Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009
Prof. Dr. F. Herrlich

Die Mitarbeiter von http://mitschriebwiki.nomeata.de/

27. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

Benannte Sätze

Vorwort

Über dieses Skriptum

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung „Algebraische Geometrie II“ von Prof. Dr. F. Herrlich im Sommersemester 09 an der Universität Karlsruhe. Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Prof. Dr. F. Herrlich hier veröffentlicht, Prof. Dr. F. Herrlich ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

Wer

Getippt wurde das Skriptum soweit von ....

Wo

Alle Kapitel inklusive LaTeX-Quellen können unter `http://mitschriebwiki.nomeata.de` abgerufen werden. Dort ist ein von Joachim Breitner programmiertes *Wiki*, basierend auf `http://latexki.nomeata.de` installiert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

1 Schemata

§1 Garben

Definition 1.1.1 (Prägarbe)
Sei X ein topologischer Raum, $\operatorname{Off}(X)$ die Menge der offenenen Teilmengen von X und $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Prägarbe* auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathcal{F}\colon \underline{\operatorname{Off}}(X) \to \mathcal{C}$$

wobei $\underline{\operatorname{Off}}(X)$ die Kategorie mit den Objekten $\operatorname{Off}(X)$ und den Morphismen

$$\operatorname{Mor}(U, U') = \begin{cases} i\colon U \hookrightarrow U' & \text{falls } U \subseteq U' \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Für $U \subseteq U'$ heißt $\rho_U^{U'} = \mathcal{F}(U \hookrightarrow U')$ *Restriktionsmorphismus.* Ist $U \subseteq U'$ und $f \in \mathcal{F}(U')$, so schreibt man statt $\rho_U^{U'}(f)$ auch $f \upharpoonright U$.

Definition 1.1.2 (Garbe)
Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt *Garbe*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist $U \subseteq X$ offen, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U und ist für jedes $i \in I$ ein $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben, so dass $s_i \upharpoonright U_i \cap U_j = s_j \upharpoonright U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in I$, dann gibt es genau ein $s \in \mathcal{F}(U)$, so dass für alle $i \in I$ gilt: $s \upharpoonright U_i = s_i$.

Beispiele 1.1.3

(a) Sei X quasi-projektive Varietät, $\mathcal{O}_X(U)$ der Ring der regulären Funktionen auf U, dann ist $\mathcal{O}_X$ Garbe auf X.

(b) Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}(U)$ die Menge der stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. $\mathcal{C}$ ist Garbe von Ringen auf X. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann sind auch $\mathcal{C}^\infty(U)$ und $\mathcal{C}^k(U)$ Garben von Ringen auf X.

(c) Sei X ein topologischer Raum, G eine (abelsche) Gruppe. Definiere $\mathcal{G}(U) = G$ für jedes offene $U \subseteq X$ und wähle als Restriktionsmorphismen $\rho_U^{U'} = \mathrm{id}_G$ für alle $U \subseteq U'$.

$\mathcal{G}$ ist offenbar Prägarbe, muss aber nicht zwingend Garbe sein. Gibt es in X disjunkte offene Mengen U_1, U_2, dann ist $U = U_1 \cup U_2$ offen und $\{U_1, U_2\}$ ist eine Überdeckung von U. Jedoch gibt es für $g_1 \in \mathcal{G}(U_1), g_2 \in \mathcal{G}(U_2)$ mit $g_1 \neq g_2$ kein $g \in \mathcal{G}(U)$, so dass $g \upharpoonright U_1 = g_1$ und $g \upharpoonright U_2 = g_2$.

$\mathcal{G}$ kann zur Garbe gemacht werden, indem man $\mathcal{G}(U) = G^{\,\#\text{Zsh.-komp. von } U}$ setzt.

Bemerkung 1.1.4
Ist $\mathcal{F}$ Garbe von abelschen Gruppen auf X, so ist $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

Beweis Sei $G = \mathcal{F}(\varnothing)$. Offenbar kann $\varnothing$ durch eine leere Überdeckung von offenen Teilmengen überdeckt werden. Für jedes $g \in G$ und jedes $i \in I$ gilt also $g \upharpoonright U_i = g_i$. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, kann es also nur ein $g \in G$ geben und somit ist $G = 0$. □

Definition 1.1.5 (Morphismen von Prägarben)
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$. Ein Morphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine natürliche Transformation von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$, d.h. für jedes offene $U \subseteq X$ ist ein Morphismus $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ gegeben, so dass folgendes Diagramm für alle U, U' mit $U \subseteq U'$ kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U') \arrow[r, "\rho_U^{U'}"] \arrow[d, "\varphi_{U'}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\varphi_U"] \\
\mathcal{G}(U') \arrow[r, "\rho_U^{U'}"] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}
$$

Im Folgenden ist mit einer Garbe auf X immer eine Garbe von abelschen Gruppen gemeint.

Definition 1.1.6 (Halm und Keim)
Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X.

(a)

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U \in \mathrm{Off}(X)} \mathcal{F}(U)$$

heißt *Halm* von $\mathcal{F}$ in x. Dabei ist

$$\varinjlim \mathcal{F}(U) = \{(U, f) \mid U \in \mathrm{Off}(X), x \in U, f \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

mit $(U, f) \sim (U', f') :\Leftrightarrow$ es gibt eine offene Menge $U'' \subseteq U \cap U'$, so dass $x \in U''$ und $f \restriction U'' = f' \restriction U''$.

(b) Für eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ sei

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x,\ f \mapsto [(U, f)]_\sim =: f_x$$

der natürliche Morphismus. f_x heißt *Keim* von f in x.

Bemerkung 1.1.7
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{F}(U)$. Dann gilt:

$$f = 0 \Leftrightarrow f_x = 0 \text{ für alle } x \in U$$

Beweis „$\Rightarrow$“: Ist $f = 0$, dann ist offenbar $f_x = 0$ für alle $x \in U$.

„$\Leftarrow$“: Sei $f_x = 0$ für alle $x \in U$. Dann gibt es für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung U_x von x, so dass $(U_x, 0) \in f_x$ und damit insbesondere $(U_x, 0) \sim (U, f)$. Die U_x überdecken U und daher gibt es genau ein $g \in \mathcal{F}(U)$ mit $g \restriction U_x = 0$ für jedes $x \in X \Rightarrow 0 = g = f$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Aussage aus Bemerkung 1.1.7 für Prägarben nicht unbedingt gilt.

Beispiele 1.1.8
Sei X ein topologischer Raum, so dass jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \neq X$ besitzt.

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \mathbb{Z} & U = X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den natürlichen Restriktionsmorphismen ist eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X. Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{F}_x = 0$, also ist auch für jedes $f \in \mathcal{F}(X)$ und jedes $x \in X$ $f_x = 0$ – auch wenn $f \neq 0$.

Bemerkung 1.1.9
Jeder Morphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben induziert für jedes $x \in X$ einen natürlichen Morphismus $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$.

Beweis Sei $x \in X$. Definiere

$$\varphi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x,\ [(U,f)]_\sim \mapsto [(U,\varphi_U(f)]_\sim$$

Für $(U,f) \sim (U',f')$ ist $f \restriction U'' = f' \restriction U''$ für ein geeignetes U'' und daher

$$\varphi_{U'}(f') \restriction U'' = \varphi_{U''}(f' \restriction U'') = \varphi_{U''}(f \restriction U'') = \varphi_U(f) \restriction U''$$

Somit ist auch $(U,\varphi_U(f)) \sim (U',\varphi_{U'}(f'))$ und φ_x ist wohldefiniert. □

Bemerkung 1.1.10
Seien $\mathcal{F},\mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen, $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus. Dann gilt:

(a) $\forall U \in \mathrm{Off}(X)\colon \varphi_U$ ist injektiv $\iff$ $\forall x \in X\colon \varphi_x$ ist injektiv.

(b) $\forall U \in \mathrm{Off}(X)\colon \varphi_U$ ist surjektiv $\implies$ $\forall x \in X\colon \varphi_x$ ist surjektiv.

(c) $\forall U \in \mathrm{Off}(X)\colon \varphi_U$ ist Isomorphismus $\iff$ $\forall x \in X\colon \varphi_x$ ist Isomorphismus.

Beweis (a) **„⇒“:** Seien $x \in X$ und $f_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(f_x) = 0$. Dann ist $[(U,\varphi_U(f))]_\sim = 0$ für einen Repräsentanten (U,f) von f_x. Ohne Einschränkung ist $\varphi_U(f) = 0$ und nach Vorraussetzung somit auch $f = 0 \Rightarrow f_x = 0$.

„⇐“: Seien $U \in \mathrm{Off}(X)$ und $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi_U(f) = 0$. Für alle $x \in U$ ist dann $\varphi_x(f_x) = 0$ und somit auch $f_x = 0$. Nach Bemerkung 1.1.7 ist $f = 0$.

(b) Sei $g_x \in \mathcal{G}_x$ für ein $x \in X$ und sei (U,g) ein Repräsentant von g_x. Nach Vorraussetzung gibt es ein $f \in \mathcal{F}(U)$, so dass $\varphi_U(f) = g$. Insgesamt ist dann $\varphi_x(f_x) = g_x$.

(c) **„⇒“:** Folgt aus (a) und (b).

„⇐“: Nach (a) ist φ_U injektiv und es bleibt nur zu zeigen, dass φ_U surjektiv ist. Sei also $g \in \mathcal{G}(U)$. Für jedes $x \in U$ sei $f_x = \varphi_x^{-1}(g_x)$ und $(U^{(x)}, f^{(x)})$ ein Repräsentant von f_x. Offenbar ist $\left(U^{(x)}\right)_{x\in U}$ eine offene Überdeckung von U. Weiterhin kann man die $U^{(x)}$ klein genug wählen, so dass $\varphi_{U^{(x)}}(f^{(x)}) = g \restriction U^{(x)}$. Dann ist $f^{(x)} = \varphi_{U^{(x)}}^{-1}(g \restriction U^{(x)})$ und für alle $x,x' \in U$ gilt:

$$f^{(x)} \restriction U^{(x)} \cap U^{(x')} = \varphi^{-1}_{U^{(x)} \cap U^{(x')}}(g \restriction U^{(x)} \cap U^{(x')}) = f^{(x')} \restriction U^{(x)} \cap U^{(x')}$$

Da $\mathcal{F}$ Garbe ist, gibt es genau ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f \restriction U^{(x)} = f^{(x)}$ für alle $x \in U$. Offenbar ist dann $\varphi_U(f) \restriction U^{(x)} = g \restriction U^{(x)}$ für jedes $x \in U$ und somit auch $\varphi_U(f) = g$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Aussage (b) aus Bemerkung 1.1.10 keine Äquivalenz ist.

