גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

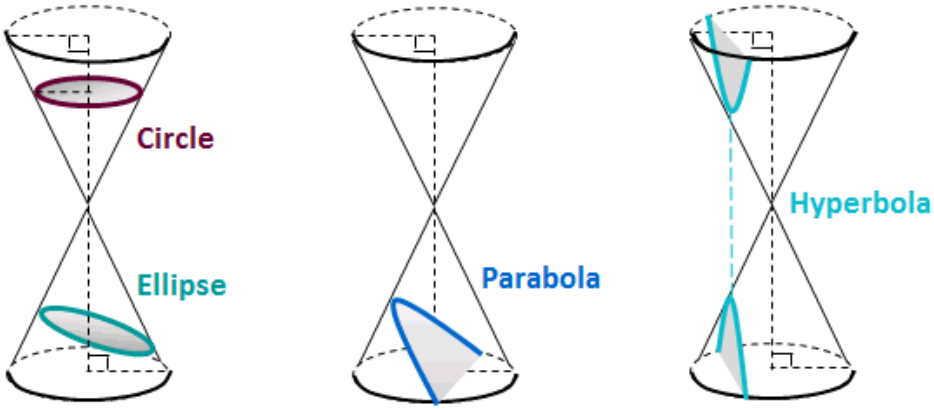
הרצאה

חתכי חרוט

חשוב להבין לפני שמתחילים, שישנן כמה צורות שלמדנו להכיר עוד מהתיכון:

1. מעגל – נוסחתו $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
2. אליפסה – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
3. היפרבולה - $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

כל אלה, הן בעצם חתכים שונים של חרוט תלת ממדי.



בהינתן משוואה ריבועית $Q(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$, הפתרון של $Q(x,y)=0$ הוא חתך חרוט.

<u>משוואת חרוט</u>: $z=\pm h\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>משוואת מישור</u>: $ax+by+cz=d$.

נחתוך אותם ונקבל משוואה ריבועית דומה ל-$Q(x,y)=0$.

בתלת מימד יש לנו מקבילות לזה, עם ספירואיד, היפרבולאויד, אליפסויד).

איזומטריות

איזומטריה היא פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המשמרת מרחקים. כלומר: $\|x-y\|=\|f(x)-f(y)\|$.

דוגמאות לאיזומטריה:

1. סיבוב. למשל $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin u\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ סיבוב סביב ציר ה-x.
2. שיקוף. שיקוף ב-$\mathbb{R}^n$ בניצב ל-a (a וקטור יחידה): $f(v)=v-2\langle a,v\rangle a$. נהוג לסמן $S_a(v)$.

<u>טענה</u>: S_a העתקה לינארית. ניתן או להוכיח מאקסיומות העתקה לינארית, או למצוא מטריצה מייצגת.

הרצאה 4 – אינווריאנטיות העקמומיות

1. k אינה תלויה בפרמטריזציה.
2. אם הופכים כיוון תנועה, k הופכת סימן.

אם R איזומטריה:

3. שמירת אוריאנטציה: העקמומיות נשמרת על ידי R. $R_\gamma(t) = k_{R_\gamma}(t)$.
4. הופכת אוריינטציה: $k_\gamma(t) = -k_{R_\gamma}(t)$.

אתגר: כל תכונה ניתן להוכיח על בסיס הגדרה אחרת לשונות של k.

תוצאות גלובליות

עד כה הסתכלנו רק על סביבה של $\gamma(s)$. מה אם נרצה להגיד משהו על כל העקומה?

<u>משפט ז'ורדן</u>: לעקומה סגורה ופשוטה יש "פנים" ו"חוץ".

<u>פונקצית זווית גלובלית</u>

נרצה למצוא בסביבה של S_0 פונקצית זווית חלקה $\theta(s)$ כך ש: $T = \begin{bmatrix}\cos\theta(s)\\ \sin\theta(s)\end{bmatrix} = e^{i\theta(s)}$.

על מנת למצוא $\theta: [0,L] \to \mathbb{R}$ עבורה $T(s) = e^{i\theta(s)}$, נפתור את המד"ר $\dot\theta = k$.

$$\theta(s) = \int_0^s k(p)\,dp + \theta(0) = \int_0^s k(p)\,dp + \frac{atan2\big(T(0)\big)}{4}$$

נגדיר:

$$\beta(s) = \gamma(0) + \begin{bmatrix}\int_0^s \cos\theta(p)\,dp\\ \int_0^s \sin\theta(p)\,dp\end{bmatrix} \Rightarrow T_\beta = \dot\beta(s) = \begin{bmatrix}\cos\theta(s)\\ \sin\theta(s)\end{bmatrix}$$

$$\dot T_\beta = \ddot\beta = \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}\cdot\dot\theta = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} T_\beta}_{N_\beta\ by\ definition} \cdot \dot\theta$$

ולבסוף נוכל לקבל:

$$k_\beta(s) = \dot\theta(s) = k_\gamma(s)$$

<u>מסקנה</u>: ל-β,γ יש:

1. אותה עקמומיות
2. $\beta(0) = \gamma(0)$
3. $T_\beta = \begin{bmatrix}\cos\theta(s)\\ \sin\theta(s)\end{bmatrix}$

ולכן הן אותה עקומה.

