Kapitel 3

Lokale Eigenschaften

§ 15 Lokale Ringe

Definition 15.1
Sei k ein Körper, V quasiprojektive Varietät über k, $x \in V$.

a) $\mathcal{O}_{V,x} = \{[(U,f)]_\sim : U$ offene Umgebung von $x, f \in \mathcal{O}_V(U)\}$ mit

$$(u,f) \sim (U',f') :\Leftrightarrow f|_{u\cap U'} = f'|_{U\cap U'}$$

   $\mathcal{O}_{V,x}$ heißt ***lokaler Ring*** von V in x.

b) Die Elemente von $\mathcal{O}_{V,x}$ heißen ***Keime*** von regulären Funktionen. *Schreibweise*: $(U,f)_\sim =: f_x$

Beispiel
$V = \mathbb{A}^1(k), x = 0$
U offen $\Rightarrow U = \mathbb{A}^1(k) - \{x_1, \dots, x_n\}, x_i \neq 0$
$f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f = \frac{g}{h}$ auf $h(y) \neq 0$ für $y \neq x_i$ $(i = 1, \dots, n)$
$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1(k),0} = \{\frac{g}{h} : g, h \in k[X], h(0) \neq 0\} = k[X]_{(X)}$ mit der Notation (R Ring, $\mathfrak{p}$ Primideal)

$$R_\mathfrak{p} = \left\{\frac{a}{b} : a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\right\}$$

$\mathfrak{p} \cdot R$ ist das einzige maximale Ideal in $R_\mathfrak{p}$.

Bemerkung 15.2
Seien k, V, x und $\mathcal{O}_{V,x}$ wie in 15.1.

a) Die Abbildung $\varphi_x : \mathcal{O}_{V,x} \to k, f_x \mapsto f(x)$ ist surjektiver k-Algebra-Homomophismus („Einsetzungshomomorphismus“).

b) $\mathcal{O}_{V,x}$ ist lokaler Ring mit maximalem Ideal $m_x = \{f_x \in \mathcal{O}_{V,x} : f(x) = 0\} = \mathrm{Kern}(\varphi_x)$.

Beweis

a) ✓

b) $\mathrm{Kern}(\varphi_x)$ ist maximales ideal, da $\mathcal{O}_{V,x}/m_x = k$ Körper ist.

   m_x ist das einzige maximale Ideal: Sei $f_x \in \mathcal{O}_{V,x} - m_x \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in D(f)$ für ein (U,f) mit $(U,f)_\sim = f_x$

   $\Rightarrow g := \frac{1}{f} \in \mathcal{O}_V(U')$ für $U' := D(f) \cap U$

   $\Rightarrow g_x := (U', g)_\sim \in \mathcal{O}_{V,x}$

   $\Rightarrow f_x \cdot g_x = 1$ □

Bemerkung 15.3

a) Für jedes offene $U \subseteq V$ mit $x \in U$ ist

$$\psi_x^U : \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_V(U) & \to & \mathcal{O}_{V,x} \\ f & \mapsto & f_x \end{array}$$

ein k-Algebra-Homomophismus.

b) Zusammen mit dem Restriktionshomomophismus $\varrho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für $U' \subset U$ bilden die ψ_x^U ein injektives System von k-Algebra-Homomophismen. Es ist $\varinjlim\limits_{\substack{x\in U \\ U\subset V \text{ offen}}} \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V,x}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_V(U) \arrow[dl, "\alpha_U"'] \arrow[dr, "\psi_x^U"] \arrow[dd, "\varrho_{U'}^U"] & \\
A & & \mathcal{O}_{V,x} \arrow[ll, dashed, bend left=60, "\alpha"] \\
 & \mathcal{O}_V(U') \arrow[ul, "\alpha_{U'}"] \arrow[ur, "\psi_x^{U'}"'] &
\end{tikzcd}$$

c) ψ_x^U ist injektiv, falls $U \subset \bigcup\limits_{\substack{V_i \text{ irred. Komp.} \\ \text{v. } V \text{ mit } x\in V_i}} V_i$

Proposition 15.4

Seien V, x wie in Definition 15.1, $V_0 \subseteq V$ offen, affin mit $x \in V_0$. Dann ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong k[V_0]_{m_x^{v_0}}$, wobei $m_x^{v_0} = f \in k[V_0] | f(x) = 0$, insbesondere ist $\mathcal{O}_{V,x}$ von V_0 unabhängig

Beweis

Sei $\alpha : k[V_0]_{m_x^{V_0}} \to \mathcal{O}_{V,x}, \frac{f}{g} \mapsto (D(g), y \mapsto \frac{f(y)}{g(y)})_\sim$

α ist wohldefinierter k-Algebra-Homomophismus.

α ist injektiv: Sei $\alpha(\frac{f}{g}) = 0$

Dann gibt es $U \subset G(g)$ offen mit $f(y) = 0$ für alle $y \in U$.

$\Rightarrow W = V_0 - U$ ist abgeschlossen in $V_0, x \notin W$

$\Rightarrow$ Dann gibt es $h \in I(W)$ mit $h(x) \neq 0$ (weil $V(I(W)) = W$ ist)

$\Rightarrow h \notin m_y^{V_0}$ mit $h(y) \cdot f(y) = 0$ für alle $y \in V_0$

$\Rightarrow f = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{V_0}}$

$\Rightarrow \frac{f}{g} = 0$ in $k[V_0]_{m_x^{V_0}}$

α ist surjektiv: Sei $(U, f)_\sim \in \mathcal{O}_{V,x}$

Œ $U \subseteq V_0, U = D(h)$ für ein $h \in k[V_0]$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}_V(U) = \mathcal{O}_{V_0}(U) = k[V_0]_h$

$\Rightarrow (U, f)_\sim = \alpha(\frac{g}{h^r})$ $\square$

Proposition 15.5

Seien V, W quasiprojektive Varietäten, $x \in V, y \in W$. Ist $\mathcal{O}_{V,x} \cong \mathcal{O}_{W,y}$ (als k-Algebren), so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq V$ von x und $U' \subseteq W$ von y mit $U \cong U'$ (als quasiprojektive Varietäten).

