) ✓

b) $\mathrm{Kern}(\varphi_x)$ ist maximales ideal, da ${\mathcal{O}_{V,x}}/{m_x} = k$ Körper ist.
   m_x ist das einzige maximale Ideal: Sei $f_x \in \mathcal{O}_{V,x} - m_x \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ für ein (U,f) mit $(U,f)_\sim = f_x$
   $\Rightarrow g := \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(U')$ für $U' := D(f) \cap U$
   $\Rightarrow g_x := (U',g)_\sim \in \mathcal{O}_{V,x}$
   $\Rightarrow f_x \cdot g_x = 1$ □

Bemerkung 15.3

a) Für jedes offene $U \subseteq V$ mit $x \in U$ ist

$$\psi_x^U : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_V(U) & \to & \mathcal{O}_{V,x} \\ f & \mapsto & f_x \end{array}$$

ein k-Algebra-Homomophismus.

b) Zusammen mit dem Restriktionshomomophismus $\varrho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für $U' \subset U$ bilden die ψ_x^U ein injektives System von k-Algebra-Homomophismen. Es ist $\varinjlim_{\substack{x \in U \\ U \subset V \text{ offen}}} \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V,x}$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_V(U) \arrow[ld, "\alpha_U"'] \arrow[d, "\varrho^U_{U'}"] \arrow[rd, "\psi^U_x"] & \\
A & & \mathcal{O}_{V,x} \arrow[ll, dashed, bend left=60, "\alpha"] \\
& \mathcal{O}_V(U') \arrow[lu, "\alpha_{U'}"] \arrow[ru, "\psi^{U'}_x"'] &
\end{tikzcd}$$

c) ψ_x^U ist injektiv, falls $U \subset \bigcup_{\substack{V_i \text{ irred. Komp.} \\ \text{v. } V \text{ mit } x \in V_i}} V_i$

Proposition 15.4

Seien V, x wie in Definition 15.1, $V_0 \subseteq V$ offen, affin mit $x \in V_0$. Dann ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{v_0}}$, wobei $m_x^{v_0} = f \in k[V_0] | f(x) = 0$, insbesondere ist $\mathcal{O}_{V,x}$ von V_0 unabhängig

Beweis

Sei $\alpha : k[V_0]_{m_x^{V_0}} \to \mathcal{O}_{V,x}, \frac{f}{g} \mapsto (D(g), y \mapsto \frac{f(y)}{g(y)})_\sim$

α ist wohldefinierter k-Algebra-Homomophismus.

α ist injektiv: Sei $\alpha(\frac{f}{g}) = 0$

Dann gibt es $U \subset G(g)$ offen mit $f(y) = 0$ für alle $y \in U$.

$\Rightarrow W = V_0 - U$ ist abgeschlossen in $V_0, x \notin W$

$\Rightarrow$ Dann gibt es $h \in I(W)$ mit $h(x) \neq 0$ (weil $V(I(W)) = W$ ist)

$\Rightarrow h \notin m_y^{V_0}$ mit $h(y) \cdot f(y) = 0$ für alle $y \in V_0$

$\Rightarrow f = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{V_0}}$

$\Rightarrow \frac{f}{g} = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{V_0}}$

α ist surjektiv: Sei $(U, f)_\sim \in \mathcal{O}_{V,x}$

Œ $U \subseteq V_0, U = D(h)$ für ein $h \in k[V_0]$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_0}(U) = k[V_0]_h$

$\Rightarrow (U, f)_\sim = \alpha(\frac{g}{h^r})$ □

Proposition 15.5

Seien V, W quasiprojektive Varietäten, $x \in V, y \in W$. Ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$ (als k-Algebren), so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x und $U' \subseteq W$ von y mit $U \cong U'$ (als quasiprojektive Varietäten).

Beweis
Seien $U_x \subseteq V$, beziehungsweise $U_y \subseteq W$ offene affine Umgebungen von x beziehungsweise y wie in 15.3 c), also $\psi_x^{U_x}$ und $\psi_y^{U_y}$ injektiv. Seien $f_1, \ldots, f_r$ Erzeuger von $\mathcal{O}_V(U_x) = k[U_x]$ als k-Algebra. Sei weiter $\varphi : \mathcal{O}_{V,x} \to \mathcal{O}_{W,y} \cong k[U_y]_{m_x^{U_y}}$ ein Isomorphismus.

Für die Keime gilt also: $(f_i)_x = \frac{g_i}{h_i}$ mit $h_i, g_i \in k[U_y], h_i(y) \neq 0, i = 1, \ldots, r$

Sei $U'_y \subseteq U_y$ offen, affin mit $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}_W(U'_y), i = 1, \ldots, r$ (also z. B. $U'_y = U_y \cap D(h_1) \cap \ldots \cap D(h_r)$)

$\Rightarrow \varphi \circ \psi_x^{U_x}$ induziert injektiven k-Algebra-Homomophismus

$$k[U_x] \to k[U'_y]$$

Dieser entspricht dominantem Morphismus $f : U'_y \to U_x$. Genauso erhalten wir dominanten Morphismus $g : U'_x \to U_y$.

f und g sind zueinander inverse rationale Abbildung $U_x \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} U_y$ □

Bemerkung 15.6
Sei $\varphi : V \to W$ Morphismus von quasiprojektiven Varietäten, $x \in V$. Dann induziert φ einen k-Algebra-Homomophismus

$$\varphi_x^{\#} : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{V,x} \text{ mit } \varphi_x^{\#}(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x$$

Beweis
Œ V, W affin (wegen Proposition 15.4).

φ induziert $\varphi^{\#} : k[W] \to k[V]$ (durch $f \mapsto f \circ \varphi$).

Dabei ist $f \in m^W_{\phi(x)}, f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^{\#}(f) \in m_x^V$

$\Rightarrow \varphi^{\#}$ induziert

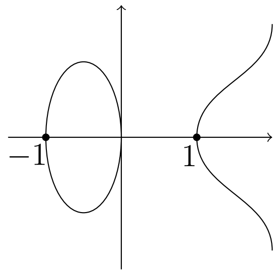
$$\varphi_x^{\#} : \underbrace{k[W]_{m^W_{\varphi(x)}}}_{=\mathcal{O}_{W,\varphi(x)}} \to \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{=\mathcal{O}_{V,x}}$$

mit $\varphi_x^{\#}(m_{\varphi(x)}) = \varphi_x^{\#}(m^W_{\varphi(x)} \cdot k[W]_{m^W_{\varphi(x)}}) \subseteq m_x^V \cdot k[V]_{m_x^V} = m_x$ □

§ 16 Tangentialraum

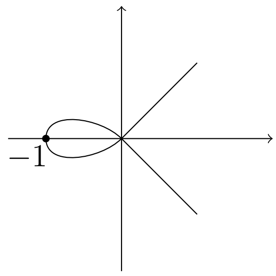
Beispiel 16.1

a) $V_1 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 + X)}_{Y^2 = X(X-1)(X+1)}, x(0,0)$



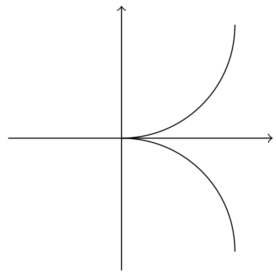
Tangente an V_1 in x „ist“ die y-Achse.

b) $V_2 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 - X^2)}_{Y^2 = X^2(X+1)}, x = (0,0)$



Es gibt zwei Tangenten in x an V_2. Jede Gerade durch x ist Grenzwert von Sekanten.

c) $V_3 = V(Y^2 - X^3), x = (0,0)$



Die x-Achse ist (Doppel-)Tangente. Jede Gerade durch x ist Limes von Sekanten.

Erinnerung 16.2 (Taylorentwicklung)
Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$.

a) $f = \sum\limits_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(\nu_1 + \dots + \nu_n)!} \frac{\partial \nu_1}{\partial X_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \nu_n}{\partial X_n} f(x)(X_1 - x_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X_n - x_n)^{\nu_n}$

b) $f = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial (X_i)}(x)(X - x_i)}_{\in m_x} + \underbrace{\text{höhere Terme (Grad} \geq 2)}_{\in m_x^2}$

Definition + Bemerkung 16.3
Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n)$

a) $f_x^{(1)} := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i =: D_x(f)$

b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät mit $x \in V, I := I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$
$I_x := \langle \{ f_x^{(1)} : f \in I \} \rangle$
$T_{V,x} := V(I_x)$ heißt Tangentialraum an V in x.

c) Wird I von $f_1, \dots, f_r$ erzeugt, so wird I_x von $(f_1^{(1)})_x, \dots, (f_r^{(1)})_x$ erzeugt.

d) $T_{V,x}$ ist linearer Unterraum von k^n, genauer

$$T_{V,x} = \text{Kern}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,r\\ j=1,\dots,m}}$$

(Jacobi-Matrix der Abbildung $f : k^n \to k^r, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_r(x))$)

Beweis

c) Sei $g \in I$ beliebig, schreibe $g = \sum\limits_{i=1}^{r} g_i f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$

$D_x(f+g) = D_x(f) + D_x(g)$

$D_x(f \cdot g) = f(x)D_x(g) + g(x)D_x(f)$

$\Rightarrow D_x(g) = \sum\limits_{i=1}^{r} D_x(g_i f_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} [g_i(x) D_x(f_i) + \underbrace{f_i(x)}_{=0, \text{ weil } x \in V \text{ und } f_i \in I(V)} D_x(g_i)] = \sum\limits_{i=1}^{r} g_i(x)(f_i^{(1)})_x$ □

Beispiel (Noch einmal Bsp. 16.1)

a) $V_1 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 + X, x = (0,0)$

$\Rightarrow f_x^{(1)} = 1 \cdot X + 0 \cdot Y = X$

$\Rightarrow T_{V,x} = V(X) = y$-Achse

b) $V_2 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 - X^2, x = (0,0)$

$\Rightarrow f_x^{(1)} = 0$, also $T_{V,x} = k^2$

c) Genauso

Proposition 16.4

Sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus affiner Varietäten, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$. Dann induziert φ für jedes $x \in V$ eine k-lineare Abbildung

$$d_{x\varphi} : T_{V,x} \to T_{W,\varphi(x)}$$

Beweis

Sei $\varphi : V \to W$ gegeben durch $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)), \varphi_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Der zugehörige k-Algebra-Homomophismus

$$k[W] = k[Y_1, \dots, Y_m]/I(W) \to k[X_1, \dots, X_n]/I(V) = k[V]$$

wird induziert von $\varphi^\# : k[Y_1, \dots, Y_m] \to k[X_1, \dots, X_n], f \mapsto f \circ \varphi_i$.

Genauer: $\varphi^\#(Y_j) = \varphi_j$

Dabei ist $\varphi^\#(I(W)) \subseteq I(V)$, da $\varphi(V) \subseteq W$. Definiere $\alpha : k[Y_1, \dots, Y_m] \to k[X_1, \dots, X_n]$ durch $Y_j \mapsto D_x(\varphi^\#(Y_j)) = D_x(\varphi_j) = (\varphi_j^{(1)})_x$.

Behauptung: $\alpha(I_{\varphi(x)}) \subseteq I_x$

Dann induziert α einen k-Algebra-Homomophismus

$$\underbrace{k[Y_1, \dots, Y_m]/I_{\varphi(x)}}_{=k[T_{W,\varphi(x)}]} \to \underbrace{k[X_1, \dots, X_n]/I_x}_{=k[T_{V,x}]}$$

Und damit Morphismus $T_{V,x} \to T_{W,\varphi(x)}$

Beweis der Behauptung: Sei $g \in I_{\varphi(x)}$

Œ $g = h^{(1)}$ für ein $h \in I(W)$

$\alpha(g) = (\text{Weihnachtsrechnung}) = D_x(g \circ \varphi) \in I_x$ □

Erinnerung

V affine Varietät über einem Körper k, $x \in V$.

$T_{V,x} = V(I_x), I_x$ erzeugt von den $f_x^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i, f \in I(V)$. Die Zuordnung $(V,x) \mapsto T_{V,x}$ ist ein kovarianter Funktor

$$\underline{\text{(affine Varietäten)}/k + \text{Punkt}} \to \underline{k\text{-Vektorräume}}$$

§ 17 Derivationen und Zariski-Topologie

Definition 17.1
Sei R Ring (kommutativ mit Eins), A eine R-Algebra, M ein A-Modul. Eine R-lineare Abbildung $D : A \to M$ heißt R-***Derivation***, wenn gilt:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(G) + g \cdot D(f) \qquad \text{für alle } f, g \in A$$

Beispiel 17.2

a) Sei $A = M = R[X], D(f) := \frac{df}{dg}$

Konkret: $D(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$

D ist Derivation: Nachrechnen!!!

b) $A = M = R[X_1, \ldots, X_n], D_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$

c) $A = R[X_1, \ldots, X_n], M = R, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

M wird zum A-Modul durch $\varphi_x(f) = f(x)$ (Einsetzungshomomophismus).

$D(f) := \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$ ist R-Derivation, *denn:*

$D(fg) = (\frac{\partial}{\partial X_i}(fg))(x) = (f\frac{\partial g}{\partial X_i} + g\frac{\partial f}{\partial X_i})(x) = f(x)\frac{\partial g}{\partial X_i}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$

Bemerkung 17.3
Seien R, A, M wie in 17.1

a) Für jede R-Derivation $D : A \to M$und jedes $a \in R$ gilt $D(a) = 0$.

b) $\mathrm{Der}_R(A, M) = \{D : A \to M | D \text{ ist Derivation}\}$ ist A-Modul.

c) Ist $\varphi : M_1 \to M_2$ ein Homomophismus von A-Moduln, so ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Der}_R(A, M_1) & \to & \mathrm{Der}_R(A, M_2) \\ D & \mapsto & \varphi \circ D \end{array}$$

ein Homomophismus von A-Moduln.

d) Die Zuordnung $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ ist ein kovarianter Funktor:

$$\underline{A\text{-Moduln}} \to \underline{A\text{-Moduln}}$$

Beweis

a) $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0 \overset{D \text{ ist } R\text{-linear}}{\Longrightarrow} D(a) = D(a \cdot 1) = a \cdot D(1) = 0$

b) ✓

c) $(\varphi \circ D)(f \cdot g) = \varphi(f \cdot D(g) + g \cdot D(f)) \overset{\varphi A\text{-Mod-Hom}}{=} f \cdot \varphi(D(g)) + g \cdot \varphi(D(f))$ □

Bemerkung 17.4

a) Für $A = R[X]$ ist $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot D$ ($D = \frac{d}{dX}$ wie in 17.2 a))

b) Für $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ ist $\mathrm{Der}_R(A, A)$ der freie A-Modul mit Basis $\frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}$

c) Sei $A = R[X_1, \ldots, X_n], x = (x_1, \ldots, x_n), M = R$ wie in 17.2 c).

$\Rightarrow \mathrm{Der}_R(A, R)$ ist der von den $\frac{\partial}{\partial X_i}(x)$ erzeugte freie R-Modul.

Beweis

a) Sei $\delta : A \to A$ R-Derivation, $f := \delta(X)$. $\Rightarrow \delta(X^2) = X \cdot \delta(X) + X \cdot \delta(X) = 2f \cdot X$

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \delta(X^n) = n \cdot f \cdot X^{n-1} \Rightarrow \delta(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = f \cdot \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{n-1} \Rightarrow \delta = f \cdot D$

c) folgt aus b) und 17.3 c). □

Proposition 17.5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V, \mathcal{O}_{V,x} = \{\frac{f}{g} : f, g \in k[V], g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k) \cong (m_x/m_x^2)^v$ (Isomorphismus von k-Vektorräumen).
$\mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$ und m_x/m_x^2 sind $\mathcal{O}_{V,x}$-Moduln, in beiden Moduln ist die Multiplikation mit einem Element aus m_x die Nullabbildung.
$\Rightarrow$ Beide Moduln sind Moduln über $\mathcal{O}_{V,x}/m_x = k$

Beweis
Sei $\delta \in \mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$. $\delta|_{m_x}$ ist k-linear.
Behauptung: $m_x^2 \subseteq \mathrm{Kern}(\delta)$
denn: Sei $f = g \cdot h \in m_x^2, g, h \in m_x \Rightarrow \delta(f) = \underbrace{g(x)}_{=0} \cdot \delta(h) + \underbrace{h(x)}_{=0} \cdot \delta(g) = 0$

$\Rightarrow \delta$ induziert k-lineare Abbildung $m_x/m_x^2 \to k$.
Sei umgekehrt $l \in (m_x/m_x^2)^v$. Definiere $\delta : \mathcal{O}_{V,x} \to k$ durch $\delta(f) := l(\underbrace{f - f(x)}_{\in m_x})$ (k-linear: ✓).

Seien $f, g \in \mathcal{O}_{V,x}$. Dann ist $(f - f(x))(g - g(x)) \in m_x^2$.
$\Rightarrow 0 = l((f - f(x))(g - g(x))) = l(fg - f(x)g(x) - fg(x) - gf(x) + 2f(x)g(x))$
$\Rightarrow \delta(fg) = l(fg(x) + gf(x) - 2f(x)g(x)) = f(x)l(g - g(x)) + g(x)l(f - f(x)) = f\delta(g) + g\delta(f)$ □

Satz + Definition 8
Sei V affine Varietät, $x \in V$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$T_{V,x} \cong ({}^{m_x}\!/\!{}_{m_x^2})^v$$

$(m_x/m_x^2)^v$ heißt ***Zariski-Tangentialraum*** an V in x.

Beweis
i) Definiere Abbildung

$$\begin{tikzcd} T_{V,y} \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,x}, k) \arrow[d, "17.5"] \\ & \left({}^{m_x}\!/\!{}_{m_x^2}\right)^v \end{tikzcd}$$

Jedes $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ induziert Derivation $D_y : k[X_1, \dots, X_n] \to k$ durch $f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i$ (17.4 c)). Ist $y \in T_{V,x}$ und $f \in I(V)$, so ist $D_y(f) = 0$ nach Definition, denn $D_y(f) = f_x^1(y)$.
$\Rightarrow D_y$ induziert Derivation $D_y : k[V] \to k$.
Für $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{V,x}$ sei $D_y(\frac{f}{g}) = \frac{g(x)D_y(f) - f(x)D_y(g)}{g(x)^2}$ (denn $D_y(\frac{f}{g} \cdot g) = D_y(f) \Rightarrow D_y$ induziert $D_y \in \mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$)
Noch zu zeigen: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \frac{-f(x)D_y(g) + g(x)D_y(f)}{g(x)^2} = 0$

denn: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \exists h \in \mathcal{O}_{V,x} \setminus m_x$ mit $h \cdot f = 0$ in $k[V] \Rightarrow 0 = D_y(hf) = \overbrace{h(x)}^{\neq 0} D_y(f) + \underbrace{f(x)}_{=0} D_y(h) \Rightarrow D_y(f) = 0 \Rightarrow D_y(\frac{f}{g}) = 0$

ii) $\beta : \begin{array}{rcl} (m_x/m_x^2) & \to & T_{V,x} \\ l & \mapsto & \Big(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})\Big) \end{array}$

Zu zeigen: $\Big(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})\Big) \in T_{V,x}$

Sei dazu $f \in I(V)$. *Zu zeigen:* $f_x^{(1)}\Big(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})\Big) = 0$

Es ist $f_x^{(1)}\Big(l(\overline{X_1 - x_1}), \dots, l(\overline{X_n - x_n})\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) = l\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i)\right)$

$\overset{(*)}{=} l\left(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)\right) = 0$, wegen

Behauptung: $f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) \in m_x^2$

denn: Taylor-Entwicklung $\underbrace{f}_{0 \text{ in } k[V]} = \underbrace{f(x)}_{=0, \text{ weil } f \in I(V)} + f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) + \text{Terme in } m_x^2$

iii) $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{T_{V,x}}$

$\beta(\alpha(y)) = \beta(f \mapsto \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i) = \left(\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial (X_1 - x_1)}{\partial X_i}(x) y_i, \dots, \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial (X_n - x_n)}{\partial X_i}(x) y_i\right) = (y_1, \dots, y_n)$

iv) $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{(m_x/m_x^2)^v}$

$\alpha\Big(\beta(l)\Big)(f) = \alpha\Big(l(X_1 - x_1), \dots, l(X_n - x_n)\Big)(f) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(X_i - x_i) \overset{(*)}{=} l\left(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)\right) = l(\overline{f})$ □

§ 18 Dimension einer Varietät

Definition 18.1
Sei X topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \text{ Kette } \emptyset \neq V_0 \subsetneq, \ldots, \subsetneq V_n \text{ von irred. abgeschl. Teilm. v. } X\}$$

Krull Dimension von X.