Beispiele 1.1.11
Sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{F}$ die Garbe der invertierbaren, holomorphen Funktionen. Weiter sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ durch $f \mapsto f^2$ gegeben. Dann ist φ_x für jedes $x \in X$ surjektiv, φ_X hingegen nicht.

Bemerkung + Definition 1.1.12 (Assoziierte Garbe)
Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X.

(a) Es gibt genau eine Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X und einen Morphismus $\vartheta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, so dass $\vartheta_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist.

(b) $\mathcal{F}^+$ heißt die zu $\mathcal{F}$ *assoziierte Garbe*.

(c) Zu jeder Garbe $\mathcal{G}$ auf X und jedem Morphismus $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben gibt es genau einen Morphismus $\varphi^+ \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\vartheta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, "\exists!\ \varphi^+"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

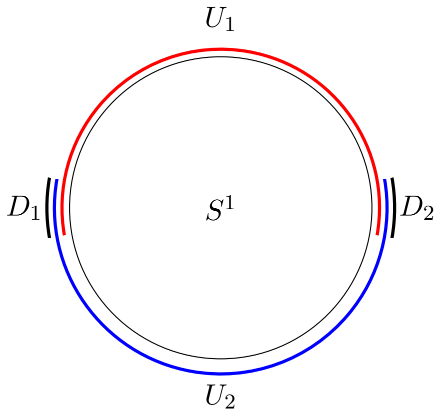

Abbildung 1.1: Überlagerung von S^1 durch U_1 (rot) und U_2 (blau)

Beweis (a) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{F}^+(U) = \Big\{ s\colon U \to \dot{\bigcup_{x \in U}} \mathcal{F}_x \;\Big|\; \forall x \in U \text{ ist } s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ und } \exists \text{ Umgebung } U_x \text{ von } x \\ \text{und ein } f \in \mathcal{F}(U_x) \text{ mit } s(y) = f_y \text{ für jedes } y \in U_x \Big\}$$

Dann ist $\mathcal{F}^+$ zusammen mit den offensichtlichen Restriktionen Garbe auf X. Weiter ist $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, $\vartheta_U(f) = (x \mapsto f_x)$ ein Morphismus und ϑ_x ist Isomorphismus für jedes $x \in X$. Die Eindeutigkeit von $\mathcal{F}^+$ und ϑ folgt aus (c).

TODO Beweis l... rer mache...

(c) Sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Ist $s \in \mathcal{F}^+(U)$, dann ist $(U_x)_{x \in U}$ eine offene Überdeckung von U. Für $x, x' \in U$ gibt es $f^{(x)} \in \mathcal{F}(U_x)$ und $f^{(x')} \in \mathcal{F}(U_{x'})$, so dass $s(y) = f_y^{(z)}$ für jedes $y \in U_z$ und $z \in \{x, x'\}$. Daher ist $f_y^{(x)} = f_y^{(x')}$ für jedes $y \in U_x \cap U_{x'}$ und für jedes $y \in U_x \cap U_{x'}$ gibt es eine Umgebung U' von y, so dass $f^{(x)} \restriction U' = f^{(x')} \restriction U'$. Weil die U' eine Überdeckung von $U_x \cap U_{x'}$ sind, ist $f^{(x)} \restriction U_x \cap U_{x'} = f^{(x')} \restriction U_x \cap U_{x'}$ und insbesondere $\varphi_{U_x}(f^{(x)}) \restriction U_x \cap U_{x'} = \varphi_{U_{x'}}(f^{(x')}) \restriction U_x \cap U_{x'}$. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $g \in \mathcal{G}(U)$, so dass $g \restriction U_x = \varphi_{U_x}(f^{(x)})$. Definiert man nun $\varphi^+(s) = g$, dann ist offenbar $\varphi = \varphi^+ \circ \vartheta$ und φ^+ ist eindeutig. □

Bemerkung + Definition 1.1.13 (Kern, Bild, Mono- und Epimorphismen)
Sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X.

(a) $\mathrm{Kern}(\varphi)$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi)(U) = \mathrm{Kern}(\varphi_U)$ ist Garbe.

(b) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ sei die zu $U \mapsto \mathrm{Bild}(\varphi_U)$ assoziierte Garbe.

(c) φ heißt *Monomorphismus*, falls $\mathrm{Kern}(\varphi) = 0$.

(d) φ heißt *Epimorphismus*, falls $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathcal{G}$.

Definition 1.1.14 (Quotientengarbe)
Seien $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$ Garben von abelschen Gruppen auf X. Die zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe heißt *Quotientengarbe* von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$.

Beispiele 1.1.15
Sei $\mathcal{F} = \mathcal{C}_x$ die Garbe der stetigen Funktionen von S^1 nach $\mathbb{R}$ und $\mathcal{G}$ die konstante Garbe zu $\mathbb{Z}$ auf S^1.

In Abbildung 1.1 ist eine Überlagerung von S^1 durch U_1, U_2 zu sehen, so dass $U_1 \cap U_2 = D_1 \dot\cup D_2$ für zwei offene Mengen D_1, D_2.

Seien nun $0 = f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ und $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ mit $f_2 \restriction D_1 = 0$ und $f_2 \restriction D_2 = 1$. Dann ist $f_2 - f_1 \in \mathcal{G}(U_1 \cap U_2)$ und daher $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}(S^1)$.

Bemerkung + Definition 1.1.16 (Direkte und inverse Bildgarbe)
Sei $f : X \to Y$ stetig.

(a) Sei $\mathcal{F}$ Garbe auf X, dann ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ auf Y eine Garbe. Sie heißt die *direkte Bildgarbe* und wird mit $f_*\mathcal{F}$ bezeichnet.

(b) Sei $\mathcal{G}$ Garbe auf Y, dann heißt die zur Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ offen} \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V)$$

assoziierte Garbe $f^{-1}\mathcal{G}$ *inverse Bildgarbe* zu $\mathcal{G}$.

(c) f_* und f^{-1} sind kovariante Funktoren

(d) f^{-1} ist linksadjungiert zu f_*, d.h. es gibt natürliche Bijektionen

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Beweis (a) Da $\mathcal{F}$ Garbe auf X und $f^{-1}(U)$ offen ist für jedes $U \subseteq Y$, ist $f_*\mathcal{F}$ Garbe auf Y.

(c) Offensichtlich.

(d) Es sollen natürliche Bijektionen $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ konstruiert werden.

Der Weg von $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ **nach** $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$

Jedes $\alpha \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ induziert einen Morphismus $f_*(\alpha)\colon f_*f^{-1}\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$.
$f_*(\alpha)$ kann fortgesetzt werden zu einem Morphismus

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\psi_\mathcal{G}} f_*f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f_*(\alpha)} f_*\mathcal{F}$$

Dazu ist folgende Konstruktion nötig: Die universelle Eigenschaft des direkten Limes liefert einen natürlichen Morphismus

$$\mathcal{G}(V) \to \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subseteq W \subseteq V} \mathcal{G}(W) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subseteq W} \mathcal{G}(W)$$

Dabei beruht die Gleichheit der direkten Limetes darauf, dass $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ und somit ohne Einschränkung jedes $W \supset f(f^{-1}(V))$ mit V geschnitten werden kann. Nun ist $f^{-1}\mathcal{G}$ die zu

$$V \mapsto \varinjlim_{f(V) \subseteq W} \mathcal{G}(W)$$

assoziierte Garbe und man erhält $\psi_\mathcal{G}(V)\colon \mathcal{G}(V) \to f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = f_*f^{-1}\mathcal{G}(V)$

Der Weg von $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ **nach** $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$

Jedes $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ induziert einen Morphismus $f^{-1}(\beta)\colon f^{-1}\mathcal{G} \to f^{-1}f_*\mathcal{F}$
Auch $f^{-1}(\beta)$ lässt sich fortsetzen zu

$$f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{f^{-1}(\beta)} f^{-1}f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi_\mathcal{F}} \mathcal{F}$$

$f^{-1}f_*\mathcal{F}$ ist die zu

$$U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subseteq V} f_*\mathcal{F}(V) = \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

assoziierte Garbe und daher reicht es für jedes U einen Morphismus

$$\chi_\mathcal{F}(U)\colon \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$$

zu konstruieren. Für jedes V mit $f(U) \subseteq V$ ist $U \subseteq f^{-1}(V)$, also gibt es Restriktionsmorphismen $\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$. Die universelle Eigenschaft des direkten Limes liefert nun einen eindeutigen Morphismus $\chi_{\mathcal{F}}(U)$ der wiederum $\varphi_{\mathcal{F}}(U)$ induziert.

Die beiden Konstruktionen sind zueinander invers

Das ist so. □

Bemerkung 1.1.17
Sei X topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen. Dann ist $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ linksexakter, kovarianter Funktor.

TODO
Beweis l
rer mach

Beweis Ist $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus, so ist $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ der zugehörige Morphismus. Sei nun

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben. Nach Definition ist $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ linksexakt, falls

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{F}''(U)$$

exakt ist.
Nach Definition 1.1.13 und Bemerkung 1.1.10 ist

$$0 \to \mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x \to 0$$

exakt für jedes $x \in X$. Wiederum nach Bemerkung 1.1.10 ist

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$$

exakt. □

§2 Affine Schemata

Bemerkung + Definition 1.2.1 (Spektrum, Zariski-Topologie und Verschwindungsideal)
Sei R ein Ring.

(a) $\operatorname{Spec} R = \{\mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ heißt *Spektrum* von R.

(b) Für $I \subseteq R$ sei $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.
Es gilt $V(I) = V((I))$.

(c) $\{V(I) \mid I \text{ ist Ideal in } R\}$ sind abgeschlossene Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, der *Zariski-Topologie*.

(d) Für $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ sei $I(Z) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$ das *Verschwindungsideal* von Z.

Anmerkung 1
(a) Ist $A \subseteq B \subseteq \operatorname{Spec} R$, dann ist $I(A) \supseteq I(B)$.
(b) Ist $I \subseteq J \subseteq R$, dann ist $V(I) \supseteq V(J)$.

