

數Ⅱ

三角関数

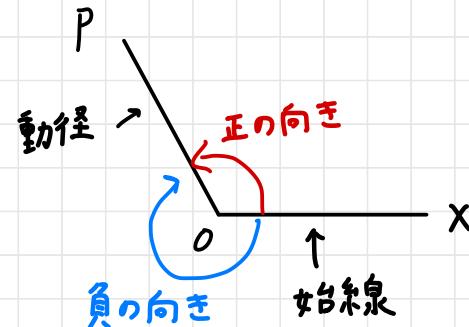


三角関数

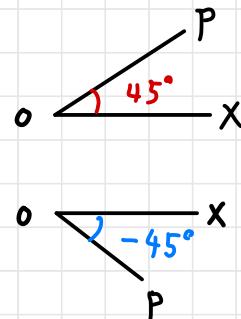
動径 … 平面上で点Oを中心として回転させる半直線OP

始線 … 動径の最初の位置を示す半直線OX

- } . 反時計回りを 正の向き
- } . 時計回りを 負の向き



- } . 正の向きに回った角を正の角
- } . 負の向きに回った角を負の角



一般角

→ 回転の向きと大きさをもつ量として
拡張した角

θ を一般角とし、原点 O から θ だけ回転した位置にある動径 OP を θ の動径という。

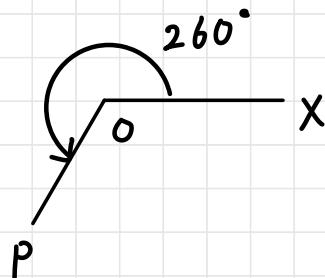
練習

1

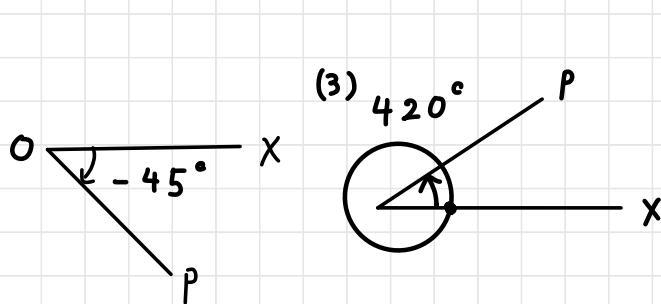
次の角の動径を図示せよ。

- (1) 260° (2) -45° (3) 420° (4) 750° (5) -240°

(1)



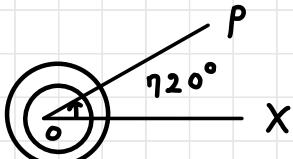
(2)



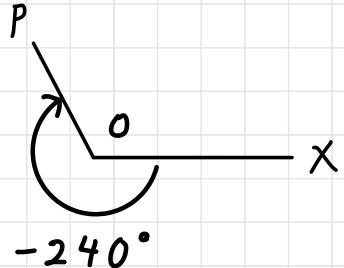
(3) 420°



(4)



(5)

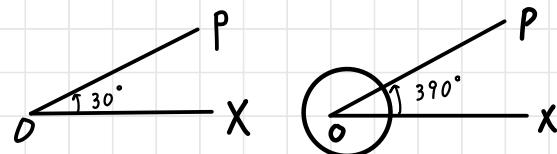


動径の表す角

動径は1回転で 360° すると同じ位置にくる。

動径OPと半直線OXのなす角の1つを α とすると動径OPの表す角は $\alpha + 360^\circ \times n$ (nは整数)

(例) 30° と 390° の動径



$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1$$

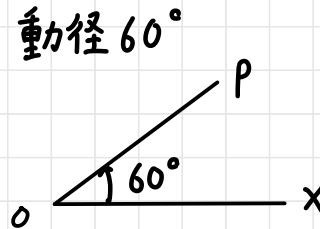
また, $30^\circ + 360^\circ \times 2 = 750^\circ$

$$30^\circ + 360^\circ \times (-1) = -330^\circ \text{ エリ}$$

$30^\circ, 390^\circ, 750^\circ, -330^\circ$ の動径はすべて同じ位置にある。

次の角のうち、その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか。

$300^\circ, 420^\circ, 1040^\circ, -60^\circ, -300^\circ, -780^\circ$



$$60^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times 0$$

$$300^\circ = \underline{-60^\circ} + 360^\circ \times 1$$

$$420^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times 1$$

$$1040^\circ = \underline{-40^\circ} + 360^\circ \times 3$$

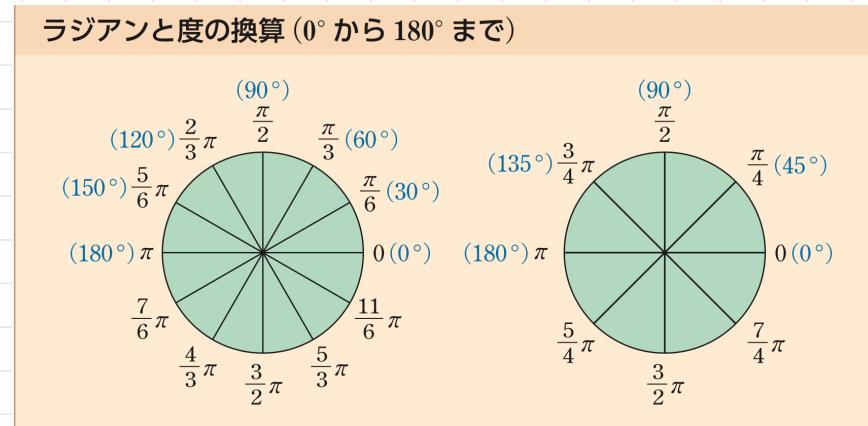
$$-60^\circ = -60^\circ + 360^\circ \times 0$$

$$-300^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times (-1)$$

$$-780^\circ = \underline{-60^\circ} + 360^\circ \times (-2)$$

$$\underline{420^\circ \text{ と } -300^\circ}$$

- ・度数法…度($^{\circ}$)を単位とする角の表し方
- ・弧度法…ラジアンを単位とする角の表し方
- ・ラジアン…円において半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさ



また、弧度法では

動径OPと始線線OXのなす角の1つを α とすると動径OPの表す角は $\alpha + 2n\pi$ (nは整数)

次のことを確かめよ。

(1) 180° は π ラジアン

(2) 1 ラジアンは $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

(1)

弧の長さ l に対する中心角の大きさが 1 ラジアンである中心角 180° の弧は半円となるので

弧の長さは $2\pi \times \frac{l}{2} = \pi$

したがって、弧の長さ π に対する中心角の大きさは π ラジアンである。

(2)

1 ラジアンに対する中心角の大きさを α° とする。

(1) より、弧の長さ π に対する中心角の大きさは π ラジアンであるので

$$\pi : 180^\circ = 1 : \alpha^\circ$$

よって、 $\alpha = \frac{180}{\pi}$

したがって、1 ラジアンは $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

度数法 → 弧度法

弧度法 → 度数法

$\frac{\pi}{180}$ をかける

$\frac{180}{\pi}$ をかける

練習
4

次の(1)～(3)の角を弧度法で表せ。また、(4), (5)の角を度数法で表せ。

- (1) 210° (2) 240° (3) 330° (4) $\frac{5}{4}\pi$ (5) $\frac{3}{2}\pi$

(1)

$$210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$$

(2)

$$240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$$

(3)

$$330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

(4)

$$\frac{5}{4}\pi \times \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

(5)

$$\frac{3}{2}\pi \times \frac{180}{\pi} = 270^\circ$$

扇形の弧の長さと面積

半径 r , 中心角 θ (ラジアン) の扇形の弧の長さ l , 面積 S は

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}lr$$

練習 5 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 4, 中心角 $\frac{\pi}{3}$

(2) 半径 6, 中心角 $\frac{7}{6}\pi$

(1)

$$l = r\theta = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

(2)

$$l = r\theta = 6 \times \frac{7}{6}\pi = 7\pi$$

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 4 = \frac{8}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 7\pi \times 6 = 21\pi$$

三角関数

座標平面上で、 x 軸由の正の部分を始点として一般角 θ の動径と原点を中心とする

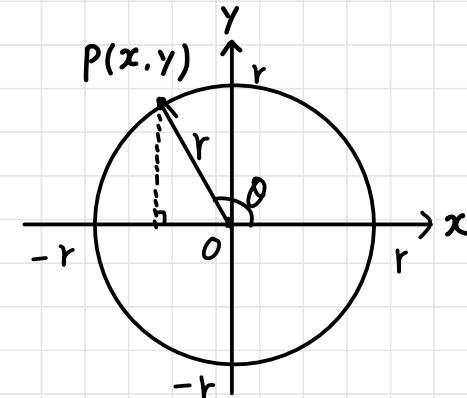
半径 r の円との交点 P の座標を (x, y) とすると

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(正弦)

(余弦)

(正接)



これらは全て θ の関数であり、 θ の三角関数という。

$\because \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) に対して $\tan \theta$ は定義されない。

練習
6

次の θ について、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。

$$(1) \quad \theta = \frac{5}{4}\pi$$

$$(2) \quad \theta = \frac{11}{6}\pi$$

$$(3) \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$(1) \quad \sin \frac{5}{4}\pi \left(= \sin 225^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{5}{4}\pi \left(= \cos 225^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi \left(= \tan 225^\circ\right) = 1$$

$$(2) \quad \sin \frac{11}{6}\pi \left(= \sin 330^\circ\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi \left(= \cos 330^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11}{6}\pi \left(= \tan 330^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \quad \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

原点を中心半径1の円を単位円という。

単位円では $r=1$ なので一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とする

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

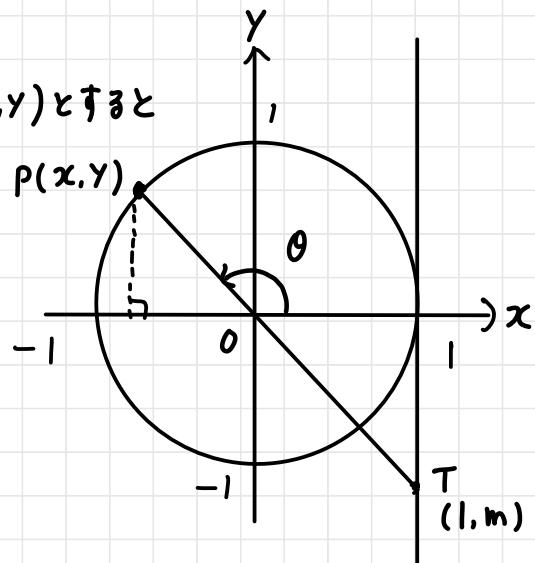
また、 OP と直線 $x=1$ の交点を $T(1, m)$ すると

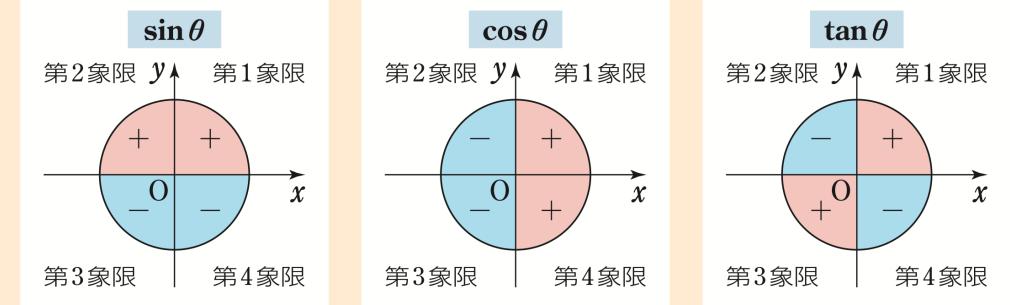
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = m$$

$$\therefore y = \sin \theta, x = \cos \theta, m = \tan \theta$$

点 P は単位円の周上を動き、そのとき点 T は直線 $x=1$ 上のすべての点を動くので

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1, \tan \theta \text{ の値の範囲は実数全体}$$





