

22. Cauchyscher Integralsatz (Homologieverversionen)

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein Gebiet.

Definition

Sei γ ein geschlossener Weg in \mathbb{C} .

- (1) $\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\}$ ("Inneres" von γ)
 $\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}$ ("Äußeres" von γ)
- (2) Sei $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$. γ heißt in G **nullhomolog** : $\iff n(\gamma, z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$
 $(\iff \text{Int}(\gamma) \subseteq G)$

Beispiele:

- (i) Jeder geschlossene Weg in \mathbb{C} ist in \mathbb{C} nullhomolog.
- (ii) $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$), $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$; γ ist in G nicht nullhomolog.

Satz 22.1

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

- (1) Ist γ nullhomotop in $G \Rightarrow \gamma$ ist nullhomolog in G .
- (2) Ist G einfach zusammenhängend, so ist γ in G nullhomolog.

Beweis

- (1) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ holomorph auf G .

$$\stackrel{21.2}{\implies} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{= 2\pi i \, n(\gamma, z_0)} = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$

- (2) folgt aus (1) ■

Satz 22.2

Sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

$\varphi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch:

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

- (1) φ ist stetig.
- (2) Für $z \in G$ (fest) hat $w \mapsto \varphi(w, z)$ in z eine hebbare Singularität; $w \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G
 Für $w \in G$ (fest) hat $z \mapsto \varphi(w, z)$ in w eine hebbare Singularität; $z \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G
- (3) $h(z) := \int_{\gamma} \varphi(w, z) dw$ ($z \in G$). Ist γ nullhomolog in G , so ist $h \equiv 0$ auf G .

Beweis

(1) 11.9

(2) 13.1

(3) (A) Es ist $h \in C(G)$. Sei $z_0 \in G$ und (z_n) eine Folge in G mit $z_n \rightarrow z_0$. $g_n(w) := \varphi(w, z_n)$, $g(w) := \varphi(w, z_0)$ ($w \in G$). Sei Γ der stückweise glatte Ersatzweg für γ (wie in §20).

Übung: (g_n) konvergiert auf Γ gleichmäßig gegen g .

$$\stackrel{8.4}{\Rightarrow} \int_{\Gamma} g_n(w) dw \rightarrow \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \varphi(w, z_0) dw = \int_{\gamma} \varphi(w, z_0) dw = h(z_0)$$

Also: $h(z_n) \rightarrow h(z_0)$

(B) Es ist $h \in H(G)$. Sei $\Delta \subseteq G$ ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es zu zeigen: $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$
 9.1 und (2) $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz = 0 \quad \forall w \in G$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_{\gamma} \varphi(w, z) dw \right) dz \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma} \underbrace{\left(\int_{\partial\Delta} \varphi(w, z) dz \right)}_{=0} dw = 0$$

$$(C) \mathbb{C} = \underbrace{\text{Int}(\gamma)}_{\subseteq G} \cup \text{Ext}(\gamma) \cup \underbrace{\text{Tr}(\gamma)}_{\subseteq G} = G \cup \text{Ext}(\gamma)$$

Sei $z_0 \in \text{Ext}(\gamma)$. Sei C die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)$: $z_0 \in C$.

$$\stackrel{16.2}{\Rightarrow} n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \forall z \in C$$

$$\Rightarrow C \subseteq \text{Ext}(\gamma). \stackrel{16.1/2}{\Rightarrow} C \text{ ist offen.} \Rightarrow \exists \delta > 0 : U_{\delta}(z_0) \subseteq C \subseteq \text{Ext}(\gamma).$$

Also ist $\text{Ext}(\gamma)$ offen. [Analog: $\text{Int}(\gamma)$ offen]

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \notin \text{Tr}(\gamma)) \stackrel{9.5}{\Rightarrow} g \in H(\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(\gamma)), \text{ insbesondere gilt } g \in H(\text{Ext}(\gamma)).$$

$$\text{Sei } z \in G \cap \text{Ext}(\gamma): h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = g(z) - f(z) 2\pi i$$

$$\underbrace{n(\gamma, z)}_{=0} = g(z). \text{ Also: } h = g \text{ auf } G \cap \text{Ext}(\gamma). \text{ Dann ist}$$

$$F(z) = \begin{cases} h(z) & , z \in G \\ g(z) & , z \in \text{Ext}(\gamma) \end{cases} \text{ eine ganze Funktion.}$$

Übung: $F(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$). 10.2 $\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow h \equiv 0$ ■

Satz 22.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und γ sei nullhomolog in G . Dann:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall f \in H(G) \quad \forall z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$$

Beweis

Sei $f \in H(G)$ und $z \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$. $\xrightarrow{22.2(3)} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}}_{=n(\gamma,z)} \blacksquare$

Satz 22.4 (CIS, Homologieversion I)

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

Dann:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in H(G) \iff \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

Beweis

" \Rightarrow ": Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$; $f(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \Rightarrow f \in H(G) \xrightarrow{\text{Vgr.}} \underbrace{\int_{\gamma} f(z) dz}_{=n(\gamma,z_0)} = 0$

" \Leftarrow ": Sei $f \in H(G)$ und $z_0 \in G \setminus \text{Tr}(\gamma)$; $g(z) = (z - z_0)f(z)$; $g \in H(G)$.

Wende 22.3 auf g an :

$$\underbrace{n(\gamma, z_0)}_{=0} \underbrace{g(z_0)}_{=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \underbrace{\frac{g(w)}{w-z_0}}_{=f(w)} dw \Rightarrow \int_{\gamma} f(w) dw = 0. \quad \blacksquare$$

Satz 22.5

G ist einfach zusammenhängend \iff jeder geschlossene Weg γ mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ ist in G nullhomolog.

Beweis

" \Rightarrow " 22.1(2)

" \Leftarrow " Sei γ ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und $f \in H(G)$

Vorraussetzungen $\Rightarrow \gamma$ ist in G nullhomolog. 22.4 $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$. 21.5 $\Rightarrow G$ ist einfach zusammenhängend. \blacksquare

Definition

Seien γ_1 und γ_2 geschlossene Wege mit $\text{Tr}(\gamma_1), \text{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$. γ_1, γ_2 heißen in G homolog : $\iff n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$.

Satz 22.6 (CIS, Homologieversion II)

γ_1, γ_2 seien wie in obiger Definition und in G homolog.

Dann:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \forall f \in H(G)$$

Beweis

Sei $f \in H(G)$ und $z_j := \text{Anfangspunkt von } \gamma_j \text{ (} j = 1, 2 \text{)}$.

$\stackrel{3.4}{\Rightarrow} \exists \text{ Weg } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \text{Tr}(\gamma) \subseteq G, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$

$\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$. Γ ist ein geschlossener Weg mit $\text{Tr}(\gamma) \subseteq G$

Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$: $n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$

D.h.: Γ ist in G nullhomolog. 22.4 $\Rightarrow 0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma} - \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2}$ ■