<u>הגדרות</u>:

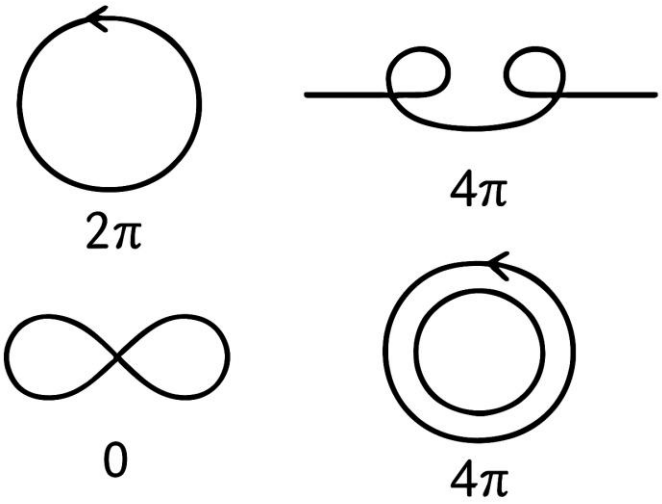
<u>העקמומיות הכוללת</u>

$$K(r) = \int_0^L k(s)\,ds = \theta(L) - \theta(0)$$

<u>אינדקס הסיבוב</u> (מספר הליפופים של T_γ סביב הראשית)

$$I(\gamma) = \frac{K(\gamma)}{2\pi}$$

דוגמאות (עקמומיות כוללת של עקומות שונות):



<u>הגדרה</u>: עקומה רגולרית $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ נקראת **סגורה**, אם מתקיים: $\gamma^{(n)}(a) = \gamma^{(n)}(b)$ לכל $0 \le n$.

<u>משפט</u>: אם γ סגורה-פשוטה, אזי $I(\gamma) = 1$.

<u>משפט</u> (hopf): תהי γ עקומה רגולרית סגורה-פשוטה. אזי: $I(\gamma) \in \{+1, -1\}$.

<u>הוכחה</u>:

נניח בה"כ:

1. $\gamma: [0, L] \to \mathbb{R}^2$.
2. $\gamma(0) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \dot\gamma(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.
3. $\gamma^2(s) \ge 0$.

(אם זה לא המצב, נסובב ונזיז את γ).

נסמן $\beta = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mid 0 \le x \le y \le L\right\}$. כל נקודה $\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} \in B$ מייצגות שתי נקודות על γ: $\gamma(s), \gamma(t)$.

נגדיר פונקציה $V: B \to S^1$:

$$V(s,t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|}$$

כלומר: $V(s,t)$ הוא וקטור יחידה המצביע מ-$\gamma(s)$ אל $\gamma(t)$.

מה נעשה עם הנקודה $V(x,x)=\frac{0}{0}$? נגדיר עם הגבול:

$$V(x,x)=\lim_{y\searrow x}\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{\|\gamma(y)-\gamma(x)\|}=:\dot{\gamma}(x)$$

מה נעשה עם הנקודה $V(0,L)$? גם כאן נגדיר עם הגבול ונקבל: $V(0,L)=-\dot{\gamma}(0)$.

בחרנו את γ סגורה-פשוטה ולכן אין עוד נק' כפולה מלבד $\gamma(0)=\gamma(L)$ ולכן V מוגדרת היטב. לכן V רציפה ב-B (לפי הגדרה).

$\|V\|=1$ ולכן קיימת $\theta(x,y)$ עבורה $V=\begin{bmatrix}\cos\theta(s)\\ \sin\theta(s)\end{bmatrix}$. אנחנו רוצים לחשב את $I=\frac{\theta_\gamma(L)-\theta_\gamma(0)}{2\pi}$.

נעשה זאת בדרך הבאה:

1. נגדיר עקומה $\beta_0:[0,L]\to B$ לפי $\beta_0=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}$.
2. נסתכל על $V\circ\beta_0$.
3. נסתכל על פונקציית זווית של $\dot{\gamma}(t)=V\circ\beta_0(t)$. נקרא לה $\theta_0:[0,L]\to\mathbb{R}$.
4. נחשב: $I_0=\frac{\theta_0(L)-\theta_0(0)}{2\pi}$.

נגדיר:

β_1 – תנועה למעלה מ-0 אל $\begin{bmatrix}0\\ L\end{bmatrix}$, ואז ימינה אל $\begin{bmatrix}L\\ L\end{bmatrix}$ בקו ישר. $\beta_1(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}0\\ 2t\end{bmatrix} & 0\le t\le\frac{L}{2}\\ \begin{bmatrix}2t-L\\ L\end{bmatrix} & \frac{L}{2}\le t\le L\end{cases}$.

נחזור על אותו חישוב עם β_1. (הערה: למרות ש-β_1 לא גזירה, ניתן להגדיר פונקצית זוית בעזרת $\theta=atan2(v)+2\pi\cdot(level\ in\ the\ helix)$.)

נגדיר $\theta_1(t):[0,L]\to\mathbb{R}$ פונקצית זווית של $V\circ\beta_1$, ונחשב את $I_1=\frac{\theta_1(L)-\theta_1(0)}{2\pi}$.

<u>טענה</u>: $I_1=1$.

נשים לב:

$$V\circ\beta_1(0)=V(0,0)=\dot{\gamma}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$V\circ\beta_1\left(\frac{L}{2}\right)=V(0,L)=-\dot{\gamma}(0)=-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$V\circ\beta_1(L)=V(L,L)=\dot{\gamma}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

קיבלנו:

$$\theta_1(0)=2\pi k,\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)=\pi+2\pi m,\theta_2(L)=2\pi\ell$$

לכאורה k,m,ℓ הם שלמים כלשהם, אבל אנחנו נוכיח כי: $k=m,\ell=k+1$.

כלומר $\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)=\theta_1(0)+\pi,\ \ \theta_1(L)=\theta_1(0)+2\pi$.

עבור $t\in\left(0,\frac{L}{2}\right)$:

$$V\circ\beta_1(t)=\frac{\gamma(2t)-\gamma(0)}{\|\gamma(2t)-\gamma(0)\|}$$

תמיד בחצי המישור העליון כי $\gamma^2(0)=0,\gamma^3(2t)\geq 0$.

לכן:

1. $\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)\geq\theta(0)$.
2. $\left|\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)-\theta_1(0)\right|<2\pi$. (אחרת $V\circ\beta_1$ משלים לפחות סיבוב אחד סביב הראשית).

$\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)<\theta_1(0)\Leftarrow$ הייתה תנועה עם כיוון השעון.

עבור $t\in\left(\frac{L}{2},L\right)$: אותו רעיון, רק ש $V\circ\beta_1$ תמיד מתחת לציר ה-x. נקבל $\theta_1(L)=\theta_1\left(\frac{L}{2}\right)+\pi$ ולבסוף $I_1=1$.