Beispiel
1) $\dim(\mathbb{R}^n) = 0$ für jedes $n \geq 0$ (mit euklidischer Topologie)
2) $\dim(\mathbb{A}^1(k)) = 1$, falls k unendlich ist
3) $\dim(\mathbb{A}^n(k)) \geq n$, falls k unendlich ist für $n \geq 2$

Bemerkung 18.2
Sei X ein topologischer Raum
a) Ist $Y \subseteq X$ (mit Spurtopologie), so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.
b) Ist $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, X_i abgeschlossen, so ist $\dim(X) = \max_{i=1}^{n}(\dim(X_i))$.

Beweis
a) Sei $\emptyset \neq V_0 \subsetneq, \ldots, \subsetneq V_d$ Kette von abgeschlossenen Teilmengen von Y. Sei $\overline{V_i}$ der Abschluss von V_i in X.
V_i ist irreduzibel nach Übung 2, Aufgabe 5.
$\overline{V_i} \cap Y = V_i$ weil V_i abgeschlossen in Y ist. $\Rightarrow \overline{V_i} \subsetneq \overline{V}_{i+1}$
$\Rightarrow \emptyset \neq V_0 \subseteq \ldots \subseteq V_d$ ist Kette der Länge d in X.
b) „$\geq$“: gilt nach a)
„$\leq$“: Sei $\emptyset \neq V_0 \subsetneq, \ldots, \subsetneq V_d$ Kette in X. Dann ist $V_d = V_d \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\underbrace{V_d \cap X_i}_{\text{abg. in } V_d})$

V_d irreduzibel $\Rightarrow \exists i$ mit $V_d \subseteq X_i \Rightarrow d \leq \dim(X_i)$ □

Definition 18.3
Sei R ein Ring (das heißt kommutativ mit Eins)
a) Sei $\mathfrak{p} \in R$ Primideal. Dann heißt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p}_0 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ Kette von Primelementen in } R\}$$

Höhe von $\mathfrak{p}$.
b) $\dim(R) := \sup\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$ heißt ***Krull Dimension***.

Beispiel
1) $\dim k = 0$ für jeden Körper k
2) $\dim \mathbb{Z} = 1$
3) $\dim k[X] = 1$ für jeden Körper k
4) $\dim \mathbb{Z}[X] = 2$ (Übung?)
$(0) \subset (2) \subset (2, X)$
5) $\dim k[X, Y] = 2$??

Proposition 18.4
Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede affine Varietäten $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$: $\dim(V) = \dim k[V]$

Beweis
Wegen V(I) irred. für I prim und I(V(I))$\overset{\text{HNS}}{=}$I sowie I(V) prim für V irred. und V(I(V))=V folgt, dass die eine Kette eine gültige andere Kette ist. □

Satz 9
Sei k ein Körper, A endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra.

a) $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$

b) Ist $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ surjektiver Homomophismus von k-Algebren, so ist

$$\dim A + \operatorname{ht}(\operatorname{Kern}(\varphi)) = n$$

c) Jede maximale (nicht verlängerbare) Kette von Primidealen in A hat die Länge A.

Erinnerung
$S|R$ ***ganze Ringerweiterung*** $\Leftrightarrow$ jedes $a \in S$ ist Nullstelle eines *normierten* Polynoms mit Koeffizienten aus R.

Satz 9.1
Sei $S|R$ ganze Ringerweiterung.

a) („Going Up“) Für jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ in R gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ in S mit $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 0, \dots, n$.

b) $\dim S = \dim R$

Satz 9.2 („Noether-Normalisierung“)
Sei A endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist A ganze Ringerweiterung eines Polynomrings über k.

Genauer: Für jedes echte Ideal $I \subset A$ gibt es algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_d \in A$, sodass A ganz ist über $k[x_1, \dots, x_d]$ und $I \cap k[x_1, \dots, x_d] = (x_{\delta+1}, \dots, x_d)$ für ein $0 \le \delta \le d$.

Beispiel
$A = k[V]$ für affine Varietät V. $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung induziert $\varphi : V \to \mathbb{A}^d(k)$. φ ist surjektiv nach Satz 9.1 a).

Der Bew. wird noch nachgefügt

Satz 9.3
(„Going Down“) Sei A endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra, $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung, $\mathfrak{P}_1 \subset A$ Primideal, $\mathfrak{p}_0$ Primideal mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 := \mathfrak{P}_1 \cap B$. Dann gibt es Primideale $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$.

$$\begin{array}{ccccc} \exists\mathfrak{P}_0 & \subset & \mathfrak{P}_1 & \qquad & A \\ | & & | & & \cup \\ \mathfrak{p}_0 & \subset & \mathfrak{p}_1 & & B \end{array}$$

Folgerung 18.5

a) ist k unendlich, so ist $\dim \mathbb{A}^n(k) = n$.

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$:

$$\dim V + \operatorname{ht}(I(V)) = n$$

c) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $x \in V$:
$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim k[V]_{m_x} = \mathrm{ht}(m_x) = \dim k[V] = \dim V$$

Definition + Bemerkung 18.6
Sei V eine quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k, $x \in V$, $V_0 \subseteq V$ offene affine Umgebung von x.

a) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x})$ heißt ***lokale Dimension*** von V in x.
b) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{V_0,x}) = \mathrm{ht}(m_x^{V_0})$
c) Ist V irreduzibel, so gilt:
   i) $\dim_x V = \dim_y V$ für alle $x, y \in V$
   ii) Ist $U \neq \emptyset$ offen, affin in V, so ist $\dim U = \dim V$
d) $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z$ irreduzible Komponente von V mit $x \in Z\}$

Beweis
c) i) Seien U_x und U_y offene affine Umgebungen von x, beziehungsweise y, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, da V irreduzibel. Für $z \in U_x \cap U_y$ gilt nach 18.5 c):
$$\dim_x V = \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{U_x,x}) = \dim U_x = \dim(\mathcal{O}_{U_x,z})$$
$$= \dim_z(V) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,z}) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,y}) = \dim_y V$$
   ii) folgt aus i)
d) Œ V affin.
   $\dim \mathcal{O}_{V,x} = \mathrm{ht}(m_x^V) = \max\{d : \exists$ Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V$ von Primidealen$\}$
   Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V$ maximale Kette, dann ist $\mathfrak{p}_0$ minimales Primideal. Die minimalen Primideale entsprechen bijektiv den irreduziblen Komponenten, die x enthalten (auch von $\mathcal{O}_{V,x}$). □

Folgerung 18.7
Ist k unendlich, so ist $\mathbb{P}^n(k) = n$.

Definition 18.8
a) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 1 heißt (algebraische) ***Kurve***.
b) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 2 heißt (algebraische) ***Fläche***.

Proposition 18.9
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche, also $V = V(f)$ für ein $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ $(n \geq 1, \deg(f) \geq 1)$. Dann ist $\dim V = n - 1$.

Beweis
Œ f irreduzibel (Bemerkung 18.2 b)) $\overset{18.5b)}{\Rightarrow} \dim V = n - \mathrm{ht}((f))$

Sei $\mathfrak{p} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ Primideal mit $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq (f)$. Wähle $0 \neq h \in \mathfrak{p}$ von minimalem Grad.

$h \in \mathfrak{p} \subseteq (f) \Rightarrow h = f \cdot g$ für ein $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$

$$\mathfrak{p} \text{ Primideal} \Rightarrow \begin{cases} f \in \mathfrak{p} \text{ und damit } (f) = \mathfrak{p} \\ \text{oder } g \in \mathfrak{p}, \text{ da } \deg(f) \geq 1, \text{ ist } \deg(g) < \deg(h) \lightning \text{ zur Wahl von } h \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{ht}(f) = 1$ □

Beispiel
$V = V(XZ, YZ) \subset \mathbb{A}^3(k)$
$V = \underbrace{V(Z)}_{X\text{-},Y\text{-Ebene}} \cup \underbrace{V(X,Y)}_{Z\text{-Achse}}, \dim V = 2$

Proposition 18.10
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $I(V) = (f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $\dim V \geq n - d$

Proposition 18.11 (Krullscher Hauptidealsatz)
Sei R noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$, $\mathfrak{p} \subset R$ minimales Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$

Beweis
siehe Eisenbud: Commutative Algebra, Thm. 10.1 □

Proposition 18.12 (Krullscher Höhensatz)
Sei R noetherscher Ring, $x_1, \dots, x_d \in R \setminus R^\times$ sodass $I = (x_1, \dots, x_d) \neq R$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$ für jedes minimale Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$.

Beweis
Induktion über d:

$d = 1$: Das ist 18.11 .

$d \geq 2$: Sei $\mathfrak{p}$ Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ sei minimal mit dieser Eigenschaft. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette.

Behauptung: Es gibt Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$.

Dann sei $R' = R/(x_d)$ und $\mathfrak{q}'_i = \mathfrak{q}_i/(x_d)$.

Es ist $\mathfrak{q}'_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}'_{l-1} = \mathfrak{p}'$ Kette von Primidealen in R'.

$\mathfrak{p}'$ ist minimal mit $x'_1, \dots, x'_d \in \mathfrak{p}'$ (bzw. $I' \subseteq \mathfrak{p}'$) $\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \leq d - 1$, andererseits ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \geq l - 1 \Rightarrow l - 1 \leq d - 1 \Rightarrow \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$

Beweis der Behauptung:

$l = 1$: $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}$ tut's.

$l \geq 2$: Ist $x_d \in \mathfrak{p}_{l-1}$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{p}_{l-1}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$. Verlängere durch $\mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$. Sei also $x_d \notin \mathfrak{p}_{l-1}$ und $\mathfrak{q}$ minimales Primideal mit $I := \mathfrak{p}_{l-2} + (x_d) \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

In $R' = R/\mathfrak{p}_{l-2}$ ist $(0) = \mathfrak{p}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{p}'_{l-1} \subsetneq \mathfrak{p}'$ Kette der Länge 2 $\Rightarrow \mathrm{ht}_{R'}(\mathfrak{p}') \geq 2 \overset{18.11\,\text{A}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{p}'$ ist *nicht* minimal in R' mit $x'_d \in \mathfrak{p}' \Rightarrow \mathfrak{p}$ ist nicht minimal in R mit $(x_d) + \mathfrak{p}_{l-2} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \exists$ Primideal $\mathfrak{q}$ mit $I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{q}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0 \Rightarrow \mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ ist gewünschte Kette. □

§ 19 Singularitäten

Definition 19.1
Sei V quasiprojektive Varietät über einem Körper k. $x \in V$ heißt ***regulär*** (oder ***nichtsingulär***), wenn $\dim T_{V,x} = \dim_x V$, andernfalls heißt x ***singulär***. V heißt nichtsingulär, wenn jeder Punkt $x \in V$ regulär ist.

Proposition 19.2 (Jacobi-Kriterium)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $(f_1, \dots, f_r)$ Erzeuger von $I(V)$, $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}}_{=\mathcal{J}_f(x)} = n - \dim_x V$$

Beweis
Nach Bemerkung 16.3 d) ist $T_{V,x} = \text{Kern}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,n}}$ □

Beispiel
Sei $V = V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche. Dann ist $\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) \Longrightarrow x$ singulär $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0$
Konkret:

a) $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3(k)$
$\mathcal{J}_f = (2X, 2Y, -2Z) \Rightarrow (0, 0, 0)$ ist der einzige singuläre Punkt.

b) $V(Y^2 - X^3 + X)$, $\mathcal{J} = (-3X^2 + 1, 2Y)$
(x, y) singulär $\Rightarrow y = 0, 3x^2 = 1, x^3 - x = 0 \Rightarrow$ Es gibt keinen singulären Punkt auf V.

c) Ist $\overline{V} \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ (mit $\overline{V}$ aus b)) auch nichtsingulär?
$\overline{V} = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$
$V = \overline{V} \cap D(Z), \overline{V} = V \cup (\overline{V} \cap V(Z)) = \underbrace{V \cup \{(0:1:0)\}}_{=:P_\infty}$
$P_\infty \in D(Y)\overline{V} \cap D(Y) = V(\underbrace{z - x^3 + xz^2}_{=:g})$
$\mathcal{J}_g = (-3x^2 + z^2, 1 + 2xz) \Rightarrow \mathcal{J}_g(P_\infty) = (0, 1)$
$\Rightarrow P_\infty$ ist regulärer Punkt
$\Rightarrow \overline{V}$ ist nichtsingulär

Definition + Bemerkung 19.3

a) Sei R noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k = R/m$. R heißt ***regulär***, wenn $\dim R = \dim_k(m/m^2)$.

b) Sei V quasiprojektive Varietät über k, $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ regulär} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} \text{ regulär}$$

Beweis

b) $\dim_k(m_x/m_x^2) = \dim(T_{V,x})$ (Satz 8)
$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim_x V$ nach Defininition 18.6 □

Proposition 19.4

a) Sei (R, m) lokaler neotherscher Ring. Dann gilt: $\dim_k(m/m^2) \geq \dim R$

b) Für jede quasiprojektive Varietät V und jedes $x \in V$ gilt: $\dim T_{V,x} \geq \dim_x V$

Beweis

b) folgt aus a) (19.3 b)

a) *Behauptung:* Für $x_1, \dots, x_n \in m$ gilt:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \text{ minimales Erzeugersystem} \Leftrightarrow \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \text{ Basis von } {}^{m}\!/\!_{m^2}$$

Dann hat jedes minimale Erzeugersystem von m $\dim_R(m/m^2)$ Elemente.
Beweis der Behauptung:

„$\Rightarrow$“: Sei $x_1, \dots, x_n$ minimales Erzeugersystem.

Annahme: $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ linear abhängig, also Œ $\overline{x_1} = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i \overline{x_i}$ für gewisse $\lambda_i \in k$.

$\Rightarrow x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \tilde{\lambda}_i x_i \in m^2$ $(\tilde{\lambda}_i \in R, \overline{\tilde{\lambda}_i} = \lambda_i \text{ in } R/m)$

$\Rightarrow x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \tilde{\lambda}_i x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j x_1 x_j + y$ mit $y \in (x_2, \dots, x_n)^2$

$$\Rightarrow x_1(\underbrace{1 - \sum_{i=i}^{n} \mu_j x_j}_{\in 1-m \Rightarrow \notin m \Rightarrow \in R^\times \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots x_n) \lightning}) \in (x_2, \dots, x_n)$$

„$\Leftarrow$“: *zu zeigen:* $x_1, \dots, x_n$ erzeugen m

Sei $N = (x_1, \dots, x_n)$

Dann gilt $m = N + m^2$

Damit folgt $m = N$ aus 19.5 □

Proposition 19.5 (Nakayama-Lemma)

Sei (R, m) lokaler Ring, M endlicher erzeugter R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul mit

$$M = mM + N \qquad (*)$$

Dann gilt $M = N$

Beweis

Œ $N = 0$, denn: Aus (*) folgt $M/N = mM/N$.

Ist dann $M/N = 0$, so ist $M = N$.

Annahme: $M \neq 0$.

Denn sei $x_1, \dots, x_n$ minimales Erzeugersystem von M. Nach Voraussetzung gibt es $a_1, \dots, a_n \in m$ mit $x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

$\Rightarrow x_1(1 - a_1) = \sum\limits_{i=2}^{n} a_i x_i \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots, x_n) \lightning$ zur Minimalität von $x_1, \dots, x_n$ □

Proposition 19.6

Jeder reguläre lokale Ring ist nullteilerfrei.

Folgerung 19.7

Sei V eine quasiprojektive Varietät, $x \in V$ ein Punkt, der auf zwei verschiedenen irreduziblen Komponenten liegt. Dann ist x singulär.

Beweis (Beweis der Folgerung)
Wegen 19.6 ist zu zeigen: $\mathcal{O}_{V,x}$ ist nicht nullteilerfrei.

Œ V affin, $V_1 \neq V_2$ irreduzible Komponenten von V mit $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow I(V_i)$ ist minimales Primideal in $k[V]$, $i = 1, 2$. Wegen $x \in V_i$, $i = 1, 2$, ist $I(V_i) \subset m_x$, $i = 1, 2 \Rightarrow I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x}$ ist minimales Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow (0)$ ist kein Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ nicht nullteilerfrei □

Beweis (Beweis von Proposition 19.6)
Sei (R, m) regulärer lokaler Ring, $d = \dim R$.

Induktion über d:

$d = 0$: $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = m^2 \overset{19.5}{\Rightarrow} m = 0 \Rightarrow R$ Körper

$d \geq 1$: Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die minimalenPrimideale von R. Da $d = \operatorname{ht}(m) \geq 1$ ist, ist $\mathfrak{p}_i \neq m$ für alle i. Außerdem ist $m \neq m^2$, da $\dim_k(m/m^2) = d \geq 1$.

Primvermeidungslemma: (Übung)

$$m \nsubseteq m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$$

Wähle $x \in m \setminus m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$. Ergänze $\overline{x}$ (in m/m^2) zur Basis $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_d}$.

Sei $R' = R/(x)$ und $m' = m/(x)$ das maximale Ideal in R'. Da $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle minimalen Primideale von R, ist $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes minimale Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$ (Proposition 18.11 A).

$\Rightarrow \dim R' = d - 1$

m' wird von $x_2', \ldots, x_d'$ erzeugt (den Bildern der x_i in R'; dabei sei $x_i \in m$ mit Bild $\overline{x_i}$ in m/m^2, $i = 2, \ldots, d$, nach Proposition 19.5 wird m von $x, x_2, \ldots, x_d$ erzeugt)

$\Rightarrow \dim_k(m'/(m')^2) \leq d - 1$

$\overset{19.4}{\Longrightarrow} \dim_k(m'/(m')^2) = d - 1 \Rightarrow (R', m')$ ist regulärer lokaler Ring

$\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow} R'$ nullteilerfrei

$\Rightarrow (x)$ ist Primideal $\Rightarrow \exists i$ mit $\mathfrak{p}_i \subsetneq (x)$

$\Rightarrow$ Für $b \in \mathfrak{p}_i$ gibt es $a \in R$ mit $b = a \cdot x \overset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\Longrightarrow} a \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i x = \mathfrak{p}_i m \overset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \mathfrak{p}_i = (0) \Rightarrow R$ nullteilerfrei □

Satz 10
Sei $\emptyset \neq V \in \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k und $\operatorname{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ singulär}\}$. Dann gilt: $\operatorname{Sing}(V)$ ist abgeschlossene echte Teilmenge von V.

Beispiel
Sei $\operatorname{char}(k) = p$ und $V = V(X^p + Y^p - Z^p) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ $(\subseteq \mathbb{P}^2(k))$.

Jacobi-Kriterium: $\mathcal{J}_f(X, Y, Z) = (pX^{p-1}, pY^{p-1}, pZ^{p-1}) = (0, 0, 0)$

$\overset{??}{\Rightarrow}$ alle Punkte sind singulär? Was ist $I(V)$? $(X + Y - Z)^p = X^p + Y^p - Z^p$

Beweis

i) Œ V irreduzibel, denn: sind $V_1, \ldots, V_r$ die irreduziblen Komponenten von $V \Rightarrow$

$$\operatorname{Sing}(V) = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Sing}(V_i) \cup \underbrace{\bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j}_{\text{abgeschlossen}}$$

Œ V affin ($\subseteq \mathbb{A}^n(k)$), denn „abgeschlossen“ ist lokale Eigenschaft. Seien $f_1, \dots, f_r$ Erzeuger von $I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathcal{J} := (\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{ij}$ die Jacobi-Matrix.

$\operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \operatorname{Rang}(\mathcal{J}(x)) < n - \dim V\}$

$= \{x \in V : \det(M(x)) = 0$ für alle $(n - \dim V) \times (n - \dim V)$-Untermatrizen M von $J\}$

$\det M$ ist Polynom in $X_1, \dots, X_n$ für jeden Minor M.

$\Rightarrow \operatorname{Sing}(V)$ ist affine Varietät, also abgeschlossen in V.

ii) Œ V irreduzibel.

Ist Z irreduzible Komponente von V und $\operatorname{Sing}(Z) \neq Z$, so ist $Z - \operatorname{Sing}(Z)$ offen, nichtleer, also dicht in Z.

$\Rightarrow Z - \operatorname{Sing}(Z)$ enthält Punkte z, die auf keiner anderen irreduziblen Komponente liegen.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{V,z} \Rightarrow z \in V - \operatorname{Sing}(V)$.

