Чинаев Виктор,
3824М1ПМвм

Домашняя работа #1

№35

$L(y', y) = (y' - y)^2$

$f^*(x) = \arg\min\limits_c E((Y-c)^2 \mid X = x) = \arg\min\limits_c E(Y^2 - 2cY + c^2 \mid X = x) =$

$= \arg\min\limits_c \{ E(Y^2 \mid X = x) - 2E(cY \mid X = x) + E(c^2 \mid X = x) \} =$

$= \arg\min\limits_c \{ c^2 - 2cE(Y \mid X = x) + E(Y^2 \mid X = x) \} =$

$= \arg\min\limits_c \{ (c - E(Y \mid X = x))^2 + E(Y^2 \mid X = x) - E^2(Y \mid X = x) \} =$

$= \arg\min\limits_c \{ \underbrace{(c - E(Y \mid X = x))^2}_{\text{наименьш. зн. принимает при } c = E(Y \mid X = x)} + \underbrace{D_Y(Y \mid X = x)}_{\text{не зависит от } c} \}$

Отсюда $f^*(x) = E(Y \mid X = x)$

$R(f^*) = \int\limits_{X \cdot Y} L(f(x), y)\, p(x, y)\, dx\, dy =$

$= \int\limits_X \int\limits_Y L(f(x), y)\, p(y \mid x)\, dy\, p(x)\, dx = \int\limits_X E((Y - f(x))^2 \mid X = x)\, p(x)\, dx \Big|_{f(x) = f^*(x)}$

$= \int\limits_X D_Y(Y \mid X = x)\, p(x)\, dx = E_X(D_Y(Y \mid X = x)).$

№36

$L(y', y) = |y' - y|$

$$R(f) = \iint\limits_{XY} L(f(x), y)\, p(y|x)\, dy\, p(x)\, dx$$

$$\int\limits_{Y} L(f(x), y)\, p(y|x)\, dy = E(L(f(x), Y) \mid X = x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(|f(x) - Y| \mid X = x) \to \min_{c}$$

1) $\text{median}(Y \mid X = x) = m$

$P(Y < m \mid X = x) = P(Y > m \mid X = x) = \frac{1}{2}$ или

$$\int\limits_{Y<m} p(y|x)\, dy = \int\limits_{Y>m} p(y|x)\, dy = \frac{1}{2}$$

2) $\exists\, a > 0$ и рассм-и следующее

$$E(|m + a - Y| \mid X = x) = \int\limits_{Y} |m + a - y|\, p(y|x)\, dy =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{Y<m+a} (m + a - y)\, p(y|x)\, dy}_{1} + \underbrace{\int\limits_{Y>m+a} (y - m - a)\, p(y|x)\, dy}_{2} \; ⊜$$

1) $$\int\limits_{Y<m} (m + a - y)\, p(y|x)\, dy + \int\limits_{m<Y<m+a} (m + a - y)\, p(y|x)\, dy$$

2) $$\int\limits_{Y>m} (y - m - a)\, p(y|x)\, dy - \int\limits_{m<Y<m+a} (y - m - a)$$

$$⊜ \int\limits_{Y>m} (y - m)\, p(y|x)\, dy + \int\limits_{Y<m} (m - y)\, p(y|x)\, dy + a\Big(\underbrace{\int\limits_{Y<m} p(y|x)\, dy}_{=\frac{1}{2}} -$$

$$- \underbrace{\int\limits_{Y>m} p(y|x)\, dy}_{=\frac{1}{2}}\Big) + 2\int\limits_{m<Y<m+a} (m + a - y)\, p(y|x)\, dy =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{Y} |y - m|\, p(y|x)\, dy}_{E(|Y - m| \mid X = x)} + 2\int\limits_{m<Y<m+a} (m + a - y)\, p(y|x)\, dy$$

Чтобы уменьшить выр-е, берём $a = 0$.

3) Аналогично для $a < 0$.

Т. о. $c = \text{median}(Y \mid X = x)$ и при ней достигается минимум.

№ 37

$$L(y', y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y' = y \\ 1, \text{ если } y' \neq y \end{cases}$$

$$R(f) = \int_{X \times Y} L(f(x), y)\, p(x, y)\, dx\, dy$$

Далее удобно взять приближенное значение

$$R(f) \approx \hat{R}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L(f(x^{(i)}), y^{(i)})$$

Если брать $f(x)$ равное моде, то суммирование будет состоять из нулей и единиц, при этом единиц будет меньше, чем при других $f(x)$, потому как в кач-ве $f(x)$ выбрано наиболее часто встреч-ся знач. выборки.

№ 38

$$Pr(y=0 \mid X=x) = \frac{\{Pr(X=x \mid y=0)\, Pr(y=0)\}}{Pr(X=x)}$$

$$Pr(y=1 \mid X=x) = \frac{\{Pr(X=x \mid y=1)\, Pr(y=1)\}}{Pr(X=x)}$$

Отсюда

$$R(f^*) = \sum_{y \in \{0;1\}} l_y Pr(Y=y \mid X=x)$$

$$f^*(x) = \underset{y \in \{0;1\}}{\arg\min}\, R(f(x)) = \underset{y \in \{0;1\}}{\arg\min} \sum l_y Pr(Y=y \mid X=x)$$

$$\begin{cases} l_0 < l_1 \Rightarrow R \text{ будет миним. при } y=1 \\ l_0 > l_1 \Rightarrow R \text{ будет миним. при } y=0 \\ l_0 = l_1 \Rightarrow \text{выбор класса нейтр.} \end{cases}$$

Тогда $f^*(x) = \underset{y \in \{0;1\}}{\arg\max}\, l_y Pr(y \mid X)$

№ 39

$$f^*(x) = \arg\max_{y \in Y} Pr(y|X) = \arg\max_{y \in Y} \frac{P(X|y)\,Pr(y)}{P(X)} =$$

$$= \arg\max_{y \in Y} p(X|y)\,Pr(y)$$ (исключаем $P(X)$, т.к. не зав-т от y).

$Pr(y=K)$ - априорн. вер-ть того, что объект прин. кл. K.

$Pr(X|y=K)$ - для объекта x классификатор выбирает класс K с миним-м ожид. риском

$$R(f) = \sum_{y'=1}^{K} L(y', y)\,Pr(y|X)$$

$$f(x) = \arg\min_k \sum_{y'=1}^{K} L(y', k)\,Pr(y'|X) = \arg\min_k \sum_{y=1}^{K} L(y', k)\,Pr(y'|X)$$

$$Pr(y'|X) = \frac{Pr(X|y'=k)\,Pr(y'=k)}{\sum_{y'=1}^{K} Pr(X|y=j)\,Pr(y'=j)}$$

Класс K минимизирует ожидаемый риск.

$$K = \arg\min_{c=\{1,K\}} \sum_{j=1}^{K} L(c, j)\,Pr(y'=j|X=x)$$