数C

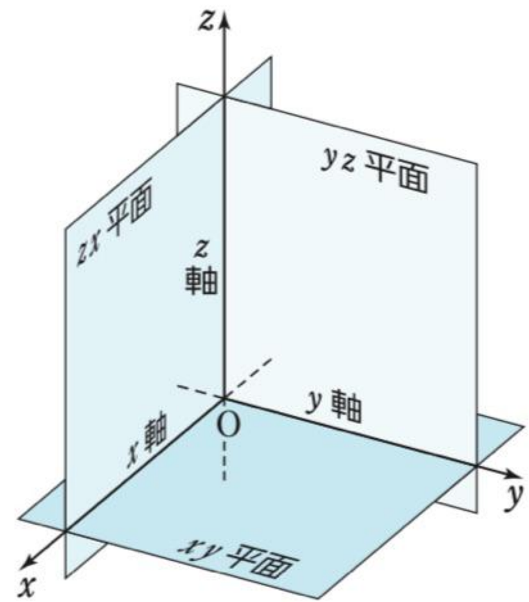
空間のベクトル

空間の点の座標

空間に点Oをとり，Oで互いに直交する3本の数直線を，x軸，y軸，z軸といい，
これらをまとめて座標軸という．点Oは原点

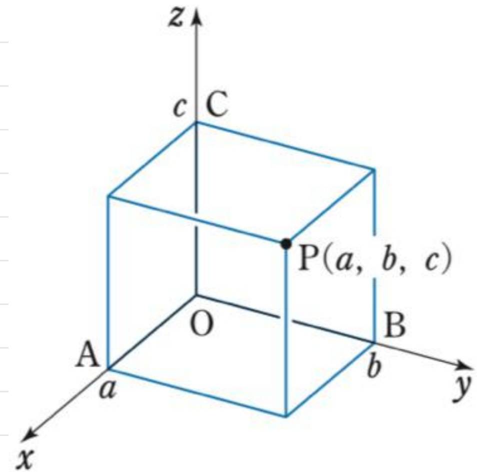
x軸とy軸で定まる平面をxy平面
y軸とz軸で定まる平面をyz平面
z軸とx軸で定まる平面をzx平面

まとめて座標平面という．



空間の点Pに対してPを通り各座標軸に垂直な平面が

x軸, y軸, z軸と交わる点をA, B, Cとする.



A, B, Cの各座標軸上での座標がそれぞれa, b, cのとき

(a, b, c)を点Pの座標という.

また, $O(0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$

の座標で定められた空間を座標空間という.

$P(a, b, c)$について

xy平面と対称な座標は$(a, b, -c)$

yz平面と対称な座標は$(-a, b, c)$

zx平面と対称な座標は$(a, -b, c)$

x軸に関して対称な座標は$(a, -b, -c)$

y軸に関して対称な座標は$(-a, b, -c)$

z軸に関して対称な座標は$(-a, -b, c)$

練習 1 点P(1, 3, 2)に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) yz平面に関して対称な点　(2) zx平面に関して対称な点

(3) z軸に関して対称な点　(4) 原点に関して対称な点

(1) $(-1, 3, 2)$　(2) $(1, -3, 2)$

(3) $(-1, -3, 2)$　(4) $(-1, -3, -2)$

座標空間において

原点 O と点 P (a, b, c) とのキョリ OP は

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

練習 2 原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)　　(2) Q(3, −4, 5)

(1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 36}$

$= \sqrt{49}$

$OP = 7$

(2) $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{9 + 16 + 25}$

$= \sqrt{50}$

$OQ = 5\sqrt{2}$

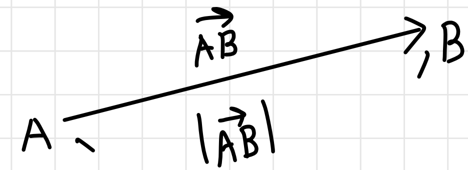
空間における始点A, 終点Bとする. ABが表すベクトルを$\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$の大きさは$|\overrightarrow{AB}|$

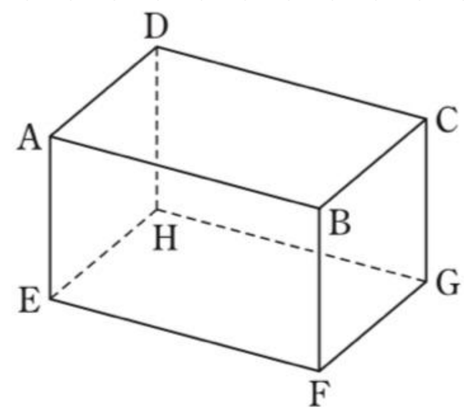
$\overrightarrow{AB}$の逆ベクトル…大きさが同じで向きが逆なので$\overrightarrow{BA}$. また, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

零ベクトル…大きさが零のベクトル. $\vec{0}$と表す.