練習 次の条件を満たすような θ の動径は、第何象限にあるか。

- 7 (1) $\sin \theta < 0$ かつ $\cos \theta > 0$ (2) $\cos \theta < 0$ かつ $\tan \theta > 0$

(1) 第4象限

(2) 第3象限

三角関数の相互関係

$$\cdot \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \cdot 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

練習
8

θ の動径が第4象限にあり、 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

θ の動径が第4象限なので

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{より}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta > 0 \text{ より}$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

θ の動径が第3象限にあり、 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求める。

θ の動径が第3象限 $\rightarrow \sin \theta < 0$

$$\cos \theta < 0$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{式1}$$

$$\cos \theta < 0 \text{ より}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{式2}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \times \tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times 2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$(1) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$-2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$(2) \sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{13}{9}$$

$$= \frac{13}{27}$$

等式 $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$ を証明せよ。

$$(右辺) = \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right) \cdot \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)^2 - \sin^2\theta$$

$$= (\tan\theta)^2 - \sin^2\theta$$

$$= \tan^2\theta - \sin^2\theta = (左辺)$$

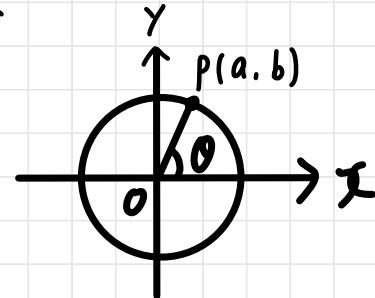
よって (左辺) = (右辺) となるので"

$$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$$

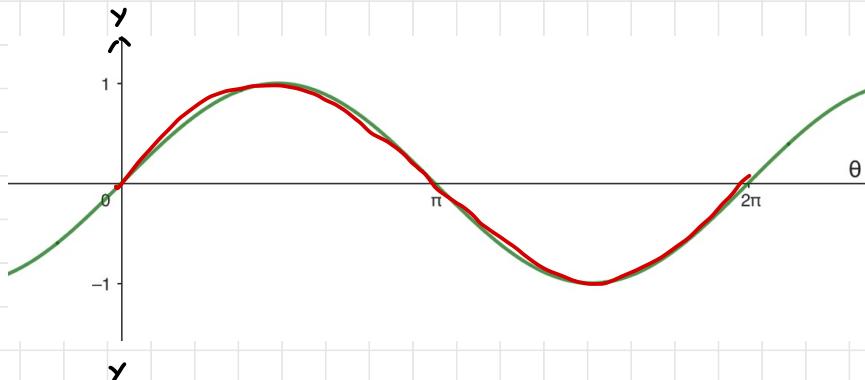
三角関数のグラフ (グラフの形と周其月をおさえる)

グラフがもとの形にもどるまで

一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(a, b)$ とすると $\sin \theta = b, \cos \theta = a$
 $\sin \theta$ は y 座標, $\cos \theta$ は x 座標を表す。



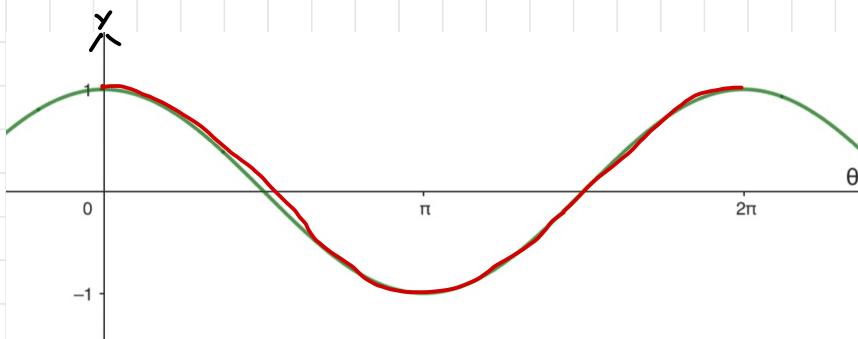
$$Y = \sin \theta$$



周期 2π

値域 $-1 \leq Y \leq 1$

$$Y = \cos \theta$$



周期 2π

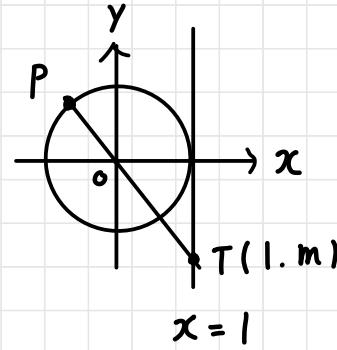
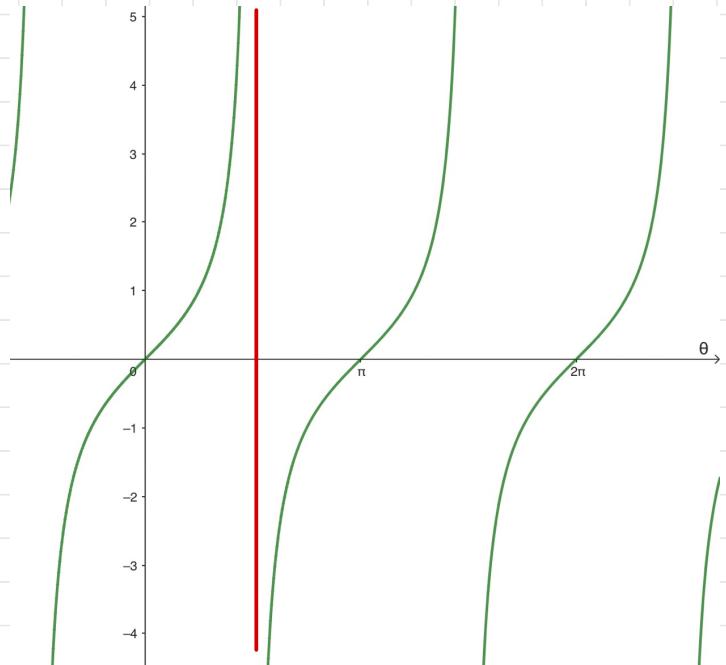
値域 $-1 \leq Y \leq 1$

