שאלה 2:

א. נפתור ב-$\boldsymbol{Z_5}$ את המשוואה $3x+4=\frac{1}{2}$:

$$3x+4=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x=1*2^{-1}+(-4) \quad \Leftrightarrow \quad 3x=1*3+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{4}{3} \quad \leftrightarrow \quad x=4*3^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x=4*2 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$$

הפתרון היחיד למשוואה הוא $x=3$.

ב. נפתור ב-$\boldsymbol{Z_{11}}$ את המשוואה $3x^2-2x+1=0$:

בעקבות הכתוב בפורום, עלינו "לבצע" על משוואה זאת את נוסחת השורשים כאשר במקום השורש נחפש אם יש ב-$\boldsymbol{Z_{11}}$ איבר שהריבוע שלו נותן לנו את הדיסקרימיננטה Δ של המשוואה, במידה ונמצא אז בוודאי כי יש למשוואה פתרונות אשר נקבל באמצעות שימוש בנוסחה.

ראשית נחשב את הדיסקרימיננטה של המשוואה ונקבל כי

$$\Delta=(-2)^2+(-4)*3*1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta=9^2+7*3 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta=3$$

עלינו לבדוק האם קיים איבר $t\in \boldsymbol{Z_{11}}$ כך ש-$t^2=3$, נחפש ונגלה כי אכן קיים איבר שכזה והוא 5, נראה זאת: $5^2=5*5=3$.

כעת נחשב את הפתרונות למשוואה באמצעות המשך נוסחת השורשים:

$$x_1=\frac{-(-2)+5}{2*3} \xleftrightarrow{-(-2)=2,\text{שאלה 1.2.4א}} x_1=\frac{7}{6} \quad \leftrightarrow \quad x_1=7*6^{-1} \xleftrightarrow{6^{-1}=2} x_1=3$$

$$x_2=\frac{-(-2)-5}{2*3} \xleftrightarrow{-(-2)=2,\ \ -5=6} x_2=\frac{8}{6} \quad \leftrightarrow \quad x_2=8*6^{-1} \xleftrightarrow{6^{-1}=2} x_2=5$$

ומכאן נקבל כי ישנם 2 פתרונות למשוואה והם $x_1=3, x_2=5$.

שאלה 3:

א. נפתור את המערכת ב- $\boldsymbol{Z_7}$ באמצעות שימוש במטריצה המתאימה לה.

*נציין כי בכל מקום אשר היה אשר נגדי הצבנו את האיבר המתאים לו, לדוגמה במקום 1- הצבנו 6(ובכך המערכת נשארה אותו דבר):

$$\begin{matrix} 2x-y+4z=1 & & 2x+6y+4z=1 \\ x+2y-3z=6 & \leftrightarrow & x+2y+4z=6 \\ x-y+z=3 & & x+6y+z=3 \end{matrix}$$

ולכן המטריצה אשר מייצגת את המערכת הימנית שקולה לייצוג של המערכת השמאלית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_1]{R_2 \to R_2 + 6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to 2R_2]{R_3 \to R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + 5R_2 \\ R_1 \to R_1 + 3R_3}]{R_2 \to R_2 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

המטריצה שקיבלנו היא מדורגת קנונית ומספר האיברים הפותחים(כלומר כמות המשתנים הקשורים) בה שווה ערך למספר המשוואות ולכן קיים פתרון יחיד(בעקבות משפט 1.12.2א) ופתרון זה הוא $(2,0,1)$.

ב. נפתור את המערכת ב-$\boldsymbol{R}$ באמצעות שימוש במטריצה מצומצמת(ניתן להשתמש במטריצה מצומצמת כי המערכת היא הומוגנית) המתאימה לה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 3 & 3 & 13 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + -R_1]{R_2 \to R_2 + -R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 & 18 \\ 1 & 1 & -5 & 12 & -13 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2}R_3]{R_1 \to R_1 + -2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 & -23 & 44 \\ 1 & 1 & -5 & 12 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + -9R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \\ 1 & 1 & -5 & 12 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + -12R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}]{R_1 \to -\frac{1}{14}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 5R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 5R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי y הינו משתנה חופשי ולכן בעקבות זה ובעקבות משפט 1.12.2 נקבל כי יש אינסוף פתרונות, על מנת לרשום אותם בכלליות נרשום את המערכת השקולה למטריצה המדורגת הקנונית המצומצמת שקיבלנו:

$x + y - 12t = 0$

$z + 5t = 0$

$w + 2t = 0$

כאשר $a,b\in \boldsymbol{R}$ נסמן t = a, y = b ונקבל כי ההצגה הכללית לפתרון של המערכת היא $(-b+12a,b,-5a,-2a,a)$.

