数学I

2次関数

・関数 …2つの変数 x, y について x の値が定まると y の値がただ1つ定まる.

y が x の1次式で表されるとき，y は x の **1次関数** であるといい，
y が x の2次式で表されるとき，y は x の **2次関数** であるという。

1次関数，2次関数の一般形　a，b，c は定数とする。

1次関数は　$y=ax+b$　ただし，$a \neq 0$

2次関数は　$y=ax^2+bx+c$　ただし，$a \neq 0$

y が x の関数であることを $f(x)$ や $g(x)$ とかくことがある.

x の関数 $y=f(x)$ を関数 $f(x)$ という.

関数 $y=f(x)$ について $x=a$ に対応して定まる y の値 $f(a)$ といい

$f(a)$ を関数 $y=f(x)$ の $x=a$ のときの値という.

練習 1　2次関数 $f(x)=x^2-2x+1$ において，次の値を求めよ。

(1) $f(3)$　(2) $f(-1)$　(3) $f(-a)$　(4) $f(a+1)$

(1) $f(3)=3^2-2\cdot3+1=4$

(2) $f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+1=4$

(3) $f(-a)=(-a)^2-2\cdot(-a)+1=a^2+2a+1$

(4) $f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+1=a^2$

・定義域 … y が x の関数であるとき変数 x のとり得る値の範囲

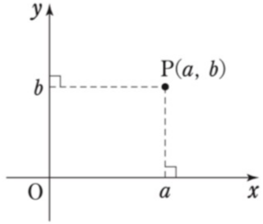
・値域 … 定義域の x の値の範囲に対応してとる y の値の範囲

練習 2 底辺の長さが 4 cm，高さが x cm の三角形の面積を y cm^2 とする。ただし，高さは 4 cm 以上であるとする。y を x の式で表せ。

$$y = 4 \times x \times \frac{1}{2} = 2x \quad (x \geqq 4)$$

$$(y \geqq 8)$$

平面上に座標軸を定めると，その平面上の点Pの位置は，右の図のように 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を点Pの **座標** といい，このような点Pを $\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ と書く。また，座標が $(a,\ b)$ である点を，**点** $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ ということがある。座標の定められた平面を **座標平面** という。



座標軸はどの象限にも含まない。

練習 3 次の点はどの象限にあるか。

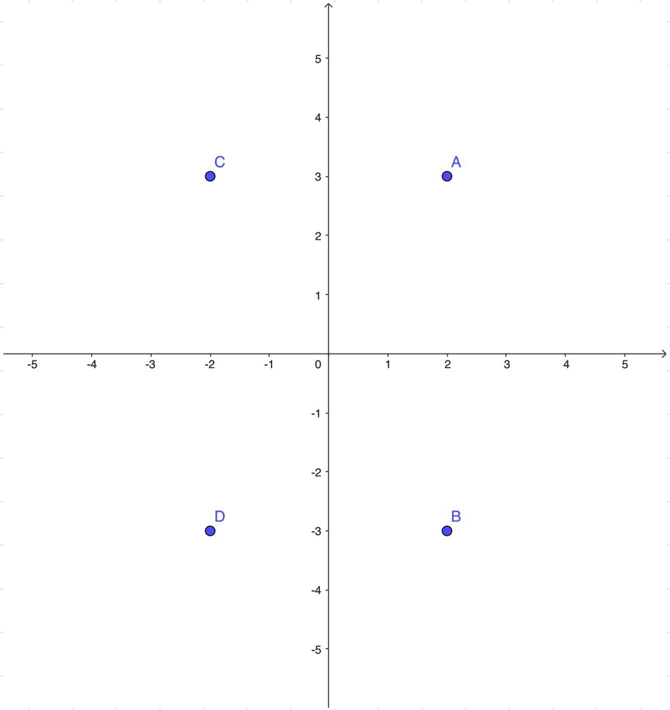
(1) A(2, 3)　(2) B(2, −3)　(3) C(−2, 3)　(4) D(−2, −3)