一般角 θ の動径と単位円の交点をPとし、直線OPと直線 $x=1$ の交点をT(1, m)とすると

$$\tan \theta = m$$

$$y = \tan \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$



周期 π

値域実数全体

$\tan \theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ が定義されないためグラフは θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。
グラフが限りなく近づく直線を漸近線

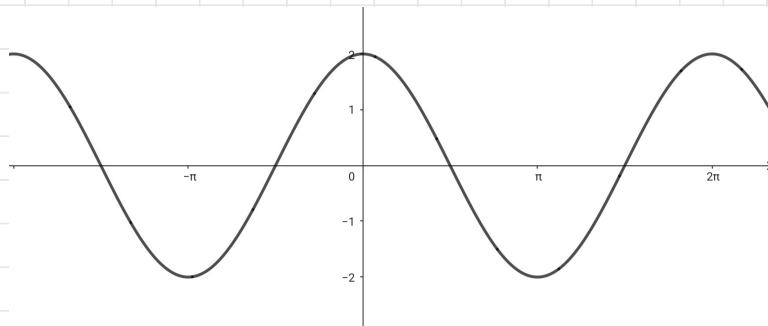
練習
12 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1) $y = 2 \cos \theta$

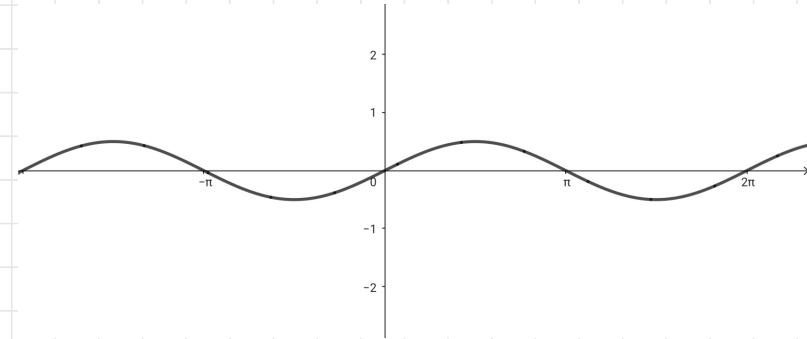
(2) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$

(3) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$

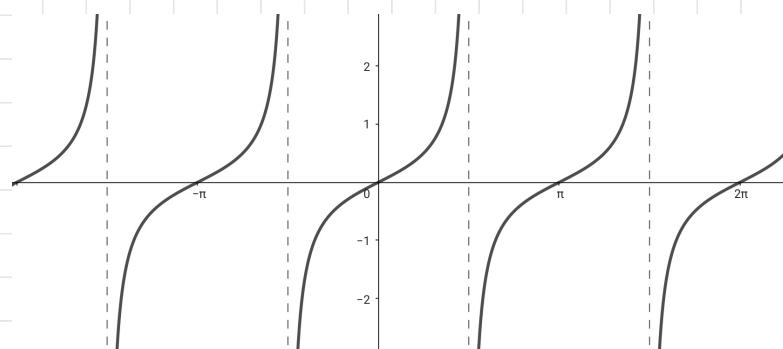
(1) $y = 2 \cos \theta$ 周期 2π



(2) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ 周期 2π



(3) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$ 周期 π

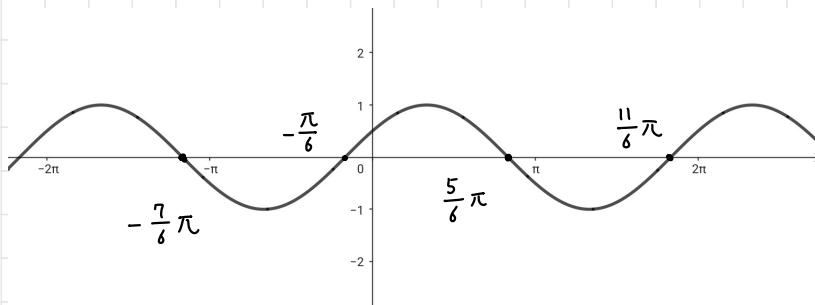


練習 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

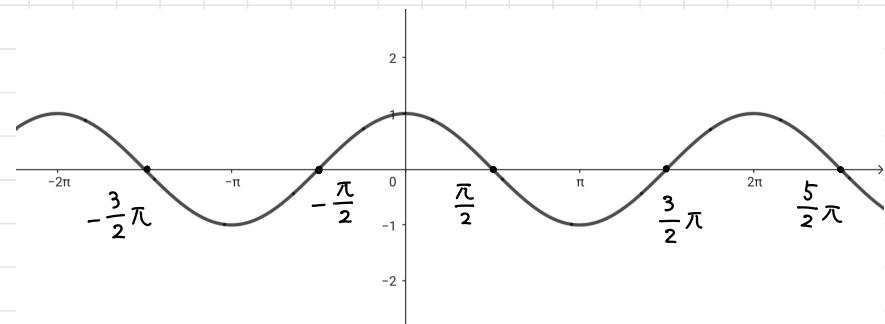
13

(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ (3) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

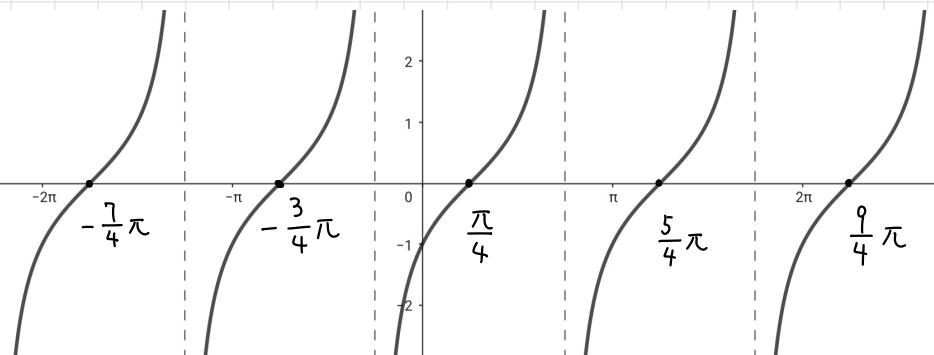
(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ 周期 2π



