# “匈牙利法”存在的问题及改进方法

顾大权[1], 左 莉[2], 侯太平[1], 王寅虎[1]
(1. 解放军理工大学 气象学院, 江苏 南京 211101;
2. 江苏省信息中心, 江苏 南京 210013)

摘 要: 在处理一些特殊数据时, 发现分配问题的“匈牙利法”并不收敛, 无法得到最优解。通过全面分析该算法, 找到了问题的原因, 对算法进行了改进, 并介绍了程序设计的关键技术, 使“匈牙利法”真正成为解决分配问题的最有效算法。

关键词: 分配问题; 算法; 匈牙利法
中图分类号: TP301.6 文献标识码: A 文章编号: 1005—3751(2003)04—0076—03

# Existing Problem and Improvement of “Hungary Arithmetic”

GU Da-quan[1], ZUO Li[2], HOU Tai-ping[1], WANG Yin-hu[1]
(1. Institute of Meteorology, PLA Univ. of Sci. and Techn., Nanjing JS 211101, China
2. Information Center of Jiangsu Province, Nanjing JS 210013, China)

**Abstract**: It's found that “Hungary arithmetic” in the assignment problem could not get convergence when dealing with special data, and could not obtain optimum result. Points out reason of problem by analyzing arithmetic. The key technique of programming is introduced in this paper. The improved “Hungary arithmetic” become a real optimum arithmetic in the assignment problem.

**Key words**: assignment problem; arithmetic; Hungary arithmetic

## 0 引 言

运筹学中的分配问题, 或称指派问题(Assignment Problem), 是一种特殊的整数规划问题, 在许多应用领域中会经常遇到, 例如: 有 $N$ 项任务, 分配给 $N$ 个人完成, 并指定每人完成其中的一项, 每项任务只交给一个人去完成, 应如何分配, 使得费用最低。这是经典分配问题的一个实例, 问题中的任务可能是任何类型的活动, 人可能是任何类型的资源, 费用可能是任何类型的效能。

分配问题最简单的处理方法, 就是进行所有可能的分配, 共有 $N$ 的全排列个$(N!)$ 分配方案, 再从中选出最优解, 但当 $N$ 较大时, 分配数将产生组合爆炸, 当今的高速计算机也都无法处理。

分配问题也是个线型规划问题, 若用正规的单纯形法, 或借助于运输问题特点的一些特殊方法, 也可以用来解决这个问题, 但效果不好。

而一种称为“匈牙利法”的分配算法, 是目前被认为是用来解决分配问题的最有效算法, “运筹学”和“最优化技术”等专著, 都将它作为标准的算法进行介绍。

但是在大量数据试验过程中发现, “匈牙利法”在处理一些特殊数据时并不有效, 算法不收敛, 无法找出最优解。

经过研究, 作者找到了“匈牙利法”存在问题的原因, 并对“匈牙利法”进行了修正, 完善了算法功能, 使之能解决任何情况的分配问题。

## 1 分配问题的数学模型和“匈牙利法”

### 1.1 数学模型

求解 $N$ 个资源、$N$ 个活动的分配问题, 使总效能最小。设

$$X_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如资源 } i \text{ 没有分配到活动 } j,\ i=1,\cdots,n,\ J=1,\cdots,n\\ 1 & \text{如资源 } i \text{ 分配到活动 } j,\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n\end{cases}$$

$C_{ij}$ 分配资源 $i$ 到活动 $j$ 的效能, $i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n$

分配问题的数学模型可写成: 求 $\boldsymbol{Z}$ 的最小值

$$\min \boldsymbol{Z}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_{ij}=1,\ (j=1,\cdots,n),\ \sum_{j=1}^{n}X_{ij}=1,\ (i=1,\cdots,n)$$

“匈牙利法”的计算基础和前提是: 从效能矩阵的每一行(每一列) 元素中分别减去(或加上) 一个常数, 使得每一行(每一列) 里至少有一个 0 元素, 得到新的效能矩阵, 用它来取代原效能矩阵, 将不改变分配问题的最优解。

### 1.2 “匈牙利法”的计算步骤

目前被认为是用来解决分配问题最有效的“匈牙利法”的算法如下:

第一步: 修正效能矩阵, 使行、列中都出现 0 元素。

(1) 如果求最大效能, 则改变矩阵中所有元素的符号;

收稿日期: 2002—10—10

(2)每行的各元素都减去该行中的最小元素;

(3)每列的各元素都减去该列中的最小元素;

第二步:试进行一个完全分配方案,对矩阵中的 0 元素作分配标记。

(4)对所有行列作无标记处理;

(5)从第 1 行开始,逐行处理,若该行只有 1 个 0 元素未标记,就对该 0 元素标记×,并对该 0 同一列的 0 元素标记×,直到最后一行;

(6)从第 1 列开始,逐列处理,若该列只有 1 个 0 元素未标记,就对该 0 元素标记×,并对该 0 同一行的 0 元素标记×,直到最后一列;

(7)进行三种情况判断:

① 如每行都有一个△标记,这便是完全分配的最优解,输出标记△位置的 $C_{ij}$,分配完成;② 如所有 0 元素都已标记,转(8);③ 如有多于 2 行或 2 列至少有 2 个未标记的 0 元素,就对其中任意一个 0 元素标记△,并对同行同列的其他 0 元素标记×。转(5)继续;

第三步:作覆盖所有 0 元素的最少数的直线集合。

(8)对无△标记的行作∨标记;

(9)对标记∨行上的所有 0 元素的列标记∨;

(10)对标记∨列上有△标记的行标记∨;

(11)重复(9)和(10),直到所有标记结束;

(12)对无标记∨的行画横线,对标记∨的列画竖线;

第四步:产生新的效能矩阵,使 0 元素移动。

(13)从未被直线覆盖的元素中找出最小值 $d$;

(14)未画横线的各行都减 $d$;

(15)已画竖线的各列都加 $d$;

(16)转(4)继续执行。

## 2 “匈牙利法”存在的问题

“匈牙利法”在各种已发表的教材、专著和研究成果中,通常求解中、小型分配问题,效能矩阵的阶数通常不超过 20,故很难发现“匈牙利法”存在的问题。

我们用“匈牙利法”处理了许多与分配问题相关的运输、调度问题,大多数情况下算法是收敛的,得到了最优解,而处理一些特殊数据时算法不收敛,无法找出最优解,矩阵阶数越大的分配问题,不收敛的情况越多。

试验中,发现了一个较小阶不收敛的效能矩阵,下面用“匈牙利法”对该矩阵进行分析:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 |

经过算法第一步,得到修正的效能矩阵:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 3 | 2 | 0 | 3 |

进行算法第二步,做分配方案,最终第 2 行无△标记,使得第 2 行第 2 列没有分配:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | △ | 3 | 3 | 3 | 3 | × |
| 1 | 1 | × | × | 1 | 2 | 2 | 2 | × |
| 1 | 2 | △ | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | × | × | 3 | △ | 2 | × | × | 1 |
| 2 | × | × | × | 1 | 1 | △ | 2 | × |
| △ | 2 | × | 3 | 1 | 1 | 2 | × | 2 |
| 2 | 3 | 1 | × | × | × | 2 | 2 | △ |
| 2 | 1 | 3 | × | 2 | × | 3 | × | 1 |
| × | 3 | × | 1 | × | 3 | 2 | △ | 3 |

进行算法第三步,最终所有的行和所有的列都有∨标记,所有的行未画 1 条横线,所有的列都画上了竖线,各行列作标记的顺序如下:

| ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (17) | (12) | (2) | (3) | (8) | (9) | (13) | (14) | (4) | |
| 1 | 1 | 3 | △ | 3 | 3 | 3 | 3 | × | (6)∨ |
| 1 | 1 | × | × | 1 | 2 | 2 | 2 | × | (1)∨ |
| 1 | 2 | △ | 3 | 3 | 1 | !3 | 2 | 3 | (5)∨ |
| 1 | × | × | 3 | △ | 2 | × | × | 1 | (10)∨ |
| 2 | × | × | × | 1 | 1 | △ | 2 | × | (15)∨ |
| △ | 2 | × | 3 | 1 | 1 | 2 | × | 2 | (18)∨ |
| 2 | 3 | 1 | × | × | × | 2 | 2 | △ | (7)∨ |
| 2 | 1 | 3 | × | 2 | △ | 3 | × | 1 | (11)∨ |
| × | 3 | × | 1 | × | 3 | 2 | △ | 3 | (16)∨ |

