

# 指派问题的变异蚁群算法求解

梁耀<sup>1</sup> 覃征<sup>2</sup> 杨利英<sup>2</sup> 黄茹<sup>2,3</sup>

(1 中国科学院西安光机所, 陕西 西安 710068) (2 西安交通大学计算机科学与技术系, 陕西 西安 710049)

(3 西安邮电学院计算机系, 陕西 西安 710061)

**摘要:** 指派是现实生活中经常遇到的一类问题, 文章建立了指派问题的数学模型, 并用具有变异特征的蚁群算法对其加以解决。蚁群算法是一种进化算法, 适合解决组合优化问题, 指派问题是组合优化问题中的一个分支。实验结果表明, 使用变异蚁群算法解决指派问题, 提高了搜索效率, 能够在短时间内得到最优分配方案。

**关键词:** 指派问题, 组合优化, 蚁群算法, 变异

中图分类号: TP312

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2005)06-080-04

## Mutated Ant Colony Algorithm for Assignment Problem

LIANG Yao<sup>1</sup>, QIN Zheng<sup>2</sup>, YANG Li-ying<sup>2</sup>, HUANG Ru<sup>2,3</sup>

(1 Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics of Chinese Academy of Sciences Xi'an 710068 China)

(2 Department of Computer Science and Technology, Xi'an Jiaotong University Xi'an 710049 China)

(3 Department of Computer Science and Technology, Xi'an Institute of Post and Telecommunications Xi'an 710061)

**Abstract:** Assignment problem, a kind of combinatorial optimization problem, has significant importance for real life. Ant system algorithm is a kind of evolutionary algorithms, which is efficient in solving combinatorial optimization problem. In this paper, we established the mathematical model of assignment problem as well as solved this problem by mutated ant colony algorithm. Experiments show that, by using this algorithm, the best solution can be found rapidly.

**Key words:** Assignment problem, Combinatorial optimization, Ant colony algorithm, Mutation

### 1 引言

指派问题是现实生活中常会遇到的一类问题, 有着十分广泛的应用, 可用于建立某些决策支持系统(DSS), 在运筹学中通常使用匈牙利指派来解决该问题<sup>[1]</sup>。匈牙利指派适用于在问题规模不大时, 进行手工计算, 很难在计算机上编程实现<sup>[2]</sup>。

蚁群算法<sup>[3,4]</sup>是基于自然界中蚁群觅食的过程建立起来的, 由意大利学者 M. Dorigo 等人提出。首先用在解决 TSP、二次指派问题和任务调派分配等问题, 取得了良好的效果。随后开始在离散的组合优化问题上进行研究。蚁群算法中, 一群人工蚂蚁通过沉积在一张全连通图中各条边上的外激素(pheromone)交换信息,

合作找到一个问题的最优解。以外激素为媒介的间接异步联系方式是蚁群算法最大的特征。

本文采用变异蚁群算法, 以完成任务所付出的代价和任务被完成的可能性为输入求解指派问题, 在保证取得可行解的前提下, 寻求最优解, 适用于

解决实际指派问题。

### 2 数学模型

#### 2.1 问题描述

设在某一单位中有  $M$  项任务和  $N$  个智能体。智能体可以是人、单位中的部门, 或计算机。定义决策变量  $x_{ij}, i=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, N; x_{ij}$  取值如下:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{第 } i \text{ 项任务由第 } j \text{ 个智能体完成} \\ 0: & \text{其他情况} \end{cases}$$

$p_{ij}$  为智能体  $i$  完成任务  $j$  的可能性,  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ 。 $V_{ij} > 0$  为智能体为了完成任务  $j$  所要付出的代价, 可以是时间、费用等。则可建立指派问题的数学模型:

$$\min \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (1-p_{ij}) * V_{ij} * x_{ij} ( * )$$

