

工數

2次関数



・**関数** … 2つの変数 x, y について x の値が定まると y の値がただ1つ定まる。

y が x の 1 次式で表されるとき, y は x の 1 次関数 であるといい,

y が x の 2 次式で表されるとき, y は x の 2 次関数 であるという。

1 次関数, 2 次関数の一般形 a, b, c は定数とする。

1 次関数は $y = ax + b$ ただし, $a \neq 0$

2 次関数は $y = ax^2 + bx + c$ ただし, $a \neq 0$

y が x の 関数 であることを $f(x)$ や $g(x)$ とかくことがある。

x の 関数 $y = f(x)$ を 関数 $f(x)$ という。

関数 $y = f(x)$ について $x = a$ に対応して定まる y の 値 $f(a)$ といい

$f(a)$ を 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ のときの 値 という。

練習 1 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において, 次の値を求めよ。

- (1) $f(3)$ (2) $f(-1)$ (3) $f(-a)$ (4) $f(a+1)$

$$(1) f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$$

$$(2) f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 4$$

$$(3) f(-a) = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) + 1 = a^2 + 2a + 1$$

$$(4) f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1 = a^2$$

- ・定義域 … y が x の関数であるとき変数 x のとり得る値の範囲
- ・値域 … 定義域の x の値の範囲に対応してとる y の値の範囲

練習

2

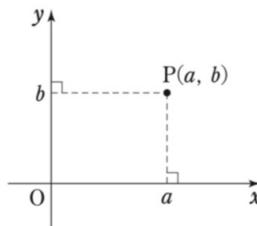
底辺の長さが 4 cm、高さが x cm の三角形の面積を y cm² とする。た

だし、高さは 4 cm 以上であるとする。 y を x の式で表せ。

$$y = 4 \times x \times \frac{1}{2} = 2x \quad (x \geq 4)$$

$$(y \geq 8)$$

平面上に座標軸を定めると、その平面上の点Pの位置は、右の図のように2つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点Pの**座標**といい、このような点Pを $P(a, b)$ と書く。また、座標が (a, b) である点を、点 (a, b) ということがある。座標の定められた平面を **座標平面**といいう。



**座標軸は
どの象限にも含まれない。**

練習

3

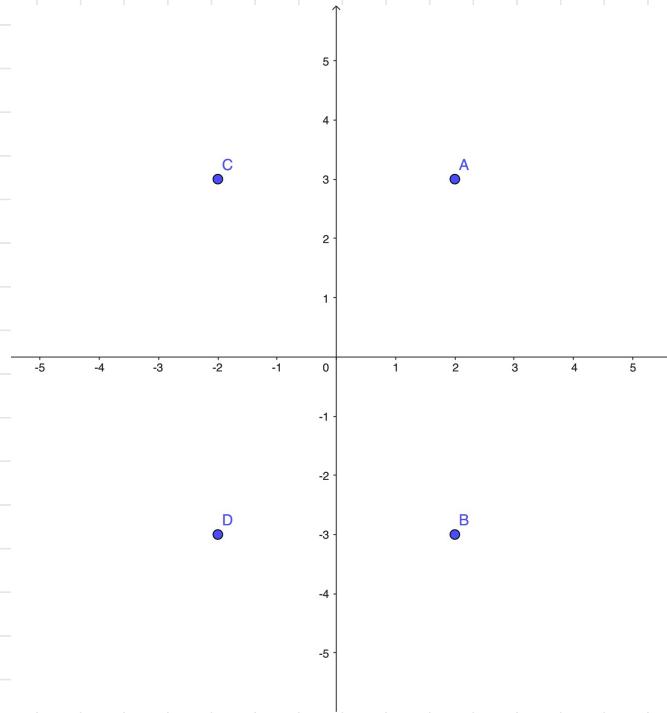
- 次の点はどの象限にあるか。
- (1) A(2, 3) (2) B(2, -3) (3) C(-2, 3) (4) D(-2, -3)

(1) 第1象限

(2) 第4象限

(3) 第2象限

(4) 第3象限



直線の方程式 … x の一次関数 $y = ax + b$ のグラフは
傾きが a 、切片が b の直線

最大値 … 関数の値域に最大の値があるときのその値

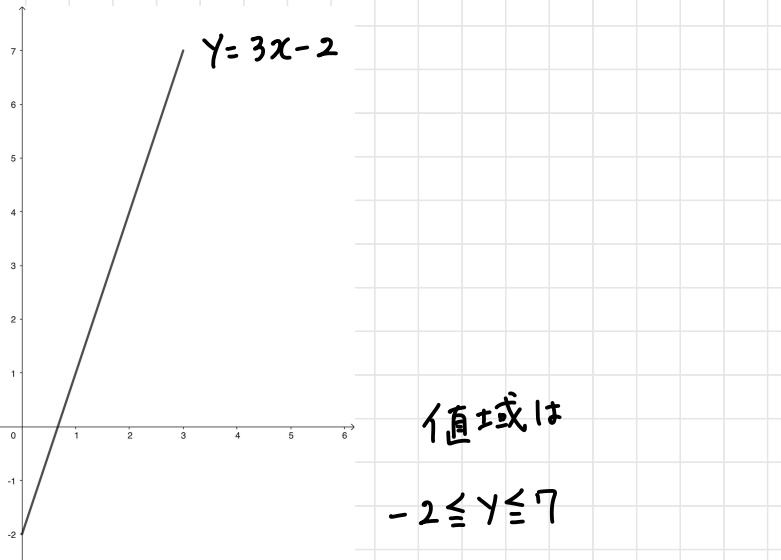
最小値 … 関数の値域に最小の値があるときのその値

練習
4 次の関数のグラフをかけ。また、関数の値域を求めよ。

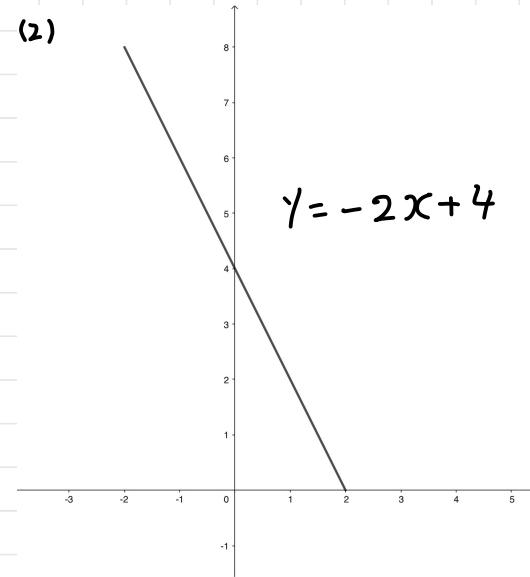
(1) $y = 3x - 2 \quad (0 \leq x \leq 3)$

(2) $y = -2x + 4 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

(1)



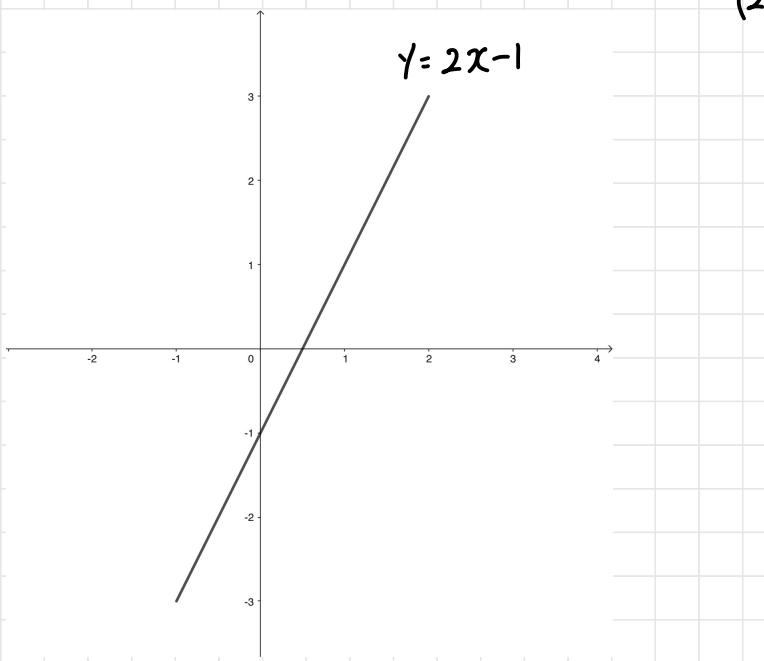
(2)



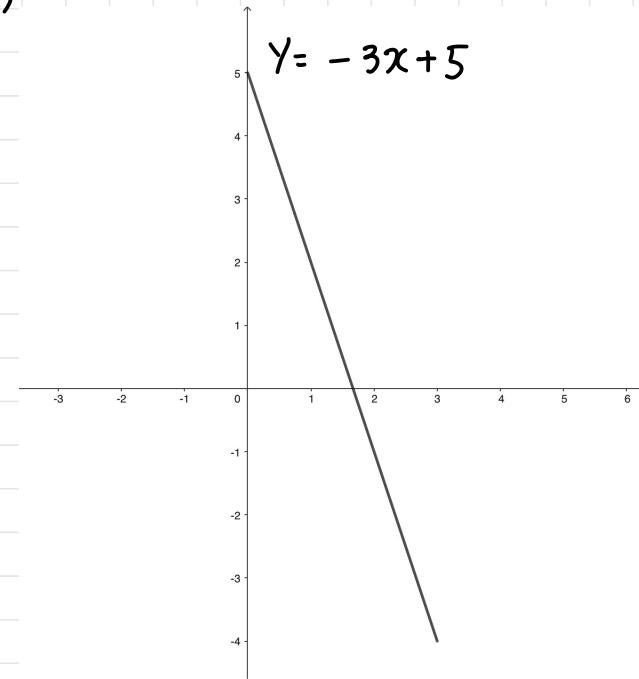
次の関数の値域を求めよ。また、関数の最大値、最小値を求めよ。

- (1) $y = 2x - 1 \quad (-1 \leq x \leq 2)$ (2) $y = -3x + 5 \quad (0 \leq x \leq 3)$

(1)



(2)



値域は $-3 \leq y \leq 3$

$x = 2$ で “最大値 3”

$x = -1$ で “最小値 -3”

値域は $-4 \leq y \leq 5$

$x = 0$ で “最大値は 5”

$x = 3$ で “最小値は -4”

2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

2次関数 $y = ax^2$ のグラフは右図。

2次関数の特徴

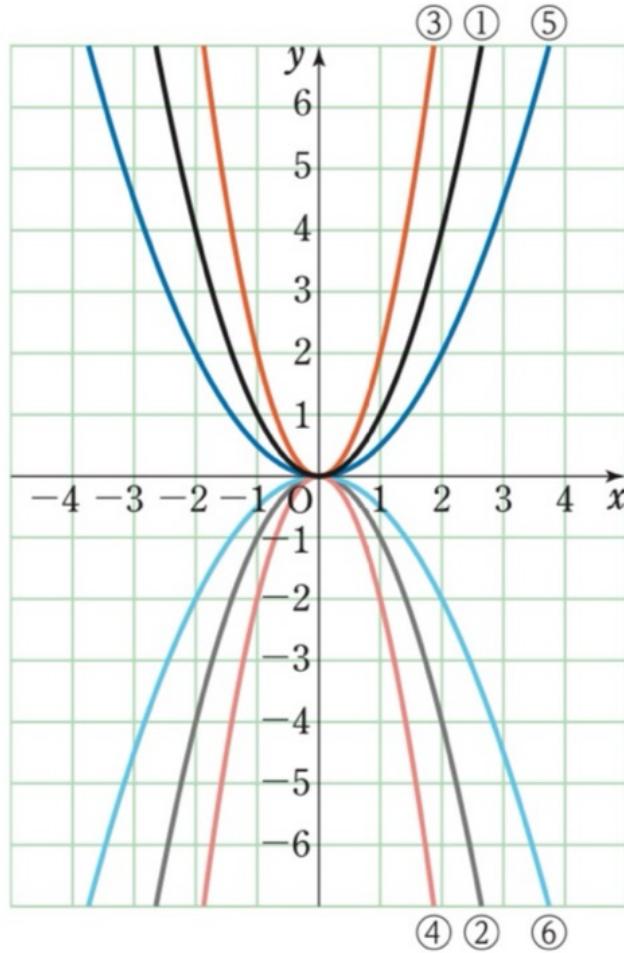
グラフの形は放物線

対称の軸をもつ

軸と放物線との交点を頂点という。

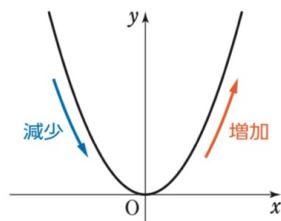
$y = ax^2$ のグラフは

軸がY軸、原点が頂点の放物線



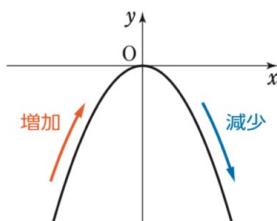
$a > 0$

放物線は 下に凸



$a < 0$

放物線は 上に凸



2次関数 $y = ax^2$ のグラフ

2次関数 $y = ax^2$ のグラフは放物線である。

その軸は y 軸、頂点は原点である。

$a > 0$ のとき 下に凸

$a < 0$ のとき 上に凸

$x = 0$ の前後で

$x = 0$ の前後で

減少から増加に変わる。 増加から減少に変わる。

練習

6

次の2次関数のグラフをかけ。また、その放物線は上に凸、下に凸のどちらであるか。

(1) $y = 3x^2$

(2) $y = -3x^2$

(3) $y = \frac{1}{3}x^2$

(1) 下に

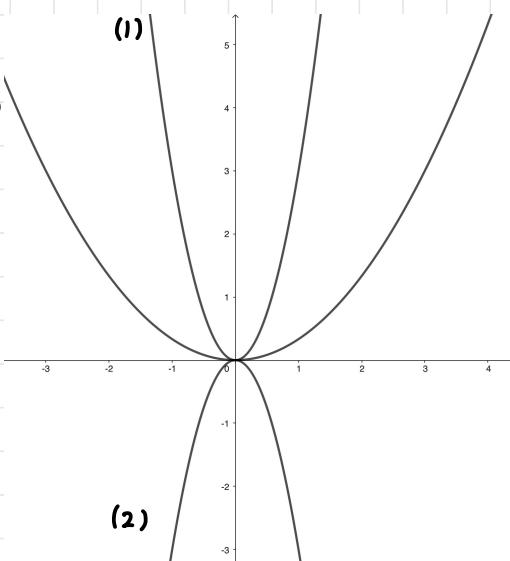
(2) 上に

(3) 下に

(1)

(3)

(2)



2次関数のグラフの平行移動

→ 平面上で図形上の各点を一定の向き、一定のキヨリだけ動かすこと。

$$y = ax^2 + q \text{ のグラフ}$$

2次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、

y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

その軸は y 軸、頂点は点 $(0, q)$ である。

練習

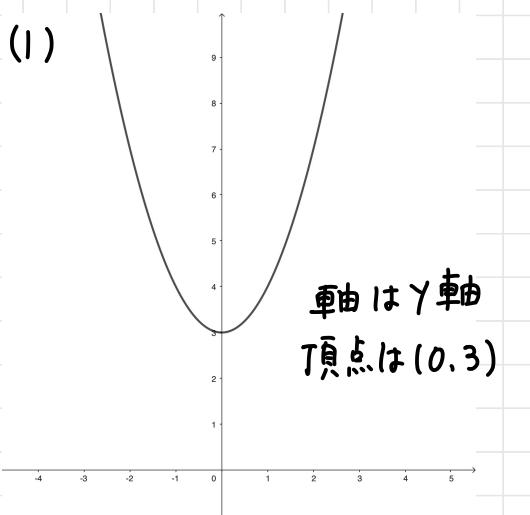
7

(1) $y = x^2 + 3$

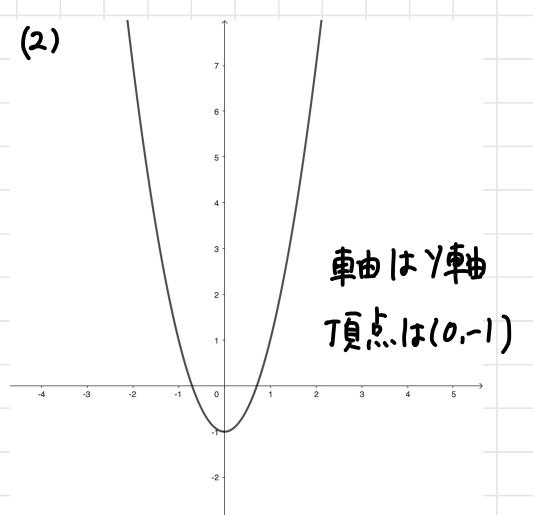
(2) $y = 2x^2 - 1$

(3) $y = -x^2 + 2$

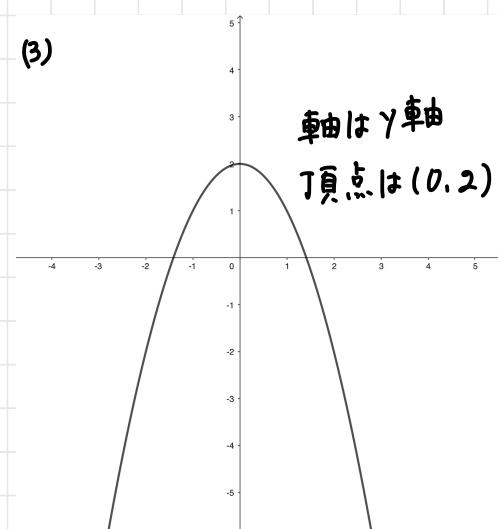
(1)



(2)



(3)



$$y = a(x - p)^2$$

2次関数 $y = a(x - p)^2$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、

x 軸方向に p だけ平行移動した放物線である。

その軸は直線 $x = p$ 、頂点は点 $(p, 0)$ である。

練習

8

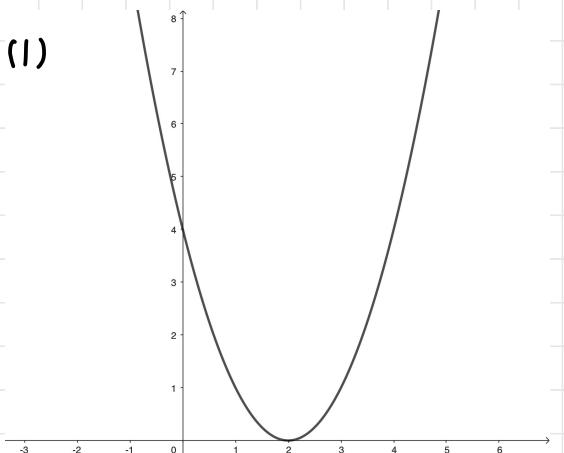
次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = (x - 2)^2$

(2) $y = 2(x + 1)^2$

(3) $y = -2(x + 2)^2$

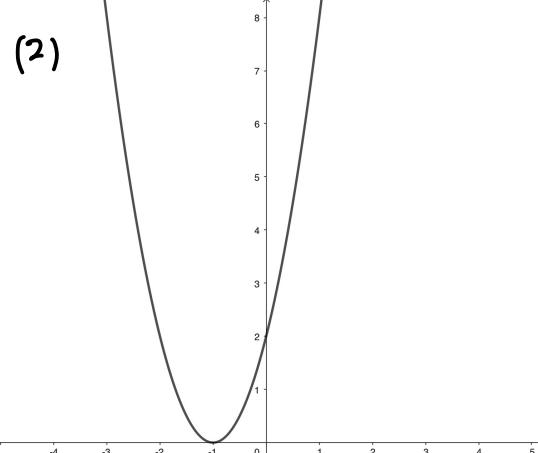
(1)



軸 $x = 2$

頂点 $(2, 0)$

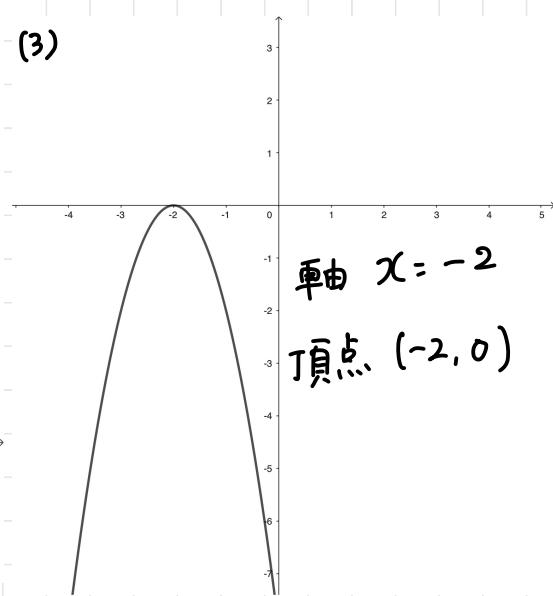
(2)



軸 $x = -1$

頂点 $(-1, 0)$

(3)



軸 $x = -2$

頂点 $(-2, 0)$

$$Y = a(x-p)^2 + q \text{ のグラフ}$$

2次関数 $y = a(x-p)^2+q$ のグラフ

2次関数 $y = a(x-p)^2+q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、
 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。
 その軸は直線 $x = p$ 、頂点は点 (p, q) である。

練習
9 次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

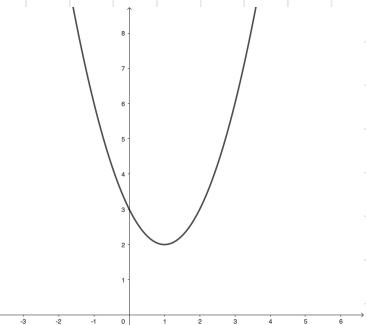
(1) $y = (x-1)^2+2$

(2) $y = 2(x-2)^2-4$

(3) $y = -2(x+1)^2+2$

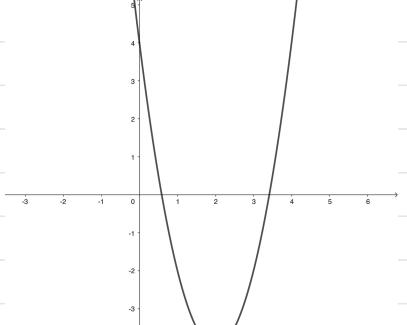
(4) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2-1$

(1)



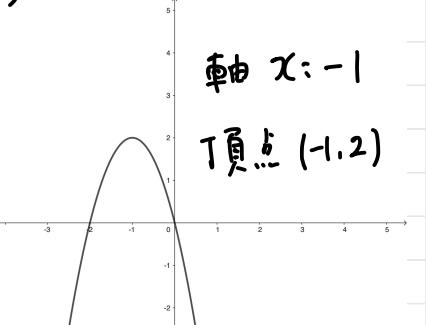
軸 $x=1$
 頂点 $(1, 2)$

(2)



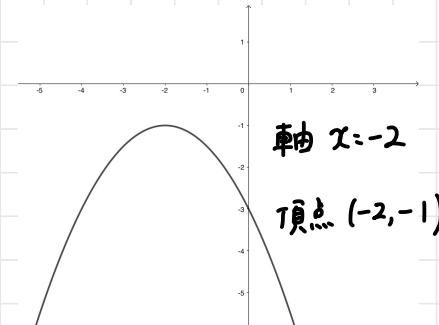
軸 $x=2$
 頂点 $(2, -4)$

(3)



軸 $x=-1$
 頂点 $(-1, 2)$

(4)



軸 $x=-2$
 頂点 $(-2, -1)$

・ 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の形で

$y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形する。

平方完成

練習
10

次の2次式を平方完成せよ。

(1) $x^2 + 8x$

(2) $x^2 - 6x + 8$

(3) $2x^2 - 8x + 5$

(4) $3x^2 + 6x + 2$

(5) $x^2 + x - 2$

(6) $-2x^2 + 6x + 4$

$$(1) (x+4)^2 - 16 \quad (2) (x-3)^2 - 9 + 8 \quad (3) 2(x^2 - 4x) + 5$$

$$= (x-3)^2 - 1 \quad = 2\{(x-2)^2 - 4\} + 5$$

$$= 2(x-2)^2 - 8 + 5$$

$$= 2(x-2)^2 - 3$$

(4) $3(x^2 + 2x) + 2$

$$= 3\{(x+1)^2 - 1\} + 2$$

$$= 3(x+1)^2 - 1$$

(5) $(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2$

$$= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

(6) $-2(x^2 - 3x) + 4$

$$= -2\{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\} + 4$$

$$= -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2} + 4 = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{17}{2}$$

次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2 - 4x + 3$$

$$(2) \quad y = 2x^2 + 8x + 3$$

$$(3) \quad y = -3x^2 + 6x + 1$$

$$(4) \quad y = -x^2 - 3x$$

$$(1) \quad Y = (x-2)^2 - 4 + 3$$

$$= (x-2)^2 - 1$$

$$(2) \quad y = 2(x^2 + 4x) + 3$$

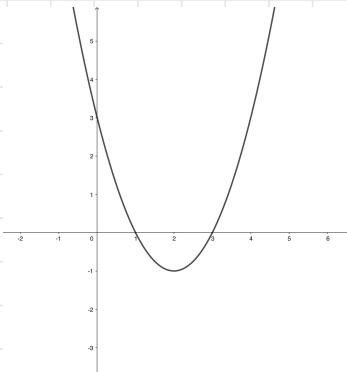
$$\begin{aligned} &= 2\{(x+2)^2 - 4\} + 3 \\ &= 2(x+2)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = -3(x^2 - 2x) + 1$$

$$\begin{aligned} &= -3\{(x-1)^2 - 1\} + 1 \\ &= -3(x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

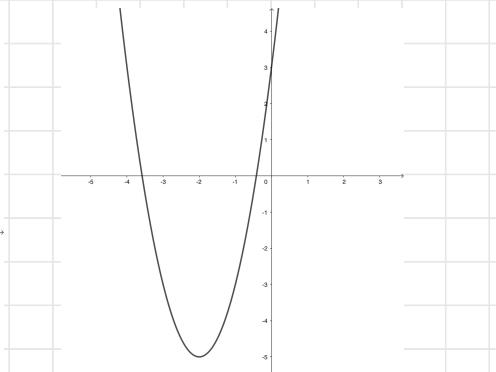
$$(4) \quad y = -(x^2 + 3x)$$

$$\begin{aligned} &= -\left\{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\right\} \\ &= -(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$



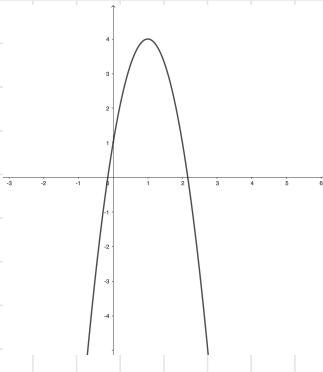
軸 $x = 2$

頂点 $(2, -1)$



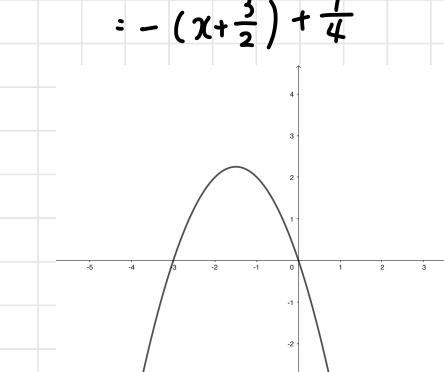
軸 $x = -2$

頂点 $(-2, -5)$



軸 $x = 1$

頂点 $(1, 4)$



軸 $x = -\frac{3}{2}$

頂点 $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

(2次関数の頂点の差を調べればよい)

練習
12 放物線 $y = 2x^2 - 4x$ を平行移動して放物線 $y = 2x^2 + 4x - 3$ に重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

$$y = 2x^2 - 4x$$

$$= 2(x^2 - 2x)$$

$$= 2 \{(x-1)^2 - 1\}$$

$$= 2(x-1)^2 - 2$$

頂点 $(1, -2)$

$$y = 2x^2 + 4x - 3$$

$$= 2(x^2 + 2x) - 3$$

$$= 2 \{(x+1)^2 - 1\} - 3$$

$$= 2(x+1)^2 - 5$$

頂点 $(-1, -5)$

x 軸方向に -2 , y 軸方向に -3

だけ平行移動する。

一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると、 x を $x-p$, y を $y-q$ でおき換えた次のような関数のグラフになる。

$$y-q = f(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y = f(x-p) + q$$

一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフを、 x 軸, y 軸, 原点それぞれに関して対称移動すると、次のような関数のグラフになる。

$$x\text{ 軸} : -y = f(x) \quad \text{すなわち} \quad y = -f(x)$$

$$y\text{ 軸} : \quad y = f(-x)$$

$$\text{原点} : -y = f(-x) \quad \text{すなわち} \quad y = -f(-x)$$

練習 1 2 次関数 $y = 2x^2 - 5x + 3$ のグラフを、 x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動するとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$y-1 = 2(x+2)^2 - 5(x+2) + 3$$

$$y-1 = 2(x+2)^2 - 5(x+2) + 3$$

$$y-1 = 2(x^2 + 4x + 4) - 5x - 10 + 3$$

$$y-1 = 2x^2 + 8x + 8 - 5x - 10 + 3$$

$$y-1 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$y = 2x^2 + 3x + 2$$

練習 1 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 1$ のグラフの、 x 軸, y 軸, 原点それぞれに関して対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$x\text{ 軸} - y = x^2 + 4x + 1$$

$$y = -x^2 - 4x - 1$$

$$y\text{ 軸} \quad y = (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 1$$

$$y = x^2 - 4x + 1$$

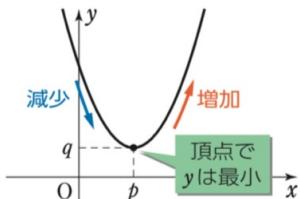
$$\text{原点} - y = (-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 1$$

$$-y = x^2 - 4x + 1$$

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

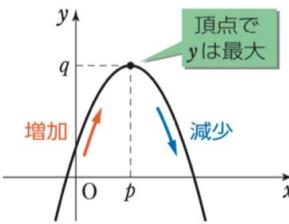
・2次関数の最大・最小

$$a > 0$$



y はいくらでも大きな値をとる
(最大値はない)

$$a < 0$$



y はいくらでも小さな値をとる
(最小値はない)

2次関数 $y = a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a > 0$ のとき, $x = p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

$a < 0$ のとき, $x = p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

練習

13

次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = 2(x-3)^2+4$

(2) $y = -2(x+1)^2-3$

(1) $x=3$ のとき **最小値 4**

(2) $x=-1$ のとき **最大値 -3**

最大値なし

最小値なし

次の2次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

$$(1) \quad y = x^2 - 6x + 5$$

$$(2) \quad y = -2x^2 + 5x$$

$$(1) \quad y = (x-3)^2 - 9 + 5$$

$$y = (x-3)^2 - 4$$

$x = 3$ のとき 最小値 -4
最大値はなし

$$(2) \quad y = -2(x^2 - \frac{5}{2}x)$$

$$= -2 \left\{ \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right\}$$

$$= -2 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 + \frac{25}{8}$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ のとき 最大値 } \frac{25}{8}$$

最小値はなし

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2 + 2x + 3 \quad (-2 \leq x \leq 2) \quad (2) \quad y = -x^2 + 4x - 3 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$(3) \quad y = 3x^2 + 6x - 1 \quad (1 \leq x \leq 3) \quad (4) \quad y = -2x^2 + 12x \quad (0 \leq x \leq 6)$$

$$(1) \quad y = (x+1)^2 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2$$

$x = -1$ のとき 最小値 2

$x = 2$ のとき 最大値 11

$$(2) \quad y = -(x^2 - 4x) - 3 \\ = -\{(x-2)^2 - 4\} - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

$x = 2$ のとき 最大値 1

$x = 0$ のとき 最小値 -3

$$(3) \quad y = 3(x^2 + 2x) - 1 \\ = 3\{(x+1)^2 - 1\} - 1 = 3(x+1)^2 - 4$$

$x = 1$ のとき 最小値 8

$x = 3$ のとき 最大値 44

$$(4) \quad y = -2(x^2 - 6x) = -2\{(x-3)^2 - 9\} = -2(x-3)^2 + 18$$

$x = 3$ のとき 最大値 18

$x = 0, 6$ のとき 最小値 0

次の条件を満たすように、定数 c の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = x^2 - 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 0$) の最大値が 5 である。
- (2) 関数 $y = -x^2 + 6x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -7 である。

$$(1) Y = (x-1)^2 - 1 + c$$

頂点の x 座標が 1 より

最大値をとるときの x 座標は -2 なので

$$(-2-1)^2 - 1 + c = 5$$

$$c = -3$$

$$(2) y = -(x^2 - 6x) + c$$

$$= -\{(x-3)^2 - 9\} + c$$

$$= -(x-3)^2 + 9 + c$$

頂点の x 座標が 3 より

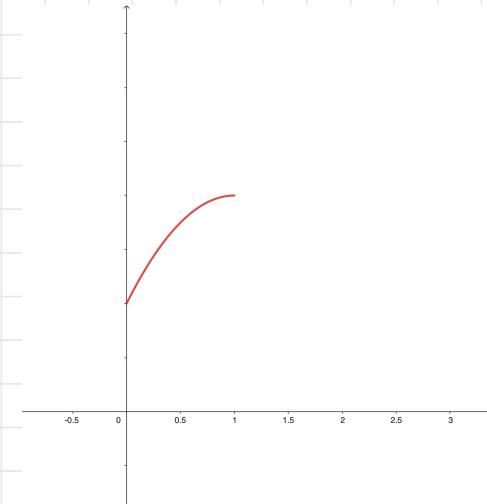
最小値をとるときの x 座標は 1 なので

$$-(1-3)^2 + 9 + c = -7$$

$$c = -12$$

a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y = -x^2 + 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$$



$$Y = -(x^2 - 2x) + 1$$

$$= -\{(x-1)^2 - 1\} + 1$$

$$= -(x-1)^2 + 2$$

これは上に凸の放物線なので、頂点が最大値

頂点の x 座標が 1 より $0 \leq x \leq a$ に $|$ が含まれている
必要があるので

$$a \geq 1$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } x = 1 \text{ で最大値 } 2$$

また、 $0 < a < 1$ のとき $x = a$ で最大値 $-a^2 + 2a + 1$

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y = 2x^2 - 4ax + 2a^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$Y = 2(x^2 - 2ax) + 2a^2$$

$$= 2\{(x-a)^2 - a^2\} + 2a^2$$

$$= 2(x-a)^2$$

頂点 $(a, 0)$

(ア) $a < 0$ のとき

$$x = 0 \text{ で } \text{最小値 } 2a^2$$

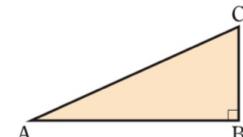
(イ) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$x = a \text{ で } \text{最小値 } 0$$

(ウ) $a > 1$ のとき

$$x = 1 \text{ で } \text{最小値 } 2a^2 - 4a + 2$$

直角三角形 ABCにおいて、直角をはさむ2辺 AB, BCの長さの和が 14 cmであるとする。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



$$AB = x \text{ cm} \text{ とすると } BC = (14-x) \text{ cm}$$

直角三角形 ABCの面積を $Y \text{ cm}^2$ とすると

$$Y = x \times (14-x) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 14x)$$

$$= -\frac{1}{2}\{(x-7)^2 - 49\}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-7)^2 + \frac{49}{2}$$

Y の式は上に凸の2次関数の式と見れるので

Y の最大値、つまり直角三角形 ABCの面積の最大値は

$$\text{ABが } 7 \text{ cm のとき } \frac{49}{2} \text{ cm}^2$$

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点(-2, 4)で、点(-4, 2)を通る。
- (2) 軸が直線 $x=2$ で、2点(-1, 5), (1, -11)を通る。

2次関数を $y=a(x-p)^2+b$ とする。

$$(1) \quad y = a(x+2)^2 + 4$$

これが (-4, 2) を満たさない

$$2 = a(-4+2)^2 + 4$$

$$2 = 4a + 4$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$$

$$(2) \quad y = a(x-2)^2 + b$$

(-1, 5) を満たさない

$$5 = a(-1-2)^2 + b$$

$$5 = 9a + b \cdots ①$$

(1, -11) を満たさない

$$-11 = a(1-2)^2 + b$$

$$-11 = a + b \cdots ②$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad \begin{matrix} x^1 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 5 = 9a + b \\ -11 = a + b \\ \hline 16 = 8a \end{array}$$

$$a = 2$$

$$a = 2 \text{ を } ① \text{ に代入}$$

$$5 = 18 + b$$

$$b = -13$$

よって

$$y = 2(x-2)^2 - 13$$

連立3元1次方程式の解き方

- ① 1文字を消去して、残り2文字の連立方程式を導く。
- ② 2文字の連立方程式を解く。
- ③ 残りの1文字の値を求める。

練習

21

次の連立3元1次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} a+b+c=0 \cdots ① \\ 4a+2b+c=0 \cdots ② \\ 9a+3b+c=4 \cdots ③ \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y+z=6 \cdots ① \\ x-2y-z=-2 \cdots ② \\ 3x+2y-z=12 \cdots ③ \end{cases}$$

(1) ② - ① より

$$3a+b=0 \cdots ①'$$

③ - ② より

$$5a+b=4 \cdots ②'$$

②' - ①' より

$$2a=4$$

$$a=2$$

$$a=2 \text{ を } ①' \text{ に代入}$$

$$b=-6$$

$$a=2, b=-6 \text{ を } ① \text{ に代入}$$

$$c=4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a=2 \\ b=-6 \\ c=4 \end{array} \right.$$

(2) ① + ② より

$$2x-y=4 \cdots ①'$$

① + ③ より

$$4x+3y=18 \cdots ②'$$

$$①' \times 2 - ②' \text{ より}$$

$$y=2$$

$$y=2 \text{ を } ①' \text{ に代入}$$

$$x=3$$

$$x=2, y=3 \text{ を } ① \text{ に代入}$$

$$z=1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array} \right.$$

2次関数のグラフが3点(2, -2), (3, 5), (-1, 1)を通るとき、その

2次関数を求めよ。

2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。

(2, -2) をトーレンで

$$-2 = 4a + 2b + c \cdots ①$$

(3, 5) をトーレンで

$$5 = 9a + 3b + c \cdots ②$$

(-1, 1) をトーレンで

$$1 = a - b + c \cdots ③$$

$$\left. \begin{array}{l} -2 = 4a + 2b + c \cdots ① \\ 5 = 9a + 3b + c \cdots ② \\ 1 = a - b + c \cdots ③ \end{array} \right\}$$

② - ① エリ

$$5a + b = 7 \cdots ④$$

② - ③ エリ

$$8a + 4b = 4$$

$$2a + b = 1 \cdots ⑤$$

④ - ⑤ エリ

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

$$a = 2 \text{ と } ⑤ \text{ に代入して } b = -3$$

$$a = 2, b = -3 \text{ と } ③ \text{ に代入して } c = -4$$

よって $y = 2x^2 - 3x - 4$

2つの実数 A, B について

$$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ または } B=0$$

練習
23

次の2次方程式を解け。

(1) $x(x+4)=0$

(2) $x^2-5x+6=0$

(3) $2x^2+3x+1=0$

(4) $3x^2-4x-4=0$

(1) $x = 0, -4$ (2) $(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2, 3$

(3) $(2x+1)(x+1) = 0$ (4) $(3x+2)(x-2) = 0$

$x = -1, -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{2}{3}, 2$

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は, $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき解をもち,

その解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**練習
24** 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 7x + 4 = 0$

(2) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

(3) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

(4) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

(1) 解の公式より

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

(2) 解の公式より

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

(3) $(3x+1)(x-3) = 0$

$$x = -\frac{1}{3}, 3$$

(4) $(2x+3)^2 = 0$

$$x = -\frac{3}{2}$$

**練習
25** 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 2x - 2 = 0$

(2) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

(3) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

(4) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

(1) 解の公式より

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

(2) 解の公式より

$$x = \frac{-(\pm 4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

(4) 解の公式より

$$x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{2} = \sqrt{3} \pm 1$$

$$(3) (x + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$x = -\sqrt{3}$$

実数解…方程式の実数の解

判別式 … 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の b^2-4ac . 基本 $D=b^2-4ac$ とする.

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
実数解	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 異なる2つの実数解	$x = -\frac{b}{2a}$ 重解(実数解)	実数解はない
実数解の個数	2個	1個	0個

特に、「 $D \geq 0 \Leftrightarrow$ 2次方程式が実数解をもつ」が成り立つ。

練習
26

次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2 + 3x - 5 = 0$

(2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$

(3) $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

2次方程式の判別式をDとする。

(1) $D = 3^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 29$

$D > 0$ より異なる実数解 2コ

(2) $D = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 4 = -23$

$D < 0$ より実数解 0コ

(3) $D = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 1 = 0$

$D = 0$ より実数解 1コ

練習
27 2次方程式 $x^2 - 4x + m + 8 = 0$ が実数解をもたないとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

2次方程式の判別式をDとする。

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (m + 8) = -4m - 16$$

$x^2 - 4x + m + 8 = 0$ が実数解をもたないの $\Leftrightarrow D < 0$

$$-4m - 16 < 0$$

$$-4m < 16$$

$$m > -4$$

練習
28 2次方程式 $x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

2次方程式の判別式をDとする。

$$D = (m+2)^2 - 4 \times 1 \times (m+5) = m^2 - 16$$

$x^2 + (m+2)x + m + 5 = 0$ が重解をもつ $\Leftrightarrow D = 0$

$$m^2 - 16 = 0$$

$$m^2 = 16$$

$$m = \pm 4$$

(1) $m = 4$ のとき 2次方程式は $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3$$

(2) $m = -4$ のとき 2次方程式は $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

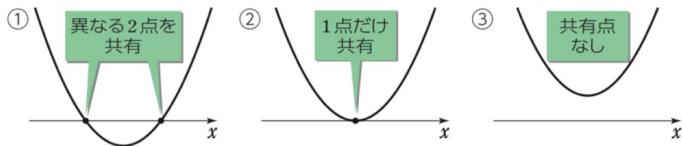
$$m = 4 \text{ のとき } x = -3$$

$$\underline{m = -4 \text{ のとき } x = 1}$$

6 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数のグラフと x 軸の位置関係は、共有点の個数に着目すると、次の①、②、③のような3つの場合に分類できる。

ここでは、これらの場合についてもう少し詳しく調べることにしよう。



②のようにグラフと x 軸が1点のみで交わるととき
グラフと x 軸は接するという。
また、その共有点を接点という。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ が x 軸と共有点をもつとき 共有点の x 座標は
 $y = 0$ のときの x の値つまり $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。

練習 29 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。また、グラフ
が x 軸に接するものはどれか。

$$(1) \ y = x^2 - 2x - 3$$

$$(2) \ y = -x^2 + 3x - 1$$

$$(3) \ y = 2x^2 + 4x + 2$$

$$(4) \ y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$(1) \ x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (2) \ -x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3, -1$$

$$(3, 0) \text{ と } (-1, 0)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \text{ と } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

$$(3) \ 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

$$(-1, 0)$$

$$(4) \ 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(2x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, 3$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \text{ と } (3, 0)$$

グラフが x 軸に接するのは (3)

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、
次のことがいえる。

- 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と一致する。
- 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数は、103ページの表
のように判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号によって分類される。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$ のとき			
$a < 0$ のとき			
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
x 軸との共有点の個数	2個	1個	0個
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	実数解はない

練習 30

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

$$(1) y = x^2 + 3x + 3 \quad (2) y = -2x^2 + 5x + 1 \quad (3) y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

(1) $x^2 + 3x + 3 = 0$ として判別式を D とすると

$$D = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$$

$D < 0$ により x 軸との共有点の個数は0個

(2) $-2x^2 + 5x + 1 = 0$ として判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 33$$

$D > 0$ により x 軸との共有点の個数は2個

(3) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ として判別式を D とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 0$$

$D = 0$ により x 軸との共有点の個数は1個

2次関数 $y = x^2 - 2x - m - 1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、定数 m の値によってどのように変わるか。

$x^2 - 2x - m - 1 = 0$ として 判別式を D とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m - 1) = 4m + 8$$

$D > 0$ のとき、つまり $4m + 8 > 0, m > -2$ のとき 共有点の個数は 2 個

$D = 0$ のとき、つまり $4m + 8 = 0, m = -2$ のとき 共有点の個数は 1 個

$D < 0$ のとき、つまり $4m + 8 < 0, m < -2$ のとき 共有点の個数は 0 個

よって

$m > -2$ のとき 2 個

$m = -2$ のとき 1 個

$m < -2$ のとき 0 個

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ が共有点をもつとき、
 その点の x 座標は、2つの方程式から y を消去して得られる2次方程式
 $ax^2 + bx + c = mx + n$ の実数解である。

練習

1

放物線 $y = x^2 - 6x + 10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = 2x - 5$

(2) $y = -2x + 6$

(1) $x^2 - 6x + 10 = 2x - 5$

(2) $x^2 - 6x + 10 = -2x + 6$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 3, 5$

$x = 2$

$x = 3 \text{ のとき } y = 2x - 5 \text{ なり}$

$y = -2x + 6 \text{ なり}$

$y = 2 \times 3 - 5 = 1 \quad \text{よって}$

$y = -2 \times 2 + 6 = 2$

$x = 5 \text{ のとき } y = 2x - 5 \text{ なり}$
 $y = 2 \times 5 - 5 = 5$

$\xrightarrow{(3, 1)(5, 5)}$

$\xrightarrow{\text{よって } (2, 2)}$

一般に、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ が接するのは、
2次方程式 $ax^2 + bx + c = mx + n$ が重解をもつときである。

練習
2

放物線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

$$x^2 - 3x = x + k$$

$$x^2 - 4x - k = 0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

放物線と直線が接するのは2次方程式が重解をもつとき、 $D = 0$ である。

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 16 + 4k = 0$$

$$k = -4$$

$k = -4$ を $x^2 - 4x - k = 0$ に代入すると

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = x + k \text{ より } y = 2 - 4 = -2$$

よって $k = -4$

$$(2, -2)$$

1

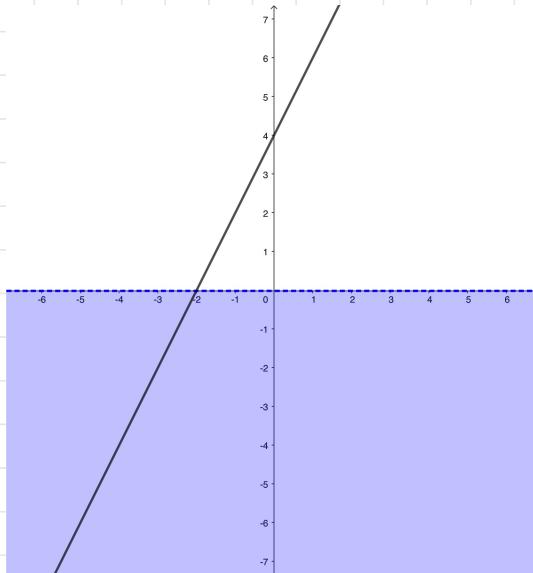
・ 1次不等式と1次関数

練習
32 1次関数のグラフを利用して、次の1次不等式の解を求めよ。

(1) $2x+4 < 0$

(2) $-3x+6 \leq 0$

(1)

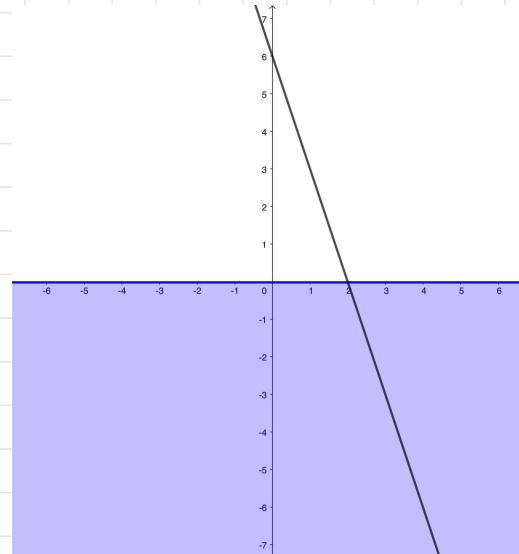


$2x+4 < 0$ の解は

$y=2x+4$ について $y < 0$ となる

x の値の範囲、 $x < -2$ である。

(2)



$-3x+6 \leq 0$ の解は

$y=-3x+6$ について $y \leq 0$ となる

x の値の範囲、 $x \geq 2$ である。

- 2次不等式と2次関数

2次関数がx軸と異なる2点で交わる

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で $ax^2 + bx + c = 0$ とし その解を α, β ($\alpha < \beta$) とする

$$ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x < \alpha, \beta < x$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha, \beta \leq x$$

次の2次不等式を解け。

(1) $(x-1)(x-3) > 0$

(3) $x(x+1) \leq 0$

(5) $x^2 + 5x + 6 > 0$

(2) $(x+2)(x-5) < 0$

(4) $x^2 - x - 2 \geq 0$

(6) $x^2 \leq 9$

(1) $x < 1, 3 < x$ (2) $-2 < x < 5$

(3) $-1 \leq x \leq 0$ (4) $(x-2)(x+1) \geq 0$

$x \leq -1, 2 \leq x$

(5) $(x+2)(x+3) > 0$ (6) $x^2 - 9 \leq 0$

$x < -3, -2 < x$

$(x+3)(x-3) \leq 0$

$-3 \leq x \leq 3$

次の2次不等式を解け。

(1) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

(3) $x^2 + 2x - 1 \leq 0$

(2) $2x^2 + 5x + 3 < 0$

(4) $x^2 - 5 > 0$

(1) $(2x-1)(x-2) \geq 0$

$x \leq \frac{1}{2}, 2 \leq x$

$-\frac{3}{2} < x < -1$

(3) $x^2 + 2x - 1 = 0$ とて

解の公式より

$x = -1 \pm \sqrt{2}$ なので

(4) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) > 0$

$x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < x$

$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$

次の2次不等式を解け。

(1) $-2x^2 + x + 1 < 0$

(2) $-3x^2 + 5x - 1 \geq 0$

(1) $2x^2 - x - 1 > 0$

(2) $3x^2 - 5x + 1 \leq 0$

$(2x+1)(x-1) > 0$

$3x^2 - 5x + 1 = 0$ として

解の公式より

$x < -\frac{1}{2}, 1 < x$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ なので

$\frac{5 - \sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$

2次関数がx軸と接する

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で $ax^2 + bx + c = 0$ とし その解を α とすると

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad a: \text{以外のすべての実数}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{すべての実数}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{解なし}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad x = a$$

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 4x + 4 > 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 < 0$

(3) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

(4) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

(1) $(x - 2)^2 > 0$

(2) $(x - 5)^2 < 0$

2以外のすべての実数 解なし

(3) $(x + 3)^2 \leq 0$

(4) $(2x + 1)^2 \geq 0$

$x = -3$

すべての実数

2次関数がx軸と共有点をもたない

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を $ax^2 + bx + c = 0$ とし 解はない

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{すべての実数}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{すべての実数}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{解なし}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \text{解なし}$$

次の2次不等式を解け。

$$(1) \quad x^2 - 4x + 6 > 0$$

$$(2) \quad x^2 - 2x + 2 \leq 0$$

$$(3) \quad 2x^2 + 4x + 3 < 0$$

$$(4) \quad 2x^2 + 8x + 10 \geq 0$$

$$(1) \quad y = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$$

頂点(2, 2)なのでx軸と共有点はない。

$x^2 - 4x + 6 > 0$ はすべての実数

$$(2) \quad y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$

頂点(1, 1)なのでx軸と共有点はない。

$x^2 - 2x + 2 \leq 0$ は解なし

$$(3) \quad y = 2x^2 + 4x + 3 = 2(x+1)^2 + 1$$

頂点(-1, 1)なのでx軸と共有点はない。

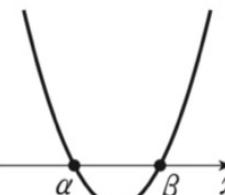
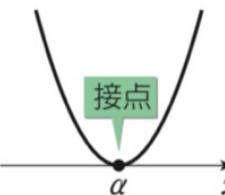
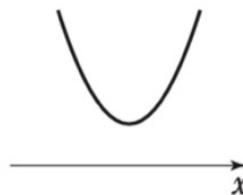
$2x^2 + 4x + 3 < 0$ は解なし

$$(4) \quad y = 2x^2 + 8x + 10 = 2(x+2)^2 + 2$$

頂点(-2, 2)なのでx軸と共有点はない。

$2x^2 + 8x + 10 \geq 0$ はすべての実数

2次不等式の解についてのまとめ ($a > 0$ の場合)

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 の位置関係			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \alpha, \beta$ 	$x = \alpha$ 	実数解はない
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha, \beta < x$ 	α 以外の すべての実数 	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geq 0$ の解	$x \leq \alpha, \beta \leq x$ 	すべての実数 	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$ 	解はない 	解はない
$ax^2 + bx + c \leq 0$ の解	$\alpha \leq x \leq \beta$ 	$x = \alpha$ 	解はない

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 3x + 5 > 0$

(2) $-x^2 + x - 1 \geq 0$

(3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 \leq 0$

(4) $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

(1) $x^2 - 3x + 5 = 0$ の判別式をDとすると

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$

また、 x^2 の係数は正なので解はすべての実数。

(3) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ とすると

$(\sqrt{3}x - 1)^2 = 0$

また、 x^2 の係数は正なので解は

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $-x^2 + x - 1 = 0$ の判別式をDとすると

$D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$

また、 x^2 の係数は負なので解はない

(4) $x^2 - 3x + 2 > 2x^2 - x$

$x^2 + 2x - 2 < 0$

(5) $x^2 + 2x - 2 = 0$ の判別式をDとすると

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 > 0$ なので

解の公式^{よ'})

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = -1 \pm \sqrt{3}$

よ、て

$-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$

2次関数 $y = x^2 + 2mx + 3$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつ

\Rightarrow 1点 or 2点で交わる \Rightarrow 判別式を D とすると $D \geq 0$

$$x^2 + 2mx + 3 = 0 \text{ とすると}$$

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4m^2 - 12$$

$\therefore D \geq 0$ なので

$$4m^2 - 12 \geq 0$$

$$m^2 - 3 \geq 0$$

$$m \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq m$$

2次不等式 $-x^2 + mx + m < 0$ の解がすべての実数であるとき、定数

m の値の範囲を求めよ。

$$-x^2 + mx + m < 0$$

$$x^2 - mx - m > 0 \cdots \textcircled{1}$$

①にはついて解がすべての実数であるためには

判別式 $D < 0$ である。

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = m^2 + 4m$$

$$D < 0 \text{ で } \textcircled{1}$$

$$m^2 + 4m < 0$$

$$m(m+4) < 0$$

$$-4 < m < 0$$

+

練習
41

次の連立不等式を解け。

(1)
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

(1) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$(x-1)(x-4) \leq 0$

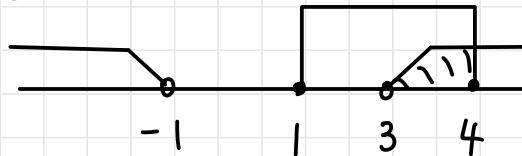
$1 \leq x \leq 4 \cdots ①$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$(x-3)(x+1) > 0$

$x < -1, 3 < x \cdots ②$

①② 積)



$3 < x \leq 4$

(2)
$$\begin{cases} x^2 + x > 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

(2) $x^2 + x > 0$

$x(x+1) > 0$

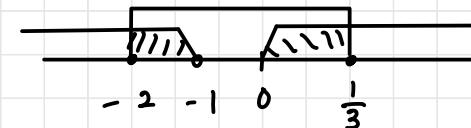
$x < -1, 0 < x \cdots ①$

$3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

$(3x-1)(x+2) \leq 0$

$-2 \leq x \leq \frac{1}{3} \cdots ②$

①② 積)



$-2 \leq x < -1, 0 < x \leq \frac{1}{3}$

次の不等式を解け。

(1) $-2 \leq x^2 + 3x \leq 4$

(2) $5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x^2 + 3x \\ x^2 + 3x \leq 4 \end{array} \right.$$

$-2 \leq x^2 + 3x \text{ ①)}$

$x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$(x+1)(x+2) \geq 0$

$x \leq -2, -1 \leq x \cdots \text{①}$

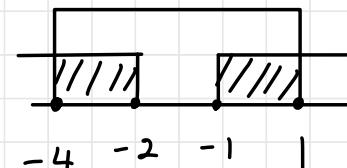
$x^2 + 3x \leq 4 \text{ ②)}$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

$(x+4)(x-1) \leq 0$

$-4 \leq x \leq 1 \cdots \text{②}$

①②より



$-4 \leq x \leq -2$

$-1 \leq x \leq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 < x^2 - 4x \\ x^2 - 4x \leq 6 - 3x \end{array} \right.$$

$5 < x^2 - 4x \text{ ①)}$

$x^2 - 4x - 5 > 0$

$(x-5)(x+1) > 0$

$x < -1, 5 < x \cdots \text{①}$

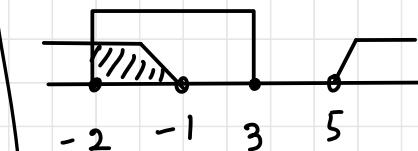
$x^2 - 4x \leq 6 - 3x \text{ ②)}$

$x^2 - x - 6 \leq 0$

$(x-3)(x+2) \leq 0$

$-2 \leq x \leq 3 \cdots \text{②}$

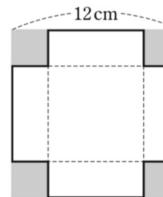
①②より



$-2 \leq x < -1$

1辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。

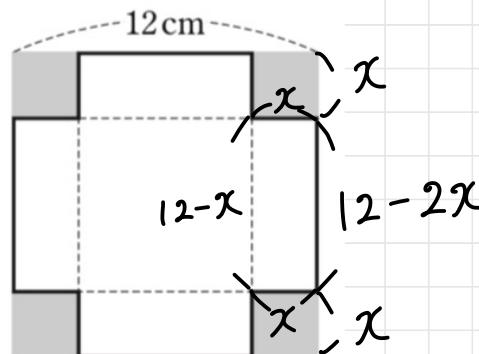
この厚紙の四隅から合同な正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。底面の正方形の1辺が 6 cm 以上で、側面の4個の長方形の面積の和を 40 cm^2 以上にするとき、切り取る正方形の1辺の長さをどうのような範囲にとればよいか。



側面の長方形の面積は $x(12-2x)$

切り取る正方形の1辺の長さを $x \text{ cm}$ とする。

側面の4つの長方形の面積の和が 40 cm^2 以上なので



$$4x(12-2x) \geq 40$$

$$x(12-2x) \geq 10$$

$$12x - 2x^2 \geq 10$$

$$2x^2 - 12x + 10 \leq 0$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 5 \cdots ②$$

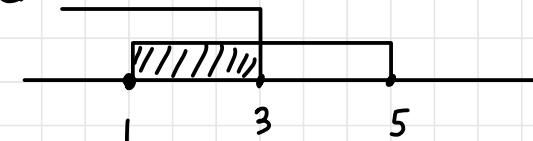
底面の正方形の1辺が 6 cm 以上なので

$$12 - 2x \geq 6$$

$$-2x \geq -6$$

$$x \leq 3 \cdots ①$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{ は } 1$$



$$1 \leq x \leq 3$$

$1 \text{ cm} \text{ 以上 } 3 \text{ cm} \text{ 以下}$

練習
44 2次関数 $y = x^2 + 2mx + m + 6$ のグラフと x 軸の負の部分が、異なる2点で交わるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

$$x^2 + 2mx + m + 6 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とする。}$$

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 6) = 4m^2 - 4m - 24$$

x 軸と異なる2点で交わるので $D > 0$

$$4m^2 - 4m - 24 > 0$$

$$m^2 - m - 6 > 0$$

$$(m-3)(m+2) > 0$$

$$m < -2, 3 < m \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } y &= x^2 + 2mx + m + 6 \\ &= (x+m)^2 - m^2 + m + 6 \end{aligned}$$

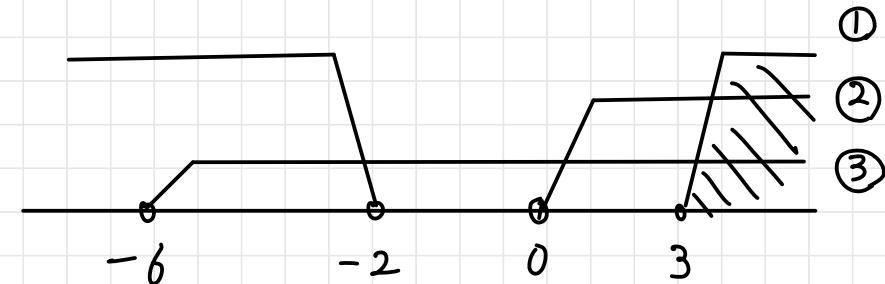
グラフの軸は y 軸の左側なので $-m < 0 \text{ すなはち}$

$$m > 0 \dots \textcircled{2}$$

y 切片は正なので $m + 6 > 0 \text{ すなはち}$

$$m > -6 \dots \textcircled{3}$$

\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} より



$$3 < m$$

練習

1

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = |x + 2|$

(2) $y = |x^2 - 1|$

(3) $y = |x^2 - 2x - 3|$

(1) $x + 2 \geq 0$ のとき

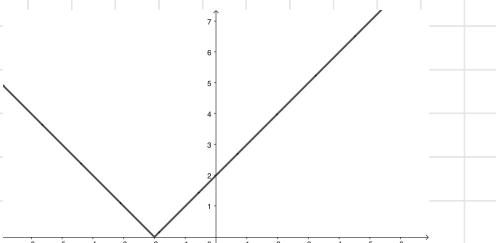
つまり $x \geq -2$ のとき

$y = x + 2$

$x + 2 < 0$ のとき

つまり $x < -2$ のとき

$y = -x - 2$



(2) $x^2 - 1 \geq 0$ のとき

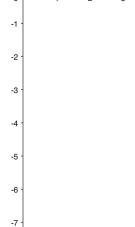
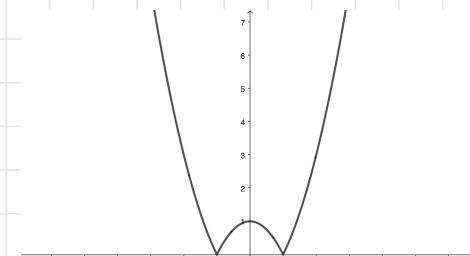
つまり $x \leq -1$, $1 \leq x$ のとき

$y = x^2 - 1$

$x^2 - 1 < 0$ のとき

つまり $-1 < x < 1$ のとき

$y = -x^2 + 1$



(3) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ のとき

つまり $x \leq -1$, $3 \leq x$ のとき

$y = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 < 0$ のとき

つまり $-1 < x < 3$ のとき

$y = -x^2 + 2x + 3$

