שאלה 1:

א. נבדוק מהם הפתרונות של המשוואה $\lambda_1 h(x)+\lambda_2 g(x)+\lambda_3 f(x)=0$. אנו מחפשים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ אשר יתאימו <u>**לכל x**</u>.

<u>בפרט</u>:

$x=\frac{\pi}{2}$ משמע $\lambda_1\overset{0}{h\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\lambda_2\overset{0}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\lambda_3 f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Longleftarrow \lambda_3=0$

$x=0$ משמע $\lambda_1\overset{0}{h(0)}+\lambda_2 g(0)=0 \Longleftarrow \lambda_2=0$

$x=2\pi$ משמע $\lambda_1 h(2\pi)=0 \Longleftarrow \lambda_1 2\pi=0 \Longleftarrow \lambda_1=0$

משמע עבור המשוואה נקבל כי בהכרח כל הסקלרים שלה שווים לאפס; משמע הקבוצה אשר מכילה את הפונקציות הנ"ל בלתי תלויה לינארית.

ב. נבדוק מהם הפתרונות של המשוואה $\lambda_1 h(x)+\lambda_2 g(x)+\lambda_3 f(x)=0$. אנו מחפשים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ אשר יתאימו <u>**לכל x**</u>.

<u>בפרט</u>:

$x=0$ משמע $\lambda_1 h(0)+\lambda_2\overset{0}{g(0)}+\lambda_3\overset{0}{f(0)}=0 \Longleftarrow 2\lambda_1=0 \Longleftarrow \lambda_1=0$

$x=1$ משמע $\lambda_2 g(0)+\lambda_3\overset{0}{f(0)}=0 \Longleftarrow -\lambda_2=0 \Longleftarrow \lambda_2=0$

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ משמע $\lambda_3 f(0)=0 \Longleftarrow \lambda_3=0$

משמע עבור המשוואה נקבל כי בהכרח כל הסקלרים שלה שווים לאפס; משמע הקבוצה אשר מכילה את הפונקציות הנ"ל בלתי תלויה לינארית.

ג. נשתמש בזהות $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ (לכל x) ונקבל כי $g(x)+f(x)=\frac{h(x)}{3}$ משמע $g(x)+f(x)-\frac{h(x)}{3}=0$ כלומר מצאנו צירוף לינארי מתאפס בו לא כל הסקלרים אפסים, לכל קבוצה אשר מכילה את הפונקציות הנ"ל תהיה תלויה לינארית.

שאלה 2:

א. U הינו תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ בעקבות משפט 7.5.1א.

W שווה ל-$\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5) \middle| 2a+3b-c=0\right\}$ משמע הקבוצה W היא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ כיוון שהיא מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית.■

ב. <u>בסיס ומימד ל-U</u>

$U \subseteq M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$. נבחר את הבסיס הסטנדרטי $E = (E^{1,1}, E^{1,2}, E^{2,1}, E^{2,2})$. נקבל כי:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}_E = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}_E = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 4\end{bmatrix}_E = \begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\end{pmatrix}$$

כעת נסדר את הווקטורים בתור ווקטורי שורות:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\2 & 1 & 3 & 1\\1 & 4 & 1 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+4R_1]{R_2\to R_2+3R_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ומכאן נקבל כי הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\right\}$ הינה בסיס ל-U ובוודאי נקבל כי $\dim U = 2$.

<u>בסיס ומימד ל-W</u>

בעקבות הגדרת תת המרחב W נקבל כי דרך אחרת לייצג אותו היא

$$W = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\2a+3b & d\end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)\right\}$$

$$= \{a\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)\}$$

$$= Sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

בצורה טריוויאלית ניתן לראות כי אף אחת מהמטריצות פרופורציונאלית לאחרת ובכך נקבל כי הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ הינה בסיס ל-W ובוודאי נקבל כי $\dim W = 3$.

ג. ויהי $v \in U \cap W$ משמע קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{Z}_5$ והווקטורים אשר פורשים $U \ni \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$ ו-$W \ni \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; כך ש-
$v = \mu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$. משמע

$$\mu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix} - \lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} = 0 \overset{-1=4}{\Rightarrow}$$

$$\mu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}4 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0 & 4\\3 & 4\end{pmatrix} = 0$$

לכן $v \in U \cap W$ כאשר $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ הוא פתרון למערכת:

$$\mu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix} + \mu_3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}4 & 0\\2 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0 & 4\\3 & 4\end{pmatrix} = 0$$

$\mu_1 + 4\lambda_1 = 0$

$\mu_2 + 4\lambda_2 = 0$

$2\mu_1 + 3\mu_2 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$

$\mu_3 + 4\lambda_2 = 0$

מתקבל ש-$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ משתנה חופשי לכן הפתרון הכללי הוא

(a, a, a, a, a), $a \in \mathbf{Z}_5$. נציב a=-1 ונקבל כי $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

משמע הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל-$U \cap W$ (בוודאי כי היא בלתי לינארית...) ולכן

$\dim U \cap W = 1$.

ד. נתון כי $W, U \subseteq M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ לכן בוודאי כי $U + W \subseteq M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$.

כעת נשתמש במשפט 8.3.6 ובמה שהוכחנו בסעיפים קודמים ונקבל כי

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$$

משמע נקבל כי $\dim(U + W) = \dim M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ ולכן בעקבות משפט 8.3.4 נקבל כי

$U + W = M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$.

ה. אם תת מרחב T של $M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ שמקיים $M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5) = U \oplus T$ אז $U \cap T = \{0\}$ ונקבל

כי $\dim T = \dim U \oplus T - \dim U = 4 - 2 = 2$ (על פי משפט 8.3.6). לכן

$T = Sp\{t_1, t_2\}$. הדרישה היא ש-$U + T = M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$ לכן נקבל בעקבות שאלה

7.6.6ב כי $U + T = Sp\{\text{איחוד הקבוצות הפורשות}\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2\right\}$.

על מנת ש-$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2$ יהוו בסיס של $M_{2\times2}(\mathbf{Z}_5)$, בפרט הקבוצה צריכה

להיות בלתי תלוי לינארית כלומר t_1, t_2 הם מטריצות שביחד עם $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

בלתי תלויים לינארית. על מנת למצוא את t_1, t_2 נשתמש במשפט 8.4.4, נבחר בבסיס

הסטנדרטי $E = (E^{1,1}, E^{1,2}, E^{2,1}, E^{2,2})$ כך ש-

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, [t_1]_E, [t_2]_E$$

כלומר $[t_1]_E, [t_2]_E$ צריכים להיות וקטורים כך שאם נרשום מטריצה אשר שורותיה הם הווקטורים הנ"ל נקבל מטריצת שקולת שורה ל-I.(משפט 3.10.6 סעיפים ב ו-ח). משמע נקבל כי

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ולכן

$.T = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

שאלה 3:

ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_k, w$ וקטורים במרחב לינארי V. כך שהקבוצה $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ בלתי תלויה לינארית וגם ש-$w \notin Sp\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

נניח בשלילה כי $v_1 \in Sp\{v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_k + w\}$.

משמע נקבל כי קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ כך ש-

$$(v_1 + w)\lambda_1 + (v_2 + w)\lambda_2 + \cdots + (v_k + w)\lambda_k = v_1$$

בעקבות כך נפתח סוגריים, נבצע גורם משותף, נעביר אגפים ונקבל כי

$$v_1(\lambda_1 - 1) + v_2\lambda_2 + \dots + v_k\lambda_k = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)w$$

אם $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) = 0$ נקבל כי $v_1(\lambda_1 - 1) + v_2\lambda_2 + \dots + v_k\lambda_k = 0$ וכיוון שידוע לנו כי הקבוצה $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ בלתי תלויה לינארית נקבל כי $\lambda_1 - 1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ משמע $\lambda_1 = 1 \Leftarrow \lambda_1 - 1 = 0$. אך אם $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ וגם $\lambda_1 = 1$ בוודאי כי $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) = -1$ בסתירה!

לכן בהכרח $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) \neq 0$. נחלק את המשוואה ב-$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$ ובעקבות כך נקבל כי $v_1 \frac{(\lambda_1 - 1)}{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)} + v_2 \frac{\lambda_2}{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)} + \dots + v_k \frac{\lambda_k}{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)} = w$

אך זוהי סתירה להנחה כי $w \notin Sp\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ משמע נקבל כי

$v_1 \notin Sp\{v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_k + w\}$ ■

שאלה 4:

א. נתון שהווקטור $(1,0,1)$ פתרון של (*). כאשר נציב את הפתרון במערכת המשוואות נקבל:

$$a_{13} = -2a_{12}$$

$$a_{23} = -2a_{22}$$

$$a_{33} = -2a_{32}$$

ולכן מכאן ניתן להסיק כי כל ווקטור אשר הצבתו תקיים את הדבר הנ"ל הוא פתרון של (*). אפשר בקלות לראות כי $(1,2,2)$ הוא ווקטור אשר אם נציב במערכת המשוואות נקבל את התנאים אשר צריכים להתקיים. ובכך נקבל כי $(1,2,2)$ הוא פתרון נוסף של המערכת (*).

ממשפט 8.6.1 נקבל כי כאשר P הוא מרחב הפתרונות של $Ax = 0$ אשר מערכת משוואות ב-3 נעלמים(x,y,z) אז מתקיים

$$\dim P = 3 - \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \dim P + \mathcal{P}(A) = 3 \overset{\text{נתון } \mathcal{P}(A)\neq 1}{\Longrightarrow} \mathcal{P}(A) = 2$$

ולכן מכאן נקבל כי הדרגה של A היא 2.

