II. Topologische Grundbegriffe

§ II.1. Topologische Räume und ein paar Konstruktionen

Definition II.1.1 Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X, für die eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften ausgewählt wurde:

- $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$
- $\forall A, B \in \mathcal{T} : A \cap B \in \mathcal{T}$
- $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{T}$.

Hierbei heißt $\mathcal{T}$ die Topologie auf X, und die Elemente von $\mathcal{T}$ sind die *offenen Mengen* des topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$.

Die Mengen $X \setminus A, A \in \mathcal{T}$, heißen *abgeschlossene Teilmengen* von X.

Beispiel II.1.2 Alte Bekannte

Die offenen Mengen eines metrischen Raums X bilden eine Topologie auf X.

Ist X eine beliebige Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X. Sie ist sogar die Topologie zu einer Metrik auf X, zur diskreten Metrik nämlich. Sie heißt die *diskrete Topologie*.

Auch $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X.

Auf $\{0, 1\}$ gibt es die Topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Diese kommt nicht von einer Metrik her.

Definition II.1.3 Inneres, Abschluss und der zu schmale Rand

Es seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Das *Innere* $\mathring{A}$ von A ist definiert als die Vereinigung

$$\mathring{A} := \bigcup_{U \subseteq A,\, U \text{ offen}} U\,.$$

$\mathring{A}$ ist offen.

Der *Abschluss* $\bar{A}$ von A ist definiert als der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.

$\bar{B}$ ist abgeschlossen.

Der *Rand* von A ist die Menge $\partial A \coloneqq \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Sie ist abgeschlossen.

Warnung: Im metrischen Raum (X, d) muss nicht gelten, dass für $r > 0$, $x \in X$ die Menge $\overline{B_r(x)} = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$. Ein Gegenbeispiel ist etwa die diskrete Metrik D, also ist $B_1(x) = \{x\}$ abgeschlossen, und damit $\overline{B_1(x)} = B_1(x) \neq \{y \in X \mid d(x, y) \leq 1\} = X$.

Definition II.1.4 Dichtheit, Diskretheit

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn ihr Abschluss ganz X ist.

   Jede Teilmenge ist also dicht in ihrem Abschluss, wenn man diesen wie in II.1.8 als topologischen Raum betrachtet.

   X heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von X gibt.

   Ein Punkt $x \in X$ heißt *generisch*, wenn $\overline{\{x\}} = X$.

   Beispiel: Sei $X = \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ sei abgeschlossen, wenn es Polynome $f_i \in \mathbb{Q}[X]$, $i \in I$, gibt so dass $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall i \in I : f_i(z) = 0\}$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\overline{\{z\}} = \{y \in \mathbb{C} \mid \forall f \in \mathbb{Q}[X] : f(z) = 0 \implies f(y) = 0\}$. So ist etwa $\overline{\{0\}} = \{0\}$, $\overline{\{\sqrt{2}\}} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ und $\overline{\{\pi\}} = \mathbb{C}$, denn π ist transzendent.

b) Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *diskret*, wenn jeder Punkt $x \in X$ in einer offenen Menge liegt, die mit D endlichen Durchschnitt hat.

   Für metrische Räume heißt das gerade, dass D keinen Häufungspunkt besitzt.

Definition II.1.5 Umgebungen, Basis einer Topologie

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Für $x \in X$ heißt eine Teilmenge $A \subseteq X$ eine *Umgebung* von x, falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U \subseteq A$. Ist A selbst schon offen, so heißt es eine *offene Umgebung* von x (falls $x \in A$).

   Insbesondere ist $A \subseteq X$ genau dann offen, wenn sie für jedes $a \in A$ eine Umgebung ist.

b) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Basis* von $\mathcal{T}$, falls jedes Element von $\mathcal{T}$ sich schreiben lässt als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$.

   (So sind zum Beispiel die offenen Kugeln $B_r(x)$ eine Basis der Topologie auf einem metrischen Raum.)

$\mathcal{S}$ heißt eine *Subbasis* von $\mathcal{T}$, wenn die endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis der Topologie ist.

Für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ gibt es eine Topologie, die $\mathcal{S}$ als Subbasis besitzt. Diese heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie und hat die Basis $\mathcal{B} = \{S_1 \cap \cdots \cap S_n \mid S_i \in \mathcal{S},\ k \in \mathbb{N}\}$ und die offenen Mengen $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in I} U_i \mid U_i \in B$ und Indexmenge $I\}$.

c) Für $x \in X$ heißt eine Menge $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ von Umgebungen von x eine *Umgebungsbasis* von x, wenn jede Menge in B_x den Punkt x enthält und jede Umgebung von x ein Element von $\mathcal{B}_x$ als Teilmenge enthält.

   Nebenbemerkung: Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ist genau dann eine Basis der Topologie, wenn für alle $x \in X$ gilt: $\mathcal{B}_x \coloneqq \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$ ist Umgebungsbasis von x.

Bemerkung II.1.6 Einsichtig

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ist genau dann eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn sie für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis enthält.

Für jede Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}(X)$ gibt es genau eine Topologie, die $\mathcal{B}$ als Subbasis besitzt. Sie ist die *von $\mathcal{B}$ erzeugte* Topologie, und besitzt

$$\{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{B}\}$$

als Basis.

Definition II.1.7 Feinheiten

Wenn $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X sind, so heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, also wenn $\mathcal{T}_1$ mehr offene Mengen besitzt als $\mathcal{T}_2$.

Die feinste Topologie auf X ist also die diskrete $\mathcal{P}(X)$, während $\{\emptyset, X\}$ die gröbste Topologie auf X ist.

Zu je zwei Topologien gibt es eine gemeinsame Verfeinerung. Die gröbste gemeinsame Verfeinerung ist die Topologie, die die Vereinigung der beiden gegebenen als Subbasis besitzt.

Definition II.1.8 Teilräume und Produkte

a) Es seien X eine Menge und $(Y, \mathcal{S})$ ein Topologischer Raum. Weiter sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Für zwei Teilmegen $A, B \subseteq Y$ gilt

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

   Das zeigt im Wesentlichen bereits, dass

$$\mathcal{T} \coloneqq \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

eine Topologie auf X ist. Man nennt sie die *Spurtopologie* auf X (bezüglich der Abbildung f).

Damit können wir unheimlich viele neue topologische Räume konstruieren. (Tun Sie das!)

b) Ist speziell $X \subseteq Y$ und f die Einbettung dieser Teilmenge, so nennt man X (mit der Spurtopologie) einen *Teilraum* von Y.

   Eine Teilmenge A von X ist genau dann offen bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine offene Teilmenge U von Y gibt mit $A = U \cap X$.

   Vorgriff: Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen is teine Abbildung f, so dass für alle offenen $U \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(U) \subseteq X$ ist offen. Ist X eine Menge, $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f : X \to Y$, dann ist die Spurtopologie bezüglich f die gröbste Topologie auf X, für die f stetig ist.

c) Sind X, Y zwei topologische Räume, so definieren wir auf $X \times Y$ die *Produkttopologie*, indem wir als Basis die Produkte $U \times V$ für offene $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ verwenden.

Definition II.1.9 Quotiententopologie

Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann definieren wir auf ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ eine Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ durch die Vorschrift: $M \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ ist offen, wenn $\bigcup_{m \in M} m \subseteq X$ offen ist.

Für die kanonische Projektion $\pi : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$, $\pi(x) = [x]$, heißt das: $M \subseteq {}^{M}\!/\!_{\sim}$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(M) \subseteq M$ offen ist. $\tilde{\mathcal{T}}$ ist die feinste Topologie, für die π stetig ist. Sie heißt *Quotiententopologie* (von $\mathcal{T}$ unter $\sim$).

Damit bekommen wir zum Beispiel eine Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Die Topologie auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ verdient hier historisch und didaktisch besondere Aufmerksamkeit. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \mathbb{C}$ offen ist und wenn zusätzlich im Fall $\infty \in A$ ein $R > 0$ existiert mit

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq A.$$

Vorsicht: Ein Quotientenraum $({}^{X}\!/\!_{\sim}, \tilde{\mathcal{T}})$ muss nicht immer schön sein, auch wenn X das war. So hat etwa der Raum ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Q}}$ die Quotiententopologie

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{\emptyset, {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Q}}\}.$$

Warnung: Im Allgemeinen ist es falsch, dass für offenes $O \subseteq X$ die Menge $\pi(O) = \{[x] \mid x \in O\} \subseteq {}^{X}\!/\!_{\sim}$ offen ist. Ist beispielsweise $X = \mathbb{R}$ und betrachte die Äquivalenzrelation mit Äquivalenzklassen $[0,1]$, $\{y\}$ für $y \notin [0,1]$. Dann ist $\{[0]\} = \pi((0,1))$, aber $\pi^{-1}(\{0\}) = [0,1]$ ist nicht offen.

§ II.2. Wichtige Eigenschaften topologischer Räume

Definition II.2.1 Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält:

$$\exists n \in \mathbb{N}, i_1, \dots i_n \in I : X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}.$$

Genauso heißt eine Teilmenge von X kompakt, wenn sie bezüglich der Spurtopologie (der Inklusion) kompakt ist.

Anstelle des Begriffs „kompakt" wird auch gelegentlich „überdeckungsendlich" verwendet. Es ist nicht ganz einheitlich, ob zur Kompaktheit auch die Eigenschaft, hausdorff'sch zu sein (siehe später), gehört oder nicht. Wir wollen hier Kompaktheit so verstehen wie gesagt.

Hilfssatz II.2.2 Kompakta in metrischen Räumen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

a) Ist X kompakt, dann ist X beschränkt.

b) Ist $K \subseteq X$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in X.

c) Ist X kompakt, so ist X auch vollständig.

Beweis.

a) Sei ohne Einschränkung X nicht leer und $x \in X$. Es ist

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(x),$$

also gibt es $n_1 \leq \cdots \leq n_k \in \mathbb{N} : X = \bigcup_{i=1}^{k} B_{k_i}(x) = B_{n_k}(x)$, da $B_{n_1}(x) \subseteq B_{n_2}(x) \subseteq \cdots \subseteq B_{n_k}(x)$, also hat X einen Durchmesser kleiner $2n_k$.

b) Sei $K \subseteq X$ kompakt, $x \in X \backslash K$. Zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap K = \emptyset$. Betrachte für $\varepsilon > 0$ die abgeschlossene Menge $D_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$. Es gilt

$$\bigcap_{\varepsilon>0} D_\varepsilon(x) = \{x\} \implies K \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \underbrace{X \setminus D_\varepsilon(x)}_{\text{offen}}.$$

X ist kompakt, also gibt es endlich viele $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n > 0$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus D_{\varepsilon_i}(x) = X \setminus D_{\varepsilon_n}(x) \implies B_{\varepsilon_n}(x) \subseteq X \setminus K$. $x \in X \setminus K$ war beliebig, also ist K abgeschlossen.

c) Sei X kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Wenn diese Folge nicht konvergiert, dann existiert für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \notin B_\varepsilon(x)$. Es gilt: $\exists N > 0 \forall k, l \in \lessdot,\ k, l \geq N :$ $d(x_k, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wäre hier $x_k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}$, so wäre $x_l \in B_\varepsilon(x)$ für alle $l \geq n$, im Widerspruch zur Wahl von ε.