Beweis (a) Ist $A \subseteq B$, dann ist

$$I(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in A} \mathfrak{p} \overset{A \subseteq B}{\supseteq} \bigcap_{\mathfrak{p} \in B} \mathfrak{p} = I(B)$$

(b) Ist $I \subseteq J$, dann ist

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} \overset{I \subseteq J}{\supseteq} \{\mathfrak{p} \mid J \subseteq \mathfrak{p}\} = V(J)$$ □

Bemerkung 1.2.2
(a) $V(I(Z)) = \overline{Z}$
(b) $I(V(I)) = \sqrt{I}$

Beweis (a) **„$\supseteq$“:** Nach Definition ist $V(I(Z))$ abgeschlossen und daher gilt $\overline{Z} \subseteq V(I(Z))$.
„$\subseteq$“: Nach Definition ist

$$\overline{Z} = \bigcap_{\substack{I \text{ Ideal} \\ Z \subseteq V(I)}} V(I)$$

Aus $Z \subseteq V(I)$ folgt $I \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in Z$. Somit ist

$$I \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p} = I(Z)$$

und deshalb $V(I) \supset V(I(Z))$.

(b)

$$I(V(I)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ Primideal} \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$$

□

Anmerkung 2
(a) Sind $(I_j)_{j \in J}$ Ideale, dann ist

$$\bigcap_{j \in J} V(I_j) = V\left(\sum_{j \in J} I_j\right)$$

(b) Sind I_1, I_2 Ideale, dann ist

$$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1 \cap I_2)$$

Beweis (a) **“$\subseteq$”:** Ist $\mathfrak{p} \in \bigcap V(I_j)$, dann ist $I_j \subseteq \mathfrak{p}$ für jedes $j \in J$. Also ist auch $\sum I_j \subseteq \mathfrak{p}$ und somit $\mathfrak{p} \in V(\sum I_j)$.
“$\supseteq$”: Ist $\mathfrak{p} \in V(\sum I_j)$, dann ist $I_j \subseteq \sum I_j \subseteq \mathfrak{p}$ für jedes $j \in J$ und somit ist $\mathfrak{p} \in \bigcap V(I_j)$.
(b) **“$\subseteq$”:** Ist $\mathfrak{p} \in V(I_1) \cup V(I_2)$, dann ist $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$ oder $I_2 \subseteq \mathfrak{p}$. Auf jeden Fall ist aber $I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p}$ und $I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}$ und somit $V(I_1) \cup V(I_1) \subseteq V(I_1 \cdot I_2)$ und $V(I_1) \cup V(I_2) \subseteq V(I_1 \cap I_2)$.
“$\supseteq$”: Es gilt: $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ und somit $V(I_1 \cdot I_2) \supseteq V(I_1 \cap I_2)$. Also genügt es zu zeigen, dass $V(I_1 \cdot I_2) \subseteq V(I_1) \cup V(I_2)$.
Ist also $\mathfrak{p} \in V(I_1 \cdot I_2)$, dann ist $I_1 \cdot I_2 \subseteq \mathfrak{p}$. Angenommen $I_2 \nsubseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein $a \in I_2$, so dass $a \notin \mathfrak{p}$. Nach Vorraussetzung ist aber $aI_1 \subseteq \mathfrak{p}$ und somit ist auch $I_1 \subseteq \mathfrak{p}$, insbesondere also $\mathfrak{p} \in V(I_1)$.□

Bemerkung 1.2.3
Sei $\varnothing \neq V \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen. $I(V)$ ist ein Primideal, genau dann wenn V irreduzibel ist.

Beweis **„$\Leftarrow$“:** Sei $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, dann gibt es ein Ideal $I \subseteq R$, so dass $V = V(I)$. Seien nun $a, b \in R$ mit $ab \in I(V)$. Nach Definition ist

$$I(V) = \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$$

und daher ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ offenbar $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. Definiere nun $V_a = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal mit } I \subseteq \mathfrak{p} \text{ und } a \in \mathfrak{p}\}$ und V_b analog. Offenbar ist $V = V_a \cup V_b$ und V_a, V_b sind abgeschlossen. Da V irreduzibel ist, kann man ohne Einschränkung $V_a = V$ annehmen. Dann ist aber offenbar auch $a \in I(V)$.

„⇒“: Sei $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, so dass $I(V)$ Primideal ist und seien $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$ abgeschlossene Mengen mit $V = V_1 \cup V_2$. Ohne Einschränkung sind I_1, I_2 Radikalideale, da $V(\sqrt{I_i}) = V(I(V_i)) = \overline{V_i} = V_i$ für $i \in \{1,2\}$

Dann ist $V = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$. Da I_1, I_2 Radikalideale sind, ist $I_1 \cap I_2$ Radikalideal und daher ist $I_1 \cap I_2 = \sqrt{I_1 \cap I_2} = I(V)$ ein Primideal.

Ist nun $I_2 \nsubseteq I_1$, dann gibt es ein $b \in I_2 \setminus I_1$. Für jedes $a \in I_1$ ist $ab \in I_1 \cap I_2$ und daher $a \in I_1 \cap I_2$ oder $b \in I_1 \cap I_2$. Da b aber aus $I_2 \setminus I_1$ gewählt war, muss $a \in I_1 \cap I_2$ und somit $I_1 \subseteq I_1 \cap I_2$ sein. Somit ist aber $V_1 = V(I_1) \supseteq V(I_1 \cap I_2) = V \quad \Rightarrow V_1 = V$ □

Proposition 1.2.4
Jeder Morphismus $\alpha\colon R \to R'$ von Ringen induziert durch $f_\alpha(\mathfrak{p}) = \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ eine stetige Abbildung $f_\alpha\colon \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$.

Beweis $\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ ist Primideal. Ist $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, dann ist $f_\alpha^{-1}(V(I)) = V(\alpha(I))$ □

Bemerkung 1.2.5
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät. Dann ist

$$m\colon V \to \operatorname{Spec} k[V],\ x \mapsto m_x$$

stetig und injektiv.

Beweis Die maximalen Ideale in $k[V]$ entsprechen bijektiv den Punkten in V. Also ist m injektiv. Sei nun $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} k[V]$ abgeschlossen, dann ist

$$\begin{aligned} m^{-1}(V(I)) &= \{x \in V \mid m_x \in V(I)\} \\ &= \{x \in V \mid I \subseteq m_x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in I\} \\ &= V(I) \text{ im Sinne von affinen Varietäten} \end{aligned}$$ □

Bemerkung + Definition 1.2.6 (Generischer Punkt)
(a) Ein Punkt x in einem topologischen Raum X heißt *generisch*, falls $\overline{\{x\}} = X$.
(b) Jede abgeschlossene, irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ (R ein Ring) besitzt genau einen generischen Punkt.
(c) Die maximalen, irreduziblen Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$ entsprechen bijektiv den minimalen Primidealen in R.

Beweis (b) Sei $V = V(I) \subseteq \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen und irreduzibel. Nach Bemerkung 1.2.3 ist $I(V) = \sqrt{I}$ ein Primideal. Es ist $I \subseteq \sqrt{I}$ und somit auch $\sqrt{I} \in V$. Ist $W = V(J)$ eine abgeschlossene Menge mit $\sqrt{I} \in W$, dann ist $J \subseteq \sqrt{I}$ und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ ist $J \subseteq \sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$ $\Rightarrow \overline{\left\{\sqrt{I}\right\}} = V$.
(c) Folgt aus Bemerkung 1.2.3. □

Bemerkung + Definition 1.2.7
Für jedes $f \in R$ ist $D(f) = \operatorname{Spec} R \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ offen in $\operatorname{Spec} R$. $\{D(f) \mid f \in R\}$ ist eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$.

Beweis Sei $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ offen und $\mathfrak{p} \in U$. $V = \operatorname{Spec} R \setminus U$ ist abgeschlossen, also $V = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq R$. Für jedes $f \in I$ gilt $V(I) \subseteq V(f)$, also $D(f) \subseteq U$. Nun ist $\mathfrak{p} \in U = \{\mathfrak{q} \mid I \nsubseteq \mathfrak{q}\}$, also gibt es ein $f \in I$, so dass $f \notin \mathfrak{p}$ und somit ist $\mathfrak{p} \in D(f)$. □

Anmerkung 3
Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $A \subseteq X$, dann kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $U_i = D(f_i)$ für geeignete $f_i \in R$.

Beweis Die $D(f)$ mit $f \in R$ bilden eine Basis der Topologie, also ist jedes U_i Vereinigung von $D(f)$'s, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.2.8
$\operatorname{Spec} R$ ist quasi-kompakt.

Beweis Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$. Ohne Einschränkung sei $U_i = D(f_i)$ für geeignetes $f_i \in R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} D(f_i) = \operatorname{Spec} R &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} V(f_i) = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i\in I} (f_i)\right) = R \end{aligned}$$

und daher gilt für geeignete a_j und eine endliche Menge $J \subseteq I$:

$$1 = \sum_{j\in J} a_j f_j$$

bzw.

$$\bigcup_{j\in J} D(f_j) = \operatorname{Spec} R$$

□

Bemerkung 1.2.9
Für jedes $f \in R$ ist $D(f) \subseteq \operatorname{Spec} R$ quasi-kompakt bzgl. der induzierten Topologie.

Beweis Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} R$. Ohne Einschränkung sei $U_i = D(f_i) \cap D(f)$ für geeignetes $f_i \in R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} (D(f_i) \cap D(f)) = D(f) &\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} D(f_i) \supseteq D(f) \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} V(f_i) \subseteq V(f) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i\in I} (f_i) \supseteq (f) \end{aligned}$$

und daher gilt für geeignete a_j und eine endliche Menge $J \subseteq I$:

$$f = \sum_{j\in J} a_j f_j$$

bzw.

$$\bigcup_{j\in J} D(f_j) \supseteq D(f)$$

□

Beispiele 1.2.10
Dieses Beispiel soll zeigen, dass $\operatorname{Spec} R$ alleine nicht ausreichend ist und so die folgende Definition motivieren. Seien k ein Körper und $R = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Dann ist $\operatorname{Spec} R = \{(\varepsilon)\}$ und

$$\alpha\colon R \to k,\ \varepsilon \mapsto 0$$

ist ein k-Algebra-Homomorphismus. α induziert eine stetige Abbildung f_α. Aus offensichtlichen Gründen ist $f_\alpha\colon \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} R$ sogar ein Homöomorphismus.

Fazit: $\operatorname{Spec} R$ besitzt zu wenig Information über R.

Bemerkung + Definition 1.2.11 (Strukturgarbe und affines Schema)
Sei R ein Ring, $X = \operatorname{Spec} R$.