נראה כי זה אכן מתקיים

$$2x+2y+8z+w+18t=2(-b+12a)+2b+\ -40a-2a+18a=0$$

$$3x+3y+3z+13w+5t=3(-b+12a)+3b-15a-26a+5a=0$$

$$2x+2y+4z+3w+2t=2(-b+12a)+2b-20a-6a+2a=0$$

אכן הראנו כי הפתרון הכללי מתקיים לכל מקרה כאשר a ו-b הינם מספרים ממשיים.

שאלה 4:

לפני שנוכל להסיק מסקנות ולמצוא ערכים מסוימים היניבו את התוצאות שברצוננו לקבל, נדרג את המטריצה השקולה למערכת המשוואות הנתונה ובאמצעות המטריצה נוכל להסיק את המסקנות הנדרשות.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 2-t \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+-aR_1]{R_2\to R_2+-aR_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 2-t-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_3\to R_3+-R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & -t-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{pmatrix}$$

א. במטריצה שלנו יש 3 משתני מערכת ולכן על מנת שיהיה פתרון יחיד צריך ששלושתם יהיו קשורים ובכך נקבל פתרון יחיד (על פי משפט 1.122א יש פתרון יחיד אם ורק אם **כל** משתני המערכת קשורים). על מנת שכל משתני המערכת יהיו קשורים בהכרח חייב להתקיים $1-a\neq 0$ וגם $3a-a^2\neq 0$ וזה מתקיים אם ורק אם $\boldsymbol{a\neq 1,3,0}$ ובכך נקבל מטריצה אשר בה כל משתני המערכת הם קשורים משמע פתרון יחיד.

ב. על פי משפט 1.12.2ב כיוון ש-$\mathbf{R}$ שדה אינסופי על מנת לקבל אינסוף פתרונות חייב להיות במערכת **לפחות** משתנה חופשי אחד.

לפי סעיף א ראינו כי כאשר $a\neq 1,3,0$ מתקבלת מערכת בה כל המשתנים קשורים. לכן נציב את הערכים 1,3,0 ב-a במטריצה המדורגת אשר מייצגת את המערכת ולפי התוצאות נסיק:

כאשר $a=1$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{R_3}$ שורת סתירה! אין פתרון וזאת לא התוצאה בה אנו מעוניינים.

כאשר $a = 3$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -t-3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$$

כעת אכן קיים משתנה חופשי אך על מנת שיהיה אינסוף פתרונות למערכת ולא תיווצר שורת סתירה חייב בהכרח להיות $-t - 3 = 0$ משמע $t = -3$.

ולכן כאשר $\boldsymbol{a = 3}$ **וגם** $\boldsymbol{t = -3}$ **קיימים אינסוף פתרונות**.

נציב את $t = -3$ במטריצה ואז נעבור חזרה למערכת משוואות על מנת למצוא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 3y + z = 1$$
$$-2z = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$z = -1$$
$$x + 3y - 1 = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2 - 3y$$

נסמן $\boldsymbol{s \in R}$, $y = s$ ונסמן את **הפתרון הכללי:** $\boldsymbol{(2 - 3s, s, -1)}$.

כאשר $a = 0$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

כמו לפני, אכן קיים משתנה חופשי אך על מנת שיהיה אינסוף פתרונות למערכת ולא תיווצר שורת סתירה חייב בהכרח להיות $-t = 0$ וזה בוודאי אומר כי $t = 0$.

ולכן כאשר $\boldsymbol{a = 0}$ **וגם** $\boldsymbol{t = 0}$ **קיימים אינסוף פתרונות**.

נציב את $t = 0$ במטריצה ואז נעבור חזרה למערכת משוואות על מנת למצוא את הפתרון הכללי :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + z = 1$$
$$z = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 2 = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -1$$

נסמן $s \in \boldsymbol{R}$, $y = s$ ונסמן את הפתרון הכללי : $(-1, s, 2)$

לאחר כל הצבת המקרים הגענו למקרים הבאים :

<u>מקרים בהם יש אינסוף פתרונות</u>

כאשר $a = 0$ וגם $t = 0$ והמקרה הכללי הוא $(-1, s, 2)$

כאשר $a = 3$ וגם $t = -3$ והמקרה הכללי הוא $(2 - 3s, s, -1)$

ג. בעקבות סעיפים א׳ ו-ב׳ ראינו כי מתקיימות שורות סתירה – משמע אין פתרון כאשר :

$a = 0$ וגם $t \neq 0$

$a = 3$ וגם $t \neq -3$

$\mathrm{a} = 1$

שאלה 5 :

א. הקבוצה A היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם **אין** ל-**0** הצגה כצירוף לינארי **לא-טריוויאלי** של איברי הקבוצה. כלומר קיימת הצגה אחת(פתרון אחד) והיא ההצגה הטריוויאלית(כאשר כל מקדמי הצירוף הם אפס), לכן בעקבות הגדרה זאת ולפי משפט 2.5.3 נייצג את הווקטורים של A ואת **0** במטריצה(אשר כמובן תהיה מצומצמת כי כל העמודה האחרונה היא עמודת אפסים/מערכת הומוגנית), נדרג אותה ונראה לאיזה ערכי λ מתקיים מצב בו יש פתרון יחיד(כל משתני המערכת קשורים).