Spezialfall: $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_n], \deg(f) > 0$

Dann ist $\operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0\}$.

Wäre $\operatorname{Sing}(V) = V \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} \in I(V) = (f)$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ ist konstant} & : \text{falls } \operatorname{char}(k) = 0 \\ f \in k[X_1^p, \dots, X_n^p] & : \text{falls } \operatorname{char}(k) = p > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f = g^p$ für ein $g \in k[X_1, \dots, X_n]$ ↯ (zu f irreduzibel)

Der allgemeine Fall folgt daraus wegen: □

Proposition 19.8
Sei V irreduzible quasiprojektive Varietät der Dimension d. Dann ist V birational äquivalent zu einer Hyperfläche H in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$.

Beweis (Fortsetzung Beweis)
Dann gibt es $U \subset V$ offen, dicht und $U' \subseteq H$ offen, dicht und Isomorphismus $\varphi : U \to U'$.

Spezialfall: $U' \cap (H - \operatorname{Sing}(H)) \neq \emptyset$

Für $z \in U'$ ist $\mathcal{O}_{V,f^{-1}(z)} \cong \mathcal{O}_{U',z} = \mathcal{O}_{H,z}$ regulärer lokaler Ring $\Rightarrow z \notin \operatorname{Sing}(V)$. □

Beweis (Beweis von Proposition 19.8)
Nach Satz 6 (bzw. Bemerkung 13.7), ist zu zeigen, dass der Funktionenkörper $k(V)$ zu $\operatorname{Quot}(k[X_1, \dots, X_{d+1}]/(f))$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_{d+1}]$ isomorph ist (als k-Algebra). Sei Œ V affin. Wähle Noethernormalisierung $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow k[V]$.

$\Rightarrow k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ ist endliche Körpererweiterung

Œ $k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ separabel ($\operatorname{char}(k) = 0$: sowieso, $\operatorname{char}(k) = p$: Bosch, 7.3, Satz 7)

$\underset{\text{prim. Elem.}}{\overset{\text{Satz vom}}{\Longrightarrow}}$ es gibt $y \in k(V)$ mit $k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$

Sei $h \in k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$ das Minimalpolynom von y, also $h(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \dots + a_0$ mit $a_i = \frac{f_i}{g_i}, f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ (teilerfremd)

Sei $g = \operatorname{kgV}(g_0, \dots, g_{n-1})$ und $f := g \cdot h = g \cdot Y^n + \underbrace{g \cdot a_{n-1}}_{b_{n-1} \in k[X_1, \dots, X_d]} Y^{n-1} + \dots + g \cdot a_0$

$b_0, \dots, b_n$ sind teilerfremd $\Rightarrow f$ irreduzibel und $f(Y) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Quot}(k[X_1, \dots, X_d, Y]/(f)) = k(X_1, \dots, X_d)[Y] \cong k(V)$

$V(f) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ ist Hyperfläche $\cong k(V)$ □

Folgerung 19.9
Für jede irreduzible quasiprojektive Varietät gilt:

$$\dim(V) = \operatorname{trdeg}_k k(V)$$

(Transzendenzgrad = max. Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente)

Denn: $\dim V = \dim k[V] = d$, falls $k[X_1, \ldots, X_d] \hookrightarrow k[V]$ Noethernormalisierung. $k(V)$ ist endliche Körpererweiterung von $k(X_1, \ldots, X_d) \Rightarrow \operatorname{trdeg}_k(k(V)) = \operatorname{trdeg}_k k(X_1, \ldots, X_d) = d$.

Kapitel 4

Nichtsinguläre Kurven

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. C sei irreduzible projektive Varietät der Dimension 1 über k.

$$\begin{aligned} C \text{ nicht singulär} &\Leftrightarrow \text{jedes } x \in C \text{ nichtsingulär} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}_{C,x} \text{ regulärer lokaler Ring für jedes } x \in C \end{aligned}$$

§ 20 Diskrete Bewertungsringe

Proposition 20.1
Sei (R, m) ein nullteilerfreier lokaler noetherscher Ring der Dimension 1. Dann sind äquivalent:

i) R ist regulär (das heißt $\dim_k(m/m^2) = 1, k = R/m$)
ii) m ist Hauptideal
iii) Es gibt $t \in m$, sodass jedes $x \in R - \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $x = u \cdot t^n$ hat mit $n \in \mathbb{N}, u \in R^\times$
iv) R ist Hauptidealring

Beweis
(i)⇒(ii): ✓

(ii)⇒(iii): ✓

(iii)⇒(iv): Sei $(0) \neq I \subset R$ Ideal, n minimal, sodass es ein $x = u \cdot t^n \in I$ gibt.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow t^n \in I \Rightarrow m^n \subseteq I \\ I \subseteq m^n \text{ nach Wahl von } n \end{array}\right\} \Rightarrow I = m^n = (t^n)$$

(iv)⇒(i): R Hauptidealring $\Rightarrow m = (t)$ für ein $t \in m$. $\Rightarrow m/m^2$ wird von $\bar{t}$ erzeugt $\Rightarrow \dim_k(m/m^2) \leq 1$.
Andererseits: $\dim(m/m^2) \geq \dim R = 1$ □

Bemerkung 20.2
Sei (R, m) regulärer lokaler Ring der Dimension 1, $K = \mathrm{Quot}(R)$. Dann gilt:

a) Jedes $x \in K^\times$ hat eindeutige Darstellung $x = ut^n$ mit $u \in R^\times, n \in \mathbb{Z}$
b) Die Abbildung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$, $ut^n \mapsto n$ erfüllt:
   i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$
   ii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ für $x + y \neq 0$

Definition + Bemerkung 20.3
Sei K ein Körper

a) Eine surjektive Abbildung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ mit i) und ii) heißt ***diskrete Bewertung*** auf K.
b) Ist v diskrete Bewertung auf K, so ist $\mathcal{O}_v := \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}$ lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_v = \{x \in K : x = 0 \text{ oder } v(x) > 0\}$.
c) Ein nullteilerfreier Ring R heißt ***diskreter Bewertungsring***, wenn es eine diskrete Bewertung v auf $K := \mathrm{Quot}(R)$ gibt mit $R = \mathcal{O}_v$.
d) Jeder reguläre lokale Ring der Dimension 1 ist diskreter Bewertungsring.

Beweis
b) $\mathcal{O}_v$ *Ring:* $v(x) = v(1 \cdot x) = v(1) + v(x) \Rightarrow v(1) = 0$
$0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$
$\Rightarrow v(-x) = v(x) \forall x \in K \Rightarrow \mathcal{O}_v$ ist Ring
$\mathcal{O}_v$ *lokal:* Sei $x \in \mathcal{O}_v - m_v$, also $v(x) = 0$
$\Rightarrow v(x) + v(\frac{1}{x}) = v(x \cdot \frac{1}{x}) = v(1) = 0$
$\Rightarrow v(\frac{1}{x}) = -v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{O}_v \Rightarrow x \in \mathcal{O}_v$
d) folgt aus 20.2 □

Proposition 20.4
Jeder diskrete Bewertungsring ist regulärer Ring der Dimension 1.

Beweis
Es genügt zu zeigen, dass m_v Hauptideal ist (wegen 20.1!!). Sei dazu $t \in m_v$ mit $v(t) = 1$. Sei $x \in m_v \setminus \{0\}$, $y := \frac{x}{t^{v(x)}} \in K^\times$.
$v(y) = v(x) - v(t^{v(x)}) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{O}_v^\times$
$\Rightarrow x = y \cdot t^{v(x)} \in (t)$ □

Beispiel
1) Sei k ein Körper, $a \in k$. Für $f \in k(X)^\times$ sei $\mathrm{ord}_a(f)$ die Null-, beziehungsweise Polstellenordnung von f in a. Das heißt für $f \in k[X]$ ist $\mathrm{ord}_a(f) = n$, wenn $f = (X-a)^n \cdot g$ mit $g(a) \neq 0$. Für $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, ist $\mathrm{ord}_a(f) = \mathrm{ord}_a(g) - \mathrm{ord}_a(h)$.
$\Rightarrow \mathrm{ord}_a : k(X)^\times \to \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung. Der zugehörige Bewertungsring ist $k[X]_{(X-a)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),a}$
2) Für $f = \frac{g}{h} \in k(X)^\times$, $g, h \in k[X] \setminus \{0\}$, sei $\mathrm{ord}(f) := \deg(h) - \deg(g)$.
ord ist diskrete Bewertung auf $k(X)$:
$\mathrm{ord}(\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2}) = \mathrm{ord}(\frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}) = \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2 + g_2 h_1)$
$\geq \min(\deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_1 h_2), \deg(h_1) + \deg(h_2) - \deg(g_2 h_1)) = \min(\mathrm{ord}(\frac{g_1}{h_1}), \mathrm{ord}(\frac{g_2}{h_2}))$
Anmerkung: ord „=“ ord_∞ wie in Beispiel 1.

Bemerkung 20.5
Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist jede diskrete Bewertung auf $k(X)$ von der Form ord_a für ein $a \in k \cup \{\infty\}$.

Beweis
Übung oder Vorlesung □

Beispiel
3) $K = \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ Primzahl. Schreibe $a \in \mathbb{Q}^\times$ in der Form $a = p^n \cdot \frac{b}{c}$, $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \nmid bc$. Setze $v_p(a) := n$.
$v_p : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Z}$ ist diskrete Bewertung („p-adische Bewertung“).
$\mathcal{O}_{v_p} = \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$

Bemerkung 20.6
Sei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ diskrete Bewertung auf Körper K. Sei $0 < \varrho < 1$. Setzte:

$$|x|_v := \begin{cases} \varrho^{v(x)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Dann erfüllt $|\cdot|_v : K \to \mathbb{R}$:
- $|xy|_v = \varrho^{v(xy)} = \varrho^{v(x)+v(y)} = \varrho^{v(x)} \cdot \varrho^{v(y)} = |x|_v \cdot |y|_v$
- $|x+y|_v = \varrho^{v(x+y)} \leq \max(\varrho^{v(x)}, \varrho^{v(y)}) \leq \max(|x|_v, |y|_v)$ $(\leq |x|_v + |y|_v)$

Definition 20.7
Sei C nichtsinguläre Kurve, $P \in C$. Dann ist $\mathcal{O}_{C,P}$ diskreter Bewertungsring. Die zugehörige diskrete Bewertung auf $k(C) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{C,P})$ heißt ord_P. ord_P heißt die ***Ordnung*** von f in P.

Bemerkung 20.8
Sie C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann gibt es nur endlich viele $P \in C$ mit $\mathrm{ord}_P(f) \neq 0$.

Beweis
Es ist $\mathrm{ord}_P(f) > 0 \Leftrightarrow f \in m_P \Leftrightarrow f(P) = 0$
$\mathrm{ord}_P(f) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in m_P \Leftrightarrow \frac{1}{f}(P) = 0$
$\Rightarrow \{P \in C : \mathrm{ord}_P(f) \neq 0\} = V(f) \cup V(\frac{1}{f})$
$V(f)$ und $V(\frac{1}{f})$ sind echte abgeschlossene Teilmengen von C.
$\dim C = 1 \Rightarrow V(f)$, $V(\frac{1}{f})$ sind endlich. □

Proposition 20.9
Sei C nichtsinguläre Kurve, $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen, V projektive Varietät, $f : U \to V$ Morphismus. Dann gibt es genau einen Morphismus $\overline{f} : C \to V$ mit $\overline{f}|_U = f$.

Beweis
Eindeutigkeit: Seien $g, h : C \to V$ Morphismen mit $g|_U = h|_U = f$.
$\{x \in C : g(x) = h(x)\}$ ist abgeschlossen.
$\Rightarrow g|_{\overline{U}} = h|_{\overline{U}}$. Da $\overline{U} = C$, folgt $g = h$.
Existenz: Œ $U = C \setminus \{P\}$ für ein $P \in C$. Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, also Œ $V = \mathbb{P}^n(k)$.
Œ $f(U) \not\subseteq V(X_i)$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$ (sonst $V = \mathbb{P}^{n-1}(k)$).
$\Rightarrow W := f^{-1}(\bigcap\limits_{i=0}^{n} U_i) \neq \emptyset$
$\Rightarrow W$ ist dicht in U.
Sei $h_{ij} := \frac{X_i}{X_j} \circ f$, $i, j = 0, \dots, n$
h_{ij} ist reguläre Funktion auf W und damit Element von $k(C)^\times$.
Sei $r_i := \mathrm{ord}_P(h_{i0})$, $i = 0, \dots, n$
Sei k so gewählt, dass $r_k \leq r_j$ für alle $j \neq k$
$\Rightarrow \mathrm{ord}_P(h_{ik}) = \mathrm{ord}_P(\frac{h_{i0}}{h_{k0}}) = r_i - r_k \geq 0 \ \forall\ i$
$\Rightarrow h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}$, $i = 0, \dots, n$
$\Rightarrow \exists$ Umgebung $\widetilde{U}$ von P in C, sodass $h_{ik} \in \mathcal{O}_{C,P}(\widetilde{U})$, $i = 0, \dots, n$.

$$\text{Setze } \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq P \\ \underbrace{(h_{0k}(x) : \ldots : h_{nk}(x))}_{\in \mathbb{P}^n(k), \text{ da } h_{kk}=1} & : x = P \end{cases}$$

Für $x \in \overline{U} \setminus \{P\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) = f(x) &= \left(\left(\tfrac{X_0}{X_k} \circ f\right)(x) : \left(\tfrac{X_1}{X_k} \circ f\right)(x) : \ldots : \left(\tfrac{X_n}{X_k} \circ f\right)(x)\right) \\ &= (h_{0k}(x) : \ldots : h_{nk}(x))\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{f}$ ist Morphismus. $\square$

§ 21 Divisoren

Sei C nichtsinguläre Kurve (also projektiv, irreduzibel, über algebraisch abgeschlossenem k).

Definition 21.1

a) Ein ***Divisor*** auf C ist eine formale Summe $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $P_i \in C$.

b) $\operatorname{Div}(C) = \{D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i \mid D \text{ ist Divisor auf } C\}$ mit der formalen Addition heißt ***Divisorengruppe*** von C.

c) Für $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ heißt $\deg(D) := \sum\limits_{i=1}^{n} n_i$ der ***Grad*** von D.

d) $D = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i P_i$ heißt ***effektiv***, wenn alle $n_i \geq 0$ sind.
Schreibweise: $D \geq 0$

Definition + Bemerkung 21.2

a) Für $f \in k(C)^\times$ heißt $\operatorname{div}(f) := \sum\limits_{P \in C} \operatorname{ord}_P(f)_P$ der ***Divisor von f***

b) $\operatorname{div}(f)$ ist Divisor (wegen Bemerkung 20.8)

c) $D \in \operatorname{Div}(C)$ heißt ***Hauptdivisor***, wenn es ein $f \in k(C)^\times$ gibt mit $D = \operatorname{div}(f)$.

d) $\operatorname{div} : k(C)^\times \to \operatorname{Div}(C)$, $f \mapsto \operatorname{div}(f)$ ist Gruppenhomomorphismus. $\operatorname{Bild}(\operatorname{div}) = \operatorname{Div}_H(C)$ sind die Hauptdivisoren.

e) $\operatorname{Cl}(C) := \operatorname{Div}(C)/\operatorname{Div}_H(C)$ heißt ***Divisorenklassengruppe*** von C.

f) $D, D' \in \operatorname{Div}(C)$ heißen ***linear äquivalent***, wenn $D - D'$ Hauptdivisor ist.
Schreibweise: $D \equiv D'$

Beispiel 21.3

$C = \mathbb{P}^1(k)$

Jedes $f \in k(C)^\times = k(X)^\times$ lässt sich eindeutig schreiben in der Form $f = \frac{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)}{\prod_{i=1}^{m}(X-b_j)}$ mit $a_i \neq b_j$ für alle i, j $(a_i, b_j \in k)$.

Dann ist $\operatorname{ord}_a(f) = \#\{i : a_i = a\} - \#\{j : b_j = a\}$ für $a \in k$

$\operatorname{ord}_\infty(f) = m - n$

$\Rightarrow \operatorname{div}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j + (m-n) \cdot \infty \Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f)) = 0$

Umgekehrt: Sei $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^1(k))$, $\deg(D) = 0$

Schreibe $D = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i - \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j$

Sei zum Beispiel $P_1 = \ldots = P_d = \infty$, $P_i \neq \infty$ für ein $i > d$

$\Rightarrow$ für $f = \frac{\prod_{i=d+1}^{n}(X-P_i)}{\prod_{j=1}^{n}(X-Q_j)}$ gilt: $\operatorname{div}(f) = D \Rightarrow \operatorname{Cl}(\mathbb{P}^1(k)) \cong \mathbb{Z}, [D] \mapsto \deg(D)$

Ziel

$\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$ für jedes $f \in k(C)^\times$

Beobachtung

f induziert Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1(k)$ (Proposition 20.9)

Strategie

i) $\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$

ii) $\deg(f^*(D)) = \deg(f) - \deg(D)$

Definition + Bemerkung 21.4
Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven C_1, C_2.

a) Sei $Q \in C_2$, $P \in f^{-1}(Q)$, $t \in m_Q$ Uniformierende (das heißt $m_Q = (t)$). Dann heißt $e_P = e_P(f) := \operatorname{ord}_P(t \circ f)$ Verzweigungsordnung von f in P.

b) Definiere Gruppenhomomorphismus
$$f^* : \operatorname{Div}(C_2) \to \operatorname{Div}(C_1)$$
durch $f^*(Q) = \sum\limits_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$

c) Für $g \in k(C_2)^\times$ gilt:
$$f^*(\operatorname{div}(g)) = \operatorname{div}(g \circ f)$$

d) f^* induziert Gruppenhomomorphismus:
$$f^* : \operatorname{Cl}(C_2) \to \operatorname{Cl}(C_1)$$

Beweis

a) *zu zeigen:* $e_P(f)$ hängt nicht von der Wahl von t ab.
Ist t' weitere Uniformierende, so ist $t' = u \cdot t$ für ein $u \in \mathcal{O}_{C_2,Q}^\times$
$\Rightarrow \operatorname{ord}_P(t' \circ f) = \operatorname{ord}_P(u \cdot t \circ f) = \operatorname{ord}_P((u \circ f) \cdot (t \circ f)) = \underbrace{\operatorname{ord}_P(u \circ f)}_{=0} + \operatorname{ord}_P(t \circ f)$

b) *zu zeigen:* $\#\{D \in C_1 : f(P) = Q\}$ ist endlich.
Denn $\underbrace{f^{-1}(\{Q\})}_{\neq C_1,\text{ da } f \text{ surj.}}$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(\{Q\})$ endlich

c) Es ist
$$f^*(\operatorname{div} g) = \sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot f^*Q = \sum_{Q \in C_2} \operatorname{ord}_Q(g) \cdot \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P(f) \cdot P$$
und
$$\operatorname{div}(g \circ f) = \sum_{P \in G} \operatorname{ord}_P(g \circ f) P = \sum_{Q \in C_2} \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \operatorname{ord}_P(g \circ f) \cdot P$$
Zu zeigen ist also:
$$\underbrace{\operatorname{ord}_P(g \circ f)}_{=:s} = \underbrace{\operatorname{ord}_Q(g)}_{=:r} \cdot e_P(f) \text{ für alle } P \in C_1$$
Seien t_P und t_Q Uniformisierende in P beziehungsweise $Q = f(P)$. Dann gibt es Einheiten $u, u' \in \mathcal{O}_{C_1,P}$ und $v \in \mathcal{O}_{C_2,Q}$ mit $g \circ f = u \cdot t_P^s$, $g = v \cdot t_Q^r$, $t_Q \circ f = u' t_P^{e_P(f)}$
$\Rightarrow u \cdot t_P^s = g \circ f = (v \cdot t_Q^r) \circ f = (v \circ f) \cdot (t_Q \circ f)^r = \underbrace{(v \circ f)}_{\in \mathcal{O}_{C_1,P}} \cdot u'^r t_P^{r \cdot e_P(f)} \Rightarrow s = r \cdot e_P(f)$

d) folgt aus b) □

Folgerung 21.5
Sei C nichtsinguläre Kurve, $f \in k(C)^\times$. Dann definiert f einen Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1(k)$ und es gilt:
$$\operatorname{div}(f) = f^*((0) - (\infty))$$

Beweis
Der erste Teil folgt aus 20.9. Für P mit $f(P) = 0$ ist $e_P(f) = \operatorname{ord}_P(X \circ f) = \operatorname{ord}_P(f)$; ist $f(P) = \infty$, so ist $\frac{1}{f}(P) = 0$ und $\operatorname{ord}_P(f) = -\operatorname{ord}_P(\frac{1}{f})$. □

Bemerkung + Definition 21.6
Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus nichtsingulärerer Kurven. Dann induziert f Körperhomomorphismus $f^\# : k(C_2) \to k(C_1)$. $f^\#$ macht $k(C_1)$ zu einer endlichen Körpererweiterung von $k(C_2)$.