Beweis
Seien $U_x \subseteq V$, beziehungsweise $U_y \subseteq W$ offene affine Umgebungen von x beziehungsweise y wie in 15.3 c), also $\psi_x^{U_x}$ und $\psi_y^{U_y}$ injektiv. Seien $f_1, \dots, f_r$ Erzeuger von $\mathcal{O}_V(U_x) = k[U_x]$ als k-Algebra. Sei weiter $\varphi : \mathcal{O}_{V,x} \to \mathcal{O}_{W,y} \cong k[U_y]_{m_x^{U_y}}$ ein Isomorphismus.

Für die Keime gilt also: $(f_i)_x = \frac{g_i}{h_i}$ mit $h_i, g_i \in k[U_y], h_i(y) \neq 0, i = 1, \dots, r$

Sei $U_y' \subseteq U_y$ offen, affin mit $\frac{g_i}{h_i} \in \mathcal{O}_W(U_y'), i = 1, \dots, r$ (also z. B. $U_y' = U_y \cap D(h_1) \cap \ldots \cap D(h_r)$)

$\Rightarrow \varphi \circ \psi_x^{U_x}$ induziert injektiven k-Algebra-Homomophismus

$$k[U_x] \to k[U_y']$$

Dieser entspricht dominantem Morphismus $f : U_y' \to U_x$. Genauso erhalten wir dominanten Morphismus $g : U_x' \to U_y$.

f und g sind zueinander inverse rationale Abbildung $U_x \overset{\dashleftarrow}{\dashrightarrow} U_y$ □

Bemerkung 15.6
Sei $\varphi : V \to W$ Morphismus von quasiprojektiven Varietäten, $x \in V$. Dann induziert φ einen k-Algebra-Homomophismus

$$\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{W,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{V,x} \text{ mit } \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x$$

Beweis
Œ V, W affin (wegen Proposition 15.4).

φ induziert $\varphi^\# : k[W] \to k[V]$ (durch $f \mapsto f \circ \varphi$).

Dabei ist $f \in m_{\phi(x)}^W, f(\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^\#(f) \in m_x^V$

$\Rightarrow \varphi^\#$ induziert

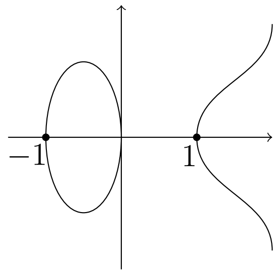
$$\varphi_x^\# : \underbrace{k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}}_{=\mathcal{O}_{W,\varphi(x)}} \to \underbrace{k[V]_{m_x^V}}_{=\mathcal{O}_{V,x}}$$

mit $\varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}) = \varphi_x^\#(m_{\varphi(x)}^W \cdot k[W]_{m_{\varphi(x)}^W}) \subseteq m_x^V \cdot k[V]_{m_x^V} = m_x$ □

§ 16 Tangentialraum

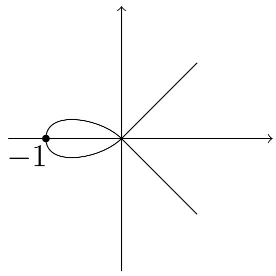
Beispiel 16.1

a) $V_1 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 + X)}_{Y^2 = X(X-1)(X+1)}, x(0,0)$



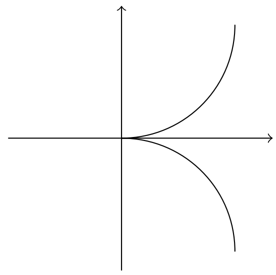
Tangente an V_1 in x „ist" die y-Achse.

b) $V_2 = \underbrace{V(Y^2 - X^3 - X^2)}_{Y^2 = X^2(X+1)}, x = (0,0)$



Es gibt zwei Tangenten in x an V_2. Jede Gerade durch x ist Grenzwert von Sekanten.

c) $V_3 = V(Y^2 - X^3), x = (0,0)$



Die x-Achse ist (Doppel-)Tangente. Jede Gerade durch x ist Limes von Sekanten.

Erinnerung 16.2 (Taylorentwicklung)

Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$.

a) $f = \sum\limits_{(\nu_1,\dots,\nu_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(\nu_1 + \dots + \nu_n)!} \frac{\partial \nu_1}{\partial X_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \nu_n}{\partial X_n} f(x)(X_1 - x_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (X_n - x_n)^{\nu_n}$

b) $f = f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial (X_i)}(x)(X - x_i)}_{\in m_x} + \underbrace{\text{höhere Terme (Grad} \geq 2)}_{\in m_x^2}$

Definition + Bemerkung 16.3

Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n], x = (x_1, \dots, x_n)$

a) $f_x^{(1)} := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i =: D_x(f)$

b) Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät mit $x \in V, I := I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$

$I_x := \langle \{ f_x^{(1)} : f \in I \} \rangle$

$T_{V,x} := V(I_x)$ heißt Tangentialraum an V in x.

c) Wird I von $f_1, \dots, f_r$ erzeugt, so wird I_x von $(f_1^{(1)})_x, \dots, (f_r^{(1)})_x$ erzeugt.

d) $T_{V,x}$ ist linearer Unterraum von k^n, genauer

$$T_{V,x} = \mathrm{Kern}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,r\\ j=1,\dots,m}}$$

(Jacobi-Matrix der Abbildung $f : k^n \to k^r, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_r(x))$)

Beweis

c) Sei $g \in I$ beliebig, schreibe $g = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$

$D_x(f+g) = D_x(f) + D_x(g)$

$D_x(f \cdot g) = f(x)D_x(g) + g(x)D_x(f)$

$\Rightarrow D_x(g) = \sum_{i=1}^{r} D_x(g_i f_i) = \sum_{i=1}^{r} [g_i(x)D_x(f_i) + \underbrace{f_i(x)}_{=0, \text{ weil } x\in V \text{ und } f_i \in I(V)} D_x(g_i)] = \sum_{i=1}^{r} g_i(x)(f_i^{(1)})_x$ □

Beispiel (Noch einmal Bsp. 16.1)

a) $V_1 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 + X, x = (0,0)$

$\Rightarrow f_x^{(1)} = 1 \cdot X + 0 \cdot Y = X$

$\Rightarrow T_{V,x} = V(X) = y$-Achse

b) $V_2 = V(f)$ mit $f = Y^2 - X^3 - X^2, x = (0,0)$

$\Rightarrow f_x^{(1)} = 0$, also $T_{V,x} = k^2$

c) Genauso

Proposition 16.4

Sei $\varphi : V \to W$ ein Morphismus affiner Varietäten, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k), W \subseteq \mathbb{A}^m(k)$. Dann induziert φ für jedes $x \in V$ eine k-lineare Abbildung

$$d_{x\varphi} : T_{V,x} \to T_{W,\varphi(x)}$$

Beweis

Sei $\varphi : V \to W$ gegeben durch $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)), \varphi_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Der zugehörige k-Algebra-Homomophismus

$$k[W] = k[Y_1, \dots, Y_m] / I(W) \to k[X_1, \dots, X_n] / I(V) = k[V]$$

wird induziert von $\varphi^\# : k[Y_1, \dots, Y_m] \to k[X_1, \dots, X_n], f \mapsto f \circ \varphi_i$.

