

# 1 Übung vom 28.04.

**n=2**

Gegeben ist ein (LP) der Form:

$$\begin{aligned} f(x) = \langle x, p \rangle &= \max \\ A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Jede der Ungleichungen  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  beschreibt eine Halbebene im  $\mathbb{R}^2$ .

Der zulässige Bereich M ist Schnitt von m Halbebenen.

Ist  $f(x) = \langle p, x \rangle$  die Zielfunktion (wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $f \neq 0$ , also  $p \neq 0$ ), dann ist die Menge

$$\{f = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

(also die Menge aller Punkte  $x \in \mathbb{R}^2$  mit  $f(x) = \alpha$ ) eine Gerade mit Normalenvektor  $\frac{p}{\|p\|}$ .

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = -4x_1 - 6x_2 &= \max \\ -3x_1 - x_2 &\leq -3 \\ -2x_1 - 2x_2 &\leq -4 \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Um den zulässigen Bereich skizzieren zu können, stellen wir zunächst die Gleichungen der 3 Geraden auf, die ihn begrenzen:

$$-3x_1 - x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = 3 - 3x_1 \quad (1)$$

$$-2x_1 - 2x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 2 - x_1 \quad (2)$$

$$-x_1 - 2x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \quad (3)$$

Hinzu kommen noch die Vorzeichenbedingungen  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Der Punkt (0,0) erfüllt keine der Bedingungen (1),(2),(3) (mit „ $\leq$ “), d.h. der zulässige Bereich ist Schnitt der Halbebenen, in denen (0,0) nicht liegt.

Die Ecken des zulässigen Bereichs sind (0,3),  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , (1,1) und (3,0).

Verschieben der Geraden  $\{\langle p, \cdot \rangle = \alpha\}$  mit  $p = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  zeigt, dass (1,1) Lösung des LP mit  $f(1,1) = -10$  ist.

Anmerkung:

$$-4x_1 - 6x_2 = \alpha \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{\alpha}{6}$$

Gerade in Richtung des Normalenvektors (hier nach links unten) verschieben.

*Hier ohne Schaubilder!*