(2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 周期 2π



(3) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 周期 π



練習 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

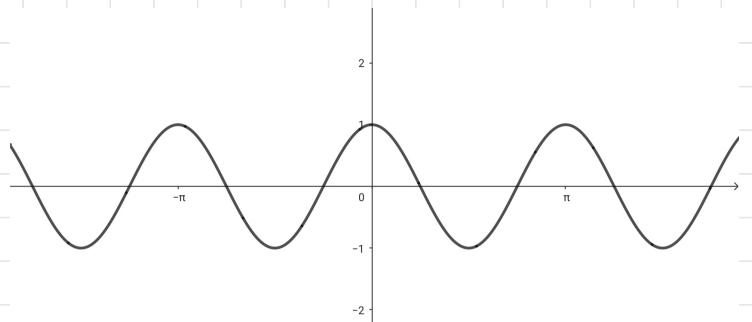
14

(1) $y = \cos 2\theta$

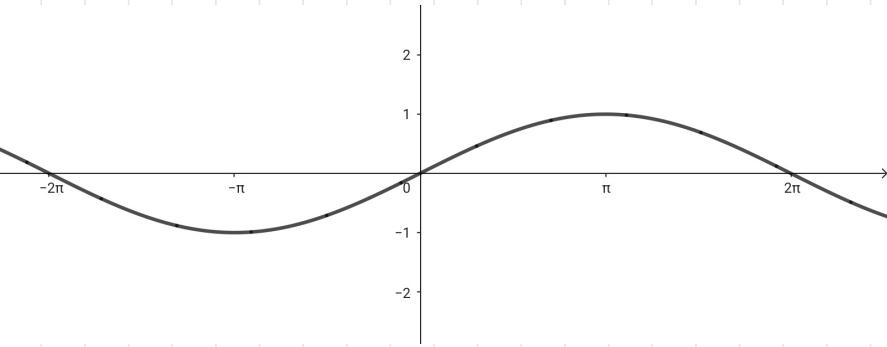
(2) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

(3) $y = \tan 2\theta$

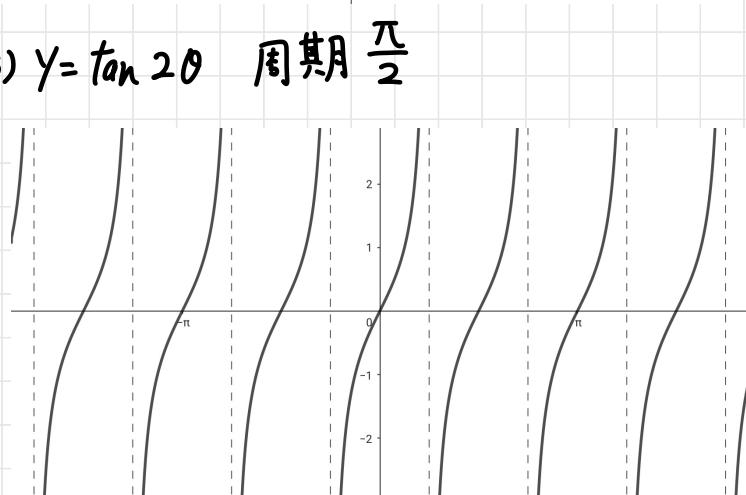
(1) $y = \cos 2\theta$ 周期 π



(2) $y = \sin \frac{\theta}{2}$ 周期 4π



(3) $y = \tan 2\theta$ 周期 $\frac{\pi}{2}$



k を正の定数とするとき

$\sin k\theta, \cos k\theta$ の周期はいずれも $\frac{2\pi}{k}$ である。

$\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{k}$ である。

$\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$
から
 $\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

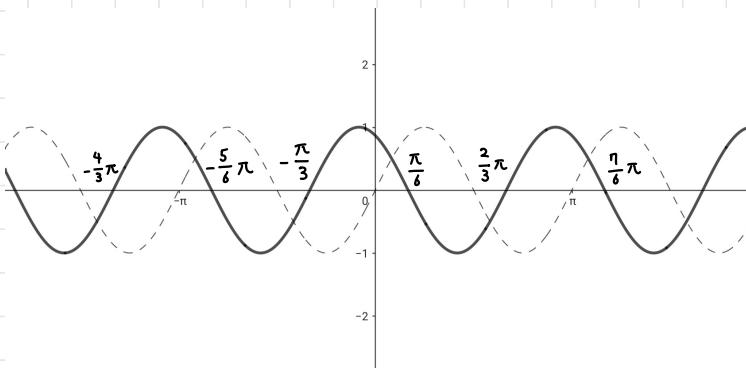
次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

$$(1) \quad y = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1) \quad y = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

周期 π

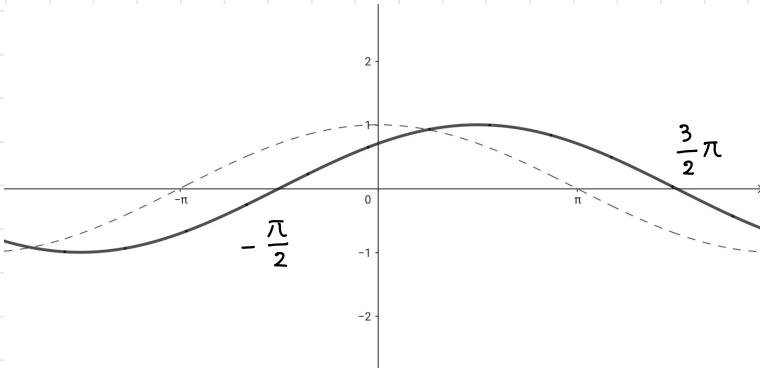


$y = \sin 2\theta$ のグラフを

θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動

$$(2) \quad y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

周期 4π



$y = \cos \frac{\theta}{2}$ のグラフを

θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動

三角関数で成り立つ等式

n を整数とする

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \\ \tan(\theta + \pi) = \tan \theta \end{array} \right.$$