约束条件为:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N x_{ij} &\leq S_i, \quad i=1, 2, \dots, M \\ \sum_{i=1}^M x_{ij} &\leq D_j, \quad j=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

数学模型的意义为: 按照分配结果进行工作

收稿日期: 2005-03-14

基金项目: 陕西省“十五”科技攻关项目(2000K08-G12)

后,使能够完成的任务尽量地多,没有完成的部分所花费的代价最小。约束条件表示智能体 $i$ 最多可以同时处理 $S_i$ 项任务,对于任务 $j$ ,允许同时有不超过 $D_j$ 个智能体协同进行处理。

## 2.2 转换方法

使用变异蚁群算法求解指派问题,首先要建立表示指派问题的TSP图。该图为非对称旅行商问题(ATSP),图中两城市之间的距离根据完成任务所付出的代价和任务被完成的可能性计算得到。

建立ATSP模型过程:设所有智能体的集合为 $R=\{r_i \mid 1 \leq i \leq M\}$ ,所有任务的集合为 $L=\{l_j \mid 1 \leq j \leq N\}$ , $i, j$ 均为自然数。模型中城市节点为智能体和任务的集合,即 $CITY=R+L$ 。城市间距离 $D$ 的设置如下式:

$$D_{[i][j]} = \begin{cases} d_{[i][j]} & 1 \leq i \leq M \& M < j \leq M+N \\ Q & (1 \leq i \leq M \& 1 \leq j \leq M) \text{ 或 } (M \leq i \leq M+N \& M \leq j \leq M+N) \\ 0 & M < i \leq M+N \& 1 \leq j \leq M \end{cases}$$

其中, $d_{[i][j]}=(1-p_{[i][j-M]}) * V_{[i][j-M]}$ , $p_{ij}$ 为任务 $j$ 被智能体 $i$ 完成的可能性, $V_{ij}$ 为智能体 $i$ 完成任务 $j$ 所付出的代价; $Q$ 是一个足够大的常数,以避免算法中,某一智能体挑选其他智能体作为任务完成,或某一任务变成了其他任务的完成者。

初始化过程,在表示智能体的城市中随机设置 $q$ 只蚂蚁,将其作为起始城市。在选择最优解的过程中,当 $q$ 只蚂蚁中的某一只找到的解比当前最优解所计算出来的路径长度短时,用这个更短的解替换最优解。在经过很多代的搜索过程后,必然可以搜索到问题的最优解或次优解。

## 3 蚁群算法设计

### 3.1 蚁群算法

蚂蚁觅食过程如图1所示。在图1(a)中,所有蚂蚁从一个未经历过的交叉点出发。因为此时没有任何提示信息,所以对路径是随机选择的,一半蚂蚁走路径一,另一半走路径二。每只蚂蚁会在它所走过的路径上留下外激素,途中虚线的数量大致与蚂蚁留在地面上的外激素浓度成比例。由于路径一比路径二短,所以单位时间内走路径一的蚂蚁比走路径二的蚂蚁数量多,路径一上所留下的外激素数量也就多,加上蚂蚁选择路径时对外激素的喜好,经过很短的时间两条路上的外激素数量就大得足以影响新的蚂蚁的决策,如图1(b)。由于这样的正