Also liegen in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}$ liegen nur Folgenglieder x_n mit $n < N$, also endlich viele. Das heißt: für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U_x von x, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen. Diese offenen Mengen überdecken X, und aus der Kompaktheit von X folgt: $\exists y_1, \ldots, y_n \in X : X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. In jedem U_{y_i} liegen nur endlich viele Folgenglieder, also liegen auch in X nur endlich viele, was einen Widerspruch darstellt. ■

Bemerkung II.2.3 Kompakta in sonstigen topologischen Räumen

Es sei X ein topologischer Raum.

a) Nicht jeder kompakte Teilraum von X muss abgeschlossen sein.

Betrachte zum Beispiel den Raum $X = \mathbb{Z}$ mit der „koendlichen" Topologie: Die offenen Mengen sind $\emptyset$, $\mathbb{Z}$, sowie alle Komplemente von endlichen Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Hier ist jede Teilmenge kompakt. Ist nämlich $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, U_i offen. Wähle ein $i_1 \in I$ mit $U_{i_1} \neq \emptyset$. Dann existieren $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}$ so dass $U_{i_1} = \mathbb{Z} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. Seien $z_1, \ldots, z_d \in A$ und $z_{d+1}, \ldots, z_k \notin A$.Dann gilt für jedes $j = 1, \ldots, d$, daas es ein $i_{j+1} \in I$ gibt mit $z_j \in U_{i_{j+1}}$. Also ist $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{d+1} U_{i_j}$. Aber es gibt nicht abgeschlossene Mengen, etwa $\mathbb{N}$.

b) Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt:

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A, also $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann ist

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \cup \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{offen}}$$

eine offene Überdeckung von X. Also gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$ so dass $X = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A)$ und damit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. Das zeigt, dass A kompakt ist.

c) Es seien $K \subseteq X$ kompakt und $D \subseteq X$ diskret. Dann ist $D \cap K$ endlich:

Für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U_x von x, die mit D endlichen Durchschnitt hat, also kann man K mit den U_x, $x \in K$ überdecken. Da K kompakt ist, kann man daraus eine endliche Überdeckung wählen und es gilt

$$K \cap D \subseteq (\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) \cap D = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap D),$$

was endlich ist.

Satz II.2.4 à la Heine[1]-Borel[2]

Es sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

a) Für jede beschränkte Menge $B \subseteq X$ und jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich B durch endlich viele Mengen von Durchmesser $\leq \varepsilon$ überdecken.

b) Die folgenden zwei Aussagen für Teilmengen $A \subseteq X$ sind äquivalent:

i) A ist kompakt.

ii) A ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. „a) $\Longrightarrow$ b)“: Wir haben schon gesehen: ein Kompaktum in einem metrischen Raum ist abgeschlossen und beschränkt, also i) $\Longrightarrow$ ii).

Zu zeigen: ii) $\Longrightarrow$ i). Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt. Weiter sei $\ddot{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A. Nehmen wir an, es gebe in $\ddot{U}$ keine endliche Teilüberdeckung von A.

Wegen Bedingung a) gibt es endlich viele Reilmengen $T_1, \ldots, T_n$ von A von Durchmesser ≤ 1, so dass $A = T_1 \cup \cdots \cup T_n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $T_1, \ldots, T_n$ abgeschlossen, denn A ist Abgeschlossen und wenn T Durchmesser ≤ 1, dann auch $\bar{T}$.

Die Annahme an A erzwingt, dass wenigstens ein T_j sich nicht durch endlich viele der U_i überdecken lässt. Sei $A_1 \in \{T_1, \ldots, T_n\}$ ein solches. A_1 lässt sich durch endlich viele abgeschlossene Mengen $S_1, \ldots, S_n \subseteq A_1$ von Durchmesser $\leq \frac{1}{2}$ überdecken. Wähle analog A_2, als eines der S_j, so dass es sich nicht durch endlich viele U_i überdecken lässt.

Konstruiere rekursiv
$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$$
derart, dass A_k Durchmesser $\leq 1/2^k$ hat, abgeschlossen ist und sich nicht durch endlich viele $U \in \ddot{U}$ überdecken lässt.

$$D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq A$$
ist abgeschlossen und enthält höchstens ein Element. Um zu zeigen, dass D nicht leer ist, wählen wir sukzessive für $k \in \mathbb{N}$ ein $a_k \in A_k$. Dann ist $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn
$$d(x_i, x_k) \leq 1/2^{\max(i,k)}.$$

Also konvergiert die Folge gegen ein $a \in A$, da X vollständig und A abgeschlossen ist.

[1]Heinrich-Eduard Heine, 1821-1881
[2]Emile Borel, 1871-1956

Wäre $a \notin D$, dann gäbe es ein k mit $a \notin A_k$, und da A_k abgeschlossen ist, existierte ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon \cap A_k = \emptyset$, also für alle $x \in A_k$ gelte $d(x,a) > \varepsilon$, also wäre für alle $l \geq k$: $a_k \in A_l \subseteq A_k$, also $d(a_k, a) > \varepsilon$.

Also gilt $D = \{a\}$.

Da $a \in A$, liegt es in einem der U_i, und da U_i offen ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(A) \subseteq U_i$. Für $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{r}$ folgt dann aber wegen $a \in A_k$, dass $A_k \subseteq U_i$, im Widerspruch zur Konstruktion der Mengen A_k. Also ist die Annahme falsch und daher A kompakt.

„b) $\Longrightarrow$ a)“: Es sei $B \subseteq X$ beschränkt und abgeschlossen, also nach Vorbedingung b) kompakt. Sei $\varepsilon > 0$, dann

$$\bar{B} \subseteq \bigcup_{x \in \bar{B}} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$$

Es ist $\bar{B}$ kompakt, also existieren $x_1, \ldots, x_n \in \bar{B}$, so dass gilt:

$$B \subseteq \bar{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$$

■

Bemerkung II.2.5 Beispielmaterial

a) Als Spezialfall erhalten wir den klassischen Satz von Heine-Borel, der sagt, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann überdeckungsendlich ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

   Heine hat diesen Satz 1872 für Intervalle in $\mathbb{R}$ benutzt, um zu zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig ist.

b) $\mathbb{R}^2$ mit der SNCF-Metrik (siehe Übungsblatt 2) stimmt Bedingung II.2.4 a) nicht.

c) Es sei $X \coloneqq \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{N}$ (siehe I.4.2).

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei δ_n die Funktion auf $\mathbb{N}$, die auf n den Wert 1 annimmt, und sonst den Wert 0. Die Menge

$$D \coloneqq \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   ist eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von X. Aber kompakt ist sie nicht, denn in $B_{1/2}(\delta_n)$ liegt kein weiteres $\delta_k, k \in \mathbb{N}$, und so ist

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{1/2}(\delta_n)$$

eine offene Überdeckung von D ohne endliche Teilüberdeckung.

In der Funktionalanalysis spielen ähnliche Räume eine wichtige Rolle, und insbesondere die Frage, wann die abgeschlossene Einheitskugel in einem normierten Vektorraum kompakt ist.

d) Es gibt auch topologische Räume, in denen *jede Teilmenge* kompakt ist, egal ob offen, abgeschlossen, keins von beiden...

Als Beispiel hierfür nehme ich eine (beliebige!) Menge X und versehe sie mit der *koendlichen* Topologie. Dies heißt, dass neben der leeren Menge genau die Mengen offen sind, deren Komplement in X endlich ist.

Klar: hier ist alles kompakt. Denn für $A \subseteq X$ und offenes $U \neq \emptyset$ überdeckt U bereits alles bis auf endlich viele Elemente von A.

e) Eine wichtige Beispielklasse für kompakte Räume sind die projektiven Räume $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Im Fall $n = 1$ sieht man die Kompaktheit sehr schön wie folgt: Ist $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung von $X = \mathbb{P}^1(K)$ (mit $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so gibt es darin eine Menge $U_\infty \in \ddot{U}$, so dass $\infty \in U_\infty$. Das Komplement von U_∞ ist nach Konstruktion der Topologie auf $X = K \cup \{\infty\}$ abgeschlossen und beschränkt (siehe II.1.9 d)) und daher kompakt wegen Heine-Borel. Also reichen endlich viele weitere Elemente aus $\ddot{U}$, um $K \setminus U_\infty$ zu überdecken.

Definition II.2.6 zusammenhängend

Es sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X *zusammenhängend*, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Das ist äquivalent dazu, dass es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere, disjunkte und offenen Teilmengen gibt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist, also genau dann, wenn sie nicht in der Vereinigung zweier offener Teilmengen von X liegt, deren Schnitte mit A nichtleer und disjunkt sind.

Die Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Durchschnitt ist wieder zusammenhängend.

Beispiel II.2.7 Intervalle

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle, egal ob offen oder abgeschlossen oder halboffen. Dabei werden auch die leere Menge und einelementige Mengen als Intervalle gesehen.

Ist nämlich $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und sind $x < y$ beide in A, so liegt auch jeder Punkt z zwischen x und y in A, da sonst

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty))$$

eine disjunkte, nichttriviale, offene Zerlegung von A wäre.

Ist umgekehrt A ein Intervall, so sei $A = B \cup C$ eine nichttriviale disjunkte Zerlegung. Ohne Einschränkung gebe es ein $b_0 \in B$ und ein $c_0 \in C$ mit $b_0 < c_0$.

Es sei $z := \sup\{b \in B \mid b < c_0\}$. Dies liegt in A, und damit auch in B oder C. Wäre $z \in B$ und B offen in A, so müsste es ein $r > 0$ geben mit

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow z \in B.$$

Also kann z nicht zu B gehören, wenn dies offen in A ist, denn es gibt Elemente $c \in C, c > z$, die beliebig nahe an z dran liegen.

Wäre $z \in C$ und C offen in A, so gäbe es ein $r > 0$, so dass

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow z \in C.$$

Das wiederum geht nicht, denn z ist das Supremum einer Teilmenge von B.

Also sind weder B noch C offen in A, und das zeigt, dass A zusammenhängend ist.

Definition II.2.8 Zusammenhangskomponenten

Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen zwei Punkte x, y in X *äquivalent*, falls es eine zusammenhängende Teilmenge von X gibt, die beide enthält. Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation:

- $x \simeq x$ ist klar für alle $x \in X$, denn $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- Symmetrie ist auch klar, nicht wahr?
- Transitivität: Es seien $x \simeq y$ und $y \simeq z$, dann gibt es zusammenhängende $A, B \subseteq X$, so dass $x, y \in A$ und $y, x \in B$. Aber $A \cup B$ ist auch zusammenhängend, denn aus $A \cup B = U \cup V$ (offene Zerlegung) folgt $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ und analog für B, wir hätten also disjunkte offene Überdeckungen von A und B, und damit folgt OBdA $A \subseteq U, A \cap V = \emptyset$. Genauso ist auch B in einer der beiden Mengen enthalten und hat mit der anderen leeren Schnitt. Aus $B \subseteq U$ folgt $V = \emptyset$, während aus $B \subseteq V$ folgt, dass U und V nicht disjunkt sind: beide enthalten y.

Die Äquivalenzklasse von x heißt die *Zusammenhangskomponente* von x und heißt $\pi_0(x)$. Diese ist weder zwangsläufig offen noch zwangsläufig abgeschlossen. Die Menge aller Äquivalenzklassen notiert man als $\pi_0(X)$.

