Kapitel 4

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Ist Ω endlich oder abzählbar unendlich, so kann $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt werden. Was machen wir z.B. bei $\Omega = [0,1)$ im Beispiel des rotierenden Zeigers 1.1.b)?
$\mathcal{P}([0,1))$ ist zwar eine σ-Algebra, für eine vernünftige Theorie jedoch zu groß, wie die folgende Überlegung zeigt.
Ist der Zeiger fair, so sollte für $[a,b) \subset [0,1)$ gelten:
$P([a,b)) = b - a$
Bzw. $\forall A \subset [0,1)$ und $\forall x \in [0,1)$:
$P(x + A) = P(A)$ (*)
wobei $x + A = \{x + y \mod 1 | y \in A\}$ ($\Rightarrow P$ ändert sich nicht bei Verschiebung des Intervalls)
P ist also eine Gleichverteilung auf $[0,1)$. Es gilt jedoch:

Satz 4.1 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (der Potenzmenge) $\mathcal{P}([0,1))$ mit der Eigenschaft (*) existiert nicht.*

Beweis Betrachte folgende Äquivalenzrelation auf $[0,1)$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$
Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition des $[0,1)$
Auswahlaxiom: Aus jeder Klasse wird ein Element genommen und in eine Menge A gesteckt.
Es gilt nun:

(i) $(x + A) \cap (y + A) = \emptyset \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1), x \neq y$

(ii) $\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (x + A) = [0,1)$

- zu (i)
  Annahme: $\exists a, b \in A$ und $x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1), x \neq y$ mit $(a + x) \mod 1 = (b + y) \mod 1$. Da $0 < |x - y| < 1$ folgt $a \neq b$
  Wegen $a - b = y - x (\pm 1) \in \mathbb{Q}$ würde a,b in der gleichen Klasse liegen. Widerspruch.

- zu (ii)
  " $\subset$ ": ist klar
  " $\supset$ ": Sei $z \in [0,1) \Rightarrow \exists\, a \in A$ mit $a \sim z$, d.h. $x := z - a \in \mathbb{Q}$ und $-1 < x < 1$
  Falls $x < 0$ ersetze x durch $x + 1$ $(z = (x+1) + a mod 1)$

Sei jetzt P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}([0,1))$ mit (*). Dann gilt:

$$1 \overset{\text{Normiertheit}}{=} P([0,1)) \overset{(i),(ii)}{=} P(\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} (x+A)) \overset{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} P(x+A) \overset{(*)}{=} \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} P(A)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch ■

Definition 4.1
Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\supset\mathcal{E},\, \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A}$$

*die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. $\mathcal{E}$ heißt **Erzeugendensystem**.*

Bemerkung 4.1

a) $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

b) Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren über Ω ist wieder eine σ-Algebra ($\rightarrow$ *Übung*)

c) $\sigma(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, da $\mathcal{P}(\Omega) > \mathcal{E}$ und σ-Algebra ist.

Wir definieren jetzt eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Definition 4.2 *Es sei $\mathcal{E} := \{(a,b], -\infty < a < b < \infty\}$ Dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$ **Borelsche σ-Algebra** oder σ-Algebra der Borelschen Mengen von $\mathbb{R}$*

Bemerkung 4.2

a) Es gilt auch
   $\mathfrak{B} = \sigma(\{(-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{F \subset \mathbb{R} | F \text{ abgeschlossen}\})$
   $= \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$
   zur letzten Gleichung: $\mathfrak{B} = \sigma(U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$

   (i) $\mathfrak{B} \supset \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$, da sei $U \subset \mathbb{R}$ offen $\forall x \in U\ \exists (a,b] \subset U$ mit $x \in (a,b], a,b \in \mathbb{Q}$
   also $U = \bigcup_{\{(a,b)\in\mathbb{Q}^2 | (a,b]\subset U\}} (a,b] \in \mathfrak{B}$

   (ii) "$\subset$" $(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n}) \in \sigma(\{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen}\})$

b) Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ Dann ist
$\mathfrak{B}_A := \{B \cap A | B \in \mathfrak{B}\}$ eine σ-Algebra über A

Satz 4.2 *Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)})$ mit der Eigenschaft $P(A) = P(A+x) \forall A \in \mathfrak{B}_{[0,1)}, \forall x \in [0,1)$*
Insbesondere gilt:

$$P([a,b]) = b - a \ \forall 0 \leq a < b < 1$$

Bemerkung 4.3 P heißt Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall.
Sei $x \in [0,1)$ Wegen $P(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} P([x, x+\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
gilt $P([a,b]) = P([a,b))$ für $a, b \in [0,1]$
Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß aus Satz 4.2 eindeutig?

Definition 4.3 *Sei $\Omega \neq \emptyset$ $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Dynkin-System**, falls gilt:*

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ *mit* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

Bemerkung 4.4 Der Durchschnitt von beliebig vielen Dynkin-Systemen ist wieder ein Dynkin-System. Es sei

$$\delta(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{D}\supset\mathcal{E}, \mathcal{D} Dynkin-System} \mathcal{D}$$

das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System.

Definition 4.4 *Ein Mengensystem $\mathcal{E}$ heißt **durchschnittsstabil** ($\cap$-stabil), falls $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$*

Satz 4.3 (Satz über monotone Klassen)
Ist $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem, so gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

Satz 4.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit $\cap$-stabilem Erzeuger $\mathcal{E}$. Sind P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft $P(E) = Q(E) \ \forall E \in \mathcal{E}$,*
so gilt: $P(A) = Q(A) \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Beweis Sei $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} | P(A) = Q(A)\}$ Nach Voraussetzung ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Wegen den Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System.
Satz 4.3 $\mathcal{D} \supset \delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ ■

Bemerkung 4.5 $\mathcal{E} := \{[a,b) | 0 \leq a < b < 1\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}_{[0,1)}$.
Offenbar ist $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil.
Also ist P aus Satz 4.3 eindeutig.