(1) 第1象限

(2) 第4象限

(3) 第2象限

(4) 第3象限



直線の方程式 … xの1次関数 $y=ax+b$のグラフは
傾きがa，切片がbの直線

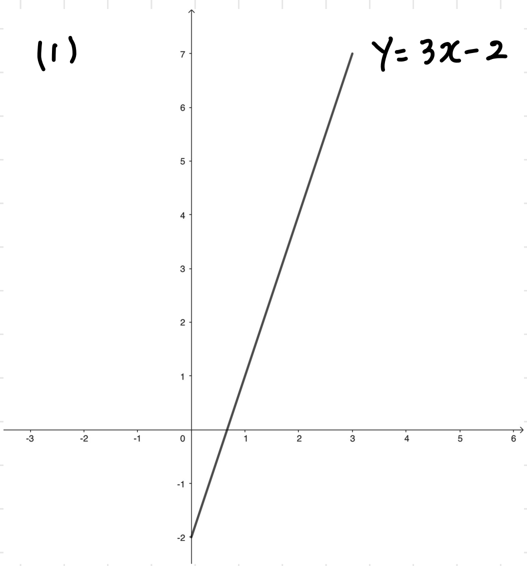
最大値 … 関数の値域に最大の値があるときのその値

最小値 … 関数の値域に最小の値があるときのその値

練習 4 次の関数のグラフをかけ。また，関数の値域を求めよ。

(1) $y=3x-2$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ (2) $y=-2x+4$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$

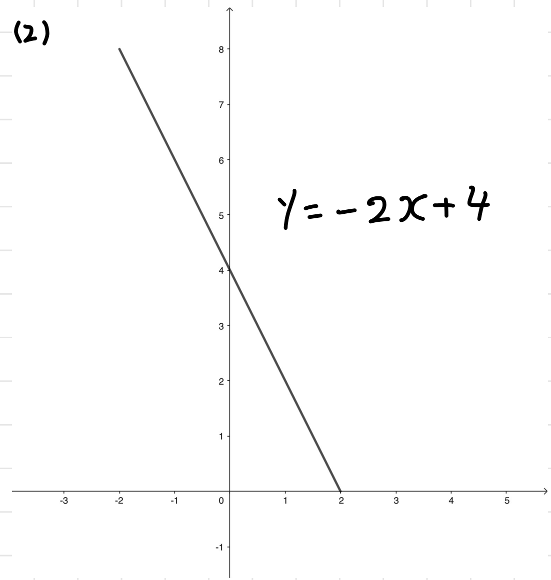
(1)



値域は

$-2 \leqq y \leqq 7$

(2)



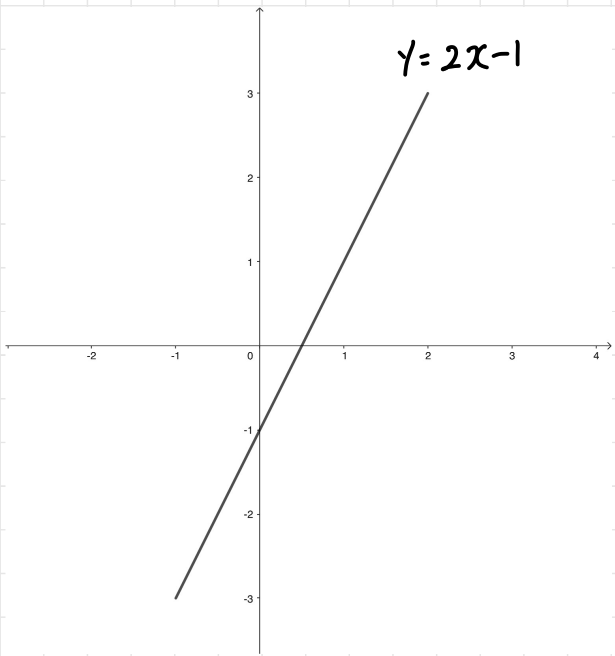
値域は

$0 \leqq y \leqq 8$

練習 5 次の関数の値域を求めよ。また，関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=2x-1$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ (2) $y=-3x+5$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

(1)