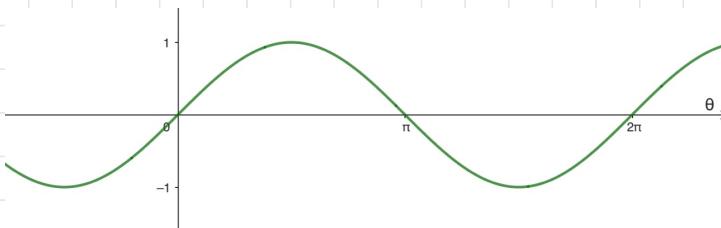
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{array} \right.$$

$y = f(x)$ について

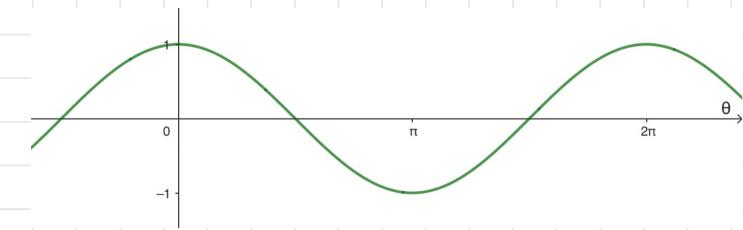
$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{奇関数} \\ f(-x) = f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{偶関数} \end{cases}$

$y = \sin \theta$



$y = \sin \theta$ は奇関数

$y = \cos \theta$



$y = \cos \theta$ は偶関数

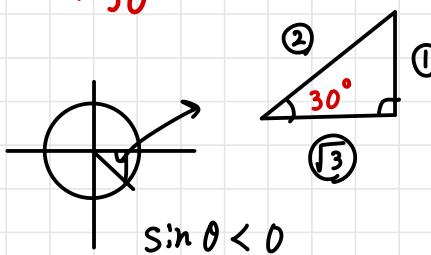
次の値を求めよ。

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

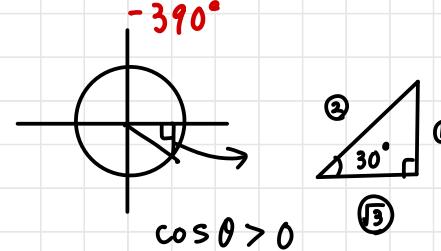
(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

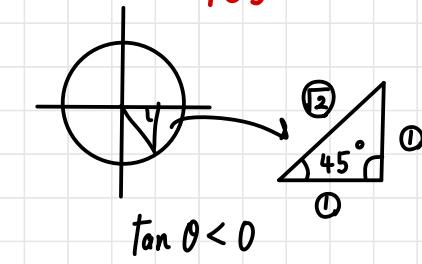
(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

 -30° 

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

 -390° 

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -1$

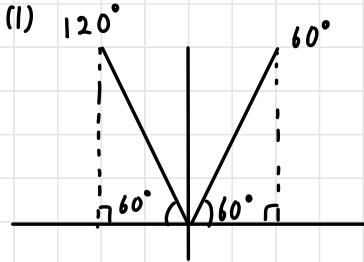
 -405° 

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

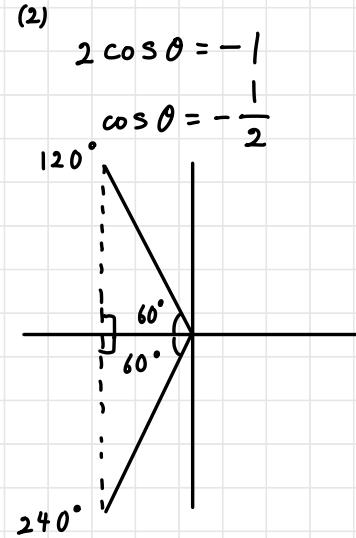
$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$(3) \sin \theta + 1 = 0$$



$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

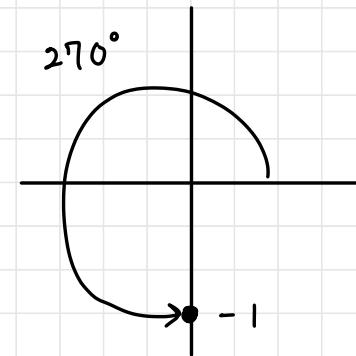


$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

(3)

$$\sin \theta = -1$$

$\sin \theta$ は座標平面では y 座標に対応



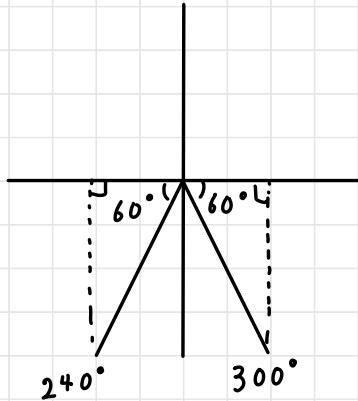
$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$

次の方程式を解け。

$$(1) \quad 2\sin\theta = -\sqrt{3}$$

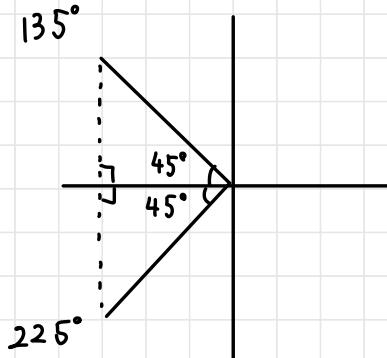
$$(2) \quad \sqrt{2} \cos\theta = -1$$

$$(1) \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{は整数})$$

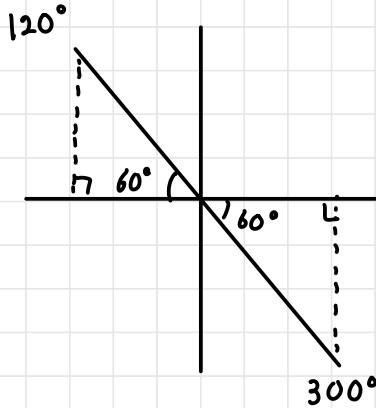
$$(2) \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{5}{4}\pi + 2n\pi \quad (n \text{は整数})$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$



$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

θ の値の範囲に制限がないとき

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1) \theta - \frac{\pi}{6} = t \text{ とおく}$$

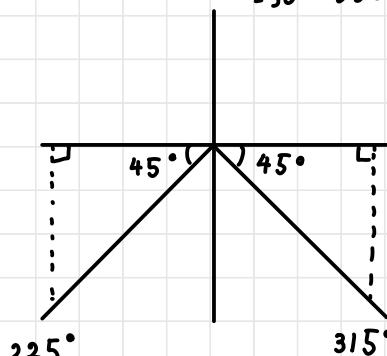
$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$0 - \frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

$$\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi)$$

$$-30^\circ \sim 330^\circ$$



$$t = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi \quad \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\theta = \frac{17}{12}\pi \quad \theta = \frac{23}{12}\pi$$

$$\theta = \frac{17}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ とおく}$$

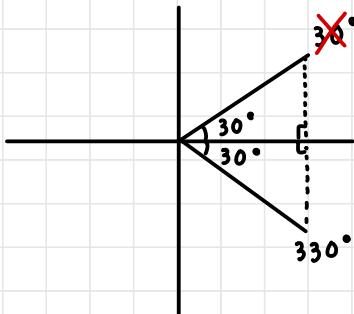
$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi)$$

$45^\circ \sim 405^\circ$



$$t = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ より}$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi \quad \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{19}{12}\pi \quad \theta = \frac{23}{12}\pi$$

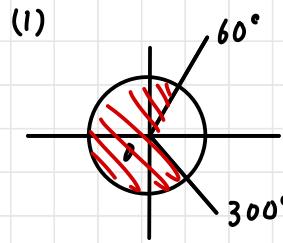
$$\theta = \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

$$(1) \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

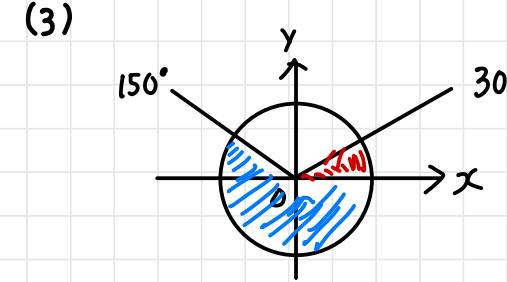
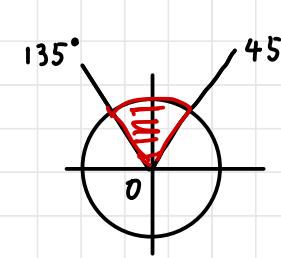
$$(2) \sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \sin \theta < \frac{1}{2}$$



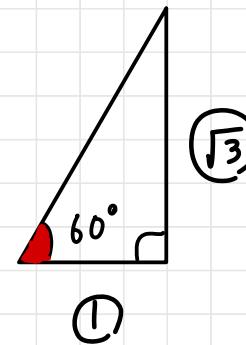
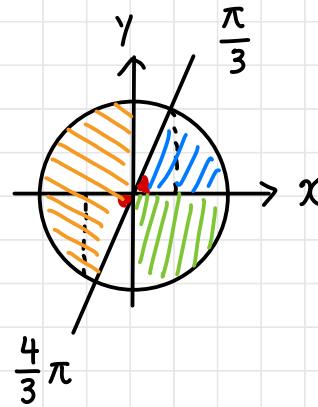
$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$$



$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\tan \theta \leq \sqrt{3}$ を解け。



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数

$$y = \cos^2 \theta - \cos \theta$$

の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$\cos \theta = t$ とする。

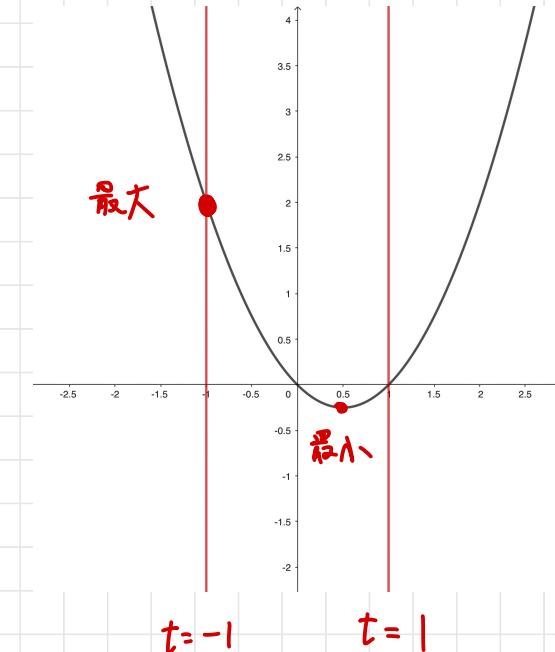
$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ なり}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = t^2 - t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$



$t = 1$ のとき、つまり $\theta = \pi$ のとき最大値 2

$t = \frac{1}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

(sin) (cos)

正弦・余弦の加法定理

1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

2 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

3 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

4 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

練習
24

加法定理を用いて、 $\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

練習
25

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、 $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) \\&= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

α の動径が第2象限, β の動径が第1象限にあり, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$,

$\cos \beta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

α が第2象限 \rightarrow

$$\begin{aligned}\sin \alpha &> 0 \\ \cos \alpha &< 0\end{aligned}$$

β が第1象限 \rightarrow

$$\begin{aligned}\sin \beta &> 0 \\ \cos \beta &> 0\end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ より}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha < 0 \text{ より}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$$

$$\sin \beta > 0 \text{ より}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{-3\sqrt{5} - 8}{15}$$