(a) Für $U \subseteq X$ offen sei

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ s\colon U \to \dot{\bigcup_{\mathfrak{p}\in U}} R_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ ist } s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}} \\ \text{und es gibt eine Umgebung } U_{\mathfrak{p}} \text{ von } \mathfrak{p} \text{ sowie } f, g \in R \\ \text{so dass für alle } \mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}\colon g \notin \mathfrak{q} \text{ und } s(\mathfrak{q}) = \dfrac{f}{g} \end{array} \right\}$$

(b) $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von Ringen auf X. Sie heißt *Strukturgarbe* von $\operatorname{Spec} R$.

(c) $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *affines Schema*.

Proposition 1.2.12
Sei $(X = \operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_X)$ ein affines Schema. Dann gilt:

(a) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$

(b) Für jedes $f \in R$ ist $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong R_f$

Beweis (a) Definiere $\psi\colon \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to R_{\mathfrak{p}}$ durch $[(U,s)]_\sim \mapsto s(\mathfrak{p})$.

ψ ist wohldefinierter Ringhomomorphismus

ψ ist surjektiv
Sei $\frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{p}}$ mit $a \in R, f \in R \backslash \mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{p} \in U$ für $U = D(f)$. Für ein $\mathfrak{q} \in U$ definiere $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{q}}$.
$\Rightarrow \psi([(U,s)]_\sim) = \frac{a}{f}$, wobei $[(U,s)]_\sim \in \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$.

ψ ist injektiv
Sei $[(U,s)]_\sim \in \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ mit $\psi([(U,s)]_\sim) = 0$, also $s(\mathfrak{p}) = 0$ in $R_{\mathfrak{p}}$. Ohne Einschränkung gilt $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$ für alle $\mathfrak{q} \in U$ und geeignete $a \in R, f \in R \setminus \bigcup_{\mathfrak{q}\in U} \mathfrak{q}$.
$s(\mathfrak{p}) = 0$ in $R_{\mathfrak{p}}$ bedeutet, dass es ein $h \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $ha = 0$ gibt. $U' = U \cap D(h)$ ist eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ mit $h \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in U'$. Also ist $\frac{a}{f} = 0$ in $R_{\mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in U'$.
$\Rightarrow (U,s) \sim (U',s) \sim 0$

(b) Definiere $\varphi\colon R_f \to \mathcal{O}_X(D(f))$ durch $\frac{a}{f^n} \mapsto (\mathfrak{p} \mapsto \frac{a}{f^n})$.

φ ist wohldefinierter Ringhomomorphismus

φ ist injektiv
Sei $\varphi\left(\frac{a}{f^n}\right) = 0$. Dann ist für jedes $\mathfrak{p} \in D(f)$ offenbar $\frac{a}{f^n} = 0$ in $R_{\mathfrak{p}}$. Also gibt es $h_{\mathfrak{p}} \in R \setminus \mathfrak{p}$, so dass $h_{\mathfrak{p}} a = 0$. Sei nun $\mathfrak{a} = \{r \in R \mid r \cdot a = 0\}$ der *Annihilator* von a. $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal und $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in D(f)$, da alle $h_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{a}$. Somit ist $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \varnothing$, also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$. Dann ist aber $f \in I(V(f)) \subseteq I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n \in \mathfrak{a}$, also ist $\frac{a}{f^n} = 0$ in R_f.

φ ist surjektiv
Sei $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Für jedes $\mathfrak{p} \in D(f)$ gibt es eine Umgebung $U_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{p}$ und $a, h \in R$, so dass für alle $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$ gilt: $h \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = a/h$.

$D(f)$ ist quasi-kompakt und die $U_{\mathfrak{p}}$ überdecken $D(f)$, also muss es endlich viele $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ geben, so dass $U_i = U_{\mathfrak{p}_i}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Überdeckung von $D(f)$ ist. Seien $a_1, \dots, a_n, h_1, \dots, h_n \in R$, so dass für alle $\mathfrak{q} \in U_i$ gilt: $h_i \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = a_i/h_i$. Ohne Einschränkung kann man $U_i = D(h_i)$ annehmen und erhält

$$V(f) \supseteq \operatorname{Spec} R \setminus \bigcup_{i=1}^n D(h_i) = \bigcap_{i=1}^n V(h_i)$$

Insbesondere gilt dann

$$f \in I\left(V(f)\right) \subseteq I\left(\bigcap_{i=1}^{n} V(h_i)\right) = I(V(h_1,\ldots,h_n)) = \sqrt{(h_1,\ldots,h_n)}$$

Somit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $b_i \in R$, so dass $f^n = \sum_{i=1}^n b_i h_i$. Wählt man nun $a = \sum_{i=1}^n b_i a_i$, dann gilt:

$$a_j f^m = \sum_{i=1}^{n} b_i a_j h_i \overset{\text{Einschub}}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i a_i h_j = a h_j$$

und somit $a_j/h_j = a/f^m \Longrightarrow \varphi\left(a/f^m\right) = s$

Einschub

Ohne Einschränkung gilt $a_i h_j = a_j h_i$ in R
Auf $U_i \cap U_j$ gilt $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$, also gibt es ein $y_{i,j} \in R$, so dass $y_{i,j} \notin \mathfrak{q}$ für jedes $\mathfrak{q} \in U_i \cup U_j$.

$$y_{i,j} a_i h_j = y_{i,j} a_j h_i$$

Wählt man nun

$$a_i' = a_i \prod_j y_{i,j} \text{ und } h_i' = h_i \prod_j y_{i,j}$$

dann ist offenbar $a_i'/h_i' = a_i/h_i$ und

$$a_i' h_j' = y_{i,j} a_i h_j \prod_{k \neq j} y_{i,k} \prod_k y_{j,k} = y_{i,j} a_j h_i \prod_{k \neq j} y_{i,k} \prod_k y_{j,k} = a_j' h_i'$$

□

Beispiele 1.2.13
Sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Spec} R = \{(0), \mathfrak{m}\}$

(b) offene Mengen sind: $\varnothing, \operatorname{Spec} R, \{(0)\}$

(c) $\mathcal{O}_X\left(\{(0)\}\right) = R_{(0)} = Quot(R) =: K$

(d) $\{(0)\} = D(f)$ für $0 \neq f \notin \mathfrak{m}$

(e) $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\left(\operatorname{Spec} R\right) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, \mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} = R$

(f) $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\left(\{(0)\}\right) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,(0)} = K$

§3 Die Kategorie der Schemata

Definition 1.3.1

(a) Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ mit einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X.

(b) Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal geringt*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für jedes $x \in X$ ein lokaler Ring ist.

Beispiele 1.3.2
Für $X = \operatorname{Spec} R$ und $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$ die Strukturgarbe aus 1.2.11 ist $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ lokal geringter Raum.

Definition 1.3.3

(a) Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar $\left(f, f^\sharp\right)$, wobei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ein Homomorphismus von Garben auf X ist.

(b) Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal geringte Räume, so ist ein Morphismus $\left(f, f^\sharp\right) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von lokal geringten Räumen, wenn für jedes $x \in X$ gilt: Die induzierte Abbildung $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ist ein lokaler Homomorphismus (das heißt $f_x^\sharp\left(\mathfrak{m}_{f(x)}\right) \subseteq \mathfrak{m}_x$).

Beispiele 1.3.4
Sei R ein lokaler nullteilerfreier Ring, $K = Quot(R)$ und $i : R \hookrightarrow K$ sei kein lokaler Homomorphismus. Aber i induziert einen Morphismus lokal geringter Räume zwischen $X = \operatorname{Spec} K$ und $Y = \operatorname{Spec} R$ durch $f : X \to Y, (0) \mapsto (0)$ und $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ gegeben durch i. Es gilt für alle offenen $U \neq \varnothing$: $f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}\left(f^{-1}(U)\right) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}((0)) = K$ und $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U) = R'$ für $R \subseteq R' \subseteq K$

Proposition 1.3.5
Die Kategorie der affinen Schemata ist äquivalent zur Kategorie der Ringe.

Beweis Für Objekte ist dies klar, denn $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) = R$.
Ist $\left(f, f^\sharp\right) : (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) \to (\operatorname{Spec} R', \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R'})$ ein Morphismus affiner Schemata, so ist $f^\sharp : R' = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R'}(\operatorname{Spec} R') \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R') = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\left(f^{-1}(\operatorname{Spec} R)\right) = R$ ein Ringhomomorphismus $R' \to R$.
Sei umgekehrt $\alpha : R' \to R$ ein Ringhomomorphismus. Dann wird durch α induziert:

- $f_\alpha : \operatorname{Spec} R' \to R, \mathfrak{p} \mapsto \alpha^{-1}(\mathfrak{p})$ (stetig)
- $f_\alpha^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to (f_\alpha)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R'}$ induziert durch $\frac{a}{b} \mapsto \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)}$, $a, b \in R, b \notin \ldots$

Auf den Halmen induziert $f_\alpha^\sharp$ die Abbildung $\alpha' := (f_\alpha^\sharp)_{\mathfrak{p}'} : R_{f^{-1}(\mathfrak{p})} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, f_\alpha(\mathfrak{p}')} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R', \mathfrak{p}'} = R'_{\mathfrak{p}'}$
Es ist $\alpha'(\alpha'^{-1}(\mathfrak{p}')) \subseteq \mathfrak{p}'$ □

Bemerkung 1.3.6
Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ Schema und $U \subseteq X$ offen, so ist $(U, \mathcal{O}_X \restriction U)$ auch ein Schema, offenes Unterschema genannt.

Beweis Sei $(U_i)_{i \in I}$ Überdeckung von X durch affine Schemata. Dann ist $(U \cap U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U. (Achtung: i. A. ist $(U \cap U_i)$ kein affines Schema) Aber $(U \cap U_i)$ ist Vereinigung von $D(f_{ij})$ für geeignete $f_{ij} \in R_i$. Es gilt $D(f_{ij})$ ist affines Schema und $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \restriction D(f_{ij}) \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_{f_{ij}}}$ □

Bemerkung 1.3.7
Aus zwei Schemata kann man durch Verkleben längs isomorpher Unterschemata ein neues Schema erhalten. Genauer: Seien X_1, X_2 Schemata $\varnothing \neq U_i \subseteq X_i$ offene Unterschemata und $\varphi : (U_1, \mathcal{O}_{X_1} \restriction U_1) \to (U_2, \mathcal{O}_{X_2} \restriction U_2)$ ein Isomorphismus von Schemata. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation, die durch $x \sim \varphi(x)$ erzeugt wird. Dann ist $X = (U_1 \dot\cup U_2)_\sim$ topologischer Raum versehen mit der Quotiententopologie. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{O}_X(U) := \left\{(s_1, s_2) \in \mathcal{O}_X(U^1) \times \mathcal{O}_X(U^2) | s_1 \restriction U^1 \cap \varphi^{-1}(U^2) = \varphi^\sharp_{\varphi(U^1) \cap U^2}(s_2 \restriction \varphi(U^1) \cap U^2)\right\}$ wobei $U^1 = (U \cap X_1), U^2 = (U \cap X_2)$.