进行算法第四步,没有找到未被直线覆盖的元素,所以也就无法找到最小的元素,也就不能产生新的效能矩阵,算法进入死循环。这就否定了“匈牙利法”主要过程的算法基础:若算法第二步未完成一个完全分配时,则一定能生成一个新的效能矩阵,出现新的 0 元素,再重新进行完全分配,最终一定能得到一个完全的最优解。

## 3 “匈牙利法”的改进

要使“匈牙利法”对任意数据都能有效的找到最优解,必须进行修正。本文采取的措施是,在原算法的基础上增加第五步,以及在第三步后面增加判断功能:

如生成 N 条竖线,无法生成新的效能矩阵,则退出“匈牙利法”,进行第五步;

第五步:产生新的小效能矩阵,使原矩阵分解。

(17)从第二步算法中,记下有△标记的行号和列号,作为部分解进行保存;

(18)从效能矩阵中抽取行列都没有△标记的数据,组

成一个新的小效能矩阵：[ $E_{ij}$] $i=1, \cdots, m$, $j=1, \cdots, m$, $m<n$；

(19) 将小效能矩阵再代入“匈牙利法”，继续计算，得到小效能矩阵的分配解，把它添加到部分解的结果中去，组合得到一个新的解，如果新的解仍然不是完全解，则转⑰继续处理；

(20) 对已分配的元素，两两一对组成任意一个矩形的斜对角顶点，相加后生成一个基础量，再将矩形的另一对斜对角顶点的元素相加，生成一个改变量，所有 $N$ 个已分配的元素将产生 $1+2+3\cdots N-2+N-1$ 对基础量和改变量；

(21) 对于每对基础量和改变量，如果存在基础量大于改变量的情况，则找出基础量与改变量差值最大的一对，由改变量取代基础量，转⑳继续处理；

(22) 得到整个分配的最优解，输出分配结果。

在上例中，新的小效能矩阵仅为第 2 行和第 2 列，$m$ 为 1。另外，也没有找到改变量小于基础量的两对值，所以无须进行优化，直接将该元素添加到部分解中去，通常新的小效能矩阵的阶数都很小。

现给出一个 22 *22 的效能矩阵，用原“匈牙利法”计算，也是不收敛的。运行第二步后，抽取行列都没有 △标记的数据，得到了一个 2 阶的小效能矩阵，用改进后的“匈牙利法”对该分配问题进行分析：

