האוניברסיטה הפתוחה

מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים– 20407

סמסטר 2021 א׳

מטלת מנחה 11

עידו סיני

09.11.2020

שאלה 1:

i. נבטא את זמני הריצה של כל אחד מהמיונים עבור קלטים בגודל n במקרם הגרוע באמצעות Θ.

<u>מיון הכנסה</u>
ידוע לנו כי מיון הכנסה במכונה מתבצע ב-$3n^2$ צעדים במקרה הגרוע.

נראה כי מתקיים $\Theta(n^2) = 3n^2$,

עבור $c_1 = 1, c_2 = 3$ לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים,

$$n^2 \leq n^2 \Longrightarrow 1 \cdot n^2 \leq 3n^2, 3n^2 \leq 3n^2 \Longrightarrow 1 \cdot n^2 \leq 3n^2 \leq 3n^2 \Longrightarrow$$

$$c_1 n^2 \leq 3n^2 \leq c_2 n^2$$

משמע $\Theta(n^2) = 3n^2$.

<u>מיון מיזוג</u>
ידוע לנו כי מיון המיזוג במכונה מתבצע ב-$12nlogn$ צעדים במקרה הגרוע.

נראה כי מתקיים $\Theta(nlogn) = 12nlogn$,

עבור $c_1 = 1, c_2 = 12$ לכל $n \geq 2$ מתקיים $\log n \geq 1$ ובנוסף פונקציית לוג הינה מונוטונית עולה לכן,

$$nlogn \leq nlogn \Longrightarrow 1 \cdot nlogn \leq 12nlogn \Longrightarrow$$

$$1 \cdot nlogn \leq 12nlogn \leq 12nlogn \Longrightarrow$$

$$c_1 n^2 \leq 12nlogn \leq c_2 nlogn$$

משמע $\Theta(nlogn) = 12nlogn$.

ii. המיון עדיף כאשר הוא בעל הצעדים "הקטן" ביותר, מכיוון שכמות הצעדים תלויה בערך ה-n נבדוק ערכים שונים ונסיק מסקנות.

<u>עבור $n = 0$</u>

$$12 \cdot 0 \cdot \log 0 = 0 = 3 \cdot 0^2$$

ולכן עבור $n = 0$ שני המיונים זהים מבחינת זמני ריצה משמע אין עדיפות באיזה אחד נשתמש.

<u>עבור $n \neq 0$</u>

נבדוק מתי מתקיים

$$12nlogn < 3n^2 \overset{\text{נחלק } 3n^2}{\Longrightarrow} \frac{\log n}{n} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\frac{\ln n}{\ln(2)}}{n} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\ln n}{\ln(2)\, n} < \frac{1}{4}$$

נסמן $f(x) = \frac{\log x}{x} = \frac{\ln x}{\ln(2) x} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{\ln x}{x}$, נחשב את הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{\frac{x}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{\ln(2) x^2}$$

נחפש נקודות קיצון,

$$\frac{1 - \ln x}{\ln(2) x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

מתקיים $\ln e = 1$ והפונקציה $\ln x$ מונוטונית עולה לכן, לכל $0 < x < e$ מתקיים,

$$1 - \ln(x) > 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{\ln(2) x^2} > 0$$

ולכל $x > e$ מתקיים,

$$1 - \ln(x) < 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{\ln(2) x^2} < 0$$

לכן הפונקציה יורדת בכל (e, ∞) ועולה בכל $(0, e)$ משמע $x = e$ נקודת מקסימום.

כעת נבדוק מתי $f(x) = \frac{1}{4}$,

$$\frac{\log x}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \log x = \frac{x}{4} \Rightarrow 2^{\log x} = 2^{\frac{x}{4}} \Rightarrow x = 2^{x/4}$$

מניחוש מושכל מצאנו כי עבור $x = 16$ יש פתרון, ולכן

ממונוטוניות הפונקציה ב (e, ∞) מתקיים לכל $x > 16$ אזי $f(x) > \frac{1}{4}$.

ולכל $x < 16$ אזי $f(x) < \frac{1}{4}$.

בנוסף $f(1) = 0, f(2) = 0.5$ ולכן ממונוטוניות הפונקציה ב $(0, e)$

לכל $x \leq 1$ אזי $f(x) \leq 0 < \frac{1}{4}$.

ובכך הראנו כי לכל $n = 1, n > 16$ מתקיים $12nlogn < 3n^2$ משמע מיון מיזוג עדיף.

ועבור $1 < n < 16$ מתקיים $12nlogn > 3n^2$ משמע מיון הכנסה עדיף.

