שאלה 1:

א. נמצא את כל הפתרונות עבור $z^3 + 3i\bar{z} = 0$:

נחלק זאת למקרים:

1. <u>אם $z \neq 0$.</u>

$$z^3 + 3i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z^3 = -3i\bar{z} \overset{\text{נכפיל ב-}Z}{\Leftrightarrow} z^4 = -3i|z|^2$$

כעת נרשום $z = r(cis\theta)$ ונקבל בעקבות שימוש בנוסחת דה-מואבר כי

$r^4(cis4\theta) = -3ir^2$. כיוון ש-$z \neq 0$. נוכל לחלק את המשוואה ב-r^2 ונקבל כי

$r^2(cis4\theta) = -3i$. נציג את $-3i$ בהצגה טריגונומטרית ונקבל כי

$$r^2(cis4\theta) = 3(cis\tfrac{3\pi}{2})$$

מכאן בקלות נקבל את ההצגה השקולה אשר:

$$r^2 = 3 \Leftrightarrow r = 3$$

ובנוסף $4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ כאשר k מספר שלם.

כעת נוכל לקבל את הפתרונות שהם:

$$(\text{כאשר } k = 0)Z_0 = 3(cis\frac{3\pi}{8})$$

$$(\text{כאשר } k = 1)Z_1 = 3(cis\frac{7\pi}{8})$$

$$(\text{כאשר } k = 2)Z_2 = 3(cis\frac{11\pi}{8})$$

$$(\text{כאשר } k = 3)Z_3 = 3\left(cis\frac{15\pi}{8}\right)$$

2. <u>אם $z = 0$.</u>

בוודאי שנקבל כי $z = 0$ הוא פתרון למשוואה.

ב. יהיו z_1, z_2 מספרים מרוכבים.

נניח כי $z_1z_2 \neq -1$ ו-$|z_1| = |z_2|$ ובעקבות כך נראה מדוע $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ממשי:

בעקבות הגדרת הכפל נקבל כי $(z_1 + z_2) \cdot (1 + z_1z_2)^{-1} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

כעת בעקבות טענה 6.4.6 נקבל כי: $(z_1 + z_2) \cdot (1 + z_1z_2)^{-1} = (z_1 + z_2) \cdot \frac{\overline{(1+z_1z_2)}}{|1+z_1z_2|^2}$.

בעקבות משפט 6.4.2 סעיף ו' נקבל כי:

$$\frac{(z_1+z_2)(1+\overline{z_1z_2})}{|1+z_1z_2|^2} \Longrightarrow \frac{z_1+z_1\overline{z_1z_2}+z_2+z_2\overline{z_1z_2}}{|1+z_1z_2|^2} \overset{\text{משפט 6.4.2ג}}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{z_1 + |z_1|^2\,\overline{\cdot z_2} + z_2 + |z_2|^2\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2} \overset{\text{משפט 6.4.4ב}}{\Longrightarrow} \frac{z_1 + z_1\overline{z_1}\,\overline{\cdot z_2} + z_2 + z_2\overline{z_1}\,\overline{\cdot z_2}}{|1+z_1z_2|^2}$$

$$\frac{2Re\, z_1\ \ 2\mathrm{Re}\, z_2}{|1+z_1z_2|^2} \overset{\text{משפט 6.4.2ד}}{\Longrightarrow} \frac{z_1+\overline{\cdot z_2}+z_2+\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2} \overset{\text{נתון } |z_1|=|z_2|=1}{\Longrightarrow}$$

ראוי לציין כי הביטוי אכן עלול להיות לא מוגדר וכתוצאה מכך לא ממשי כאשר $|1+z_1z_2|^2=0$ אך בעקבות הנתון כי $z_1z_2 \neq -1$ בוודאי מצב זה לעולם לא יתקיים. בוודאי כי $2Re\, z_1\ \ 2\mathrm{Re}\, z_2$ ממשי וגם בעקבות הגדרת הערך המוחלט נקבל ש- $|1+z_1z_2|^2$ ממשי. בעקבות הגדרת שדה הממשיים חילוק הוא כפל בהופכי ובוודאי כי כפל היא פעולה סגורה ולכן הביטוי הנ"ל הוא ממשי.■

שאלה 2:

א. על מנת להוכיח כי $V = M_{n\times n}^{\boldsymbol{C}}$ אינה מרחב לינארי מעל $F=\boldsymbol{C}$ נראה כי הגדרת הכפל בסקלר המסומן * ומוגדר על ידי $\lambda * \mathrm{A} = |\lambda|A$ איננה עומדת בדרישות הגדרת 7.1.1:
ויהי סקלרים $\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$ ונגדיר אותם $\lambda = 2-i, \mu = 2+i$. בנוסף יהי $\mathrm{A} \in M_{n\times n}^{\boldsymbol{C}}$ אשר $\mathrm{A} \neq \mathcal{O}$. כעת נראה כי:

$$(\lambda+\mu)\mathrm{A} = \big((2-i)+(2+i)\big)A = (4)A = |4|A = 4A$$

$$\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{A} = (2-i)A + (2+i)A = \left|\sqrt{5}\right|A + \left|\sqrt{5}\right|A = 2\sqrt{5}\,\mathrm{A}$$

משמע נובע כי $(\lambda+\mu)\mathrm{A} \neq \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{A}$ דבר הסותר את הגדרה 7.1.1(כפל בסקלר ג) ולכן בהכרח $M_{n\times n}^{\boldsymbol{C}}$ אינו מרחב לינארי מעל **C**.■

ב. הקבוצה $\mathrm{V} = \{(a,b) | a,b \in \boldsymbol{R}\}$ אינה מהווה מרחב לינארית מעל השדה $\mathrm{F} = \boldsymbol{R}$. על פי הגדרה 7.1.1 בהכרח חייב להתקיים פילוג הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F כעת נראה שמצב זה אינו מתקיים:
ויהיה $(1,1) \in \boldsymbol{R}$ וגם $1,0 \in \mathbf{R}$. כעת נבדוק:

$$(1+0)(1,1) = (1)(1,1) = (1,1)$$

$$1(1,1)\oplus 0(1,1) = (1,1)\oplus(0,0) = (2,0)$$

מכאן נובע כי $(1+0)(1,1) \neq 1(1,1) + 0(1,1)$ בסתירה לדרישה של הגדרה 7.1.1 ולכן V אינו מרחב לינארי מעל השדה F.■

שאלה 3:

א. טענה זאת אינה נכונה. נדגים זאת באמצעות הקבוצה $\boldsymbol{R}^2$ מעל **R**. באמצעות הווקטורים:

$$v_1 = (1,0), \qquad v_2 = (0,1), \qquad v_3 = (1,1)$$

ראשית נראה כי $sp\{v_1, v_2\} = sp\{v_1, v_3\}$ באמצעות כך שנבצע פעולות אלמנטריות אשר יגיעו מביטוי אחד לשני. (בדומה להוכחה לשאלה 7.5.12).

$$Sp\{v_1, v_2\} \Rightarrow Sp\{(1,0),(0,1)\} \overset{m_2 \to m_2 + m_1}{\Longrightarrow} Sp\{(1,0),(1,1)\} \Rightarrow Sp\{v_1, v_3\}$$

כעת נראה כי הווקטורים v_2, v_3 הינם בלתי תלויים לינארית באמצעות כך שנדרג את המטריצה ההומוגנית אשר מייצגת אותן ונראה כי קיים פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

אכן כל משתני המערכת קשורים ולכן נקבל כי קיים פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי משמע הווקטורים v_2, v_3 הינם בלתי תלויים לינארית.

ובכך הראנו כי הטענה אשר אומרת כי:

אם $sp\{v_1, v_2\} = sp\{v_1, v_3\}$ אז הווקטורים v_2, v_3 תלויים לינארית. שגוייה.■

ב. הטענה נכונה, נוכיח. אם $v_1 - 2v_2 + v_3 = \underline{\mathbf{0}}$ בוודאי כי $v_2 = \frac{v_1 - v_3}{2}$.

וכעת נקבל כי:

$$Sp\{v_1, v_2\} \Rightarrow Sp\{v_1, \frac{v_1 - v_3}{2}\} \overset{m_2 \to 2m_2}{\Longrightarrow} Sp\{v_1, v_1 - v_3\}$$

$$\underset{m_2 \to -m_2}{\overset{m_2 \to m_2 - m_1}{\Longrightarrow}} Sp\{v_1, v_3\}$$

בעקבות מה שהוצג וההוכחה לשאלה 7.5.12 נקבל כי אם $v_1 - 2v_2 + v_3 = \underline{\mathbf{0}}$ אז $Sp\{v_1, v_2\} = Sp\{v_1, v_3\}$.

ג. טענה זאת אינה נכונה. נדגים זאת באמצעות הקבוצה $\boldsymbol{R^2}$ מעל $\mathbf{R}$. באמצעות הווקטורים:

$$v_1 = (0,0), \qquad v_2 = (0,1), \qquad v_3 = (1,1)$$

בוודאי כי הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ תלויה לינארית כיוון ש-v_1 הוא וקטור האפס משמע לכל $s \in \boldsymbol{R}$ מתקיים $sv_1 + 0v_2 + 0v_3 = \underline{\mathbf{0}}$.

כעת נראה כי $Sp\{v_1, v_2\} \neq Sp\{v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$:

בוודאי כי $(1,1) \in Sp\{(1,1),(1,2)\}$ וגם כי $(1,1) \notin Sp\{(0,0),(0,1)\}$ ולכן נובע כי $Sp\{(0,0),(0,1)\} \neq Sp\{(1,1),(1,2)\}$ משמע:

$$Sp\{(0,0),(0,1)\} \neq Sp\{(1,1),(1,2)\}$$
$$\Rightarrow Sp\{(0,0),(0,1)\} \neq Sp\{(0,0)+(1,1),(0,1)+(1,1)\}$$
$$\Rightarrow Sp\{v_1,v_2\} \neq Sp\{v_1+v_3,v_2+v_3)\}$$

ובכך הראנו כי הטענה אשר אומרת כי:

אם $\{v_1,v_2,v_3\}$ תלויה לינארית, אז $Sp\{v_1,v_2\} = Sp\{v_1+v_3,v_2+v_3\}$.

שגוייה.■

שאלה 4:

א. הקבוצה K מוגדרת על ידי:

$$\mathrm{K} = (\{\mathrm{x,y,z,t} \in (\boldsymbol{Z}_5)^4 | \mathrm{x+y-z+t=0 \text{ and } 2x+y+z-3t=0}\}$$

בוודאי כי הקבוצה אינה ריקה כיוון שמתקיים בה הפתרון הטריוואלי(0).

ולכן על מנת למצוא קבוצת וקטורים סופית A כך שהקבוצה K שווה ל-Sp(A) נפתור את המשוואות המגדירות את הקבוצה K באמצעות ייצוג מטריצה הומוגני:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2+3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$4y+3z=0 \Leftrightarrow 4y=-3z \Leftrightarrow 4y=2z \Leftrightarrow y=2z \bullet 4^{-1}=y=3z$$
$$x+2z+t=0 \Leftrightarrow x=3z+4t$$

ומכאן נקבל כי הפתרון הכללי הוא $(3s+4t,3s,s,t), s,t \in \boldsymbol{R}$ ומכאן ניתן להסיק כי:

$$K = \{(3s+4t,3s,s,t)|s,t \in \boldsymbol{R}\} = \{\mathrm{s}(3,3,1,0)+\mathrm{t}(4,0,0,1)|s,t \in \boldsymbol{R}\} = Sp\{(3,3,1,0)+(4,0,0,1)\}$$

מצאנו קבוצת וקטורים סופית אשר פורשת את K! K אכן מרחב! (על פי הגדרה 7.5.2).

ב. הקבוצה L איננה מרחב לינארי. הקבוצה אינה שומרת על סגירות ביחס לפעולת החיבור ונדגים זאת:

ויהי $(-2,1,1,),(3,2,1) \in \mathrm{L}$. כמובן ש-$(-2,1,1)+(3,2,1)=(1,3,2)$ אך

$|1| \neq 2+3$ ולכן $(-2,1,1)+(3,2,1) \notin L$. הקבוצה איננה מרחב לינארי.

ג. הקבוצה $\mathrm{M}=\{\mathrm{p(x)} \in \boldsymbol{R}_4[x] | p(-3)=0\}$ בוודאי תת-קבוצה של המרחב הלינארי $\boldsymbol{R}_4[x]$. בוודאי כי הקבוצה איננה ריקה כי הווקטור 0 שייך לה.

כעת נראה לפי משפט 7.3.2 כי הקבוצה M מהווה תת מרחב לינארי(משמע מרחב לינארי) של $\boldsymbol{R}_4[x]$.

לכל $p_1,p_2 \in M$ בוודאי מתקיים בעקבות טענה 6.7.13

$$(p_1+p_2)(-3)=p_1(-3)+p_2(-3)=0$$

ולכן מתקיים $p_1+p_2 \in M$.

בנוסף לכל $p \in M$ ולכל $\lambda \in \mathbf{R}$ מתקיים:

$$(\lambda p)(-3) = \lambda p(-3) = 0$$

ולכן בוודאי כי $\lambda p \in M$.

בעקבות כל מה שהוצג נקבל כי אכן הקבוצה M תת מרחב לינארי של $\boldsymbol{R}_4[x]$.

ד. הקבוצה S איננה מרחב לינארי. הקבוצה אינה שומרת על סגירות ביחס לפעולת החיבור ונדגים זאת:

ויהי $(1,-1),(1,1) \in S$. כמובן ש-$(2,0) = (1,1) + (1,-1)$ אך $2^2 - 0^2 \neq 0$. ולכן $(1,-1) + (1,1) \notin S$. הקבוצה איננה מרחב לינארי.

ה. $T = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \boldsymbol{R}_4[x] | (a+b-c)^2 + (b+2d)^2 = 0$. הקבוצה איננה ריקה כי הפתרון הטריוויאלי מתקיים. בנוסף בוודאי כי חיבורים של 2 ביטויים אי שליליים שווה ל-0 אם ורק אם 2 הביטויים עצמם שווים לאפס. לכן נקבל כי: $b = -2d$ וגם $a = -b + c \Leftrightarrow a = 2d + c$. ולכן מכאן נובע כי

$$\begin{aligned} T &= \{(2d+c)x^3 - 2dx^2 + cx + d | c,d \in \boldsymbol{R}\} = \{c(x^3+x) + d(2x^3 - 2x^2 + 1) | c,d \in \boldsymbol{R}\} \\ &= Sp\{x^3 + x, 2x^3 - 2x^2 + 1\} \end{aligned}$$

והרי מצאנו קבוצת וקטורים סופית אשר פורשת את T! בעקבות הגדרה 7.5.2 נקבל כי T הינה מרחב לינארי!

שאלה 5:

א. ויהי $v \in (\boldsymbol{Z}_p)^2$, $v \neq (0,0)$. כל וקטור תלוי לינארי ב-v הוא מהצורה sv כאשר $s \in \boldsymbol{Z}_p$. משמע יש p אפשרויות ש-s יכול להיות. לכן יש **p** וקטורים תלויים לינארית ב-v.■

ב. על פי משפט 3.10.6ח' מטריצה נחשבת להפיכה אם עמודותיה הן בלתי תלויות לינארית. בעקבות ידיעה זאת נחשב את כמות המטריצות ההפיכות ב-$M_{2\times2}(\boldsymbol{Z}_p)$ על פי חישוב מספר האפשרויות לעמודה הראשונה והשנייה.
ראשית נתחיל עם העמודה הראשונה. ישנן p^2 עמודות אך רק $p^2 - 1$ אפשריות כיוון שעמודת אפסים אינה יכולה להיות תלויה לינארית בשום מצב.
שנית העמודה השנייה בהכרח חייבת להיות תלויה לינארית בעמודה הראשונה, אם נייצג כל עמודה בתור וקטור נוכל להיעזר בסעיף א' ולגלות כי ישנן p ווקטורי עמודות אשר תלויים לינארית בווקטור העמודה הראשונה, משמע יש $p^2 - p$ שאינם תלויים. ולכן קיימים $(p^2-1)(p^2-p\ ) = p^4 - p^3 - p^2 + p$ מטריצות הפיכות ב-$M_{2\times2}(\boldsymbol{Z}_p)$.■

שאלה 6:

על מנת למצוא קבוצה פורשת עבור $U \cap W$. עלינו למצוא דרך לייצג את האיבר הכללי ב-$U \cap W$.

נשים לב כי לכל $v \in U \cap W$, קיימים סקלרים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}$ והווקטורים $(1,3,4),(2,5,1) \in W$ וגם $(1,1,2),(2,2,1) \in U$. כך ש-:

$v = \lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,2,1) = \lambda_3(1,3,4) + \lambda_4(2,5,1)$ בעקבות כך נקבל כי בהכרח חייב להתקיים $\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,2,1) - \lambda_3(1,3,4) - \lambda_4(2,5,1) = 0$ ובוודאי היה ניתן להציג זאת כ-$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,2,1) + \lambda_3(-1,-3,-4) + \lambda_4(-2,-5,-1) = 0$ כעת באמצעות ייצוג הווקטורים בעמודות של מטריצה הומוגנית נחפש מתי מתקיים פתרון:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

לאחר הדירוג ופתירת המשוואות נקבל כי $\lambda_1 = -\frac{7}{2}\lambda_4, \lambda_2 = 2\lambda_4, \lambda_3 = -\frac{3}{2}\lambda_4$ נציב זאת ונקבל כי: $v = \lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,2,1) = -\frac{7}{2}\lambda_4(1,1,2) + 2\lambda_4(2,2,1)$ לאחר מכן לנוחיות נסמן $\mu = \frac{\lambda_4}{2}$ נציב ונקבל:

$v = -7\mu(1,1,2) + 4\mu(2,2,1) = \mu(-7,-7,-14) + \mu(8,8,4) = \mu(1,1,-10)$ משמע קיבלנו דרך ייצוג של איבר כללי ל-$U \cap W$ וכעת נוכל לרשום את הקבוצה הפורשת כ-

$U \cap W = Sp\{(1,1,-10)\}$. ■