Beispiele 1.3.8
Sei $X_1 = X_2 = \mathbb{A}_k^1 := \operatorname{Spec} k[T]$ und $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[T] \setminus \{(T)\}$ sowie $\varphi_1 : U_1 \to U_2, \varphi_1 =$ id und $\varphi_1 : U_1 \to U_2, \varphi_2(T) = \frac{1}{T}$.
BILDER EINFÜGEN WENN DIE JEMAND MITGESCHRIEBEN HAT

Proposition 1.3.9
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und R ein Ring. Dann ist die Zuordnung $Mor(X, \operatorname{Spec} R) \to Hom(R, \mathcal{O}_X(X)), (\varphi, \varphi^\sharp) \mapsto \varphi^\sharp_{\operatorname{Spec} R}$ bijektiv.

Beweis Definiere Umkehrabbildung: Sei $\alpha : R \to \mathcal{O}_X(X)$ ein Ringhomomorphismus. Für $x \in X$ sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der Halm und $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$.Weiter sei $\alpha_x : R \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$. Setze $\varphi_\alpha(x) := \alpha_x^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. Es gilt $\varphi_\alpha : X \to \operatorname{Spec} R$ ist stetig (Übung). Der Garbenhomomorphismus $\varphi_\alpha^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to \mathcal{O}_{X,x}$ wird definiert durch $\frac{a}{b} \mapsto \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)}$. □

Definition 1.3.10
Sei S ein Schema.

(a) Ein S-Schema ist ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ zusammen mit einem Morphismus $\varphi : X \to S$.

(b) Ein Morphismus von S-Schemata (X, φ) und (Y, ψ) ist ein Schema-Morphismus $f : X \to Y$ mit $\varphi = \psi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ S & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.11
Sei k algebraisch abgeschlossener Körper. Die Zuordnung $V \to \operatorname{Spec} k[V]$ (V affine Varietät über k) induziert einen volltreuen Funktor t von der Kategorie der k-Varietäten in die Kategorie der k-Schemata.

Beweis $V \mapsto k[V]$ ist Äquivalenz von Kategorien (Algebraische Geometrie I Satz???). $k[V] \mapsto \operatorname{Spec} k[V]$ ist Äquivalenz von Kategorien. Das heißt, wie haben eine Äquivalenz von Kategorien k-Algebren $\to$ affine k-Varietäten $\to$ affine Schemata. Die Behauptung folgt durch Verkleben. □

§4 Projektive Schemata

Definition + Bemerkung 1.4.1
Sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ graduierter Ring, $S^+ := \bigoplus_{d>0} S_d$

(a) $\operatorname{Proj} S := \{\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Proj} S : \mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal }, S^+ \nsubseteq \mathfrak{p}\}$ heißt *homogenes Spektrum* von S.

(b) Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ in S sei $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Die $V(\mathfrak{a})$ bilden die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\operatorname{Proj} S$.

(c) Für homogenes $f \in S$ sei $D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S : f \in \mathfrak{p}\} = \operatorname{Proj} S \setminus V(f)$. Die $D_+(f)$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Proj} S$.

(d) Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ sei $S_{(\mathfrak{p})} := \{\frac{a}{b} \in S_\mathfrak{p} : a, b \text{ homogen vom gleichen Grad}\}$. $S_{(\mathfrak{p})}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}S_{(\mathfrak{p})} := \left\{\frac{a}{b} \in S_{(\mathfrak{p})} : a \in \mathfrak{p}\right\}$

(e) Für $U \subseteq \operatorname{Proj} S$ offen sei

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(U) = \left\{ s \colon U \to \dot{\bigcup_{\mathfrak{p} \in U}} S_\mathfrak{p} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ ist } s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})} \\ \text{und es gibt eine Umgebung } U_{(\mathfrak{p})} \text{ von } \mathfrak{p} \text{ sowie } a, b \in S \\ \text{homogen vom gleichen Grad, so dass für alle } \mathfrak{q} \in U_{(\mathfrak{p})} \colon b \notin \mathfrak{q} \\ \text{und } s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{b} \end{array} \right\}$$

(f) $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ ist lokal geringter Raum mit $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S, \mathfrak{p}} = S_{(\mathfrak{p})}$

(g)

$$(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}) \text{ ist Schema, wobei } \operatorname{Proj} S = \left\{ \dot{\bigcup_{f \in S, f \text{ homogen}}} D_+(f) \right\} \text{ und } D_+(f) \cong \operatorname{Proj} S_{(f)}.$$

Beweis Sei S graduierter Ring. $\operatorname{Proj} S = \{\mathfrak{p} \text{ homogenes Primideal}, S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}$ und
$S_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{a}{b} : a, b \text{ homogen vom gleichen Grad}, b \notin \mathfrak{p}\}$
sowie $S_{(f)} = \left\{\frac{a}{f^n} : a \text{ homogen vom Grad } n \cdot \ deg(f)\right\}$

(g) $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ ist Schema. Genauer $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} \mathfrak{p} S_{(f)}$. $\square$

Definition + Bemerkung 1.4.2

(a) Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt projektiv, wenn es einen graduierten Ring S gibt, so dass $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S})$ gilt.

(b) Ist R ein Ring, so heißt $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} R[X_0, \dots X_n]$ der n-dimensionale projektive Raum über R.

(c) Sei k ein Körper und $X = \mathbb{P}^1_k$. Dann ist $\mathcal{O}_X(X) = k$.

Beweis (c)

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} D_+(X_i), \mathcal{O}_X(X_i) = k[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots \frac{X_n}{X_i}] \Rightarrow \mathcal{O}_X(X) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(X_i) = k \quad \square$$

Bemerkung 1.4.3

Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, V/k eine projektive Varietät und $S = k[V]$ ein homogener Koordinatenring von V. Dann ist $t(V) \cong \operatorname{Proj} S$ (t wie in 1.3.11).

Beweis Für homogenes $f \in S_+$ ist $D_+(f) \cong \operatorname{Spec} S_{(f)}$. Außerdem wissen wir aus der Algebraischen Geometrie 1, dass $\mathcal{O}_V(D(f)) = S_{(f)} \Rightarrow D_+(f) = t(D(f))$. Die Behauptung folgt durch Verkleben. $\square$

Definition + Bemerkung 1.4.4

Sei X ein Schema und $x \in X$:

(a) $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ heißt Restklassenkörper von X in x.

(b) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $y = f(x)$, dann induziert f einen Körperhomomorphismus $\kappa(y) \hookrightarrow \kappa(x)$.

(c) Sei k ein Körper. Genau dann gibt es einen Morphismus $\iota : \operatorname{Spec} k \to X$ mit $\iota(0) = x$, wenn $\kappa(x)$ isomorph zu einem Teilkörper von k ist.

(d) x (beziehungsweise genauer ι) heißt k-wertiger Punkt von X.

Beweis (b) f induziert $f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ mit $f^\sharp_x(m_y) \subseteq m_x$. Die Behauptung folgt aus dem Homomorphiesatz.

(c) Sei $U = \operatorname{Spec} R$ affine Umgebung von x: ι ist äquivalent zu dem Ringhomomorphismus $\alpha : R \to k$ mit $\alpha(m_x) = (0) \Leftrightarrow \alpha$ faktorisiert über $\kappa(x)$. $\square$

§5 Faserprodukte

Sei S ein Schema und X, Y S-Schemata. Dann heißt das Produkt über X und Y in der Kategorie der S-Schemata Faserprodukt von X und Y, geschrieben $X \times_S Y$.

Bemerkung 1.5.1

Das Faserprodukt $X \times_S Y$ ist ein S-Schema zusammen mit S-Morphismen $pr_X : X \times_S Y \to X$ und $pr_Y : X \times_S Y \to Y$, so dass für jedes S-Schema Z und alle S-Schemamorphismen $f : Z \to X, g : Z \to Y$ genau ein S-Schemamorphismus $h : Z \to X \times_S Y$ existiert mit $f = pr_X \circ h, g = pr_Y \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dotted, "\exists h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & X \times_S Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\
X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Satz 1
Das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert für alle S-Schemata X, Y.

Beweis Seien zunächst X, Y und Z affin: $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ und $S = \operatorname{Spec} R$. Nach Voraussetzung sind A und B R-Algebren. Die UAE des Tensorprodukts $A \otimes_R B$ besagt:
$\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ erfüllt die UAE des Faserprodukts für jedes affine Schema Z.
Noch zu zeigen: die UAE ist auch für beliebige Z erfüllt. Nach Proposition 1.3.9 entspricht $f : Z \to X$ einem R-Algebrenhomomorphismus $\varphi_1 : A \to \mathcal{O}_Z(Z)$, ebenso gehört zu g ein $\varphi_2 : B \to \mathcal{O}_Z(Z)$. φ_1 und φ_2 induzieren einen R-Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \otimes_R B \to \mathcal{O}_Z(Z)$. Nach Proposition 1.3.9 induziert φ einen Schemamorphismus $h : Z \to \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$.
Für den allgemeinen Fall sei S_i eine affine Überdeckung von S

$$S = \bigcup S_i, \text{ mit } S_i = \operatorname{Spec} R_i$$

Seien $X_i = p_X^{-1}(S_i), Y_i = p_Y^{-1}$ auch affin überdeckt:

$$X_i = \bigcup X_{ij}, \text{ mit } X_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$$
$$Y_i = \bigcup Y_{ik}, \text{ mit } Y_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ik}$$

Nach dem affinen Fall oben existieren die Faserprodukte $X_{ij} \times_{S_i} Y_{ik}$ für alle i, j, k.

Behauptung (1)
Sei T ein Schema, V, W T-Schemata, (V_l) offene Überdeckung von V, dann gilt:

$$\text{Existiert } V_l \times_T W \text{ für jedes } l, \text{ so existiert auch } V \times_T W$$

Wende diese Behauptung an auf

$$T = S_i,\ V = X_i,\ V_l = X_{il},\ W = Y_{ik}$$

womit $X_i \times_{S_i} Y_{ik}$ für alle i, k existiert. Damit lässt sich die Behauptung auf

$$T = S_i,\ V_l = Y_{il},\ V = Y_i,\ W = X_i$$

anwenden. Dies zeigt die Existenz von $X_i \times_{S_i} Y_i$ für alle i.

Behauptung (2)
Für jedes i gilt

$$X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y$$

Daraus folgt der Satz aus Behauptung (1) mit

$$T = S,\ V = X,\ V_l = X_l,\ W = Y \qquad \square$$

Beweis (Behauptung (1)) Idee: Verklebe die $V_l \times_T W$!
Für Indizes l, m seien

$$\begin{aligned} U_{lm} &:= pr_l^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_l \times_T W \\ \text{und } U_{ml} &:= pr_m^{-1}(V_l \cap V_m) \subseteq V_m \times_T W \end{aligned}$$

Es gilt: $U_{lm} = (V_l \cap V_m) \times_T W$, weil in der Situation

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dotted, "\exists h"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
 & V_l \times_T W \arrow[d, "pr_l"'] \arrow[dr] & \\
V_l \cap V_m \arrow[r, hook] \arrow[dr] & V_l \arrow[d] & W \arrow[dl] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

gilt:

$$h(z) \subseteq pr_l^{-1}(f(z)) \subseteq pr_l^{-1}(V_l \cap V_m) = U_{lm}$$

Also ist U_{lm} Faserprodukt von $V_l \cap V_m$ und W. Genauso: U_{ml} ist Faserprodukt von $V_l \cap V_m$ und W.
Die UAE liefert einen eindeutigen Isomorphismus $U_{lm} \to U_{ml}$. Verklebe die $V_l \times_T W$ längs der U_{lm} zu einem Schema $\tilde{V}$.
Noch zu zeigen: $\tilde{V}$ erfüllt die UAE von $V \times_T W$. Seien Z ein T-Schema, $f : Z \to V$ und $g : Z \to W$ T-Morphismen. Sei $Z_l := f^{-1}(V_l)$.
Nach Voraussetzung existiert für jedes l genau ein $h_l : Z_l \to V_l \times_T W \hookrightarrow \tilde{V}$, mit ...
Die h_l bestimmen einen eindeutigen Morphismus $h : Z \to \tilde{V}$. $\square$

Beweis (Behauptung (2)) *Der Beweis war Übungsaufgabe*
Zu zeigen:
$X_i \times_{S_i} Y_i$ ist ein Faserprodukt von X_i und Y über S_i.
Sei Z ein S-Schema mit S-Morphismen $f : Z \to X_i$ und $g : Z \to Y$. Weil

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
X_i \arrow[dr, "p_i"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, gilt:

$$p_i(X_i) \subseteq S_i \Rightarrow (p \circ g)(Y) \subseteq S_i \Rightarrow \operatorname{Bild} g \subseteq Y_i$$

Damit faktorisiert das eindeutige h der UAE vom Faserprodukt $X_i \times_{S_i} Y_i$ f und g. Also ist $X_i \times_{S_i} Y_i$ Faserprodukt von X_i und Y über S. □

Bemerkung 1.5.2
Seien X, Y S-Schemata. Dann ist die Abbildung

$$F : \begin{array}{ccc} X \times_S Y & \longrightarrow & \{(x,y) \in X \times Y : p_X(x) = p_Y(y)\} \\ z & \longmapsto & (pr_X(z), pr_Y(z)) \end{array}$$

stetig und surjektiv.

Beweis Stetig: Klar.
surjektiv:
Seien $x \in X, y \in Y$ mit $p_X(x) = p_Y(y) =: s \in S$. Seien weiter $\kappa := \kappa(s), \kappa(x), \kappa(y)$ die Restklassenkörper. Dann ist $\kappa \subseteq \kappa(x), \kappa \subseteq \kappa(y)$.
Sei K/k eine Körpererweiterung mit $\kappa(x) \subseteq K, \kappa(y) \subseteq K$ und $Z := \operatorname{Spec} K$. Nach 1.4.4 gibt es einen Morphismen $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ mit $f(0) = x, g(0) = y$. f und g sind S-Morphismen. Also gibt es ein $h : Z \to X \times_S Y$ mit $pr_X(h(0)) = x$ und $pr_Y(h(0)) = y$. Daraus folgt: $F(h(0)) = (x, y)$. □

Definition + Bemerkung 1.5.3

(a) Für $y \in Y$ heißt $X_y := f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec}(\kappa(y))$ *Faser* von f über y.

(b) $pr_X : X_y \to X$ ist injektiv, das heißt

$$X_y \to \{x \in X : f(x) = y\}$$

ist bijektiv.

(c) Ist y ein abgeschlossener Punkt, so ist X_y abgeschlossen in X.

Beweis (c) Klar.

(b) Für $z_1, z_2 \in X_y$ mit $pr_X(z_1) = pr_X(z_2) =: x$ gilt $f(x) = y$.
Seien $Z := \operatorname{Spec} \kappa(x)$ und $\varphi : Z \to X$ mit $\varphi(0) = x$. Sei weiter $\psi : Z \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$ der von f induzierte Morphismus.
Nach 1.4.4 (b) gibt es Morphismen $h_i : Z \to X_y$ mit $h_i(0) = z_i$ für $i \in \{1, 2\}$.
Es ist $pr_X \circ h_i = \varphi$, woraus mit der UAE des Faserprodukts X_y folgt: $h_1 = h_2$, also $z_1 = z_2$. □

Beispiele
Sei

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1_k & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_k \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Dann ist $f^{-1}(0) = \operatorname{Spec}(k[X] \otimes_{k[X]} k) \cong \operatorname{Spec}(k[X]/(X^2))$.

Definition + Bemerkung 1.5.4
Sei $g : S' \to S$ ein Morphismus.

(a) Ist $f : X \to S$ ein S-Schema, so ist $X' := X \times_S S'$ ein S'-Schema mit $f' : X' \to S'$ und $f' = pr_{S'}$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

X' heißt das durch *Basiswechsel* g aus X hervorgegangene Schema.

(b) Basiswechsel ist ein kovarianter Funktor $\underline{S - Sch} \to \underline{S - Sch}$.

(c) Basiswechsel ist transitiv:

$$X'' = (X \times_S S') \times_{S'} S'' \cong X \times_S S''$$

Definition 1.5.5
Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *lokal noethersch*, wenn es eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ gibt, sodass jedes R_i noetherscher Ring ist.
$(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *noethersch*, wenn es eine endliche solche Überdeckung gibt.

Proposition 1.5.6

(a) Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.

(b) Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann lokal noethersch, wenn für jedes offene affine $U = \operatorname{Spec} R$ gilt: R ist noethersch.

Beweis (a) "$\Leftarrow$" Klar.
"$\Rightarrow$" folgt aus (b) "$\Rightarrow$".

(b) "$\Leftarrow$" Klar.
"$\Rightarrow$":
Sei $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ offen und $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von X mit $U_i = \operatorname{Spec} R_i$, R_i noethersch. Dann folgt: $U_i \cap U$ ist offen in U_i, also $U_i \cap U = \bigcup D(f_{ij})$ für geeignete $f_{ij} \in R_i$.
Nach Proposition 1.2.12 (b) ist $D(f_{ij}) = \operatorname{Spec} R_{ij}$ mit $R_{ij} = (R_i)_{f_{ij}}$. Damit sind die R_{ij} auch noethersch. $D(f_{ij})$ ist auch offen in U, wird also überdeckt von $D(g_{ijk})$ mit $g_{ijk} \in R$. $D(f_{ij}) \hookrightarrow U$ induziert, vermöge Einschränkungen, einen Schemamorphismus $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R_{ij}$ und damit auch einen Ringhomomorphismus $\varphi_{ij} : R \to R_{ij}$. Es gilt $R_{g_{ijk}} \cong (R_{ij})_{\varphi(g_{ijk})}$, weil die Einschränkung hier die Identität ist. $(R_{ij})_{\varphi(g_{ijk})}$ ist noethersch, also auch $R_{g_{ijk}}$.
Dies liefert eine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} D(h_i)$, wobei für jedes $i \in \mathcal{I}$ gilt: R_{h_i} ist noethersch. Wegen $\bigcup D(h_i) = U$, gilt $\sum_{i \in \mathcal{I}} (h_i) = R$ und damit

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i, \text{ mit } a_i \in R$$

Sei nun $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R. Für $i = 1, \ldots, n$ wird

$$\varphi_i(I_1) \cdot R_{h_i} \subseteq \varphi_i(I_2) \cdot R_{h_i} \subseteq \ldots$$

stationär (wobei $\varphi_i : R \to R_{h_i}$ der natürliche Homomorphismus $a \mapsto \frac{a}{1}$ sei). Es genügt also zu zeigen:

Behauptung
Für jedes Ideal I in R gilt:

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{h_i})$$

Beweis (der Behauptung) "$\subseteq$" Klar.

"$\supseteq$" Sei $b \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I) \cdot R_{h_i})$, dann gibt es für jedes i ein $b_i \in I$ und $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{b}{1} = \frac{b_i}{h_i^{k_i}} \text{ in } R_{h_i}$$

Also existiert $m_i \geq 0$ mit $h_i^{m_i}(bh_i^{k_i} - b_i) = 0$ in R

$$\Rightarrow h_i^{k_i+m_i} b = h_i^{m_i} b_i \in I$$

Die $h_i^{k_i+m_i}$ erzeugen R, denn:
Sei $\mathfrak{J} = (h_1^{k_1+m_1}, \ldots, h_n^{k_n+m_n})$, dann ist nach Definition der h_i $\sqrt{\mathfrak{J}} = R$, also $\mathfrak{J} = R$.
$\Rightarrow$ es existieren a_i, sodass $\sum a_i h_i^{k_i+m_i} = 1$.
$\Rightarrow b \in I$. $\square$

2 Morphismen von Schemata

§6 Einbettungen

Definition 2.6.1
Sei $i : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von Schemata.

(a) i heißt *offene Einbettung*, wenn i ein Isomorphismus auf ein offenes Unterschema von X ist.

(b) i heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn i ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge $Z := i(Y)$ von X ist und $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ surjektiv ist. $(Z, i_*\mathcal{O})$ heißt dann *abgeschlossenes Unterschema* von X.