ועבור $n = 16$ שני המיונים זהים מבחינת זמני ריצה משמע אין עדיפות באיזה אחד נשתמש.

iii. המקרה הטוב הוא זה שבו המערך בגודל n כבר ממוין. במקרה זה סדר גודל זמן הריצה הוא פונקציה לינארית של n(לפי הספר עמוד 21). משמע $\Theta(n)$.

iv. המקרה הטוב הוא זה שבו המערך בגודל n כבר ממוין. כפי שניתן לראות בעמוד 25 מספר האיטרציות של הלולאות ומספר פעולות ההשוואה וההשמה באלגוריתם $merge$ אינו תלוי בערכי הערכים שבמערך אלא רק באורכו. בנוסף גם מספר הקריאות של הפונקציות באלגוריתם $merge-sort$ בעמוד 27 אינו תלוי בערכי המערך אלא באורכו. ולכן כיוון שסדר גודל זמן הריצה אינו תלוי בערכי הערכים המקרה הטוב זהה למקרה הרע שבו המערך ממוין בכיוון ההפוך ולפי הספר ידוע לנו כי גודל זמן ריצה זה הוא $\Theta(nlogn)$.

v. נוסיף לולאה בתחילת האלגוריתם, אשר תבדוק האם המערך ממוין.
הלולאה תרוץ עבור $i=2$ עד n. נבדוק האם מתקיים לכל i $A_{i-1} \leq A_i$. במידה וכן המערך ממוין ולא נמשיך את שאר האלגוריתם. כלומר כל מה שירוץ הוא לולאה בעלת $n-1$ צעדים. לכן במקרה הטוב כאשר המערך ממוין נוסחת סדר גודל זמן הריצה של האלגוריתם תהיה $T(n)=n-1$ ועל פי עמוד 45 בספר מתקיים $T(n)=\Theta(n)$ כרצוי.

שאלה 2:

א. האלגוריתם מקבל מספר n ומייצר מערך בגודל n כך שלכל $1 \le i \le n$ בתא ה$-i$ נמצא הערך 1 אם i מספר ראשוני אחרת נמצא בתא i נמצא הערך 0.

ב. על מנת להוכיח את נכונות האלגוריתם ראשית נוכיח את שמורת הלולאה הפנימית(שורות 5-6) ולאחר מכן את החיצונית(שורות3-6)

נכונות הלולאה הפנימית

טענה: עבור $2 \le index \le n$ בתחילת כל איטרציה של לולאת ה-**for**, בתת מערך $A[2, \dots, mult \cdot index - 1]$ כל התאים בתת המערך אשר מספרם(מקומם בתת המערך) הוא אחד מן הכפולות (חוץ מindex שזה לא בהכרח נכון) של $index$ בין 2 ל-$mult \cdot index - 1$ (שוב, חוץ מindex אשר הוא לא בהכרח) ערכם הוא 0.

אתחול: בתת המערך $A[2, \dots, mult \cdot index - 1]$ כאשר $mult = 2$ הכפולה היחידה של $index$ אשר קטנה מ $mult \cdot index - 1$ היא $index$ ולכן טענתנו מתקיימת באופן ריק כי כל ערכי התאים בתת המערך שמספר התא שלהם הוא כפולה של $index$ חוץ מ$index$ עצמו אשר קטנים מ$2 \cdot index - 1$ הוא 0.

תחזוקה: עבור $mult$ כלשהו אם הטענה נכונה לפני האיטרציה, נראה כי טענה זאת נכונה גם לאחר הכניסה לאיטרציה. בעקבות ההנחה כי הטענה נכונה לפני האיטרציה ידוע לנו כי עבור $A[1, \dots, index \cdot (mult - 1) - 1]$ כל התאים אשר מקומם בבת מערך הוא כפולה של $index$ (חוץ מעצמו) ערכם הוא 0. בוודאי כי הכפולה הבאה של index אחרי $index \cdot (mult - 1)$ היא index · mult ובאיטרציה הנוכחית אנו מבצעים $A[index \cdot mult] = 0$ והרי כל התאים אשר מספרם הוא כפולה של $index$ בין 2 ל-$index \cdot mult - 1$ ערכם הוא 0 ובכך הטענה נשמרה בכניסה לאיטרציה הבאה.

סיום: לולאת **ה**$\boldsymbol{for}$ מסתיימת כאשר $mult$ גדול מ $\left\lfloor\frac{n}{index}\right\rfloor$, כלומר $mult = \left\lfloor\frac{n}{index}\right\rfloor + 1$, נציב $\left\lfloor\frac{n}{index}\right\rfloor + 1$ במקום $mult$ בניסוח שמורת הלולאה ונקבל שהמערך $A[2, \dots, \left\lfloor\frac{n}{index}\right\rfloor]$ ונקבל כי ערך כל תא בתת מערך אשר מספרו הוא כפולה של $index$ אשר קטנה מ$\left\lfloor\frac{n}{index}\right\rfloor$ וגדולה מ$index$ הוא 0. פירוש הדבר שהאלגוריתם נכון.

נכונות הלולאה החיצונית

טענה : לולאת הfor החיצונית עבור $2 \le index \le n$ תת המערך $A[1, \ldots Index]$ ערך כל תא שמיקומו(מספר התא) הוא מספר ראשוני הוא 1 אחרת ערך התא הינו 0.