向反馈,使选择路径一的蚂蚁数量很快增加。最终所有的蚂蚁都会选择走路径一,如图1(c)。

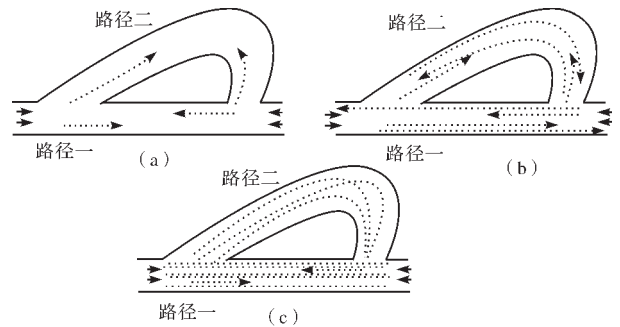


图1 蚁群觅食原理

人工蚁群算法依此原理,在一组节点中寻找出一条代价最小的路径,每只人工蚂蚁根据状态转换规则选择城市生成一个完整的旅程。一旦所有的蚂蚁都完成了旅程,就会使用一种全局的外激素更新规则。所有边上的一小部分外激素蒸发掉了,然后每只蚂蚁将一定数量的外激素沉积在他所走过的旅程中的每条边上,这些外激素的数量和它的旅程的长短是成反比的。这样的过程不断迭代直至达到终止条件,搜索到最优解。

蚁群所使用的状态转移规则由式(1)给出,称为随机可能性规则。它给出了在城市 $r$ 中的蚂蚁 $k$ 选择转移到城市 $s$ 的可能性。

$$p_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)]^\alpha \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{u \in J_k(r)} [\tau(r, u)]^\alpha \cdot [\eta(r, u)]^\beta}, & s \in J_k(r) \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tau$ 为外激素, $\eta=1/\delta$ 是距离 $\delta(r, s)$ 的倒数, $J_k(r)$ 是在城市 $r$ 的蚂蚁 $k$ 还未访问过的城市的集合, $\beta > 0$ 是启发式因子。

当所有的蚂蚁都完成了本次旅程,就开始根据式(2)进行全局激素更新:

$$\tau(r, s) \leftarrow (1-\rho) \cdot \tau(r, s) + \sum_{k=1}^q \Delta\tau_k(r, s) \quad (2)$$

其中

$$\Delta\tau_k(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{L_k}, & (r, s) \in \text{蚂蚁 } k \text{ 的旅程} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

$0 < \rho < 1$ 是外激素的消逝参数, $L_k$ 是由蚂蚁 $k$ 完成的旅程的长度, $q$ 是蚂蚁的数量。

外激素更新是为了将较多的外激素沉积在较短的边上。

### 3.2 变异蚁群算法

变异蚁群算法是在蚁群算法的基础上引入了

路径 2-交换方法<sup>[6]</sup>,如图 2 所示。

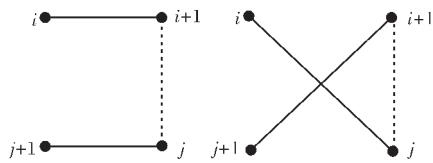


图2 2-交换法

如果图中的路径长度满足条件:  
 $D_{[i][i+1]}+D_{[j][j+1]}>D_{[i][j]}+D_{[i+1][j+1]}$   
那么将路径中  $i, j$  两点交换, $i, j$  之间所有的城市顺序反向重新排列。  
当所有的蚂蚁都完成了一次旅行后,对所找到的解使用 2-交换法再进行一次优化可以有效地缩短搜索最优解所需的时间。

为了减少算法中的计算量,加快搜索速度,本文采取这种思想对顺序的四个节点进行检测、交换路径。

3.3 算法设计

解决指派问题的变异蚁群算法如下:  
**step 1.** 由完成任务所付出的代价和任务被完成的可能性建立起一个 ATSP 矩阵;  
**step 2.** 初始化外激素信息矩阵 phero、最优解 best,设置外激素消逝速度等参数;  
**step 3.** while (未达到终止条件)  
**step 3.1** 初始化每只蚂蚁,将  $q$  只蚂蚁随机放在代表智能体的城市中;  
**step 3.2** for  $o=1$  to  $2 * \max(M, N)$  步长为 2;  
**step 3.2.1** 每只蚂蚁根据状态转移策略选择一项任务  $l_j$ ,同时完成  $l_j$  的智能体数不超过  $D_j$ ;  
**step 3.2.2** 随机选择一个智能体  $r_i, r_i$  已接受的任务数目不超过  $S_i$ ;  
**step 3.2.3** 将  $j, i$  两个节点按顺序记录在该蚂蚁的解中;  
**end for**  
**step 3.3** 对所有蚂蚁的解按照 2-交换法进行路径交换处理,更新 phero;  
**step 3.4** 在所有解中,如果存在比 best 的路径长度短的解,更新 best;  
**end while**  
本文算法中,终止条件使用代数进行控制。

