

# Stochastische Prozesse

## Stoffzusammenfassung

Joachim Breitner

27. Dezember 2016

Diese Zusammenfassung ist natürlich alles andere als vollständig und zu knapp, um immer alle Aussagen mit Voraussetzungen korrekt wiederzugeben. Man verwende sie mit Vorsicht.

## 1 Vokabeln, Definitionen und äquivalente Charakterisierungen

### 1.1 Markov-Ketten in diskreter Zeit

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, X_n : \Omega \rightarrow S$	Markov-Kette mit Zustandsraum $S$
$P = (p_{ij})_{i,j \in S}$	$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$
$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$	Übergangsmatrix mit Übergangswahrscheinlichkeiten
$i \rightsquigarrow j$	$n$ -Schritt-Übergangsmatrix mit $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten
$i \leftrightarrow j$	$\exists n \in \mathbb{N} p_{ij}^{(n)} > 0$ , „ $i$ führt nach $j$ “
$J \subseteq S$ abgeschlossen	$i \rightsquigarrow j \wedge j \rightsquigarrow i$ , „ $i$ kommuniziert mit $j$ “
$(X_n)$ irreduzibel	$\nexists j \in J, i \in S \setminus J : i \rightsquigarrow j$
$T_i$	$(p_{ij}, i, j \in S)$ ist stochastische Matrix
$f_{ij}^{(n)}$	$(X_n)$ hat nur eine Äquivalenzklasse bzgl. „ $\leftrightarrow \vee =$ “
$f_{ij}^*$	$\inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\}$ , „Ersteintrittszeit“
$i$ rekurrent	$P(T_j = n \mid X_0 = i)$ , insbesondere $f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$
$i$ transient	$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(T_j < \infty)$
$\nu : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$f_{ii}^* = 1$
$\nu$ invariant	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty = E_i(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{X_n=i})$ , die erwartete Zahl der Besuche.
$\gamma_k : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$i$ nicht rekurrent
$m_i$	Maß
$i$ positiv rekurrent	Verteilung, wenn gilt: $\sum_{a \in S} \nu(a) = 1$
	$\sum_{i \in S} \nu(i) p_{ij} = \nu(j)$ , also $\nu = \nu P$
	$E_k(\sum_{n=1}^{T_k} 1_{(X_n=i)})$ , Besucher pro Zyklus
	invariant, $0 < \gamma_k < \infty$ , eindeutig mit $\gamma_k(k) = 1$ , wenn $(X_n)$ irreduzibel, rekurrent.
	$(X_n)$ irreduzibel, transient: stationäre Verteilung existiert nicht.
	$E_i(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} + \infty \cdot (1 - f_{ii}^*)$
	$i$ transient $\implies m_i = \infty$ .
	$m_i < \infty$
	$(X_n)$ irreduzibel: Stationäre Verteilung existiert $\iff$ ein/alle Zustände positive rekurrent. Dann: $\pi(i) = \frac{1}{m_i}$

$$\begin{aligned}
(Ph)(i) & \quad \sum_{j \in S} p_{ij} h(j), \text{ vergleiche Matrix-Vektor-Multiplikation.} \\
Ph \geq h & \implies h(X_n) \text{ Sub-Martingal} \\
Ph = h & \implies h(X_n) \text{ Martingal} \\
Ph \leq h & \implies h(X_n) \text{ Super-Martingal}
\end{aligned}$$

## 1.2 Markov-Ketten in stetiger Zeit

### 1.2.1 Poisson-Prozess

(A1)  $t \mapsto N(t, \omega) \in \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0 \mid f(0) = 0, f \text{ monoton wachsend, } f \text{ stetig von rechts}\}$

(A2) Unabhängige Zuwächse

(A3) Identisch verteilte Zuwächse

(A4) Ereignisse einzeln:  $P(N_h \geq 2) = o(h)$  für  $h \rightarrow 0$

Dann gilt:

- $\forall s, t \geq 0 : N_{s+t} - N_s \sim \mathcal{P}o(\lambda t)$
- Zeit zwischen Sprüngen  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt.

Intensitätsmatrix:

$$\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & \dots & \\
0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\
\vdots & 0 & -\lambda & \lambda & \\
& & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

### 1.2.2 Der allgemeine Fall

Markov-Eigenschaft  $P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_k} = i_k, k = 1, \dots, n) = P(X_{t_n+h} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n) = P(X_{t+h} = i_{n+1} \mid X_t = i_n)$

$P(t) = (p_{ij}(t))$   $p_{ij}(t) := P(X_t = j \mid X_0 = i)$ , Übergangsmatrizenfunktion

$P_{ij}$  SÜMF  $\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ , „Standardübergangsmatrizenfunktion“

$Q = (q_{ij})$  Intensitätsmatrix

$$q_{ij} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = p'_{ij}(0)$$

Anschaulich: Kehrwert der Diagonalelemente sagt, wie lange die Kette in dem Zustand bleibt, die anderen Elemente geben die Wahrscheinlichkeit des nächsten Zustands an.

$q_i$   $-q_{ii}$

$P$  konservativ  $\sum_{i \in S} q_{ij} = 0$

## 1.3 Brownsche Bewegung

Gauss-Prozess alle Fidis normalverteilt

Brownsche Bew.  $P(B_0 = 0) = 1$ ,  $P$ -f.a. Pfade stetig,  $B_t - B_s$  unabhängig von  $\mathcal{F}_s$ ,  $\mathcal{N}(0, t - s)$ -verteilt.