אתחול : עבור $index = 2$ בתת המערך $A[1,2]$ ידוע לנו לפי לפי שורה 1 כי $A[1] = 0, A[2] = 1$ ולכן הטענה מתקיימת.

תחזוקה : נניח ששמורת הלולאה החיצונית מתקיימת בתחילת האיטרציה ה$index$, כלומר בתת המערך $A[1, \ldots, index - 1]$ כל ערך תא אשר מספר התא שלו הוא מספר ראשוני ערכו הוא 1 אחרת ערכו הוא 0.
כעת יש 2 אפשרויות

1. $Index$ אינו מספר ראשוני, ידוע כי כל מספר שאינו ראשוני מורכב מגורמים ראשוניים. ויהיה m גורם ראשוני של $index$ משמע באיטרציה כאשר היה $index = m$ נכנסו כמובן לתוך התנאי בשורה 4(כי m ראשוני) ולפי הוכחת הנכונות של הלולאה הפנימית ידוע לנו כי כל התאים אשר מספר התא שלהם הוא כפולה של m אשר קטנים מ-n ערכם 0 ולכן ערכו של $A[index]$ הוא גם 0. וכעת המשכנו לקיים את טענת שמורת הלולאה כי בתת המערך $A[1, \ldots, index]$ כל ערך תא אשר מספר התא שלו הוא מספר ראשוני ערכו הוא 1 אחרת ערכו הוא 0. כלומר שמורת הלולאה מתקיימת גם לפני האיטרציה ה $index + 1$.

2. $Index$ הינו מספר ראשוני, משמע אינו מורכב משום גורם ראשוני ולכן לפי נכונות הלולאה הפנימית ערכו לא השתנה ל0(כי אינו כפולה של שום מספר...) משמע הוא לתנאי שבשורה 4 ונכנס ללולאה הפנימית אשר מסמנת את כל הכפולות של $index$ (חוץ מאת עצמו) אשר קטנים או שווים לn. בוודאי כי ערכו של $A[index]$ נשאר 1 וכעת המשכנו לקיים את טענת שמורת הלולאה כי בתת המערך $A[1, \ldots, index]$ כל ערך תא אשר מספר התא שלו הוא מספר ראשוני ערכו הוא 1 אחרת ערכו הוא 0. כלומר שמורת הלולאה מתקיימת גם לפני האיטרציה ה $index + 1$.

סיום : לולאת הfor החיצונית יוצאת כאשר $index$ גדול מn נציב את n במקום $index$ בניסוח שמורת הלולאה ונקבל שעבור המערך $A[1, \ldots, n]$ ערך כל תא שמיקומו(מספר התא) הוא מספר ראשוני ערכו הוא 1 אחרת ערך התא הינו 0. פירוש הדבר שהאלגוריתם הוא נכון.

ג. נוכיח כי זמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע הוא $O(n^2)$, ראשית ננסה להגדיר מה הוא המקרה הגרוע. כמו שציינו מטרת האלגוריתם היא לייצר מערך בגודל n כאשר לכל $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$ הערך בתא $A[i]$ הוא 1 אם i ראשוני אחרת הערך בתא i הוא 0. ולכן כיוון שהקלט נטו תלוי בערך n המקרה הטוב הממוצע והגרוע זהים לאותו ה n. (עבור כל n עלול להיות גודל שונה כמובן).

כעת נסתכל בביטוי $\left\lfloor \frac{n}{index} \right\rfloor$ לפי שורה 3 ידוע לנו כי $2 \le index \le n$ ולכן

$$\left\lfloor \frac{n}{index} \right\rfloor \le \frac{n}{index} \le \frac{n}{2} < n$$

כעת, נסמן

		עלות	מספר הפעמים
1	$let\ A[1,2,\dots,n]$ be an array ….	c_1	1
2	$index, mult \leftarrow 2$	c_2	1
3	$for\ index = 2\ to\ n$	c_3	n-1
4	$if\ A[index] = 1\ then$	c_4	n-2
5	$for\ mult = 2\ to\ \left\lfloor \frac{n}{index} \right\rfloor$	c_5	t
6	$A[index \cdot mult] = 0$	c_6	t-1

נסמן ב-$T(n)$ את זמן הריצה של האלגוריתם כאשר c_i הוא מספר צעדים קבועים, ונסכום

$$T(n) = c_1 + c_2 + c_3(n-1) + c_4(n-2) + c_5 t + c_6(t-1) =$$
$$c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4 - c_6 + (c_3 + c_4)n + (c_5 + c_6)t =$$

כעת ננסה להסביר ממה הערך t קטן. ראשית ראינו כי $\left\lfloor \frac{n}{index} \right\rfloor < n$ ו$mult = 2$ לכן בכל מקרה בו הלולאה הפנימית רצה, היא רצה פחות מ n איטרציות. בנוסף נניח כי התנאי בשורה 4 היה אמת תמיד, משמע הלולאה הפנימית הייתה רצה אותן כמות פעמים או יותר. כיוון שהלולאה החיצונית רצה פחות מ n פעמים הלולאה הפנימית תפעל לכל היותר גם היא פחות מ n פעמים, משמע $t < \sum_{j=1}^{n} n = \frac{n(2n)}{2} = n^2$ ולכן,

$$T(n) < c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4 - c_6 + (c_3 + c_4)n + (c_5 + c_6)\boldsymbol{n^2} = \Theta(n^2)$$