単位ベクトル…大きさが1のベクトル



練習 3 例 2 において，$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトルで $\overrightarrow{AE}$ 以外のものをすべてあげよ。また，$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{DA}$ 以外のものをすべてあげよ。

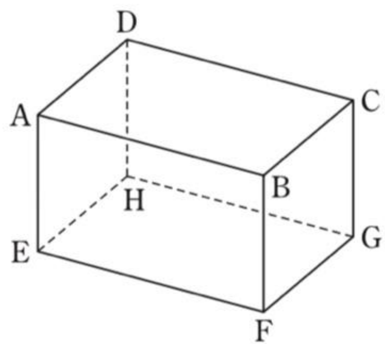


$\overrightarrow{AE}$に等しいベクトル　$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AD}$の逆ベクトル　$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HE}$

練習 4 例 3 の直方体において，次の□に適する頂点の文字を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{A\square}$　　(2) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{\square D}$



(1) $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BC}$ より

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

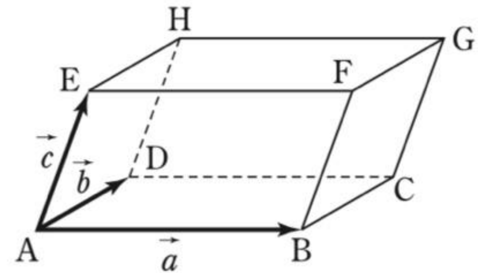
(2) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{BD}$

練習 5 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{EC}$　　(2) $\overrightarrow{BH}$　　(3) $\overrightarrow{DF}$　　(4) $\overrightarrow{HF}$



(1) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}=\underline{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\underline{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\underline{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$

(4) $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\underline{\vec{a}-\vec{b}}$

空間ベクトルの成分表示

Oを原点とする座標空間

基本ベクトル…x軸，y軸，z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

それぞれ，$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ と表す．

$\vec{a} = \vec{OA}$ のAの座標が (a_1, a_2, a_3) のとき $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

a_1 をx成分，a_2 をy成分，a_3 をz成分といい，(a_1, a_2, a_3) を成分表示という．

基本ベクトルの成分表示は $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$，$\vec{e_2} = (0, 1, 0)$，$\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ となる．

零ベクトルの成分表示は $\vec{0} = (0, 0, 0)$

練習 6 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しくなるように，x，y，z の値を定めよ。

$\vec{a} = (2,\ -1,\ -3)$，$\vec{b} = (x-4,\ y+2,\ -z+1)$

$\vec{a} = \vec{b}$ より
$$\begin{cases} 2 = x - 4 & \cdots ① \\ -1 = y + 2 & \cdots ② \\ -3 = -z + 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③を解くと

$x = 6$，$y = -3$，$z = 4$

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

和,差,実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3)-(b_1, b_2, b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k(a_1, a_2, a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$ kは実数

練習 7 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -2)$ (2) $\vec{b}=(-5,\ 3,\ -4)$

(1)

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=\underline{3}$$

(2)

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{25+9+16}=\sqrt{50}=\underline{5\sqrt{2}}$$

練習 8 $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ -3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{a}-\vec{b}$ (3) $2\vec{a}+3\vec{b}$ (4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,3,-2)+(4,-3,0)=\underline{(5,0,-2)}$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(1,3,-2)-(4,-3,0)=\underline{(-3,6,-2)}$

(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,3,-2)+3(4,-3,0)=\underline{(14,-3,-4)}$

(4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})=-3\{(1,3,-2)-2(4,-3,0)\}$

$$=-3(-7,9,-2)$$

$$=\underline{(21,-27,6)}$$

2点 A, B とベクトル $\overrightarrow{AB}$

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ について

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

練習 9 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4)，B(3, −1, 5) (2) A(3, 0, −2)，B(1, −4, 2)

(1)

$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 5) - (2, 1, 4) = \underline{(1, -2, 1)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{1 + 4 + 1} = \underline{\sqrt{6}}$

(2)

$\overrightarrow{AB} = (1, -4, 2) - (3, 0, -2) = \underline{(-2, -4, 4)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = \underline{6}$

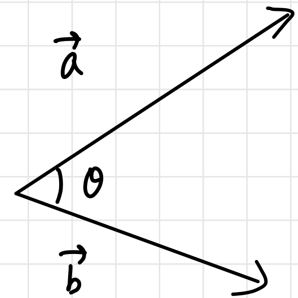
ベクトルの内積

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

また, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$



練習 10 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$, $\vec{b} = (-3,\ 1,\ 2)$

(2) $\vec{a} = (2,\ 4,\ 3)$, $\vec{b} = (-2,\ 1,\ 0)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -7$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{14}$

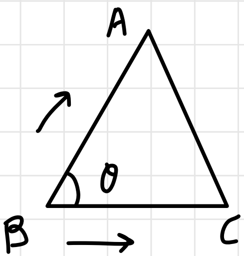
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$\theta = 120^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

よって $\theta = 90^\circ$

練習 11 3 点 A(6, 7, −8), B(5, 5, −6), C(6, 4, −2) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。



$\angle ABC = \theta$ とする。

θ を求めるためには

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$ を求める。

$$\overrightarrow{BA} = (6, 7, -8) - (5, 5, -6) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (6, 4, -2) - (5, 5, -6) = (1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 4 = -9$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 135^\circ$$

練習 12　2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 0,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p}=(x, y, z)$ とする.

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x-z=0$ … ①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=x+3y-2z=0$ … ②

$|\vec{p}|=\sqrt{6}$ より

$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$

$|\vec{p}|^2=x^2+y^2+z^2=6$ … ③

① より $z=2x$ … ①'

①' を ② に代入

$x+3y-4x=0$

$y=x$ … ②'

①'②' を ③ に代入

$x^2+x^2+(2x)^2=6$

$6x^2=6$

$x^2=1$　　$x=\pm 1$

$x=1$ のとき

①'②' より $y=1,\ z=1$

$x=-1$ のとき

①'②' より $y=-1,\ z=-2$

$\vec{p}=(1,\ 1,\ 2),\ (-1,\ -1,\ -2)$

位置ベクトル

① 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

② 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して線分を $m:n$ に

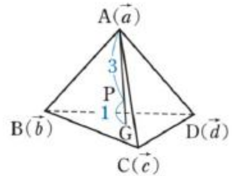
内分 … $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$, 外分 … $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

ABの中点の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

③ 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする△ABCの重心Gの位置ベクトル, $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

練習 13 4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において, △BCD の重心を $G(\vec{g})$, 線分 AG を 3 : 1 に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。$\vec{p}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\vec{g} = \frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{3}{4}(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{g} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

同じ平面上にある点、

点Pが平面ABC上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

練習 15 3点 A$(-1,\ 2,\ -1)$, B$(2,\ -2,\ 3)$, C$(2,\ 4,\ -1)$ の定める平面ABC上に点 P$(x,\ 3,\ 1)$ があるとき，x の値を求めよ。

$\overrightarrow{CP} = (x-2, -1, 2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3, -2, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -6, 4)$ に対して

$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$(x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$

$(x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$

$$\begin{cases} x-2 = -3s & \cdots ① \\ -1 = -2s-6t & \cdots ② \\ 2 = 4t & \cdots ③ \end{cases}$$

③より $t = \frac{1}{2}$，これを②に代入

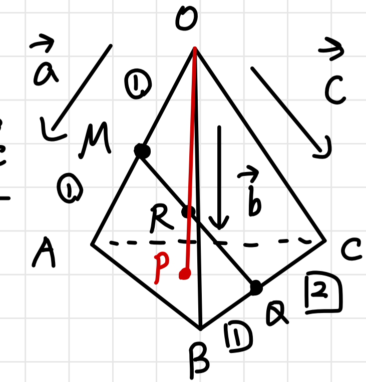
$s = -1$

これを①に代入すると

$\underline{x = 5}$

練習 16 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(応用例題の解答方法)



$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}{2}=\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$

PはOR上の点なので，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する.

$\overrightarrow{OP}=k\cdot\dfrac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\dfrac{1}{4}k\vec{a}+\dfrac{1}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{6}k\vec{c}$ …①

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

Pは平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ …②

①②より

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}k\vec{a}+\dfrac{1}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{6}k\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k = s \cdots (ア) \\ \frac{1}{3}k = t \cdots (イ) \\ \frac{1}{6}k = 1 - s - t \cdots (ウ) \end{cases}$$

(ア)(イ)を(ウ)に代入

$$\frac{1}{6}k = 1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{3}k$$

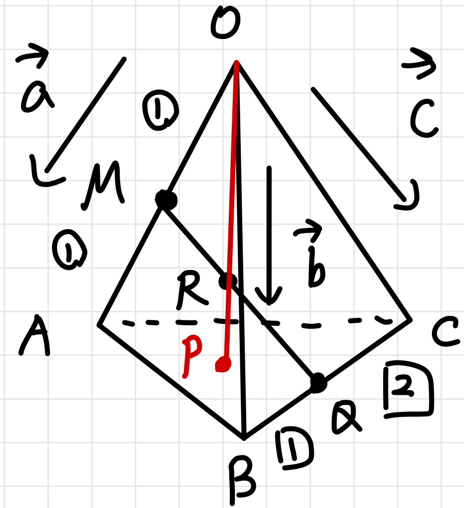
$$k = \frac{4}{3}$$

$k = \frac{4}{3}$ を ① に代入

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

練習 16 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（s+t+u=1の解答方法）



Pは OR上の点なので

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$となる実数kが存在する.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}{2}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$$

$$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\cdots①$$

点Pが平面ABC上にあるので

$$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$$

$$k=\frac{4}{3}$$

$k=\frac{4}{3}$を①に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

2点間のきょり，内分点・外分点の座標

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$ について

① A, B 間のきょりは

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

② ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

③ ABを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

練習 18 2点 A(1, 3, −2), B(4, −3, 1) について，次のものを求めよ。

(1) 2点 A，B 間の距離　　(2) 線分 AB の中点の座標

(3) 線分 AB を 2：1 に内分する点の座標

(4) 線分 AB を 2：1 に外分する点の座標

(1) $AB=\sqrt{(4-1)^2+(-3-3)^2+\{1-(-2)\}^2}=3\sqrt{6}$

(2) $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}, \frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{2+1}\right)$

$=(3, -1, 0)$

(4) $\left(\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}, \frac{-1\cdot3+2\cdot(-3)}{2-1}, \frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot1}{2-1}\right)$

$=(7, -9, 4)$

練習 19 3点 A(2, −1, 4), B(1, 3, 0), C(3, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心の座標を，原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3}\right)$

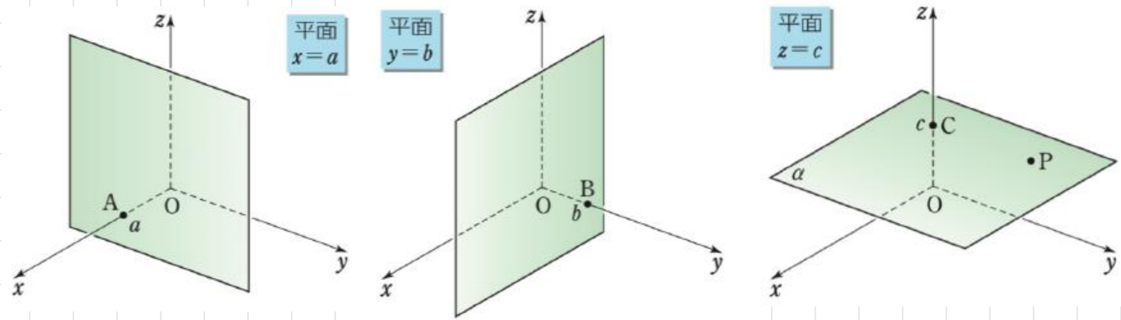
$=(2, 1, 2)$

座標平面に平行な平面の方程式

点A$(a, 0, 0)$を通り、yz平面に平行な平面の方程式は $x=a$ （x軸に垂直）

点B$(0, b, 0)$を通り、zx平面に平行な平面の方程式は $y=b$ （y軸に垂直）

点C$(0, 0, c)$を通り、xy平面に平行な平面の方程式は $z=c$ （z軸に垂直）



練習 20　点(1, 2, 3)を通り、次のような平面の方程式を求めよ。

(1)　xy 平面に平行　(2)　yz 平面に平行　(3)　y 軸に垂直

(1) $z=3$　(2) $x=1$　(3) $y=2$

球面の方程式

点(a, b, c)を中心とする半径rの球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに，原点中心 半径rの球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

練習 21 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

(2) 点 (1, 2, −3) を中心とする半径 4 の球面

(3) 点 A(0, 4, 1) を中心とし，点 B(2, 4, 5) を通る球面

(4) 2 点 A(2, 0, −3)，B(−2, 6, 1) を直径の両端とする球面

(1) $x^2+y^2+z^2=9$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$

(3) $AB=\sqrt{(2-0)^2+(4-4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

半径 r

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=(2\sqrt{5})^2$

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=20$

(4) ABの中点は $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)=(0, 3, -1)$

中心

ABが直径 → 中心と点Aの長さが半径

$\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{17}$

$\therefore\ x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$

練習 22 応用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

球面と yz 平面が交わるのは $x=0$ のとき

球面の方程式は $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ なので

$x=0$ のとき

$$(0-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$$

$$(y+2)^2+(z-3)^2=9$$

この方程式は yz 平面上では円

中心は $(0,-2,3)$ 半径は 3