

### 3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In diesem Paragraphen seien  $D, E \subseteq \mathbb{C}$ ,  $D \neq \emptyset \neq E$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Die Funktionen  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch:

$$(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re} f(z), (\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im} f(z), |f|(z) := |f(z)|.$$

#### Definition

Sei  $z_0$  ein HP von  $D$  und  $a \in \mathbb{C}$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - a| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$$

In diesem Fall schreibt man  $f(z) \rightarrow a$  ( $z \rightarrow z_0$ )

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existiert :  $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ . Es gelten die üblichen Rechenregeln.

#### Definition

(1) Sei  $z_0 \in D$ .  $f$  heißt **stetig** in  $z_0$  :  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$

(2)  $f$  heißt stetig auf  $D$  :  $\iff f$  ist in jedem  $z \in D$  stetig. In diesem Fall schreiben wir  $f \in C(D)$ .

#### Beispiel

(1)  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ( $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ). Klar:  $p \in C(\mathbb{C})$  (Linearkombination stetiger Funktionen).

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Klar:  $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Für  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist  $f(z) = 1 \not\rightarrow f(0) = 0$  ( $z \rightarrow 0$ ).  $f$  ist in  $z_0 = 0$  nicht stetig.

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} & , \text{ falls } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0. \end{cases}$$

Für  $z \neq 0$  :  $|f(z)| = \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} \leq |z| \Rightarrow f$  ist in  $z_0 = 0$  stetig. Insgesamt:  $f \in C(\mathbb{C})$ .

#### Beispiel

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; für  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in D$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  sei  $f(z) := \varphi = \operatorname{Arg} z$ . Behauptung: Ist  $z_0 \in \mathbb{R}$  und  $z_0 < 0 \Rightarrow f$  ist in  $z_0$  nicht stetig. Denn:

Sei  $z_n := |z_0|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i \sin(\pi - \frac{1}{n}))$ ,  $w_n := |z_0|(\cos(-\pi + \frac{1}{n}) + i \sin(-\pi + \frac{1}{n})) \Rightarrow z_n \rightarrow -|z_0| = z_0$ ,  $w_n \rightarrow -|z_0| = z_0$  und  $f(z_n) = \operatorname{Arg} z_n = \pi - \frac{1}{n} \rightarrow \pi$ ,  $f(w_n) = \operatorname{Arg} w_n = -\pi + \frac{1}{n} \rightarrow -\pi$

Wie im  $\mathbb{R}^n$  beweist man die folgenden Sätze 3.1, 3.2 und 3.3

#### Satz 3.1

Sei  $z_0 \in D$ .

(1)  $f$  ist stetig in  $z_0 \iff \operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  sind stetig in  $z_0 \iff$  für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $z_n \rightarrow z_0 : f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ .

- (2) Ist  $z_0$  ein HP von  $D$ , so gilt:  $f$  ist in  $z_0$  stetig  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- (3) Sei  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere Funktion und  $f$  und  $g$  seien stetig in  $z_0$ . Dann sind  $f + g, fg, |f|$  stetig in  $z_0$ ; ist  $f(z) \neq 0 \forall z \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$  ist stetig in  $z_0$ .

**Satz 3.2**

Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}, g : E \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $f(D) \subseteq E$ . Ist  $f$  stetig in  $z_0$  und  $g$  stetig in  $f(z_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $z_0$ .

**Satz 3.3**

$D$  sei **kompakt** und  $f \in C(D)$

- (1)  $f(D)$  ist kompakt
- (2)  $\exists \max |f|(D), \exists \min |f|(D)$

**Definition**

Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R} (a < b)$ . Eine stetige Funktion  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein **Weg** (in  $\mathbb{C}$ ).  $\gamma(a)$  heißt **Anfangspunkt** von  $\gamma$ ,  $\gamma(b)$  heißt **Endpunkt** von  $\gamma$ .  $\gamma([a, b])$  heißt der **Träger** von  $\gamma$ . 3.3  $\Rightarrow \gamma([a, b])$  ist kompakt. ("**Rektifizierbarkeit**" und "**Länge**" von  $\gamma$ : siehe Analysis II)

**Beispiele:**

- (1) Seien  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}; \gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1]. S[z_0, z_1] := \gamma([0, 1])$  heißt die **Verbindungsstrecke** von  $z_0$  und  $z_1$ .
- (2) Sei  $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0; \gamma(t) := z_0 + r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi]. \gamma(0) = z_0 + r = \gamma(2\pi), \gamma([0, 2\pi]) = \partial U_r(z_0)$

Für den Rest des §en sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$

**Definition**

$M$  heißt **konvex**  $:\Leftrightarrow$  aus  $z_0, z_1 \in M$  folgt stets:  $S[z_0, z_1] \subseteq M$ .

**Definition**

- (1) Eine Funktion  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt auf  $M$  **lokalkonstant**  $:\Leftrightarrow \forall a \in M \exists \delta = \delta(a) > 0 : \varphi$  ist auf  $U_\delta(a) \cap M$  konstant. Beachte: i.d.Fall:  $\varphi \in C(M)$ .
- (2)  $M$  heißt **zusammenhängend** (zsh)  $:\Leftrightarrow$  jede auf  $M$  lokalkonstante Funktion ist auf  $M$  konstant.
- (3)  $M$  heißt **wegzusammenhängend** (wegzsh)  $:\Leftrightarrow$  zu je zwei Punkten  $z, w \in M$  existiert ein Weg  $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma([a, b]) \subseteq M, \gamma(a) = z$  und  $\gamma(b) = w$ .
- (4)  $M$  heißt ein **Gebiet**  $:\Leftrightarrow M$  ist offen und wegzsh.