Genauer: $\varphi^\#(Y_j) = \varphi_j$

Dabei ist $\varphi^\#(I(W)) \subseteq I(V)$, da $\varphi(V) \subseteq W$. Definiere $\alpha : k[Y_1, \dots, Y_m] \to k[X_1, \dots, X_n]$ durch $Y_j \mapsto D_x(\varphi^\#(Y_j)) = D_x(\varphi_j) = (\varphi_j^{(1)})_x$.

Behauptung: $\alpha(I_{\varphi(x)}) \subseteq I_x$

Dann induziert α einen k-Algebra-Homomophismus

$$\underbrace{k[Y_1, \dots, Y_m] / I_{\varphi(x)}}_{=k[T_{W,\varphi(x)}]} \to \underbrace{k[X_1, \dots, X_n] / I_x}_{=k[T_{V,x}]}$$

Und damit Morphismus $T_{V,x} \to T_{W,\varphi(x)}$

Beweis der Behauptung: Sei $g \in I_{\varphi(x)}$

Œ $g = h^{(1)}$ für ein $h \in I(W)$

$\alpha(g) = $ (Weihnachtsrechnung) $= D_x(g \circ \varphi) \in I_x$ □

Erinnerung
V affine Varietät über einem Körper k, $x \in V$.

$T_{V,x} = V(I_x), I_x$ erzeugt von den $f_x^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) X_i, f \in I(V)$. Die Zuordnung $(V, x) \mapsto T_{V,x}$ ist ein kovarianter Funktor

$$\underline{\text{(affine Varietäten)}/k + \text{Punkt}} \to \underline{k\text{-Vektorräume}}$$

§ 17 Derivationen und Zariski-Topologie

Definition 17.1
Sei R Ring (kommutativ mit Eins), A eine R-Algebra, M ein A-Modul. Eine R-lineare Abbildung $D : A \to M$ heißt R-***Derivation***, wenn gilt:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(G) + g \cdot D(f) \qquad \text{für alle } f, g \in A$$

Beispiel 17.2
a) Sei $A = M = R[X], D(f) := \frac{df}{dg}$

Konkret: $D(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$

D ist Derivation: Nachrechnen!!!

b) $A = M = R[X_1, \ldots, X_n], D_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$

c) $A = R[X_1, \ldots, X_n], M = R, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

M wird zum A-Modul durch $\varphi_x(f) = f(x)$ (Einsetzungshomomophismus).

$D(f) := \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$ ist R-Derivation, *denn:*

$D(fg) = (\frac{\partial}{\partial X_i}(fg))(x) = (f\frac{\partial g}{\partial X_i} + g\frac{\partial f}{\partial X_i})(x) = f(x)\frac{\partial g}{\partial X_i}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$

Bemerkung 17.3
Seien R, A, M wie in 17.1

a) Für jede R-Derivation $D : A \to M$und jedes $a \in R$ gilt $D(a) = 0$.

b) $\mathrm{Der}_R(A, M) = \{D : A \to M | D \text{ ist Derivation}\}$ ist A-Modul.

c) Ist $\varphi : M_1 \to M_2$ ein Homomophismus von A-Moduln, so ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Der}_R(A, M_1) & \to & \mathrm{Der}_R(A, M_2) \\ D & \mapsto & \varphi \circ D \end{array}$$

ein Homomophismus von A-Moduln.

d) Die Zuordnung $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ ist ein kovarianter Funktor:

$$\underline{A\text{-Moduln}} \to \underline{A\text{-Moduln}}$$

Beweis
a) $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) \Rightarrow D(1) = 0 \overset{D \text{ ist } R\text{-linear}}{\Longrightarrow} D(a) = D(a \cdot 1) = a \cdot D(1) = 0$

b) ✓

c) $(\varphi \circ D)(f \cdot g) = \varphi(f \cdot D(g) + g \cdot D(f)) \overset{\varphi A\text{-Mod-Hom}}{=} f \cdot \varphi(D(g)) + g \cdot \varphi(D(f))$ □

Bemerkung 17.4
a) Für $A = R[X]$ ist $\mathrm{Der}_R(A, A) = A \cdot D$ ($D = \frac{d}{dX}$ wie in 17.2 a))

b) Für $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ ist $\mathrm{Der}_R(A, A)$ der freie A-Modul mit Basis $\frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}$

c) Sei $A = R[X_1, \ldots, X_n], x = (x_1, \ldots, x_n), M = R$ wie in 17.2 c).

$\Rightarrow \mathrm{Der}_R(A, R)$ ist der von den $\frac{\partial}{\partial X_i}(x)$ erzeugte freie R-Modul.

