שאלה 1:

א. נוכיח כי S ו-T העתקות לינאריות:

<u>S העתקה לינארית</u>:

נשתמש במשפט 9.1.3 ויהיו $q(x), p(x) \in F_3[x]$ וסקלרים

$\lambda, \kappa, a, b, c, d, e, f \in F$. כך ש-$q(x) = ax^2 + bx + c, p(x) = dx^2 + ex + f$.

$S\big(\lambda q(x) + \kappa p(x)\big) = S\big((\lambda a + \kappa b)x^2 + (\lambda b + \kappa e)x + (\lambda c + \kappa f)\big) =$

$\big((\lambda a + \kappa b)(x+1)^2 + (\lambda b + \kappa e)(x+1) + (\lambda c + \kappa f)\big) =$

$(\lambda a(x+1)^2 + \lambda b(x+1) + \lambda c) + (\kappa d(x+1)^2 + \kappa e(x+1) + \kappa f) =$

$\lambda(a(x+1)^2 + b(x+1) + c) + \kappa(d(x+1)^2 + e(x+1) + f) =$

$\lambda S\big(q(x)\big) + \kappa S(p(x))$

ובכך הוכחנו כי S העתקה לינארית.■

<u>T העתקה לינארית</u>:

נשתמש במשפט 9.1.3 ויהיו $q(x), p(x) \in F_3[x]$ וסקלרים

$\lambda, \kappa, a, b, c, d, e, f \in F$. כך ש-$q(x) = ax^2 + bx + c, p(x) = dx^2 + ex + f$.

$S\big(\lambda q(x) + \kappa p(x)\big) = S\big((\lambda a + \kappa b)x^2 + (\lambda b + \kappa e)x + (\lambda c + \kappa f)\big) =$

$(x-1)\big((\lambda a + \kappa b)x^2 + (\lambda b + \kappa e)x + (\lambda c + \kappa f)\big) =$

$(x-1)(\lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c) + (x-1)(\kappa dx^2 + \kappa ex + \kappa f) =$

$\lambda(x-1)(ax^2 + bx + c) + \kappa(x-1)(dx^2 + ex + f) =$

$\lambda T\big(q(x)\big) + \kappa T(p(x))$

ובכך הוכחנו כי T העתקה לינארית.■

ב. נחשב את $T \circ S(ax^2 + bx + c)$:

$T \circ S(ax^2 + bx + c) = T\big(S(ax^2 + bx + c)\big) =$

$T(a(x+1)^2 + b(x+1) + c) = T(a(x^2 + 2x + 1) + bx + b + c)$

$T(ax^2 + (b+2a)x + a + b + c) = (x-1)(ax^2 + (b+2a)x + a + b + c) =$

$(ax^3 + (b+2a)x^2 + (a+b+c)x - ax^2 - (b+2a)x - a - b - c) =$

$(ax^3 + (b+a)x^2 + (c-a)x - (a+b+c))$

ג. נמצא פולינום $r(x) \in \mathbf{R}_3[x]$ כך ש-$T \circ S\big(r(x)\big) = x^3 - 1$:

בעקבות סעיף ב ידוע לנו כי על מנת ש-$T \circ S\big(r(x)\big) = x^3 - 1$ צריך להתקיים:

$a = 1$

$b + a = 0$

$c - a = 0$

$a + b + c = 1$

מכאן נקבל כי $a=1, b=-1, c=1$. ובעקבות כך נקבל כי $r(x)=x^2-x+1$.

כעת נראה כי $T\circ S$ אינה על. נחפש עבור $p(x)\in \mathbf{R}_3[x]$ כך ש- $T\circ S\big(p(x)\big)=1$.

על מנת ש- $T\circ S\big(p(x)\big)=1$ יתקיים צריך להיות פתרון עבור מערכת המשוואות:

$a=0$

$b+a=0$

$c-a=0$

$a+b+c=-1$

אך כיוון שאם נפתור אותה נקבל כי אין פתרון המסקנה היא שלא קיים $p(x)\in \mathbf{R}_3[x]$ כך ש- $T\circ S\big(p(x)\big)=1$ משמע $T\circ S$ אינה על.