משמע קיים קבוע c ולכל $n \ge n_0$ כך ש

$$T(n) < c \cdot n^2 \Longrightarrow T(n) = O(n^2)$$

■

ד. כפי שציינו בסעיף ג׳, אם התנאי של שורה 4 היה אמת תמיד יעילות זמן הריצה של התוכנית היה שווה או גדול יותר, בנוסף נזכיר כי $2 \le index \le n$ וכעת נסכום את הסכום הבא ונסיק מסקנות,

$$t \le \left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)\ldots+(\left(\frac{n}{n}-1\right)=n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-n+1$$

$$\le n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-n+1 \overset{\text{טור הרמוני}}{=} n(\ln n+O(1))+n+1=n\cdot\ln n+2n+1$$

ומכאן נקבל כי,

$$T(n) \le c_1+c_2-c_3-2c_4-c_6+(c_3+c_4)n+(c_5+c_6)n\cdot\ln n+2n+1 \overset{*}{=} \Theta(n\cdot\log n)$$

* לקחנו את הגורם המשמעותי $n\cdot\ln n$ וכמובן כי אין הבדל בין מספר הבסיס של הלוג.

משמע קיים קבוע c ולכל $n \ge n_0$ כך ש

$$T(n) \le c\cdot n\cdot\log n \Longrightarrow T(n)=O(n\cdot\log n)$$

■

ה. לא, אין סתירה בין הסעיפים שלעיל.

<u>נוכיח</u>

ויהי $f(n)$ פונקציית זמן ריצה במקרה הגרוע כלשהי המקיימת $f(n)=O(n\cdot\lg n)$.

על פי עמוד 47 בספר הלימוד,

$$\lg n=O(n) \overset{n \text{ נכפיל}}{\Longrightarrow} n\cdot\lg n=O(n^2)$$

בנוסף, בעקבות טרנזיטיביות O,

$$f(n)=O(n\cdot\lg n), n\cdot\lg n=O(n^2) \Longrightarrow f(n)=O(n^2)$$

והרי, הוכחנו את כי המוצג בסעיפים שלעיל מסוגל להתקיים.

ו. נבטא את זמן הריצה של האלגוריתם באמצעות חסם תטא,

ראשית, עלינו לגלות מה הוא ערכו של t (על פי הסימון בסעיף ג׳), אנו נכנסים לתנאי אשר מפעיל את הלולאה אם ורק אם $A[index]=1$ משמע רק אם $index$ הינו מספר ראשוני(כפי שראינו בסעיף ב׳), ולכן נקבל כאשר $p \le n$ מספר ראשוני כי

$$t=\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1\right)+\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor-1\right)+\cdots+\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor-1\right) \overset{\text{הגדרת ערך השלם}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\frac{n}{2}-2\right)+\left(\frac{n}{3}-2\right)+\cdots+\left(\frac{n}{p}-2\right) \le t \le \left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)+\cdots+\left(\frac{n}{p}-1\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-2p+2 \le t \le n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}\right)-p+1 \Longrightarrow$$

$$n\left(\sum_{p\ prime}^{n}\frac{1}{p}\right)-2p+2 \le t \le n\left(\sum_{p\ prime}^{n}\frac{1}{p}\right)-p+1 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$n(\ln\ln x+B_1+o(1))-2p+2 \le t \le n(\ln\ln n+B_1+o(1))-p+1$$

נציין כי

$$n(\ln\ln n+B_1+o(1))-2p+2=n\cdot\ln\ln n+nB_1+n\cdot o(1)-2p+2=\Theta(n\cdot\log\log n)$$

$$n(\ln\ln n+B_1+o(1))-p+1=n\cdot\ln\ln n+nB_1+n\cdot o(1)-p+1=\Theta(n\cdot\log\log n)$$

לכן בעקבות אי השוויון נקבל $t=\Theta(n\cdot\log\log n)$ משמע כי

$$T(n)= c_1+c_2-c_3-2c_4-c_6+(c_3+c_4)n+(c_5+c_6)\Theta(n\cdot\log\log n)=\Theta(n\cdot\log\log n)$$ ■

<u>רפרנס</u>

1. https://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeriesofPrimes.html

שאלה 3:

השאלה מחולקת ל 2 חלקים, ראשית נסדר את הפונקציות הבאות על-פי שיעור הגידול שלהן.

נמצא סידור f_{16} , ... ,f_1 של הפונקציות המקיים

$$f_1 = O(f_2), \ldots , f_{15} = O(f_{16})$$

נציג טענה ואז נוכיח אותה,

1. $n^{1/\lg n} = O((\lg n)^2)$

לפי עמוד 33 במדריך הלמידה מתקיים $n^{1/\lg n} = 2$.