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + -R_1 \\ R_2 \to R_2 + -R_3}]{R_3 \to R_3 + -\lambda R_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

בקלות ניתן לראות כי על מנת שכל משתני המערכת יהיו קשורים בהכרח חייב להתקיים $-\lambda \neq 0$ וגם $-1 - \lambda \neq 0$ כלומר $\lambda \neq 0$ וגם $\lambda \neq -1$.

לכן במקרים אלו קיים רק פתרון יחיד למערכת והוא – הפתרון הטריוויאלי.

משמע נקבל כי כאשר $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ **וגם** $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$ הקבוצה A **בתלוי תלויה לינארית**.

ב. כעת נשלים את הקבוצה לקבוצה פורשת של $\boldsymbol{R}^3$ כאשר הקבוצה תלויה לינארית.

כאשר $\lambda = 0$ נקבל כי $\mathrm{A} = \{(1,1,0), (0,-1,0), (1,0,0)\}$.

נשים לב שהווקטור $(1,0,0)$ הוא בעצם הווקטור הסטנדרטי e_1 של $\boldsymbol{R}^3$ ובנוסף הווקטור $(0,-1,0)$ פרופורציונלי לווקטור e_2 של $\boldsymbol{R}^3$ $(-1(0,-1,0) = (0,1,0))$ ולכן כיוון שידוע לנו בעקבות הקדמה 2.7 כי איברי הבסיס הסטנדרטי של $\boldsymbol{R}^3$ פורשים את $\boldsymbol{R}^3$ כל מה שעלינו לעשות הוא להוסיף את האיבר הסטנדרטי היחידי שלא נמצא ולא פרופורציונאלי לאף אחד מאיברי קבוצת A והוא e_3 ולכן נשלים באמצעותו ונקבל ש-

$\{(1,1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$ מכילה את איברי הבסיס הסטנדרטי של $\boldsymbol{R}^3$ אשר פורשים את $\boldsymbol{R}^3$ ולכן היא בעצמה פורשת את $\boldsymbol{R}^3$.

כאשר $\lambda = -1$ נקבל כי $\mathrm{A} = \{(1,1,-1), (-1,-1,1), (1,1,0)\}$.

הווקטורים $(1,1,-1), (1,1,0)$ לא פרופורציונאליים משמע בלתי תלויים לינארית.

ולכן נוסיף וקטור נוסף על מנת לקבל שלושה ווקטורים בשדה $\boldsymbol{R}^3$ אשר הינם בלתי תלויים לינארית. נצרף את הווקטור $(0,1,0)$. כעת נראה באמצעות מטריצה מצומצמת הומוגנית(כי מחפשים פתרון ל-**0**) כי קיים פתרון יחיד ל-**0** – הפתרון הטריוויאלי.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_3 \to R_3 + -R_3}]{R_2 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אכן קיים פתרון יחיד(כל משתני המערכת קשורים) וזה הפתרון הטריוויאלי, הווקטורים $(1,1,-1), (1,1,0), (0,1,0)$ בלתי תלויים לינארית.

לאחר שהראנו כי הווקטורים $(1,1,-1), (1,1,0), (0,1,0)$ בלתי תלויים לינארית, נקבל גם בעקבות משפט 2.7.8 כי הם פורשים את $\boldsymbol{R}^3$ ולכן

$\{(1,1,-1), (-1,-1,1), (1,1,0), (0,1,0)\}$ פורשת את $\boldsymbol{R}^3$.

ג. על מנת לדעת עבור איזה ערכי λ הווקטור v הוא צירוף לינארי של ווקטורי A נשתמש במשפט 2.5.3 ונציג את הווקטורים במטריצה, נדרג אותה ונחפש עבור איזה ערכי λ קיימים פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 & \lambda^2-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + -\lambda R_1]{R_2 \to R_2 + -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda & -\lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \end{array}\right)$$

קיים פתרון יחיד כאשר כל המשתנים של המערכת קשורים כלומר כאשר $-\lambda \neq 0$ וגם $-1-\lambda \neq 0$. ובנוסף קיימים אינסוף פתרונות כאשר קיים לפחות משתנה חופשי אחד כלומר כאשר $-\lambda = 0$ או $-1-\lambda = 0$. לכן בעקבות זאת נציב את 1- ואת 0 ב-λ במטריצה ונראה מה נקבל.