Beispiele 2.6.2

(a) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die $V(I)$, ($I \subseteq R$ Ideal). $V(I)$ wird zum abgeschlossenen Unterschema durch die Schemastruktur als $\operatorname{Spec}(R/I)$. Die abgeschlossene Einbettung $\operatorname{Spec}(R/I) \to \operatorname{Spec} R$ wird induziert von der Restklassenabbildung $R \to R/I$.
Warnung: $V(I) = V(I^2)$, aber $R/I = R/I^2$ gilt im Allgemeinen **nicht**!

(b) Seien k ein Körper, $R = k[X, Y]$ und $I = (X^2, XY) \subsetneq (X)$. Es gilt $V(I) = V(X)$ (y-Achse).
In $V(I)$ ist außerhalb von $0 = (0,0) = V(X, Y)$, also auf

$$D(Y) = \operatorname{Spec}\left(k[X,Y]/I\right)_Y = \operatorname{Spec}(k[Y]_Y)$$

das abgeschlossene Unterschema $V(I)$, also $\operatorname{Spec}(R/I)$, isomorph zu $\operatorname{Spec}(R/(X))$. ?
Aber: $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I),0}$ enthält ein nilpotentes Element, nämlich X.

Erinnerung / Definition 2.6.3
(Übungblatt 3, Aufgabe 1)
Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt reduziert, wenn für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist.
Äquivalent: Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein reduzierter Ring.

Proposition 2.6.4
Zu jedem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ gibt es ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema X_{red} von X, das folgende UAE erfüllt:
Ist $f : Y \to X$ ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y, so gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f} : Y \to X_{red}$ mit

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & X \\ & X_{red} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$f = i \circ \tilde{f}$. Dabei ist $X = X_{red}$ (gleich als topologische Räume).

Beweis (1) Sei $X = \operatorname{Spec} R$ affin. Setze $X_{red} := \operatorname{Spec}(R/\sqrt{(0)})$, dann ist X_{red} ein reduziertes abgeschlossenes Unterschema.

UAE: Sei Y reduziert, $f : Y \to X$ ein Morphismus mit zugehörigem Ringhomomorphismus $\alpha_f : R \to \mathcal{O}_Y(Y)$.
Zu zeigen: $\sqrt{(0)} \subseteq \mathrm{Kern}(\alpha_f)$
Sei also $a \in \sqrt{(0)}$, also $a^n = 0$ für $n \geq 1$. Daraus folgt: $(\alpha_f(a))^n = 0$. Und weil Y reduziert ist: $\alpha_f(a) = 0$.

(2) Allgemeiner Fall:
Benutze:

$$\left({}^{R}\!/\!_{\sqrt{(0)}}\right)_f \cong {}^{R_f}\!/\!_{\sqrt{(0)}} \qquad \square$$

Folgerung 2.6.5
Zu jedem abgeschlossenen Unterschema Z von X gibt es ein eindeutig bestimmtes reduziertes Unterschema Z_{red} (die "reduzierte induzierte Struktur").

§7 Separierte Morphismen

Definition 2.7.1

(a) Ein Morphismus $f : X \to S$ von Schemata heißt *separiert*, wenn der "Diagonalmorphismus" $\Delta_f : X \to X \times_S X$ eine abgeschlossene Einbettung ist.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "\Delta_f"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 & X \times_S X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

(b) X heißt *separiert*, wenn $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ separiert ist.

Beispiele
Sei X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt. X ist nicht separiert (über k):
Seien also $S = \mathrm{Spec}\,k, U = \mathbb{A}_k^1 \backslash \{(0,0)\} = \mathrm{Spec}(k[X]_X)$ und X die Verklebung von $\mathbb{A}_k^1$ mit sich selbst längs U. Es ist

$$\begin{aligned} &U \times_S U = \mathbb{A}_k^2 - \text{“Achsenkreuz”} \\ &\Delta = \Delta_f(X) = \{(u,u) : u \in U\} \cup \{(0_1, 0_1), (0_2, 0_2)\} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \{(0_1, 0_2), (0_2, 0_1)\}$$

denn: jede Umgebung von $(0_1, 0_2)$ enthält Punkte von Δ!

Bemerkung 2.7.2
Jeder Morphismus von affinen Schemata ist separiert.

Beweis Sei $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, f : X \to Y, \alpha : A \to B$, α der Ringhomomorphismus zu f. Dann ist $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$. Δ wird induziert von

$$\mu : \begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \longmapsto & b_1 \cdot b_2 \end{array}$$

μ ist surjektiv, also ist Δ abgeschlossen. (Das ist so, weil ein surjektiver Ringhomomorphismus Primideale auf Primideale abbildet und deswegen alle Primideale, die

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

enthalten, schon Urbilder von Primidealen waren.) □

Bemerkung 2.7.3
Seien $f, g : X \to Y$ Morphismen von S-Schemata. Ist Y über S separiert, so ist

$$E(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in X.

Beweis Sei $h : X \to Y \times_S Y$ der von f und g induzierte Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & Y \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Y \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Dann ist $E(f, g) = h^{-1}(\Delta)$, $(\Delta = \Delta_p(Y))$. Also ist $E(f, g)$ abgeschlossen. □

Proposition 2.7.4
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, R ein diskreter Bewertungsring, $K = \operatorname{Quot}(R)$, $T = \operatorname{Spec} R$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(T, X) \longrightarrow \{(x_0, x_1, i) : x_0, x_1 \in X \text{ mit } x_0 \in \overline{\{x_1\}}, i : \kappa(x_1) \to K \text{ Körperhomomorphismus} \\ \text{mit } i(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \subseteq R \text{ und } i(m_{Z,x_0}) = m_R \cap i(\mathcal{O}_{Z,x_0})\}, \end{aligned}$$

wobei $Z = \overline{\{x_1\}}_{red}$ sei. Dann ist $\mathcal{O}_{Z,x_1} = \kappa(x_1) = \mathcal{O}_{X,x_1}/m_{x_1}$.

Beweis Für $f : T \to X$ sei $x_0 := f(m_R), x_1 = f(0), i = f^\sharp_{x_1}$. Da T reduziert ist, "ist" f ein Morphismus nach Z:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \\
 & Z \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$f^\sharp$ induziert also einen Morphismus

$$\mathcal{O}_{Z,x_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{T,m} = R$$

mit $f^\sharp(m_{Z,x_0}) \subseteq m$.
Umgekehrt induziert jedes $i : \mathcal{O}_{Z,x_0} \hookrightarrow R$ einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} R = T \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x_0}) \to Z \to X \qquad \square$$

Satz 2
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus noetherscher Schemata. f ist genau dann separiert, wenn es zu jedem "Bewertungsdiagramm"

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

($T = \operatorname{Spec} R$, R diskreter Bewertungsring, $U = \operatorname{Spec} K$, $K = \operatorname{Quot} R$)
höchstens einen Morphismus $h : T \to X$ gibt, der das Diagramm kommutativ macht.

Beispiele
Seien X die affine Gerade mit doppeltem Nullpunkt, $Y = \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k, $R = k[X]_{(X)}$, $K = k(X)$. Sei weiter $X' = \operatorname{Spec} k[X]$, dann existiert ein Morphismus, der das Bewertungsdiagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} K & k[X] \arrow[l] \arrow[dl, dotted, "h^\sharp"'] \\ k[X]_{(X)} \arrow[u] & k \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Also gibt es für beide offenen Teile von X, die gleich $\mathbb{A}^1_k$ sind, je eine Fortsetzung.

Beweis "$\Rightarrow$" Sei ein Bewertungsdiagramm (mit den üblichen Bezeichnungen) gegeben. Zwei $h_1, h_2 : T \to X$ Fortsetzungen von $h_0 : U \to X$, induzieren einen Morphismus h:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, bend right, "h_1"'] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\ & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Es ist $h_1(0) = h_0(0) = h_2(0)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow h(0) \in \Delta = \Delta_f(X) \Rightarrow h(m) \in \overline{\{h(0)\}} \subseteq \Delta \\ &\Rightarrow h_1(m) = h_2(m) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Nach Übungsblatt 6, Aufgabe 1 genügt es zu zeigen: Δ ist abgeschlossen in $X \times_Y X$.

Behauptung (1)
Ist für jedes $x_1 \in \Delta$ auch $\overline{\{x_1\}} \subseteq \Delta$, so ist Δ abgeschlossen.

Seien also $x_1 \in \Delta, x_0 \in \overline{\{x_1\}}, Z := \overline{\{x_1\}}_{red}, \mathcal{O} := \mathcal{O}_{Z,x_0}, K = \mathcal{O}_{Z,y_1} = \kappa(x_1)$

Behauptung (2)
Es gibt einen diskreten Bewertungsring $R \subseteq K$, der $\mathcal{O}$ dominiert, das heißt $\mathcal{O} \subseteq R$ und $m_{\mathcal{O}} = m_R \cap \mathcal{O}$.

Dann gibt es nach Proposition 2.7.4 einen Morphismus $h : T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$ mit $h(0) = x_1$ und $h(m) = x_0$. Für $h_i = pr_i \circ h$, $i = 1, 2$, ist $f \circ h_1 = f \circ h_2$, $h_i : T \to X$.
Da $x_1 \in \Delta$, ist $h_1(0) = h_2(0)$. Mit $h_0 := h|U$ folgt: $h_1 = h_2 \Rightarrow h(m) \in \Delta$. □

Beweis (2) $m = m_{\mathcal{O}}$ ist endlich erzeugt, etwa $m = (x_1, \ldots, x_n)$. Sei $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_n}{X_1}]$ und $I = X_1 \cdot \mathcal{O}'$. (Œ $I \neq \mathcal{O}'$)
Krullscherr Hauptidealsatz: es gibt ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}'$ der Höhe 1 mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ (Eisenbud Theorem 10.1)
$\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ ist ein noetherscher lokaler Ring der Dimension 1. Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$ in K.
$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist normal, $\dim \tilde{\mathcal{O}} = 1$, Œ $\tilde{\mathcal{O}}$ lokal, $\tilde{\mathcal{O}}$ ist noethersch (Satz von Krull-Akizuki, Eisenbud Theorem 11.13)
$\Rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ ist diskreter Bewertungsring. Es gilt:
$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \subseteq m_{\mathcal{O}}$: Klar.
$m_{\tilde{\mathcal{O}}} \cap \mathcal{O} \supseteq m_{\mathcal{O}}$, weil $X_1, \ldots, X_n \in I$. □

Behauptung 1 ist (für $f = \Delta$) ein Spezialfall von

Proposition 2.7.5
Sei $f : W \to X$ Morphismus noetherscher Schemata. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(W) \text{ ist abgeschlossen} \\ \Leftrightarrow & f(W) \text{ ist abgeschlossen unter Spezialisierung: Für } x_1 \in f(W) \text{ und } x_0 \in \overline{\{x_1\}} \text{ ist } x_0 \in f(W). \end{aligned}$$

