13. Wegintegrale

Definition
$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein *rektifizierbarer* Weg, $\Gamma := \Gamma_\gamma$ und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ sei *stetig*. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$; $\gamma_j \in BV[a, b]$ (12.1). $f_j \circ \gamma$ ist *stetig*. Ana I, 26.6 $\implies$ $f_j \circ \gamma \in R_{\gamma_j}[a, b]$.

$$\int_\gamma f_j(x)dx_j := \int_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t)$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x) \cdot dx := \int_\gamma f_1(x)dx_1 + \dots + f_n(x)dx_n &:= \int_\gamma f_1(x)dx_1 + \dots + \int_\gamma f_n(x)dx_n \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t))d\gamma_1(t) + \dots + \int_a^b f_n(\gamma(t))d\gamma_n(t).\end{aligned}$$

Wegintegral von f längs γ.

Aus Ana I, 26.3 folgt:

Satz 13.1 (Berechnung des Wegintegrals)
γ, Γ und f seien wie oben. γ sei stetig differenzierbar. Dann:

$$\int_\gamma f_j(x)dx_j = \int_a^b f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt \ (j = 1, \dots, n)$$

und

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Beispiel
$f(x, y, z) := (z, y, x)$, $\gamma(t) = (t, t^2, 3t)$, $t \in [0, 1]$. $f(\gamma(t)) = (3t, t^2, t)$, $\gamma'(t) = (1, 2t, 3)$, $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 3t + 2t^3 + 3t = 6t + 2t^3$.

$\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \int_0^1 (6t + 2t^3)dt = \frac{7}{2}$.

Satz 13.2 (Rechnen mit Wegintegralen)
γ, Γ, f seien wie oben, $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ sei stetig, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ sei rektifizierbar und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

(1) $\displaystyle\int_\gamma (\xi f(x) + \eta g(x)) \cdot dx = \xi \int_\gamma f(x) \cdot dx + \eta \int_\gamma g(x) \cdot dx$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma^{(1)}} f(x) \cdot dx + \int_{\gamma^{(2)}} f(x) \cdot dx$

(3) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$

(4) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(x) \cdot dx\right| \le L(\gamma) \cdot \max\{||f(x)|| : x \in \Gamma\}$

(5) Ist $\hat\gamma \sim \gamma \implies \displaystyle\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\hat\gamma} f(x) \cdot dx.$

Beweis

(1) klar

(2) Ana I, 26.1(3)

(3) nur für γ stetig differenzierbar. $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t),\ t \in [a, b]$.

$\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(b + a - t)) \cdot \gamma'(b + a - t)(-1)dt =$ (subst. $\tau = b + a - t,\ d\tau = dt$) $= \int_b^a f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = -\int_\gamma f(x) \cdot dx.$

(4) Übung

(5) Sei $\hat\gamma = \gamma \circ h,\ h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig und streng wachsend. $h(\alpha) = a,\ h(\beta) = b$. Nur für γ und h stetig db. Dann ist $\hat\gamma$ stetig db.

$\int_{\hat\gamma} f(x) \cdot dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(h(t))) \cdot \gamma'(h(t)) \cdot h'(t)dt =$ (subst. $\tau = h(t),\ d\tau = h'(t)dt$) $= \int_a^b f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau)d\tau = \int_\gamma f(x) \cdot dx.$ ■

Definition

γ, Γ seien wie immer in diesem Paragraphen. s sei die zu γ gehörende Weglängenfunktion und $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig. 12.4 $\implies$ s ist wachsend $\xRightarrow{\text{Ana I}}$ $s \in BV[a, b]$; $g \circ \gamma$ stetig $\xRightarrow{\text{Ana I, 26.6}}$ $g \circ \gamma \in R_s[a, b]$.

$$\int_\gamma g(x)ds := \int_a^b g(\gamma(t))ds(t)$$

Integral bzgl. der Weglänge.

Satz 13.3 (Rechnen mit Integralen bezgl. der Weglänge)
Seien γ, g wie oben.

(1) $\displaystyle\int_{\gamma^-} g(x)ds = \int_\gamma g(x)ds$

(2) Ist $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \implies \int_\gamma g(x)ds = \int_{\gamma^{(1)}} g(x)ds + \int_{\gamma^{(2)}} g(x)ds.$

(3) Ist γ stetig db $\implies \int_\gamma g(x)ds = \int_a^b g(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt.$

Beispiel
$g(x,y) = (1 + x^2 + 3y)^{1/2},\ \gamma(t) = (t, t^2),\ t \in [0,1].$

$g(\gamma(t)) = (1 + t^2 + 3t^2)^{1/2} = (1 + 4t^2)^{1/2},\ \gamma'(t) = (1 + 2t),\ ||\gamma'(t)|| = (1 + 4t^2)^{1/2} \implies \int_\gamma g(x,y)ds = \int_0^1 (1 + 4t^2)dt = \frac{7}{3}$

Gegeben: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ rektifizierbare Wege, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2), \gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3), \ldots, \gamma_{m-1}(b_{m-1}) = \gamma_m(a_m)$. $\Gamma := \Gamma_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\gamma_m} r$.

$\mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) := \{\gamma : \gamma$ ist ein rektifizierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$ mit: $\Gamma_\gamma = \Gamma$, $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_m)$ und $\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx + \cdots + \int_{\gamma_m} f(x) \cdot dx$ für *jedes* stetige $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n\}$.

Ist $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, so sagt man γ entsteht durch **Aneinanderhängen** der Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

Satz 13.4 (Stetige Differenzierbarekeit der Aneinanderhängung)
$\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ seien wie oben. Dann: $\mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq \emptyset$.
Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ stetig differenzierbar, so existiert ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$.

Beweis
O.B.d.A: $m = 2$.

Def. $h : [b_1, c] \to [a_2, b_2]$ linear wie folgt: $h(x) = px + q$, $h(b_1) = a_2$, $h(c) = b_2$. $\hat{\gamma}_2 := \gamma_2 \circ h$. Dann: $\gamma_2 \sim \hat{\gamma}_2$. $\gamma := \gamma_1 \oplus \hat{\gamma}_2$. 12.2, 12.7, 13.2 $\implies \gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. ■

Beispiel
In allen Beispielen sei $f(x,y) = (y, x - y)$ und $t \in [0,1]$.

(1) $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_{\gamma_1} f(x,y) \cdot d(x,y) = 0$, $\int_{\gamma_2} f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$. Also: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$

(2) $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2(t) = (t, 1)$.

Sei $\gamma \in \mathrm{AH}(\gamma_1, \gamma_2)$, Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$

(3) $\gamma(t) = (t, t^3)$. Anfangspunkt von γ ist (0,0), Endpunkt von γ ist (1,1). Nachrechnen: $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \frac{1}{2}$