

0.2 Übung 1, 08.11.2004

0.2.1 Aufgabe 1

b) $A \neq \emptyset$ eine Menge, (G, \circ) eine Gruppe.

z.Z.: $(G^A, *)$ ist Gruppe.

Beweis: $G^A \neq \emptyset$, da $A \neq \emptyset$

(1) $*$ ist assoziativ

Sei $x \in A, f, g, h \in G^A$

$$((f * g) * h)(x) = (f * g)(x) \circ h(x) = ((f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = f(x) \circ g(x) \circ h(x) = (f * (g * h))(x)$$

Da $x \in A$ bel. gilt $(f * g) * h = f * (g * h)$

(2) neutrales Element

Wir def. $f : A \rightarrow G, x \mapsto e$. Sei $x \in A$ bel., dann gilt:

$f(n(x)) = f(x)$. Also ist n das neutrale Element in G^A .

□

0.2.2 Aufgabe 3

Im Hinterkopf: $A = \mathbb{N}_0; \circ ?? +$ und $(B, *) = (\mathbb{Z}, +)$

a) z.Z.: \sim ist ÄR

Beweis:

(1) \sim ist reflexiv: $x_1 \circ y_1 = x_1 \circ y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$

(2) \sim ist symmetrisch da „ $=$ “ symmetrisch ist

(3) \sim ist transitiv:

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$

Es gilt also: $x_1 \circ y_2 = x_2 \circ y_2$ und $x_2 \circ y_1 = x_3 \circ y_2 \Rightarrow x_1 \circ y_2 \circ x_2 \circ y_3 = x_2 \circ y_1 \circ x_3 \circ y_2 \Rightarrow x_1 \circ y_3 = y_1 \circ x_3$

□

b) Seien $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \sim (x_2, y_2)$

z.Z.: $(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2) \sim (x'_1 \circ x'_2, y'_1 \circ y'_2)$ (dann wohldefiniert.)

$$x_1 \circ x_2 \circ y'_1 \circ y'_2 = x'_1 \circ y_1 \circ x'_2 \circ y_2 = x'_1 \circ x'_2 \circ y_1 \circ y_2$$

c) $A \times A / \sim \neq 0$

$$[(x_1, y_1)]_{\sim} \times [(x_2, y_2)]_{\sim} = [(x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)]_{\sim}$$

(1) $*$ ist assoziativ weil \circ assoziativ ist

(2) $[(e, e)]_{\sim}$ ist das neutrale Element bzgl. $*$

(3) $*$ ist kommutativ

Sei $x_1, y_1 \in A, [(y_1, x_1)]_{\sim}$ ist invers zu $[(x_1, y_1)]_{\sim}$, denn