Beweis
a) Sei $\delta : A \to A$ R-Derivation, $f := \delta(X)$. $\Rightarrow \delta(X^2) = X \cdot \delta(X) + X \cdot \delta(X) = 2f \cdot X$

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \delta(X^n) = n \cdot f \cdot X^{n-1} \Rightarrow \delta(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i) = f \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i X^{n-1} \Rightarrow \delta = f \cdot D$

c) folgt aus b) und 17.3 c). $\square$

Proposition 17.5
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V, \mathcal{O}_{V,x} = \{\frac{f}{g} : f, g \in k[V], g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k) \cong (m_x/m_x^2)^v$ (Isomorphismus von k-Vektorräumen).
$\mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$ und m_x/m_x^2 sind $\mathcal{O}_{V,x}$-Moduln, in beiden Moduln ist die Multiplikation mit einem Element aus m_x die Nullabbildung.
$\Rightarrow$ Beide Moduln sind Moduln über $\mathcal{O}_{V,x}/m_x = k$

Beweis
Sei $\delta \in \mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$. $\delta|_{m_x}$ ist k-linear.
Behauptung: $m_x^2 \subseteq \mathrm{Kern}(\delta)$
denn: Sei $f = g \cdot h \in m_x^2, g, h \in m_x \Rightarrow \delta(f) = \underbrace{g(x)}_{=0} \cdot \delta(h) + \underbrace{h(x)}_{=0} \cdot \delta(g) = 0$
$\Rightarrow \delta$ induziert k-lineare Abbildung $m_x/m_x^2 \to k$.
Sei umgekehrt $l \in (m_x/m_x^2)^v$. Definiere $\delta : \mathcal{O}_{V,x} \to k$ durch $\delta(f) := l(\underbrace{f - f(x)}_{\in m_x})$ (k-linear: ✓).
Seien $f, g \in \mathcal{O}_{V,x}$. Dann ist $(f - f(x))(g - g(x)) \in m_x^2$.
$\Rightarrow 0 = l((f - f(x))(g - g(x))) = l(fg - f(x)g(x) - fg(x) - gf(x) + 2f(x)g(x))$
$\Rightarrow \delta(fg) = l(fg(x) + gf(x) - 2f(x)g(x)) = f(x)l(g - g(x)) + g(x)l(f - f(x)) = f\delta(g) + g\delta(f)$ $\square$

Satz + Definition 8
Sei V affine Varietät, $x \in V$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$T_{V,x} \cong \left({}^{m_x}\big/_{m_x^2}\right)^v$$

$(m_x/m_x^2)^v$ heißt ***Zariski-Tangentialraum*** an V in x.

Beweis
i) Definiere Abbildung

$$\begin{tikzcd}
T_{V,y} \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{V,x}, k) \arrow[d, "17.5"] \\
 & \left({}^{m_x}\big/_{m_x^2}\right)^v
\end{tikzcd}$$

Jedes $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ induziert Derivation $D_y : k[X_1, \dots, X_n] \to k$ durch $f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i$ (17.4 c)). Ist $y \in T_{V,x}$ und $f \in I(V)$, so ist $D_y(f) = 0$ nach Definition, denn $D_y(f) = f_x^1(y)$.
$\Rightarrow D_y$ induziert Derivation $D_y : k[V] \to k$.
Für $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{V,x}$ sei $D_y(\frac{f}{g}) = \frac{g(x)D_y(f) - f(x)D_y(g)}{g(x)^2}$ (denn $D_y(\frac{f}{g} \cdot g) = D_y(f) \Rightarrow D_y$ induziert $D_y \in \mathrm{Der}_R(\mathcal{O}_{V,x}, k)$)
Noch zu zeigen: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \frac{-f(x)D_y(g) + g(x)D_y(f)}{g(x)^2} = 0$

denn: $\frac{f}{g} = 0$ in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \exists h \in \mathcal{O}_{V,x} \setminus m_x$ mit $h \cdot f = 0$ in $k[V] \Rightarrow 0 = D_y(hf) = \overbrace{h(x)}^{\neq 0} D_y(f) + \underbrace{f(x)}_{=0} D_y(h) \Rightarrow D_y(f) = 0 \Rightarrow D_y(\frac{f}{g}) = 0$

ii) $\beta : \begin{array}{rcl} (m_x/m_x^2) & \to & T_{V,x} \\ l & \mapsto & \left(l(\overline{X_1 - x_1}), \ldots, l(\overline{X_n - x_n})\right) \end{array}$

Zu zeigen: $\left(l(\overline{X_1 - x_1}), \ldots, l(\overline{X_n - x_n})\right) \in T_{V,x}$

Sei dazu $f \in I(V)$. *Zu zeigen:* $f_x^{(1)}\left(l(\overline{X_1 - x_1}), \ldots, l(\overline{X_n - x_n})\right) = 0$

Es ist $f_x^{(1)}\left(l(\overline{X_1 - x_1}), \ldots, l(\overline{X_n - x_n})\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(\overline{X_i - x_i}) = l\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(X_i - x_i)\right)$
$\overset{(*)}{=} l\left(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)\right) = 0$, wegen

Behauptung: $f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) \in m_x^2$

denn: Taylor-Entwicklung $\underbrace{f}_{0 \text{ in } k[V]} = \underbrace{f(x)}_{=0, \text{ weil } f \in I(V)} + f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x) + \text{Terme in } m_x^2$

iii) $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{T_{V,x}}$

$\beta(\alpha(y)) = \beta(f \mapsto \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) y_i) = \left(\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial(X_1 - x_1)}{\partial X_i}(x) y_i, \ldots, \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial(X_n - x_n)}{\partial X_i}(x) y_i\right) = (y_1, \ldots, y_n)$

iv) $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{(m_x/m_x^2)^v}$

$\alpha\big(\beta(l)\big)(f) = \alpha\big(l(X_1 - x_1), \ldots, l(X_n - x_n)\big)(f) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) l(X_i - x_i) \overset{(*)}{=} l\left(f_x^{(1)} - f_x^{(1)}(x)\right) = l(\overline{f})$ □

§ 18 Dimension einer Varietät

Definition 18.1
Sei X topologischer Raum. Dann heißt

$$\dim(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \text{ Kette } \emptyset \neq V_0 \subsetneq, \dots, \subsetneq V_n \text{ von irred. abgeschl. Teilm. v. } X\}$$

Krull Dimension von X.

Beispiel
1) $\dim(\mathbb{R}^n) = 0$ für jedes $n \geq 0$ (mit euklidischer Topologie)
2) $\dim(\mathbb{A}^1(k)) = 1$, falls k unendlich ist
3) $\dim(\mathbb{A}^n(k)) \geq n$, falls k unendlich ist für $n \geq 2$

Bemerkung 18.2
Sei X ein topologischer Raum
a) Ist $Y \subseteq X$ (mit Spurtopologie), so ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.
b) Ist $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, X_i abgeschlossen, so ist $\dim(X) = \max_{i=1}^{n}(\dim(X_i))$.

