1. Reelle Zahlen

Die **Reellen Zahlen** sind eine Erfindung des menschlichen Geistes, sie haben von Natur aus keine Eigenschaften. Wie Schachfiguren haben sie nur eine Bedeutung im Rahmen der Regeln. Diese Regeln heißen hier Axiome, das sind Forderungen, die wir an etwas stellen, und aus denen wir dann weitere Erkenntnisse erlangen.

Die Grundmenge der Analysis ist $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen: Diese Menge führen wir axiomatisch ein, durch die folgenden 15 Axiome.

In $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen „+“und „·“gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen.

Axiom (Körperaxiome)

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

(A2) $a(bc) = (ab)c \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

(A3) $a + b = b + a \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(A4) $ab = ba \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(A5) $\exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a \ \forall a \in \mathbb{R}$

(A6) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a \cdot 1 = a \ \forall a \in \mathbb{R}$

(A7) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

(A8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : aa^{-1} = 1$

(A9) $a(b + c) = ab + ac \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Dabei nennt man **A1** und **A2 Assoziativgesetze**, **A3** und **A4 Kommutativgesetze** und **A9 Distributivgesetz**,

Alle Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus **(A1)** bis **(A9)** herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

(1) **Behauptung:** Es gibt genau ein $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Existenz folgt direkt aus **(A5)**. Der Beweis der Eindeutigkeit: Es sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $a + \tilde{0} = a \ \forall a \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $0 + \tilde{0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$, also $0 = \tilde{0}$. *(Aufgabe: Beweise die Eindeutigkeit von 1, $-a$, ...)*

(2) **Behauptung:** $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann $b = a(0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = b$. Aus **(A7)** folgt dann $0 = b + (-b) = (b+b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$.

(3) **Behauptung:** Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. *Beweis zur Übung*

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R} : a - b := a + (-b)$; ist $b \neq 0 : \frac{a}{b} := ab^{-1}$.

Axiom (Anordnungsaxiome)
In $\mathbb{R}$ ist eine Relation „$\leq$" gegeben. Es sollen gelten:

(A10) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

(A11) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.

(A12) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

(A13) aus $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R}$ folgt $a + c \leq b + c$.

(A14) aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$.

Alle Regeln für Ungleichungen lassen sich aus **(A1)** bis **(A14)** herleiten. Diese Regeln seinen von nun an bekannt.

Schreibweisen: (1) $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$

(2) $a > b :\Leftrightarrow b < a$

(3) $a \geq b :\Leftrightarrow b \leq a$

Definition (Betrag)
Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$.

$|a|$ wird der **Betrag** von a genannt und entspricht dem „Abstand" von a und 0. $|a-b|$ entspricht dem „Abstand" von a und b.

Satz 1.3 (Betragssätze)

(1) $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2) $|a - b| = |b - a| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(3) $|ab| = |a| \cdot |b| \ \forall a, b, \in \mathbb{R}$

(4) $\pm a \leq |a|$

(5) $|a + b| \leq |a| + |b| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(6) $||a| - |b|| \leq |a - b| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Beweis

(5) Fall 1: $a + b \geq 0 \Leftrightarrow |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$
Fall 2: $a + b < 0 \Leftrightarrow |a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$

(6) $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$, analog $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$.■

Definition (Intervall)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

(1) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **offenes Intervall**

(2) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **abgeschlossenes Intervall**

(3) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$: **halboffenes Intervall**

(4) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

Entsprechend: $[a, b), (-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Definition (Beschränkte Menge)
Es sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt nach oben (*unten*) beschränkt genau dann, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass alle $x \in M$ kleiner gleich (*größer gleich*) γ sind. In diesem Fall heißt γ **obere Schranke** (OS) (***untere Schranke** (US)*) von M.

Ist γ eine OS (*US*) von M und gilt $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ ($\gamma \geq \tilde{\gamma}$) für jede weitere OS (*US*) $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ das **Supremum** (***Infimum***) von M und man schreibt $\gamma = \sup M$ ($\gamma = \inf M$).

Ist $\gamma = \sup M \in M$ ($\gamma = \inf M \in M$), so heißt γ das **Maximum** (***Minimum***) von M: $\gamma = \max M$ ($\gamma = \min M$).

Beispiele:

(1) aus $M = (1, 2)$ folgt: $2 = \sup M$, M hat kein Maximum

(2) aus $M = (1, 2]$ folgt: $2 = \sup M = \max M$

(3) aus $M = [3, \infty)$ folgt: M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M$

Axiom (Vollständigkeitsaxiom)
(A15) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$.

Anmerkung: $M = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$, also sind die rationalen Zahlen keine Menge, die unsere Anforderungen an die reellen Zahlen erfüllt.

Satz 1.5 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bezüglich dem Infimum)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und sei M nach unten beschränkt, dann existiert $\inf M$

Beweis
Sei $\tilde{M} := \{-x : x \in M\}$. Sei γ eine untere Schranke von M. d.h. $\gamma \leq x \ \forall x \in M \implies -x \leq -\gamma \ \forall x \in M \implies \tilde{M}$ ist nach oben beschränkt, $-\gamma$ ist eine obere Schranke von $\tilde{M}$. **(A15)** $\implies \exists s := \sup \tilde{M} \implies s \leq -\gamma$. $-x \leq s \ \forall x \in M \implies -s \leq x \ \forall x \in M \implies -s$ ist eine untere Schranke von M. Aus $s \leq -\gamma \implies \gamma \leq -s$, daher ist $-s = \inf M$. ∎

Satz 1.6 (Existenz des Supremum)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, M sei nach oben beschränkt, γ sei eine obere Schranke von M.

$$\gamma = \sup M \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$$

Beweis
„$\implies$“: Sei $\gamma = supM$ und $\varepsilon > 0 \implies \gamma - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $M \implies \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$.
„$\Leftarrow$“: **(A15)** $\implies \exists s = \sup M$. Annahme: $\gamma \neq s \implies s < \gamma \implies \varepsilon = \gamma - s > 0$. Laut Vorausetzung gilt: $\exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - s) = s$, Widerspruch zu $x \leq s$. ∎

Analog gilt: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, M sei nach unten beschränkt, γ sei eine untere Schranke von M.

$$\gamma = \inf M \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x < \gamma + \varepsilon$$

Definition (Beschränktheit von Mengen)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt **beschränkt**: $\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt $\iff \exists c > 0 : |x| \leq c \ \forall x \in M$. *Beweis als Übung*