$\deg(f) := [k(C_1) : k(C_2)]$ heißt ***Grad*** von f.

Beweis
Die Existens von $f^\#$ steht in 13.7. Da $\dim C_1 = \dim C_2 = 1$, ist $\operatorname{trdeg}(k(C_1)) = \operatorname{trdeg}(k(C_2)) = 1$ (Folgerung 19.8), also $k(C_1)|k(C_2)$ algebraisch. Außerdem ist $k(C_1)|k(C_2)$ endlich erzeugt, weil $k(C_1)$ schon über k endlich erzeugt ist. □

Satz 11
a) Sei C eine nichtsinguläre Kurve. Dann hat jeder Hauptdivisor auf C Grad 0.

b) Sei $f : C_1 \to C_2$ surjektiver Morphismus von nichtsingulären Kurven. Dann gilt für jeden Divisor D auf C_2:
$$\deg(f^*(D)) = \deg(f) \cdot \deg D$$

c) Sei f wie in b). Dann gilt für jedes $Q \in C_2$:
$$\deg(f^*(Q)) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P = \deg f =: n$$

Beweis
b) folgt offensichtlich aus c).

a) folgt aus b) mit 21.5.

c) Beweis nur im folgenden affinen Beispiel (die Aussage ist lokal, daher ist affines Beispiel sinnvoll): □

Beispiel
$C_2 = \mathbb{A}^1(k)$, $C_1 = V(h) \subset \mathbb{A}^2(k)$, $h(X,Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \ldots + a_1(X)Y + a_0(X) \in k[X,Y]$ irreduzibel, $f : C_2 \to C_1, (x,y) \mapsto x$

Es ist $k(C_1) = k(X)[Y]/(h)$ und $f^\# : k(X) \hookrightarrow k(X)[Y]/(h)$ die natürliche Einbettung.

Also: $\deg(f) = n$

Für $x_0 \in k = \mathbb{A}^1(k)$ ist $f^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \in k^2 : h(x_0, y) = 0\}$.

$h(x_0, y) = 0$ ist ein Polynom vom Grad n in y mit Koeffizienten in k, hat also, mit Vielfachkeit gezählt, n Nullstellen. Zu zeigen ist also:

Behauptung: Ist $y_0 \in k$ e-fache Nullstelle von $h(x_0, y)$, so gilt für den Punkt $P = (x_0, y_0) \in C_1$:
$$e_P(f) = e$$

Beweis: Œ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Dann ist $h(0,y) = y^e \cdot \tilde{g}(y)$ (*) mit $\tilde{g}(0) \neq 0$ $(e \geq 1)$

Es ist $\tilde{g}(y) = g(0,y)$, wobei $g(x,y) = y^{n-e} + a_{n-1}(x)y^{n-e-1} + \ldots + a_{e+1}(x)y + a_e(x)$

Aus $\tilde{g}(0) \neq 0$ folgt $g(0,0) \neq 0$, also $g \in \mathcal{O}_{C_1,P}^\times$

Weiter folgt aus (*): $a_0(0) = \ldots = a_{e-1}(0) = 0$
$\Rightarrow a_i(x) = x \cdot \tilde{a}_i(x)$, $i = 0, \ldots, e-1$ ($\tilde{a}_i \in k[X]$)
$\Rightarrow 0 = h(x,y) = y^e g(x,y) + x \cdot b(x,y)$ (**) mit $b(x,y) = \tilde{a}_{e-1}(x)y^{e-1} + \ldots + \tilde{a}_1(x)y + \tilde{a}_0(x)$
Gesucht ist $e_P(f) = \mathrm{ord}_P(t \circ f) = \mathrm{ord}_P(f^\#(t))$ für einen Erzeuger von $m_{C_2,f(t)}$.
Da $C_2 = \mathbb{A}^1(k)$ und $f(P) = 0$, ist $t = x$ eine mögliche Wahl $\Rightarrow e_P(f) = \mathrm{ord}_P(x)$
Dazu muss x in der Form $u \cdot s^d$ geschrieben werden für einen Erzeuger s von $m_{C_1,P}$ und ein $u \in \mathcal{O}_{C_1,P}$.

1. Fall: $e = 1$

Dann folgt aus (**): $y = -x \cdot b(x,y) \cdot g(x,y)^{-1} \in (x)$
$\Rightarrow x$ erzeugt $m_P \Rightarrow \mathrm{ord}_P(x) = 1 = e$

2. Fall: $e > 1$

Behauptung: In diesem Fall ist $\tilde{a}_0(0) \neq 0$
Dann ist $b(0,0) \neq 0$, also $b \in \mathcal{O}^\times_{C_1,P}$ und damit $x = y^e \cdot \underbrace{g \cdot b^{-1}}_{=u \in \mathcal{O}^\times_{C_1,P}}$

$\Rightarrow m_P$ wird von y erzeugt und $\mathrm{ord}_P(x) = e$.

hier fehlen ein paar Sachen (sicher?)

§ 22 Der Satz von Riemann-Roch

Sei weiterhin C nichtsinguläre Kurve.

Definition + Bemerkung 22.1
Sei $D = \sum\limits_{P \in C} n_P \cdot P \in \mathrm{Div}(C)$

a) $L(D) := \{f \in k(C)^\times \mid D + \mathrm{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ ist k-Vektorraum, der ***Riemann-Roch-Raum*** zu D.

b) $l(D) := \dim L(D)$

c) $L(0) = k$

d) Ist $\deg(D) < 0$, so ist $L(D) = 0$

e) Ist $D' \equiv D$ für ein $D' \in \mathrm{Div}(C)$, so ist $l(D') = l(D)$

Beweis

a) $\mathrm{div}(f) \geq -D \Leftrightarrow \mathrm{ord}_P(f) \geq -n_P \ \forall P$
$\mathrm{ord}_P(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$

e) Sei $D' = D + \mathrm{div}(g)$ für ein $g \in k(C)^\times$. Dann ist $L(D') \to L(D)$; $f \mapsto f \cdot g$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.
Denn: $D + \mathrm{div}(fg) = \underbrace{D + \mathrm{div}(g)}_{=D'} + \mathrm{div}(f) \geq 0$
$(h \cdot \frac{1}{g} \hookleftarrow h)$ $\square$

Proposition 22.2
Sei $D \in \mathrm{Div}(C)$

a) $l(D + P) \leq l(D) + 1$

b) $l(D) \leq \deg(D) + 1$ (falls $\deg(D) \geq 1$)

Insbesondere ist $L(D)$ endlich dimensionaler Vektorraum

Beweis

a) Es ist $L(D) \subseteq L(D+P)$. Ist $f \in L(D+P) - L(D)$, dann ist $\mathrm{ord}_P(f) = -(n_P + 1)$. Ist $L(D+P) \neq L(D)$, so wähle $f \in L(D+P) - L(D)$.
Behauptung: $L(D+P)$ wird erzeugt von $L(D)$ und f.
Denn: Sei $g \in L(D+P) - L(D)$
$\Rightarrow \mathrm{ord}_P(g) = -n_P - 1$
$\Rightarrow f = ut^{-n_P - 1}$, $g = u't^{-n_P-1}$ für ein $t \in m_P$ mit $m_P = (t)$ $(u, u' \in \mathcal{O}_P^\times)$
Sei $h := u(P)g - u'(P)f \in L(D+P)$
$= (u(P) \cdot u' - u'(P) \cdot u)t^{-n_P - 1}$
$\Rightarrow \mathrm{ord}_P(h) \geq -(n_P + 1) + 1 \Rightarrow h \in L(D)$
$\Rightarrow g = \frac{1}{u(P)} \cdot (h - u'(P)f) \in L(D) + (f)$

b) Induktion über $d = \deg(D)$
$d = -1$: $L(D) = 0$
$d \geq 0$: Sei $P \in C$, $D' = D - P$
$\stackrel{\text{I. V.}}{\Longrightarrow} l(D') \leq \deg(D') + 1 = d$
$\stackrel{\text{a)}}{\Longrightarrow} l(D) = l(D' + P) \leq d + 1$ $\square$

Satz + Definition 12 (Riemann-Roch)

a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{N}$, sodass für alle $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt:
$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - \gamma$$

b) Das kleinste γ, für das a) erfüllt ist, heißt ***Geschlecht*** von C ($g(C) = g$).

c) Es gibt einen Divisor $K \in \operatorname{Div}(C)$ („kanonischer Divisor“), sodass für jedes $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt:
$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$
Dabei ist $K = \operatorname{div} \omega$ für ein (beliebiges) Differential $\omega \in \Omega(C)$. Zum Beispiel $\omega = \mathrm{d}\, f$ für ein $f \in k(C)^\times$; $\operatorname{ord}_P(\omega) = \operatorname{ord}_P(\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t_P})$, t_P Uniformisierende in P.

Beispiel

1) $C = \mathbb{P}^1(k)$, $\omega = \mathrm{d}\, x$, $\operatorname{div} \omega = ?$

Für $a \in k$ ist $t_a := x - a$ Uniformisierende, $\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}(x-a)} = 1$

In ∞ ist $\frac{1}{x}$ Uniformisierende.

$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}(\frac{1}{x})} = (-\frac{1}{x})^{-2} \Rightarrow \operatorname{ord}_\infty(\mathrm{d}\, x) = -2$

$\Rightarrow K = -2 \cdot \infty$ ist kanonischer Divisor auf $\mathbb{P}^1(k)$.

2) $C = \overline{V(Y^2 - X^3 + X)}$, $\omega = \frac{\mathrm{d}\, y}{x} \Rightarrow \operatorname{div} \omega = 0$ (Rechnung selber)

Folgerung 22.3

a) $l(K) = g$

(setze $D = 0$ in Satz 12 c) ein: $\underbrace{l(0)}_{=1} - l(K) = \underbrace{\deg 0}_{=0} + 1 - g$)

b) $\deg K = 2g - 2$

(setze K in Satz 12 c) ein: $\underbrace{l(K)}_{=g} - \underbrace{l(0)}_{=1} = \deg K + 1 - g$)

Beweis (von Satz 12)

a) Setze $s(D) := \deg D + 1 - l(D)$

Es gilt:
- $s(D) = s(D')$ falls $D' \equiv D$
- $D' \leq D \Rightarrow s(D') \leq s(D)$

Sei nun $f \in k(C)^\times$ und $N := f^*(0)$ der Nullstellendivisor.

Behauptung 1: Für jedes $D \in \operatorname{Div}(C)$ gibt es D' mit $D' \equiv D$, sodass $D' \leq m \cdot N$ für ein $m \geq 1$.

Behauptung 2: Es gibt $\gamma \geq 0$ mit $s(m \cdot N) \leq \gamma \ \forall m \geq 1$.

Aus Behauptung 1 und Behauptung 2 folgt 12 a).

Beweis 1: Sei $D = \sum_{P \in C} n_P P$

Gesucht: $h \in k(C)^\times$ mit $n_P + \operatorname{ord}_P h \leq \begin{cases} m \cdot \operatorname{ord}_P(f) & : \operatorname{ord}_P(f) > 0 \\ 0 & : \operatorname{ord}_P(f) \leq 0 \end{cases}$

Ersetze dann D durch $D' = D + \operatorname{div}(h)$.

Seien $P_1, \ldots, P_r \in C$ die Punkte mit $\operatorname{ord}_P(f) \leq 0$ und $n_P > 0$.

$h_i := \frac{1}{f} - \frac{1}{f}(P_i) \in m_{P_i}$

$h := \prod_{i=1}^{r} h_i^{-n_{P_i}}$ tut's

Beweis 2: $[k(C) : k(f)] = \deg(f) =: r$

Sei $g_1, \ldots, g_r$ Vektorraum-Basis von $k(C)$ über $k(f)$. ŒE jede Polstelle von g_i ist auch Polstelle von f. $\Rightarrow \frac{g_i}{f^j} \in L(mN)$ mit $i = 1, \ldots, r$, $j = 0, \ldots, m \Rightarrow \underset{\deg(mN)=mr}{\ldots} \Rightarrow$ $l(mN) \geq mr - r(\gamma_0 - 1)$ $\square$

Anhang A

Übungen

Übung 1 vom 21. Oktober 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei R ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann der Ring der formalen Potenzreihen $R[\![X]\!] = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in R\}$noethersch ist.

b) Zeige, dass der Ring $\{f \in \mathbb{R}[\![X]\!] \mid f \text{ konvergiert auf } \mathbb{R}\}$ nicht noethersch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei k ein unendlicher Körper und $V \subset k^3$ gegeben durch

$$V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}.$$

Zeige, dass V eine affine Varietät ist, und bestimme das Verschwindungsideal $I(V) \subset k[X, Y, Z]$. V heißt übrigens *getwistete Kubik*.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

a) Zeige: Für ein nichtkonstantes Polynom $g \in k[X]$ und ein $a \in k^\times$ ist $g^2 - a$ kein Quadrat in $k[X]$.

b) Nun sei k unendlich und $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Zeige, dass jede polynomiale Abbildung $\Phi : k \to k^2$, $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ mit $f_1, f_2 \in k[X]$, deren Bild in der Nullstellenmenge V_λ des Polynoms $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$ liegt, konstant ist. Gilt das auch für $\lambda = 0$?

c) Skizziere für $k = \mathbb{R}$ die Nullstellenmenge V_λ für
   - $\lambda = 0$,
   - $\lambda = 1$,
   - $\lambda = 2$.

Übung 2 vom 28. Oktober 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei k ein beliebiger Körper. Dann sind $\mathbb{A}^2(k)$ und $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ als Mengen gleich. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2(k)$ genau dann die Produkttopologie von $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ ist, wenn k endlich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper und $V_k = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3(k)$.

a) Skizziere die affine Varietät $V_\mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimme die irreduziblen Komponenten von V_k.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Wir versehen Y mit der Spurtopologie. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Y ist irreduzibel.

ii) Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist irreduzibel.[1]

iii) Zwei nichtleere, offene Mengen in Y haben nichtleeren Schnitt.

iv) Jede nichtleere, offene Menge $U \subset Y$ ist dicht in Y (d. h. $\overline{U} = Y$).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper. Zeige, dass für jedes $n \geq 1$ der Raum $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Zariski-Topologie irreduzibel ist.

Hinweis: Benutze Proposition 4.4 aus der Vorlesung oder zeige, dass $\mathbb{A}^n(k)$ die Bedingung (iii) aus Aufgabe 3 erfüllt.

Zunächst eine kleine Erinnerung:

Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Per Definition ist $\tilde{U} \subseteq Y$ genau dann offen in Y (bzgl. der Spurtopologie), wenn ein offenes $U \subseteq X$ existiert mit $U \cap Y = \tilde{U}$.

Die analoge Definition mit abgeschlossenen Mengen liefert die gleiche Topologie:

$$\begin{aligned} & A \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \\ \Leftrightarrow\ & Y \setminus A \subseteq Y \text{ offen} \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, U \subseteq X \text{ offen} : Y \cap U = Y \setminus A \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, X \setminus U \subseteq X \text{ abgeschlossen} : Y \cap (X \setminus U) = A \end{aligned}$$

Eine Menge $A \subseteq Y$ ist also genau dann abgeschlossen in Y bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine abgeschlossene Menge $\tilde{A} \subseteq X$ gibt mit $\tilde{A} \cap Y = A$.

Lösung 3
In der Übung haben wir bereits gesehen, dass i) $\Leftrightarrow$ iii) und iii) $\Rightarrow$ iv). Auch i) $\Rightarrow$ ii) stand schon an der Tafel:

Angenommen $\overline{Y}$ ist reduzibel, d. h. $\overline{Y} = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in $\overline{Y}$. Dann gibt es (siehe oben) abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap \overline{Y} = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap \overline{Y} = A_2$. Dann sind $\tilde{A}_i \cap Y$ abgeschlossen in Y. Außerdem gilt $\tilde{A}_i \cap Y \neq Y$, da sonst $Y = \tilde{A}_i \cap Y \subseteq A_i \subsetneqq \overline{Y}$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Menge in X ist, die Y enthält. Es folgt $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y)$ und damit ist Y reduzibel.

[1] Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist definiert als der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die Y enthalten.

iv) ⇒ iii): Seien U_1, $U_2 \subseteq Y$ offen und nichtleer. Wäre $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so wäre $U_2 \subseteq Y \setminus U_1$. Die Menge $Y \setminus U_1$ ist abgeschlossen, also gilt auch $\overline{U_2} \subseteq Y \setminus U_1$. Aber $\overline{U_2} = Y$, also ist $U_1 = \emptyset$, ein Widerspruch!

ii) ⇒ i): Angenommen Y ist reduzibel, d. h. $Y = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in Y. Dann gibt es abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap Y = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap Y = A_2$. Die Mengen $\tilde{A}_i \cap \overline{Y}$ sind abgeschlossen in X. Außerdem gilt: $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y) \subseteq (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y}) \subseteq \overline{Y}$ und damit $\overline{Y} = (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y})$. Wäre $\tilde{A}_i \cap \overline{Y} = \overline{Y}$, so auch $Y = \overline{Y} \cap Y = (\tilde{A}_i \cap \overline{Y}) \cap Y = \tilde{A}_i \cap Y = A_i$, ein Widerspruch. Damit ist $\overline{Y}$ reduzibel.

Übung 3 vom 4. November 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^\top \overline{A} = I_n\}$ die unitäre Gruppe.

a) Zeige, dass $U(n)$ keine komplexe affine Varietät in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.

b) Zeige, dass $U(n)$ dafür aber eine reelle affine Varietät ist, wenn wir $\mathbb{C}^{n\times n}$ auf die naheliegende Weise mit $\mathbb{R}^{2n^2}$ identifizieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät. Weiter seien $g, h \in k[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome, wobei h keine Nullstelle in V habe.

Zeige, dass die Abbildung $\frac{g}{h} : V \to \mathbb{A}^1(k)$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist. Gilt das auch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $V_1 = V(Y^2 - X)$ und $V_2 = V(XY - 1)$ affine Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$.

Ist der Koordinatenring von V_1 bzw. V_2 isomorph zum Polynomring in einer Variablen? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $C = V(Y^2 - X^2(X-1)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$.

a) Zeige, dass es einen surjektiven Morphismus $\phi : \mathbb{A}^1(k) \to C$ gibt.

b) Gibt es auch einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{A}^1(k) \to C$?

c) Ist C hmöomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$?

Übung 4 vom 11. November 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei k ein Körper, A und B zwei k-Algebren, B endlich erzeugt und $\varphi\colon A \to B$ ein k-Algebrenhomomorphismus.

Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals in B unter φ ein maximales Ideal in A ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für B die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall\, U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X: $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''} = \rho_U^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
  - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
  - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i\cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i\cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_*\mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von $\mathcal{F}$.)

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

Zeige: Der k-Algebrenhomomorphismus $\rho\colon k[V] \to \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$ ist genau dann injektiv, wenn U dicht in V liegt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $U = \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Bestimme den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2(k)}(U)$. Folgere, dass U nicht isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Es seien V eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen und $g \in \mathcal{O}_V(U)$. Zeige, dass $W := \{x \in U : g(x) = 0\}$ abgeschlossen in U ist.

Lösung 2
Für offene Mengen $U \subseteq V \subseteq Y$ sind $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y) = X$ offen in X. Wir können also Restriktionsabbildungen definieren als $\sigma_U^V = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Es gilt:

- $\sigma_U^U = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = \mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}(U)}$
- Seien $U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in Y, dann ist $\sigma_U^{U'} \circ \sigma_{U'}^{U''} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U')} \circ \rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U'')} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U'')} = \sigma_U^{U''}$.
- Sei $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$.