Beweis
a) Sei $\emptyset \neq V_0 \subsetneq, \dots, \subsetneq V_d$ Kette von abgeschlossenen Teilmengen von Y. Sei $\overline{V_i}$ der Abschluss von V_i in X.
   V_i ist irreduzibel nach Übung 2, Aufgabe 5.
   $\overline{V_i} \cap Y = V_i$ weil V_i abgeschlossen in Y ist. $\Rightarrow \overline{V_i} \subsetneq \overline{V}_{i+1}$
   $\Rightarrow \emptyset \neq V_0 \subseteq \dots \subseteq V_d$ ist Kette der Länge d in X.
b) „$\geq$“: gilt nach a)
   „$\leq$“: Sei $\emptyset \neq V_0 \subsetneq, \dots, \subsetneq V_d$ Kette in X. Dann ist $V_d = V_d \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\underbrace{V_d \cap X_i}_{\text{abg. in } V_d})$

   V_d irreduzibel $\Rightarrow \exists i$ mit $V_d \subseteq X_i \Rightarrow d \leq \dim(X_i)$ □

Definition 18.3
Sei R ein Ring (das heißt kommutativ mit Eins)
a) Sei $\mathfrak{p} \in R$ Primideal. Dann heißt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists \mathfrak{p}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ Kette von Primelementen in } R\}$$

   Höhe von $\mathfrak{p}$.
b) $\dim(R) := \sup\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \subset R \text{ Primideal}\}$ heißt ***Krull Dimension***.

Beispiel
1) $\dim k = 0$ für jeden Körper k
2) $\dim \mathbb{Z} = 1$
3) $\dim k[X] = 1$ für jeden Körper k
4) $\dim \mathbb{Z}[X] = 2$ (Übung?)
   $(0) \subset (2) \subset (2, X)$
5) $\dim k[X, Y] = 2$??

Proposition 18.4
Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede affine Varietäten $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$: $\dim(V) = \dim k[V]$

Beweis
Wegen V(I) irred. für I prim und I(V(I))$\overset{\text{HNS}}{=}$I sowie I(V) prim für V irred. und V(I(V))=V folgt, dass die eine Kette eine gültige andere Kette ist. □

Satz 9
Sei k ein Körper, A endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra.

a) $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$

b) Ist $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ surjektiver Homomophismus von k-Algebren, so ist

$$\dim A + \operatorname{ht}(\operatorname{Kern}(\varphi)) = n$$

c) Jede maximale (nicht verlängerbare) Kette von Primidealen in A hat die Länge A.

Erinnerung
$S|R$ ***ganze Ringerweiterung*** $\Leftrightarrow$ jedes $a \in S$ ist Nullstelle eines *normierten* Polynoms mit Koeffizienten aus R.

Satz 9.1
Sei $S|R$ ganze Ringerweiterung.

a) („Going Up") Für jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ in R gibt es eine Primidealkette $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_n$ in S mit $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 0, \dots, n$.

b) $\dim S = \dim R$

Satz 9.2 („Noether-Normalisierung")
Sei A endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist A ganze Ringerweiterung eines Polynomrings über k.

Genauer: Für jedes echte Ideal $I \subset A$ gibt es algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_d \in A$, sodass A ganz ist über $k[x_1, \dots, x_d]$ und $I \cap k[x_1, \dots, x_d] = (x_{\delta+1}, \dots, x_d)$ für ein $0 \leq \delta \leq d$.

Beispiel
$A = k[V]$ für affine Varietät V. $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung induziert $\varphi : V \to \mathbb{A}^d(k)$. φ ist surjektiv nach Satz 9.1 a).

Der Bew. wird noch nachgefügt

Satz 9.3
(„Going Down") Sei A endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra, $k[x_1, \dots, x_d] \hookrightarrow A$ Noether-Normalisierung, $\mathfrak{P}_1 \subset A$ Primideal, $\mathfrak{p}_0$ Primideal mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 := \mathfrak{P}_1 \cap B$. Dann gibt es Primideale $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$.

$$\begin{array}{ccccc} \exists\mathfrak{P}_0 & \subset & \mathfrak{P}_1 & \qquad & A \\ | & & | & & \cup \\ \mathfrak{p}_0 & \subset & \mathfrak{p}_1 & & B \end{array}$$

Folgerung 18.5

a) ist k unendlich, so ist $\dim \mathbb{A}^n(k) = n$.

b) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$:

$$\dim V + \operatorname{ht}(I(V)) = n$$

c) Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jede irreduzible affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $x \in V$:
$$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim k[V]_{m_x} = \mathrm{ht}(m_x) = \dim k[V] = \dim V$$

Definition + Bemerkung 18.6
Sei V eine quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k, $x \in V$, $V_0 \subseteq V$ offene affine Umgebung von x.

a) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x})$ heißt ***lokale Dimension*** von V in x.
b) $\dim_x(V) = \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{V_0,x}) = \mathrm{ht}(m_x^{V_0})$
c) Ist V irreduzibel, so gilt:
   i) $\dim_x V = \dim_y V$ für alle $x, y \in V$
   ii) Ist $U \neq \emptyset$ offen, affin in V, so ist $\dim U = \dim V$
d) $\dim_x V = \max\{\dim Z : Z \text{ irreduzible Komponente von } V \text{ mit } x \in Z\}$

Beweis
c) i) Seien U_x und U_y offene affine Umgebungen von x, beziehungsweise y, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, da V irreduzibel. Für $z \in U_x \cap U_y$ gilt nach 18.5 c):
$$\dim_x V = \dim(\mathcal{O}_{V,x}) = \dim(\mathcal{O}_{U_x,x}) = \dim U_x = \dim(\mathcal{O}_{U_x,z})$$
$$= \dim_z(V) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,z}) = \dim(\mathcal{O}_{U_y,y}) = \dim_y V$$
   ii) folgt aus i)
d) Œ V affin.
$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \mathrm{ht}(m_x^V) = \max\{d : \exists \text{ Kette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V \text{ von Primidealen}\}$
Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = m_x^V$maximale Kette, dann ist $\mathfrak{p}_0$ minimales Primideal. Die minimalen Primideale entsprechen bijektiv den irreduziblen Komponenten, die x enthalten (auch von $\mathcal{O}_{V,x}$). □

Folgerung 18.7
Ist k unendlich, so ist $\mathbb{P}^n(k) = n$.

Definition 18.8
a) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 1 heißt (algebraische) ***Kurve***.
b) Eine quasiprojektive Varietät der Dimension 2 heißt (algebraische) ***Fläche***.