Beweis "$\Rightarrow$" Klar.
"$\Leftarrow$" Sei $Y = \overline{f(W)}$ (als abgeschlossenes Unterschema mit reduzierter Struktur)
Sei $y \in Y$; zu zeigen: $y \in f(W)$.
Œ $Y = \operatorname{Spec} A$ affin, sei $B = \mathcal{O}_W(W)$. f wird also induziert von $\alpha : A \to B$ und α ist injektiv, weil f dominant ist (AG I, Proposition 6.8 (b)). Sei $y' \subseteq y$ ein minimales Primideal, dann gilt $y \in \overline{\{y'\}}$. Also genügt es zu zeigen: $y' \in f(W)$ (das ist die Voraussetzung)
Es gilt $f^{-1}(y') = \operatorname{Spec}(\underbrace{B \otimes_A \kappa(y')}_{=:R})$. Zu zeigen: $R \neq \{0\}$
Es ist $\kappa(y') = A_{y'}/y' A_{y'}$ und $A_{y'}$ ist ein Körper, weil A reduziert ist. ? Damit gilt: $R = B \otimes_A A_{y'}$.
Weiter gilt: $A \subseteq B \Rightarrow A \otimes_A A_{y'} \subseteq B \otimes_A A_{y'} = R$. Und $A_{y'}$ ist ein flacher A-Modul, weil er eine Lokalisierung ist. □

Beispiele
$A = k[X,Y]/(X \cdot Y)$, $y' = (X) \Rightarrow A_{y'} = k(Y)$.

Folgerung 2.7.6
Für noethersche Schemata gilt:

(a) Affine und abgeschlossene Einbettungen sind separiert.

(b) Die Komposition separierter Morphismen ist separiert.
(c) "separiert" ist stabil unter Basiswechsel.
(d) $g \circ f$ separiert $\Rightarrow$ f separiert.
(e) "separiert" ist lokal bezüglich der Basis, das heißt:
$f : X \to Y$ separiert $\Leftrightarrow$ es existiert eine offene Überdeckung (U_i) von Y, sodass

$$f|f^{-1}(U_i) : f^{-1}(U_i) \to U_i \text{ separiert}$$

Beweis Übung! □

§8 Eigentliche Morphismen

Definition 2.8.1
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

(a) f heißt *lokal von endlichem Typ*, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$, mit $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, von Y gibt und für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine offene Überdeckung $(U_{ij})_{j \in \mathcal{J}_i}$, mit $U_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$, von $f^{-1}(U_i)$ existiert, sodass für alle i, j B_{ij} vermöge $f^\sharp$ zu einer endlich erzeugten A_i-Algebra wird.
(b) f heißt *von endlichem Typ*, wenn in (a) alle J_i endlich gewählt werden können.
(c) f heißt *endlich*, wenn in (a) jedes J_i einelementig gewählt werden kann (also $f^{-1}(U_i) =: \operatorname{Spec} B_i$) und B_i ein endlich erzeugter A_i-*Modul* ist.

Bemerkung 2.8.2
In Definition 2.8.1 kann "es gibt eine offene affine Überdeckung" ersetzt werden durch "für jedes offene affine $U \subseteq Y$ gilt".

Beweis (a) Übungsblatt 5, Aufgabe 2, (b) und (c) analog. □

Bemerkung 2.8.3
Ist $f : X \to Y$ endlich, so ist $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ eine endliche Menge.

Beweis Sei Œ $Y = \operatorname{Spec} A$ affin. Dann ist auch $X = \operatorname{Spec} B$ affin. Es ist $f^{-1}(y) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$. $B \otimes_A \kappa(y)$ ist eine $\kappa(y)$-Algebra und, da B ein endlich erzeugter A-Modul ist, ist $B \otimes_A \kappa(y)$ ein endlich dimensionaler $\kappa(y)$-Vektorraum. Es ist $\dim(B \otimes_A \kappa(y)) = 0$ (?), also $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ endlich. □

Definition 2.8.4
Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn er von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist, das heißt für jeden Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ist f' abgeschlossen.

Beispiele
$f : \mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ ist abgeschlossen. Basiswechsel:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^2_k \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \mathbb{A}^1_k \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

f' ist nicht abgeschlossen, denn:
$V = V(XY - 1)$ ist abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}_k^2$, aber $f'(V) = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ ist nicht abgeschlossen.

Satz 3
Seien X, Y noethersche Schemata, $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. f ist genau dann eigentlich, wenn es zu jedem Bewertungsdidagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

genau eine Fortsetzung h gibt.

3 Kohomologie von Garben

§9 $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition 3.9.1
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. $\mathcal{F}$ heißt ***$\mathcal{O}_X$-Modulgarbe***, wenn gilt:

(i) Für jedes offene $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul

(ii) Für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus, wobei $\mathcal{F}(U')$ durch den Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$ zum $\mathcal{O}_X(U)$-Modul wird.

Bemerkung 3.9.2
Die $\mathcal{O}_X$-Modulgarben bilden mit den $\mathcal{O}_X$-linearen Abbildungen eine Kategorie $\underline{\mathcal{O}_X - Mod}$.

Beispiele
Sei X eine nichtsinguläre Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ein Divisor auf X.
Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D)(U) :=& \{f \in k(X) : \operatorname{div} f|U + D|U \geq 0\} \\ =& \{f \in k(X) : \forall P \in U : \operatorname{ord}_P(f) + n_P \geq 0\} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(D)$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, denn $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$.

Definition + Bemerkung 3.9.3
Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

(a) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ sei die zu $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ assoziierte Garbe.

(b) Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sind $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

Definition + Bemerkung 3.9.4
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von lokalgeringten Räumen.

(a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ist $f_*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y.

(b) Für jede $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ ist $f^{-1}\mathcal{G}$ eine $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe und

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

Beweis (a) Für offenes $U \subseteq Y$ ist $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ ein $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-Modul. $f_U^\sharp$ ist ein Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. Dadurch wird $f_*\mathcal{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}_Y(U)$-Modul.

(b) Den Garbenhomomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ erhält man aus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$

$$f^{-1}(f^\sharp) : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

den hinteren Morphismus liefert 1.1.16 (d). □

§10 Quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Definition + Bemerkung 3.10.1
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema, M ein R-Modul. Für offenes $U \subseteq X$ sei

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(U) := \{s : U \to \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p} :\ & \text{für jedes } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es eine Umgebung } U_\mathfrak{p} \\ & \text{und Elemente } m_\mathfrak{p} \in M,\ f_\mathfrak{p} \in R - \mathfrak{q}, \text{ sodass} \\ & \text{für alle } \mathfrak{q} \in U_\mathfrak{p} \text{ gilt: } s(\mathfrak{q}) = \frac{m_\mathfrak{p}}{f_\mathfrak{p}} \in M_\mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

wobei $M_\mathfrak{p} = M \otimes_R R_\mathfrak{p}$ ist.

Proposition 3.10.2
Seien $X = \operatorname{Spec} R, M, \widetilde{M}$ wie in 10.1.

(a) Für jedes $\mathfrak{p} \in X$ ist $\widetilde{M}_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}$.

(b) Für jedes $f \in R$ ist $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ (insbesondere $\widetilde{M}(X) \cong M$).

Beweis Wie für $\mathcal{O}_X$. □

Bemerkung 3.10.3
$M \mapsto \widetilde{M}$ ist ein exakter, volltreuer Funktor $\underline{R - Mod} \to \underline{\mathcal{O}_X - Mod}$, denn:
Lokalisieren ist exakt, da $R_\mathfrak{p}$ flacher R-Modul ist (was Tensorieren exakt macht).

Bemerkung 3.10.4

(a) $\widetilde{M \otimes_R N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$

(b) $\widetilde{\bigotimes M_i} \cong \bigotimes \widetilde{M_i}$

Beweis (a) $(M \otimes_R N) \otimes_R R_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_R R_\mathfrak{p}) \otimes_{R_\mathfrak{p}} (N \otimes_R R_\mathfrak{p})$ □

Bemerkung 3.10.5
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus, $X = \operatorname{Spec} R, Y = \operatorname{Spec} R', \alpha : R' \to R$ der zugehörige Ringhomomorphismus.

(a) Für jeden R-Modul M ist $f_*\widetilde{M} \cong \widetilde{{}_\alpha M}$ (${}_\alpha M$ sei M aufgefasst als R'-Modul über α).

(b) Für jeden R'-Modul N ist $f^*\widetilde{N} = \widetilde{N \otimes_{R'} R}$

Beweis (a)

$$\begin{aligned} f_*\widetilde{M}(U) =& \widetilde{M}(f^{-1}(U)) \text{ als } \mathcal{O}_Y(U)\text{-Modul} \\ =& {}_\alpha\widetilde{M}(U) \end{aligned}$$

(b) $f^*\widetilde{N}(X) = (f^{-1}\widetilde{N} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)(X) = N \otimes_{R'} R$ □

Definition 3.10.6
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

(a) $\mathcal{F}$ heißt ***quasi-kohärent***, wenn es eine offene affine Überdeckung $(U_i = \operatorname{Spec} R_i)_{i \in I}$ von X und R_i-Moduln M_i gibt, sodass

$$\mathcal{F}|U_i \cong \widetilde{M_i}$$

für alle $i \in I$ gilt.

(b) $\mathcal{F}$ heißt ***kohärent***, wenn in (a) jedes M_i endlich erzeugbarer R_i-Modul ist.

Proposition 3.10.7
Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem Schema X ist genau dann quasi-kohärent, wenn für jedes offene affine $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ ein R-Modul M existiert mit $\mathcal{F}|U \cong \widetilde{M}$.

Beweis 1. Schritt: Sei X Œ affin, denn:
Sei $U = \operatorname{Spec} R \subseteq X$ offen und affin, $(U_i = \operatorname{Spec} R_i)$ die gegebene Überdeckung von X. $(U \cap U_i)$ ist eine offene Überdeckung von U. Überdecke $U \cap U_i$ durch $D(f_{ij}), f_{ij} \in R_i$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}|D(f_{ij}) = (\mathcal{F}|U)|D(f_{ij}) = \widetilde{M}_i|D(f_{ij}) = \widetilde{(M_i)_{f_{ij}}}$$

2. Schritt: FEHLT NOCH $\square$

Vokabeln