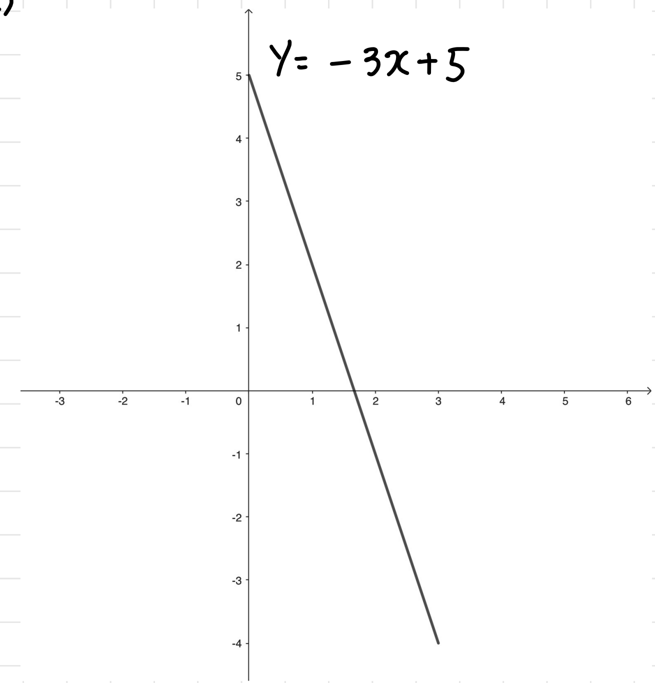


値域は $-3 \leqq y \leqq 3$

$x=2$ で 最大値 3

$x=-1$ で 最小値 -3

(2)



値域は $-4 \leqq y \leqq 5$

$x=0$ で 最大値は 5

$x=3$ で 最小値は -4

2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

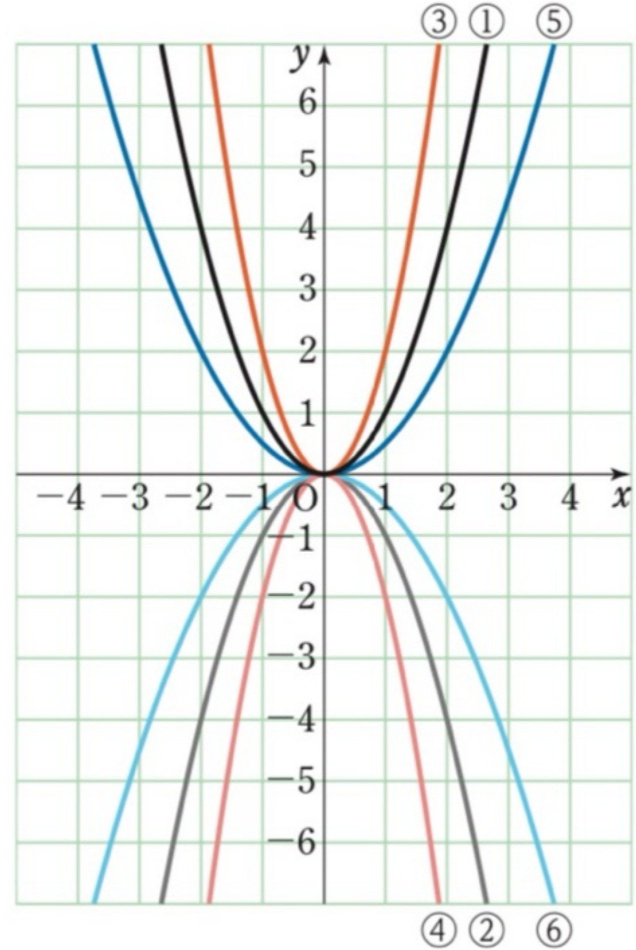
2次関数 $y=ax^2$ のグラフは右図.

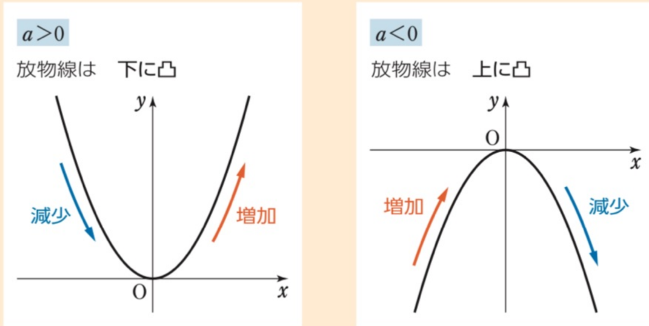
・2次関数の特徴

グラフの形は放物線
対称の軸をもつ
軸と放物線の交点を頂点という.

