10 Übung vom 30.06.

33. Aufgabe

a) Aus Vorlesung wissen wir:

- Wert des Spiels ist 0.
- Optimale Strategien sind für beide Spieler gleich.

$D := \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x \geq 0\}$ sei die Strategiemenge beider Spieler.

z.z.: Für $x^0 \in D$ gilt: x^0 ist optimal für $P_1 \Leftrightarrow Cx^0 \leq 0$

Beweis:

$$\begin{aligned}
x^0 \text{ ist optimal für } P_1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^0 \text{ ist optimal für } P_1 \text{ und } P_2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x^0, x^0) \text{ ist Sattelpunkt} \\
&\overset{\text{(Def.!!)}}{\Leftrightarrow} \quad y^T C x^0 \leq {x^0}^T C x^0 \leq {x^0}^T C x \text{ für } x, y \in D \\
&\Leftrightarrow \quad x^T C x^0 \leq 0,\ 0 \leq ({x^0}^T C x)^T \ \text{ für alle } x \in D \\
&\Leftrightarrow \quad x^T C x^0 \leq 0 \text{ für alle } x \in D \\
&\Leftrightarrow \quad C \cdot x^0 \leq 0
\end{aligned}$$

b)

	P_1 zeigt	1	2	3	1	2	3
	P_1 sagt	gerade	gerade	gerade	ungerade	ungerade	ungerade
P_2 zeigt	P_2 sagt						
1	gerade	0	3	0	−2	0	−4
2	gerade	−3	0	−5	0	4	0
3	gerade	0	5	0	−4	0	−6
1	ungerade	2	0	4	0	−3	0
2	ungerade	0	−4	0	3	0	5
3	ungerade	4	0	6	0	−5	0

Wir such nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $Cx \leq 0$. Dies liefert:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 3x_2 - 2x_4 - 4x_6 & \leq & 0 \\
(2) & 5x_2 - 4x_4 - 6x_6 & \leq & 0 \\
(3) & -4x_2 + 3x_4 + 5x_6 & \leq & 0 \\
(4) & -3x_1 - 5x_3 + 4x_5 & \leq & 0 \\
(5) & 2x_1 + 4x_3 - 3x_5 & \leq & 0 \\
(6) & 4x_1 + 6x_3 - 5x_5 & \leq & 0
\end{array}$$

Lösung:
„ $\frac{1}{2}((1) + (2))$ “: $4x_2 - 3x_4 - 5x_6 \leq 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} 4x_2 - 3x_4 - 5x_6 = 0$.
„ $(2) + 2 \cdot (3)$ “: $-3x_2 + 2x_4 + 4x_6 \leq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} -3x_2 + 2x_4 + 4x_6 = 0$

Gauß liefert. $(x_2, x_4, x_6) = \alpha(2, 1, 1)$ mit $\alpha \geq 0$

Analog zeigt man für (4),(5),(6)

$$(x_1, x_3, x_5) = \beta(1, 1, 2) \text{ mit } \beta \geq 0$$

Mit $\sum_{i=1}^{6} x_i = 1 = 4(\alpha + \beta)$, d.h. $\beta = \frac{1}{4} - \alpha$ und $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$.

Insgesamt: Die optimale Strategie für jeden Spieler ist von der Form:

$$x^0 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{4} - \alpha) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$$

34. Aufgabe

1) Auszahlungsmatrix modifizieren um echt positive Einträge zu erhalten.
Dies liefert:

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$(\overline{P_1})\quad \boxed{\begin{array}{ccc} f(x)=x_1+x_2+x_3 & = & \max \\ \widetilde{C}x & \leq & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ x & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(P_1)\quad \boxed{\begin{array}{ccc} \widetilde{f}(x)=-x_1-x_2-x_3 & = & \min \\ \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ z_1,z_2,z_3,x_1,x_2,x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

Das Simplex-Verfahren liefert eine Lösung von (P_1) und damit auch von $(\overline{P_1})$, nämlich:

$$x' = (\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}) \text{ mit } f(x') = \frac{1}{3}$$

Der Wert des Spiels mit Auszahlungsmatrix $\widetilde{C}$ ist damit 3. Damit ist der Wert des ursprünglichen Spiels 0.

Eine optimale Strategie für Spieler P_1 ist nach Vorlesung dann

$$x = \frac{1}{f(x')}x' = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

Das Dualprogramm liefert eine optimale Strategie für P_2, z.B.

$$y = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

35. Aufgabe

a) O.E.: i=m.