למה $I_0=I_1$? נגדיר $\beta_\lambda:[0,L]\to B$, לפי $\beta_\lambda=\lambda\beta_1(t)+(1-\lambda)\beta_0(t)$.

$V\circ\beta_\lambda$ רציף, ולכן קיימת $\theta_\lambda(t)$ רציפה ב-$[0,L]$.

$$V\circ\beta_\lambda(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=V\circ\beta_\lambda(L)\Rightarrow\theta_\lambda(L)=\theta(0)+2\pi m\Rightarrow I_\lambda=m\in\mathbb{Z}$$

אם I_λ רציף ב-λ, ממשפט ערך הביניים $I_0=I_\lambda=I_1=1$. מ.ש.ל.

מדוע I_λ רציף? נב"ש ש-λ_0 נקודת אי-רציפות של I_λ. קיים h קטן כרצוננו כך ש: $I_{\lambda_0+h}\neq I_{\lambda_0}$. לכן $V\circ\beta_{\lambda_0},V\circ\beta_{\lambda_0+h}$ עושים מספר שונה של סיבובים סביב הראשית. לכן מתישהו הם רחוקים מאוד אחד מהשני.

<u>טענה</u>: קיים $t_0\in[0,L]$ כך ש: $V\circ\beta_{\lambda_0+h}(t_0)=-V\circ\beta_{\lambda_0}(t_0)$.

<u>הוכחה</u>: אינפי רגיל.

הרצאה 5

<u>הגדרה</u>: עקומה $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ היא <u>חלקה למקוטעין</u>, אם קיימת חלוקה $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ של γ כך ש: $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ היא עקומה חלקה לכל i.

<u>הערה</u>: שימו לב ש-γ רציפה.

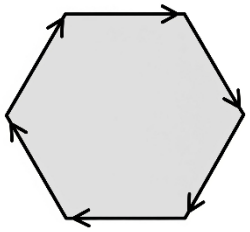
פונקצית זווית של עקומה חלקה למקוטעין

אם γ חלקה למקוטעין ורגולרית ($\|\dot{\gamma}\| \neq 0$ איפה ש-$\dot{\gamma}$ קיים), אז חוץ ממספר סופי של פינות, $k(t)$ קיימת לכל $t \in [a,b]$. לכן, ניתן להגדיר את האינטגרל $\int_a^t k(p)\,dp$, ולכן ניתן להגדיר:

$$\theta(t) = \int_a^t k(p)\,dp + atan2\big(T(0)\big)$$

היא מוגדרת היטב, בהנחה ש-0 לא פינה.

<u>דוגמא חשובה</u>:



אם נזוז על הפוליגון הזה, אנחנו נראה שבכל מקטע העקמומיות היא 0 (חוץ מהפינות), ועדיין אנחנו מסתובבים. כלומר $\theta(t)$ קבועה ואנחנו עדיין מבצעים סיבוב של $360°$.

נצטרך לתקן את $\theta(t)$ על מנת שיתחשב בפינות.

<u>הגדרה</u>: הזווית בפינה t_i היא הזווית בין $T^-(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} \dot{\gamma}(t)$ לבין $T^+(t_1) = \lim_{t \to t_1^+} \dot{\gamma}(t)$.

<u>נסמן</u>: $\theta_i = T^+(t_i) - T^-(t_i)$.

שימו לב: יש חשיבות לסדר הוקטורים מ-T^- אל T^+. במובן שאם נלך קודם מ-T^+ אל T^-, נהפוך את הסימן של θ_i.

<u>הגדרה</u>: פונקצית זווית גלובלית של γ רגולרית חלקה למקוטעין היא:

$$\theta(t) = \int_a^t k(p)\,dp + \mathrm{atan}\big(T(0)\big) + \sum_{t_i \le t} \theta_i$$

משפט הופף המוכלל

עבור γ רגולרית למקוטעין סגורה-פשוטה, מתקיים $I(0) = I1 = \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$.

רעיון להוכחה: לעגל פינות. משפט הופף המקורי תקף לגבי הפוליגון המעוגל, אבל עיגול הפינה מסובב את המשיק בדיוק כמו הקפיצה הלא רציפה של γ.
$\Leftarrow$ ל-γ_1, γ כמעט אותה פונקצית זווית, כשעיגול הפינה שואף ל-0 מתקבל $\theta_\gamma = \theta_{\gamma_1}$.

מסקנה: סכום הזוויות בפוליגון בעל n צלעות הוא $(n-2)\pi$.

הוכחה: עם פרמטריזציה רגולרית חלקה למקוטעין של הפוליגון.

$$\theta(t) = \sum_{t_1 \le t} \theta_i$$

$$\Rightarrow 2\pi = \theta(b) - \theta(a) = \sum outer\ angles = \sum \pi - outer\ angles$$
$$= n\pi + \sum inner\ angles$$

שימו לב: משפט הופף $\Leftrightarrow$ $180°$ במשולש

משפט ארבעת הקודקודים: לעקומה סגורה פשוטה יש לפחות 4 נקודות קיצון של k: 2 מקס' ו-2 מינ'.
לינק להוכחה בגיטהאב.

עקומות ב-$\mathbb{R}^3$

נפעיל את אותן הגדרות עבור עקומה חלקה, רגולרית, סגורה, פשוטה, אורך קשת, פרמטר טבעי ומשיק.

איפה הבעיה? בנורמל. ב-$\mathbb{R}^3$ יש מישור שלם של וקטורים ניצבים ל-T. איזה מהם הוא N?

הגדרת הנורמל ב-$\mathbb{R}^3$

הגדרה (נורמל בשלושה מימדים):

$$N = \frac{\dot{T}}{\|\dot{T}\|}$$

תזכורת: $T = \dot{\gamma}(s)$, כאשר γ כפרמטר טבעי. $\|T\| = 1 \Leftarrow \dot{T} \perp T$.