$y=ax^2$ のグラフは

軸がy軸, 原点が頂点の放物線





$x=0$の前後で減少から増加に変わる。

$x=0$の前後で増加から減少に変わる。

2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは放物線である。
その軸は y 軸，頂点は原点である。
$a>0$ のとき　下に凸　　　$a<0$ のとき　上に凸

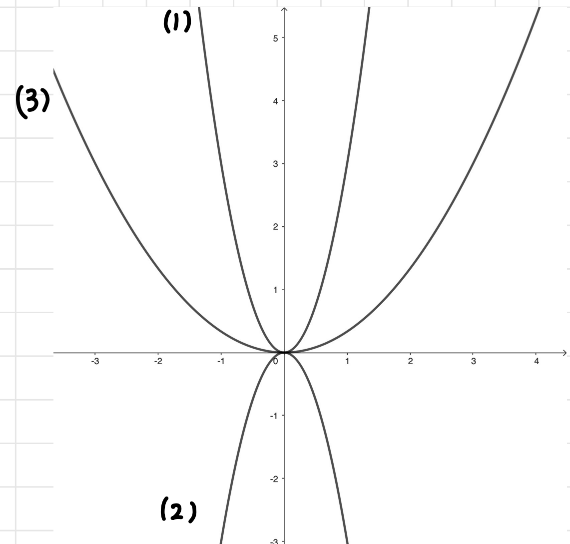
練習 6 次の2次関数のグラフをかけ。また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか。

(1) $y=3x^2$　　(2) $y=-3x^2$　　(3) $y=\frac{1}{3}x^2$

(1) 下に凸

(2) 上に凸

(3) 下に凸



2次関数のグラフの平行移動

→平面上で図形上の各点を一定の向き、一定のキョリだけ動かすこと.

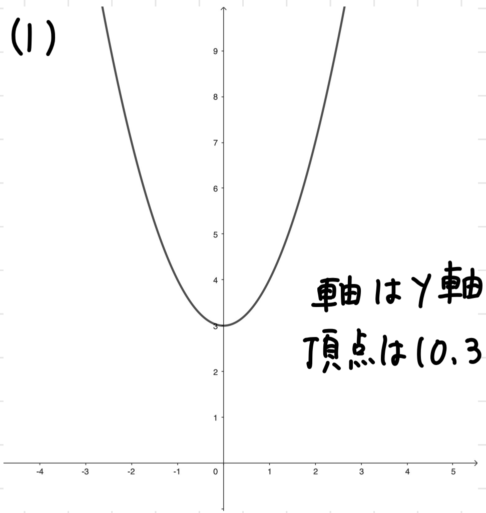
$y=ax^2+q$ のグラフ

2 次関数 $y=ax^2+\boxed{q}$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，
y 軸方向に $\boxed{q}$ だけ平行移動した放物線である。
その軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ \boxed{q})$ である。

練習 7 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

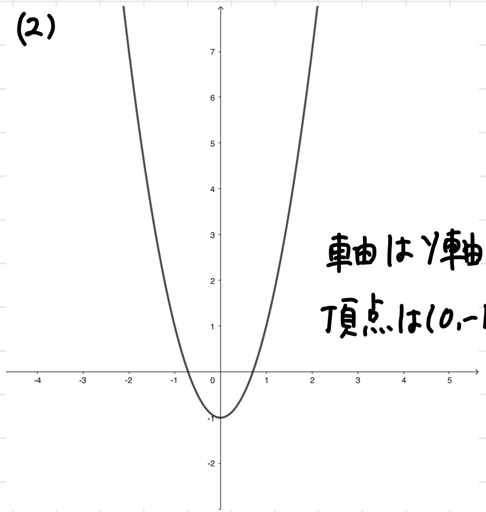
(1) $y=x^2+3$　　(2) $y=2x^2-1$　　(3) $y=-x^2+2$

(1)



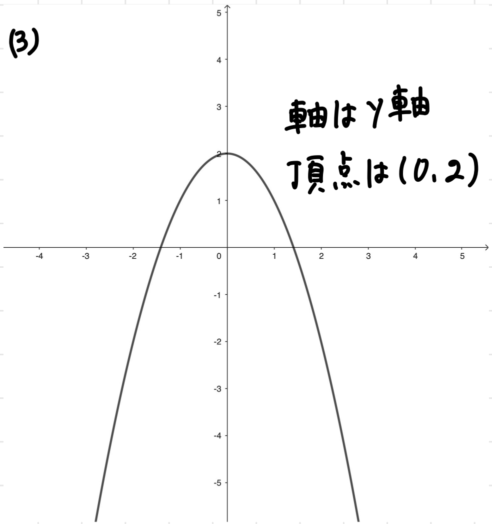
軸はy軸
頂点は(0,3)

(2)



軸はy軸
頂点は(0,-1)

(3)



軸はy軸
頂点は(0,2)