Definition II.2.9 Trennungsaxiom

Es sei X ein topologischer Raum.

a) X heißt ein T_1-Raum, wenn die einelementige Mengen abgeschlossen sind. Äquivalent: Für $x \neq y \in X$ gibt es eine Umgebung U von y, die x nicht enthält.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ mit der koendlichen Topologie, denn hier sind alle endlichen Mengen abgeschlossen.

b) X heißt T_2-Raum oder *hausdorff'sch*[3], wenn je zwei Punkte $x \neq y$ in X disjunkte Umgebungen haben.

Beispiel: $\mathbb{Z}$ mit der koendlichen Topologie is *kein* Hausdorff-Raum.

Beispiel II.2.10 Vererbung

a) Metrische Räume sind hausdorff'sch: für $x, y \in X$, $x \neq y$ sei $r = d(x, y)$. Dann gilt: $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$.

b) Wenn X hausdorff'sch ist und $U \subseteq X$, dann ist U in der Teilraumtopologie hausdorff'sch.

c) Wenn X, Y zwei Hausdorff-Räume sind, dann auch $X \times Y$.

Beweis. Seien $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ verschieden. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $x \neq \tilde{x}$. X ist Hausdorff'sch, also gibt es offene Umgeungen U um x und V um $\tilde{x}$ mit leerem Schnitt. Damit sind auch $U \times Y$ und $V \times Y \subseteq X \times Y$ offen und disjunkt. $U \times Y$ ist Umgebung von (x, y), $V \times Y$ ist Umgebung von $(\tilde{x}, \tilde{y})$, also ist $H \times Y$ hausdorff'sch.

d) Ein Quotientenraum eines Hausdorff-Raums muss nicht hausdorff'sch sein.

Beispiel: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ hat mit der Quotiententopologie nur $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ und $\emptyset$ als offene Mengen, und ist somit nicht einmal T_1.

Bemerkung II.2.11 Kompakta in Hausdorffräumen

Jedes Kompaktum K in einem Hausdorffraum X ist abgeschlossen.

Beweis. Ist $x \in X \setminus K$, so gibt es für jedes $k \in K$ disjunkte offene Umgebungen U_k von k und V_k von x. Es ist $\ddot{U} := \{U_k \mid k \in K\}$ eine offene Überdeckung von K, und wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele $k_1, \ldots, k_n$ in K, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}.$$

Dazu disjunkt ist $\bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$, aber das ist eine offene Umgebung von x. Also liegt x nicht im Abschluss von K. ■

§ II.3. Stetigkeit

Definition II.3.1 Stetige Abbildungen

[3] Felix Hausdorff, 1868-1942

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig*, falls für jede offene Teilmenge V von Y das Urbild $f^{-1}(V)$ in X offen ist.

Es genügt, diese Bedingung für eine (Sub-)Basis der Topologie von Y zu testen.

Wie bei metrischen Räumen werden wir mit $\mathcal{C}(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y bezeichnen. Mit $\mathcal{C}(X)$ bezeichen wir $\mathbb{C}(X,\mathbb{R})$.

Eine stetige Abbildung, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch stetig ist, heißt ein *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume, zwischen denen es einen Homöomorphismus gibt, heißen kreativer Weise *homöomorph*.

Bemerkung II.3.2 Sysiphos[4]

a) Für metrische Räume X,Y liefert das denselben Begriff der Stetigkeit wie unsere alte δ-ε-Definition gesehen.

b) Homöomorph zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von topologischen Räumen.

   In der Topologie betrachtet man zwei homöomorphe topologische Räume als im Wesentlichen gleich. Eine Eigenschaft eines topologischen Raums X heißt eine *topologische Eigenschaft*, wenn jeder zu X homöomorphe Raum diese Eigenschaft auch hat. Kompaktheit, Zusammenhang, Hausdorffizität sind solche Eigenschaften. Beschränktheit oder Vollständigkeit eines metrischen Raums ist keine topologische Eigenschaft.

   Natürlich möchte man eine Übersicht gewinnen, wann zwei topologische Räume homöomorph sind, oder welche Homöomorphieklassen es insgesamt gibt. Das ist in dieser Allgemeinheit ein aussichtsloses Unterfangen. Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten, die Wünsche etwas abzuschwächen: man kann sich entweder auf etwas speziellere topologische Räume einschränken oder den Begriff des Homöomorphismus ersetzen.

   Das erstere passiert zum Beispiel bei der Klassifikation der topologischen Flächen.

   Für das zweitere bietet sich der Begriff der Homotopie an.

   Auf beides kommen wir später noch zu sprechen.

   Oft genug ist es sehr schwer nachzuweisen, dass zwei gegebene Räume nicht zueinander homöomorph sind. Wenn ich keine bistetige Bijektion finde, sagt das vielleicht mehr über mich aus als über die Räume. Hier ist es manchmal hilfreich, topologischen Räumen besser greifbare Objekte aus anderen Bereichen der Mathematik zuordnen zu können, die für homöomorphe Räume isomorph

[4]Ignatz Sysiphos, -683 – -651

sind, und wo dies besser entschieden werden kann. Das ist eine Motivation dafür, algebraische Topologie zu betreiben oder allgemeiner eben Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in andere Kategorien zu untersuchen.

Bemerkung II.3.3 Ringkampf

a) Die Identität auf X ist stets ein Homöomorphismus (wenn man nicht zwei verschiedene Topologien benutzt...). Eine konstante Abbildung ist immer stetig.

b) Die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ ist wieder stetig.

   Insbesondere zeigt das, dass homöomorph zu sein eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von topologischen Räumen ist.

c) Sind $f : X \longrightarrow Y$ und $g : X \longrightarrow Z$ stetig, so ist auch $f \times g : X \longrightarrow Y \times Z$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ stetig bezüglich der Produkttopologie. Diese ist die feinste Topologie auf $Y \times Z$ mit dieser Eigenschaft.

d) $\mathcal{C}(X)$ ist wieder der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X (wobei $\mathbb{R}$ bei so etwas immer mit der Standardtopologie versehen ist!). Dies ist wieder ein Ring (bezüglich der üblichen Verknüpfungen), denn die Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, und wir können b) und c) anwenden.

Hilfssatz II.3.4 Ein Erhaltungssatz

Es sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Dann gelten:

a) Wenn X kompakt ist und f surjektiv, dann auch $f(X)$.

b) Wenn X zusammenhängend ist und f surjektiv, dann auch $f(X)$.

c) Wenn Y hausdorff'sch ist und f injektiv, dann ist X hausdorff'sch.

Beweis.

a) Es sei $\ddot{V}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in V. Dann ist $\ddot{U} := \{f^{-1}(U) \mid U \in \ddot{U}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $V_1, \dots, V_n \in \ddot{V}$, so dass bereits $\{f^{-1}(V_i) \mid 1 \le i \le n\}$ eine Überdeckung von X ist.

   Aus $f(f^{-1}(V_i)) = f(X) \cap V_i$ folgt, dass $\{V_1, \dots, V_n\}$ das Bild von f überdecken.

b) Es sei $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung von $f(X)$ in nicht leere Teilmengen. Wenn A, B in der Spurtopologie offen wären, dann gäbe es offene Teilmengen V, W von Y mit $A = V \cap f(X), B = W \cap f(X)$.

Mithin wäre $f^{-1}(V), f^{-1}(W)$ eine offene Überdeckung von X, die noch dazu disjunkt ist, da sich V und W nicht in $f(X)$ schneiden.

Andererseits wäre diese Teilmengen von X nicht leer (weil A und B nicht leer sind), und das widerspricht der Definition von Zusammenhang.

c) Es seien $x_1 \neq x_2$ Punkte in X. Dann sind ihre Bilder in Y verschieden, denn f soll injektiv sein. Daher haben $f(x_1)$, $f(x_2)$ in Y disjunkte Umgebungen, und deren Urbilder sind disjunkte Umgebungen von x_1 und x_2. ■

Die Umkehrungen gelten jeweils natürlich nicht, wie einfache Gegenbeispiele lehren.

Bemerkung II.3.5 alte Bekannte

a) Man sieht hier insbesondere, dass Kompaktheit, Zusammenhang und hausdorff'sch topologische Eigenschaften sind.

b) Wenn X kompakt ist, und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, das heißt beschränkt und abgeschlossen. f nimmt ein Maxmum und ein Minimum an.

Als Spezialfall hiervon erinnnern wir an I.4.9: eine Norm N auf dem $\mathbb{R}^n$ ist immer stetig bezüglich der Standardmetrik. Daher nimmt sie auf der (kompakten) Einheitssphäre ein positives Minimum m und ein Maximum M an, und das führt wegen der Homogenität der Norm zu

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : m|x| \leq N(x) \leq M|x|.$$

Dies zeigt, dass N und die Standardmetrik dieselbe Topologie liefern.

c) Wenn $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $auch f(x)$ ein Intervall – das ist der Zwischenwertsatz.

d) Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ *trennt die Punkte* von X, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ in X ein $f \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wenn Y hausdorff'sch ist, und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ die Punkte trennt, dann ist X hausdorff'sch.

Beweis. Wenn $x_1 \neq x_2$ in X, so gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Argumentiere weiter wie im Beweis von II.3.4 c).

Insbesondere ist also $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_0(X)$, wenn X kompakt ist, und dies ist als Teilraum von $\mathcal{B}(X)$ ein metrischer Raum.

Satz II.3.6 von Dini[5]

Es sei X ein kompakter Raum, Y ein metrischer Raum, (f_n) eine Folge in $\mathcal{C}(X, Y)$, die punktweise gegen $f \in \mathcal{C}(X, y)$ konvergiert. Weiterhin gelte für alle

[5]Ulisse Dini, 1845-1918

$x \in X$, $n \in \mathbb{N}$:

$$d(f_n(x), f(x)) \geq d(f_{n+1}(x), f(x))$$

Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, das heißt in der ∞-Norm auf $\mathcal{C}(X,Y) \subseteq B(X,Y)$

*B*eweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ gibt esein $n(x)$ derart, dass

$$\forall m \geq n(x) : d(f_m(x), f(X)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Weiter gibt es eine Umgebung U_x von x, so dass für jedes $y \in U_x$ gilt: $d(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $d(f_{n(X)}(y), f_{n(x)}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Also gilt für jedes $m \geq n(x)$ und $y \in U_x$:

$$\begin{aligned} d(f_m(y), f(y)) &\leq d(f_{n(x)}(y), f(y)) \\ &\leq d(f_{n(x)}(y), f_{n(x)}(x)) + d(f_{n(x)}(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Aus $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ folgt, dass es $x_1, \ldots, x_k \in X$ gibt mit $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Sei $N = \max\{n(x_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$, also gilt $\forall y \in X, m \geq N : d(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$. ■

Anwendung: Sei $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei rekursiv die Funktion w_k definiert durch $w_0 = 0$, $w_{n+1}(x) = w_n(x) + \frac{1}{2}(x - w_n(x)^2)$. Das sind alles Polynome. Dann gilt: $w_n \to \sqrt{\cdot}$ gleichmäßig auf $[0,1]$:

Punkteweise Konvergenz: Sei $x \in [0,1]$. Für die Funktion $f : [0, \sqrt{x}] \to \mathbb{R}$, $w \mapsto w + \frac{1}{2}(x - w^2)$ gilt: $f(0) = \frac{1}{2}x \leq f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$. $f'(w) = 1 - w \geq 0$, also ist f monoton wachsend. $f(w) \in [0, \sqrt{x}]$, also $w \leq f(w)$. Damit gilt: $w_0 = 0$, $w_{n+1} = f(w_n)$ ist monoton wachsend, also konvergiert (w_n) gegen ein $y \in [0,1]$.

f ist stetig, also $f(y) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{k\to\infty} w_{n+1} = y$, also $f(y) = y + \frac{1}{2}(x - y^2) = y \implies y^2 = x$, also $y = \sqrt{x}$. Nach Satz von Dini gilt die Behauptung.

Satz II.3.7 von Stone[6]-Weierstraß[7]

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ ein Teilring, der die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von X trennt, d.h.:

$$\forall x \neq y \in K : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y).$$

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(K)$.

Beweis. Hier folge ich den Grundzügen der modernen Analysis von Dieudonné[8].

[6] Marshall Harvey Stone, 1903-1989
[7] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897
[8] Jean Alexandre Eugène Dieudonné, 1906-1992

Für jedes $f \in \mathcal{A}$ gehört $|f|$ zu $\bar{\mathcal{A}}$:

Denn: Sei $m = \max\{|f(x)| \mid x \in X\}$, $\frac{f}{m} \in \mathcal{A}$, genauso $\frac{f^2}{m^2} \in \mathcal{A}$. Verwende die Folge (w_n) aus der Anwedung zum Satz von Dini und betrachte rekursiv: $f_0 = 0$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(\frac{f^2}{m^2}(x) - f_n^2(x))$. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $\sqrt{\frac{f^2}{m^2}} = |\frac{f}{m}|$, also konverigiert (mf_n) gleichmäßig gegen $|f|$.

Mit $f, g \in \mathcal{A}$ liegen auch die Funktionen $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ und $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ in $\mathcal{A}$, denn $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ beziehungsweise $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

Sei $f \in \mathcal{C}(K)$, und $\varepsilon > 0$. Zeige: Es existiert ein $g \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $d(f, g) < \varepsilon$.

Zunächst zeige: Es gibt für jedex $x \in X$ ein $g \in \bar{\mathcal{A}}$, so dass $g(x) = f(x)$ und für jedes $y \in X$ gilt: $g(y) < f(y) + \varepsilon$.

Sei $x \in X$ fest. Für $y \in X$ existiert dann eine Funktion $g_y \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = g_y(x)$, $f(y) = g_y(y)$, denn wenn $x = y$, so wähle g_y konstant gleich $f(x)$, und wenn $yx \neq y$, so gibt es ein h mit $h(x) \neq h(y)$. Setzte für $z \in X$:

$$g_y(z) \coloneqq \frac{h(z) - h(y)}{h(x) - h(y)} \cdot f(x) + \frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)} \cdot f(y)$$

g_y ist stetig, also gibt es eine Umgebung U_y von y mit $\forall y \in U_y : |f(z) - g(y)| < \varepsilon$.

$X = \bigcup_{y \in X} U_y$, also existierten $y_1, \ldots, y_k$ mit $X = \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$. Setze $g \coloneqq \min_{1 \leq i \leq k}(g_{y_i}) \in \bar{\mathcal{A}}$. $g(x) = f(X)$, da $g_y(x) = f(x)$ für jedes $y \in X$ gilt. Für jedes $x \in X$ gib es ein $i = 1, \ldots, k$, so dass $z \in U_{y_i}$, also gilt $g(z) \leq g_{y_i}(z) < f(z) + \varepsilon$, womit gezeigt ist, was zunächst zu zeigen war.

Um die Existenz von $g \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $d(f, g) < \varepsilon$ einzusehen, wählen wir für jedes $x \in X$ eine Funktion $h_x \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $h_x(x) = f(x)$ und $\forall y \in X : h_x(y) < f(y) + \varepsilon$.

Dies geht, denn für alle $x \in X$ gibt es eine Umgebung V_x von x mit $\forall y \in V_x$: $h_x(y) > f(y) - \varepsilon$, den $h_x - f$ ist stetig und hat bei x den Funktionswert 0.

$X = 0 \bigcup_{x \in X} V_x$. Wähle $x_1, \ldots, x_n \in x$ mit $X = \bigcup_{i=1}^r V_{x_i}$ und setzte $g \coloneqq \max_{1 \leq i \leq r}(h_{x_i}) \in \bar{\mathcal{A}}$. Dann gilt $d(g, f) < \varepsilon$. ■

Beispiel II.3.8 1. Jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ lässt sich gleichmäßig durch Polynomfunktionen approximieren.

Ä llgemeiner: Für kompaktes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich jede stetige Funktion gleichmäßig durch Polynomfunktionen in n Variablen approximieren.

2. Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Die stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach Y entsprechen den periodischen stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach Y mit Periode 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sind $x \mapsto \sin(2\pi nx)$ und $x \mapsto \cos(2\pi nx)$ in $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus implizieren, dass $\mathcal{A} = \{x \mapsto$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_i \sin 2\pi kx + \sum_{l=0}^{n} b_l \sin 2\pi lk \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}\}$ ein Teilring von $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ist. Insbesondere lässt sich jede stetige Funktion auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gleichmäßig durch Elemente aus $\mathcal{A}$ approximieren.

Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $g \in \mathcal{A}$, $|f-g| < \varepsilon$. Dann ist $\int_0^1 |f-g|^2 dx < \varepsilon^2$, also $d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f-g|^2 dx} < \varepsilon$. Das heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g \in \mathcal{A}$: $d(f,g) < \varepsilon$. Schreibe $g = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin 2\pi kx + \sum_{l=0}^{n} k_l \cos 2\pi lx \in \mathcal{A}_n = \{\sum_{k=1}^{n} a_k \sin 2\pi kx + \sum_{l=0}^{n} k_l \cos 2\pi lx \mid n \text{ fest}\}$.

Auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ habne wir ein Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x) \cdot q(g) dx$$

Aufgabe: Bestimme den Abstand $d_2(f, \mathcal{A}_n)$. Benutze dazu eine Orthonormalbasis in $\mathcal{A}_n$: $S_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\pi kx$, $C_0(x) = 1$, $C_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi lx$, $l > 0$. Dann minimiert

$$g = \sum_{k=1}^{n} \langle f, S_k\rangle S_k + \sum_{l=0}^{n} \langle f, C_l\rangle C_l$$

den Abstand $d_2(f,h)$ für $h \in \mathcal{A}_n$.

3. Der Satz von Stone-Weierstraß wird z. B. benutzt beim Beweis des Satzes von Peter und Weyl über Darstellungen von kompakten topologischen Gruppen.

   Eng verwandt ist die Möglichkeit, kompakte Symmetriegruppen von Differentialgleichungen bei deren Lösung zu benutzten. Prominentestes Beispiel: Spektrum von Wasserstoffatomen.

Definition II.3.9 Wo ein Weg ist. . .

Es sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung eines kompakten reellen Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ nach X.

Zwei Wege $\gamma : [a,b] \to X$, $\delta : [c,d] \to X$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ mit $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ gibt mit $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Sind $f : [a,b] \longrightarrow X$ und $g : [b,c] \longrightarrow X$ zwei Wege mit $f(b) = g(b)$, so ist $g * f : [a,c] \longrightarrow X$ ein Weg, wenn wir

$$g * f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b] \\ g(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

definieren.

Für einen Weg $\gamma : [a,b] \to X$ ist $\mathrm{Bild}(\gamma)$ zusammenhängend.

Wir betrachten auf X die Äquivalenzrelation $\sim$, die gegeben ist durch

$$x \sim y \iff \exists \gamma : [a,b] \to X : \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\,.$$

Diese ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv. Sie ist transitiv, da wenn $\gamma : [a,b] \to X$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ ein Weg ist und $\delta : [b,d] \to X$, $\delta(b) = y$, $\delta(d) = z$ auch, dann ist auch $g * f$ ein Weg.

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind alle zusammenhängend, denn wäre $[x]_\sim$ nicht zusammenhängend, dann gäbe es zwei offene Mengen $U, V \in X$ mit $[x]_\sim$ mit $[x]_\sim = ([x]_\sim \cap U) \cup ([x]_\sim \cap V)$, $[x]_\sim \cap U \neq \emptyset$, $[x]_\sim \cap V \neq \emptyset$ $[x]_\sim \cap U \cap V = \emptyset$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \in U$. Zu $y \in V \cap [x]_\sim$, gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Offensichtlich ist $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq [x]_\sim$, aber $(\mathrm{Bild}(\gamma) \cap U) \cap (\mathrm{Bild}(\gamma) \cap V) = \emptyset$, im Widerspruch zu

Die Äquivalenzklassen heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* von X. Ein wegzusammenhängender Raum, also einer mit nur einer Wegzusammenhangskomponente, ist zusammenhängend. (Beispiel: $SO(n)$)

Ein Beispiel für einen zusammenhängenden Raum, der nicht wegzusammenhängend ist $\mathbb{Z}$ mit der koendlichen Topologie.

Vorsicht: Es gibt einen Weg $P : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, der surjektiv ist.[9]

Definition II.3.10 Offenheit

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge $A \subseteq X$ das Bild $f(A)$ in Y offen ist.

f heißt *offen in* $x \in X$, falls jede Umgebung von x unter f auf eine Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird. Es genügt, dies für eine Umgebungsbasis zu zeigen. Beispielsweise in $\mathbb{R}$ ist $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ offen in $x \in \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) \supseteq (f(x) - \delta, f(x) + \delta)$.

f ist genau dann offen, wenn f in jedem $x \in X$ offen ist.

Beispiel II.3.11 Offenheit

1. Ein Homöomorphismus ist also eine stetige und offene Bijektion. Sei nämlich $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, also sind f, f^{-1} stetig. Für $U \subseteq X$ ist $f(U) = (f^{-1}){-}1(U)$. Das ist offen für ein offenes U.
2. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Wenn in $x \in U$ die Ableitung $D_\varphi(x)$ invertierbar ist, dann ist φ offen im Punkt x.

   Nach dem Satz der impliziten Funktion gibt es $U_o \ni x$, $V_0 \ni f(x)$ mit $\varphi|_{U_0} \to V_0$ bijektiv und $\varphi|_{U_0}^{-1}$ stetig differenzierbar. Also ist $\varphi|_{U_0} : U_o \to V_0$ ein Homöomorphismus, also ist φ offen in x.

[9] z. B. die Peano-Kurve, siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve`.

3. Für eine natürliche Zahl k ist die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \to z^k$ offen.

   Dazu schreiben wir $z = re^{i\alpha}$, $z \neq 0$, also ist $z^k = r^k e^{ik\alpha}$.

   Die Abbildung ist offen in Punkt $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$: Sei U eine offene Umgebung von z_0. In U liegt eine Umgebung von z_0 von der Gestalt

   $$V = \{re^{i\alpha} \mid r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta), \alpha \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]\}$$

   für geeignete $\varepsilon, \delta > 0$, $\delta < r_0$. Das Bild von V ist

   $$\begin{aligned} &\{r^k e^{ik\alpha} \mid r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta), \alpha \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon]\} \\ = &\{\rho e^{i\beta} \mid \rho \in ((r_0 - \delta)^k, (r_0 + \delta)^k)),\ \beta \in (k(\alpha_0 - \varepsilon), k(\alpha_0 + \varepsilon))\} \end{aligned}$$

   Dies ist eine offene Umgebung von z_0^k.

   Für $z_0 = 0$ gilt: $\{z^k \mid z \in B_r(0)\} = B_{r^k}(0)$, also ist die Abbildung auch im Nullpunkt offen.

