שאלה 1 :

על מנת למצוא מטריצה R קנונית מסדר 3×4 ומטריצה P הפיכה מסדר 3×3 כך ש- $R = PA$.
נשתמש בהוכחה של טענה $3.9.9'$ המוכללת, ונבצע על I_3 אותן פעולות המעבירות מ-A ל-R.
* כדאי להזכיר שלכל מטריצה יש הצגה קנונית יחידה(משפט 1.11.3) ולכן קיימת מטריצה R קנונית יחידה אשר נוכל להגיע אליה מ-A.

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -9 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1.5 & 2.5 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -9 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2}R_3]{R_2 \to -1R_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 & -2.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 4.5 & -2 & -0.5 \end{array}\right]$$

לאחר שהגענו למטריצה הקנונית אפשר להגיד כי :

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ -2.5 & 1 & 0.5 \\ 4.5 & -2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

וכמובן כי בעקבות דרך הוכחתה של טענה $3.9.9'$ והפעולות שבצענו נקבל כי $R = PA$. ■

שאלה 2 :

תהיינה A, B, C, D מטריצות מסדר $n \times n$ המקיימות $\mathrm{AB}CD = I$.
הערה * - מתייחס לכך שהשוויון נובע ממסקנה 4.5.2.

$$\mathrm{ABCD} \overset{\text{קיבוציות}}{=} (ABC)D \overset{*}{=} D(ABC) \overset{\text{קיבוציות}}{=} DABC = I$$

$$\mathrm{ABCD} \overset{\text{קיבוציות}}{=} (ABC)D \overset{*}{=} D(ABC) \overset{\text{קיבוציות}}{=} (DAB)C \overset{*}{=} C(DAB) \overset{\text{קיבוציות}}{=} CDAB = I$$

$$\mathrm{ABCD} \overset{\text{קיבוציות}}{=} A(BCD) \overset{*}{=} (BCD)A \overset{\text{קיבוציות}}{=} BCDA = I \qquad \blacksquare$$

שאלה 3:

תהיינה A מטריצה מסדר $m \times m$ ו-B מטריצה מסדר $m \times n$.

נניח כי A הפיכה ומכאן נקבל כי יש לה הופכית A^{-1} ונכפול אותה בצד שמאל ל-AB:

$$A^{-1}(AB) \overset{\text{קיבוציות}}{=} (A^{-1}A)B = IB = B$$

מצאנו מטריצה הפיכה A^{-1} אשר אם כופלים את AB בה מקבלים את B ולכן על פי מסקנה 3.9.9 נקבל כי AB שקולת שורה ל-B.

כיוון ש-AB שקולת שורה ל-B קיימים מספר סופי של פעולות אלמנטריות כך ש-

$$(AB \mid \mathbf{0}) \to (B \mid \mathbf{0})$$

כיוון שהמערכות הומוגניות זה אומר שכאשר נבצע את הפעולות האלמנטריות הללו **0** יישאר **0** ו-AB ישתנה ל-B ולכן נקבל כי יש ל-$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ו $-$ $AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ את אותן קבוצת פתרונות. ■

שאלה 4:

על מנת להראות כי A הפיכה נבצע עליה פעולות אלמנטריות עד שנקבל מטריצה משולשית, מטריצה זאת בוודאי שקולת שורה ל-A(משפט 1.8.1), בעקבות כך נראה שהדטרמיננטה של המטריצה המשולשית אשר שקולת שורה ל-A אינה שווה ל-0 ונקבל בעקבות משפט 4.4.2 כי גם הדטרמיננטה של A אינה שווה ל-0 ובכך נראה כי A אינה הפיכה(נסמן את המטריצה המתקבלת ב-A'):

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1 \le i \le n-1]{R_{n-i+1} \leftrightarrow R_{n-i}} \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כעת לאחר שקיבלנו מטריצה משולשית באמצעות משפט 4.3.8 נחשב את הדטרמיננטה שלה ונקבל כי: $|A'| = a_n \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$.