הערה: ב-$\mathbb{R}^2$ מתקיים $\dot{T} = \ddot{\gamma} = kN$. אם פונים ימינה, $\dot{T}$ מצביע לכיוון ההפוך של $N \Leftrightarrow k$ שלילי. ב-$\mathbb{R}^2$ זה לא ייתכן כי $\dot{T}$ תמיד, לפי הגדרה, בכיוון N.

הגדרה: ב-$\mathbb{R}^3$, $k(s) = \langle \dot{T}, N \rangle$.

ההערה לעיל גוררת ש: $k(s) \ge 0$.

הגדרת הקעירות ב-$\mathbb{R}^3$

$$k(s) = \langle \dot{T}, \frac{\dot{T}}{\|\dot{T}\|} \rangle = \frac{\|\dot{T}\|^2}{\|\dot{T}\|} = \|\dot{T}\|$$

הערה: האם קיימת מסגרת פרנה-סרה ב-$\mathbb{R}^3$? יש רק אופציה אחת: (T, N, B) (כדי שהבסיס יהיה אורתונורמלי וימני).

כאשר $k(s_0) = 0$, מסגרת פרנה קורסת כי $\|\dot{T}\| = 0$, ולכן N לא קיים.

<u>הגדרה</u>: B הוקטור הבי-נורמלי הוא $B = T \times N$.

<u>תזכורת</u>: ה-cross product הוא מכפלת וקטורים המחזירה וקטור חדש, המקיים:

1. $A \times B$ ניצב ל-A, B.
2. $\|A \times B\|$ = שטח המקבילית ש-A, B יוצרים.
3. $A \times B$ מקיים את כלל יד ימין.

דרך לזכור את המכפלה:

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ & -A- & \\ & -B- & \end{vmatrix}$$

זוהי רק דרך לזכור את המכפלה, ולא det אמיתית.

מד"ר למסגרת פרנה ב-$\mathbb{R}^3$

ניזכר כי ב-$\mathbb{R}^2$ היו משוואות מד"ר ל-(T, N).

האם יש משוואות מדר ל(T, N, B)? כבר יש לנו $\dot{T} = kN$, נחפש גם ל-$\dot{N}$ ו-$\dot{B}$.

מכיוון ש-(T, N, B) בסיס אורתונורמלי, $\dot{B} = \langle \dot{B}, T \rangle T + \langle \dot{B}, N \rangle N + \underbrace{\langle \dot{B}, B \rangle}_{0} B$.

בנוסף $B \perp T$, ולכן $\langle \dot{B}, T \rangle + \langle \dot{T}, B \rangle = 0 \Leftarrow \langle B, T \rangle = 0$.

נקבל את המשוואות:

$$\langle \dot{B}, T \rangle = -\langle B, \dot{T} \rangle$$
$$\langle \dot{B}, N \rangle = -\langle B, \dot{N} \rangle$$

<u>מסקנה</u>: $\dot{B} = -\langle B, \dot{N} \rangle N$.

פיתול

<u>הגדרה</u>: $\tau(s)$ נקראת **הפיתול** של עקומה (torsion). הוא מגדיר כמה γ רחוקה מלהיות עקומה מישורית.

משוואות פרנה-סרה

נמשיך ונקבל:

$$\dot{N} = \langle \dot{N}, T \rangle T + \langle \dot{N}, N \rangle N + \langle \dot{N}, B \rangle B = -\langle N, \dot{T} \rangle T + \langle N, \dot{B} \rangle B = -kT + \tau B$$

קיבלנו בעצם את משוואות פרנה-סרה, שהם המד"ר בשלושה מימדים עליו דיברנו.

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

<u>מסקנה</u> (המשפט היסודי של תורת העקומות ב-$\mathbb{R}^3$):

בהינתן $\gamma(0), N(0), T(0)$, ופונקציות חלקות τ, k, קיימת רק עקומה אחת.

<u>טענה</u>: תהי γ עקומה רגולרית ב-$\mathbb{R}^3$ עם $k(s) \neq 0$. התמונה של γ (העקבה) מוכלת במישור כלשהו אם"ם $\tau(s) = 0$ בכל תחום הגדרתה.

<u>הוכחה</u>: $\Leftarrow$: γ מוכלת במישור M. נסובב ונזיז את M להיות מישור $x-y$ ומשתמשים בדוגמה שראינו בכיתה.

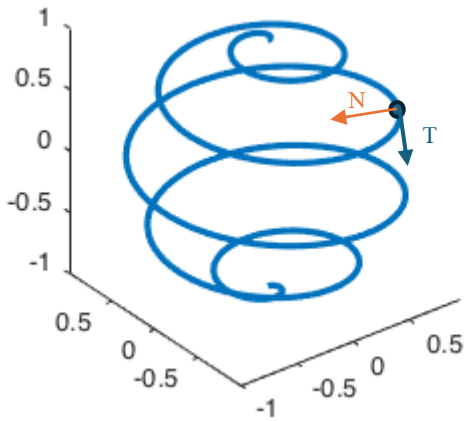
$\Rightarrow$: אם $\tau = 0$, אזי:

$$\dot{B} = -\tau N = 0$$
$$B = \underbrace{\omega}_{\text{קבוע}}$$
$$\Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \omega \rangle = \langle T, B \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(\langle \gamma, \omega \rangle) = \langle \dot{\gamma}, \omega \rangle + \underbrace{\langle \gamma, \dot{\omega} \rangle}_{0} = 0$$
$$\Rightarrow \langle \gamma, \omega \rangle = c$$

$$\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3 = c$$

לכן γ מוכלת במישור $\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z = c$.

<u>הגדרה</u>: בנקודה s, המישור המשיק הוא: $\gamma(s) + span\{T_s, N_s\}$.