   Am Argument für $z_0 \neq 0$ sieht man: $z \mapsto z^k$ ist in einer Umgebung von $z_0 \neq 0$ injektiv und die Umkehrabbildung $z \mapsto z^{\frac{1}{k}}$ ist stetig und offen.

Hilfssatz II.3.12 komplexe Polynome

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine polynomiale Abbildung, die nicht konstant ist. Dann ist f offen.

Beweis. Wir zeigen, dass das Bild einer Umgebung der 0 unter f eine Umgebung von $f(0)$ ist. Da Translationen in $\mathbb{C}$ Homöomorphismen sind und aus Polynomen wieder Polynome machen, zeigt das, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jede Umgebung U von z die Menge $f(U)$ eine Umgebung von $f(z)$ ist, und das ist gerade die Behauptung.

Hierbei dürfen wir uns auf den Fall zurückziehen, dass $f(0) = 0$ gilt.

Es sei also $f(z) = \sum_{i=1}^d a_i z^i$.

Wir bemerken zunächst, dass f im Nullpunkt reell differenzierbar ist. Die Ableitung im Nullpunkt ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch Multiplikation mit a_1 zustande kommt. Wegen der binomischen Formeln gilt hier ja

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - a_1 h}{|h|} = 0.$$

Wenn $a_1 \neq 0$ gilt, dann ist die Ableitung ein Isomorphismus, und der Satz von der impliziten Funktion sagt, dass es eine Umgebung U von 0 und eine Umgebung V von $f(0) = 0$ gibt, so dass f auf U injektiv ist, $f(U) = V$, und die lokale Umkehrabbildung zu f auf V differenzierbar. Das heißt, dass auch f^{-1} in 0 stetig ist, f also offen.

Es bleibt der Fall $a_1 = 0$. Es sei $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$. Dann ist $k > 1$, da $a_0 = a_1 = 0$. Wir wollen zeigen, dass f in einer Umgebung der 0 eine k-te Wurzel hat: $f(z) = g(z)^k$, und dass g offen gewählt werden kann. Dann sagt uns die Offenheit von $z \mapsto z^k$, dass auch f im Nullpunkt offen ist, und wir sind fertig.

Dazu schreiben wir $f(z) = z^k \cdot h(z)$ mit $h(z) = \sum_{i=k}^{d} a_i z^{i-k}$. Das Polynom $\tilde{h}$ hat also im Nullpunkt den Wert $a_k \neq 0$. In einer Umgebung von a_k gibt es wegen II.3.11 eine stetige, offene k-te Wurzel. Die k-te Wurzel $h(z)^{1/k}$ ist also in einer Umgebung der 0 definiert, und bei näherem Hinsehen sieht man, dass die Ableitung im Nullpunkt regulär ist.

Daher gilt in einer Umgebung der 0 :

$$f(z) = z^k (h(z)^{1/k})^k = (zh(z)^{1/k})^k.$$

Das ist die k-te Potenz einer bei 0 offenen Abbildung, und damit ist f selbst im Ursprung offen. ■

Hilfssatz II.3.13 à la Liouville

Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und offene Abbildung, X sei nichtleer und kompakt, Y sei zusammenhängend und hausdorff'sch.

Dann ist f surjektiv und insbesondere ist Y auch kompakt.

Beweis. Das Bild von f ist offen nach Definition der Offenheit und kompakt wegen II.3.4. Als Kompaktum in Y ist $f(X)$ abgeschlossen, siehe II.2.11. Es ist mithin $Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X))$ eine Zerlegung von Y als Vereinigung zweier offener disjunkter Teilmengen. Da $f(X)$ nicht leer ist und Y zusammenhängend ist, muss $Y \setminus f(X)$ leer sein: f ist surjektiv. ■

Bemerkung: Dies ist ein topologisches Pendant zum Satz von Liouville aus der Funktionentheorie. Dieser besagt: Eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant. Das folgt aus II.3.13 unter Benutzung des Satzes von der Gebietstreue (nicht konstante holomorphe Funktionen sind offen) und des Riemann'schen Hebbarkeitssatzes: Sei $g(z) := f(\frac{1}{z})$, $z \neq 0$ ist beschärnkt, also lässt sich g ei $z = 0$ holomorph fortsetzbar. f lässt sich zu einer holomorphen Abbildung $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ fortsetzen.

Satz II.3.14 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann besitzt f eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Nach Hilfssatz II.3.12 ist f offen. Außerdem gilt (siehe I.2.1), dass $|f(z)|$ mit $|z|$ gegen unendlich geht.

Wir können demnach f zu einer stetigen Abbildung $\hat{f}$ von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ auf sich selbst, mit $\hat{f}(\infty) = \infty$ und $\hat{f}(z) = f(z), z \in \mathbb{C}$, fortsetzen, und man verifiziert, dass auch die Fortsetzung offen ist. Also ist die Fortsetzung von f surjektiv nach Liouville, und es gibt ein $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $f(z) = 0$. Da z nicht ∞ sein kann (hier wird f ja unendlich) ist $z \in \mathbb{C}$ wie behauptet. ■

§ II.4. Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition II.4.1 Atlas

Es sei X ein topologischer Raum. Ein n-dimensionaler *Atlas* auf X besteht aus einer offenen Überdeckung $\ddot{U}$ von X, so dass für jedes $U \in \ddot{U}$ ein Homöomorphismus

$$\varphi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

existiert, wobei $Z(U)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

Jeder Atlas liegt in einem *maximalen Atlas*

$$\{(U, \varphi) \mid U \subseteq X \text{ offen}, \varphi : U \to Z \subset \mathbb{R}^n \text{ ein Homöomorphismus}\}.$$

Zum Beispiel besitzt jede offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ einen Atlas; wir nehmen einfach U selbst als Überdeckung und die Identität als Kartenabbildung.

Definition II.4.2 topologische Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum X ist eine n-dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn er hausdorff'sch ist, mit einem Atlas ausgerüstet werden kann und eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Bemerkung II.4.3 Eindeutigkeitsunterstellung und Abzählbarkeitsaxiome

a) **Vorsicht:** Wir halten im Vorübergehen fest, dass es nicht *a priori* klar ist, dass die Dimension eines Atlas durch die Topologie auf X festliegt. Das ist so, aber der Beweis ist nicht so offensichtlich. Schließlich muss man so etwas zeigen, wie dass es für $m \neq n$ keine offene stetige Abbildung einer m-dimensionalen Kugel in eine n-dimensionale gibt.

b) Die letzte Bedingung (abzählbare Basis) ermöglicht einige Konstruktionen mit topologischen Mannigfaltigkeiten, die sich als sehr hilfreich erweisen. Sie impliziert zum Beispiel, dass jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung hat.

Man nennt sie auch das *zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Der Name schreit nach einem Vorgänger: ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Metrische Räume haben diese Eigenschaft zum Beispiel, sie ist eine **lokale** Bedingung, sagt sie doch nur etwas über Umgebungen von einem jeden Punkt aus. Das werden wir im nächsten Hilfssatz einmal austesten.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert offensichtlich das erste.

c) Ein topologischer Raum, in dem das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, ist $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist $\{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis bei x. Für eine Basis $\mathcal{B}$ der diskreten Topologie jedoch muss es für $x \in \mathbb{R}$ auch eine Teilmenge U mit $x \in U \subseteq \{x\}$ geben, also $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{B}$ und damit $\mathcal{B}$ nicht abzählbar.

d) Ein metrischer Raum (X, d) erfüllt immer das erste Abzählbarkeitsaxiom, denn für $x \in X$ ist $\{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ eine Umgebungsbasis von x. Ist nämlich $x \in U$, U offen, so existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dann ist $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

e) Wenn $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, so zähle sie ab:

$$B(x) = \{U_1, U_2, \ldots\}$$

durch Schneiden erhält man dann die Umgebungsbasis

$$\tilde{B}(x) = \{U_1, U_1 \cap U_2, \ldots, \bigcap_{i=1}^{k} U_i \mid k \in \mathbb{N}\}$$

die aus immer kleiner werdenden Umgebungen von x besteht.

Definition II.4.4 schon wieder Folgen

Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, falls in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Vorsicht: <u>Der</u> Grenzwert ist im Allgemeinen nicht mehr eindeutig, also eigentlich der bestimmter Singular verboten. Für die Eindeutigkeit des Grenzwerts braucht man ein Trenungsaxiom, zum Beispiel ist hausdorff'sch hinreichend.

X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hilfssatz II.4.5 Folgen für die Folgenkompaktheit

Es sei X ein topologischer Raum.

a) Ist X kompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist X folgenkompakt.

b) Ist X folgenkompakt und metrisch, so ist X auch kompakt.

Beweis.

a) Es sei (x_n) eine Folge in X. Dann gibt es ein $x \in X$, so dass in jeder Umgebung U von x für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ der Punkt x_n liegt.

Anderenfalls ließe sich für alle $x \in X$ eine Umgebung U_x finden, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und weil

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

eine endliche Teilüberdeckung hat, hätte man einen Widerspruch.

Nun haben wir so ein x. Dieses besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3, \dots$$

und wir können bequem eine Teilfolge x_{n_k} wählen mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : n_{k+1} > n_k \quad \text{und} \quad x_{n_k} \in U_k.$$

b) Es sei $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung des folgenkompakten metrischen Raums X.

Für jedes $x \in X$ wählen wir ein $U_x \in \ddot{U}$ derart, dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$B_1(x) \subseteq U_x \quad \text{oder} \quad \exists r(x) > 0 : B_{r(x)}(x) \subseteq U_x, \forall U \in \ddot{U} : B_{2r(x)}(x) \nsubseteq U.$$

Jetzt nehmen wir an, dass $\ddot{U}$ keine endliche Teilüberdeckung besitze. Wir starten mit einem beliebigen $x_1 \in X$ und wählen

$$x_2 \in X \setminus U_{x_1},\ x_3 \in X \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2}), \dots$$

Da X folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Wir wählen ein $r \in (0,1)$ derart, dass $B_r(a) \subseteq U_a$. Dann liegt x_{n_k} für großes k in $B_{r/5}(a)$, und es gilt

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2r/5.$$

Andererseits zeigt

$$x_{n_k} \in B_{4r/5}(x_{n_k}) \subseteq B_r(a) \subseteq U_a \in \ddot{U},$$

dass $r(x_{n_k}) \geq 2r/5$, und damit auch

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \geq 2r/5.$$

Dieser Widerspruch besiegelt das Schicksal unserer irrigen Annahme, $\ddot{U}$ habe keine endliche Teilüberdeckung.

Also ist X kompakt, da $\ddot{U}$ beliebig war. ∎

Beispiel II.4.6 Schönheiten des Abendlandes

Nach diesem Grundlagenexkurs kehren wir nun zu den topologischen Mannigfaltigkeiten zurück. Wir kennen noch keine Beispiele. Oder doch?

a) Jede offene, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Hier muss man vor allem das zweite Abzählbarkeitsaxiom testen:

   Es gibt eine abzählbare Subbasis der Topologie, z. B.

   $$B := \{B_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n \cap U, r \in \mathbb{Q}, r > 0, B_r(x) \subseteq U\}$$

   Ist nämlich $V \subseteq U$ offen und $x \in V$, so gibt es ein $r > 0$ so dass $B_r(x) \subseteq V$. Da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt, gibt es ein $q \in \mathbb{Q}^n$ mit $d(q,x) < \frac{r}{4}$. Wähle $t \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{r}{4} < t < \frac{r}{2}$, dann ist $x \in B_t(q) \subseteq B_r(x)$. Also liegt jedes $x \in V$ in einem $B_x \in \mathcal{B}$, so dass $B_x \subseteq V$, also ist $V = \bigcup_{x \in V} B_x$.

b) Jeder Hausdorffraum mit einem endlichen Atlas ist dann auch eine topologische Mannigfaltigkeit.

c) Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ mit der früher eingeführten Quotiententopologie eine topologische Mannigfaltigkeit.

