11 Übung vom 07.07.

37. Aufgabe

Es bezeichne (i) die Strategie „i Mann gehen über den Strand, der Rest über das Hinkelsteinfeld“.

	Gallier			
Römer	(0)	(1)	$\ldots$	(n)
(0)	1	0	$\cdots$	0
(1)	1	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$	0
(n)	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	1
$(n+1)$	0	$\cdots$	0	1

Man rechnet einfach nach:
Der Wert des Spiels w ist echt größer als 0.

Damit sind die Strategien für Römer und Gallier Lösungen von linearen Programmen.
Für die Gallier

$$
(DP) \qquad \begin{array}{rcl}
g(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j & = & \max \\
x_0 & \leq & 1 \\
x_0 + x_1 & \leq & 1 \\
& \vdots & \\
x_{n-1} + x_n & \leq & 1 \\
x_n & \leq & 1 \\
x_0, \ldots, x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

Für die Römer

$$
(PP) \qquad \begin{array}{rcl}
f(y) = \sum_{j=0}^{n+1} y_j & = & \min \\
y_0 + y_1 & \geq & 1 \\
& \vdots & \\
y_n + y_{n+1} & \leq & 1 \\
y_1, \ldots, y_{n+1} & \geq & 0
\end{array}
$$

Summe der Nebenbedingungen in (DP) liefert:

$$2 \cdot g(x) \leq n + 2 \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{n+2}{2}$$

n gerade: Wir suchen nun einen zulässigen Punkt x’ mit

$$g(x') = \frac{n+2}{2}$$

Fangen wir mit $x'_0 = 1$ an, so liefern die Nebenbedingungen den Vektor

$$x' = (1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$$

Der Punkt ist zulässig und optimal, also

$$x^0 = \frac{1}{g(x')} x' = (\frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}, 0, \ldots, \frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2})$$

eine optimale Strategie.

Der Wert des Spiels ist $\frac{n+2}{2}$.

Wählen wir $y' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, so ist dies zulässiger Punkt von (PP) und es gilt $f(y') = g(x')$.
Dann ist

$$y^0 = (\frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+2})$$

optimale Strategie.

n ungerade:

$$g(x) \leq \frac{n+1}{2}$$

Setzen wir $x' = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, so gilt:

$$g(x') = \frac{n+1}{2}$$

Damit ist

$$x^0 = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$$

optimale Strategie und der Wert des Spiels ist $\frac{2}{n+1}$.

Ebenfalls ist $y' = (0, 1, \ldots, 0, 1, 0)$ Lösung von (PP). Damit ist

$$y^0 = (0, \frac{2}{n+1}, \ldots, 0, \frac{2}{n+1}, 0)$$

optimale Strategie.

Für den Wert w_n gilt:

n	1	2	3	4	5
w_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ab $n \geq 4$ sind die Chancen für die Gallier besser.

38. Aufgabe

Hilfsmittel: Satz von der monotonen Konvergenz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Weiter seien $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

- $g_n(x) \to g(x)$ für alle $x \in [a, b]$
- $g_n \leq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder
  $g_n \geq g_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\int_a^b g_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b g(x)dx$$

Es sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.
Dann gilt:

(i) Die Folge

$$g_n(t) := \frac{f(t + \frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}}$$

ist monoton fallend in n (gemäß Vorlesung) und konvergiert punktweise gegen $f^+(t)$.

(ii) $t \mapsto g_n(t)$ ist Riemann-integrierbar, da f stetig ist.
f' ist monoton wachsend und damit auch Riemann-integrierbar.

(iii) f besitzt eine Stammfunkton F.

Es sei o.E. $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x f^+(t)dt &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} g_n(t)dt \\
&\overset{\text{Hilfsmittel}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^x g_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^x f(t+\frac{1}{n})dt - \int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(0+\frac{1}{n}) - (F(x) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(F(x+\frac{1}{n}) - F(x)) - (F(0+\frac{1}{n}) - F(0))}{\frac{1}{n}} \\
&= F'(x) - F'(0) \\
&= f(x) - f(0)
\end{aligned}$$

Ersetzt man $f(t+\frac{1}{n})$ durch $f(t-\frac{1}{n})$, erhält man die Aussage für f^-.

39. Aufgabe

(a) Die Menge $\partial f(x)$ kann man schreiben als:

$$\partial f(x) = \bigcap_{y\in\mathbb{R}^n} \{v \in \mathbb{R}^n :\ \langle v, \underbrace{y-x}_{\text{fest}}\rangle \le \underbrace{f(y)}_{\text{fest}} - \underbrace{f(x)}_{\text{fest}}\}$$

Als Schnitt von konvexen, abgeschlossenen Mengen ist $\partial f(x)$ also selbst abgeschlossen und konvex.

Es sei $v \in \partial f(x)$ und $y := x + \frac{v}{\|v\|}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \langle v, (x + \frac{v}{\|v\|} - x)\rangle \\
&\overset{v\in\partial f(x)}{\le} f(x + \frac{v}{\|v\|}) - f(x) \\
&\le \max_{z\in S^{n-1}} f(x+z) - f(x) \\
&\le R \qquad \text{für ein } R > 0
\end{aligned}$$

[$S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \|u\| = 1\}$ Einheitssphäre]

Also ist $\partial f(x) \subseteq R \cdot B^n$ und damit beschränkt.
[B^n ist die n-dimensionale Einheitskugel.]

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
v \in \partial f(x) &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \ \langle v, y-x \rangle \le f(y) - f(x) \\
&\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \ \langle v, tu \rangle \le f(x+tu) - f(x) \\
&\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0, t > 0 : \ \langle v, u \rangle \le \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} \\
&\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \ \langle v, u \rangle \le f'(x; u)
\end{aligned}$$

(c) Ist f differenzierbar, so gilt: $f'(x;u) = \langle \nabla f(x), u \rangle$.

$$\begin{aligned}
v \in \partial f(x) &\overset{(b)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \ \langle v, u \rangle \le \underbrace{\langle \nabla f(x), u \rangle}_{f'(x;u)} \\
&\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \ \langle v - \nabla f(x), u \rangle \le 0 \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0 : \ \langle v - \nabla f(x), u \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow v = \nabla f(x)
\end{aligned}$$

`Anmerkung:` $(*)$ Umformung ok, weil die Ungleichung für alle $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ gilt (also zu $u^0 \neq 0$ auch für $-u^0 \neq 0$).

40. Aufgabe

$$\begin{aligned}
f \text{ konvex} &\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : \ g(t) := f(z+tu) \text{ ist konvex in t} \\
&\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n : \ g'(t) = \langle \nabla f(z+tu), u \rangle \text{ ist monoton wachsend in t} \\
&\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, \ t_1 < t_2 : \ \langle \nabla f(z+t_1 u), u \rangle \le \langle \nabla f(z+t_2 u), u \rangle \\
&\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, \ t_1 < t_2 : \ \langle \nabla f(z+t_1 u) - \nabla f(z+t_2 u), u \rangle \le 0 \\
&\Leftrightarrow \forall z, u \in \mathbb{R}^n, \ t_1 < t_2 : \ \langle \nabla f(z+t_1 u) - \nabla f(z+t_2 u), \underbrace{(t_1 - t_2)}_{<0} u \rangle \ge 0 \\
&\overset{*}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \ge 0
\end{aligned}$$

$(*) : \ u := y - x, z := x, t_1 = 0, t_2 = 1$ [einsetzen und umformen]

`Anmerkung:` f differenzierbar $\Leftrightarrow$ g differenzierbar (...)