- Für $h \in f_*\mathcal{F}(V)$ mit $\sigma^V_{V_i}(h) = 0$ für alle $i \in I$ gilt dann auch $\rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(h) = 0$ für alle $i \in I$. Außerdem ist $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, ist somit $h = 0$.
- Sind $h_i \in f_*\mathcal{F}(V_i)$ gegeben mit $\sigma^{V_i}_{V_i\cap V_j}(h_i) = \sigma^{V_j}_{V_i\cap V_j}(h_j)$ für alle Paare von i und j aus I, dann gilt auch $\rho^{f^{-1}(V_i)}_{f^{-1}(V_i\cap V_j)}(h_i) = \rho^{f^{-1}(V_j)}_{f^{-1}(V_i\cap V_j)}(h_j)$. Wegen $f^{-1}(V_i \cap V_j) = f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j)$ und der Garbeneigenschaften von $\mathcal{F}$ existiert dann ein $h \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V)$ mit $\sigma^V_{V_i}(h) = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V_i)}(h) = h_i$ für alle $i \in I$.

Übung 5 vom 18. November 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $U, \tilde{U}$ dichte, offene Teilmengen von V. Zeige, dass auch ihr Schnitt eine dichte, offene Teilmenge von V ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $V = V(WX - YZ) \subset \mathbb{A}^4(k)$ und x, y, z, $w \in k[V]$ die Restklassen der entsprechenden Polynome in $k[X, Y, Z, W]$. Zeige:

a) Die affine Varietät V ist irreduzibel.

b) Auf $D(y) \cup D(w)$ wird durch

$$r(p) = r(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } p \in D(y) \\ \frac{z}{w} & \text{für } p \in D(w) \end{cases}$$

eine reguläre Funktion definiert.

c) Der maximale Definitionsbereich von r als rationale Funktion ist gleich $D(y) \cup D(w)$.

d) Die reguläre Funktion r kann auf $D(y) \cup D(w)$ nicht als f/g mit f, $g \in k[V]$ geschrieben werden.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Der algebraisch abgeschlossene Körper k habe nun Charakteristik 0. Es seien a, $b \in \mathbb{N}$, $V = V(X^a - Y^b) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und $\Phi\colon \mathbb{A}^1(k) \to V$, $t \mapsto (t^b, t^a)$. Diskutiere folgende Punkte in Abhängigkeit von a und b:

- Wann ist Φ injektiv, wann surjektiv und wann ein Isomorphismus?
- Zerlege V in irreduzible Komponenten.
- Bestimme, wann Φ eine birationale Abbildung ist.

Hinweis: Betrachte den größten gemeinsamen Teiler d von a und b.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) *Zeige*: Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert auf $\mathbb{P}^1(k)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (ax + by : cx + dy).$$

Dabei operiert das Zentrum $Z(\mathrm{GL}_2(k)) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in k^\times\}$ trivial, d.h. obige Operation definiert auch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(k) = \mathrm{GL}_2(k)/Z(\mathrm{GL}_2(k))$ auf $\mathbb{P}^1(k)$.

Für paarweise verschiedene Punkte $P_1 = (x_1 : y_1), \ldots, P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ ist das Doppelverhältnis gegeben durch

$$DV(P_1, \ldots, P_4) := \left(\frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2} \right).$$

b) *Zeige*: Das Doppelverhältnis ist invariant unter $\mathrm{PGL}_2(k)$, d.h. für jedes $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ ist $DV(P_1, \ldots, P_4) = DV(g(P_1), \ldots, g(P_4))$.

c) *Zeige*: $\mathrm{PGL}_2(k)$ operiert dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$ gibt es stets ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(Q_1), g(Q_2), g(Q_3)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$.

Die Aussage in Aufgabe 1 gilt nicht nur für affine Varietäten, sondern allgemeiner für topologische Räume. Deshalb hier nochmal die Lösung der allgemeineren Aufgabe 1:

Lösung 1
Angenommen $U \cap \tilde{U}$ wäre nicht dicht in V. Dann wäre $W := \overline{U \cap \tilde{U}} \subsetneq V$. Da U und $\tilde{U}$ dicht in V liegen, liegt weder U noch $\tilde{U}$ komplett in W. Es gilt:

$$U = (U \cap \tilde{U}) \cup (U \cap (V \setminus \tilde{U})) \subseteq (U \cap \tilde{U}) \cup (V \setminus \tilde{U}) \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U})$$

Die Menge $\tilde{U}$ ist dicht in V, kann also nicht in W enthalten sein und natürlich ist $\tilde{U} \cap (V \setminus \tilde{U}) = \emptyset$, also gilt $\tilde{U} \not\subseteq W \cup V \setminus \tilde{U}$ und damit $W \cup V \setminus \tilde{U} \neq V$. Es folgt $\overline{U} \subseteq W \cup (V \setminus \tilde{U}) \subsetneq V$, was im Widerspruch zu $\overline{U} = V$ steht.

Lösung 3
Sei $d := \mathrm{ggT}(a, b)$, $\alpha := a/d$ und $\beta := b/d$. In der Übung haben wir bereits eingesehen, dass Φ genau dann injektiv ist, wenn $d = 1$ und genau dann surjektiv ist, wenn $d = 1$.

Wann ist Φ ein Isomorphismus?
Jeder Isomorphismus ist bijektiv, also brauchen wir mindestens $d = 1$. Ein bijektives Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $f \in k[X, Y]$ existiert mit $\Phi^{-1}(x, y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in V$. Wenn ein solches f existiert, dann gilt $f(\Phi(t)) = t$ und nach Satz 4 auch $(f \circ \Phi)^\sharp = \mathrm{id}^\sharp$, d.h. $T = f(T^a, T^b) \in k[T]$. Da T Grad 1 hat, hat auch $f(T^a, T^b)$ Grad 1, was $a = 1$ oder $b = 1$ zur Folge hat.
Für $a = 1$ ist $\Phi^{-1}(x, y) = y$, für $b = 1$ gilt $\Phi^{-1}(x, y) = x$.
Somit gilt: Φ ist genau für $a = 1$ oder $b = 1$ ein Isomorphismus.

Zerlegung von V in irreduzible Komponenten:
Sei ξ eine primitive d-te Einheitswurzel in k. In $k[T, U]$ gilt $T^d - U^d = \prod_{k=0}^{d-1}(T - \xi^k U)$, denn die $\xi^k U$ sind d paarweise verschiedene Nullstellen von $T^d - U^d \in k[T]$ und $\deg_T(T^d - U^d) = d$.
Damit gilt $V = V(X^a - Y^b) = V(X^{\alpha d} - Y^{\beta d}) = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$. Sei $V_k := V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$.
Man rechnet schnell nach, dass das folgende topologische Lemma gilt.
Lemma: Sind V, W topologische Räume, $\Phi\colon V \to W$ stetig und V irreduzibel, dann ist auch W irreduzibel.
Da die Abbildung $t \mapsto (t^\beta, t^\alpha)$ ein surjektiver Morphismus von $\mathbb{A}^1(k)$ nach V_0 ist (α und β sind teilerfremd) und $\mathbb{A}^1(k)$ irreduzibel ist, ist auch V_0 irreduzibel.
Die Morphismen $V_k \to V_0$, $(x, y) \mapsto (\xi^{-ku} x, \xi^{kv} y)$ und $V_0 \to V_k$, $(x, y) \mapsto (\xi^{ku} x, \xi^{-kv} y)$ sind wohldefiniert (man rechne nach, dass das Bild tatsächlich in V_0 bzw. V_k liegt) und invers zueinander. Also ist $V_0 \cong V_k$ und somit sind alle V_k irreduzibel. Des weiteren sind die V_k paarweise nicht ineinander enthalten, da $V_i \cap V_j = \{0\}$ für $i \neq j$.
Damit haben wir gezeigt, dass $V = \bigcup_{k=0}^{d-1} V(X^\alpha - \xi^k Y^\beta)$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten ist.

Wann ist Φ birational?
In der Übung haben wir bereits gesehen, dass V irreduzibel sein muss, falls Φ birational ist.

Aus der obigen Zerlegung von V folgt also, dass $d = 1$ gelten muss. Ist nun umgekehrt $d = 1$, dann sind a und b teilerfremd, also existierten $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass $ua + vb = 1$ ist. Somit gilt $t = t^{ua+vb} = (t^a)^u(t^b)^v$ und damit ist $\Psi : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1(k), (x, y) \mapsto (y^u x^v)$ (definiert auf $D(y) \cap D(x)$) eine Inverse zu Φ in der Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten mit dominanten rationalen Abbildungen.

Lösung 4

a) Zunächst rechnen wir nach, dass $\cdot$ eine Gruppenoperation definiert:

Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (x : y)$, sowie

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \right) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (a'x + b'y : c'x + d'y) \\
&= (a(a'x + b'y) + b(c'x + d'y) : c(a'x + b'y) + d(c'x + d'y)) \\
&= ((aa' + bc')x + (ab' + bd')y : (ca' + dc')x + (cb' + dd')y)) \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cdot (x : y) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \cdot (x : y)
\end{aligned}$$

Die Operation ist wohldefiniert, denn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\lambda x : \lambda y) = (a\lambda x + b\lambda y : c\lambda x + d\lambda y) = (ax + by : cx + dy) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y)$ für alle $\lambda \in k^\times$.

Das Zentrum von $\mathrm{GL}_2(k)$ operiert trivial auf $\mathbb{P}^1(k)$, denn für alle $a \in k^\times$ ist $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot (x : y) = (ax : ay) = (x : y)$.

b) Seien $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3)$, $P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ und $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(k)$.

$DV(g(P_1), \dots, g(P_4)) = \left(\frac{(ax_1+by_1)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_3+dy_3)-(ax_3+by_3)(cx_2+dy_2)} : \frac{(ax_1+by_1)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_1+dy_1)}{(ax_2+by_2)(cx_4+dy_4)-(ax_4+by_4)(cx_2+dy_2)} \right) = \left(\frac{(ad-bc)(x_1y_3-x_3y_1)}{(ad-bc)(x_2y_3-x_3y_2)} : \frac{(ad-bc)(x_1y_4-x_4y_1)}{(ad-bc)(x_2y_4-x_4y_2)} \right) = \left(\frac{x_1y_3-x_3y_1}{x_2y_3-x_3y_2} : \frac{x_1y_4-x_4y_1}{x_2y_4-x_4y_2} \right) = DV(P_1, \dots, P_4)$

c) Wir suchen zunächst für paarweise verschiedene $P_1 = (x_1 : y_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3) \in \mathbb{P}^1(k)$ ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $g \cdot (1 : 0) = (x_1 : y_1)$, $g \cdot (0 : 1) = (x_2 : y_2)$ und $g \cdot (1 : 1) = (x_3 : y_3)$.

Es ist $g \cdot (1 : 0) = (a : c)$, $g \cdot (0 : 1) = (b : d)$ und $g \cdot (1 : 1) = (a + b : c + d)$, wir suchen also $a, b, c, d \in k$, $ad - bc \neq 0$ und $\lambda, \mu, \nu \in k^\times$ mit $a = \lambda x_1$, $c = \lambda y_1$, $b = \mu x_2$, $d = \mu y_2$, $a+b = \nu x_3$, $c+d = \nu y_3$. Das LGS können wir umformen zu $(x_1y_2 - x_2y_1)\lambda + (x_2y_3 - x_3y_2)\nu = 0$ und $(x_1y_2 - x_2y_1)\mu + (x_3y_1 - x_1y_3)\nu = 0$. Da die P_i paarweise verschieden sind, lässt sich das LGS nichttrivial lösen. Wähle ein beliebiges $\nu \neq 0$, dann sind auch $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ und $ad - bc = \lambda x_1 \mu y_2 - \mu x_2 \lambda y_1 = \lambda\mu(x_1y_2 - x_2y_1) \neq 0$. Somit haben wir ein passendes g gefunden.

Für $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$, je paarweise verschiedene Punkte, gibt es somit ein $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ und ein $g' \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $(g'(1 : 0), g(0 : 1), g(1 : 1)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$. Die Verkettung $g' \circ g^{-1} \in \mathrm{PGL}_2(k)$ bildet dann (Q_1, Q_2, Q_3) auf (Q_1', Q_2', Q_3') ab.

Übung 6 vom 25. November 2011

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei k ein beliebiger(!) Körper und $n \geq 1$. Für einen Untervektorraum $U \subseteq k^{n+1}$ sei $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von U. Falls $\dim_k U = 2$, so nennt man $\mathbb{P}(U)$ auch eine *Gerade*. Zeige:

a) $\mathbb{P}(U)$ ist eine projektive Varietät.

b) In $\mathbb{P}^2(k)$ haben zwei Geraden immer einen nichtleeren Durchschnitt.

c) Zwei Punkte $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$ liegen auf einer eindeutig bestimmten Geraden. Diese werde mit $\overline{ab}$ bezeichnet.

d) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 3 Punkte.

e) Wenn a, b, c, $d \in \mathbb{P}^n(k)$ paarweise verschiedene Punkte sind, so folgt aus $\overline{ab} \cap \overline{cd} \neq \emptyset$, dass auch $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$ gilt.

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Achtung: Aufgabe 2 wird auf Blatt 8 verschoben - die Definition von Automorphismus einer projektiven Varietäten kam in der Vorlesung noch nicht vor.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
~~Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$.~~

~~*Tipp:* Benutze Aufgabe 4 von Blatt 5.~~

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $I \trianglelefteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige:

Das Ideal I ist genau dann ein Primideal, wenn für beliebige homogene Elemente $f, g \in S$ aus $fg \in I$ folgt, dass $f \in I$ oder $g \in I$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei k ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und $a \in k^\times$. Die affine Varietät

$$L = V((X^2 + Y^2)^2 - a(X^2 - Y^2))$$

heißt *Lemniskate*.

Argumentiere, warum L irreduzibel ist. Zeige dann, dass $k(L) = k(t)$ mit $t = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ gilt (wobei $x, y \in k[L]$ die Restklassen von X und $Y \in k[X,Y]$ sind). Folgere, dass L birational zu $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

Hinweis: L entsteht aus einer Hyperbel unter der Inversion am Einheitskreis $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k)$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x, y)$.

Lösung 1

a) Ziel: Um zu zeigen, dass $\mathbb{P}(U)$ eine projektive Varietät ist stellen wir U als Kern einer Abbildung $x \mapsto Ax$ mit $A = (a_{ij}) \in k^{m \times n+1}$ dar. Dann ist $U = V(\{\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j \mid i = 1, \ldots, m\})$.

Sei $b_1, \ldots, b_l$ eine Basis von U. Ergänze sie zu einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ von k^{n+1}. Dann ist U Kern von

$$\Phi : \begin{cases} k^{n+1} & \to & k^{n+1} & \\ b_i & \mapsto & 0 & \text{für } i = 1, \ldots, l \\ b_j & \mapsto & b_j & \text{für } j = l+1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

Die Matrix zu Φ bezüglich der Basis B ist $A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Sei M die Basiswechselmatrix von der Standardbasis zu B. Dann erfüllt $A := A_\Phi \cdot M$ wie gewünscht Kern $A = U$.

b) Die Lösung zu b) haben wir bereits in der Übung gesehen.

c) Seien $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$. Zu zeigen ist, dass a und b auf einer eindeutigen Geraden liegen.

Aus $a \neq b$ und $\dim_k(a) = \dim_k(b) = 1$ folgt, dass $a \cap b = \{0\}$. Mit der Dimensionsformel folgt dann $\dim_k(a+b) = 1 + 1 - 0 = 2$. $\mathbb{P}(a+b)$ ist also eine Gerade, die a und b enthält. Die Gerade ist eindeutig, da $a+b$ der kleinste Untervektorraum von k^{n+1} ist, der sowohl a als auch b enthält und da $a+b$ schon Dimension 2 hat.

d) Sei $\mathbb{P}(U)$ eine Gerade und $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von U. Dann sind b_1, b_2 und $b_1 + b_2$ paarweise linear unabhängig, definieren also 3 unterschiedliche Punkte in $\mathbb{P}(U)$.

e) Es sei $a = \mathbb{P}(U_1)$, $b = \mathbb{P}(U_2)$, $c = \mathbb{P}(U_3)$ und $d = \mathbb{P}(U_4)$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^n(k)$. Dann gilt laut Voraussetzung $\dim_k((U_1 + U_2) \cap (U_3 + U_4)) \geq 1$. Unser Ziel ist zu zeigen, dass auch

$$\dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \geq 1$$

ist. Dazu benutzen wird die Dimensionsformel. Es gilt

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ = \; & \dim_k(U_1 + U_2) + \dim_k(U_3 + U_4) - \dim_k((U_1 + U_2) \cap (U_3 + U_4)) \\ \leq \; & 2 + 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \dim_k(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ = \; & \dim_k(U_1 + U_3) + \dim_k(U_2 + U_4) - \dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \\ = \; & 2 + 2 - \dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)), \end{aligned}$$

woraus insgesamt $\dim_k((U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_4)) \geq 1$ folgt. Also ist $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$.

Lösung 3

Die Implikation von links nach rechts ist klar. Es gelte also umgekehrt die rechte Seite und es seien f, $g \in S$ mit $fg \in I$. Zu zeigen ist, dass $f \in I$ oder $g \in I$. Wir zerlegen f und g in homogene Summanden:

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i\ , \quad g = \sum_{j=0}^{e} g_j \;\text{ und setzen } \forall i > d, j > e : f_i = g_j = 0.$$

Dann ist $fg = \sum_{i,j} f_i g_j = \sum_{k=0}^{d+e} \sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l}$. Da I homogen ist und $fg \in I$ müssen alle ihre homogenen Summanden in I liegen. Also gilt für alle $k = 0, \ldots, d+e$

$$\sum_{l=0}^{k} f_l g_{k-l} \in I.$$

Angenommen $f \notin I$. Dann liegt auch ein homogener Summand nicht in I. Also gibt es ein minimales L mit $f_L \notin I$. Es gilt nun

$$I \ni \sum_{l=0}^{L} f_l g_{L-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L-l} + f_L g_0\ ,$$

und da die vordere Summe der rechten Seite in I liegt, muss $f_L g_0$ in I liegen. Dies ist nun ein Produkt von homogenen Elementen, also liegt einer der Faktoren in I. Folglich ist $g_0 \in I$.

Um einzusehen dass auch $g_i \in I$ für $i \neq 0$ gilt, machen wir Induktion. Die obigen Überlegungen sind unser Induktionsanfang und als Induktionsvoraussetzung gelte für $K \geq 0$: $g_i \in I$ für alle $i < K$. Es ist

$$\sum_{l=0}^{L+K} f_l g_{L+K-l} = \sum_{l=0}^{L-1} f_l g_{L+K-l} + f_L g_K + \sum_{l=L+1}^{L+K} f_l g_{L+K-l}.$$

Die linke Seite ist in I, genauso wie die vordere und hintere Summe der rechten Seite, einmal aufgrund der Wahl von L, einmal aufgrund unserer Induktionsvoraussetzung. Also ist $f_L g_K$ in I und wie oben folgt $g_K \in I$.

Das zeigt $g \in I$; somit ist I ein Primideal.

Übung 7 vom 2. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es sei $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Wir betrachten die Einbettung $\varphi_Z : \mathbb{A}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$, $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$.

Zeige: Der Abschluss von $\varphi_Z(E)$ in $\mathbb{P}^2(k)$ ist $V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$.

Welche Punkte liegen im Abschluss von $\varphi_Z(E)$, aber nicht in $\varphi_Z(E)$?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zu einem Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ sei I^* das von den Homogenisierungen der Elemente von I (bezüglich X_0) erzeugte homogene Ideal in $k[X_0, \ldots, X_n]$. Weiter sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $\varphi : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$ die Einbettung. In der Vorlesung wurde $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$ gezeigt.

Zeige, dass auch $I(\overline{\varphi(V)}) = I(V)^*$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Die getwistete Kubik $V = V(X^2 - Y, X^3 - Z) \subset \mathbb{A}^3(k)$ (von Blatt 1) kommt zurück!