<u>טענה</u>: אם $\tau(s) > 0$, אז γ עוברת דר דהמישור המשיק מלמטה למעלה. (ואם $\tau(s) < 0$ אז מלמעלה למטה). <u>למעלה</u>: אל B.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

1. להסתכל על פיתוח טיילור מסדר 3 של γ. $D(h) = \gamma(s_0 + h) - \gamma(s_0)' = h\dot{\gamma}(s_0) + \cdots$.
2. מבטאים את הנ"ל עם k, τ, T, N, B באמצעות פרנה-סרה
3. מחשבים קואורדינטות לפי (T, N, B).

$$x(h) = \langle D(h), T(s_0) \rangle = \cdots$$
$$y(h) = \langle D(h), N(s_0) \rangle = \cdots$$
$$z(h) = \langle D(h), B(s_0) \rangle = \frac{k\tau}{6}h^3 + \cdots$$

לכן z חיובי אם"ם τ חיובי.

<u>הוכחה</u>: "לא כיף" (אשכרה זה מה שהמרצה רשם בכיתה. תתכוננו.)

בהוכחה זו נסמן $f' = \frac{d}{dt}f, \dot{f} = \frac{d}{ds}f$.

תהי $\beta(s) = \beta\big(s(t)\big) = \gamma(t), \beta = \gamma \circ \beta^{-1}(s)$ הפרמטר הטבעי.

כעת המשוואות:

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d}{dt}\beta\big(s(t)\big) = \dot{\beta} \cdot s'$$
$$\gamma'' = \frac{d}{dt}\big(\dot{\beta}s'\big) = \dot{\beta}s'' + \ddot{\beta} \cdot (s')^2$$
$$\gamma''' = \dot{\beta}s''' + \ddot{\beta}s''s' + \dddot{\beta} \cdot (s')^3 + 2\ddot{\beta}s's''$$

ובנוסף יש לנו את המשוואות:

$$\beta = T$$
$$\ddot{\beta} = \dot{T} = kN$$
$$\dddot{\beta} = \ddot{T} = \frac{d}{ds}(kN) = \dot{k}N + k\dot{N} = \dot{k}N + k(-kT + \tau B)$$

נציב את המשוואות השניות בראשונות ונקבל:

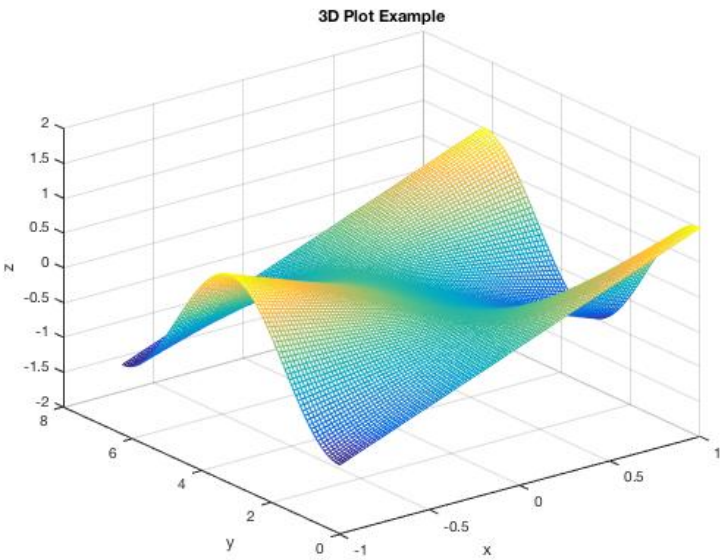
$$\gamma' \times \gamma'' = s\dot{B} \times \big(\dot{\beta}s'' + \ddot{\beta}\,(s')^2\big) = s''s' \cdot \underbrace{\dot{\beta} \times \dot{\beta}}_{0} + (s')^3\dot{\beta} \times \ddot{\beta} = (s')^3 \cdot T \times kN$$
$$= (s')^3 k \cdot T \times N = (s')^3 kB$$
$$\Rightarrow \|\gamma' \times \gamma''\| = \|\gamma'\|k \cdot \|B\| = \|\gamma'\|k$$

משטחים ב-$\mathbb{R}^3$

<u>אינטואיציה</u>: אובייקט דו-מימדי, עקום ב-$\mathbb{R}^3$.

<u>דוגמאות</u>:

1. מישור.
2. גרף של פונקציה



<u>הגדרה</u>: **מפה** היא הומיאומורפיזם $\sigma: U \to M$, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה.

תזכורת מטופולוגיה: המיאומורפיזם הוא חח"ע, על, σ רציף, וגם σ^{-1} רציף.

הרצאה 6 – משטחים ב-$\mathbb{R}^3$

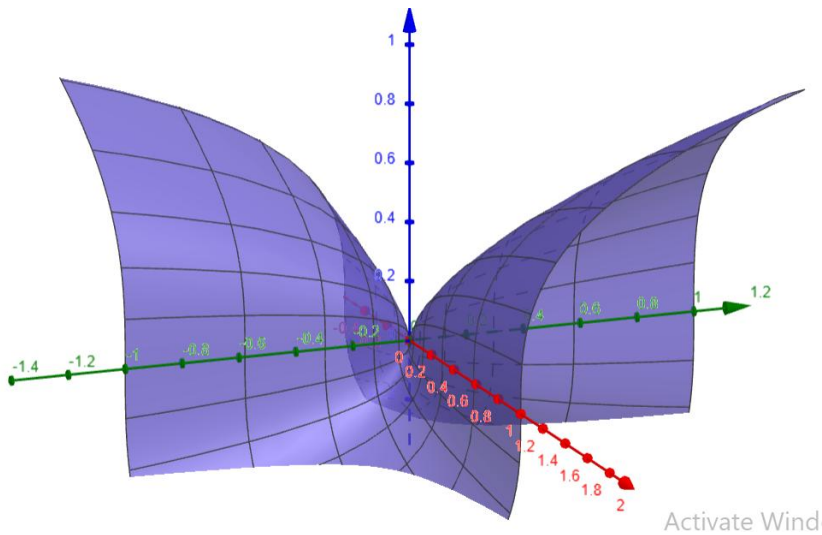
<u>תזכורת</u>: מפה היא הומיאומורפיזם $\sigma: U \to S$, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה.

<u>הגדרה</u>: **משטח** הוא קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^3$ כך שלכל $p \in S$ קיימת מפה $\sigma_p: U_p \to S_p$ המקיימת: $p \in S_p \subseteq S$.
כלומר לכל נקודה על המשטח יש מפה שמכסה אותה.

מפה רגולרית

<u>הגדרות</u>: $\sigma: U \to S$ מפה רגולרית, אם אחת מההגדרות השקולות מתקיימות:

1. σ חח"ע ועל, σ דיפרנציאבילית, σ^{-1} דיפרנציאבילית (σ דיפאומורפיזם).
2. σ הומיאומורפיזם, דיפרנציאבילית וכן σ_u, σ_v בת"ל.
3. σ מפה, עם יעקוביאן מדרגה 2. $J = \begin{bmatrix} | & | \\ \sigma_u & \sigma_v \\ | & | \end{bmatrix}$.



דוגמא מההרצאה – משטח שאינו רגולרי

בהמשך הקורס אנחנו נשתמש במפות רגולריות. איך? נניח שאני מעוניין לחשב משהו בתלת מימד (למשל, הדרך הכי קצרה בין שתי נקודות על משטח). נמיר אותו ל-$\mathbb{R}^2$ עם מפה רגולרית, ואז נחשב אותו שם.

נוטציה בקורס: הרבה פעמים כשנסמן נקודה p נתכוון לנקודה על $\mathbb{R}^3$, והנקודה q תסמן את התמונה ההפוכה שלה (ב- $\mathbb{R}^2$).

המישור המשיק

תהי $\sigma: U \to M$ מפה רגולרית. נגדיר את TpM להיות המישור המשיק ל-M בנקודה p.

$$TpM = \{\gamma'(0) \mid regular\ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p\}$$

באופן אינטואיטיבי, הוא מוגדר להיות כל המשיקים לעקומות שעוברות ב-p על המשטח M.

<u>הערות</u>:

1. אם בוחרים מפה אחרת לאותו משטח TpM לא משתנה, כפי שרצינו.
2. TpM מרחב וקטורי.

לשים לב: TpM עובר דרך הראשית. נוח לחשוב עליו כצמוד ל-p, אבל אם נרצה אותו שם נצטרך להזיז אותו.

טענה: $TpM = span\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

הוכחה: באמצעות הכלה חד-כיוונית ושוויון מימדים. סה"כ צריכים להוכיח רק $\sigma_u, \sigma_v \in TpM$.

מסקנה: נניח שנרצה לקבל משיק עבורו $\gamma'(0) = \sigma_1 A + \sigma_2 B$. נצטרך למצוא עקומה עבורה

$$\beta'(0) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \beta(0) = q$$

ועבור כל עקומה כזו נקבל את γ הרצויה. זו הע"ל $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \longmapsto \sigma_1 A + \sigma_2 B$.

כלל השרשרת

תזכורת: בהינתן $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, הנגזרת של ההרכבה שלהן היא:

$$\frac{d}{dt} g \circ f(t) = J_g \cdot \nabla_f$$

אצלנו אנחנו נסמן $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. כעת:

$$\gamma' = (\sigma \circ \beta)' = J_\sigma \cdot \nabla_\beta = \begin{bmatrix} | & | \\ \sigma_1 & \sigma_2 \\ | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\beta}^1 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \dot{\beta}^1 + \sigma_2 \dot{\beta}^2$$

דיפרנציאל

הגדרה: **הדיפרנציאל** של σ ב-p הוא הע"ל $d\sigma_p: TqU \to TpM$.

$$d\sigma_p \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A\sigma_1 + B\sigma_2$$

המטריקה

חישוב אורך עקומה

נרצה לחשב אורך של עקומה γ על משטח.

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \sigma_1(\beta(t)) \circ \dot{\beta}^1(t) + \sigma_2(\beta(t)) \dot{\beta}^2(t) \right\| dt$$

$$= \int_a^b \left(\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle (\dot{\beta}^1)^2 + z \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \dot{\beta}^1 \dot{\beta}^2 + \langle \sigma_2, \sigma_2 \rangle (\dot{\beta}^2) \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

נוכל לכתוב זאת גם בעזרת סימוני איינשטיין:

$$= \int_a^b \left(\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

או:

$$= \int_a^b \left([\dot{\beta}^1 \quad \dot{\beta}^2] \begin{bmatrix} \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle & \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \\ \langle \sigma_2, \sigma_1 \rangle & \langle \sigma_2, \sigma_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}^1 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

<u>סימון</u>: $g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ היא **המטריקה** (פעם: התבנית היסודית הראשונה).

<u>שימו לב</u>: $g = \begin{bmatrix} -\sigma_1^T- \\ -\sigma_2^T- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ \sigma_1 & \sigma_2 \\ | & | \end{bmatrix} = J_\sigma^T J_\sigma$.

למה g חשובה? הפרמטרים שלה הם כמו של σ: u, v. מחשבים אותה ב-U, ואם יודעים את g אפשר לחשב את $L(\gamma)$ במרחב הפרמטרים $\mathbb{R}^2$.

<u>מסקנה</u>: לכל $w \in TqU$ (קראנו לו $\dot{\beta}$) מתקיים: $w \overset{g}{\longmapsto} w^T g w = \|d\sigma_p w\|$.

<u>הערה</u>: g מגדירה מכפלה פנימית ב-TqU: $\langle w_1, w_2 \rangle = w_2^T g w_1 = \langle d\sigma_p w_1, d\sigma_p w_2 \rangle$.

זו נקראת נוסחת ה-pullback.

חישוב זוויות

כעת כשיש לנו מכפלה פנימית מוגדרת, ניתן גם לחשב זוויות בין שתי עקומות ב-M.

הזווית בין γ ל-δ היא הזווית בין $\dot{\gamma}(0)$ ל-$\dot{\delta}(0)$.

נסמן $\lambda = \sigma^{-1} \circ \delta, \beta = \sigma^{-1} \circ \gamma$. לכן $\dot{\lambda} = d\sigma^{-1}\dot{\delta}, \dot{\beta} = d\sigma^{-1}\dot{\gamma}$.

נקבל:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle d\sigma\dot{\beta}, d\sigma\dot{\lambda}\rangle}{\left(\langle d\sigma\dot{\beta}, d\sigma\dot{\beta}\rangle\langle d\sigma\dot{\lambda}, d\sigma\dot{\lambda}\rangle\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{\langle \dot{\beta}, \dot{\lambda}\rangle_q}{\|\dot{\beta}\|_q \|\dot{\lambda}\|_q}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{\dot{\lambda}^2 q \dot{\beta}}{\left(\dot{\beta}^T q \beta \dot{\lambda}^T q \dot{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

חישוב שטחים

איך מחשבים שטח? מחלקים אותו להרבה ריבועים קטנים, ומבצעים עליו סכום רימן.

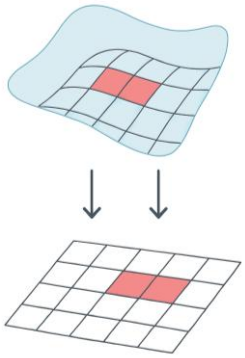
אם נשתמש בσ^{-1} כדי להמיר את המשטח ל-$\mathbb{R}^2$, נקבל שכל ריבוע אינפיטסימלי ב-$\mathbb{R}^2$ הוא מקבילית ב-$\mathbb{R}^3$ (כאשר נמיר אותו חזרה בעזרת $d\sigma$).

צלעות הריבוע: $q + \begin{bmatrix} \delta u \\ 0 \end{bmatrix}, q + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta v \end{bmatrix}$. נשתמש בקירוב לינארי ל-$\sigma$ שהוא $d\sigma$, על מנת לקבוע קירוב למיקום הנקודות על $\mathbb{R}^3$ ונקבל: $p + \sigma_1 \delta u, p + \sigma_2 \delta v$.

שטח המקבילית: $\|\sigma_1 \delta u \times \sigma_2 \delta v\| = \|\sigma_1 \times \sigma_2\| \delta u \delta v$.

נסכום הכל ונקבל סכום רימן. כלומר:

$$A = \int_{\sigma^{-1}(A)} \|\sigma_1 \times \sigma_2\| \, du dv = \int_{\sigma^{-1}(A)} (\det q)^{\frac{1}{2}} \, du dv$$



חישוב שטחים בעזרת טרנספורמציה

עקמומיות של משטחים

נשתמש בהגדרה דומה לעקמומיות של עקומות. נסתכל על המישור המשיר, ונסתכל על קצב השינוי שלו. במישור קבוע – קצב שינוי 0 – עקמומיות 0. על מנת לעשות זאת נסתכל על קצב השינוי של הנורמה.

$TpM = span\{\sigma_1, \sigma_2\}$. לכן הניצב ל-$TpM$ הוא $N(p) = \frac{\sigma_1 \times \sigma_2}{\|\sigma_1 \times \sigma_2\|}$.

נשים לב כי N חלק כאשר σ מפה רגולרית חלקה, כי אז σ_1, σ_2 חלקות ובת"ל, ולכן $\|\sigma_1 \times \sigma_2\| \neq 0$.

נצטרך לבחור את האוריאנטצייה של N. ניתן לבחור שתצביע כלפי חוץ או כלפי פנים. זה דומה לבחירת כיוון התנועה על עקומה וזה ישנה את סימן העקמומיות.

<u>הגדרה</u>: העתקה חלקה $N: M \to S^2$ המעבירה $p \longmapsto w$ כאשר $w \perp TpM$ נקראת העתקת גאוס (רודריגז).

התבנית היסודית השניה

איך נמדוד את קצב השינוי של N, אם אנחנו יכולים לנוע על המשטח בכיוונים שונים? כלומר נצטרך גם להגדיר כיוון שעליו אנחנו נזוז. נמדוד את העקמומיות של N בכיוון $w \in TpM$.

איך נמדוד? נעתיק ל-$\mathbb{R}^2$: $K = \langle -\dot{N}, T \rangle = \langle \dot{T}, N \rangle$.

ב-3D: ניקח עקומה $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = w$, ונחשב:

$$\mathbb{I}_p(w) = \langle -\frac{d}{dt} N\big(\gamma(t)\big)_{t=0}, w \rangle$$

<u>הגדרה</u>: $\mathbb{I}_p: TpM \to \mathbb{R}$ המוגדרת כנ"ל נקראת **התבנית היסודית השניה**. היא מודדת את העקמומיות של המשטח בכיוון w.

הרצאה 7

<u>תזכורת</u>: התבנית היסודית השנייה מודדת עקמומיות של משטח בכיוון מסויים:

$$\mathbb{I}_p(w) = \langle -\frac{d}{dt} N\big(\gamma(t)\big)_{t=0}, w\rangle$$

<u>הערות</u>:

1. העקמומיות אינה תלויה בפרמטריזציה σ, מכיוון ש-N אינו תלוי בפרמטריזציה ויחיד עד כדי סימן.
2. העקמומיות מוגדרת היטב. נוכיח שעבור כל γ המקיים: $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = w$, נקבל את אותה תוצאה. נמצא נוסחה לחישוב $\mathbb{I}_p(w)$ שאינה תלויה ב-γ.

הוכחה ש-$\mathbb{I}_p$ מוגדרת היטב: נסמן $\beta = \sigma^{-1} \circ \gamma$, לכן $\sigma \circ \beta = \gamma$.

$$\frac{d}{dt}\big(N \circ \gamma(t)\big) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{N \circ \sigma}_{\rho} \circ \beta(t)\right) = \frac{d}{dt}\big(\rho \circ \beta(t)\big) = \rho_1 \dot{\beta}^1 + \rho_2 \dot{\beta}^2 = dp \begin{bmatrix} \dot{\beta}^1 \\ \dot{\beta}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big(N \circ \gamma(t)\big)_{t=0} = dp d\sigma^{-1} \dot{\gamma}|_{t=0} = dp d\sigma^{-1} w$$

וקיבלנו נוסחה שלא תלויה ב-γ. כלומר $\mathbb{I}_p$ מוגדרת היטב.

חישוב $\mathbb{I}_p$ בפועל

איך נשתמש בנוסחה שקיבלנו כדי לחשב את $\mathbb{I}_p$?

1. נתון $w \in TpM$.
2. נכתוב צירוף לינארי $w = \sigma_i x^i$.
3. $d\sigma^{-1} w = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$.
4. "נחליף" את σ_i ב-p_i.

$$dp(d\sigma^{-1} w) = p_i x^i$$

5. מ"פ עם w:

$$\mathbb{I}_p(w) = \langle p_i x^i, w\rangle = \langle p_i x^i, \sigma_j x^j\rangle = \langle p_i, \sigma_j\rangle x^i x^j$$

<u>נוסחה (פחות טובה)</u>: נחשב את $b_{ij} = \langle p_i, \sigma_j\rangle$ פעם אחת, ואז נוכל לחשב את $\mathbb{I}_p(w)$ ב-U (מרחב הפרמטרים).

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

<u>הערות</u>:

1. לפעמים קוראים ל-B התבנית השניה ולא לפונקציה $\mathbb{I}_p$.
2. $\mathbb{I}_p(x, y) = y^t B x, \;\; \mathbb{I}_p(w) = \mathbb{I}_p(w, w)$.

<u>הערה למבחנים</u>: הנוסחה $b_{ij} = \langle p_i, \sigma_j\rangle$ לא נוחה לחישוב, מכיוון שזה דורש לחשב את ρ.

<u>פתרון</u>: נשים לב ש-$\rho \perp \sigma_1$. לכן $b_{ij} = \langle -\rho_i, \sigma_j \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma_{ji}} \rangle = \langle \rho, \sigma_{ij} \rangle = b_{ji}$.

כלומר B סימטרית.

<u>מסקנה</u>: נחשב בעזרת $\boldsymbol{b_{ij}} = \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma_{ji}} \rangle$, וניעזר בעובדה ש-$B$ סימטרית.

יהי $x \in TqV$, $\|x\| = 1$. נסמן $w = d\sigma x$.

מסקנות מעקמומיות

נסמן: $D_x(t) = \langle \sigma(q+tx) - \sigma(q), p(q) \rangle$. זהו המרחק בין $\sigma(q+tx)$ ל-TpM.

<u>טענה</u>: $D_x(t) = \frac{t^2}{2}\mathbb{I}_p(w) + \underbrace{E(t)}_{\in O(t^2)}$, כאשר $E(t)$ שגיאה מסדר $O(t^2)$. (הוכחה באמצעות פיתוח טיילור).

<u>מסקנה</u>: אם $\mathbb{I}_p(w) > 0$, אזי בסביבה קרובה מספיק ל-p, כל המשטח מעל TpM. אם $\mathbb{I}_p(w) < 0$, אז כנ"ל רק שכל המשטח מתחת ל-TpM.

אם קיים כיוון עבורו $\mathbb{I}_p(w) > 0$ וקיים כיוון עבורו $\mathbb{I}_p(w) < 0$, אז p נקודה היפרבולית (המשטח בסביבתה דומה לפרבולואיד היפרבולי (אוכף).

עקומות על משטחים

תהי $\gamma(s): [0, L] \to M$ עקומה על המשטח, רגולרית ובפרמטר טבעי. מה ניתן לומר על $K_\gamma(s)$ מכך שהיא במשטח?

תזכורת: $T = \dot{\gamma}, N_\gamma = \frac{\ddot{\gamma}}{\|\ddot{\gamma}\|}, B = T \times N_\gamma$.

<u>טענה</u>: $\langle \ddot{\gamma}(s), N_M(\gamma(s)) \rangle = \mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))$.

<u>הוכחה</u>: $\dot{\gamma} \in T_{\gamma(s)}M$ ולכן $\dot{\gamma} \perp N_M$. לכן:

$$\langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \langle \dot{\gamma}, -\dot{N} \rangle = \left\langle \dot{\gamma}, -\frac{d}{ds} N \circ \gamma \right\rangle = \mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))$$

<u>מסקנות</u>

1. $\langle \ddot{\gamma}, N \rangle$ תלוי רק ב-$\dot{\gamma}, \gamma$ לכן לכל עקומה בכיוון $\dot{\gamma}$ בנקודה γ יהיה אותו רכיב של התאוצה בכיוון N. רכיב זה שומר את העקימות של המשטח. אם הרכיב היה משתנה – העקומות היו בורחות מ-M.
2. $K_\gamma(s) = \|\ddot{\gamma}\| \geq |\langle \ddot{\gamma}, N \rangle| = \left|\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))\right|$.
   כלומר $\left|\mathbb{I}_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s))\right|$ חסם תחתון לעקמומיות של γ ב-M.

קיימת $\gamma: [0, L] \to M$ כך ש: $K(s_0) = \mathbb{I}_{\gamma(s_0)}(\dot{\gamma}(s_0))$ עבור s_0 כלשהו.

מהטענה מחפשים γ כך ש $\ddot{\gamma}(s_0)$ ו-$N(\gamma(s_0))$ על אותו קו ישר.

כלומר:

$$\ddot{\gamma} = cN \Rightarrow \|\ddot{\gamma}\| = |c| \Rightarrow |\langle \ddot{\gamma}, N \rangle| = |c|$$

חתך נורמלי.

נסמן $S = p + span\{w, N\}$, ונסתכל על החיתוך $S \cap M$.

<u>טענה</u>: יש פרמטריזציה רגולרית ל-$S \cap M$ בסביבה של p.

<u>טענה</u>: אם γ_1 העקומה הנוצרת מהפרמטריזציה הנ"ל, אזי $K_{\gamma_1}(p) = \left|\mathbb{I}_p(w)\right|$.