4 实验

4.1 实验 1

假设有 3 个人、5 项任务,完成任务所付出的代

价和任务被完成的可能性分别如表 1、表 2 所示。

表 1 完成任务所付出的代价

任务 人	1	2	3	4	5
1	9.501	8.214	9.355	1.389	4.451
2	2.311	4.447	9.169	2.028	9.318
3	6.068	6.154	4.103	1.987	4.660

表 2 完成任务的可能性

任务 人	1	2	3	4	5
1	0.8180	0.8385	0.7948	0.2757	0.2844
2	0.6602	0.5681	0.9568	0.4373	0.8692
3	0.3420	0.3704	0.5226	0.1365	0.2648

参数选择为  $\alpha=1$ ,外激素消逝因子  $\rho=0.3$ ,启发式因子  $\beta=2$ ,蚂蚁个数  $q=5$ 。  
本文算法找到的最优解为(第 1 人完成任务 2、4)、(第 2 人完成任务 1、5)、(第 3 人完成任务 3)。按照该分配方案所得到的期望任务代价为 6.2955。  
分别运行 10 次 10 代、20 代、40 代,情况如表 3 所述。

表 3 3 个智能体、5 个任务 蚁群算法任务分配数据

代数	最优解个数	平均误差
10	5	0.1562
20	7	0.0273
40	8	0.0182

经 60 代后只有极少数蚂蚁无法找到最优解。  
**4.2 实验 2**  
假设有 8 个部门需要完成 8 项任务,即建立的 ATSP 模型为 16 个城市。完成任务所付出的代价和任务被完成的可能性如表 4、表 5 所示。

表 4 完成任务所付出的代价

任务 部门	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9.501	8.214	9.355	1.389	4.451	8.381	3.046	3.784
2	2.311	4.447	9.169	2.028	9.318	0.196	1.897	8.600
3	6.068	6.154	4.103	1.987	4.660	6.813	1.934	8.537
4	4.860	7.919	8.936	6.038	4.186	3.795	6.822	5.936
5	8.913	9.218	0.579	2.722	8.462	8.318	3.028	4.966
6	7.621	7.382	3.529	1.988	5.252	5.023	5.417	8.998
7	4.565	1.763	8.132	0.153	2.026	7.095	1.509	8.216
8	0.185	4.057	0.099	7.468	6.721	4.289	6.979	6.449

参数选择为  $\alpha=1$ ,外激素消逝因子  $\rho=0.3$ ,启发式因子  $\beta=2$ ,蚂蚁个数  $q=10$ 。  
使用本文算法可以找到的解为(部门 1 完成任务 2)(部门 2 完成任务 6)(部门 3 完成任务 7)(部

表 5 完成任务的可能性

任务 部门	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.8180	0.8385	0.7948	0.2757	0.2844	0.7329	0.4833	0.4154
2	0.6602	0.5681	0.9568	0.4373	0.8692	0.2259	0.2808	0.7050
3	0.3420	0.3704	0.5226	0.1365	0.2648	0.5798	0.2611	0.8744
4	0.2897	0.7027	0.8801	0.7118	0.2883	0.4604	0.5678	0.3150
5	0.3412	0.5466	0.1730	0.1939	0.6828	0.7298	0.5942	0.7680
6	0.5341	0.4449	0.2797	0.1991	0.4235	0.6405	0.4592	0.9708
7	0.7271	0.6946	0.9714	0.2987	0.3155	0.6091	0.2029	0.9901
8	0.3093	0.6213	0.2523	0.6614	0.5340	0.3798	0.5503	0.7889