### Bemerkung:

(1) Mengen die offen und konvex sind, sind Gebiete.

(2)  $\text{wegzsh} \Rightarrow \text{zsh}$  (" $\Leftarrow$ " ist i.a. falsch)

#### Satz 3.4

$M$  sei offen, dann sind äquivalent:

(1)  $M$  ist ein Gebiet

(2)  $M$  ist wegzsh

(3)  $M$  ist zsh

(4) Aus  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen folgt stets:  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ .

#### Beweis

(1)  $\Leftrightarrow$  (2): klar, (2)  $\Leftrightarrow$  (3): ohne Beweis.

(3)  $\Rightarrow$  (4): Sei  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen. Annahme:  $A \neq \emptyset$  und  $B \neq \emptyset$ . Definiere

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{C} \text{ durch } \varphi(z) := \begin{cases} 1, & z \in A \\ 0, & z \in B \end{cases}.$$

Sei  $z_0 \in M$ . 1. Fall (2. Fall) :  $z_0 \in A(B), A(B)$  offen  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A(B) \Rightarrow \varphi$  ist auf  $U_\delta(z_0)$  konstant.  $\varphi$  ist also auf  $M$  lokalkonstant. Vor  $\Rightarrow \varphi$  ist auf  $M$  konstant  $\Rightarrow 1 = 0$ , Wid!

(4)  $\Rightarrow$  (3): Sei  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  lokalkonstant. Annahme:  $\varphi$  ist nicht konstant auf  $M$ .  $\exists z_0, w_0 \in M : \varphi(z_0) \neq \varphi(w_0)$ .  $A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}; z_0 \in A$ , also  $A \neq \emptyset$ .  $B := M \setminus A, w_0 \in B$ , also  $B \neq \emptyset$ . Klar:  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ .

Sei  $z_1 \in A$ .  $\varphi$  ist lokalkonstant  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(z_1) \subseteq M$  und  $\varphi$  ist auf  $U_\delta(z_1)$  konstant. Sei  $z \in U_\delta(z_1)$ .  $\varphi(z) = \varphi(z_1) \stackrel{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0) \Rightarrow z \in A$ . Also:  $U_\delta(z_1) \subseteq A$ .  $A$  ist also offen. Ähnlich:  $B$  ist offen. Fazit:  $M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A, B$  offen,  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ . Wid zur Vor. ■

#### Folgerung 3.5

Sei  $A \subseteq \mathbb{C}, A$  sei offen und abgeschlossen. Dann:  $A = \emptyset$  oder  $A = \mathbb{C}$ .

#### Beweis

$B := \mathbb{C} \setminus A$ ; dann  $A, B$  offen,  $A \cap B = \emptyset$  und  $\mathbb{C} = A \cup B$ .  $\mathbb{C}$  ist ein Gebiet  $\stackrel{3.4}{\Rightarrow} A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$  oder  $A = \mathbb{C}$ . ■

#### Satz 3.6

Sei  $M$  zsh und  $g \in C(M)$ . Dann ist  $g(M)$  zsh.

#### Beweis

Sei  $\varphi : g(M) \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $g(M)$  lokalkonstant. Zu zeigen:  $\varphi$  ist auf  $g(M)$  konstant.  $\psi := \varphi \circ g : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Sei  $z_0 \in M \Rightarrow g(z_0) \in g(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  und  $c \in \mathbb{C} : (*) \varphi(w) = c \forall w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M)$ .  $g$  stetig in  $z_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \forall z \in U_\delta(z_0) \cap M$ . Sei  $z \in U_\delta(z_0) \cap M$ . Dann:  $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \varphi(g(z)) = c \Rightarrow \psi(z) = c$ . Also ist  $\psi$  auf  $M$  lokalkonstant.  $M$  zsh

### 3. Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

$\Rightarrow \psi(z) = c \ \forall z \in M$ . Sei  $w \in g(M) \Rightarrow \exists z \in M : w = g(z) \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(g(z)) = \psi(z) = c$ .  $\varphi$  ist also auf  $g(M)$  konstant. ■

#### Beispiele:

(1)  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ist zsh.

(2) Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg, so ist  $\gamma([a, b])$  zsh.

#### Beweis

(2) folgt aus (1) und 3.6

(1) Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  lokalkonstant. Also:  $\forall t \in [a, b] \exists \delta(t) > 0 : \varphi$  ist auf  $U_{\delta(t)}(t) \cap [a, b]$  konstant.  $[a, b] \subseteq \cup_{t \in [a, b]} U_{\delta(t)}(t) \xrightarrow{2,3} \exists t_1, \dots, t_n \in [a, b] : [a, b] \subseteq \cup_{j=1}^n U_{\delta(t_j)}(t_j)$ .  $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} : \varphi(t) = c_j \ \forall t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a, b] \Rightarrow \varphi([a, b]) = \{c_1, \dots, c_n\}$ . O.B.d.A:  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Annahme:  $c_1 \neq c_2$  etwa  $c_1 < c_2$ .  $\varphi \in C[a, b]$ . ZWS  $\Rightarrow [c_1, c_2] \subseteq \varphi([a, b])$  Wid! Also:  $c_1 = c_2$ . Analog:  $c_2 = c_3 = \dots = c_n$ .  $\varphi$  ist also konstant. ■