שאלה 2:

א. בעקבות זה שידוע לנו כי המרחבים בטרנספורמציה הלינארית הנ"ל נוצרו סופית ובעלי ממד זהה(3) מספיק לנו להראות שתנאי ג ממסקנה 9.6.2 ($\mathrm{Im}\,T=\mathbf{R}^3$) מתקיים.

נשתמש בלמה 9.3.6 כדי לבדוק האם $\{x^2+2x, x+1, x^2-2\}$ היא תת קבוצה פורשת של $\mathbf{R}^3$ במידה וכן ניקח את תמונות איבריה על מנת למצוא את הקבוצה הפורשת של $\mathrm{Im}\,T$. בדרך כלל היינו משתמשים בווקטורי קורדינטות על מנת לבדוק האם הם פורשים אך כיוון שכאן זה בולט לעין נוכל לראות כי 2 מהפולינומים הם צירוף לינארי של האחר:

$$2(x+1)+(x^2-2)=x^2+2x$$

לכן הקבוצה $\{x^2+2x, x+1, x^2-2\}$ אינה פורשת. ניקח את הפולינומים x^2-2 ואת $x+1$ אשר בוודאי בלתי תלויים לינארית זה לזה ונשתמש בווקטורי הקורדינטות שלהם ביחס לבסיס $E=(x^2,x,1)$ על מנת למצוא פולינום שלישי להוסיף שיחד איתו הקבוצה תפרוש את $\mathbf{R}^3[x]$. $[x+1]_E=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $[x^2-2]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ נייצג במטריצה:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ - & - & -\end{pmatrix}$$

בעקבות משפט 3.10.6 אם מטריצה הפיכה אז שורותיה הן בלתי תלויות לינארית ולכן בעקבות זאת נשלים את המטריצה על מנת שתהיה הפיכה ל-

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ונקבל כי זהו הווקטור $[1]_E=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. משמע הקבוצה $\{x^2-2, x+1, 1\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3[x]$.

לכן כעת עלינו להגדיר את $T(1)$ כך ש- $\mathrm{Sp}\{T(1), T(x^2-2), T(x+1)\}=\mathbf{R}^3$.

בעקבות הנתון ידוע לנו ש- $\{T(x^2-2), T(x+1), T(1)\}=\{(1,0,-1),(0,1,1),T(1)\}$

בוודאי כי 2 הווקטורים אשר ידועים לנו בלתי תלויים לינארית זה לזה ולכן עלינו להגדיר את $T(1)$ כך שכל הקבוצה תהיה בלתי תלויה לינארית(ובעקבות כך תפרוש את $\mathbf{R}^3$)

נייצג את הווקטורים במטריצה ונקבל כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \uparrow \\ 0 & 1 & T(1) \\ -1 & 1 & \downarrow \end{pmatrix}$$

נשלים את המטריצה כך שתהיה הפיכה(ובעקבות כך לפי משפט 3.10.6 עמודותיה יהיו בלתי תלויות לינארית):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ובעקבות כך נקבל כי $T(1) = (0,0,1)$.

כלומר כאשר $T(1) = (0,0,1)$ נקבל:

$$Sp(\{x^2 - 2, x + 1, 1\}) = \mathbf{R}_3[x] \Longrightarrow$$

$$Sp\{(T(x^2 - 2), T(x + 1), T(1))\} = Sp\{((1,0,-1), (0,1,1), (0,0,1))\} = \mathbf{R}^3$$

ולכן בעקבות מסקנה 9.6.2 נקבל כי T היא איזומורפיזם.■

ב. כיוון שנתון כי הממד של V סופי ו-S טרנספורמציה לינארית אשר מקיימת $\ker S = \{0\}$ נקבל בעקבות מסקנה 9.6.2 כי $\operatorname{Im} S = V$. משמע S על. כלומר לכל $\underline{u} \in V$ מוגדר $\underline{v} \in V$ כך ש-$S(\underline{v}) = \underline{u}$ $\underline{*}$. בעקבות זאת נקבל כי

$$TS(V) = \operatorname{Im} TS \overset{\text{def}}{=} \{T \circ S(\underline{v}) | \underline{v} \in V\} = \left\{T\left(S(\underline{v})\right) | \underline{v} \in V\right\} \overset{*}{=} \{T(\underline{u}) | \underline{u} \in V\} = \operatorname{Im} T$$

ולכן $\operatorname{Im} TS = \operatorname{Im} T$.■

שאלה 3:

א. נתון כי לכל $\underline{v} \in \mathbf{R}^5$ מתקיים $T^2 = T\left(T(\underline{v})\right) = 0$ משמע לכל $\underline{u} \in \operatorname{Im} T$ אנו מקבלים כי $T(\underline{u}) = 0$. ולכן $\underline{u} \in \operatorname{Ker} T$ ובעקבות הגדרת ההכלה מתקבל כי $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$.

ב. בעקבות משפט 9.6.1 נקבל כי $\dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 5$ לכן בהכרח $\dim(\operatorname{Ker} T) \leq 5$. ידוע לנו מסעיף א כי $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Ker} T$ לכן בעקבות 8.3.4 נקבל כי $\dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim(\operatorname{Ker} T)$. בוודאי כי ראינו שהחיבור של שניהם נותן לנו 5 וכיוון כי הממד הוא מספר שלם טבעי בהכרח $\dim(\operatorname{Ker} T) \geq 3$ אחרת נקבל סתירה לעובדה ש-$\dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim(\operatorname{Ker} T)$. (לדוגמה אם $\dim(\operatorname{Ker} T) = 2$ בהכרח $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$ בסתירה לכך ש-$\dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim(\operatorname{Ker} T)$) ולכן נקבל כי האפשרויות עבור הממד של $\ker T$ הן $3 \leq \dim(\operatorname{Ker} T) \leq 5$.

ג. יהי U תת מרחב של $\mathbf{R}^5$ כך ש-$\operatorname{Dim} U = 3$. בעקבות משפט 8.3.6 נקבל כי

$$\dim(\operatorname{Ker} T + U) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim U - \dim(\operatorname{Ker} T \cap U)$$

$\text{Ker T} + \text{U}$ תת מרחב של $\mathbf{R}^5$ של ולכן $\dim(\text{Ker T} + \text{U}) \le 5$. ובעקבות כך נקבל כי

$\dim(\text{Ker T}) + \dim \text{U} - \dim(\text{Ker T} \cap \text{U}) \le 5$ ידוע כי $\dim \text{U} = 3$ ובנוסף כי

$3 \le \dim(\text{Ker T})$ משמע

$$3 + 3 - \dim(\text{Ker T} \cap \text{U}) \le 5 \Longrightarrow \dim(\text{Ker T} \cap \text{U}) \ge 1$$

ובעקבות כך בהכרח מתקבל כי $\text{Ker T} \cap \text{U} = \{\underline{0}\}$.

שאלה 4:

א. נתון לנו כי לכל $v \in \mathbf{R}^3$ מתקיים $\text{T(v)} \neq (0,4,2)$ משמע $[\text{T(v)}]_\text{B} \neq [(0,4,2)]_\text{B}$

ובעקבות משפט 10.2.1 נקבל גם כי $[\text{T}]_\text{B}[\text{v}]_\text{B} \neq [(0,4,2)]_\text{B}$. נסמן $[\text{v}]_\text{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ כאשר

$x, y, z \in \boldsymbol{R}$. ובנוסף $[(0,4,2)]_\text{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ נציב ונקבל כי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 5 & a & 13-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ y+az \\ 5x+ay+(13-2a)z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ניתן לייצג אי שוויון זה בתור מערכת המשוואות

$$x + z \neq 1, \text{y} + \text{az} \neq -1, 5\text{x} + \text{ay} + (13 - 2\text{a})\text{z} \neq 3$$

כעת על מנת לפתור אותה נציג הכל במטריצה אחת ונחפש עבור איזה ערכים של a

למטריצה המציגה את

$$x + z = 1, \qquad \text{y} + \text{az} = -1, \qquad 5\text{x} + \text{ay} + (13 - 2\text{a})\text{z} = 3$$

אין פתרון:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 5 & a & 13-2a & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - aR_2]{R_3 \to R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -a^2+8-2a & a-2 \end{array}\right]$$

על מנת שלא יהיה פתרון עלינו לבדוק מתי השורה השלישית היא שורת סתירה. השורה השלישית היא שורת סתירה כאשר מתקיים $-a^2 - 2a + 8 = 0 \wedge a - 2 \neq 0$. דבר זה מתקיים אך ורק כאשר $a = -4$. והרי מצאנו את ארכו של a.

ב. ויהי $\text{p(x)} \in \ker \text{T} \iff \text{T}(\text{p(x)}) = 0 \iff [\text{T}(\text{p(x)})]_\text{B} = [0]_\text{B} \overset{10.2.1}{\Updownarrow}$

$$[\text{T}]_\text{B}[\text{p(x)}]_\text{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow [\text{p(x)}]_\text{B} = \overset{\text{מרחב פתרונות}}{\text{P}([\text{T}]_\text{B})}$$

נפתור:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-4\\5&-4&21\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+4R_2]{R_3\to R_3-5R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

נקבל כי $\mathrm{P}([\mathrm{T}]_{\mathrm{B}})=\{(-\mathrm{t},4\mathrm{t},\mathrm{t})|\mathrm{t}\in\mathbf{R}\}=\mathrm{Sp}\{(-1,4,1)\}$. ומכאן נובע כי $\ker \mathrm{T}=\mathrm{Sp}\{(3,0,5)\}$ ולכן $(3,0,5)$ בסיס ל-$\ker \mathrm{T}$.

כיוון שידוע לנו כי B הינה בסיס משמע הווקטורים שלה בלתי תלויים לינארית ופורשים את $\mathbf{R}^3$ נקבל בעקבות למה 9.3.6 כי $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}=\mathrm{Sp}(\mathrm{B})$. נשים לב כי איברי B אלו ווקטורי העמודות של $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}$ לכן עלינו למצוא בסיס למרחב העמודות של $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}$. משמע לדרג את $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{t}}$.

נפתור:

$$\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&-4\\1&-4&21\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+4R_2]{R_3\to R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}$$

נקבל כי

$$[\underline{\mathrm{v}}]_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\mathrm{v}}=(1,6,5),\ [\underline{\mathrm{u}}]_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\mathrm{u}}=(1,-4,-3)$$

משמע $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}=\mathrm{Sp}\{(1,6,5),(1,-4,-3)\}$ לכן $\big((1,6,5),(1,-4,-3)\big)$ בסיס ל-$\mathrm{Im}\,\mathrm{T}$.

ג. על מנת למצוא את המטריצה $[T]_E$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$ ראשית נמצא את $\mathrm{T}(e_1),T(e_2),T(e_3)$:

$$[T]_B[e_1]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-4\\5&-4&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{2}\\-10\end{pmatrix}=[T(e_1)]_B\Rightarrow T(e_1)=(\frac{5}{2},-10,-\frac{15}{2})$$

$$[T]_B[e_2]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-4\\5&-4&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{2}\\15\end{pmatrix}=[T(e_2)]_B\Rightarrow T(e_2)=(-\frac{3}{2},16,\frac{25}{2})$$

$$[T]_B[e_3]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-4\\5&-4&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\6\end{pmatrix}=[T(e_3)]_B\Rightarrow T(e_3)=(-\frac{3}{2},6,\frac{9}{2})$$

ובכך נקבל כי:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ [T(e_1)]_E&[T(e_2)]_E&[T(e_3)]_E\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2&-3/2&-3/2\\-10&16&6\\-15/2&25/2&9/2\end{pmatrix}.$$

כעת על מנת לחשב את $\mathrm{T}(x,y,z)$ עבור כל (x,y,z) ב-$\mathbf{R}^3$ נפעל על פי משפט 10.2.1 ונקבל ש-:

$$[T(x,y,z)]_E = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & -3/2 \\ -10 & 16 & 6 \\ -15/2 & 25/2 & 9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5x-3y-3z) \\ -10x+16y+6z \\ \frac{1}{2}(-15x+25y+9z) \end{pmatrix}$$