   Denn er lässt sich überdecken durch die offenen Mengen

   $$U_k := \{(x_i)_{1 \le i \le n+1} \mid x_k = 1\},\ 1 \le k \le n+1,$$

   und diese werden beim Quotientenbilden mit ihrem Bild auch topologisch identifiziert, liefern also einen endlichen Atlas von $\mathbb{P}^n(K)$.

d) Das Raum-Zeit-Kontinuum ist eine vierdimensionale (kompakte?) Mannigfaltigkeit.

e) Keine Mannigfaltigkeit ist der folgende Raum: Ausgehend von $Y = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Äquivalenzrelation

   $$(y_1, t) \sim (y_2, s) \iff y_1 = y_2 \neq 0$$

   betrachten wir $X := Y/\sim$. X sieht abgesehen vom Nullpunkt aus wie $\mathbb{R}$, nur dass er „zwei Nullpunkte" hat.

   Die Abbildungen

   $$\mathbb{R} \ni x \mapsto [(x,1)] \in X \qquad\qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto [(x,0)] \in X$$

   sind Homöomorphismen von $\mathbb{R}$ auf einen offenen Teil von X, also bilden die Umkehrabbildungen einen Atlas auf X.

   Aber: X ist nicht hausdorff'sch!. Eine offene Umgebung von $[(0,0)]$ enthält $[(x,0)]$ für $|x| < \delta$ für ein $\delta > 0$. Ebenso enthält eine offene Umgebung von $[(0,1)]$ die Punkte $[(x,0)]$ für $|x| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Für $x \neq 0$ ist aber $[(x,1)] = [(x,0)]$, also sind diese beiden offenen Umgebungen nicht disjunkt.

f) Keine topologische Mannigfaltigkeit ist zum Beispiel der folgende Raum, obwohl er einen endlichen Atlas hat: Wir nehmen die Einheitssphäre $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und definieren $X = S^1/\simeq$, wobei die Äquivalenzrelation $\simeq$ durch $x \simeq -x$ für $x \neq \pm 1$ definiert ist.

   Ein offener Halbkreis wird hierbei injektiv nach X abgebildet, und wir erhalten einen schönen Atlas, von dem sogar zwei Karten genügen. Aber X ist nicht hausdorff'sch, weil die Klassen von ± 1 sich nicht durch offene Umgebungen trennen lassen.

Hilfssatz II.4.7 M **ist regulär**

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$ ein Punkt.

Dann enthält jede offene Umgebung von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x.

Beweis. Es sei U eine offene Umgebung von x. Wir dürfen annehmen, dass U der Definitionbereich einer Karte aus dem Atlas von M ist. Es sei $\varphi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ die zugehörige Karte und ohne Einschränkung $\varphi_U(x) = 0$.

Weiter sei $r > 0$ gewählt, sodass $\overline{B_r(0)} \subseteq Z(U)$ gilt: diese Menge ist ja offen. Dann liegt der Abschluss $A := \overline{B_{r/2}(0)}$ in $Z(U)$ und dies ist der Abschluss der Umgebung $B_{r/2}(0)$ von 0.

Das zeigt, dass $\varphi_U^{-1}(A) \subseteq U$ der Abschluss in U von einer Umgebung von x ist. Wir müssen noch überlegen, dass $\varphi_U^{-1}(A)$ tatsächlich auch in M abgeschlossen ist. Aber das liegt daran, dass $\varphi_U^{-1} : Z(U) \longrightarrow U \subseteq M$ stetig ist, und daher den kompakten Abschluss $\overline{B_{r/2}(0)}$ auf ein kompaktes und daher abgeschlossenes Bild (wegen II.2.11) abbildet. ■

Definition II.4.8 regulär, normal

Es sei X ein topologischer Raum, in dem die Punkte (d.h.: die einelementigen Teilmengen) abgeschlossen sind (ein sogenannter T_1-Raum also).

a) Dann heißt X *regulär*, falls für jeden Punkt $x \in X$ jede Umgebung U von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x enthält.

   Das ist äquivalent dazu, dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$, $x \notin A$, offene Mengen U, V existieren mit

$$x \in U,\ A \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset.$$

   Wir haben also gerade gezeigt, dass eine Mannigfaltigkeit regulär ist.

b) X heißt *normal*, falls es für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B in X disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Man sagt auch: A und B haben disjunkte offene Umgebungen.

Es ist klar, dass normal regulär impliziert (denn Punkte sind abgeschlossen), und dass regulär hausdorffsch impliziert (dito).

Als nächstes wollen wir sehen, dass Mannigfaltigkeiten auch normal sind, und zeigen sogar:

Hilfssatz II.4.9 Mannigfaltigkeiten sind normal

Es sei X ein regulärer topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom (abszählbare Basis der Topologie) erfüllt.

Dann ist X normal.

Beweis. Es seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Aufgrund der Regularität gibt es für jedes $a \in A$ eine Umgebung U_a, deren Abschluss zu B disjunkt ist. Wir überdecken A mit diesen U_a. Da das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, gibt es eine abzählbare Überdeckung $\ddot{U}$ von A, sodass alle $U \in \ddot{U}$ einen zu B disjunkten Abschluss haben. Dasselbe können wir auch für B machen: es gibt eine abzählbare offene Überdeckung $\ddot{V}$ von B, sodass alle $V \in \ddot{V}$ einen zu A disjunkten Abschluss haben.

Nun wählen wir eine Abzählung von $\ddot{U}$ und von $\ddot{V}$:

$$\ddot{U} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}, \quad \ddot{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}.$$

Nun definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{U}_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{und} \quad \widetilde{V}_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Diese Mengen sind alle offen, und wir entnehmen nur Punkte, die nicht zu A beziehungsweise B gehören. Demnach sind

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{U_n} \quad \text{und} \quad B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{V_n}$$

offene und offensichtlich disjunkte Umgebungen von A und B. ■

Bemerkung II.4.10 Andere Strukturen

a) Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Wenn zwei Karten $\varphi_U : U \longrightarrow Z(U)$, $\varphi_V : V \longrightarrow Z(V)$ auf offenen Mengen mit nichtleerem Schnitt gegeben sind, dann liefert das natürlich insbesondere einen Homöomorphismus

$$\psi_{U,V} : \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V),$$

indem wir erst mit φ_U^{-1} zurückgehen und dann mit φ_V absteigen.

Diese Abbildungen $\psi_{U,V}$ heißen die *Kartenwechsel* des Atlanten.

b) Wenn wir von den Kartenwechseln des Atlanten verlangen, dass sie differenzierbar sind, so können wir unter Rückgriff auf den Atlas definieren, wann eine reellwertige Funktion f auf M differenzierbar ist. Das ist sie nämlich genau dann, wenn für alle Karten gilt, dass

$$f \circ \varphi_U^{-1}$$

auf $Z(U)$ differenzierbar ist. Dies ist dann eine konsistente Bedingung, wenn die Kartenwechsel differenzierbar sind, und die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x \in M$ kann durch Blick auf eine einzige Karte getestet werden.

Wenn die Kartenwechsel d differenzierbar sind, so kann man auch sagen, wann eine Funktion d mal differenzierbar ist. Und hier kann d auch ∞ sein.

So kommt man zum Begriff der Differenzierbaren Mannigfaltigkeit, dem Hauptgegenstand der Differentialtopologie.

c) In $\mathbb{R}^n$ ist die Länge einer (stückweise) stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_0^1 |\gamma'(0)| dt$.

Sei nun M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\gamma : [0,1] \to M$ ein Weg. γ hießt differenzierbar in $t \in (0,1)$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\gamma(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq U$, U eine Kartenumgebung von $\gamma(t)$, so dass $\varphi_U \circ \gamma|_{(t-\varepsilon,t+\varepsilon)} : (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \to Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ in t differenzierbar ist. Das ist unabhängig von der gewählten Umgebung von $\gamma(t)$.

Was ist nun die Länge der Kurve γ? Wähle dazu $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n = 1$, so dass $\gamma([t_1, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ wobei (U_i, φ_{U_i}) zum Atlas gehört. Ein Ansatz für die Länge der Kurve ist

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} L(\varphi_{U_i} \circ \gamma|_{[t_{i-1}, t-i]}) \,.$$

Ist dies abhängig von der gewähnten Zerlegung in t_i? Als Ausweg fordern wir, dass der Atlas Riemann'sch ist, also alle Kartenwechsel $\psi_{U,V} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$ längenerhaltend sind ($\forall x \in \varphi_U(U \cap V) : D\psi_{U,V}(X) \in O(n)$). Wenn der Atlas Riemann'sch ist, dann hängt die Länge $L(\gamma)$ nicht von den t_i und U_i ab (was hier nicht bewiesen werden soll).

Wenn dann die Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist, ist sie wegzusammenhängend und zwischen je zwei Punkten gibt es stückweise differenzierbare Wege. Durch $d(p,q) \coloneqq \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}}(L(\gamma))$ mit $\Omega_{pq} \coloneqq \{\gamma : [0,1] \to M,\ \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q$ und γ stückweise stetig differenzierbar$\}$ definiert eine Metrik auf M. Damit versehen nennt man M eine Riemann'sche[10] Mannigfaltigkeit. Dies ist der Hauptgegenstand der Riemann'schen Geometrie

[10] Bernhard Riemann, 1826-1866

d) Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbare. Es ist nicht klar, was dann die Ableitung von f ist, denn der Funktionswert der Ableitung hängt von der benutzten Karte ab:

   Beispiel: $M = \mathbb{R}$ ist mit den beiden Karten $id : M \to \mathbb{R}$, $m : M \to \mathbb{R}$, $m(x) = 2{\cdot}x$, eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. f ist differenzierbar und $f \circ id^{-1} = id$ von $f \circ m^{-1} = [x \mapsto \frac{1}{2}x]$ verschieden, also hängt der Wert von f' an der Stelle $o \in M$ von der Wahl der Karte ab.

   Diese Inkonsistenz muss man buchhalterisch bewältigen. Das dabei benutze Konzept ist das der Differentialform.

Als nächstes wollen wir einen interessanten Existenzsatz über stetige Funktionen auf normalen topologischen Räumen – wie etwa Mannigfaltigkeiten – zeigen.

Satz II.4.11 Existenzsatz von Urysohn[11]

Es seien X ein normaler topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen.

Dann gibt es eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$, die auf A konstant gleich 0 und auf B konstant gleich 1 ist und nur Funktionswerte zwischen 0 und 1 annimmt.

Beweis. Natürlich dürfen wir A und B als nichtleer voraussetzen, sonst nehmen wir einfach eine konstante Funktion.

Wir konstruieren zunächst eine Familie von offenen Mengen, die durch die Zahlen

$$D \coloneqq \{a/2^m \mid 0 \leq a \leq 2^m, a, m \in \mathbb{N}_0\}$$

parametrisiert werden und die Bedingung

$$\forall p, q \in D, p < q : \overline{U(p)} \subseteq U(q)$$

erfüllen und etwas mit A und B zu tun haben. Diese Definition geht rekursiv nach dem benötigten Exponenten bei der Potenz von 2 im Nenner.