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 2 | 9 | 9 | 8 | 5 | 6 | 8 | 6 | 9 | 7 | 1 | 9 | 9 | 9 | 5 | 2 | 8 | 4 | 2 |
| 5 | 9 | 6 | 3 | 8 | 9 | 6 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 | 2 | 2 | 9 | 6 | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 |
| 1 | 6 | 2 | 8 | 4 | 3 | 1 | 2 | 9 | 2 | 7 | 4 | 6 | 9 | 3 | 6 | 9 | 4 | 8 | 3 | 4 | 9 |
| 6 | 4 | 9 | 5 | 4 | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 5 | 6 | 5 | 5 | 1 | 8 | 4 | 2 | 8 | 6 |
| 7 | 7 | 2 | 6 | 1 | 3 | 1 | 4 | 8 | 7 | 2 | 3 | 1 | 5 | 9 | 8 | 9 | 5 | 1 | 7 | 3 | 6 |
| 9 | 6 | 2 | 8 | 5 | 4 | 8 | 4 | 8 | 1 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | 9 | 9 | 4 | 8 | 4 | 5 | 2 |
| 3 | 1 | 9 | 8 | 7 | 3 | 9 | 5 | 3 | 6 | 7 | 1 | 2 | 5 | 7 | 1 | 9 | 4 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| 2 | 2 | 5 | 8 | 9 | 8 | 5 | 4 | 7 | 8 | 9 | 6 | 7 | 9 | 1 | 9 | 7 | 6 | 1 | 5 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 5 | 2 | 9 | 4 | 8 | 9 | 8 | 4 | 3 | 4 | 4 | 1 | 8 | 5 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 8 | 8 | 2 | 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 9 | 8 | 3 | 3 | 9 | 4 | 7 | 7 | 1 | 6 | 7 | 7 | 3 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 2 | 8 | 1 | 7 | 5 | 7 | 6 | 3 | 3 | 5 | 1 | 7 | 1 | 7 | 6 | 4 | 4 | 2 | 6 |
| 5 | 4 | 6 | 4 | 1 | 7 | 3 | 9 | 1 | 8 | 2 | 9 | 9 | 5 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 9 | 1 | 5 |
| 8 | 7 | 9 | 7 | 9 | 5 | 5 | 1 | 5 | 9 | 2 | 4 | 1 | 9 | 6 | 6 | 9 | 3 | 3 | 9 | 2 | 2 |
| 2 | 9 | 7 | 7 | 8 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 | 8 | 9 | 9 | 5 | 6 | 8 | 9 | 2 | 8 | 4 | 7 | 8 |
| 7 | 2 | 2 | 3 | 5 | 4 | 6 | 6 | 2 | 1 | 7 | 6 | 8 | 8 | 2 | 2 | 2 | 8 | 9 | 3 | 8 | 7 |
| 8 | 5 | 2 | 5 | 6 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 6 | 3 | 6 | 4 | 8 | 6 | 2 | 7 | 7 |
| 7 | 5 | 4 | 5 | 1 | 7 | 4 | 2 | 1 | 9 | 2 | 7 | 1 | 6 | 6 | 3 | 7 | 9 | 2 | 8 | 1 | 4 |
| 7 | 2 | 2 | 5 | 6 | 6 | 7 | 9 | 6 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 7 | 5 | 3 | 4 | 2 | 6 | 2 | 7 |
| 4 | 4 | 6 | 2 | 6 | 2 | 1 | 9 | 8 | 4 | 7 | 8 | 8 | 4 | 9 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 | 4 | 6 |
| 6 | 4 | 6 | 1 | 3 | 7 | 8 | 5 | 2 | 4 | 7 | 6 | 6 | 9 | 3 | 1 | 8 | 8 | 6 | 1 | 5 | 1 |
| 5 | 9 | 9 | 9 | 2 | 1 | 2 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 9 | 1 | 8 | 9 | 8 |
| 4 | 2 | 8 | 9 | 7 | 9 | 7 | 5 | 8 | 7 | 1 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 4 | 7 | 5 | 6 | 1 | 5 |

矩阵中，有空白方框的是“匈牙利法”首次分配的元素，部分解的分配和为 23。有下划线的是未分配的行列，有阴影的是小效能矩阵，有阴影方框的是“匈牙利法”第二次分配的元素，最优解为 7，把它添加到部分解的结果中去，得到一个新的完全解，分配和为 23+7，但这不是最优解。