לפי הנתון $a_1, \ldots, a_n$ שונים מ-0 ולכן הסכום $|A'| = a_n \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \neq 0$ בעקבות כך נקבל על פי למה 4.4.2 כי גם $|A| \neq 0$ מה שאומר לפי משפט 4.4.1 כי A הינה מטריצה הפיכה.

כעת נחשב את המטריצה ההופכית ל-A:

על מנת לחשב את המטריצה ההופכית ל-A נשתמש בדרך שבה הוכיחו את טענה 3.9.9. נבצע על I_n את אותן פעולות שנבצע על A על מנת להגיע מ-A ל-I_n והמטריצה אשר תתקבל בוודאי מהווה את ההופכית ל-A כיוון שבעקבות דרך הוכחת טענת 3.9.9 אנחנו יודעים שאם נכפיל את המטריצה החדשה אשר התקבלה ב-A נקבל את I_n:

$$(A|I_n)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[1\le i\le n-1]{R_{n-i+1}\leftrightarrow R_{n-i}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 0 & \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_i\to\frac{1}{a_{i-1}}R_i \\ 2\le i\le n}]{R_1\to\frac{1}{a_n}R_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \vdots & \dots & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right) = (I_n\,|\,A^{-1})$$

*הערה: יכולנו להכפיל ב-$\frac{1}{a_i}$ לכל $1\le i\le n$ כיוון שנתון כי $a_i\neq 0$.

והרי הוכחנו כי A הפיכה וחישבנו את A^{-1}.■

שאלה 5:

תהיינה A, B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$ כך ש- $B^3A+AB^2=3I$ אז בעקבות כלל הפילוג השמאלי לפי משפט 3.5.5א נקבל כי $(B^2+AB)B=3I$.

כעת, נכפיל את 2 צדדי המשוואה ב- $\frac{1}{3}$ משמאל ונקבל:

$$\frac{1}{3}[(B^2+AB)B]=\frac{1}{3}(3I) \overset{\text{משפט 3.5.6א ומשפט 3.3.5ב}(ii)}{\Longleftrightarrow} [\frac{1}{3}(B^2+AB)]B=I$$

*(סימון) נסמן ב-C את המטריצה $C=\frac{1}{3}(B^2+AB)$ נציב ונקבל כי: $CB=I$.

בעקבות כך לפי מסקנה 4.5.2 נקבל כי B הינה מטריצה הפיכה ו-C המטריצה ההופכית לה.

כיוון ש-B הפיכה קיימת לה מטריצה B^{-1} אשר הופכית לה(הראנו לפני גם כי $C=B^{-1}$).

בנוסף נתון לנו כי $B^2A=-2B^3$ לכן:

$$B^2A=-2B^3 \overset{\text{הכפלה משמאל ב}-B^{-1}}{\Longleftrightarrow} B^{-1}(B^2A)=B^{-1}(-2B^3)$$

$$\overset{\text{קיבוציות ומשפט3.5.6ב}}{\Longleftrightarrow} (B^{-1}B^2)A=-2(B^{-1}B^3) \overset{\text{הכפלה משמאל ב}-B^{-1}}{\Longleftrightarrow} B^{-1}(BA)=B^{-1}(-2B^2)$$

$$\overset{\text{קיבוציות ומשפט3.5.6ב}}{\Longleftrightarrow} (B^{-1}B)A=-2(B^{-1}B^2) \Longleftrightarrow A=-2B$$ *(סימון)

כעת נכפיל מימין ב-B^{-1} ולאחר מכן ב- -$-\frac{1}{2}$ משמאל ונקבל:

$$--\frac{1}{2}(AB^{-1}) = -\frac{1}{2}(-2B)B^{-1} \overset{\text{משפט 3.5.6ב}}{\Longleftrightarrow} A\left(-\frac{1}{2}B^{-1}\right) = -\frac{1}{2} - 2(BB^{-1})$$

$$\Longleftrightarrow \quad A\left(-\frac{1}{2}B^{-1}\right) = I$$

קיבלנו כי קיימת מטריצה $\left(-\frac{1}{2}B^{-1}\right)$ אשר אם נכפיל אותה ב-A נקבל את המטריצה I ולכן לפי מסקנה 4.5.2 נקבל כי A הפיכה והמטריצה $\left(-\frac{1}{2}B^{-1}\right)$ *(סימון) היא ההופכית לה.