Proposition 18.9
Sei k algebraisch abgeschlossen, $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche, also $V = V(f)$ für ein $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ $(n \geq 1, \deg(f) \geq 1)$. Dann ist $\dim V = n - 1$.

Beweis
Œ f irreduzibel (Bemerkung 18.2 b)) $\overset{18.5b)}{\Rightarrow}$ $\dim V = n - \mathrm{ht}((f))$

Sei $\mathfrak{p} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ Primideal mit $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq (f)$. Wähle $0 \neq h \in \mathfrak{p}$ von minimalem Grad.

$h \in \mathfrak{p} \subseteq (f) \Rightarrow h = f \cdot g$ für ein $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$

$$\mathfrak{p} \text{ Primideal} \Rightarrow \begin{cases} f \in \mathfrak{p} \text{ und damit } (f) = \mathfrak{p} \\ \text{oder } g \in \mathfrak{p}, \text{ da } \deg(f) \geq 1, \text{ ist } \deg(g) < \deg(h) \lightning \text{ zur Wahl von } h \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{ht}(f) = 1$ □

Beispiel
$V = V(XZ, YZ) \subset \mathbb{A}^3(k)$
$V = \underbrace{V(Z)}_{X\text{-},Y\text{-Ebene}} \cup \underbrace{V(X,Y)}_{Z\text{-Achse}}, \dim V = 2$

Proposition 18.10
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $I(V) = (f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $\dim V \geq n - d$

Proposition 18.11 (Krullscher Hauptidealsatz)
Sei R noetherscher Ring, $x \in R \setminus R^\times$, $\mathfrak{p} \subset R$ minimales Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$

Beweis
siehe Eisenbud: Commutative Algebra, Thm. 10.1 □

Proposition 18.12 (Krullscher Höhensatz)
Sei R noetherscher Ring, $x_1, \dots, x_d \in R \setminus R^\times$ sodass $I = (x_1, \dots, x_d) \neq R$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$ für jedes minimale Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$.

Beweis
Induktion über d:

$d = 1$: Das ist 18.11 .

$d \geq 2$: Sei $\mathfrak{p}$ Primideal mit $I \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ sei minimal mit dieser Eigenschaft. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette.

Behauptung: Es gibt Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$.

Dann sei $R' = R/(x_d)$ und $\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{q}_i/(x_d)$.

Es ist $\mathfrak{q}_0' \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1}' = \mathfrak{p}'$ Kette von Primidealen in R'.

$\mathfrak{p}'$ ist minimal mit $x_1', \dots, x_d' \in \mathfrak{p}'$ (bzw. $I' \subseteq \mathfrak{p}'$) $\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \leq d - 1$, andererseits ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \geq l - 1 \Rightarrow l - 1 \leq d - 1 \Rightarrow \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq d$

Beweis der Behauptung:

$l = 1$: $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}$ tut's.

$l \geq 2$: Ist $x_d \in \mathfrak{p}_{l-1}$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{p}_{l-1}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0$. Verlängere durch $\mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$. Sei also $x_d \notin \mathfrak{p}_{l-1}$ und $\mathfrak{q}$ minimales Primideal mit $I := \mathfrak{p}_{l-2} + (x_d) \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

In $R' = R/\mathfrak{p}_{l-2}$ ist $(0) = \mathfrak{p}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{p}_{l-1}' \subsetneq \mathfrak{p}'$ Kette der Länge 2 $\Rightarrow \mathrm{ht}_{R'}(\mathfrak{p}') \geq 2 \overset{\text{18.11 A}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{p}'$ ist *nicht* minimal in R' mit $x_d' \in \mathfrak{p}'$ $\Rightarrow \mathfrak{p}$ ist nicht minimal in R mit $(x_d) + \mathfrak{p}_{l-2} \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow \exists$ Primideal $\mathfrak{q}$ mit $I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Kette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} = \mathfrak{q}$ mit $x_d \in \mathfrak{q}_0 \Rightarrow \mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{l-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{l-1} = \mathfrak{p}$ ist gewünschte Kette. □

§ 19 Singularitäten

Definition 19.1
Sei V quasiprojektive Varietät über einem Körper k. $x \in V$ heißt ***regulär*** (oder ***nichtsingulär***), wenn $\dim T_{V,x} = \dim_x V$, andernfalls heißt x ***singulär***. V heißt nichtsingulär, wenn jeder Punkt $x \in V$ regulär ist.

Proposition 19.2 (Jacobi-Kriterium)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät, $(f_1, \ldots, f_r)$ Erzeuger von $I(V)$, $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ nichtsingulär} \Leftrightarrow \text{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}}}_{=\mathcal{J}_f(x)} = n - \dim_x V$$

Beweis
Nach Bemerkung 16.3 d) ist $T_{V,x} = \text{Kern}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}}$ □

Beispiel
Sei $V = V(f) \subset \mathbb{A}^n(k)$ Hyperfläche. Dann ist $\mathcal{J}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) \Longrightarrow x$ singulär $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0$

Konkret:

a) $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3(k)$
$\mathcal{J}_f = (2X, 2Y, -2Z) \Rightarrow (0, 0, 0)$ ist der einzige singuläre Punkt.

b) $V(Y^2 - X^3 + X)$, $\mathcal{J} = (-3X^2 + 1, 2Y)$
(x, y) singulär $\Rightarrow y = 0, 3x^2 = 1, x^3 - x = 0 \Rightarrow$ Es gibt keinen singulären Punkt auf V.

c) Ist $\overline{V} \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ (mit $\overline{V}$ aus b)) auch nichtsingulär?
$\overline{V} = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$
$V = \overline{V} \cap D(Z), \overline{V} = V \cup (\overline{V} \cap V(Z)) = \underbrace{V \cup \{(0 : 1 : 0)\}}_{=:P_\infty}$
$P_\infty \in D(Y)\overline{V} \cap D(Y) = V(\underbrace{z - x^3 + xz^2}_{=:g})$
$\mathcal{J}_g = (-3x^2 + z^2, 1 + 2xz) \Rightarrow \mathcal{J}_g(P_\infty) = (0, 1)$
$\Rightarrow P_\infty$ ist regulärer Punkt
$\Rightarrow \overline{V}$ ist nichtsingulär

