§ 9.

Der Umkehrsatz

Erinnerung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$. U ist eine Umgebung von $x_0 \iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq U$

Hilfssatz 9.1 (Offenheit des Bildes)
Sei $\delta > 0, f : U_\delta(0) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f(0) = 0$ und V sei eine offene Umgebung von $f(0)$ $(= 0)$. $U := \{x \in U_\delta(0) : f(x) \in V\}$. Dann ist U eine offene Umgebung von 0.

Beweis
Übung ■

Erinnerung: Cramersche Regel: Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix, $\det A \neq 0$, und $b \in \mathbb{R}^n$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung: $x = (x_1, \ldots, x_n) = A^{-1}b$. Ersetze in A die j-te Spalte durch $b^\top$. Es entsteht eine Matrix A_j. Dann: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$.

Satz 9.2 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, D$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. f sei auf D injektiv und es sei $f(D)$ offen. Weiter sei $\det f'(x) \neq 0\ \forall x \in D$ und f^{-1} sei auf $f(D)$ differenzierbar. Dann: $f^{-1} \in C^1(f(D), \mathbb{R}^n)$.

Beweis
Sei $f^{-1} = g = (g_1, \ldots, g_n), g = g(y)$. Zu zeigen: $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$ sind stetig auf $f(D)$. 5.6 $\Longrightarrow g'(y) \cdot f'(x) = I$ ($n \times n$-Einheitsmatrix), wobei $y = f(x) \in f(D) \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} g_1'(y) \\ \vdots \\ g_n'(y) \end{pmatrix} \cdot f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \operatorname{grad} g_j(y) \cdot f'(x) = e_j \Longrightarrow f'(x)^\top \cdot \operatorname{grad} g_j(y)^\top = e_j^\top$. Ersetze in $f'(x)^\top$ die k-te Spalte durch $e_j^\top$. Es entsteht die Matrix $A_k(x) = A_k(f^{-1}(y))$. Cramersche Regel $\Longrightarrow \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(x)} = \frac{\det A_k(f^{-1}(y))}{\det f'(f^{-1}(y))}$. $f \in C^1(D, \mathbb{R}), f^{-1}$ stetig $\Longrightarrow$ obige Definitionen hängen stetig von y ab $\Longrightarrow \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \in C(f(D), \mathbb{R})$. ■

Satz 9.3 (Der Umkehrsatz)
Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D sei offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ und $\det f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene Umgebung V von $f(x_0)$ mit:

(a) f ist auf U injektiv, $f(U) = V$ und $\det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in U$

(b) Für $f^{-1} : V \to U$ gilt: f^{-1} ist stetig differenzierbar auf V und

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} \ \forall x \in U$$

Folgerung 9.4 (Satz von der offenen Abbildung)
D und f seien wie in 9.3 und es gelte: $\det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in D$. Dann ist $f(D)$ offen.

Beweis
O.B.d.A: $x_0 = 0$, $f(x_0) = f(0) = 0$ und $f'(0) = I$ (=$(n \times n)$-Einheitsmatrix)

Die Abbildungen $x \mapsto \det f'(x)$ und $x \mapsto \|f'(x) - I\|$ sind auf D stetig, $\det f'(0) \neq 0$, $\|f'(0) - I\| = 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$: $K := U_\delta(0) \subseteq D$, $\overline{K} = \overline{U_\delta(0)} \subseteq D$ und

(1) $\det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \overline{K}$ und

(2) $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2n} \ \forall x \in \overline{K}$

(3) **Behauptung:** $\frac{1}{2}\|u - v\| \leq \|f(u) - f(v)\| \ \forall u, v \in \overline{K}$, insbesondere ist f injektiv auf $\overline{K}$

(4) f^{-1} ist stetig auf $f(\overline{K})$: Seien $\xi, \eta \in f(\overline{K})$, $u := f^{-1}(\xi)$, $v := f^{-1}(\eta) \implies u, v \in \overline{K}$ und $\|f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\eta)\| = \|u - v\| \overset{(3)}{\leq} 2\|f(u) - f(v)\| = 2\|\xi - \eta\|$ ■

Beweis zu (3): $h(x) := f(x) - x$ $(x \in D) \implies h \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $h'(x) = f'(x) - I$. Sei $h = (h1, \ldots, h_n)$. Also: $h' = \begin{pmatrix} h_1' \\ \vdots \\ h_n' \end{pmatrix}$. Seien $u, v \in \overline{K}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$|h_j(u) - h_j(v)| \overset{6.1}{=} |h_j'(\xi) \cdot (u - v)| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|h_j'(\xi)\|\|u - v\| \leq \|h'(\xi)\|\|u - v\|$, $\xi \in S[u, v] \in \overline{K}$. (2) $\implies \leq \frac{1}{2n}\|u - v\|$
$\implies \|h(u) - h(v)\| = \left(\sum_{j=1}^n (h_j(n) - h_j(v))^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{4n^2}\|u - v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n}\|u - v\|\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \implies \|u - v\| - \|f(u) - f(v)\| \leq \|f(u) - f(v) - (u - v)\| = \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\| \implies$ (3)

