

2. Der Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^2

Stets in diesem Paragraphen: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sei fest, $R : [0, 2\pi] \rightarrow (0, \infty)$ sei stetig und stückweise stetig differenzierbar, $R(0) = R(2\pi)$.

$$\gamma(t) := (x_0 + R(t) \cos t, y_0 + R(t) \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

γ ist stückweise stetig differenzierbar, also rektifizierbar, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

$$B := \{(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) : t \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

Sind γ und B wie oben, so heißt B **zulässig**. B ist beschränkt und abgeschlossen, $\partial B = \Gamma_\gamma = \gamma([0, 2\pi])$. Analysis II, 17.1 $\implies B$ ist messbar.

Beispiel

$$R(t) = 1 \implies \gamma(t) = (x_0 + \cos t, y_0 + \sin t). \quad B = \overline{U_1(x_0, y_0)}$$

Satz 2.1 (Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^2)

B und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ seien wie oben, B also zulässig und $\partial B = \Gamma_\gamma$. Weiter sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $D \supseteq B$ und $f = (u, v) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann:

- (1) $\int_B u_x(x, y) d(x, y) = \int_\gamma u(x, y) dy$
- (2) $\int_B v_y(x, y) d(x, y) = - \int_\gamma v(x, y) dx$
- (3) $\int_B \operatorname{div} f(x, y) d(x, y) = \int_\gamma (u dy - v dx)$

Anwendung 2.2

B und γ seien wie in 2.1. Mit $f(x, y) = (x, y)$ folgt

$$\lambda_2(B) = \int_\gamma x dy = - \int_\gamma y dx = \frac{1}{2} \int_\gamma (x dy - y dx)$$

Beweis

(nach Lemmert)

Wir zeigen nur (1). ((2) zeigt man Analog, (3) folgt aus (1) und (2).)

OBdA: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und γ stetig db. Also: $\gamma(t) = (R(t) \cos t, R(t) \sin t)$ mit $R(t)$ stetig db.

$$A := \int_B u_x(x, y) d(x, y). \quad \text{Z.z.: } A = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \gamma'_2(t) dt$$

$$\text{Polarkoordinaten, Substitution, Fubini} \implies A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(t)} u_x(r \cos t, r \sin t) r dr \right) dt.$$

$$\beta(r, t) := u(r \cos t, r \sin t). \quad \text{Nachrechnen: } u_x(r \cos t, r \sin t) r = r \beta_r(r, t) \cos t - \beta_t(r, t) \sin t \implies$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(t)} (r \beta_r(r, t) \cos t - \beta_t(r, t) \sin t) dr \right) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{R(t)} r \beta_r(r, t) dr &= \underbrace{r \beta(r, t) \Big|_{r=0}^{r=R(t)}}_{=R(t)\beta(R(t), t)=R(t)u(\gamma(t))} - \underbrace{\int_0^{R(t)} \beta(r, t) dr}_{=: \alpha(t)} \\ &= R(t)u(\gamma(t)) - \alpha(t) \end{aligned}$$

2. Der Integralsatz von Gauss im \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}
 \text{AII,21.3} &\implies \alpha \text{ ist stetig db und } \alpha'(t) = R'(t)\beta(R(t),t) + \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr \\
 &\implies \int_0^{R(t)} \beta_t(r,t)dr = \alpha'(t) - R'(t)u(\gamma(t)) \\
 &\implies A = \int_0^{2\pi} (R(t)u(\gamma(t)) \cos t - \alpha(t) \cos t - \alpha'(t) \sin t + R'(t)u(\gamma(t)) \sin t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} u(\gamma(t)) \underbrace{(R(t) \sin t)'}_{\gamma_2'(t)} dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} (\alpha(t) \sin t)' dt}_{=\alpha(t) \sin t|_0^{2\pi}=0}
 \end{aligned}$$

■