

b)  $RA$ :

Jedes  $x \in U_1 + \dots + U_k$  hat eine eindeutige Darstellung  $x = u_1 + \dots + u_k$  mit  $u_i \in U_i$  für  $i = 1, \dots, k$ .

Insbesondere sind also die Vektoren in  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  l.u.

$\Rightarrow \dim(U_1 + \dots + U_k) \geq \dim U_1 + \dots + \dim U_k \stackrel{a)}{\Rightarrow} \text{Beh. } LA$ :

Nach a) kann Gleichheit nur dann gelten, wenn  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  eine Basis von  $U_1 + \dots + U_k$  ist und  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  ist. Bezüglich der Basis ist jedes  $x \in U_1 + \dots + U_k$  eindeutig als Linearkombination darstellbar. Also ist auch die Darstellung  $x = u_1 + \dots + u_k$  mit  $u_i \in U_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) eindeutig.

c)  $V = \mathbb{R}^2, U_1 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], U_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], U_3 = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$  erfüllen alle Forderungen.

## 0.13 Übung 12, 31.01.2005

## 0.14 Übung 13, 07.02.2005

## 0.15 Übung 14, 14.02.2005

### 0.15.1 Aufgabe 3

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = x_2 + x_4 + x_1 - 2x_2 - 2x_4 - x_1 + x_2 + 2x_4 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

b)

(i)  $1 - 1 + 0 - 0 = 0$

(ii)  $0 + 1 - 1 + 0 = 0$

(iii)  $0 - 0 + 1 - 1 = 0$

c)

(i)  $\dim U = 3$

(ii)  $W$   $\phi$ -invariant bedeutet  $\phi(W) \subseteq W$

$\Rightarrow \dim W = 1$

Wir suchen also  $x \in V$  mit:  $\phi(x) = ax$  für ein  $a \in \mathbb{K}$

a)  $\Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}_{=0} = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = a \underbrace{(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)}_{=0} \Rightarrow a = 1$