Wir setzen $U(1) = U(1/2^0) \coloneqq X \setminus B$ und wählen weiter zwei disjunkte Umgebungen U bzw. V von A bzw. B.

Der Abschluss von U ist dann immer noch disjunkt zu B, und wir setzen $U(0) = U(0/2^0) = U$.

Sind nun alle $U(a/2^n)$ für $n \leq N$ und alle erlaubten a definiert, so müssen wir $U(a/2^{N+1})$ für ungerade Zahlen $1 \leq a \leq 2^{N+1} - 1$ definieren.

Dazu wählen wir disjunkte offene Umgebungen U, V von $\overline{U((a-1)/2^{N+1})}$ und $X \setminus U((a+1)/2^{N+1})$, die es wegen der Disjunktheit und der Normalität von X gibt. Dann setzen wir $U(a/2^{N+1}) \coloneqq U$.

[11]Pawel Samuilowitsch Urysohn, 1898-1924

Diese Mengen $U(p)$ tun offensichtlich das, was wir wollen. Wir benutzen sie nun, um f zu definieren. Wir setzen nämlich

$$\forall x \in X : f(x) := \begin{cases} \inf\{p \in D \mid x \in U(p)\}, & \text{falls } x \in U(1), \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Auf $A \subseteq U(0)$ ist f 0, auf B ist es 1. Wir müssen die Stetigkeit von f zeigen.

Dazu sei $x \in X$ mit $f(x) = r \in [0,1]$.

Für $r < 1$ ist für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\bigcup_{p \in D, p < r+\varepsilon/2} U(p) \setminus \overline{\bigcup_{q \in D, q < r-\varepsilon/2} U(q)}$$

eine offene Umgebung von x, auf der nur Funktionswerte in $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ angenommen werden. Das zeigt die Stetigkeit in x.

Für $r = 1$ gilt ähnliches für

$$X \setminus \overline{\bigcup_{q \in D, q < r-\varepsilon/2} U(q)},$$

und wir sind fertig. ■

Dieser Satz sagt also insbesondere, dass die Punkte eines normalen Raumes von den stetigen Funktionen getrennt werden – so wie wir es uns sicher vorstellen. Der Satz hat einen Bruder, der mit ihm oft in einem Atemzug genannt wird.

Satz II.4.12 Erweiterungssatz von Tietze[12]

Es sei X ein normaler topologischer Raum. Weiter sei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \longrightarrow [-1,1]$ eine stetige Funktion.

Dann lässt sich f zu einer stetigen Funktion $F : X \longrightarrow [-1,1]$ fortsetzen.

Das geht natürlich dann auch für jedes andere Intervall $[a,b]$ anstelle von $[0,1]$, aber der Beweis ist so etwas weniger notationslastig.

Beweis. Es sei

$$A_0 := \{a \in A \mid f(a) \le -1/3\},\ A_1 := \{a \in A \mid f(a) \ge 1/3\}.$$

Das sind disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X (denn A ist abgeschlossen), und so finden wir eine stetige Funktion $F_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$, die auf A_0 den Wert $-\frac{1}{3}$ und auf A_1 den Wert $\frac{1}{3}$ annimmt.

Die Funktionswerte von $f - F_1$ liegen also zwischen $-\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}$.

[12]Heinrich Franz Friedrich Tietze, 1880-1964

Wir definieren neue Mengen $A_0^{(1)}$ und $A_1^{(1)}$ durch

$$A_0^{(1)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \leq -2/9\},\ A_1^{(1)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \geq 2/9\}.$$

Dann gibt es eine Funktion F_2 auf X mit Werten in $[-2/9, 2/9]$, die auf $A_0^{(1)}$ den Wert $-2/9$ annimmt und auf $A_1^{(1)}$ den Wert $2/9$. Die Funktionswerte $(f(a) - F_1(a)) - F_2(a)$ liegen also alle zwischen $-4/9$ und $4/9$.

Wenn nun $F_1, \dots F_n$ sukzessive so definiert sind, dass auf A die Funktionen f und $F_1 + \cdots + F_n$ sich betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^n$ unterscheiden und F_i für $1 \leq i \leq n$ betragsmäßig nicht größer ist als $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1})$, so definieren wir

$$\begin{aligned} A_0^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \cdots + F_n(a)) \leq -2^{n-1}/3^n\}, \\ A_1^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \cdots + F_n(a)) \geq 2^{n-1}/3^n\}. \end{aligned}$$

Wie vorher gibt es eine stetige Funktion $F_{n+1} : X \longrightarrow [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n]$, die auf $A_0^{(n)}$ den linken und auf $A_1^{(n)}$ den rechten Randpunkt des Intervalls annimmt. Sie unterscheidet sich also von $f(a) - (F_1(a) + \cdots + F_n(a))$ betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^{n+1}$.

Damit stellen wir sicher, dass es eine nicht abbrechende Folge von Funktionen $F_i, i \in \mathbb{N}$, gibt, die die obigen Abschätzungen erfüllen.

Das zeigt, dass die Funktionenfolge $S_n := F_1 + \cdots + F_n$ gleichmäßig konvergiert, der Limes mithin stetig ist, und dass sie auf A gegen f konvergiert. Außerdem sind die Funktionswerte wegen der geometrischen Reihe allesamt betragsmäßig zwischen -1 und 1. ■

Bemerkung II.4.13 Neue Ziele

Wenn man im Fortsetzungssatz von Tietze anstelle einer reellwertigen Funktion eine Vektorwertige Funktion mit Werten in $[-1, 1]^d$ auf A vorgibt, so lassen sich die Komponenten (die ja alle stetige Funktionen sind) alle nach X fortsetzen und zu einer Fortsetzung von f zu einer Funktion $F : X \longrightarrow [-1, 1]^d$ kombinieren.

Wenn anstelle eines solchen übersichtlichen Raums ein Zielraum verwendet wird, von dem man weiß, dass er zu $[-1, 1]^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ homöomorph ist, so gilt der Fortsetzungssatz immer noch.

Beispiel II.4.14 Kein Ziel

Es sei $K = \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Einheitskreisschreibe und $S^1 = \partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dann gibt es keine stetige Abbildung $F : K \to S^1$ mit $F|_{S^1} = \mathrm{Id}_{S^1}$.

Beweis. Zur Vorbereitung betrachten wir $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ mit $\pi(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Weiter sei $\gamma[0, 1] \to S^1$ ein stetiger Weg und $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\gamma(0) = (\cos 2\pi\alpha_0, \sin 2\pi\alpha_0)$.

Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $[0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $\lambda(0) = \alpha_0$ und $\gamma = \pi \circ \lambda$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen nehmen wir an, λ_1 und λ_2 seien Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften. Dann ist $\lambda_1(0) - \lambda_2(0) = \alpha_0 - \alpha_0 = 0$ und $\lambda_1 - \lambda_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und nimmt nur Werte in $\mathbb{Z}$ an, denn für jedes $t \in [0,1]$ gilt $(\pi \circ \lambda_1)(t) = (\pi \circ \lambda_2)(t)$, also $\cos 2\pi\lambda_1(t) = \cos 2\pi\lambda_2(t)$ und $\sin 2\pi\lambda_1(t) = \sin 2\pi\lambda_2(t)$. Also ist $\lambda_1 - \lambda_2$ konstant gleich 0, und damit $\lambda_1 = \lambda_2$.

Weiter müssen wir die Existenz zeigen: Es sei $t_0 = \sup\{\tau \in [0,1] \mid \text{es gibt ein } \lambda_\tau : [0,\tau] \to \mathbb{R} \text{ mit } \lambda_\tau(0) = \alpha_0,\ \lambda_\tau \text{ stetig und } \gamma|_{[0,\tau]} = \pi \circ \lambda_\tau\}$. Für $\tau = 0$ wird dies durch $\lambda_0 : [0,0] \to \mathbb{R},\ 0 \mapsto \alpha_0$ erfüllt. Betrachte dann $\gamma(t_0)$ und eine offene Umgebung U von $\gamma(t_0)$ in S^1, so dass ein offenes $V \in \mathbb{R}$ existiert mit einem Homöomorphismus $\pi|_V : V \to U$, etwa etwa mit $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(t_0) = \pi(\beta)$, $V = (\beta - \frac{1}{3}, \beta + \frac{1}{3})$ und $U = \pi(V) = \{(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi) \mid \varphi \in (\beta - \frac{1}{3}, \beta + \frac{1}{3})\}$. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $D := \gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]) \subseteq U$. Dann ist $\pi^{-1}|_V \circ \gamma|_D : D \to \mathbb{R}$ derart, dass $\gamma|_D = \pi \circ \underbrace{(\pi^{-1}|_V \circ \gamma|_D)}_{l:=}$. Wähle nun ein $\tau \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$, so dass λ_τ definiert ist. Wegen $\pi(\lambda_\tau)) = \gamma(\tau) = \pi(l(\tau))$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_\tau(\tau) = l(\tau) + k$. Definiere $\tilde{\lambda} : ([0, t_0 + \varepsilon] \cap [0,1]) \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda_\tau(t), & t \le \tau \\ l(t), & t > \tau \end{cases}$$

$\tilde{\lambda}$ ist stetig, auf der Definitionsmenge von $\tilde{\lambda}$ gilt $\lambda = \pi \circ \tilde{\lambda}$, hat den richtigen Anfangswert und ist bei t_0 definiert. Also ist $t_0 = 1$.

Damit ist die Vorbereitung abgeschlossen, und wir wenden uns der Aussage zu. Sei $F : K \to S^1$ eine stetige Abbildung. Dazu betrachten wir den stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to S^1,\ t \mapsto F((t,0))$. Die Vorbereitung sagt uns un, dass es eine Funktion $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ \lambda = \gamma$ gibt. Für $0 \le r \le 1$ sind $g_r : [0,1] \to S^1$, $x \mapsto F(r \cdot (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x))$ auch stetige Funktionen mit $g_r(0) - g_r(1) =\in \mathbb{Z}$. Für jedes r gibt es also $l_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ l_r = g_r$ und $l_r(0) = \lambda(r)$.

Daraus konstruieren wir die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ (r,x) \mapsto l_r(x)$, die (ohne Beweis) stetig ist. $H(r,1) - H(r,0)$ ist eine stetige Abbildung von $[0,1] \to \mathbb{R}$, die nur Werte aus $\mathbb{Z}$ annimmt, also konstant ist und für $r = 0$ den Wert 0 annimmt, also gilt $H(r,1) - H(r_0)$ für alle r.

Wäre $F|_{S^1} = \mathrm{Id}|_{S^1}$, dann wäre $g_1(x) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ und $l_1(x) = x + c$, $c \in \mathbb{Z}$. Damit gälte $H(1,0) - H(1,1) = -1$, aber $H(0,0) - H(0,1) = 0$, Wid! ■

Bemerkung II.4.15 [

Umlaufzahl]

a) Im letzten Beispiel betrachteten wir die stetige Kurve $\gamma[0,1] \to S^1$ und draus konstruiert die stetige Abbildung $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma = \pi \circ \lambda$. γ ist gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \varepsilon$ gilt: $|\gamma(x) - \gamma(y)| < 2$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$, und Unterteile das Interval $[0,1]$ in N gleich große Teilintervalle $J_k = [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$, $1 \leq k \leq N$. Die Einschränkung $\gamma|_{J_k} : J_k \to S^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}$ enthält demnach einen der Gegenpunkte nicht. Weiter ist $\pi^{-1}(S^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}) = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_0 + l \mid l \in \mathbb{Z}\}$ mit $\pi(\alpha_0) = -\gamma(\frac{k-1}{N})$. Das heißt, dass $\pi|_{(\alpha_0, \alpha_0+1)}$ eine Bijektion zwischen (α_0, α_0+1) und $S^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}$, und sogar ein Homöomorphismus.