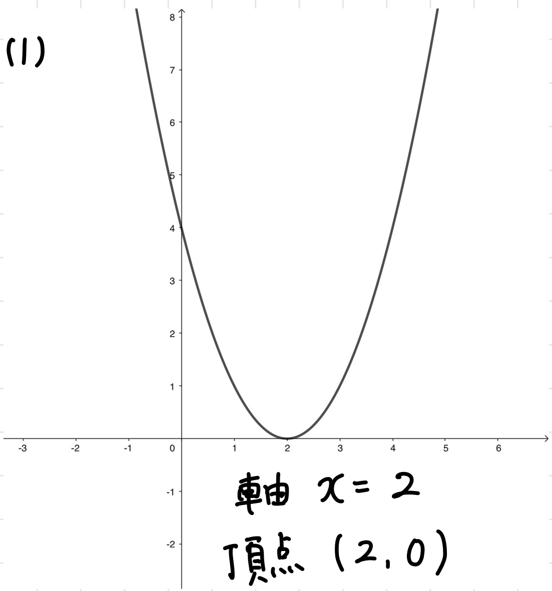
$y=a(x-p)^2$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，
x 軸方向に p だけ平行移動した放物線である。
その軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$ である。

練習 8 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=(x-2)^2$　　(2) $y=2(x+1)^2$　　(3) $y=-2(x+2)^2$

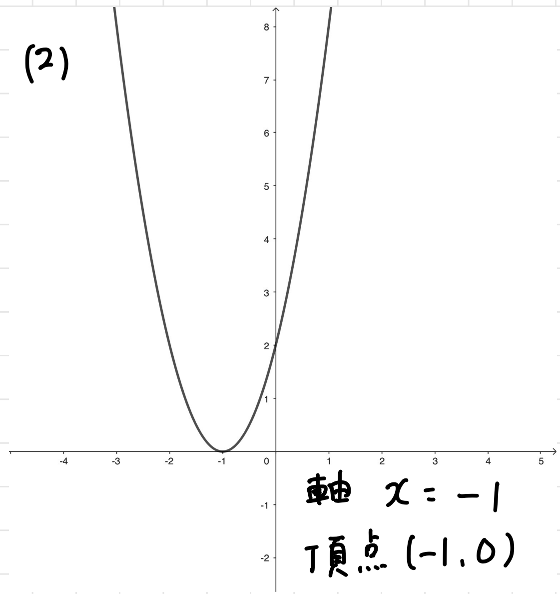
(1)



軸 $x=2$

頂点 $(2,0)$

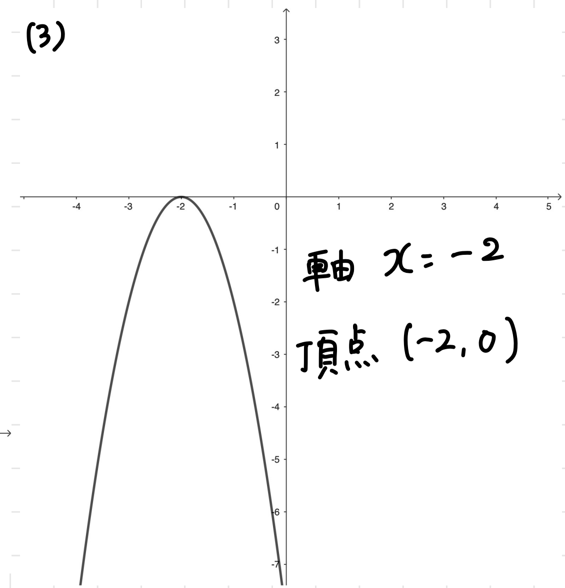
(2)



軸 $x=-1$

頂点 $(-1,0)$

(3)



軸 $x=-2$

頂点 $(-2,0)$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

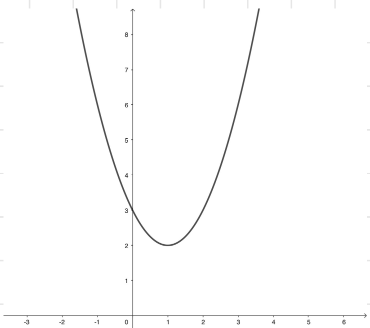
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。その軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$ である。

練習 9 次の2次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=(x-1)^2+2$　　(2) $y=2(x-2)^2-4$