Definition + Bemerkung 19.3

a) Sei R noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper $k = R/m$. R heißt ***regulär***, wenn $\dim R = \dim_k(m/m^2)$.

b) Sei V quasiprojektive Varietät über k, $x \in V$. Dann gilt:

$$x \text{ regulär} \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,x} \text{ regulär}$$

Beweis

b) $\dim_k(m_x/m_x^2) = \dim(T_{V,x})$ (Satz 8)
$\dim \mathcal{O}_{V,x} = \dim_x V$ nach Defininition 18.6 □

Proposition 19.4

a) Sei (R, m) lokaler neotherscher Ring. Dann gilt: $\dim_k(m/m^2) \geq \dim R$

b) Für jede quasiprojektive Varietät V und jedes $x \in V$ gilt: $\dim T_{V,x} \geq \dim_x V$

Beweis

b) folgt aus a) (19.3 b)

a) *Behauptung:* Für $x_1, \dots, x_n \in m$ gilt:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \text{ minimales Erzeugersystem} \Leftrightarrow \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n} \text{ Basis von } {}^{m}\!/_{m^2}$$

Dann hat jedes minimale Erzeugersystem von m $\dim_R(m/m^2)$ Elemente.
Beweis der Behauptung:

„$\Rightarrow$": Sei $x_1, \dots, x_n$ minimales Erzeugersystem.

Annahme: $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ linear abhängig, also Œ $\overline{x_1} = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i \overline{x_i}$ für gewisse $\lambda_i \in k$.

$$\Rightarrow x_1 - \sum_{i=2}^{n} \tilde{\lambda}_i x_i \in m^2 \ (\tilde{\lambda}_i \in R, \overline{\tilde{\lambda}_i} = \lambda_i \text{ in } R/m)$$

$$\Rightarrow x_1 - \sum_{i=2}^{n} \tilde{\lambda}_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_1 x_j + y \text{ mit } y \in (x_2, \dots, x_n)^2$$

$$\Rightarrow x_1(\underbrace{1 - \sum_{i=i}^{n} \mu_j x_j}_{\in 1-m \Rightarrow \notin m \Rightarrow \in R^\times \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots x_n) \lightning}) \in (x_2, \dots, x_n)$$

„$\Leftarrow$": *zu zeigen:* $x_1, \dots, x_n$ erzeugen m

Sei $N = (x_1, \dots, x_n)$

Dann gilt $m = N + m^2$

Damit folgt $m = N$ aus 19.5 □

Proposition 19.5 (Nakayama-Lemma)

Sei (R, m) lokaler Ring, M endlicher erzeugter R-Modul, $N \subseteq M$ ein Untermodul mit

$$M = mM + N \qquad (*)$$

Dann gilt $M = N$

Beweis

Œ $N = 0$, denn: Aus (*) folgt $M/N = mM/N$.

Ist dann $M/N = 0$, so ist $M = N$.

Annahme: $M \neq 0$.

Denn sei $x_1, \dots, x_n$ minimales Erzeugersystem von M. Nach Voraussetzung gibt es $a_1, \dots, a_n \in m$ mit $x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$\Rightarrow x_1(1 - a_1) = \sum\limits_{i=2}^{n} a_i x_i \Rightarrow x_1 \in (x_2, \dots, x_n) \lightning$ zur Minimalität von $x_1, \dots, x_n$ □

Proposition 19.6

Jeder reguläre lokale Ring ist nullteilerfrei.

Folgerung 19.7

Sei V eine quasiprojektive Varietät, $x \in V$ ein Punkt, der auf zwei verschiedenen irreduziblen Komponenten liegt. Dann ist x singulär.

Beweis (Beweis der Folgerung)
Wegen 19.6 ist zu zeigen: $\mathcal{O}_{V,x}$ ist nicht nullteilerfrei.

Œ V affin, $V_1 \neq V_2$ irreduzible Komponenten von V mit $x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow I(V_i)$ ist minimales Primideal in $k[V]$, $i = 1, 2$. Wegen $x \in V_i$, $i = 1, 2$, ist $I(V_i) \subset m_x$, $i = 1, 2 \Rightarrow I(V_i) \cdot \mathcal{O}_{V,x}$ ist minimales Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow (0)$ ist kein Primideal in $\mathcal{O}_{V,x} \Rightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ nicht nullteilerfrei □

Beweis (Beweis von Proposition 19.6)
Sei (R, m) regulärer lokaler Ring, $d = \dim R$.

Induktion über d:

$d = 0$: $m/m^2 = 0 \Rightarrow m = m^2 \overset{19.5}{\Rightarrow} m = 0 \Rightarrow R$ Körper

$d \geq 1$: Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalenPrimideale von R. Da $d = \mathrm{ht}(m) \geq 1$ ist, ist $\mathfrak{p}_i \neq m$ für alle i. Außerdem ist $m \neq m^2$, da $\dim_k(m/m^2) = d \geq 1$.

Primvermeidungslemma: (Übung)

$$m \not\subseteq m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$$

Wähle $x \in m \setminus m^2 \cup \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$. Ergänze $\overline{x}$ (in m/m^2) zur Basis $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_d}$.

Sei $R' = R/(x)$ und $m' = m/(x)$ das maximale Ideal in R'. Da $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle minimalen Primideale von R, ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ für jedes minimale Primideal mit $x \in \mathfrak{p}$ (Proposition 18.11 A).

$\Rightarrow \dim R' = d - 1$

m' wird von $x_2', \dots, x_d'$ erzeugt (den Bildern der x_i in R'; dabei sei $x_i \in m$ mit Bild $\overline{x_i}$ in m/m^2, $i = 2, \dots, d$, nach Proposition 19.5 wird m von $x, x_2, \dots, x_d$ erzeugt)

$\Rightarrow \dim_k(m'/(m')^2) \leq d - 1$

$\overset{19.4}{\Longrightarrow} \dim_k(m'/(m')^2) = d - 1 \Rightarrow (R', m')$ ist regulärer lokaler Ring

$\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow} R'$ nullteilerfrei

$\Rightarrow (x)$ ist Primideal $\Rightarrow \exists i$ mit $\mathfrak{p}_i \subsetneq (x)$

$\Rightarrow$ Für $b \in \mathfrak{p}_i$ gibt es $a \in R$ mit $b = a \cdot x \overset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\Longrightarrow} a \in \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i x = \mathfrak{p}_i m \overset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \mathfrak{p}_i = (0) \Rightarrow R$ nullteilerfrei □

Satz 10
Sei $\emptyset \neq V \in \mathbb{P}^n(k)$ quasiprojektive Varietät über algebraisch abgeschlossenem Körper k und $\mathrm{Sing}(V) := \{x \in V : x \text{ singulär}\}$. Dann gilt: $\mathrm{Sing}(V)$ ist abgeschlossene echte Teilmenge von V.