门 4 完成任务 5)(部门 5 完成任务 3)(部门 6 完成任务 8)(部门 7 完成任务 4)(部门 8 完成任务 1)。按照该分配方案所得到的期望任务代价为 6.8631。

由于该模拟问题规模比较小,所以可以采用穷举的方法得到问题的最优解,期望值为 6.8631,即上述分配方案所得到的期望任务代价。分别运行 10 次 30 代、50 代、100 代,情况如表 6 所示。

表6 8个智能体、8个任务蚁群算法任务分配数据

代数	最优解个数	平均误差
30	5	0.1917
50	7	0.0893
100	9	0.0136

5 结束语

本文使用了引入 2-交换法的蚁群算法,建立了指派问题的数学模型,并建立了将指派问题转化为蚁群算法可解的 TSP 图的方法,提出了一种解决指

(上接第 79 页)

误差进行了比较:① GPS 信号;② 无故障诊断的滤波器信号;③ 带模糊逻辑的滤波器信号(本文采用的方法)。结果表明当多径效应发生时,本文设计的算法是有效的。

6 结束语

本文设计了一种基于模糊逻辑并考虑环境信息的多传感器 Kalman 滤波器。仿真结果表明通过引入环境信息,提高了数据融合过程的可靠性,同时能够检测并排除来自传感器的错误数据,尤其是来自 GPS 的数据。

参考文献

[1] 蔡伯根. 利用 GPS 和惯性传感器的融合和集成实现车辆定位 [J]. 北方交通大学学报, 2000, 24(5): 7~14.

派问题的方法。指派问题属于组合优化问题,很适合用本文算法来求解。用具有变异特征的蚁群算法能够准确快速求得最优或次优的分配结果。并且,对于智能体数和任务数相等或不等的情况同样适用。对于规模较大的指派问题(智能体、任务数目和超过 30 个),可对此算法进一步进行改进,亦可缩短搜索时间,达到良好的效果。

参考文献

[1] 钱颂迪. 运筹学[M]. 清华大学出版社,1990.  
[2] 谢凡荣. 求解指派问题的一个算法[J]. 运筹与管理, 2004. 13(6): 37~40.  
[3] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, Alberto Colomi. Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, Feb 1996, 26(1).  
[4] Marco Dorigo, Luca Maria Gambardella. Ant Colonies for the Travelling Sales-man Problem[J]. BioSystems, 1997, 43.  
[5] 吴庆洪, 张纪会, 徐心和. 具有变异特征的蚁群算法[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(10):1240~1245.  
[6] 伍文城, 肖建. 基于蚁群算法的中国旅行商问题满意解 [J]. 计算机与现代化, 2002, 84: 6~11.

梁耀男,(1977-),硕士研究生。研究方向为信号处理。  
覃征男,(1956-),博士后,教授,博士生导师。研究方向为电子商务、数据融合。  
杨利英 (1974-),博士研究生。  
黄茹女,(1978-),硕士,西安邮电学院助教。

[2] S Sukkarieh, E M Nebot, H F Durrant-Whyte. A High Integrity IMU GPS Navigation Loop for Autonomous Land Vehicles Applications. IEEE, 1999, 15(3): 572~578.  
[3] S Blackman, R Popoli. Design and Analysis of Modern Tracking Systems. Artech House, 1999.  
[4] Y Bar-Shalom, X Rong Li, T Kirubajan. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. Wiley-Interscience, 2001.  
[5] H F Durrant-Whyte, M Stevens. Data Fusion in Decentralized Networks. in: 4th International Conference on Information Fusion, Montreal, Canada, 2001.  
[6] M S Grewal, L R Weill, A P Andrews. Global Positioning Systems. Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, 2001.

毋建宏 讲师,博士研究生。研究方向为数据融合、故障诊断研究。