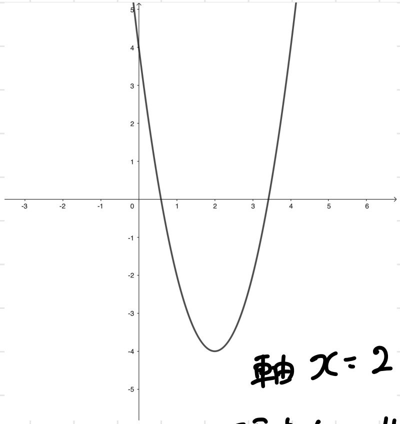
(3) $y=-2(x+1)^2+2$　　(4) $y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2-1$

(1)



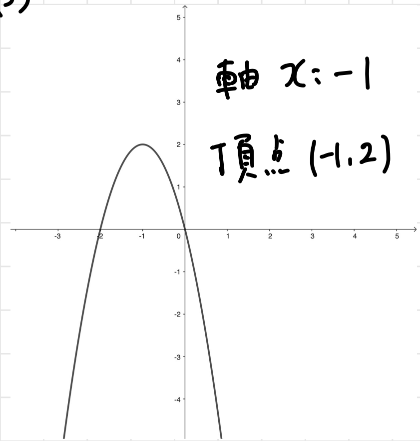
軸 $x=1$
頂点 $(1,2)$

(2)



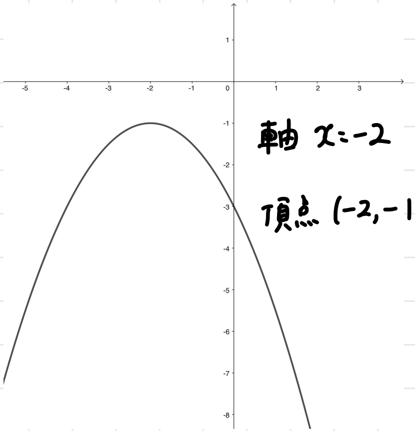
軸 $x=2$
頂点 $(2,-4)$

(3)



軸 $x=-1$
頂点 $(-1,2)$

(4)



軸 $x=-2$
頂点 $(-2,-1)$

・2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。

平方完成

練習 10 次の2次式を平方完成せよ。

(1) x^2+8x　(2) x^2-6x+8

(3) $2x^2-8x+5$　(4) $3x^2+6x+2$

(5) x^2+x-2　(6) $-2x^2+6x+4$

(1) $(x+4)^2-16$

(2) $(x-3)^2-9+8$

$=(x-3)^2-1$

(3) $2(x^2-4x)+5$

$=2\{(x-2)^2-4\}+5$

$=2(x-2)^2-8+5$

$=2(x-2)^2-3$

(4) $3(x^2+2x)+2$

$=3\{(x+1)^2-1\}+2$

$=3(x+1)^2-1$

(5) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

(6) $-2(x^2-3x)+4$

$=-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+4$

$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$

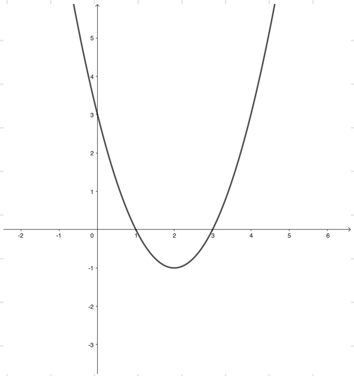
練習 11 次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+3$ (2) $y=2x^2+8x+3$