(tan)

正接の加法定理

5 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

6 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

練習
27

加法定理を用いて、 $\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ)$$

$$= \frac{\tan(45^\circ + 60^\circ)}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$= -2 - \sqrt{3}$$

練習
28

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、 $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

2 直線 $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{3}x + 1$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

とする。

x 軸と $y = 2x - 1$ がなす角を α とすると $\tan \alpha = 2$

x 軸と $y = \frac{1}{3}x + 1$ がなす角を β とすると $\tan \beta = \frac{1}{3}$

2 直線 $y = 2x - 1$ と $y = \frac{1}{3}x + 1$ がなす角 θ は $\theta = \alpha - \beta$

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} : \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$$\tan \theta = 1 \text{ たのこ。}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ より}$$

$$\underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

練習
30

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ のとき, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\cos 2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &> 0 \\ \tan \alpha &< 0 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ より} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ より}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha > 0 \text{ より}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -4\sqrt{5}$$

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$ であることを用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2) \cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

(1)

$$(\text{左辺}) = \sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$$

$$= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$= (\text{右辺})$

$(\text{左辺}) = (\text{右辺})$ となるので

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(2)

$$(\text{左辺}) = \cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$$

$$= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$$

$$= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha$$

$$= -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

$= (\text{右辺})$

$(\text{左辺}) = (\text{右辺})$ となるので

$$\cos 3\alpha = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$$

半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

練習
32

半角の公式を用いて、次の値を求めよ。

$$(1) \quad \sin \frac{\pi}{8}$$

$$(2) \quad \sin \frac{3}{8}\pi$$

$$(3) \quad \cos \frac{3}{8}\pi$$

(1)

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ で } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

(2)

$$\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 - \cos \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2} \text{ で } \sin \frac{3}{8}\pi > 0$$

$$\sin \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

(3)

$$\cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 + \cos \frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos \frac{3}{8}\pi > 0$$

$$\cos \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

練習
33 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $\sin \frac{\alpha}{2}$

(2) $\cos \frac{\alpha}{2}$

(3) $\tan \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので

$\sin \frac{\alpha}{2} > 0, \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \tan \frac{\alpha}{2} > 0$

(1)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$$

$\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(2)

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

$\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

(3)

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} > 0$$
 より

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 3$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta + \sin \theta = 1$

(2) $\cos 2\theta + \sin \theta > 1$

$$(1) -2\sin^2 \theta + \sin \theta = 1$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$-\sin \theta (2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = 0, \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ かつ}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$$

(2)

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta > 1$$

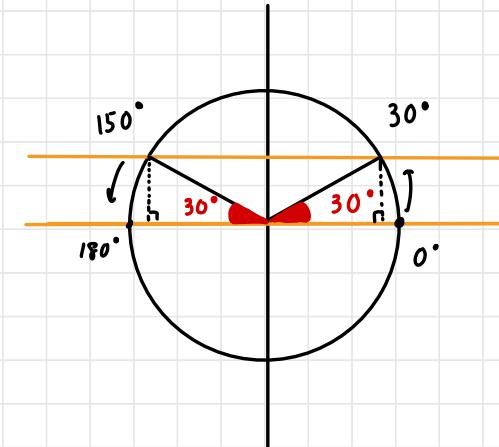
$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta > 0$$

$$2\sin^2 \theta - \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta (2\sin \theta - 1) < 0$$

$$0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$$

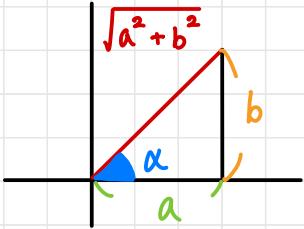
$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$



三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



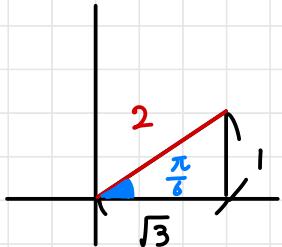
練習
35

次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表せ。ただし, $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

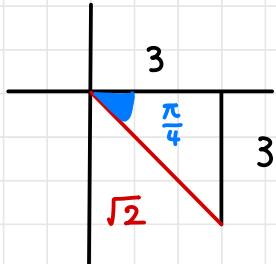
(1) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

(1)



(2)



$$\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より}$$

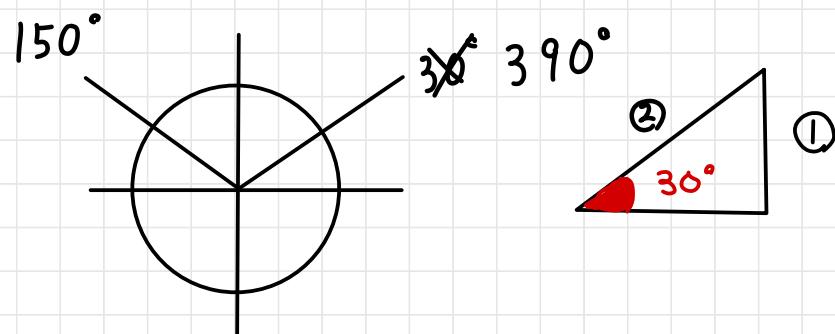
$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{3} = t \text{ とすると}$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi \right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi \right)$$

$(60^\circ \sim 420^\circ)$



$$t = 150^\circ, 390^\circ \rightarrow t = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{3} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{6}\pi \rightarrow x = \frac{11}{6}\pi$$

よって $\underline{x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi}$

次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$Y = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ とする。}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{6} \leq x + t < \frac{13}{6}\pi$$

$$y = \sin t \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi \right)$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi \text{ より} \quad -1 \leq \sin t \leq 1$$

つまり、 $\sin t = 1$ のとき最大値 2

$\sin t = -1$ のとき最小値 -2

また、 $\sin t = 1$ のとき $t = \frac{\pi}{2}$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin t = -1 \text{ のとき } t = \frac{3}{2}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

したがって

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } 2$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき最小値 } -2$$