כאשר $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ישנם 2 משתנים של המערכת אשר קשורים ואחד חופשי לכן קיימים אינסוף פתרונות כאשר $\lambda = -1$!

כאשר $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

מתקבלת שורת סתירה! כאשר $\lambda = 0$ מתקבל כי אין פתרון למערכת.

לכן עבור כל $\lambda \neq 0$ הווקטור v הוא צירוף לינארי של ווקטורי A.

שאלה 6:

א. לווקטורים $u_1, \ldots, u_k$ קיימים סקלרים $s_1, \ldots, s_k$ אשר מקיימים

$s_1u_1 + \ldots + s_ku_k = \mathbf{0}$, נציב את זה בצירוף הלינארי מהנתון

$x_1u_1 + \ldots + x_ku_k = v$(כאשר $x_1, x_2, \ldots, x_k$ סקלרים ו-v וקטור) ונקבל כי:

$$(x_1u_1 + \ldots + x_ku_k) + (s_1u_1 + \ldots + s_ku_k) =$$

$$(x_1+s_1)u_1 + (x_2+s_2)u_2 + \cdots + (x_k+s_k)u_k = v + \mathbf{0} = v$$

לפי הנתון קיימת הצגה אחת יחידה של הווקטורים $u_1, \ldots, u_k$ בתור צירוף לינארי של v לכן נקבל בהכרח לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים כי $x_i + s_i = x_i$ משמע $s_i = 0$.

ובעקבות כך קיבלנו כי מן השוויון $s_1u_1+s_2u_2+\ldots+s_ku_k=\mathbf{0}$ נובע בהכרח כי $s_1=s_2=\ldots=s_k=0$, ולכן על פי מה שהראנו והגדרה 2.6.1 נקבל כי הווקטורים $u_1,\ldots,u_k$ בלתי תלויים לינארית.

ב. בעקבות סעיף א ידוע לנו כי הווקטורים $u_1,\ldots,u_k$ הם בלתי תלויים לינארית ב-$\boldsymbol{R}^n$ לכן בעקבות זאת ובעקבות מסקנה 2.6.7 נקבל כי $k\le n$.

נניח בשלילה כי $k=n$ לכן בהכרח נקבל בעקבות משפט 2.7.8 כי הווקטורים $u_1,\ldots,u_k$ פורשים את $\boldsymbol{R}^n$, אך זוהי סתירה! הנחת השאלה אומרת כי קיים וקטור $w\in\boldsymbol{R}^n$ כך שלמשוואה $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_ku_k=w$ **אין פתרון**! משמע $u_1,\ldots,u_k$ לא יכולים לפרוש את $\boldsymbol{R}^n$ ולכן בהכרח מתקיים $k<n$.

ג. לקבוצת הווקטורים $\{u_1,\ldots,u_k,w\}$ קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_{k+1}$ אשר מקיימים $s_1u_1+\ldots+s_ku_k+s_{k+1}w=\mathbf{0}$ כעת נחלק זאת ל-2 מקרים.

1. המקרה בו $s_{k+1}=0$.

נקבל כי:

$$s_1u_1+\ldots+s_ku_k+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$
$$s_1u_1+\ldots+s_ku_k=\mathbf{0}$$

בעקבות סעיף א' אנחנו יודעים כי לביטוי זה הפתרון היחידי שקיים הוא הפתרון הטריוויאלי ולכן בעקבות זאת ובעקבות הגדרה 2.6.1 $\{u_1,\ldots,u_k,w\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית.

2. המקרה בו $s_{k+1}\neq 0$.

נקבל כי:

$$s_1u_1+\cdots+s_ku_k+s_{k+1}w=\mathbf{0}$$
$$s_1u_1+\ldots+s_ku_k=-s_{k+1}w$$

נחלק את המשוואה ב-$-s_{k+1}$ ונקבל כי

$$-\frac{s_1u_1}{s_{k+1}}-\ldots-\frac{s_ku_k}{s_{k+1}}=w$$

נסמן לכל $1\le i\le k$ $t_i=-\frac{s_iu_i}{s_{k+1}}$ ונקבל כי $t_1u_1+\ldots+t_ku_k=w$

סתירה! על פי הנתון למשוואה זאת אין פתרון ולכן בהכרח $s_{k+1}=0$.

בעקבות זאת לפי מקרה 1 וזה שהראנו כי מקרה 2 אינו יכול להתקיים נקבל כי בהכרח $\{u_1,\ldots,u_k,w\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית.