5. Potenzreihen

Im Folgenden sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$

Definition

(1) (f_n) heisst auf A **punktweise konvergent** $:\iff \forall z \in A$ ist $(f_n(z))$ konvergent.
In diesem Fall heisst $f : A \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, die **Grenzfunktion** von (f_n).

(2) (f_n) heisst auf A **gleichmaessig (glm) konvergent** $:\iff \exists f : A \to \mathbb{C}$ mit:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \; \forall n \geq n_0 \forall z \in A$$

In diesem Fall sagt man : (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f.

(3) (f_n) heisst auf A **lokal gleichmaessig konvergent** $:\iff$ (f_n) konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmaessig. ($\iff$ $\forall a \in A \exists \rho > 0 : (f_n)$ konvergiert auf $U_\rho(a) \cap A$ gleichmaessig)

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A punktweise $:\iff$ (s_n) konvergiert auf A punktweise.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A gleichmaessig $:\iff$ (s_n) konvergiert auf A gleichmaessig.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A lokal gleichmaessig $:\iff$ (s_n) konvergiert auf A lokal gleichmaessig.

Klar: gleichmaessig Konvergenz $\implies$ lokal gleichmaessig Konvergenz $\implies$ punktweise Konvergenz.
Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.1

(1) (f_n) konvergiert auf A gleichmaessig gegen f, alle f_n seien in $z_0 \in A$ stetig. $\implies$ f ist in z_0 stetig.

(2) **Cauchykriterium**:
(f_n) konvergiert auf A gleichmaessig $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ $\forall n, m \geq n_0 \; \forall z \in A$

(3) **Kriterium von Weierstrass**:
Sei (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)$ konvergiert und $|f_n(z)| \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall z \in A$.
Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf A gleichmaessig.

Definition
Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.
Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heisst eine **Potenzreihe (PR)**.
Wir setzen $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\rho = \infty$ falls $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschraenkt) und

$$r := \begin{cases} 0 \text{ falls } \rho = \infty \\ \infty \text{ falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} \text{ falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}.$$

r heisst der **Konvergenzradius (KR)** der Potenzreihe.

Wie in der Analysis zeigt man:

Satz 5.2
Die Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r

(1) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in $z = z_0$

(2) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut. Die Potenzreihe konvergiert auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmaessig.

(3) Ist $0 < r < \infty$ so gilt:

 (i) die Potenzreihe konvergiert in jedem $z \in U_r(z_0)$ absolut.

 (ii) die Potenzreihe divergiert zu jedem $z \notin \overline{U_r(z_0)}$.

 (iii) für $z \in \partial U_r(z_0)$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

 (iv) die Potenzreihe konvergiert auf $U_r(z_0)$ lokal gleichmaessig.

Beispiel:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Für $|z| = 1$ ist z^n keine Nullfolge $\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ist divergent zu jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 0$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Sei $|z| = 1$, $|\frac{z^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$; Majorantenkriterium $\Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert.

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Wie in der Analysis: die Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

Satz 5.3
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r. Dann hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius r.

Beweis

$$\alpha_n = na_n;\ \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|};\ \sqrt[n]{n} \to 1 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \blacksquare$$

Definition
Für $z_0 \in \mathbb{C} : U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$.

Satz 5.4
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$ ($r = \infty$ zugelassen). Die Funktion $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann

(1) $f \in H(U_r(z_0))$ und $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}\ \forall z \in U_r(z_0)$

(2) f ist auf $U_r(z_0)$ beliebig oft komplex db und
$f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}\ \forall z \in U_r(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Beweis
(1) O.B.d.A $z_0 = 0$.
Für $w \in U_r(0) : g(w) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}$. Sei $w \in U_r(0)$. Wähle $\rho > 0$, so daß $|w| < \rho < r$.
$b_n := n^2|a_n|\rho^{n-2}$ $(n \geq 2)$; $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{\rho}{r} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ konvergent; $c := \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$. Sei $z \in U_\rho(0)$ und $z \neq w$. Betrachte dann
$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \frac{1}{z-w}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - w^n) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(\underbrace{\frac{z^n-w^n}{z-w} - nw^{n-1}}_{=:\alpha_n})$.

Nachrechnen: $\alpha_n = (z-w)\sum\limits_{n=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}$.
Dann gilt:
$|\alpha_n| = |z-w||\sum\limits_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1}| \leq |z-w|\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\underbrace{|w|}_{<\rho}{}^{k-1}\underbrace{|z|}_{<\rho}{}^{n-k-1}$
$\leq |z-w|\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} = |z-w|\rho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} \leq |z-w|\rho^{n-2}n^2$
$\Rightarrow |\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)| = |\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n\alpha_n| \leq \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n||\alpha_n|$

$\leq (\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 \rho^{n-2}) |z-w| = c|z-w|$
$\Rightarrow (z \to w)$ f ist in w komplex db und $f'(w) = g(w)$

(2) folgt aus (1) induktiv.

(3) folgt aus (2) mit $z = z_0$. ■

Definition
Seien $r_1, r_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Dann

$$\min\{r_1, r_2\} = \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & \text{, falls } r_1, r_2 < \infty \\ r_2 & \text{, falls } r_1 = \infty \\ r_1 & \text{, falls } r_2 = \infty \end{cases}$$

Satz 5.5
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 und r_2. Dann hat für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z-z_0)^n$ einen Konvergenzradius $r \geq \min\{r_1, r_2\}$

Beweis
Klar. ■

Beispiel
$a_n = b_n, \alpha = 1, \beta = -1$