2直線の交点を通る直線の方程式

$ax+by+c=0$ と $dx+ey+f=0$ の交点を通る直線の方程式は

定数kを用いて

$k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$ とかける.

例1

$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ の交点をトール直線の方程式は定数 kを用いて

$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0$ とかける. …①

これが$(0,3)$をトールので

$k(0+2\cdot3-4)+(0-3-1)=0$

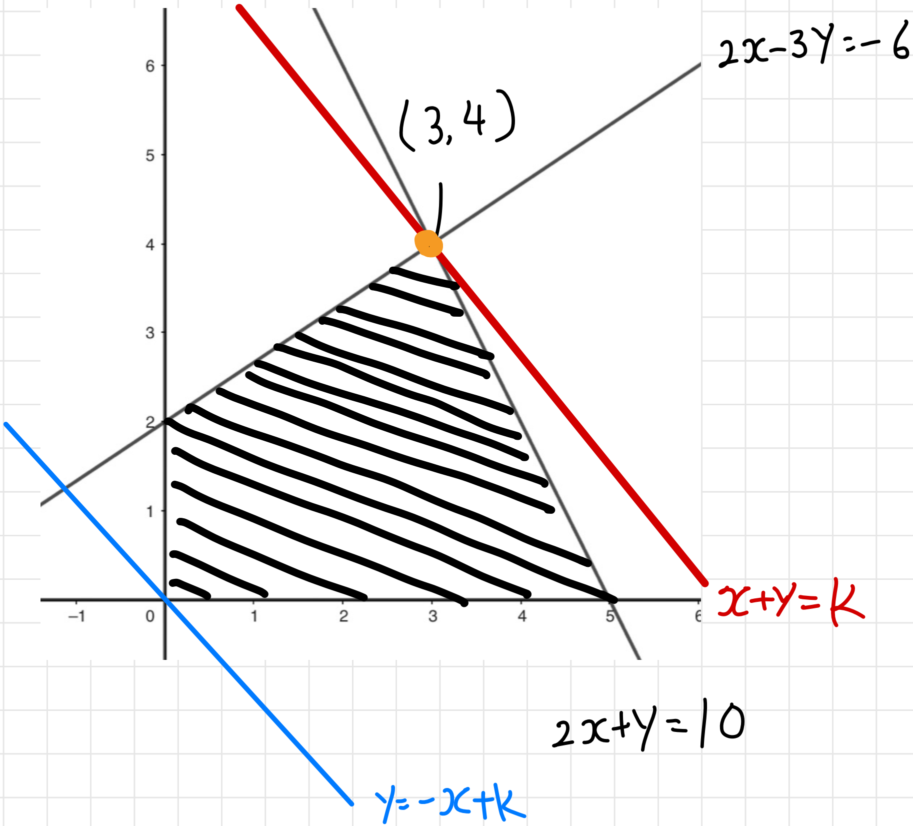
$2k-4=0 \Longleftrightarrow k=2$

$k=2$ を①の方程式に代入すると $\rightarrow 2(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \Rightarrow 3x+3y-9=0$

$\therefore \quad x+y-3=0$

練習 41 x, y が4つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $2x+y \leqq 10$, $2x-3y \geqq -6$ を同時に満たすとき, $x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。

4つの不等式の共通範囲は下図.



$x+y=k$ とすると,

$y=-x+k$.

これは傾き -1, 切片 k の直線

領域内で $y=-x+k$ を動かしたとき

y 切片 k の値の最大値, 最小値が

$x+y$ の最大値, 最小値になる.

$y=-x+k$ が原点 $(0, 0)$ を通るとき

k は最小となるので $x+y$ も最小 (左図青線)

$y=-x+k$ が $(3, 4)$ を通るとき

k は最大となるので $x+y$ も最大 (左図赤線)

$\therefore$ $x=0, y=0$ のとき $x+y$ の最小値 0

$x=3, y=4$ のとき $x+y$ の最大値 7

前項の黄の点が $(3,4)$ となる理由.

黄の点は, $2x-3y=-6$ と $2x+y=10$ の交点なので
連立方程式

$$\begin{cases} 2x-3y=-6 \\ 2x+y=10 \end{cases}$$ を解けばよい.

236 x, y が 3 つの不等式 $x+y-3 \geqq 0$, $2x-3y+4 \geqq 0$, $3x-2y-4 \leqq 0$ を同時に満たすとき，$4x+5y$ の最大値，最小値を求めよ。 例題 55

領域は右図（境界線を含む）

$4x+5y=k$ とする.

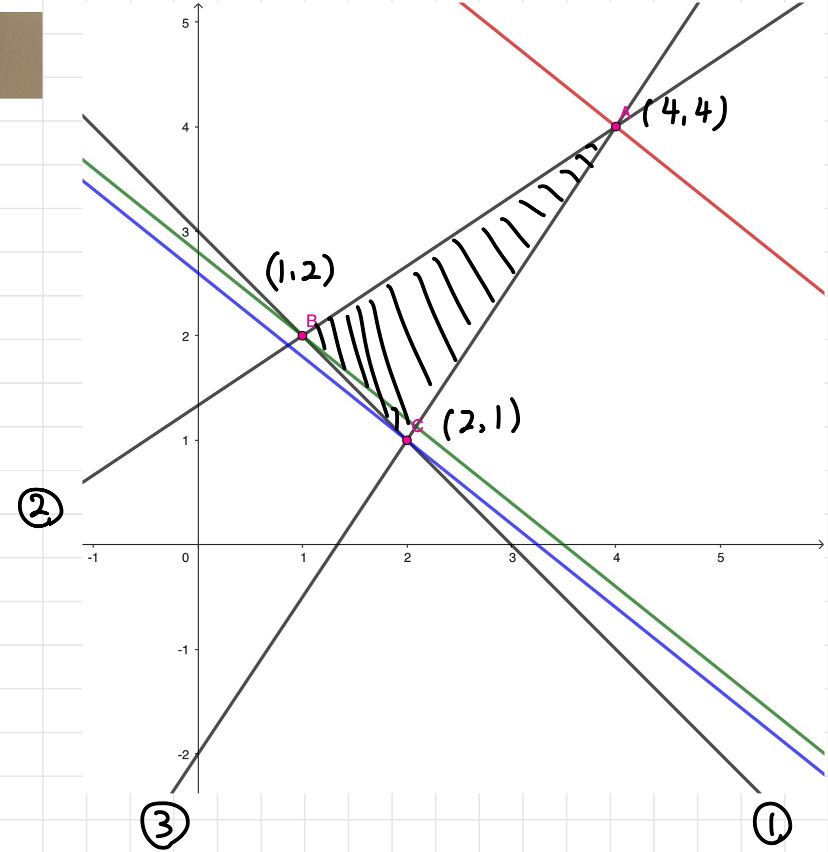
$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{k}{5} \quad \cdots (ア)$$

(ア)が点 A (4, 4) を通るとき k は最大

(ア)が点 C (2, 1) を通るとき k は最小

∴ $x=4$, $y=4$ のとき $x+y$ の最大値 36

$x=2$, $y=1$ のとき $x+y$ の最小値 13



$\boxed{2}$ 2つの円 $C_1 : x^2+y^2+8x-6y+21=0$

$C_2 : x^2+y^2=k$

と直線 $\ell : x+2y-3=0$

について，次の問いに答えなさい。ただし，kは正の定数とする。

(1) 円 C_1 の

中心の座標は $(\boxed{アイ}, \boxed{ウ})$，半径は $\boxed{エ}$

である。

$$x^2+y^2+8x-6y+21=0$$

$$(x+4)^2-16+(y-3)^2-9+21=0$$

$$(x+4)^2+(y-3)^2=4$$

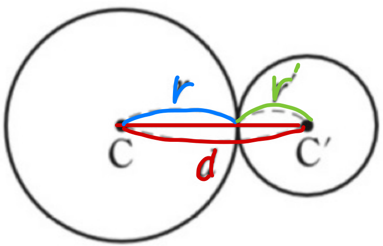
中心 $(-4, 3)$ 半径 2

(2) 円 C_1 と円 C_2 が異なる 2 点で交わるとき，定数 k のとり得る値の範囲は

$\boxed{オ} < k < \boxed{カ}\boxed{キ}$

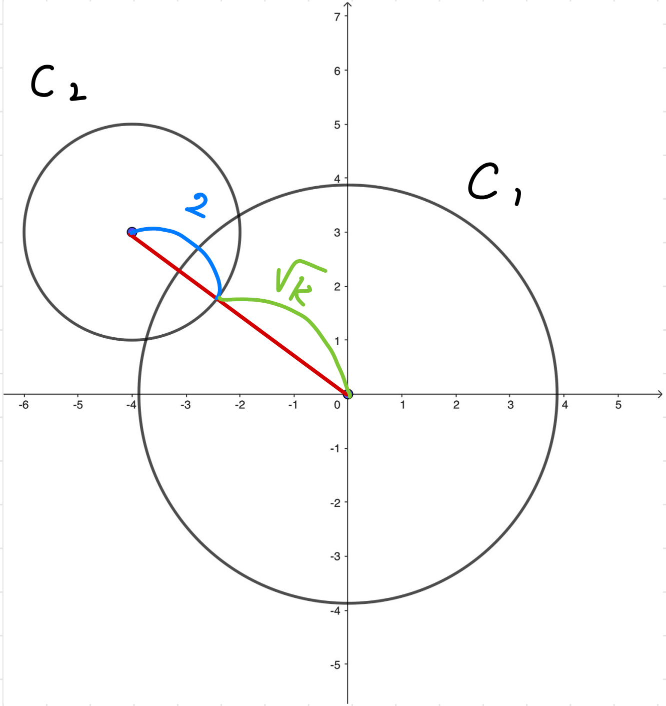
である。

教科書P94



[3] 2 点で交わる

[3] $|r-r'|<d<r+r'$



C_1 と C_2 の中心間きょりを d とすると
C_1 と C_2 が 2 点で交わるのは

$$|2-\sqrt{k}|<d<2+\sqrt{k} \quad \cdots ①$$

C_1の中心は原点$(0, 0)$

C_2の中心は$(-4, 3)$

2点間の距離

2点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$間の距離ABは

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点Oと点$A(x_1,\ y_1)$の距離OAは　$\mathbf{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

よって，C_1とC_2の中心間キョリdは

$$d=\sqrt{(-4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

前項の式①より

$|2-\sqrt{k}|<5<2+\sqrt{k}$　を満たすkの値の範囲が答え

$|2-\sqrt{k}| < 5 < 2+\sqrt{k}$ の解き方

$\underbrace{|2-\sqrt{k}| < 5}_{(ア)} < 2+\sqrt{k}$ (ア)(イ)のkの値の共通範囲をもとめる。

(イ) $5 < 2+\sqrt{k}$

$\underline{|2-\sqrt{k}| < 5}$

$-5 < 2-\sqrt{k} < 5$

$-7 < -\sqrt{k} < 3$

$-3 < \sqrt{k} < 7$

$9 < k < 49 \cdots$ (ア)

$\underline{5 < 2+\sqrt{k}}$

$2+\sqrt{k} > 5$

$\sqrt{k} > 3$

$k > 9 \cdots$ (イ)

(ア)(イ)より $9 < k < 49$

$\boxed{2}$ 2つの円　$C_1 : x^2+y^2+8x-6y+21=0$

$C_2 : x^2+y^2=k$

と直線　$\ell : x+2y-3=0$

について，次の問いに答えなさい。ただし，kは正の定数とする。

(3)　円 C_2 と直線 ℓ が接するとき

$$k=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

円C_2の半径 = 円C_2の中心と直線のキョリ

円C_2の中心は$(0,0)$，直線は$x+2y-3=0$

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

より

$$\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

円C_2の半径は$\sqrt{k}$なので

$$\sqrt{k}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$k=\frac{9}{5}$$

$\boxed{4}$ 円 $C: x^2+y^2-12x-6y+36=0$ 上の点を P とし，原点 O と点 P を通る直線を考える。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円 C の中心の座標は $(\boxed{ア}, \boxed{イ})$ で，半径は $\boxed{ウ}$ である。

$$(x-6)^2-36+(y-3)^2-9+36=0$$

$$(x-6)^2+(y-3)^2=9$$

中 $(6, 3)$ 半 3

(2) 直線 OP の傾きを k とすると，OP が円 C に接するとき $k=\boxed{エ}, \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

OPがKに接する → 円Cの中心点と接線のキョリ = 円Cの半径

直線OPは原点を通る傾きKの直線なので

$y = kx \rightarrow kx - y = 0$ とかける.

円Cの中心点の座標 (6.3) と直線 $kx - y = 0$ のキョリは

$$\frac{|k\cdot 6 + (-1)\cdot 3 + 0|}{\sqrt{k^2+1^2}} = \frac{|6k-3|}{\sqrt{k^2+1}} \cdots ①$$

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

①が円Cの半径の3と等しいので

$$\frac{|6k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \rightarrow |6k-3| = 3\sqrt{k^2+1}$$

$$(6k-3)^2 = 9(k^2+1)$$

$$36k^2 - 36k + 9 = 9k^2 + 9$$

$$27k^2 - 36k = 0$$

$$3k^2 - 4k = 0$$

$$k(3k-4) = 0$$

$$\underline{k = 0,\ \frac{4}{3}}$$

(3) 線分 OP を 1：2 の比に内分する点を Q とする。点 P が円 C の周上を動くとき，点 Q が描く図形は $\boxed{キ}$ である。

$\boxed{キ}$ に適するものを下の選択肢から選び，記号で答えなさい。

〈選択肢〉

⓪ 直線 $2x+y=0$	② 直線 $2x-y=0$
③ 直線 $2x+y=1$	④ 直線 $2x-y=1$
⑤ 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$	⑥ 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$
⑦ 円 $(x-4)^2+(y-2)^2=1$	⑧ 円 $(x-4)^2+(y-2)^2=2$

Qの座標を(x, y)，Pの座標を(s, t)とする.

Pは円C上にあるので $s^2+t^2-12s-6t+36=0$ …① が成立.

QはOPを1:2に内分するので $\left(\dfrac{2\cdot0+1\cdot s}{1+2}, \dfrac{2\cdot0+1\cdot t}{1+2}\right)=\left(\dfrac{s}{3}, \dfrac{t}{3}\right)$ …②

Qは(x, y)であり ②の形でも書けるので $\begin{cases} x=\dfrac{s}{3} \\ y=\dfrac{t}{3} \end{cases}$ …③ が成立.

③より　$s=3x$, $t=3y$ なので これを①に代入すると

$$(3x)^2+(3y)^2-12\cdot3x-6\cdot3y+36=0$$
$$9x^2+9y^2-36x-18y+36=0$$
$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+4=0$$
$$\underline{(x-2)^2+(y-1)^2=1}$$