ומכאן בקלות נוכל להסיק אשר

$$\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\frac{1}{2}(5x-3y-3z), -10x+16y+6z, \frac{1}{2}(-15x+25y+9z))$$

שאלה 5:

א. על מנת למצוא את הבסיס B של $\mathbf{R}^2$ נעזר בזה שנתון לנו כי $[\mathrm{T}]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. נסמן $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$ $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2 \in \mathbf{R}^2$, בעקבות משפט 10.1.1 נקבל כי:

$$[\mathrm{T}]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathrm{T}(\mathrm{b}_1)]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, [\mathrm{T}(\mathrm{b}_1)]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{T}(\mathrm{b}_1) = \mathrm{b}_1 + 2\mathrm{b}_2, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{b}_2) = \mathrm{b}_2$$

נשים לב כי מתקיים $\mathrm{T}(\mathrm{e}_1) = (1,0) = \mathrm{e}_1$ לכן $\mathrm{b}_2 = \mathrm{e}_1$. ובנוסף $\mathrm{T}(\mathrm{e}_2) = (2,1) = 2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$ לכן נוכל לרשום $\mathrm{b}_1 = \mathrm{e}_2$. ובכך נקבל כי $\mathrm{B} = (\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1)$.

ב. בוודאי שניתן בקלות להסיק כי המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ דומות כיוון שממבט מהיר ניתן לראות כי $[\mathrm{T}]_\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומסעיף א' ידוע כי $[\mathrm{T}]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ לכן בעקבות משפט 10.7.2 נקבל כי המטריצות דומות.

שאלה 6:

ראשית נוכיח כי T איזומורפיזם. על מנת להוכיח זאת מספיק להראות כי תנאי ב' במסקנה 9.6.2 מתקיים.

ויהי $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \ker \mathrm{T}$. כאשר $\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathbf{R}$. נקבל כי

$$\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\mathrm{x}-2\mathrm{z}, 2\mathrm{x}-\mathrm{y}+3\mathrm{z}, 4\mathrm{x}+\mathrm{y}+8\mathrm{z}) \overset{\text{גרעין}}{=} (0,0,0)$$

בעקבות כך נקבל את מערכת משוואות:

$$\mathrm{x} - 2\mathrm{z} = 0$$

$$2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\mathrm{z} = 0$$

$$4\mathrm{x} + \mathrm{y} + 8\mathrm{z} = 0$$

נפתור את המשוואה ונקבל כי $\mathrm{x} = \mathrm{y} = \mathrm{z} = 0$. משמע קיים איבר יחיד אשר שייך לגרעין והוא $(0,0,0) \in \ker \mathrm{T}$. T איזומורפיזם.

כיוון ש-$[T^{-1}]_E = [T]_E^{-1}$ (בעקבות משפט 10.5.1) נחפש פשוט את המטריצה ההופכית באמצעות דירוג $([T]_E|I)$.

בוודאי כי $E = (e_1, e_2, e_3)$ בסיס ל-$\mathbf{R}^3$. כעת נבדוק מה הם התמונות של כל אחד מן האיברים בתור ייצוג של ווקטורי קורדינטות :

$$[T(1)]_E = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, [T(x)]_E = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, [T(x^2)]_E = \begin{pmatrix}-2\\3\\8\end{pmatrix}$$

$$\left([T]_E \mid I\right) = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[R_3\to R_3-4R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 16 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to\frac{1}{23}R_3]{R_3\to R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2\to -R_2\\ R_1\to R_1+2R_3}]{R_2\to R_2-7R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{11}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{23} & \frac{-16}{23} & \frac{7}{23}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23}\end{array}\right] = \left(I \mid ([T]_E)^{-1}\right)$$

בעקבות כך נקבל כי $\begin{bmatrix}\frac{11}{23} & \frac{2}{23} & \frac{2}{23}\\ \frac{18}{23} & \frac{-16}{23} & \frac{7}{23}\\ \frac{-6}{23} & \frac{1}{23} & \frac{1}{23}\end{bmatrix} = ([T]_E)^{-1}$. משמע כי

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{23}(11 + 2y + 2z, 18x - 16y + 7z, -6x + y + z) ■$$