ב. מהסעיף הקודם ניתן להסיק בקלות כי ממדו של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ הוא $\dim P = 1$. על מנת למצוא בסיס של המרחב הנ"ל מספיק לנו למצוא ווקטור אחד $x \in P$ (כיוון שהממד הוא 1). נעזר בשאלה 3.7.1 א' ונקבל כי $(0,2,1) = (1,0,1) - (1,2,2)$ הוא פתרון ל-$Ax = 0$ ומכאן כי הווקטור $(0,2,1)$ הוא גם בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הנ"ל.

ג. על מנת למצוא את הפתרון הכללי של המערכת (*) ראשית נעזר בסעיף ב' בו אמרנו כי $(0,2,1)$ הוא בסיס של P(A) ומכאן נקבל כי הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ הוא $(0,2t,t), t \in \boldsymbol{R}$. כעת נעזר בשאלה 3.7.1 ונקבל כי אוסף הפתרונות של המערכת (*) הוא:

$$\{(1,0,1) + v | v \in P(A)\} = \{(1,0,1) + (0,2t,t) | t \in \boldsymbol{R}\} = \{(1,2t,1+t) | t \in \boldsymbol{R}\}$$

ומכאן נוכל להסיק כי הפתרון הכללי של המערכת (*) הוא $(1,2t,1+t)$ כאשר t מספר ממשי.

שאלה 5:

א. ויהי

$$B = \big(1, \mathrm{p(x)}, \mathrm{p(-x)}, \mathrm{p(2x)}\big) =$$
$$(1, 1 + x + x^2, 1 - x + x^2 - x^3, 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3)$$

נבחר את הבסיס $E = (1, x, x^2, x^3)$ ונקבל כי:

$$[1]_E = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, [1 + x + x^2 + x^3]_E = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$[1 - x + x^2 - x^3]_E = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, [\, 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3]_E = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$$

כעת נסדר את הווקטורים בתור ווקטורי שורות ונדרג:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&2&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+-R_1\\ R_4\to R_4+-R_1}]{R_2\to R_2+-R_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&-1&1&-1\\0&2&4&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3\to\frac{1}{2}R_3\\ R_4\to R_4-2R_2}]{R_3\to R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_4\to R_4-2R_3\\ R_3\to\frac{1}{6}R\\ R_2\to R_2-R_4}]{R_2\to R_2-R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

בוודאי כי שורות המטריצה בלתי תלויות לינארית משמע הקבוצה $[\mathrm{B}]_{\mathrm{E}}$ בלתי תלויה לינארית ובכך בעקבות משפט 8.4.4 נקבל כי גם B בלתי תלויה לינארית ולכן בעקבות תבונה זאת ומשפט 8.3.2ד נקבל כי הקבוצה B היא בסיס סדור של $\mathbf{R}_4[\mathrm{x}]$.

ב. נתון לנו כי $[\mathrm{q(x)}]_{\mathrm{B}}=(1,-1,1-2)$ ולכן באופן ישיר נקבל בעקבות ההגדרה נקבל כי $\mathrm{q(x)}=1-\mathrm{p(x)}+\mathrm{p(-x)}-2\mathrm{p(2x)}=-1-6\mathrm{x}-8\mathrm{x}^2-18\mathrm{x}^3$.

ג. על מנת למצוא $[\mathrm{r(x)}]_{\mathrm{B}}$ כך ש-$\mathrm{r(x)}=2-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3$. ראשית נסמן $[\mathrm{r(x)}]_{\mathrm{B}}=(\mathrm{x,y,z,w})$ כך שנקבל כי $[\mathrm{r(x)}]_{\mathrm{B}}=\mathrm{x}+\mathrm{yp(x)}+\mathrm{zp(-x)}+\mathrm{wp(2x)}$ בעקבות משפט 8.4.3 והבסיס מסעיף א נקבל כי

$$[\mathrm{r(x)}]_{\mathrm{B}}=\mathrm{x}[1]_{\mathrm{E}}+\mathrm{y}[\mathrm{p(x)}]_{\mathrm{E}}+\mathrm{z}[\mathrm{p(-x)}]_{\mathrm{E}}+\mathrm{w}[\mathrm{p(2x)}]_{\mathrm{E}}$$

$$\Downarrow$$

$$[\mathrm{r(x)}]_{\mathrm{B}}=\mathrm{x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{y}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{z}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{w}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\ \mathrm{r(x)}=2-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3\Longrightarrow[2-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3]_{\mathrm{E}}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\mathrm{x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{y}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{z}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{w}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$$

כעת נסדר את כל הווקטורים במטריצה ונפתור:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 - R_2 \\ R_4 \to \frac{1}{6}R_4 \\ R_3 \to \frac{1}{2}R_3}]{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_4}]{R_3 \to R_3 - R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_2}]{R_1 \to R_1 - R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

והרי קיבלנו כי $x = \frac{7}{2}, y = -1, z = -\frac{2}{3}, w = \frac{1}{6}$ משמע $[r(x)]_B = (\frac{7}{2}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.