Es sei $\varphi : \mathbb{A}^3(k) \to \mathbb{P}^3(k)$ die Einbettung $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ und $k[W, X, Y, Z]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^3(k)$. Zeige:

a) $XZ - Y^2 \in I(\overline{\varphi(V)})$, aber $XZ - Y^2 \notin (X^2 - YW, X^3 - ZW^2)$. Es reicht also nicht aus, nur die Erzeuger von $I(V) = (X^2 - Y, X^3 - Z)$ zu homogenisieren.
b) Es gilt $\overline{\varphi(V)} = V(X^2 - YW, X^3 - ZW^2, XZ - Y^2)$.
c) Was sind die irreduziblen Komponenten von $V(X^2 - YW) \cap V(X^3 - ZW^2)$?
d) In c) haben wir auch gezeigt, dass der Schnitt von irreduziblen Varietäten nicht unbedingt irreduzibel sein muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien r, $s \in \mathbb{N}$ und $N = (r + 1)(s + 1) - 1$. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) & \to & \mathbb{P}^N(k) \\ ((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)) & \mapsto & (x_0y_0 : \ldots : x_0y_s : \ldots : x_ry_0 : \ldots : x_ry_s) \end{cases}$$

heißt *Segre-Einbettung*. Zeige:

a) Ψ ist wohldefiniert und injektiv.
b) $\text{Bild}(\Psi)$ ist eine irreduzible Untervarietät von $\mathbb{P}^N(k)$.
Hinweis: Es sei $k[Z_{ij} \mid i = 0, \ldots, r,\ j = 0, \ldots, s]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^N(k)$. Betrachte den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : k[Z_{ij}] \to k[X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_s]\ , \quad Z_{ij} \mapsto X_iY_j$$

und zeige $V(\text{Kern}(\Phi)) = \text{Bild}(\Psi)$.
c) Ist $r = s = 1$, so gilt $\text{Bild}(\Psi) = V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$.

Lösung 4

a) Zunächst ist für $x = (x_0 : \ldots : x_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $y = (y_0 : \ldots : y_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ der Ausdruck $\Psi(x, y)$ unabhängig vom Repräsentaten der Äquivalenzklasse, denn für λ, $\mu \in K^\times$ gilt

$$\begin{aligned} \Psi((\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_r), (\mu y_0 : \ldots : \mu y_s)) &= (\lambda x_0 \mu y_0 : \ldots : \lambda x_i \mu y_j : \ldots : \lambda x_r \mu y_s) \\ &= (x_0y_0 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ry_s) \\ &= \Psi((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)). \end{aligned}$$

Aßerdem gibt es einen Index i_0 mit $x_{i_0} \neq 0$ und einen Index j_0 mit $y_{j_0} \neq 0$, so dass also $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ gilt, woraus folgt, dass $\Psi(x, y)$ nie in allen Koordinaten 0 ist.

Ψ *ist injektiv*: Denn seien $\tilde{x} = (\tilde{x}_0 : \ldots : \tilde{x}_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_0 : \ldots : \tilde{y}_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ zwei weitere Punkte und es gelte $\Psi(x, y) = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y})$. Dann gibt es ein $\lambda \in K^\times$, so dass für alle $(i, j) \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}$

$$x_i y_j = \lambda \tilde{x}_i \tilde{y}_j$$

gilt. Für beliebiges j und $i = i_0$ wie oben ist $y_j = \lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \tilde{y}_j$, und da $y_{j_0} \neq 0$ ist, folgt $\lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \neq 0$. Somit gilt $y = \tilde{y}$.Genauso zeigt man $x = \tilde{x}$; insgesamt folgt, dass Ψ injektiv ist.

b) In der Übung haben wir bereits gesehen, dass es reicht $V(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \mathrm{Bild}(\Psi)$ zu zeigen.

Es gilt $\mathrm{Bild}(\Psi) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$, denn sei $F \in \mathrm{Kern}(\Phi)$ und $(x, y) \in \mathbb{P}^r(K) \times \mathbb{P}^s(K)$. Dann ist

$$F(\Psi(x, y)) = F((x_0 y_0 : \ldots : x_r y_s)) = \Phi(F)(x_0, \ldots, x_r, y_0 \ldots, y_s) = 0.$$

Für die andere Inklusion betrachten wir für (i, j), $(i', j') \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}$ die Polynome

$$Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j}.$$

Diese liegen im Kern von Φ. Sei J das von ihnen erzeugte Ideal, also

$$J = (Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j} \mid (i, j),\ (i', j') \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}).$$

Es ist $J \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi)$, also $V(J) \supseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$. Wenn wir zeigen, dass $V(J) \subseteq \mathrm{Bild}(\Psi)$ gilt, so sind wir fertig.

Es sei $z = (z_{00} : \ldots : z_{rs}) \in V(J)$. Zunächst gibt es ein Paar (i_0, j_0), für das $z_{i_0 j_0} \neq 0$ gilt. Es ist

$$z_{ij} z_{i_0 j_0} = z_{ij_0} z_{i_0 j},$$

was äquivalent ist zu

$$z_{ij} = \frac{z_{ij_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}}.$$

Wir setzen $x_i = z_{ij_0}$ und $y_j = z_{i_0 j}$. Dies definiert zwei Punkte $x = (\ldots : x_i : \ldots) \in \mathbb{P}^r(K)$ und $y = (\ldots : y_j : \ldots) \in \mathbb{P}^s(K)$, und es gilt

$$\Psi(x, y) = (\ldots : z_{ij_0} z_{i_0 j} : \ldots) = (\ldots : \frac{z_{ij_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}} : \ldots) = (\ldots : z_{ij} : \ldots).$$

Somit ist $z \in \mathrm{Bild}(\Psi)$.

c) Aus b) erhalten wir unter anderem $\mathrm{Bild}(\Psi) = V(J)$, und es gilt für $r = s = 1$

$$J = (Z_{00} Z_{11} - Z_{01} Z_{10}),$$

denn alle anderen Erzeuger sind 0.

Übung 8 vom 9. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Inzwischen wissen wir, was Morphismen in der Kategorie der projektiven Varietäten sind. Darum hier noch einmal Aufgabe 2 von Übungsblatt 6:

Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. die Menge aller Isomorphismen $\varphi\colon \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k)$.

Tipp: Benutze Aufgabe 4 von Übungsblatt 5.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^m(k)$ ein Morphismus. Zeige, dass es homogene Polynome $f_0, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ gibt, alle vom gleichen Grad, mit

$$\varphi(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x))$$

für alle $x \in \mathbb{P}^n(k)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Der Nikolaus hat dir und deiner Schwester je eine nichtleere, irreduzible, projektive Varietät im $\mathbb{P}^n(k)$ geschenkt. Deine ist isomorph zu einer affinen Varietät, die deiner Schwester besteht nur aus einem Punkt. Doch der Nikolaus behauptet, dass er keinen von Euch benachteiligt hat. Wieso?

Aufgabe 4 (*Veronese-Einbettung* 7 Punkte)
Es seien $M_0, M_1, \dots, M_{N(d)}$ die Monome von Grad d in $k[X_0, \dots, X_n]$. (Hierbei ist $N(d) = \binom{n+d}{d} - 1$.) Der Morphismus

$$\rho_d : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^{N(d)}(k) \ , \quad x \mapsto (M_0(x) : \dots : M_{N(d)}(x))$$

heißt *Veronese-Einbettung.*

a) Wir identifizieren den Koordinatenring $k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]$ von $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ mit

$$k\Big[Y_\nu \mid \nu = (\nu_0, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\Big].$$

Zeige, dass für den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_d : k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)] \to k[X_0, \dots, X_n] \ , \quad Y_\nu \mapsto X^\nu := X_0^{\nu_0} \cdots X_n^{\nu_n}$$

gilt: $\mathrm{Bild}(\rho_d) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

b) Zeige: Die Mengen

$$U_0 = D(Y_{(d,0,\dots,0)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)),\ \dots,\ U_n = D(Y_{(0,\dots,0,d)}) \cap V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$$

bilden eine offene Überdeckung von $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

c) Bestimme für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ einen Umkehrmorphismus $\psi_d^i : U_i \to \mathbb{P}^n(k)$ von ρ_d und begründe, warum sich diese zu einem globalen Umkehrmorphismus ψ_d von ρ_d „verkleben“ lassen.

d) Folgere, dass ρ_d ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und einer irreduziblen, projektiven Varietät in $\mathbb{P}^{N(d)}(k)$ ist.

e) Zeige: Für jedes homogene Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ von Grad d gibt es ein lineares, homogenes Polynom $F \in k[Y_0, \ldots, Y_{N(d)}]$, so dass

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$

Lösung 4

Die Lösung von Aufgabenteil a) und b) haben wir bereits in der Übung gesehen. Sei

$$\Sigma = \{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} \nu_i = d\}.$$

c) Sei zur besseren Notation $i = 0$. Wir definieren für $y \in U_0$ (d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$)

$$\psi_d^0(y) = (y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \in \mathbb{P}^n(k).$$

(Allgemein steht an der i-ten Stelle d, bzw. $d-1$.) ψ_d^0 ist ein wohldefinierter Morphismus. Wir zeigen nun, dass ψ_d^0 invers zu $\rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)}$ ist.

Sei $x \in \rho_d^{-1}(U_0)$. Dann gilt $x_0^d \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
\psi_d^0 \circ \rho_d(x) &= \psi_d^0(\ldots : x^\nu : \ldots) \\
&= (x^{(d,0,\ldots,0)} : x^{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \cdots : x^{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_0^{d-1}x_n) \\
&\overset{x_0 \neq 0}{=} (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = x
\end{aligned}$$

Somit gilt $\psi_d^0 \circ \rho_d|_{\rho_d^{-1}(U_0)} = \mathrm{id}_{\rho_d^{-1}(U_0)}$.

Als nächstes zeigen wir $\rho_d \circ \psi_d^0 = \mathrm{id}_{U_0}$. Dazu brauchen wir noch eine weitere Relation. Für $\nu \in \Sigma$ ist

$$\begin{aligned}
\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n}) &= X_0^{d\nu_0} X_0^{(d-1)\nu_1} X_1^{\nu_1} \cdots X_0^{(d-1)\nu_n} X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)\sum_{i=0}^n \nu_i} X_0^{\nu_0} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \\
&= X_0^{(d-1)d} X^\nu \\
&= \Phi_d(Y_\nu)\Phi_d({Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)}).
\end{aligned}$$

Das bedeutet: Für alle $\nu \in \Sigma$ gilt

$${Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {Y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {Y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} - Y_\nu {Y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} \in \mathrm{Kern}(\Phi_d).$$

Damit folgt für $y \in U_0$, d.h. $y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\rho_d \circ \psi_d^0(y) &= \rho_d(y_{(d,0,\ldots,0)} : y_{(d-1,1,0,\ldots,0)} : \ldots : y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}) \\
&= (\ldots : {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{\nu_0} {y_{(d-1,1,0,\ldots,0)}}^{\nu_1} \cdots {y_{(d-1,0,\ldots,0,1)}}^{\nu_n} : \ldots) \\
&= (\ldots : y_\nu {y_{(d,0,\ldots,0)}}^{(d-1)} : \ldots) \overset{y_{(d,0,\ldots,0)} \neq 0}{=} y.
\end{aligned}$$

Auf $U_i \cap U_j$ sind ψ_d^i und ψ_d^j beides Umkehrabbildungen zu ρ_d. Wegen der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung gilt für alle $y \in U_i \cap U_j$

$$\psi_d^i(y) = \psi_d^j(y).$$

Damit verkleben sich die ψ_d^i zu einem Morphismus

$$\psi_d : V(\mathrm{Kern}(\Phi_d)) \to \mathbb{P}^n,$$

der ein Umkehrmorphismus zu ρ_d ist.

d) Der Morphismus ρ_d ist nach c) ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^n(k)$ und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$.

Der Homomorphismus Φ_d ist homogen vom Grad d, denn jedes Y_ν wird auf ein homogenes Polynom von Grad d geschickt. (Es gilt $\Phi_d(k[\mathbb{P}^{N(d)}(k)]_e) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]_{de}$ für alle $e \in \mathbb{N}_0$.) Damit ist $\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ein homogenes Ideal und $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ eine projektive Varietät.

$\mathrm{Kern}(\Phi_d)$ ist ein Primideal, denn $\mathrm{Bild}(\Phi_d) \subset k[\mathbb{P}^n(k)]$ ist nullteilerfrei. Somit ist $V(\mathrm{Kern}(\Phi_d))$ irreduzibel, wie gefordert.

e) Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen von Grad d,

$$f = \sum_{\nu \in \Sigma} a_\nu X^\nu.$$

Wir setzen $F = \sum_{\nu \in \Sigma} a_\nu Y_\nu$. Dann ist $F(\rho_d(x)) = f(x)$ und es folgt

$$\rho_d(V(f)) = V(F) \cap \mathrm{Bild}(\rho_d).$$

Übung 9 vom 16. Dezember 2011

Die Übung vor Weihnachten wird vom 23.12. auf den 22.12. vorverlegt. Sie findet am Donnerstag, den 22.12., im 5. Block (15:45-17:15) im Raum 1C-01 statt.

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper, der nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $n \geq 1, d \geq 0$, V ein n-dimensionaler k-Vektorraum und $\wedge\colon V^d \to \bigwedge^d V$, $(v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ die aus der Vorlesung bekannte multilineare, alternierende Abbildung.

a) Zeige, dass das äußere Produkt $\bigwedge^d V$ folgende UAE erfüllt: Für jeden k-Vektorraum W und jede multilineare, alternierende Abbildung $\Phi\colon V^d \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\Psi\colon \bigwedge^d V \to W$ mit $\Psi \circ \wedge = \Phi$.
b) Sei $\bigwedge^0 V := k$. Zeige, dass $\bigoplus\limits_{d \geq 0} \bigwedge^d V$ durch

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_l) = (v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge w_1 \wedge \dots w_l)$$

für v_i, $w_j \in V$ zu einer k-Algebra wird.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
a) Zeige, dass die Graßmann-Varietät $G(2,3)$ isomorph zu $\mathbb{P}^2(k)$ ist.
b) Die Graßmann-Varietät $G(2,4)$ ist die erste, die kein projektiver Raum ist.

Die Charakteristik von k sei nicht 2. Zeige, dass $G(2,4)$, aufgefasst als Untervarietät des $\mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4)$ und bezüglich einer geeigneten Wahl der Koordinaten, gleich der Verschwindungsmenge von

$$X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23}$$

ist.

Hinweis: Zeige, dass $0 \neq w \in \bigwedge^2 k^4$ genau dann total zerlegbar ist, wenn $w \wedge w = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Es seien $n \geq 1$, $d \in \{0, \dots, n\}$, $W \leq k^n$ ein Untervektorraum der Dimension $(n-d)$ und

$$U := \{V \in G(d,n) \mid V \oplus W = k^n\}.$$

Zeige:
a) U ist offen in $G(d,n)$.
b) U ist isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$.

Hinweis: Interpretiere U als Menge der linearen Projektionen $k^n \to W$.

Auch die UAE des äußeren Produkts könnte hilfreich sein.
c) **Ist k ein unendlicher Körper**, so ist $G(d,n)$ irreduzibel.

Lösung 3
Aufgabenteil a) haben wir bereits in der Übung gelöst, die Aufgabenteile b) und c) haben wir nur skizziert, darum kommt hier noch einmal die ausführlichere Lösung.

b) Sei $P := \{p : k^n \to W \mid p \text{ ist eine Projektion}\} \subseteq \mathrm{Hom}(k^n, W)$ und $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von k^n, so dass $W = \langle e_{d+1}, \dots, e_n\rangle$. Für jede Projektion $p \in P$ gilt dann für $j \in \{1, \dots, d\}$: $p(e_j) = \sum_{i=d+1}^n a_{ij} e_i$ mit $a_{ij} \in k$ und für $j \in \{d+1, \dots, n\}$: $p(e_j) = e_j$.

Bezüglich E hat p also folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zu jeder Wahl der $a_{ij} \in k$, $i \in \{d+1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,d\}$ gehört genau ein $p \in P$, so dass wir eine Bijektion zwischen P und $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ bekommen.

Wir definieren nun die (naheliegende) Bijektion zwischen U und P,

$$\Phi\colon \begin{cases} U & \to \quad P \\ V & \mapsto \quad (V \oplus W \mapsto W) \end{cases}$$

mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon P \to U, p \mapsto \operatorname{Kern}(p)$. Es bleibt zu zeigen, dass Φ und Φ^{-1} regulär sind.

Sei zunächst $V = \langle v_1,\dots,v_d\rangle \in U$. Dann ist $\{v_1,\dots,v_d,e_{d+1},\dots,e_n\}$ eine Basis von k^n, also ist $A := (v_1|\dots|v_d|e_{d+1}|\dots|e_n)$ invertierbar. Bezüglich E hat $\Phi(V)$ die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

Zu zeigen bleibt damit, dass die Einträge a'_{ij} von A^{-1} reguläre Funktionen auf U sind. Es gilt $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A)^{-1} \cdot \det(A')$, wobei A' aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wie im Aufgabenteil a) sind $\det(A)$ und $\det(A')$ durch lineare Polynome gegeben (dort haben wir die UAE des äußeren Produkts verwendet). Außerdem ist $\det(A) \neq 0$ auf ganz U. Damit ist gezeigt, dass Φ regulär ist.

Für Φ^{-1} betrachten wir $p \in P$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(p) = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{d+1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ a_{d+1,d} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &=: \langle v_1,\dots,v_d\rangle.\end{aligned}$$

Damit gilt $\Phi^{-1}(p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, was linear in den a_{ij} ist.

c) Nach b) ist U isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ und da k **unendlich** ist, ist $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ irreduzibel. Wir zeigen, dass U dicht in $G(n,d)$ liegt. Damit ist dann auch $\overline{U} = G(d,n)$ irreduzibel.

Sei $V \in G(d,n)$. Zu zeigen ist, dass V im Abschluss von U liegt.

Es gibt ein W' mit $k^n = V \oplus W'$, also ist $V \in U' := \{V' \in G(d,n) \mid V' \oplus W' = k^n\}$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $U \cap U' = \{V : V \oplus W = V \oplus W' = K^n\} \neq \emptyset$ gilt. Die Varietät U' ist (nach b)) irreduzibel also ist $\overline{U \cap U'} = U'$ und damit $V \in \overline{U \cap U'} \subseteq \overline{U}$.

Übung 10 vom 22. Dezember 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper.

Aufgabe 1 (unschätzbarem Wert, 4 Punkte)
Vergleiche affine Varietäten mit projektiven Varietäten. Wo unterscheiden sich die Definitionen von Morphismen, regulären Abbildungen, ... und wo nicht? Welche wichtigen Zusammenhänge und Sätze gibt es in der affinen und welche in der projektiven Welt?

Ziel dieser Aufgabe ist also, dass ihr euch einen Überblick darüber verschafft, was wir in den ersten beiden Kapiteln gelernt haben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V eine quasiprojektive Varietät über k und $x \in V$.

a) Sei weiter $\mathcal{O}_{V,x}$ der lokale Ring von V in x. Weiter sei für eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von x der in der Vorlesung eingeführte k-Algebren-Homomorphismus $\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_{V,x}, f \mapsto f_x = [(U, f)]$.

   Zeige, dass die ψ_x^U zusammen mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für offene $U' \subseteq U \subseteq V$ ein injektives System bilden. Zeige also:

   i) $\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \psi_x^U$ und

   ii) für jede k-Algebra A mit Homomorphismen $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ für offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x, so dass für alle offenen $U' \subseteq U$ stets $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ gilt, gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.

b) Sei nun $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten und U eine offene Umgebung von x in V.

   Zeige: Gilt für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$, dass $U \cap V_i = \emptyset$, so ist ψ_x^U injektiv.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Die Charakteristik von k sei $\neq 2$. Für die getwistete Kubik $V_1 = V(Y - X^2, Z - X^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ gilt bekanntlich $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Die Varietät $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ ist ein Doppelkegel.

Bestimme jeweils eine Basis des Tangentialraums $T_{V_i,p}$ für jeden Punkt $p = (a, b, c) \in V_i$.

Aufgabe 4 ((Aufblasung der Ebene)6 Punkte)
Nun sei k algebraisch abgeschlossen und

$$X = \{((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Man nennt X die ***Aufblasung*** von $\mathbb{A}^2(k)$ im Punkt $(0, 0)$. Außerhalb von $(0, 0)$ sieht X aus wie die affine Ebene, aber den Ursprung hat man zu einer projektiven Geraden „aufgeblasen“. Die Punkte des $\mathbb{P}^1(k)$ entsprechen den Richtungen von Geraden durch den Nullpunkt.

Sei $\pi : X \to \mathbb{A}^2(k)$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Faser $E = \pi^{-1}((0, 0))$ über dem Ursprung nennt man ***exzeptionelle Kurve*** der Aufblasung. Für eine Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ mit $(0, 0) \in C$ heißt der Abschluss von $\pi^{-1}(C \setminus \{(0, 0)\})$ in X die ***strikte Transformierte*** von C.

Zeige:

a) X wird vermöge der Segre-Einbettung $\Psi : \mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^5(k)$ von Blatt 7 zu einer irreduziblen quasiprojektiven Varietät.

   Hinweis: Für die Irreduzibilität helfen b) und c).

b) π ist ein surjektiver Morphismus, der $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0,0)\}$ isomorph auf $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ abbildet.

c) Es sei $[v] \in \mathbb{P}^1(k)$ die Äquivalenzklasse von $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ und $L_v = \{tv \mid t \in k\}$ die Ursprungsgerade in Richtung v. Zeige, dass die strike Transformierte von L_v durch

$$\{(tv, [v]) \in X \mid t \in k\}$$

gegeben ist. Folgere, dass jeder Punkt in E im Abschluss einer Menge aus X_0 liegt.

d) Durch Aufblasen kann man algebraische Varietäten desingularisieren. Im einfachsten Fall sieht eine Singularität zum Beispiel wie der Punkt $(0,0)$ des Achsenkreuzes $V(XY) \subset \mathbb{A}^2(k)$ aus.

Zeige, dass sich die strikten Transformierten der x- und der y-Achse in X nicht mehr schneiden.

e) Eine weitere Verwendung der Aufblasung besteht darin, aus rationalen Abbildungen Morphismen zu machen. Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k) \ , \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2).$$

Zeige, dass ein Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(k)$ existiert, so dass $\tilde{\varphi}(x) = \varphi \circ \pi(x)$ für alle $x \in X_0$ gilt.

Wir wünschen euch ein schönes Weihnachtsfest und alles Gute für das Jahr 2012!

Lösung 2

a) i) Sei $f \in O_V(U)$: $(\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U)(f) = \psi_x^{U'}(f|_{U'}) = [(U', f|_{U'})] = [(U, f)] = \psi_x^U(f)$.

ii) Sei A eine k-Algebra und für jedes $U \subseteq V$ offen, mit $x \in U$, ein k-Algebren-Homomorphismus $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ gegeben, so dass $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ für alle offenen $U' \subseteq U$ mit $x \in U'$. Zu zeigen ist, dass es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ gibt, mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von x.

Wegen $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$, muss $\Phi([(U, f)]) = \varphi_x^U(f)$ gelten. Das ist eindeutig! Zu zeigen bleibt, dass es auch wohldefiniert ist. Sei also $[(U, f)] = [(U', f')]$, dann ist $f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$. Damit gilt auch $\varphi_x^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^U(f) = \varphi_x^{U' \cap U}(f|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U}(f'|_{U \cap U'}) = \varphi_x^{U' \cap U} \circ \rho_{U' \cap U}^{U'}(f') = \varphi_x^{U'}(f)$.

b) Sei $f \in \mathcal{O}_V(U)$ mit $\psi_x^U(f) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von x mit $f|_{U'} = 0$. Für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$ gilt $V_i \cap U' = \emptyset$ ($U' \subseteq U$). Für alle $i \in I$ mit $x \in V_i$ ist $x \in V_i \cap U'$, also ist $V_i \cap U' \neq \emptyset$ und da V_i irreduzibel ist, gilt $\overline{V_i \cap U'} = V_i$. Damit ist $f_{V_i \cap U} \equiv 0$ für alle V_i mit $V_i \cap U \neq \emptyset$. Es folgt, dass $f|_U \equiv 0$.

Lösung 3

Nach Übungsblatt 2 Aufgabe 2 ist $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Setze $f := Y - X^2$ und $g := Z - X^3$. Im Punkt $p = (a, b, c) \in V_1$ gilt $D_p(f) = -2aX + Y$ sowie $D_p(g) = -3a^2 X + Z$ und damit

$$T_{V_1,p} = V(-2aX + Y, -3a^2 X + Z) = \{(t, 2at, 3a^2 t) \mid t \in k\}.$$

Eine Basis von $T_{V_1,p}$ ist zum Beispiel $\{(1, 2a, 3a^2)\}$.

Zu $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ bestimmen wir zunächst das Verschwindungsideal. Da $Y^2 - Z^2 = (Y - Z)(Y + Z)$ kein Quadrat in $k[Y, Z][X]$ ist, ist $h := X^2 + Y^2 - Z^2$ irreduzibel und $I(V_2) = (X^2 + Y^2 - Z^2)$. Für $p = (a, b, c) \in V_2$ gilt demnach $D_p(h) = 2aX + 2bY - 2cZ$. Ist $p = (0,0,0)$, so ist $D_p(h) \equiv 0$ und $T_{V_2,p} = k^3$ mit Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Für $p \neq (0,0,0)$ ist $T_{V_2,p} = V(2aX + 2bY - 2cZ) = \{(x,y,z) \mid 2ax + 2by - 2cz = 0\}$ und hat als Basis $\{(b,-a,0),(c,0,a)\}$.

Lösung 4

a) In der Übung habe ich bereits gezeigt, dass X vemöge Ψ zu einer quasiprojektiven Varietät wird. Zu zeigen bleibt, dass X irreduzibel ist. $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ ist irreduzibel, also nach b) auch $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0,0)\}$. Es gilt $X = X_0 \cup E$. Wenn wir noch zeigen, dass $E \subseteq \overline{X_0}$ ist, dann ist $X = \overline{X_0}$ und somit irreduzibel. Sei dazu $p \in E$. Nach c) gibt es ein $M \subseteq X_0$ mit $p \in \overline{M}$. Mit $\overline{M} \subseteq \overline{X_0}$ folgt $E \subseteq \overline{X_0}$.

b) In der Übung habe ich gezeigt, dass π ein surjektiver Morphismus ist. Was noch fehlt ist ein Umkehrmorphismus zu $\pi|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Setze

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\} & \to & X_0 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & ((x_1,x_2),(x_1 : x_2)) \end{cases}$$

Wegen $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ und $x_1x_2 = x_2x_1$ ist $\mathrm{Bild}(\sigma) \subseteq X_0$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Weiter gilt $(\sigma \circ \pi|_{X_0})((x_1,x_2),(y_1 : y_2)) = ((x_1,x_2),(x_1 : x_2))$. Aus $x_1y_2 = x_2y_1$ folgt mit $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, dass $(y_1 : y_2) = (x_1 : x_2)$ gilt. Es folgt $\sigma \circ \pi|_{X_0} = \mathrm{id}|_{X_0}$. Die Gleichung $\pi|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}} \circ \sigma = \mathrm{id}|_{\mathbb{A}^2(k)\setminus\{(0,0)\}}$ ist offensichtlich. Somit ist σ der gewünschte Umkehrabbildung.

Es bleibt zu zeigen, dass σ ein Morphismus ist. Dafür müssen wir (wie in b)) $\Psi \circ \sigma \colon \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\} \to \Psi(X_0) \subseteq \mathbb{P}^5(k)$ betrachten. Wobei wir $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ als Teilraum von $\mathbb{P}^2(k)$ betrachten.

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \sigma)(\overset{\neq 0}{x_0} : x_1 : x_2) &= (\psi \circ \sigma)\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \frac{x_1x_2}{x_0^2} : \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2\right) \\ &= (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_1x_2 : x_2^2)\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\Psi \circ \sigma$ durch homogene Polynome vom Grad 2 gegeben ist, und folglich ein Morphismus ist.

c) Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{L_v} := \overline{\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})} = \{(tv,[v]) \in X \mid t \in k\} =: H$. Definiere dazu die Abbildung $h \colon \mathbb{A}^1(k) \to X, t \mapsto (tv,[v])$, mit Bild H. Diese Abbildung ist ein Morphismus, denn $(\Psi \circ h)(t) = (v_1 : v_2 : tv_1^2 : tv_1v_2 : tv_1v_2 : tv_2^2)$ oder genauer $(\Psi \circ h)(\overset{\neq 0}{t_0} : t_1) = (t_0v_2 : t_0v_2 : t_1v_1^2 : t_1v_1v_2 : t_1v_1v_2 : t_1v_2^2)$. $\mathbb{A}^1(k)$ ist irreduzibel und damit auch $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h)$.

Behauptung: $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h) = \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$ (daraus folgt dann insbesondere, dass $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist).

Beweis der Behauptung: Die Inklusion „$\subseteq$“ ist klar. Sei umgekehrt $z \in \Psi(X) \cap V(v_1Z_1 - v_2Z_0)$. Dann sind (v_1,v_2) und (z_0,z_1) linear abhängig und wegen a) gilt $z = (z_0 : z_1 : \tau z_0^2 : \tau z_0z_1 : \tau z_0z_1 : \tau z_1^2)$ mit $\tau \in k$ geeignet. Damit liegt z in $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h)$.

Es gilt $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})) = (\Psi \circ \sigma)(L_v \setminus \{(0,0)\}) = \{(v_0 : v_1 : tv_0^2 : tv_0v_1 : tv_0v_1 : tv_1^2) \mid t \in k\}$. Somit ist $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h) = \Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})) \cup \{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ und weil $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h)$ irreduzibel ist und $\{(v_0 : v_1 : 0 : 0 : 0 : 0)\}$ abgeschlossen, muss $\Psi(\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\}))$ offen sein. Da $\mathrm{Bild}(\Psi \circ h)$ abgeschlossen ist folgt $\Psi(\widetilde{L_v}) = \mathrm{Bild}(\psi \circ h) = \Psi(H)$.

Es bleibt zu folgern, dass für alle $p \in E = \pi^{-1}((0,0))$ ein $M \subseteq X_0$ existiert mit $p \in \overline{M}$:

Sei $((0,0),[v]) \in E$, also $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist $\widetilde{L_v} \cap E = \{(v_0 \colon v_1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0)\} \overset{\Psi^{-1}}{\to}$

$\{((0,0),[v])\}$, also ist $((0,0),[v])$ im Abschluss von $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\})$ enthalten und $\pi^{-1}(L_v \setminus \{(0,0)\}) \subseteq X_0$.

d) Nach c) gilt $\widetilde{L}_{(1,0)} = \{((t,0),(1:0)) \mid t \in k\}$ und $\widetilde{L}_{(0,1)} = \{((0,t),(0:1)) \mid t \in k\}$. Die Gleichung $\widetilde{L}_{(1,0)} \cap \widetilde{L}_{(0,1)} = \emptyset$ ist offensichtlich erfüllt.

e) Wir definieren

$$\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(K)\ , \quad ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \mapsto (y_1:y_2).$$

Zunächst sollte man sich klarmachen, dass $\tilde{\varphi}$ wirklich ein Morphismus (für die von Ψ induzierte Struktur als quasiprojektive Varietät) ist. Es gilt

$$\tilde{\varphi} \circ \Psi^{-1} : \Psi(X) \to \mathbb{P}^1(K)\ , \quad z = (z_0 : \ldots : z_5) \mapsto (z_0 : z_1),$$

was auf $D(Z_0) \cup D(Z_1) \supset \Psi(X)$ wohldefiniert ist.

$\tilde{\varphi}$ setzt φ fort, denn sei $p = ((x_1,x_2),(y_1:y_2)) \in X_0$. Dann sind wegen $x_1y_2 = x_2y_1$ die Vektoren (x_1,x_2) und (y_1,y_2) linear abhängig und beide $\neq (0,0)$, also gilt

$$\varphi \circ \pi(p) = \varphi(x_1,x_2) = (x_1:x_2) = (y_1:y_2) = \tilde{\varphi}(p).$$

Übung 11 vom 13. Januar 2011

Aufgabe 0 (1 Punkt)
Um das neue Jahr zu feiern, bekommt jeder, der abgibt, einen Punkt geschenkt.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei R ein Ring und $D\colon R[X] \to R[X]$ die Ableitung d/dX, d.h. D ist gegeben durch $D(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$. Zeige, dass D eine Derivation ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei R ein Ring, A eine R-Algebra. Mit $\underline{A\text{-Mod}}$ bezeichnen wir die Kategorie der A-Moduln.

a) Wir werden zeigen, dass der Funktor von $\underline{A\text{-Mod}}$ nach $\underline{A\text{-Mod}}$ mit $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ darstellbar ist.

   Betrachte dazu den freien A-Modul F mit der Basis A, wobei X_f das Basiselement zu $f \in A$ bezeichne. Weiter sei U der Untermodul von F, der von allen $X_{f+g} - X_f - X_g, X_{\lambda f} - \lambda X_f$ und $X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f$ für $f, g \in A$ und $\lambda \in R$ erzeugt wird.

   Zeige, dass der sogenannte *Differentialmodul* $\Omega_{A/R} := F/U$ zusammen mit $d\colon A \to \Omega_{A/R}, f \mapsto \overline{X_f} =: df$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

   Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation $\delta\colon A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi\colon \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

b) Zeige, dass für $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Differentialmodul $\Omega_{A/R}$ ein freier Modul mit Basis $dX_1, \ldots, dX_n$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ die Krulldimension 2 hat.
Hinweis: Wie viele Erzeuger benötigt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} \neq \{0\}$ höchstens, wie viele benötigt eines mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ höchstens?

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik ungleich 2. Es sei

$$\mathrm{SO}(2) = \{A \in k^{2\times 2} \mid \det(A) = 1\ ,\ A^{-1} = A^T\}.$$

a) Zeige, dass $\mathrm{SO}(2)$ eine affine Varietät ist und bestimme Erzeuger des Verschwindungsideals $I(\mathrm{SO}(2))$. Ist $\mathrm{SO}(2)$ irreduzibel?

b) Bestimme die lokale Dimension $\dim_A \mathrm{SO}(2)$ für einen Punkt $A \in \mathrm{SO}(2)$.

Lösung 3

b) In der Übung bin ich bei der linearen Unabhängigkeit der dX_i ins straucheln gekommen, deshalb hier jetzt noch mal der richtige Beweis dazu:

   Seien $a_1, \ldots, a_n \in A = R[X_1, \ldots, X_n]$ und $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ in $\Omega_{A/R}$.

   Zu zeigen ist, dass dann schon alle a_i gleich 0 sind.

   Wir betrachen die Derivationen $\frac{\partial}{\partial X_j}\colon R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$. Nach a) existiert jeweils ein eindeutiges $R[X_1, \ldots, X_n]$-lineares $\varphi_j\colon \Omega_{A/R} \to R[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$.

   Aus $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ folgt $0 = \varphi_j(\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i) \overset{\varphi_j\ A\text{-linear}}{=} \sum_{i=1}^n a_i\, \varphi_j(d(X_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i) = a_j$.

Übung 12 vom 20. Januar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k (fast) immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Es sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass $I(V(f)) = (f)$ genau dann gilt, wenn f quadratfrei ist, d.h. wenn kein irreduzibler Faktor von f mehrfach vorkommt.

b) Ist $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom, das nicht quadratfrei ist, so enthält

$$V\left(f, \frac{\partial}{\partial X_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} f\right)$$

eine Hyperfläche in $\mathbb{A}^n(k)$.

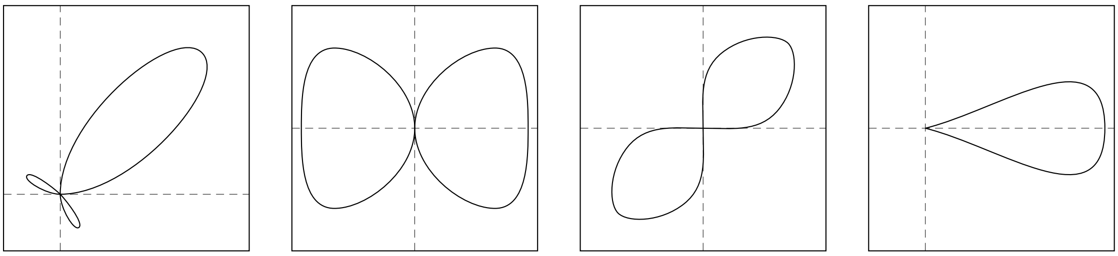
Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Bestimme die singulären Punkte der folgenden affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$ bzw. in $\mathbb{A}^3(k)$:

$$V(X^4 + Y^4 - X^2) \qquad V(X^6 + Y^6 - XY)$$
$$V(X^4 + Y^4 + Y^2 - X^3) \qquad V(X^4 + Y^4 - X^2Y - XY^2)$$
$$V(XY^2 - Z^2)$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung der Verschwindungsideale.

b) Nun sei $k = \mathbb{R}$. Welche der obigen Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ gehört zu welchem Bild?



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für diese Aufgabe habe der Körper k die Charakteristik 0. Sei V eine projektive Hyperfläche in $\mathbb{P}^n(k)$, d.h. $V = V(f)$ für ein homogenes, quadratfreies Polynom $f \in k[X_0, \ldots, X_n] \setminus k$.

a) Zeige, dass $f \in k[X_0, \ldots, X_n] \setminus k$, homogen vom Grad d, die folgende Differentialgleichung (von Euler) erfüllt: $\sum\limits_{j=0}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial X_j} = d \cdot f$.

b) Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann singulär, wenn $\frac{\partial f}{\partial X_j}(x) = 0$ für $j = 0, \ldots, n$.

c) Bestimme die singulären Punkte der Bernoullischen Lemniskate

$$B := V((X^2 + Y^2)^2 - 2(Y^2Z^2 - X^2Z^2)) \subseteq \mathbb{P}^2(k)\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Charakteristik von k sei weder 2 noch 3. Für $\lambda \in k$ betrachten wir die Kurve $E_\lambda = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$.

a) Für welche λ ist E_λ singulär?

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung von $I(E_\lambda)$.

b) Bestimme den projektiven Abschluss $\overline{E_\lambda}$ von E_λ und untersuche, ob er singuläre Punkte enthält.

c) Was passiert für $\mathrm{char}(k) = 2$ oder 3?

Lösung 2

a) Die Singularitäten von $V(XY^2 - Z^2)$ habe ich in der Übung berechnet. Bei allen anderen Varietäten ist $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X_1}f, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}f) = \{(0,0)\}$ und damit, nach Aufgabe 1, $(0,0)$ die einzige Singularität von $V(f)$.

Lösung 4

Sei $f := Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) = Y^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2 - \lambda X$.

a) Sei $p = (x,y) \in E_\lambda$. Es gilt $J_f(p) = (-3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda, 2y)$ und damit $J_f(p) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge -3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda = 0$. Aus $y = 0$ und $p \in E_\lambda$ folgt $x(x-1)(x-\lambda) = 0$, also $x \in \{0, 1, \lambda\}$. Setzen wir das in die zweite Bedingung für $J_f(p) = (0,0)$ ein, so erhalten wir:

- für $x = 0$: $-\lambda = 0$, also $\lambda = 0$
- für $x = 1$: $-3 + 2(\lambda+1) - \lambda = 0$, also $\lambda = 1$
- für $x = \lambda$: $-3\lambda^2 + 2(\lambda+1)\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1\}$

Die Menge $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X}f, \frac{\partial}{\partial Y}f)$ ist folglich für alle $\lambda \in k$ endlich. Mit Aufgabe 1 folgt, dass $I(E_\lambda) = (f)$. Somit ist E_λ für $\lambda \notin \{0,1\}$ nichtsingulär. Für $\lambda = 0$ hat E_λ die Singularität $(0,0)$, für $\lambda = 1$ die Singularität $(1,0)$.

b) In der Übung habt ihr mir hoffentlich schon geglaubt, dass $\overline{E_\lambda} = V(H_Z(f)) = V(ZY^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2Z - \lambda XZ^2)$. Weiter ist $\overline{E_\lambda} = (\overline{E_\lambda} \cap D(Z)) \cup (\overline{E_\lambda} \cap V(Z)) = E_\lambda \cup V(X,Z) = E_\lambda \cup \{(0:1:0)\}$. Alle Punkte aus E_λ haben wir schon untersucht („singulär“ ist eine lokale Eigenschaft). Für $p = (0:1:0)$ und $F := H_Z(f)$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial X}F\right)(p) &= (-3X^2 + 2(\lambda+1)XZ - \lambda Z^2)(p) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial Y}F\right)(p) &= (2YZ)(p) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z}F\right)(p) &= (Y^2 + (\lambda+1)X^2 - 2\lambda XZ)(p) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Somit ist p für alle $\lambda \in k$ nichtsingulär und $\overline{E_\lambda}$ hat genau die Singularitäten von E_λ.

c) Der Punkt $p = (0:1:0)$ im projektiven Abschluss von E_λ ist unabhängig von der Charakteristik nichtsingulär. Sei als $p = (x,y) \in E_\lambda$.

$\mathrm{char}(k) = 2$: Hier ist $J_f(p) = (-3x^2 - \lambda, 0) = (0,0) \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$. Aus $p \in E_\lambda$ folgt $y^2 = h(x)$ mit $h(x) = x(x-1)(x-\lambda)$. Für $\lambda \neq 0$ ist der Punkt $x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ keine Nullstelle von h, also hat E_λ die 4 Singularitäten

$$\left(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}\right), \quad \left(-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}\right).$$

Für $\lambda = 0$ ist $(0,0)$ die einzige Singularität.

