0.5 Übung 4, 29.11.2004

Can somebody please tell where the heck I've been ? Oh, wait, now I remember, good old Bremen

0.6 Übung 5, 06.12.2004

0.6.1 Aufgabe 1

Geg: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i \geq j$

a) z.Z.: $A^n = 0$
Beweis: $A^k = ((a_{ij}^{(k)}))$ Beh.: $a_{ij}^{(k)} = 0$, falls $i \geq j - k + 1$
(Vollständige Induktion)

I.A.: $A^n = A = ((a_{ij}))$. Nach Vor.: $a_{ij} = 0$ für $i \geq j - 1 + 1$
I.V.: Für $A^k = ((a_{ij}))$ gilt $a_{ij}^{(k)} = 0$ für $i \geq j - k + 1$
I.S.: z.Z. $A^{k+1} = ((a_{ij}^{(k+1)}))$ erfüllt

$$a_{ij}^{(k+1)} = 0 \text{ für } i \geq (k+1) + 1 = j - k$$

Bew.: Sei $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $i_0 \geq j_0 - k = i_0 \geq (j_0 - 1) + k + 1$

$A^{k+1} = A^K \cdot A$. Also gilt:

$$a_{i_0 j_0}^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} a_{i_0 l} a_{l j_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{a_{i_o 1}^{(k)} \cdot a_{1 j_0}}_{0} + ... + \overbrace{a_{i_0 j_0 - 1}^{(k)}}^{=0}}_{0 \text{ nach I.V.}} \cdot \underbrace{a_{(j_0-1) j_0} + a_{i_0 j_0}^{(k)} \cdot a_{i_0 j_0}^{(k)} \cdot \overbrace{a_{j_0 j_0}}^{=0} + ... + a_{i_0 n}^{(k)} \cdot \underbrace{a_{n j_0}}_{0}}_{\text{nach Vor. aus A}} = 0$$

Damit gilt für $k = n : A^n = ((d_{ij}^{(n)}))a_{ij}^{(n)} = 0$, falls $i \geq \underbrace{j - n + 1}_{\text{Gilt für alle} i,j < \{1,...,n\}}$. Also gilt: $A^n = 0$

$\square$

b) Wo ist Teil b ?, bzw. was war a ?

c) $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^3$. Dazu gehört dann: $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto A^3$

P ist injektiv aber $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt: $\varphi_n(A) = A^3 = 0$. Damit ist φ_n nicht injektiv.

0.6.2 Aufgabe 2

Gibbet nicht

0.6.3 Aufgabe 3

a) z.Z.: $P(\pi \circ \sigma) = P(\pi) \cdot P(\sigma)$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
P(\pi)P(\sigma) &= ((P_{ij})) \\
= P_{ij} &= \delta_{i\pi(1)} \cdot \delta_1\sigma(j) + \delta_{i\pi(2)} \cdot \delta_2\sigma(j) + ... + \delta_{i\pi(n)} \cdot \delta_n\sigma(j) \\
&= \begin{cases} \quad\quad \exists k \in \{1,...,n\} : \delta_{i\pi(k)} = 1 \text{ und } \delta_{k\pi(j)} = 1 \\ \quad \Leftrightarrow \ \exists k \in \{1,...,n\} : \pi(k) = i \text{ und } k = \sigma(j) \\ 1, \ \Leftrightarrow \ \exists k \in \{1,...,n\} : k = \pi^{-1}(i) \text{ und } k = \sigma(j) \\ \quad \Leftrightarrow \ \pi^{-1} = \sigma(j) \\ \quad \Leftrightarrow \ i = \pi(\sigma(j)) \\ 0, \text{sonst} \end{cases} \\
&= \delta_{i\pi(\sigma(j))}
\end{aligned}
$$

Also gilt: $P(\pi \circ \sigma) = P(\pi) \cdot P(\sigma)$ □

b) z.Z.: $P(\pi^{-1}) = P(\pi)^\top$

Beweis: $P(\pi^{-1}) = ((\delta_{i\pi}^{-1}(j)$

$$\delta\pi^{-1}(j) = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = \pi^{-1}(j) \Leftrightarrow \pi(i) = j \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

$P(t)^\top = ((\delta_{ij}))$ und $P(\pi) = ((a_{ij} = ((\delta_i\pi(j)))$

$\delta_{ij} = a_{ji} = \delta_{j\pi(i)}\delta_{\pi(i)j}$

Also gilt: $P(\pi^{-1}) = P(\pi)$ □

c)

(1) z.Z.: $P(\pi) \in GL(n, \mathbb{K})$ für alle $\pi \in S_n$:

$$E_n = P(id_{\{1,...,n\}}) = P(\pi^{-1} \circ \pi) = P(\pi^{-1}) \cdot P(\pi) = P(\pi) \cdot P(\pi^{-1})$$

(2) P ist Gruppenhomomorphismus wege a)

(3) P injektiv $\Leftrightarrow$ Kern $P = \{id_{\{1,...,n\}}\}$

z.Z.: $P(\pi) = E_n \Rightarrow \pi = id_{\{1,...n\}}$

Beweis: Sei $P(\pi) = E_n = ((\delta_{ij}))$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\} : \delta_{i\pi(j)} = \delta_{ij} \\
&\Rightarrow \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\} : \pi(j) = j \\
&\Rightarrow \quad \pi = id_{\{1,...,n\}}
\end{aligned}
$$

□