Es gelte also für $C = \begin{pmatrix} \underline{c^1} \\ \vdots \\ \underline{c^m} \end{pmatrix}$:

$$c^m \leq \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j c^j \text{ mit } \alpha_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j = 1.$$

Es sei $\widetilde{\phi}$ erwarteter Gewinn des Spiels mit Auszahlungsmatrix $\widetilde{C} = C^{(m)}$.
$\widetilde{y^0}$ sei optimale Strategie für Spiel mit Matrix $\widetilde{C}$.

Nach Vorlesung existiert optimale Strategie $\widetilde{x^0}$ für Spieler P_1 und es gilt:

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{y}, \widetilde{x^0}) \;\leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y^0}, \widetilde{x^0}) \;\leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y^0}, \widetilde{x}) \text{ für alle Strategien } \widetilde{y}, \widetilde{x}.$$

Wir wollen zeigen :$y^0 = (\widetilde{y^0}, 0)$ ist optimale Strategie des ursprünglichen Spiels.

z.z.:

$$\phi(y, \widetilde{x^0}) \overset{(**)}{\leq} \phi(y^0, \widetilde{x^0}) \overset{(*)}{\leq} \phi(y^0, x) \text{ für alle Strategien } x, y.$$

Dabei ist ϕ der erwartete Gewinn bzgl. des ursprünglichen Spiels.

Beweis:
$(*)$ gilt, da wir uns nach Konstruktion von y^0 in der Situation des modifizierten Spiels befinden.

zu $(**)$: Für alle Strategien y von P_2 gilt:

$$\begin{aligned}
\phi(y, \widetilde{x^0}) = \langle y, C\widetilde{x^0}\rangle &= \langle C^T y, \widetilde{x^0}\rangle \\
&= \langle y_1 c^1 + \ldots + y_m c^m, \widetilde{x^0}\rangle \\
&\overset{Vor.}{\leq} \langle y_1 c^1 + \ldots + y_{m-1} c^{m-1} + y_m \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i c^i, \widetilde{x^0}\rangle \\
&= \langle \underbrace{(y_1 + \alpha_1 y_m)}_{\widetilde{y_1}} c^1 + \ldots + \underbrace{(y_{m-1} + \alpha_{m-1} y_m)}_{\widetilde{y_{m-1}}} c^{m-1}, \widetilde{x^0}\rangle \\
&= \langle \widetilde{C}^T \widetilde{y}, \widetilde{x^0}\rangle \\
&= \langle \widetilde{y}, \widetilde{C}\widetilde{x^0}\rangle \\
&= \widetilde{\phi}(\widetilde{y}, \widetilde{x^0}) \\
&\leq \widetilde{\phi}(\widetilde{y^0}, \widetilde{x^0}) \\
&= \phi(y^0, \widetilde{x^0})
\end{aligned}$$

$\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{m-1})$

b) Es sei $C^{(j)}$ die Matrix, die aus C entsteht, wenn man die j-te **Spalte** streicht. Dann gilt: Ist die j-te Spalte von C **größer oder gleich** einer Konvexkombination der übrigen Spalten, so ergibt jede optimale Strategie $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ von P_1 bzgl. $C^{(j)}$ eine optimale Strategie $(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ von P_1 bzgl. C.

36. Aufgabe

	A	B	C
1	6	1	5
2	3	8	-2
3	9	5	1
4	5	7	-3

Nach Aufgabe 35(b) wird die 1.Spalte gestrichen. (Betrachte Spalte C!)

	B	C
1	1	5
2	8	-2
3	5	1
4	7	-3

Nach Aufgabe 35(a) wird die letzte Zeile gestrichen. (Betrachte Zeile 2!)

	B	C
1	1	5
2	8	-2
3	5	1

$$\text{Und wir erhalten } C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier gilt: 3.Zeile=$\frac{3}{7}$(1.Zeile)+$\frac{4}{7}$(2.Zeile) (Deshalb streichen wir die 3.Zeile!)
Wir addieren noch 3 und erhalten dann

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir nun, dass das

$$(\mathrm{LP}) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 & = & \min \\ 4x_1 + 8x_2 + z_1 & = & 1 \\ 11x_1 + x_2 + z_2 & = & 1 \\ x_1, x_2, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

eine optimale Strategie für Spieler 1 liefert.
Lösung von (LP) ist $x' = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ mit $f(x') = -\frac{1}{6}$.

Das ursprüngliche Spiel hat den Wert 3 und eine optimale Strategie für P_1 ist $x^0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Das Dualprogramm von (LP) liefert für Spieler 2 die Strategie $y^0 = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0)$