Sei $\psi : S^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\} \to \mathbb{R}$ die stetige Abbildung, für die gilt: $\pi \circ \phi = \mathrm{id}|_{S^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}}$. Definiere nun $\lambda_: J_k \to \mathbb{R}$, $\lambda_k = \psi \circ \gamma|_{J_k}$, also $\pi \circ \lambda_k = \gamma|_{J_k}$. Es ist $a_k := \lambda_{k+1}(\frac{k}{N}) - \lambda_k(\frac{k}{N}) \in \mathbb{Z}$, denn $\pi(\lambda_k(\frac{k}{N})) = \gamma(\frac{k}{N}) = \pi(\lambda_{k+1}(\frac{k}{N}))$. Daraus konstruieren wir $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $\lambda(x) = \lambda_k(x) + a_1 + \ldots + a_{k-1}$, wobei $\frac{k-1}{N} \leq x \leq \frac{k}{N}$.

Nun sei $\gamma : [0,1] \to S^1$ ein geschlossener Weg, also $\gamma(0) = \gamma(1)$. Wie gerade gezeigt, gibt es ein stetiges $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma = \pi \circ \lambda$. Dann heißt $\lambda(1) - \lambda(0) \in \mathbb{Z}$ die *Umlaufzahl* von γ um 0

Allgemeiner sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg, dann gilt für alle $t \in [0,1]$:

$$\gamma(t) = \underbrace{\|\gamma(t)\|}_{\in \mathbb{R}_{>0}} \cdot \underbrace{\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}}_{\in S^1}$$

Es ist $t \mapsto \frac{\gamma(x)}{\|\gamma(t)\|}$ ein geschlossener Weg in S^1, und wir nennen seine Umlaufzahl auch die *Umlaufzahl* von γ um 0, geschrieben $\mathcal{X}(\gamma, 0)$.

b) Dies entspricht der Umlaufzahl im funktionentheoretischen Sinne. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar und geschlossenen. Diese Kurve hat die funktionentheoretische Umlaufzahl $\mathcal{X}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$. Wenn γ wie oben zerlegt ist in $\gamma(t) = r(t) \cdot \tilde{\gamma}(t)$, dann wähle $\tilde{\lambda} : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $\tilde{\gamma}(t) = \pi(\tilde{\lambda}(t)) = \exp(2\pi i \tilde{\lambda}(t))$. Die folgende Rechnung zeigt, dass die beiden Umlaufzahlbegriff gleich sind:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(T)} dt &= \int_0^1 \frac{r(t)' \cdot \exp(2\pi i \tilde{\lambda}(t)) + r(t) \cdot 2\pi i \tilde{\lambda}(t) \exp(2\pi i \tilde{\lambda}'(t))}{r(t) \cdot \exp(2\pi i \tilde{\lambda}(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{r'(t)}{r(t)} dt + \int_0^1 2\pi i \tilde{\lambda}'(t) dt \\ &= \ln r(t)|_0^1 + 2\pi i \tilde{\lambda}(t)|_0^1 \\ &= 0 + 2\pi i (\tilde{\lambda}(1) - \tilde{\lambda}(0))\end{aligned}$$

c) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine stetige, geschlossene Kurve und $x \in \mathbb{R}^1 \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Dann heißt $\mathcal{X}(\gamma, x) := \mathcal{X}(\gamma - x, 0)$ die *Umlaufzahl* von γ um x.

d) Die Umlaufzahl $\mathcal{X}(\gamma, 0)$ bleibt konstant, wenn an γ nur wenig gewackelt wird. Präziser:

   Es sei $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ stetig und so, dass für alle $t \in [0,1]$ die Kurve $\gamma_t : [0,1] \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, $x \mapsto \Gamma(t,x)$ geschlossen ist. Dann haben alle Kurven γ_t die selbe Umlaufzahl um 0: $\forall t \in \mathcal{X}(\gamma_t, 0) = \mathcal{X}(\gamma_0, t)$.

   Denn es gibt eine Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass für alle t und x gilt: $\gamma(t,x) = \|\Gamma(t,x)\| \cdot \pi(H(t,x))$, $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, was man über eine ähnliche Weise zeigen kann, wie weiter oben in dieser Bemerkung benutzt. Weil $\mathcal{X}(\gamma_t, 0) = H(t,1) - H(t,0) \in \mathbb{Z}$ und stetig ist, ist sie konstant.

§ II.5. Mehr von den Kompakta

Wir haben jetzt schon ein paar Mal gesehen, dass der Begriff der Kompaktheit ein wichtiger Begriff in der Topologie ist. Daher wollen wir jetzt diesen Begriff noch etwas mehr beleuchten.

Unser erstes Ziel ist der Satz von Tikhonow[13].

Zunächst müssen wir aber sagen was ein unendliches Produkt von topologischen Räumen ist.

Definition II.5.1 unendliche Produkte

Es seien I eine Indexmenge und $X_i, i \in I$, topologische Räume. Das *(unendliche) Produkt* $\prod_{i \in I} X_i$ ist definiert als die Menge aller Abbildungen

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i, \text{ sodass } \forall i \in I : f(i) \in X_i.$$

Die Elemente dieses Produkts werden wir oft auch suggestiv als $(x_i)_{i \in I}$ notieren.

Auf dem Produktraum wollen wir eine Topologie einführen, nämlich die gröbste, für die alle Projektionen auf die Komponenten stetig sind.

Für festes $i_0 \in I$ sei $U \subseteq X_{i_0}$ offen. Dann muss also die Menge $S(i_0, U)$ aller Funktionen f aus dem Produkt mit der Eigenschaft

$$f(i_0) \in U$$

im Produktraum offen sein.

Die Topologie ist also diejenige, die die Mengen $S(i, U)$ mit $i \in I, U \subseteq X_i$ offen, als Erzeuger (Subbasis) besitzt.

[13] Andrej Nikolajewitsch Tikhonow, 1906-1993; oft auch als Tychonoff transkibiert

Eine Teilmenge $T \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ ist also genau dann offen, wenn für jedes $f \in T$ endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_k \in I$ und offene Mengen $U_j \subseteq X_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$, existieren, sodass

$$f \in S(i_1, U_1) \cap \ldots S(i_k, U_k) \subseteq T$$

Der Satz von Tikhonow wird nachher sagen, dass ein Produkt von kompakten Räumen wieder kompakt ist. Als Vorbereitung zeigen wir schon einmal das folgende.

Hilfssatz II.5.2 spezielle Überdeckungen

Es seien $X_i, i \in I$, kompakte topologische Räume und es gebe eine Überdeckung $\ddot{U}$ von $\prod_{i \in I} X_i$ durch offene Teilmengen der Form $S(i, U)$, wie wir sie in der Definition der Produkttopologie als Subbasis benutzt haben.

Dann besitzt $\ddot{U}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis.

Für den Beweis muss man tatsächlich alles vor allem sauber hinschreiben. Wir wählen also eine Indexmenge J und schreiben uns die Überdeckung $\ddot{U}$ als

$$\ddot{U} = \{S(i_j, U_j) \mid j \in J, i_j \in I, U_j \subseteq X_{i_j} \text{ offen}\}.$$

Wir nehmen an, $\ddot{U}$ besitze keine endliche Teilüberdeckung.

Wir wählen zunächst ein $i_0 \in I$ beliebig.

Weiter wählen wir ein $x_0 \in X_{i_0}$, und bezeichnen mit $H(x_0)$ die Menge

$$H(x_0) := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_{i_0} = x_0\}.$$

Wenn es eine endliche Teilmenge $K \subseteq J$ gibt mit

$$H(x_0) \subseteq \cup_{k \in K} S(i_k, U_k),$$

so könnten wir für jedes $i \in \{i_k \mid k \in K\}$ ein

$$x_i \in X_i \smallsetminus \cup_{k \in K, i_k = i} U_k$$

finden. Ansonsten wäre ja die Vereinigung dieser U_k ganz X_i, und die Vereinigung dieser $S(k, U_k), i_k = i$, wäre der ganze Produktraum – im Widerspruch zu unserer Annahme.

Nun definieren wir ein Element des Produktraums durch

$$x_i := \begin{cases} x_0, & i = i_0, \\ x_i, & i_0 \neq i \in \{i_k \mid k \in K\}, \\ \text{beliebig}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses $(x_i)_{i\in I}$ liegt in einem der $S(i_k, U_k), k \in K$. aber wenn i_k hier nicht unser altes i_0 wäre, dann wäre x_{i_k} ja nach Konstruktion gerade nicht in U_k. Also muss $i_k = i_0$ sein, und es gilt $x_0 \in U_k$. Daher folgt $H(x_0) \subseteq S(i_k, U_k)$ für ein $k \in K$ aus der Voraussetzung, dass sich $H(x_0)$ durch endlich viele der $S(i_j, U_j)$ überdecken lässt.

Wäre das für alle $x_0 \in X_{i_0}$ der Fall, so hätte man für jedes $x_0 \in X_{i_0}$ einen Index $j \in J$ mit $i_j = i_0$ und $x_0 \in U_j$. Damit ist $X_{i_0} = \cup_{\text{diese } j} U_j$, und wegen der Kompaktheit von X_{i_0} gäbe es endlich viele j mit $i_0 = i_j$, und so dass die zugehörigen U_j eine üebrdeckung von X_{i_0} sind. Dann überdecken die zugehörigen $S(i_j, U_j)$ aber auch den ganzen Produktraum, und das widerspricht unserer Grundannahme.

Fazit: Für jedes $i \in I$ gibt es ein $y_i \in X_i$, sodass $H(y_i)$ nicht von endlich vielen der $S(i_j, U_j)$ unserer Überdeckung $\ddot{U}$ überdeckt wird.

Aber das hierdurch gefundene Element $(y_i)_{i\in I}$ liegt auch in einem $S(i_j, U_j)$ für ein $j \in J$. Insbesondere liegt also $y_{i_j} \in U_j$, und damit $H(y_{i_j})$ in $S(i_j, U_j)$.

Das widerspricht unserer Konstruktion von y_{i_j}, und bringt damit die Annahme zum Einsturz. ∎

Um nun weiter zu machen brauchen wir eine neue Definition.

Definition II.5.3 Filter, Ultrafilter

a) Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ heißt ein *Filter*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall U, V \in \mathcal{F} : U \cap V \in \mathcal{F}$.
- $\forall U \in \mathcal{F} : \forall V \subseteq X : [U \subseteq V] \Rightarrow V \in \mathcal{F}$.
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Beispiel: Ist X ein topologischer Raum, $x \in X$, so sind die Umgebungen von x ein Filter auf X.

b) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt ein Ultrafilter, wenn er in keinem größeren Filter enthalten ist.

c) Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so *konvergiert der Filter gegen* $a \in X$, falls jede Umgebung von a zu $\mathcal{F}$ gehört.

Die offizielle Fortführung des Skriptes finden Sie auf
`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag3/lehre/top2007w/`.