进行优化运算，生成结果如下：

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 2 | 9 | 9 | 8 | 5 | 6 | 8 | 6 | 9 | 7 | 1 | 9 | 9 | 9 | 5 | 2 | 8 | 4 | 2 |
| 5 | 9 | 6 | 3 | 8 | 9 | 6 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 | 2 | 2 | 9 | 6 | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 |
| 1 | 6 | 2 | 8 | 4 | 3 | 1 | 2 | 9 | 2 | 7 | 4 | 6 | 9 | 3 | 6 | 9 | 4 | 8 | 3 | 4 | 9 |
| 6 | 4 | 9 | 5 | 4 | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 5 | 6 | 5 | 5 | 1 | 8 | 4 | 2 | 8 | 6 |
| 7 | 7 | 2 | 6 | 1 | 3 | 1 | 4 | 8 | 7 | 2 | 3 | 1 | 5 | 9 | 8 | 9 | 5 | 1 | 7 | 3 | 6 |
| 9 | 6 | 2 | 8 | 5 | 4 | 8 | 4 | 8 | 1 | 7 | 5 | 4 | 2 | 1 | 9 | 9 | 4 | 8 | 4 | 5 | 2 |
| 3 | 1 | 9 | 8 | 7 | 3 | 9 | 5 | 3 | 6 | 7 | 1 | 2 | 5 | 7 | 1 | 9 | 4 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| 2 | 2 | 5 | 8 | 9 | 8 | 5 | 4 | 7 | 8 | 9 | 6 | 7 | 9 | 1 | 9 | 7 | 6 | 1 | 5 | 4 | 1 |
| 5 | 3 | 5 | 2 | 9 | 4 | 8 | 9 | 8 | 4 | 3 | 4 | 4 | 1 | 8 | 5 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 8 | 8 | 2 | 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 9 | 8 | 3 | 3 | 9 | 4 | 7 | 7 | 1 | 6 | 7 | 7 | 3 | 5 |
| 4 | 1 | 6 | 2 | 8 | 1 | 7 | 5 | 7 | 6 | 3 | 3 | 5 | 1 | 7 | 1 | 7 | 6 | 4 | 4 | 2 | 6 |
| 5 | 4 | 6 | 4 | 1 | 7 | 3 | 9 | 1 | 8 | 2 | 9 | 9 | 5 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 9 | 1 | 5 |
| 8 | 7 | 9 | 7 | 9 | 5 | 5 | 1 | 5 | 9 | 2 | 4 | 1 | 9 | 6 | 6 | 9 | 3 | 3 | 9 | 2 | 2 |
| 2 | 9 | 7 | 7 | 8 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 | 8 | 9 | 9 | 5 | 6 | 8 | 9 | 2 | 8 | 4 | 7 | 8 |
| 7 | 2 | 2 | 3 | 5 | 4 | 6 | 6 | 2 | 1 | 7 | 6 | 8 | 8 | 2 | 2 | 2 | 8 | 9 | 3 | 8 | 7 |
| 8 | 5 | 2 | 5 | 6 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 6 | 3 | 6 | 4 | 8 | 6 | 2 | 7 | 7 |
| 7 | 5 | 4 | 5 | 1 | 7 | 4 | 2 | 1 | 9 | 2 | 7 | 1 | 6 | 6 | 3 | 7 | 9 | 2 | 8 | 1 | 4 |
| 7 | 2 | 2 | 5 | 6 | 6 | 7 | 9 | 6 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 7 | 5 | 3 | 4 | 2 | 6 | 2 | 7 |
| 4 | 4 | 6 | 2 | 6 | 2 | 1 | 9 | 8 | 4 | 7 | 8 | 8 | 4 | 9 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 | 4 | 6 |
| 6 | 4 | 6 | 1 | 3 | 7 | 8 | 5 | 2 | 4 | 7 | 6 | 6 | 9 | 3 | 1 | 8 | 8 | 6 | 1 | 5 | 1 |
| 5 | 9 | 9 | 9 | 2 | 1 | 2 | 6 | 2 | 8 | 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 9 | 1 | 8 | 9 | 8 |
| 4 | 2 | 8 | 9 | 7 | 9 | 7 | 5 | 8 | 7 | 1 | 1 | 7 | 9 | 7 | 1 | 4 | 7 | 5 | 6 | 1 | 5 |

矩阵经过优化处理，有阴影的元素替换了有下划线的元素，最终得到有方框的最优分配，最优解的分配和为 27。

在试验要得到一个 3 阶的小效能矩阵，需要一个 128 *128 的效能矩阵。

## 4 结 论

通过使用改进后的“匈牙利法”，在教学资源调度分配、交通运输控制和现代企业决策等系统中发挥了很好的作用，取得了满意的效果。

“匈牙利法”在各种教材、专著中，作为任务分配的经典算法，作了普遍的介绍，但对算法的收敛性并未做全面详细的论证。这样，不可避免地在各种各样的任务分配中出现问题，本文给相关的教科书和使用该算法的用户提供一个很好的鉴戒。

参考文献：


[1] Gillett B E. Introduction to Operations Research a Computer—Oriented Algorithmic Approach[M]. USA: McGraw—Hill, Inc., 1976.

[2] 范鸣玉, 张 莹. 最优化技术基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.

[3] 郭耀煌. 运筹学与工程系统分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986.

[4] 李 德, 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.

[5] 胡运权. 运筹学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986.

[6] 赵凤治. 线性规划计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[7] Horst A, von Frajer E H. Operations Research Handbook[M]. [s.l.]: Walter de Gruyter &Co, 1977.

[8] 周士富. 运筹学: 管理科学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986.