Beispiel
Sei $\mathrm{char}(k) = p$ und $V = V(X^p + Y^p - Z^p) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ $(\subseteq \mathbb{P}^2(k))$.

Jacobi-Kriterium: $\mathcal{J}_f(X, Y, Z) = (pX^{p-1}, pY^{p-1}, pZ^{p-1}) = (0, 0, 0)$

$\overset{??}{\Rightarrow}$ alle Punkte sind singulär? Was ist $I(V)$? $(X + Y - Z)^p = X^p + Y^p - Z^p$

Beweis

i) Œ V irreduzibel, denn: sind $V_1, \dots, V_r$ die irreduziblen Komponenten von $V \Rightarrow$

$$\mathrm{Sing}(V) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Sing}(V_i) \cup \underbrace{\bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j}_{\text{abgeschlossen}}$$

ŒE V affin ($\subseteq \mathbb{A}^n(k)$), denn „abgeschlossen" ist lokale Eigenschaft. Seien $f_1, \dots, f_r$ Erzeuger von $I(V) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathcal{J} := (\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{ij}$ die Jacobi-Matrix.

$\operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \operatorname{Rang}(\mathcal{J}(x)) < n - \dim V\}$

$= \{x \in V : \det(M(x)) = 0$ für alle $(n - \dim V) \times (n - \dim V)$-Untermatrizen M von $J\}$

$\det M$ ist Polynom in $X_1, \dots, X_n$ für jeden Minor M.

$\Rightarrow \operatorname{Sing}(V)$ ist affine Varietät, also abgeschlossen in V.

ii) ŒE V irreduzibel.

Ist Z irreduzible Komponente von V und $\operatorname{Sing}(Z) \neq Z$, so ist $Z - \operatorname{Sing}(Z)$ offen, nichtleer, also dicht in Z.

$\Rightarrow Z - \operatorname{Sing}(Z)$ enthält Punkte z, die auf keiner anderen irreduziblen Komponente liegen.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{V,z} \Rightarrow z \in V - \operatorname{Sing}(V)$.

Spezialfall: $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_n], \deg(f) > 0$

Dann ist $\operatorname{Sing}(V) = \{x \in V : \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0\}$.

Wäre $\operatorname{Sing}(V) = V \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} \in I(V) = (f), i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ ist konstant} & : \text{falls } \operatorname{char}(k) = 0 \\ f \in k[X_1^p, \dots, X_n^p] & : \text{falls } \operatorname{char}(k) = p > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f = g^p$ für ein $g \in k[X_1, \dots, X_n] \lightning$ (zu f irreduzibel)

Der allgemeine Fall folgt daraus wegen: □

Proposition 19.8
Sei V irreduzible quasiprojektive Varietät der Dimension d. Dann ist V birational äquivalent zu einer Hyperfläche H in $\mathbb{A}^{d+1}(k)$.

Beweis (Fortsetzung Beweis)
Dann gibt es $U \subset V$ offen, dicht und $U' \subseteq H$ offen, dicht und Isomorphismus $\varphi : U \to U'$.

Spezialfall: $U' \cap (H - \operatorname{Sing}(H)) \neq \emptyset$

Für $z \in U'$ ist $\mathcal{O}_{V,f^{-1}(z)} \cong \mathcal{O}_{U',z} = \mathcal{O}_{H,z}$ regulärer lokaler Ring $\Rightarrow z \notin \operatorname{Sing}(V)$. □

Beweis (Beweis von Proposition 19.8)
Nach Satz 6 (bzw. Bemerkung 13.7), ist zu zeigen, dass der Funktionenkörper $k(V)$ zu $\operatorname{Quot}(k[X_1, \dots, X_{d+1}]/(f))$ für ein irreduzibles $f \in k[X_1, \dots, X_{d+1}]$ isomorph ist (als k-Algebra).
Sei ŒE V affin. Wähle Noethernormalisierung $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow k[V]$.

$\Rightarrow k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ ist endliche Körpererweiterung

ŒE $k(V)|k(X_1, \dots, X_d)$ separabel ($\operatorname{char}(k) = 0$: sowieso, $\operatorname{char}(k) = p$: Bosch, 7.3, Satz 7)

$\xRightarrow[\text{prim. Elem.}]{\text{Satz vom}}$ es gibt $y \in k(V)$ mit $k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$

Sei $h \in k(V) = (X_1, \dots, X_d)[Y]$ das Minimalpolynom von y, also $h(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_i = \frac{f_i}{g_i}, f_i, g_i \in k[X_1, \dots, X_d]$ (teilerfremd)

Sei $g = \operatorname{kgV}(g_0, \dots, g_{n-1})$ und $f := g \cdot h = g \cdot Y^n + \underbrace{g \cdot a_{n-1}}_{b_{n-1} \in k[X_1, \dots, X_d]} Y^{n-1} + \ldots + g \cdot a_0$

$b_0, \dots, b_n$ sind teilerfremd $\Rightarrow f$ irreduzibel und $f(Y) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Quot}(k[X_1, \dots, X_d, Y]/(f)) = k(X_1, \dots, X_d)[Y] \cong k(V)$

$V(f) \subseteq \mathbb{A}^{d+1}$ ist Hyperfläche $\cong k(V)$ □

Folgerung 19.9
Für jede irreduzible quasiprojektive Varietät gilt:

$$\dim(V) = \operatorname{trdeg}_k k(V)$$

(Transzendenzgrad = max. Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente)

Denn: $\dim V = \dim k[V] = d$, falls $k[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow k[V]$ Noethernormalisierung. $k(V)$ ist endliche Körpererweiterung von $k(X_1, \dots, X_d) \Rightarrow \operatorname{trdeg}_k(k(V)) = \operatorname{trdeg}_k k(X_1, \dots, X_d) = d$.