לאחר שהראנו כי A ו-B מטריצות הפיכות נבטא את A^{-1} ואת B^{-1} באמצעות B.

נבטא את B^{-1} ונקבל כי

$$B^{-1} \overset{*}{=} C \overset{*}{=} \frac{1}{3}(B^2 + AB) \overset{\text{*ומשפט3.5.6א}}{=} \frac{1}{3}(B^2 - 2BB) \overset{-2BB=-2B^2}{=} -\frac{1}{3}B^2$$

כעת נבטא גם את A^{-1} ונקבל ש- $A^{-1} \overset{*}{=} -\frac{1}{2}B^{-1} \overset{\text{הצבת } B^{-1}}{=} -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}B^2\right) \overset{\text{משפט 3.3.5 ב(ii)}}{=} \frac{1}{6}B^2$

ובכך ההוכחה הסתיימה, הוכחנו כי A ו-B הפיכות וביטאנו A^{-1} ואת B^{-1} באמצעות B.■

שאלה 6:

א.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 2 \\ . & . & . & . & 1 & 3 & 1 \\ . & . & . & . & 4 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & n-1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & n & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

לפני שנחשב את D_n נבצע עליה פעולות אלמנטריות של הוספת כפולה של שורה, ממשפט 4.3.6 נקבל כי פעולה זאת אינה משפיעה על D_n לכן נוכל לבצע אותן כמו שהן מבלי לדאוג לשינוי הערך:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 2 \\ . & . & . & . & 1 & 3 & 1 \\ . & . & . & . & 4 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & n-1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & n & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[2\le i\le n]{R_i \to R_i - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 2 & 0 \\ . & . & . & . & 3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & . & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

כעת נפתח את D_n על פי העמודה הראשונה ונקבל כי

$$(-1)^2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \\ . & . & . & 3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & n-2 & 0 & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \\ . & . & . & 3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & n-2 & 0 & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

כעת נבצע החלפות שורה כדי ליצור מטריצה ריבועית משולשית אך נחלק זאת למקרים :

1. אם n אי זוגי אז :

$$\begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \\ . & . & . & 3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & n-2 & 0 & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[1\le i\le \frac{n-1}{2}]{R_{n-i} \leftrightarrow R_i} \begin{vmatrix} n-1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & n-2 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 3 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 2 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

ונקבל בעקבות משפט 4.3.2 ו4.3.8 כי הערך של D_n כאשר n אי זוגי הוא :

$$D_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$$

2. אם n זוגי אז :

$$\begin{vmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & 2 & 0 \\ . & . & . & 3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & n-2 & 0 & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & . & . & . & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[1\le i\le \frac{n}{2}-1]{R_{n-i} \leftrightarrow R_i} \begin{vmatrix} n-1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & n-2 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 3 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 2 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

ונקבל בעקבות משפט 4.3.2 ו4.3.8 כי הערך של D_n כאשר n זוגי הוא :

$$D_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot (n-1) = -(n-1)!$$

הראנו לכל מקרה מה הוא הערך של D_n ובכך החישוב הסתיים.■

ב.   בעקבות משפט 4.3.4 נקבל כי :

$$\Delta = \Delta_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_{n-1}^n \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}$$

כעת בעקבות משפט 4.3.3 נוכל לכתוב זאת בתור :

$$\Delta = \Delta_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_n^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

כעת נחלק זאת ל-2 מקרים.

1. המקרה בו n אי זוגי :

נבצע $C_i \leftrightarrow C_{i+1}$ ל- $1 \leq i \leq n-1$ משמע ביצענו *n-1* (מספר אשר כמובן זוגי)
החלפות עמודות ולכן לפי משפט 4.3.2 ולפי זה ש-*n* זוגי נקבל כי :

$$\Delta_1 + (-1)^{n-1}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & 1 \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_n^{n-1} & 1 \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Updownarrow_{1*}$$

$$\Delta_1 + (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n)\Delta_1 = \Delta$$

$$\Updownarrow_{2*}$$

$$\Delta_1(1 + (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n)) = 0$$

$$\Updownarrow_{3*}$$

$$1 + (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) = -1$$

נימוקים :

*1 נתון Δ_1.

*2 נתון כי $\Delta = 0$.

*3 נתון כי $\Delta_1 \neq 0$ ואחד מהם בהכרח חייב להיות אפס בעקבות המשוואה המתקבלת.

ובכך הראנו כי כאשר n אי זוגי אז $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = -1$

2. בצורה דומה נראה כי כאשר n זוגי אז מתקבל כי $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 1$

ובכך נקבל כי $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ שווה ל-1 או ל- -1. ■

שאלה 7:

א. נניח בשלילה כי הפתרון הטריוויאלי הוא הפתרון **היחידי** למערכת $(\mathrm{A}^2B)\underline{x} = \underline{0}$.

מכאן בעקבות משפט 3.10.6 נקבל כי (A^2B) הינה מטריצה הפיכה. נפשט אותה ל-AAB ובעקבות כך שידוע לנו כי המטריצה הפיכה נקבל לפי משפט 4.4.1 כי $|AAB| \neq 0$.

משמע לפי משפט 4.5.1 נקבל כי $|\mathrm{A}||A||B| \neq 0$ לכן בהכרח מתקיים $|\mathrm{A}| \neq 0$ (אחרת הביטוי $|\mathrm{A}||A||B|$ היה מתאפס והיינו מקבלים מטריצה שאינה הפיכה בסתירה להנחה*).

בנוסף נרשום: $|A| \overset{\text{נתון}}{=} |-A| \iff |A^t| \overset{\text{משפט 4.3.1}}{=} |A| \iff |A| = |A|$

נסמן את איברה של מטריצה A באמצעות $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \boldsymbol{R}$ ואת איברה של A- באמצעות האיברים הנגדיים, נחשב ונשווה את הדטרמיננטות שלהן ונסיק מסקנות.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$*|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{1i} |A_{1i}^M| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$|-A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{1i} |-A_{1i}^M| = -a(ei - fh) + b(di - fg) - c(dh - eg)$$

נשווה בין הביטויים ונקבל:

$$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) = -a(ei - fh) + b(di - fg) - c(dh - eg)$$
$$\Updownarrow$$
$$2a(ei - fh) - 2b(di - fg) + 2c(dh - eg) = 0$$
$$\Updownarrow \text{ נחלק}$$
$$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \overset{\text{נציב*}}{=} |A| = 0$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של A הינה 0, משמע הדטרמיננטה של A^2B גם היא 0!(נימקנו למה ב-*). ולכן A^2B אינה הפיכה משמע לפי משפט 3.10.2 קיים פתרון לא טריוויאלי בסתירה להנחה! נקבל כי בהכרח קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת $(\mathrm{A}^2B)\underline{x} = \underline{0}$. ■

ב. המטריצה $(A+B)^2$ איננה בהכרח סימטרית ונראה זאת באמצעות דוגמה:

ראשית נרשום שתי מטריצות A, B מסדר 3×3 כך ש-$A^t=-A$ וגם $B^t=B$ ושתיהן יהיו שונות ממטריצת האפס.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

כעת נחשב את $(A+B)^2$:

$$(A+B)^2=\left(\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\right)^2=\left(\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\-1&-2&0\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}-3&-6&8\\-4&-8&0\\0&-2&-11\end{bmatrix}$$

בוודאי כי $-4\neq-6 \Leftrightarrow a_{1,2}\neq a_{2,1}$ ולכן נובע כי $(A+B)^2$ אשר הדגמנו איננה סימטרית משמע $(A+B)^2$ איננה בהכרח סימטרית.■