$V := U_{\frac{\delta}{4}}(0)$ ist eine offene Umgebung von $f(0)$ $(= 0)$. $U := \{x \in K : f(x) \in V\}$ Klar: $U \subseteq K \subseteq \overline{K}$, $0 \in U$, 9.1 $\implies U$ ist eine offene Umgebung von 0. (3) $\implies f$ ist auf U injektiv. (1) $\implies \det f'(x) \neq 0 \ \forall x \in U$. (4) $\implies f^{-1}$ ist stetig auf $f(U)$. Klar: $f(U) \subseteq V$. Für (a) ist noch zu zeigen: $V \subseteq f(U)$.

Sei $y \in V$. $w(x) := \|f(x) - y\|^2 = (f(x) - y) \cdot (f(x) - y) \implies w \in C^1(D, \mathbb{R})$ und (nachzurechnen) $w'(x) = 2(f(x) - y) \cdot f'(x)$. $\overline{K}$ ist beschränkt und abgeschlossen $\overset{3.3}{\implies} \exists x_1 \in \overline{K}$: (5) $w(x_1) \leq w(x) \ \forall x \in \overline{K}$.

Behauptung: $x_1 \in K$.
Annahme: $x_1 \neq K \implies x_1 \in \partial K \implies \|x_1\| = \delta$. $2\sqrt{w(0)} = 2\|f(0) - y\| = 2\|y\| \leq 2\frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} = \frac{\|x_1\|}{2} = \frac{1}{2}\|x_1 - 0\| \overset{(3)}{\leq} \|f(x_1) - f(0)\| = \|f(x_1) - y + y - f(0)\| \leq \|f(x_1) - y\| - \|f(0) - y\| = \sqrt{w(x_1)} + \sqrt{w(0)} \implies \sqrt{w(0)} < \sqrt{w(x_1)} \implies w(0) < w(x_1) \overset{(5)}{\leq} w(0)$, Widerspruch. Also:

$x_1 \in K$

(5) $\implies w(x_1) \leq w(x)\ \forall x \in K$. 8.1 $\implies w'(x_1) = 0 \implies (f(x_1) - y) \cdot f'(x_1) = 0$; (1) $\implies f'(x_1)$ ist invertierbar $\implies y = f(x_1) \implies x_1 \in U \implies y = f(x_1) \in f(U)$. Also: $f(U) = V$. Damit ist (a) gezeigt.

(b): Wegen 5.5 und 9.2 ist nur zu zeigen: f^{-1} ist differenzierbar auf V. Sei $y_1 \in V$, $y \in V \setminus \{y_1\}$, $x_1 := f^{-1}(y_1)$, $x := f^{-1}(y)$; $L(y) := \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - f'(x_0)^{-1}(y - y_1)}{\|y - y_1\|}$. zu zeigen: $L(y) \to 0\ (y - y_1)$. $\varrho(x) := f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$. f ist differenzierbar in $x_1 \implies \frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|} \to 0\ (x \to x_1)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x_1)^{-1}\varrho(x) &= f'(x_1)^{-1}(y - y_1) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)) = -\|y - y_1\| L(y) \\
\implies L(y) &= -f'(x_1)^{-1} \frac{\varrho(x)}{\|y - y_1\|} = -f'(x_1)^{-1} \underbrace{\frac{\varrho(x)}{\|x - x_1\|}}_{\to 0\ (x \to x_1)} \cdot \underbrace{\frac{\|x - x_1\|}{\|f(x) - f(x_1)\|}}_{\leq 2, \text{ nach } (3)}
\end{aligned}
$$

Für $y \to y_1$, gilt (wegen (4)) $x \to x_1 \implies L(y) \to 0$.

Beispiel

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}, \det f'(x, y) = x \cos^2 y + x \sin^2 y = x$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Sei $(\xi, \eta) \in D$ 9.3 $\implies \exists$ Umgebung U von (ξ, η) mit: f ist auf U injektiv $(*)$. z.B. $(\xi, \eta) = (1, \frac{\pi}{2}) \implies f(1, \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. $f'(1, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(f^{-1})(0, 1) = f'(1, \frac{\pi}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beachte: f ist auf D „lokal“ injektiv (im Sinne von $(*)$), aber f ist auf D *nicht* injektiv, da $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{Z}$.