מתקיים,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/\lg n}}{(\lg n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\lg n)^2} = "\frac{2}{\infty}" = 0$$

ולכן, $n^{1/\lg n} = o((\lg n)^2) \Longrightarrow n^{1/\lg n} = O(\lg n)^2)$.

2. $(\lg n)^2 = O\left(\sqrt{n}\right)$

על פי ראשית עמוד 34 במדריך הלמידה נקבל כי מתקיים,

$$(\lg n)^2 = o\left(\sqrt{n}\right) \Longrightarrow (\lg n)^2 = O\left(\sqrt{n}\right)$$

3. $\sqrt{n} = O(8n + 12)$

נשתמש בחוקי חזקות ואי שוויון ונקבל כי עבור $n > 1$,

$$0.5 \le 1 \Leftrightarrow n^{0.5} \le n \Leftrightarrow \sqrt{n} \le n \Leftrightarrow \sqrt{n} \le 8n + 12 \Leftrightarrow \sqrt{n} \le c \cdot (8n + 12)$$

עבור $c = 1$ אי שוויון זה מתקיים ונקבל,

$$\sqrt{n} = O(8n + 12)$$

4. $8n + 12 = O(n \cdot \ln n)$

לפי עמוד 45 בספר הלימוד ומשפט 3.1 נקבל,

$$8n + 12 = \Theta(n) \Longrightarrow 8n + 12 = O(n)$$

נחשב את הגבול,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n \cdot \ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = "\frac{1}{\infty}" = 0$$

משמע, $n = o(n \cdot \ln n) \Longrightarrow n = O(n \cdot \ln n)$

בעקבות טרנזיטיביות היחס O,

$$8n + 12 = O(n), O(n \cdot \ln n) \Longrightarrow 8n + 12 = O(n \cdot \ln n)$$

5. $n \cdot \ln n = O(\lg(n!))$

בעמוד 46 מתארים כי שינוי בסיס הלוגריתם מקבוע אחד לאחר משנה את ערך הלוגריתם בגורם קבוע בלבד משמע,

$\ln n = \Theta(lg\, n)$, ולכן $n \cdot \ln n = \Theta(n \cdot \lg n)$. (*)

על פי שאלה ב-5 במדריך הלמידה נקבל,

$n \cdot \lg n = \Theta(\lg(n!)) \overset{\text{סימטריה}}{\Longleftrightarrow} \lg(n!) = \Theta(n \cdot \lg n)$. מטרנזיטיביות היחס תטא(*)

משפט 3.1 נובע,

$$n \cdot \ln n = \Theta(\lg(n!)) \Longrightarrow n \cdot \ln n = O(\lg(n!))$$

6. $\lg(n!) = O(5n^2 + 7n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \lg n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} \overset{3.9}{=} 0$$

משמע, $n \cdot \lg n = o(n^2) \Longrightarrow n \cdot \lg n = O(n^2)$

בנוסף על פי עמוד 45 בספר,

$$5n^2 + 7n = \Theta(n^2) \overset{\text{סימטריה}}{\Longleftrightarrow} n^2 = \Theta(5n^2 + 7n) \overset{3.1}{\Longleftrightarrow} n^2 = O(5n^2 + 7n)$$
$$\Longrightarrow n \cdot \lg n = O(5n^2 + 7n)(*)$$

על פי שאלה ב-5 במדריך הלימוד ידוע לנו כי $\lg(n!) = \Theta(n \cdot \lg n)$ על פי משפט 3.1 בספר הלימוד נקבל כי $\lg(n!) = O(n \cdot \lg n)$ ולכן על פי טרנזיטיביות היחס O (*) נקבל

$$\lg(n!) = O(5n^2 + 7n)$$

7. $5n^2 + 7n = O(5^{lgn})$

לפי עמוד 45 בספר הלימוד מתקבל $5n^2 + 7n = O(n^2)$. (*)

לפי עמוד 33 במדריך הלמידה מתקבל $n^2 = 4^{\lg n}$, לכן,

$$4^{\lg n} \le 5^{\lg n} \Leftrightarrow n^2 \le 5^{\lg n} \Leftrightarrow n^2 \le 1 \cdot 5^{\lg n}$$

אי שוויון זה קורה עבור $n \ge 1$ ו $c = 1$ כאשר $n^2 \le c \cdot 5^{\lg n}$.

ולכן $n^2 = O\left(5^{\lg n}\right)$, מטרנזיטיביות היחס O (*) נובע $5n^2 + 7n = O\left(5^{\lg n}\right)$.

8. $5^{lgn} = O\big((\lg n)!\big)$

הגדרת העצרת בקורס הינה למספרים שלמים בלבד(לפחות לפי ההגדרה בעמוד 47 בספר הלימוד..) ולכן כאשר אנו מחשבים את היחס, אנו מחשבים אותו עבור $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

נציב,

$$(\lg n)! > 5^{lgn} \Leftrightarrow (\lg 2^k)! > 5^{\lg 2^k} \Leftrightarrow k! > 5^k$$

בצורה אנלוגית לשאלה ב-5 במדרך הלמידה, בה נחליף את המספר 2 ב-5 נקבל כי

$$k! = \omega(5^k) \overset{\text{סימטרה מוחלפת}}{\Longrightarrow} 5^k = o(k!)$$

לפי הגדרת הסימון o נקבל כי עבור $c = 1$ קיים k_0 כך שלכל $k > k_0$ מתקיים

$$1 \cdot k! > 5^k$$

נקבל $n_0 = 2^{k_0}$ ולכן לכל $n > n_0$ מתקיים $(\lg n)! > 5^{lgn}$.

משמע,

$$5^{lgn} = O\big((\lg n)!\big)$$

9. $(\lg n)! = O(e^n)$

הגדרת העצרת בקורס הינה למספרים שלמים בלבד(לפחות לפי ההגדרה בעמוד 47 בספר הלימוד..) ולכן כאשר אנו מחשבים את היחס, אנו מחשבים אותו עבור $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

נציב,

$$(\lg n)! < e^n \Leftrightarrow (\lg 2^k)! < e^{(2^k)} \Leftrightarrow k! < e^{(2^k)} \Leftrightarrow \ln(k!) < 2^k$$

בעמוד 46 מתארים כי שינוי בסיס הלוגריתם מקבוע אחד לאחר משנה את ערך הלוגריתם בגורם קבוע בלבד משמע $\ln k! = \Theta(lg\, k!)$, בנוסף על פי שאלה ב-5 במדריך הלמידה ידוע לנו כי $\lg k! = \Theta(k \cdot \lg k)$ ולכן מטרנזיטיביות היחס תטא,

$$\ln k! = \Theta(k \cdot \lg k) \Longrightarrow \ln k! = O(k \cdot \lg k)$$

וממשפט 3.1 נובע

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \lg n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} \overset{3.9}{=} 0$$

משמע $n \cdot \lg n = o(n^2)$
בנוסף על פי עמוד 34 במדריך הלמידה ידוע לנו כי מתקיים,
$$n^2 = o(2^k)$$
<u>נוכיח טענה</u>, עבור הפונקציות $f(x), g(x), h(x)$, אם
$g(x) = o\big(h(x)\big), f(x) = O\big(g(x)\big)$ אזי $f(x) = o\big(h(x)\big)$.

<u>הוכחה</u>
כידוע אם $f(x) = O\big(g(x)\big)$ אז קיים c_1 ו n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים
$f(x) \leq c_1 \cdot g(x)$.

בנוסף אם $g(x) = o\big(h(x)\big)$ אז לכל c ממשי קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים
$g(x) < c \cdot h(x)$. נסמן $c = c_1 r, r \in \mathbb{R}$ ולכל $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ מתקיים
$$f(x) \leq c_1 \cdot g(x) < c_1 r \cdot h(x) \Rightarrow f(x) < c_1 r \cdot h(x) \Rightarrow f(x) < c \cdot h(x)$$
ובכך הוכחנו כי $f(x) = o\big(h(x)\big)$.

בעקבות טענה זאת נקבל כי $\ln(k!) = o(2^k)$ ולכן, עבור $c = 1$ נקבל כי קיים k_0 כך שלכל $k > k_0$ מתקיים $\ln(k!) < (2^k)$, משמע $n_0 = 2^{k_0}$ ולכל $n \geq (n_0 + 1)$ כאשר $c = 1$ מתקיים $(\lg n)! < 1 \cdot e^n \Rightarrow (\lg n)! \leq c \cdot e^n$ ולכן $(\lg n)! = O(e^n)$.

10. $e^n = O(4^n)$
נוכיח זאת לפי מונוטוניות פונקציית ln,
ראשית נציין כי $\ln 4 > \ln e > 1$.

$$e^n \leq 4^n \Leftrightarrow \ln e^n \leq \ln 4^n \Leftrightarrow n \leq n \cdot \ln 4 \Leftrightarrow n \leq c \cdot (n \cdot \ln 4)$$
בעקבות כך נקבל כי אי שוויון זה מתקיים לכל $n \geq 1$ ועבור $c = 1$.
משמע, $e^n = O(4^n)$.

11. $4^n = O(10^n + n^{20})$
נוכיח זאת לפי מונוטוניות פונקציית ln,
ראשית נציין כי בקטע $(0, \infty)$ פונקציית לן הינה מונוטונית עולה לכן $\ln 10 > \ln 4$.
עבור $n > 0$ נחשב,
$$4^n \leq 10^n \Leftrightarrow \ln 4^n \leq \ln 10^n \Leftrightarrow n \ln 4 \leq n \ln 10 \Leftrightarrow \ln 4 \leq \ln 10$$
משמע אי שוויון זה מתקיים לכל $n > 0$. מכאן נובע כי אם נוסיף את הפונקציה n^{20} החיובית לכל $n > 0$ לאגף הימני אי שוויון זה יישאר ונקבל,

$$4^n \leq 10^n \Leftrightarrow 4^n \leq 10^n + n^{20} \Leftrightarrow 4^n \leq c \cdot (10^n + n^{20})$$
בעקבות כך נקבל כי אי שוויון זה מתקיים לכל $n \geq 1$ ועבור $c = 1$.
משמע, $4^n = O(10^n + n^{20})$.

12. $10^n + n^{20} = O(n!)$
בצורה אנלוגית לשאלה ב-5 במדריך הלמידה, בה נחליף את המספר 2 ב-10 נקבל כי
$$n! = \omega(10^n) \overset{\text{סימטרה מוחלפת}}{\Longrightarrow} 10^n = o(n!) \Rightarrow 10^n = O(n!)$$
בנוסף עבור,
$$10^n + n^{20} < 100 \cdot 10^n \overset{n>0}{\Leftrightarrow} 1 + \frac{n^{20}}{10^n} < 100$$

ידוע לנו לפי משפט 3.9 כי $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{n^{20}}{10^n}=1$, כלומר לפי הגדרת הגבול קיים n_0 כך שלכל $n>n_0>0$ מתקיים $1+\frac{n^{20}}{10^n}<100 \Longrightarrow \left|1+\frac{n^{20}}{10^n}\right|<100$.

כלומר לכל $n \geq (n_0+1)$, $c=100$ מתקיים גם $10^n+n^{20}<c\cdot 10^n$ ולפי הגדרה נקבל כי $10^n+n^{20}=O(10^n)$.

מטרנזיטיביות היחס O נקבל כי $10^n+n^{20}=O(n!)$.

13. $n!=O(n^n)$

לפי שאלה 5 ב במדריך הלימוד מתקיים $n!=o(n^n) \Longrightarrow n!=O(n^n)$.

14. $n^n=O(n^n+\ln x)$

עבור $n \geq e$ הפונקציה $\ln x$ מונוטונית ומתקיים $\ln e=1$, לכן נקבל,

$$\ln n \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{n^n}+\ln n \geq n^n \Longrightarrow c\cdot(n^n+\ln n)\geq n^n$$

נקבל זאת עבור $c=1$. ולכן,

$$n^n=O(n^n+\ln x)$$

15. $n^n+\ln n=O(2^{n!})$

נפעיל את פונקציית הלוג,

$$2^{n!}>n^n \Leftrightarrow \frac{2^{n!}}{n^n}>1 \Leftrightarrow \lg\frac{2^{n!}}{n^n} \Leftrightarrow \lg 1 \Leftrightarrow \lg\frac{2^{n!}}{n^n}>0 \Leftrightarrow \lg 2^{n!}\cdot n^{-n}>0$$

$$\lg 2^{n!}+\lg n^{-n}>0 \Leftrightarrow n!-n\cdot\lg n>0 \Leftrightarrow n!>n\cdot\lg n$$

נראה,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\log n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\log n}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}\overset{3.9}{=}0$$

לכן, $n\cdot\lg n=o(n!)$, משמע עבור $c=1$ קיים n_0 כך שעבור $n\geq n_0$ מתקיים $n!>n\cdot\lg n$ בעקבות מה שהוצג לכל $n\geq n_0$ מתקיים גם $2^{n!}>n^n$.

משמע, $n^n=O(2^{n!})$.

כעת נראה,

$$n^n+\ln n\leq 100\cdot n^n \Leftrightarrow \frac{n^n+\ln n}{n^n}\leq 100 \Leftrightarrow 1+\frac{\ln n}{n^n}\leq 100$$

מתקיים,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^n}=0$$

כלומר לפי הגדרת הגבול קיים n_0 כך שלכל $n>n_0>0$ מתקיים $1+\frac{\ln n}{n^n}<100 \Longrightarrow \left|1+\frac{\ln n}{n^n}\right|<100$.

כלומר לכל $n\geq(n_0+1)$, $c=100$ מתקיים גם $n^n+\ln n<c\cdot n^n$ ולפי הגדרה נקבל כי $n^n+\ln n=O(n^n)$.

מטרנזיטיביות היחס O נקבל כי $n^n+\ln n=O(2^{n!})$.

כעת, נסדר את הרשימה למחלקות כך ש-f_i ו-f_j שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f_i(n)=\Theta\left(f_j(n)\right)$.

נעשה רשימה, כל שורה מייצגת מספר מחלקה, פונקציות אשר נמצאות באותה שורה הן בעלות אותו סדר גודל כנדרש.

מתחת לטבלה נוכיח שהפונקציות אשר נמצאות באותה שורה הן בעלות אותו סדר גודל.

$n^{1/\lg n}$
$(\lg n)^2$
$\sqrt{n}$
$8n + 12$
$n \cdot \ln n, \quad \lg(n!)$
$5n^2 + 7n$
$5^{\lg n}$
$(\lg n)!$
e^n
4^n
$10^n + n^{20}$
$n!$
$n^n, \qquad n^n + \ln n$
$2^{n!}$

1. $n \cdot \ln n = \Theta(\lg(n!))$ – הראנו זאת בטענה 5 בשאלה 3 במטלה הנוכחית.

2. $n^n = \Theta(n^n + \ln n)$
$n^n + \ln n = O(n^n)$ הראנו זאת בטענה 15
$n^n = O(n^n + \ln x)$ הראנו זאת בטענה 14, בעקבות סימטריה מוחלפת נקבל $n^n + \ln n = \Omega(n^n)$.
וכעת בעקבות משפט 3.1 בספר הלימוד את הנדרש.

שאלה 4:

א. $T(n) = 4T(n/8) + n^{2/3}$

נשתמש בשיטת האב,

מתקיים $8^{2/3} = 4$,

על פי מקרה 2 במדריך הלמידה עמוד 45 נקבל,

$T(n) = \Theta\left(n^{2/3} \cdot lg\, n\right)$

ב. $T(n) = 6T(n/6) + \lg^5 n = 6T(n/6) + n^0 \cdot \lg^5 n$

נשתמש בשיטת האב,

מתקיים $6^0 = 1 < 6$,

על פי מקרה 1 במדריך הלמידה עמוד 45 נקבל,

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_6 6}\right) = \Theta(n)$

ג. $T(n) = 3T(n/3) + n + n/\lg^5 n$

נשתמש בשיטת האב,

$f(n) = n + n/\lg^5 n = \Theta(n)$ (היות ו n האיבר הדומיננטי בסכום)

ובנוסף $n = \Theta(n + n/\lg^5 n) \overset{\text{טרנזיטיביות}}{\Longrightarrow} n^{\log_3 3} = n = \Theta(n)$

על פי מקרה 2 במדריך הלמידה עמוד 43 נקבל,

$T(n) = \Theta(n \cdot \lg n)$

ד. $T(n) = 32T(n/4) + n^{5/2} \cdot \lg^3 n$

נשתמש בשיטת האב,

מתקיים $4^{5/2} = 32$,

על פי מקרה 2 במדריך הלמידה עמוד 45 נקבל,

$T(n) = \Theta\left(n^{5/2} \cdot lg^4\, n\right)$

ה. $T(n) = \frac{5}{2}T\left(\sqrt{n}\right) + \lg^4 n = \frac{5}{2}T\left(n^{1/2}\right) + \lg^4 n$

מבצעים את החלפת המשתנים $m = \lg n , n = 2^m$;

נסמן $S(m) = T(2^m)$, אזי לפי עמוד 40 במדריך הלמידה נקבל,

$$S(m) = \frac{5}{2} \cdot S(m/2) + m^4$$

מתקיים $2^4 = 16 > 5/2$,

ולכן על פי מקרה 3 במדריך הלמידה עמוד 45 נקבל,

$S(m) = \Theta(m^4)$

מזה נובע, $T(n) = \Theta(\lg^4 n)$.

ו. $T(n) = \sqrt{n^3} \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + n^3 \cdot \lg^5 n = n \cdot \sqrt{n} \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + n^3 \cdot \lg^5 n$

מחלקים את שני צדדי המשוואה ב- n^3 ומקבלים,

$$\frac{T(n)}{n^3} = \frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}} + \lg^5 n$$

מבצעים את החלפת המשתנים $m = \lg n , n = 2^m$; מסמנים $S(m) = \frac{T(2^m)}{2^m}$ ומגיעים

לנוסחת הנסיגה $S(m) = S(m/2) + m^5$

מתקיים $2^5 = 32 > 1$,

ולכן על פי מקרה 3 במדריך הלמידה עמוד 45 נקבל,

$$S(m) = \Theta(m^5)$$

מזה נובע, $\frac{T(n)}{n^3} = \Theta(\lg^5 n)$ ופתרון הנוסחה המקורית בעקבות שאלה ג-9 במדריך הלמידה $T(n) = \Theta(n^3 \cdot \lg^5 n)$.

ז. $T(n) = T(n/3\ ) + T(n/6) + n$

נשתמש בנוסחת הנסיגה של שיטת עכרה-באזי

הפרמטרים בנוסחה הם $b_2 = 6, b_1 = 3, a_1 = a_2 = 1$; כדי שיתקיים השוויון $\left(\frac{1}{6}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p = 1$ חובה ש $p < 1$. נוסחת הפתרון נותנת לנו לפי עמוד 47 במדריך הלמידה,

$$T(n) = \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{x}{x^{1+p}} dx\right)\right) = \Theta\left(n^p \cdot \left(\int_1^n x^{-p} dx\right)\right)$$

$$= \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \frac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1)\right)\right) = \Theta\left(n^p + \frac{1}{1-p}(n - n^p)\right)$$

$$= \Theta(n)$$