Insgesamt sieht man, dass für $\mathrm{char}(k) = 2$ alle Kurven E_λ singulär sind.

$\mathrm{char}(k) = 3:$ Es gilt $J_f(p) = (2(\lambda+1)x - \lambda, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge 2(\lambda+1)x = \lambda$. Für $\lambda = -1$ sind diese Bedingungen nicht zu erfüllen und E_λ ist nichtsingulär. Für $\lambda \neq -1$ erfüllt $p = (\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ die Bedingung $J_f(p) = (0,0)$. Einsetzen in $f(p) = 0$ liefert nach etwas Rechnen $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, -2\}$. Für diese λ ist $(\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ eine Singularität von E_λ, für alle anderen λ ist E_λ nichtsingulär.

Übung 13 vom 27. Januar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Seien X und Y quasiprojektive Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe jeweils Deine Antwort.

a) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cap Y$ nichtsingulär.

b) X, Y nichtsingulär $\Rightarrow X \cup Y$ nichtsingulär.

c) X, Y singulär $\Rightarrow X \cap Y$ singulär.

d) X, Y singulär $\Rightarrow X \cup Y$ singulär.

e) $\emptyset \neq \operatorname{Sing}(Y) \subsetneq X \cap Y \Rightarrow X \cap Y$ ist singulär.

Hinweis: Alle notwendigen Gegenbeispiele können im affinen Raum gefunden werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $f \in k[X, Y] \setminus k$ ein quadratfreies Polynom und $V = V(f)$. für einen Punkt $p \in V(f)$ definieren wir die Vielfachheit $\mu_p(V)$ in p folgendermaßen:

Es sei $\varphi \colon \mathbb{A}^2(k) \to \mathbb{A}^2(k)$ eine Translation (d.h. $\varphi(x) = x + t$ für ein $t \in k^2$), so dass $\varphi(p) = (0, 0)$ gilt. Wir schreiben $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ als Summe seiner homogenen Komponenten

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \cdots + \tilde{f}_d \,.$$

Dann sei $\mu_p(V) = \min\{r \in \mathbb{N}_0 \mid \tilde{f}_r \neq 0\}$.

Zeige, dass p genau dann ein singulärer Punkt von V ist, wenn $\mu_p(V) > 1$ gilt.

Bestimme die Vielfachheiten der Singularitäten der Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ aus Aufgabe 2 von Übungsblatt 12.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Die Charakteristik von k sei 0. Für ein nichtkonstantes Polynom $f \in k[X]$ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $C := V(Y^n - f) \subset \mathbb{A}^2(k)$.

Für welche n und f ist C eine nichtsinguläre Kurve?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in einem Ring R und $J \subseteq R$ ein Ideal mit $J \nsubseteq I_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Zeige, dass auch $J \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ gilt, falls mindestens $n - 2$ der Ideale I_i Primideale sind.

Übung 14 vom 3. Februar 2011

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein nullteilerfreier, noetherscher Ring mit Quotientenkörper $K \neq R$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) R ist ein diskreter Bewertungsring.
ii) Für jedes $x \in K$ gilt $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$.
iii) Die Menge der Hauptideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.
iv) Die Menge aller Ideale von R ist bezüglich Inklusion total geordnet.
v) R ist ein lokaler Hauptidealring.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Die Charakteristik von k sei nicht 2. Wir betrachten $C = V(Y^4 - XZ(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$.

a) Zeige, dass C eine nichtsinguläre Kurve ist.
b) Es sei $h : C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : z)$. Bestimme den Grad von h und für jeden Punkt $P \in C$ den Verzweigungsindex $e_P(h)$.
c) Bestimme die Divisoren der rationalen Funktionen x/z und $x/y \in k(C)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve und $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so dass $C \not\subset V(G)$ gilt. Wir definieren den Schnittdivisor $\operatorname{div}(G)$ zu G folgendermaßen: Für einen Punkt $P \in C$ wählen wir ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $H(P) \neq 0$ und $\deg(H) = \deg(G)$ und setzen $n_P = \operatorname{ord}_P(G/H)$. Dann sei $\operatorname{div}(G) = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$.

a) Zeige, dass $\operatorname{div}(G)$ wohldefiniert ist.
b) Sei nun $G_1, G_2 \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $\deg(G_1) = \deg(G_2)$. Zeige, dass die zwei Schnittdivisoren $\operatorname{div}(G_1)$ und $\operatorname{div}(G_2)$ linear äquivalent sind.
c) Es sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Bestimme für $C = V(Y^2Z - X(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$ die Schnittdivisoren von X, Y und Z. Welche geometrische Bedeutung haben diese Divisoren?
d) Der Grad d von C sei der Grad des Schnittdivisors eines homogenen Polynoms von Grad 1. Zeige: Ist $n = 2$ und $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom $F \in k[X_0, X_1, X_2]$, so gilt $\deg(F) = d$.

   Hinweis: Man kann ohne Einschränkung voraussetzen, dass $(0 : 0 : 1) \notin V(F)$. *(Wieso?) Dann hilft es, den Morphismus* $C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ *zu betrachten.*
e) Zeige eine Version des Satzes von Bézout für nichtsinguläre Kurven: Ist $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom von Grad e, so dass $C \not\subset V(G)$, und ist d wieder der Grad von C, so gilt
$$\deg(\operatorname{div}(G)) = d \cdot e.$$

Lösung 3

a) Für $P \in C$, $P = (x_0 \colon \ldots : x_n)$ gibt es ein i mit $x_i \neq 0$. Also erfüllt $X_i^{\deg(G)}$ die Bedingungen an H. Außerdem ist C echt in $\mathbb{P}^n(k)$ enthalten und irreduzibel, also hat $V(G) \cap C$ Dimension 0 (kleinere Dimension als C) und ist somit endlich. Damit ist nur für endlich viele $P \in C$ $\operatorname{ord}_P(G/H) \neq 0$ und die formale Summe in $\operatorname{div}(G)$ endlich.

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von H abhängt. Sei dazu $H' \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein weiteres homogenes Polynom mit $\deg(H') = \deg(G)$ und $H'(P) \neq 0$. Dann ist $\mathrm{ord}_P(G/H) = \mathrm{ord}_P(G/H \cdot H'/H') = \mathrm{ord}_P(G/H') + \mathrm{ord}_P(H'/H)$. Wegen $H'(P) \neq 0$ ist $\mathrm{ord}_P(H'/H) = 0$.

b) Wir zeigen $\mathrm{div}(G_1) - \mathrm{div}(G_2) = \mathrm{div}(G_1/G_2)$.

Sei $P \in C$, $H \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen mit $\deg(H) = \deg(G_i)$ und $H(P) \neq 0$. Es gilt $\mathrm{ord}_P(G_1/G_2) = \mathrm{ord}_P(G_1/H \cdot H/G_2) = \mathrm{ord}_P(G_1/H) - \mathrm{ord}_P(G_2/H)$.

c) Zunächst berechnen wir die Uniformisierende im Punkt $P = (a : b : c) \in C$, also einen Erzeuger des maximalen Ideals m_P von $\mathcal{O}_{C,P}$.

1. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b \neq 0$.

Das Ideal m_P wird von $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$ und $\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}$ erzeugt. Uniformisierende ist $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$, da

$$\begin{aligned}\left(\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c}\right) &= \frac{Y^2}{Z^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{Y^2 Z}{Z^3} - \frac{b^2 c}{c^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} - \frac{a(a-c)(a+c)}{c^3} \\ &= \left(\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{X^2}{Z^2} + \frac{a}{c}\frac{X}{Z} + \frac{a^2}{c^2} - 1\right)\end{aligned}$$

und $\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c} \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ für $b \neq 0$.

2. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b = 0$. Hier ist $P \in \{(0:0:1), (1:0:1), (-1:0:1)\}$. Es gilt

$$\frac{Y^2}{Z^2} = \frac{Y^2 Z}{Z^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{X}{Z} - 1\right)\left(\frac{X}{Z} + 1\right).$$

Für $P = (0:0:1)$ sind $\frac{X}{Z} - 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ und $\frac{X}{Z} + 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$, also ist $\frac{X}{Z} = \frac{1}{(\frac{X}{Z}-1)(\frac{X}{Z}+1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in (\frac{Y}{Z})$. Analog sind für $P = (1:0:1)$ bzw. $P = (-1:0:1)$ die Erzeuger $\frac{X}{Z} - 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}+1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$ bzw. $\frac{X}{Z} + 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}-1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$.

Das maximale Ideal m_P wird folglich von $\frac{Y}{Z}$ erzeugt.

3. Fall: $P = (0:1:0)$

Es gilt $\frac{Z}{Y} = \frac{Y^2 Z}{Y^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Y^3} = \frac{X^3}{Y^3} - \frac{XZ \cdot Z}{Y^2 \cdot Y}$ und somit $\frac{Z}{Y}(1 + \frac{XZ}{Y^2}) = (\frac{X}{Y})^3$. Da $1 + \frac{XZ}{Y^2} \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ folgt $\frac{Z}{Y} \in \left(\frac{X}{Y}\right)$ und damit $m_P = \left(\frac{X}{Y}\right)$.

Nun können wir die Schnittdivisoren berechnen:

Zunächst stellen wir fest, dass $\mathrm{ord}_{(a:b:c)}(\frac{X}{H}) = 0$ für $a \neq 0$. Aus $(0:b:c) \in C$ folgt $b = 0$ oder $c = 0$. Somit gilt

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{ord}_{(0:0:1)}\left(\frac{X}{Z}\right) \cdot (0:0:1) + \mathrm{ord}_{(0:1:0)}\left(\frac{X}{Y}\right) \cdot (0:1:0) = 2 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (0:1:0).$$

Analog folgt

$$\mathrm{div}(Y) = 1 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (1:0:1) + 1 \cdot (-1:0:1) \quad \text{und} \quad \mathrm{div}(Z) = 3 \cdot (0:1:0).$$

Die geometrische Bedeutung des Schnittdivisors ist genau das, was der Name suggeriert. Schneidet man C mit $V(G)$ und zählt die Schnittpunkte mit Vielfachheit, so bekommt man den Schnittdivisor $\mathrm{div}(G)$. Die Abbildungen A.1 und A.2 zeigen zwei reelle Bilder zur geometrischen Bedeutung.

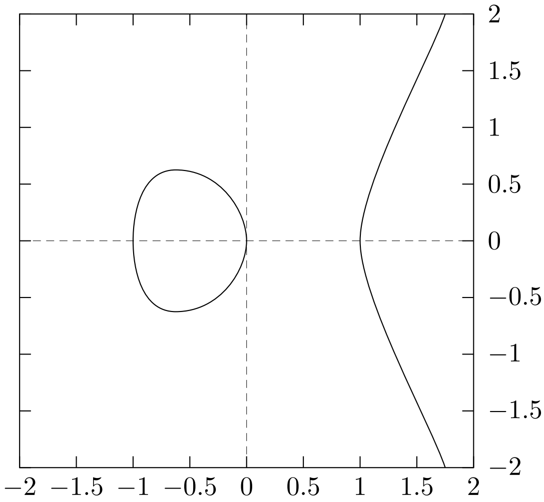


Abbildung A.1: $C \cap D(Z)$ mit $V(X)$ (y-Achse) und $V(Y)$ (x-Achse).

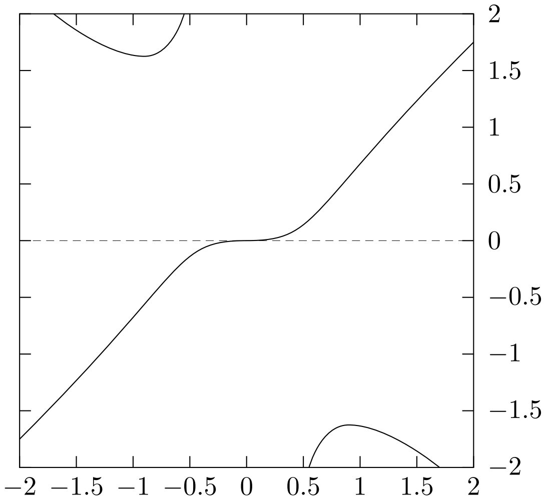


Abbildung A.2: $C \cap D(Y)$ mit $V(Z)$ (x-Achse).

d) Es gibt ein $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2 \setminus V(F)$ und eine lineare Abbildung $\Phi \in \mathrm{GL}_3(k)$ mit $\Phi(a, b, c) = (0, 0, 1)$. Dieses Φ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\Phi} \colon V(F) \to V(\tilde{F})$, $(x : y : z) \mapsto \Phi(x : y : z)$, wobei $\tilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$ (etwas sehrr ähnliches haben wir auf Übungsblatt 13 in Aufgabe 2 schon einmal gemacht). Wegen $\tilde{F}((0 : 0 : 1)) = (F \circ \Phi^{-1})((0 : 0 : 1)) = F((a : b : c)) \neq 0$ ist $(0 : 0 : 1)$ nicht in $V(\tilde{F})$ enthalten. Folglich gilt ohne Einschränkung, dass $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Wir betrachten den Morphismus $h : C \to \mathbb{P}^1(k), (x : y : z) \mapsto (x : y)$. Dieser ist wohldefiniert, da $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Behauptung 1: $\mathrm{div}(X) = h^*((0 : 1))$.

Beweis Beh. 1: Sei $P \in C$. Ist $P \in D(Y)$, so gilt $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = \mathrm{ord}_P(\frac{X}{Y}) = \mathrm{ord}_P(\frac{X_0}{X_1} \circ h) = e_P(h) = \mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1))$. Ist andernfalls $P = (a : 0 : c) \in V(Y)$, dann ist $h(P) \neq (0 : 1)$ und damit $\mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1)) = 0$. Aßerdem folgt aus $(0 : 0 : 1) \notin C$, dass $a \neq 0$ und damit $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = 0$.

Behauptung 2: $\deg h = \deg F$.

Aus Behauptung 1 und 2 folgt dann wie gewünscht

$$d = \deg(\operatorname{div}(X)) = \deg(h^*((0:1))) = \sum_{h(P)=(0:1)} e_P(h) = \deg h = \deg F\,.$$

Beweis Beh. 2: Nach Definition gilt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))]$. Betrachte die Einschränkung h^a von h auf $C^a = C \cap D(Y)$ nach $\mathbb{P}^1(k) \cap D(Y) = \mathbb{A}^1(k)$. Der Morphismus $h^a : C^a \to \mathbb{A}^1(k), (x : 1 : z) \mapsto x$ induziert einen Morphismus $(h^a)^\sharp : k(\mathbb{A}^1(k)) = k(X) \hookrightarrow k(C^a) = k(x,z), X \mapsto x$, wobei x und z die Restklassen von X und Z in $k[C^a]$ bezeichnen.

Das Bild von $(h^a)^\sharp$ ist $k(x)$ und für z gilt $F(x,1,z) = 0$. Sei m der Grad von F und $F = \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$. Wegen $(0:0:1) \notin C$ ist $a_{00m} \neq 0$ und die Dehomogenisierung von F nach Y, $f := F(X,1,Z)$, hat Grad m in Z. Da F irreduzibel in $k[X,Y,Z]$ ist, ist auch f irreduzibel in $k[X,Z]$. Eine einfache Folgerung aus dem Lemma von Gauß[2] sagt, dass dann f auch über $k(X)[Z]$ irreduzibel ist. Wegen $C^a = V(f)$, gilt $k(C^a) = \operatorname{Quot}(k[X,Z]/(f)) \cong k(X)[Z]/(f)$ und somit $\deg h^a = [k(C^a) : k(X)] = \deg f$.

Die Inklusion $C^a \hookrightarrow C$ hat eine dominante rationale Umkehrabbildung $\mathrm{id}\colon C \dashrightarrow C^a$. Daher ist $k(C^a) \cong k(C)$. Genauso ist auch $k(\mathbb{P}^1(k)) \cong k(\mathbb{A}^1(k))$ und es folgt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))] = [k(C^a) : k(\mathbb{A}^1(k))] = \deg h^a$. Insgesamt gilt $\deg F = \deg f = \deg h^a = \deg h$.

e) Sei $H \in K[X_0, \dots, X_n]$ homogen, $\deg(H) = 1$, $C \not\subset V(H)$ (z.B. $H = X_i$). Dann ist $\deg(G) = \deg(H^e)$. Nach b) sind $\operatorname{div}(G)$ und $\operatorname{div}(H^e)$ linear Äquivalent, es gilt also $\deg(\operatorname{div}(G)) = \deg(\operatorname{div}(H^e))$. Weiterhin gilt $\deg(\operatorname{div}(H^e)) = e \cdot \deg(\operatorname{div}(H))) = e \cdot d$, denn $\operatorname{ord}_P(\operatorname{div}(H)) = n_P \Leftrightarrow \operatorname{ord}_P(H/\tilde{H}) = n_P$, wobei $\tilde{H} \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $\deg(\tilde{H}) = 1$ und $\tilde{H}(P) \neq 0$ und damit $\operatorname{ord}_P(\operatorname{div}(H^e)) = \operatorname{ord}_P(H^e/\tilde{H}^e) = e \cdot \operatorname{ord}_P(H/\tilde{H}) = e \cdot n_P$.

[2] siehe Hilfssatz 2.2.6 in „Algebra im WS 2011/2012“ von Dr. Stefan Kühnlein

Stichwortverzeichnis

Anhang B

Gästebuch

Hier kann jeder, der gößere Änderungen oder Korrekturen am Skript vorgenommen hat, seinen Namen und einen Kommentar hinterlassen. Kleinigkeiten wie Rechtschreibfehler müssen nicht unbedingt sein (und bei meinen Tippfehlern wäre das Gästebuch größer als das Skript), aber ein korrigierter Satz, ein vervollständigter Beweis, solche Sachen, einfach damit jemand der eine ältere Version des Skriptes hat schnell den Unterschied finden kann. Oder hinterlasst einfach ein Paar nette Worte :-)
Zum Schreiben im Gästebuch stehen euch folgende Umgebungen zur Verfügung (neben den üblichen aus dem Skript):

```
\begin{gast}        \begin{komm}        \begin{korr}
...                 ...                 ...
\end{gast}          \end{komm}          \end{korr}
```

Gästebucheinträge sind für alle Arten von Einträgen gedacht. Kommentare sollten nur für wichtige Sachen verwendet werden und auch bloß, wenn man sie nicht direkt in das Skript einbauen kann. Korrekturen sind da um größere und wichtige Korrekturen festzuhalten, damit man schnell weißwas sich seit der letzten Version wichtiges geändert hat.
Dieser Teil ist absichtlich am Ende, damit man ihn beim Drucken einfach weglassen kann. Wenn jemand einen weiteren Anhang einfügen möchte, dann tut das bitte *vor* dem Gästebuch.

Gästebucheintrag (von Aleks am 23. April 2012)
Ich habe das Gästebuch angelegt. Ihr könnt hier Aufzählungen verwenden:

1) Ist das nicht toll?
2) Ich kann sogar einen Link zu einem Eintrag setzen, wie zum Beispiel Folgerung 1.2

Gästebucheintrag (Chris)
Dankbar mit dem Skript gearbeitet und durchkorrigiert (kleinere Fehler und ein paar Sachen ergänzt).
Mir sind noch ein paar Sachen aufgefallen, an die ich mich ohne Originalmitschrieb nicht dran traute (s. auch meine LaTeX-Fähigkeiten) (kann man, wenn korrigiert, löschen):

- Bew. von Satz 3 steht Zeile doppelt und die Nummerierung ist seltsam (hab grad keinen Aufschrieb da); an der Stelle ist noch mehr vermurkst
- 8.6 fehlt Bew.: könnte z.B. so gehn: „⇐“ Seien $g, h \in k[W] : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g(f(x)) = h(f(x)) \forall x \in V f(V) dicht \Rightarrow g = h$„⇒“$Ang. f nicht dom. \Rightarrow I(f(V)) \neq 0 \Rightarrow \exists g \neq 0 \in I und g \circ f = 0 Wid. zu inj.$
- Bew. von 10.6 könnte man auf aff. Varietäten verweisen, so ist da noch ne Lücke (mit dem Verweis, wär die geschlossen)
- Bew. Satz 7 a) 2. Beh. etwas aufpassen bei $k[V]_d * f^j$, eigentlich ist es viel eher $k[X_n 1, ..., X_n m]$ wobei $U_n l \cap D(f) \neq \emptyset$ sein muss!