§ 14 Flächen im $\mathbb{R}^3$

Definition
Es sei $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $B \subseteq D$. Weiter sei $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi = \varphi(u, v)$. Dann heißt $\varphi_{|B}$ eine **Fläche** (im $\mathbb{R}^3$), $S := \varphi(B)$ heißt **Flächenstück** und B heißt **Parameterbereich** der Fläche. Es ist

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Sei $(u_0, v_0) \in B$ und

$$\begin{aligned} &\gamma(t) := \varphi(t, v_0) && \gamma'(t) = \varphi_u(t, v_0) && \gamma'(u_0) = \varphi_u(u_0, v_0) \\ &\tilde{\gamma}(t) := \varphi(u_0, t) && \tilde{\gamma}'(t) = \varphi_v(u_0, v) && \tilde{\gamma}'(v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Definere damit den **Normalenvektor** in $\varphi(u_0, v_0)$:

$$N(u_0, v_0) := \varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)$$

Seien $\Delta u, \Delta v > 0$ (aber „klein“). $a := \Delta u \varphi_u(u_0, v_0)$, $b := \Delta v \varphi_v(u_0, v_0)$.

$$P := \{\lambda a + \mu b : \ \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

Aus der Linearen Algebra folgt, der „Inhalt“ von P ist $\|a \times b\| = \Delta u \Delta v \|N(u_0, v_0)\|$.

$$I(\varphi) = \int_B \|N(u, v)\| d(u, v)$$

heißt deshalb **Flächeninhalt** von φ

Beispiel
$B := [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $D = \mathbb{R}^2$
$\varphi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$. Dann: $\varphi(B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Nachrechnen: $N(u, v) = \cos v \varphi(u, v)$. Dann: $\|N(u, v)\| = |\cos v| \underbrace{\|\varphi(u, v)\|}_{=1} = \cos v \quad ((u, v) \in B)$.

Damit gilt:

$$I(\varphi) = \int_B \cos v d(u, v) = \int_0^{2\pi} (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v d(v)) d(u) = 4\pi$$

14.1. Explizite Parameterdarstellung

Seien B und D wie in obiger Definition und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. Setze

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

Damit ist $\varphi_{|B}$ eine Fläche (in expliziter Darstellung). Dann ist $S = \varphi(B)$ gleich dem Graph von $f_{|B}$.

$$\varphi_u = (1, 0, f_u), \quad \varphi_v = (0, 1, f_v), \quad N(u, v) = (-f_u, -f_v, 1) \quad \text{(Nachrechnen!)}$$

Damit gilt:

$$I(\varphi) = \int_B (f_u^2 + f_v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(u, v)$$

Beispiel
Sei $D = \mathbb{R}^2$, $B := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ und

$$f(u, v) := u^2 + v^2$$

Dann ist $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $f_u = 2u$ und $f_v = 2v$. Also ist $S = \varphi(B)$ ein Paraboloid.

$$I(\varphi) = \int_B (4u^2 + 4v^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(u, v) \overset{\text{PK}}{=} \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{5}^3 - 1\right) \quad \text{(Nachrechnen!)}$$