(3) $y=-3x^2+6x+1$ (4) $y=-x^2-3x$

(1) $y=(x-2)^2-4+3$

$=(x-2)^2-1$



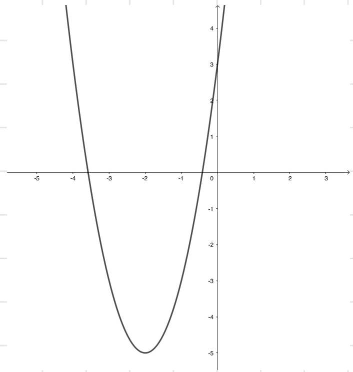
軸 $x=2$

頂点 $(2,-1)$

(2) $y=2(x^2+4x)+3$

$=2\{(x+2)^2-4\}+3$

$=2(x+2)^2-5$



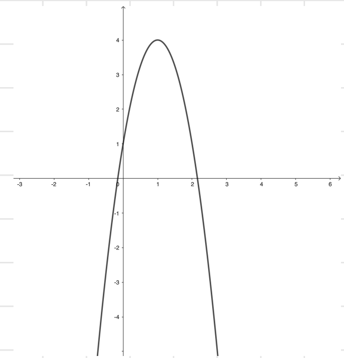
軸 $x=-2$

頂点 $(-2,-5)$

(3) $y=-3(x^2-2x)+1$

$=-3\{(x-1)^2-1\}+1$

$=-3(x-1)^2+4$



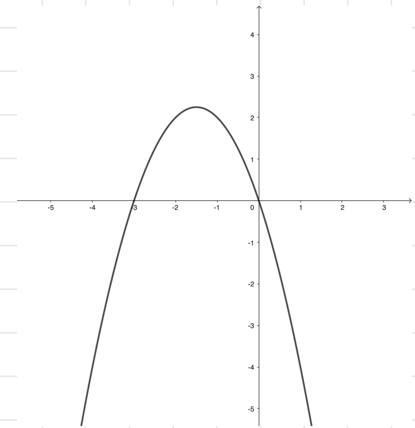
軸 $x=1$

頂点 $(1,4)$

(4) $y=-(x^2+3x)$

$=-\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$

$=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



軸 $x=-\frac{3}{2}$

頂点 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

（2次関数の頂点の差を調べればよい）

練習 12 放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2-4x\\
&=2(x^2-2x)\\
&=2\{(x-1)^2-1\}\\
&=2(x-1)^2-2
\end{aligned}
$$

頂点 $(1,-2)$

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2+4x-3\\
&=2(x^2+2x)-3\\
&=2\{(x+1)^2-1\}-3\\
&=2(x+1)^2-5
\end{aligned}
$$

頂点 $(-1,-5)$

x軸方向に -2，y軸方向に -3

だけ平行移動する。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，x を $x-p$，y を $y-q$ でおき換えた次のような関数のグラフになる。

$$\boldsymbol{y-q=f(x-p)} \quad \text{すなわち} \quad y=f(x-p)+q$$

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点それぞれに関して対称移動すると，次のような関数のグラフになる。

x 軸：$\boldsymbol{-y=f(x)}$　すなわち　$y=-f(x)$

y 軸：$\boldsymbol{y=f(-x)}$

原点：$\boldsymbol{-y=f(-x)}$　すなわち　$y=-f(-x)$

練習 1　2 次関数 $y=2x^2-5x+3$ のグラフを，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式を求めよ。

$$y-1=2\{x-(-2)\}^2-5\{x-(-2)\}+3$$

$$y-1=2(x+2)^2-5(x+2)+3$$

$$y-1=2(x^2+4x+4)-5x-10+3$$

$$y-1=2x^2+8x+8-5x-10+3$$

$$y-1=2x^2+3x+1$$

$$y=2x^2+3x+2$$

練習 1　2 次関数 $y=x^2+4x+1$ のグラフの，x 軸，y 軸，原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

x 軸　$-y=x^2+4x+1$

$$y=-x^2-4x-1$$

y 軸　$y=(-x)^2+4\cdot(-x)+1$

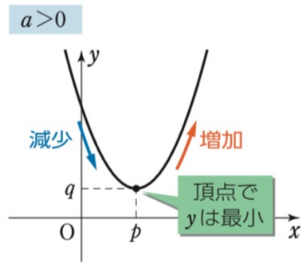
$$y=x^2-4x+1$$

原点　$-y=(-x)^2+4\cdot(-x)+1$

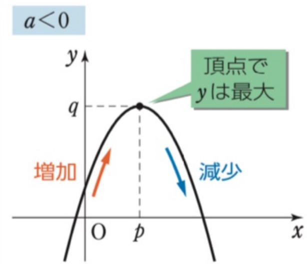
$$-y=x^2-4x+1$$

$$y=-x^2+4x-1$$

・2次関数の最大・最小



y はいくらでも大きな値をとる
（最大値はない）



y はいくらでも小さな値をとる
（最小値はない）

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

練習 13 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=2(x-3)^2+4$ (2) $y=-2(x+1)^2-3$

(1) $x=3$ のとき最小値 4

最大値はなし

(2) $x=-1$ のとき最大値 -3

最小値はなし

練習 14 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2-6x+5$　　(2) $y=-2x^2+5x$

(1) $y=(x-3)^2-9+5$

$y=(x-3)^2-4$

$x=3$のとき最小値 -4
最大値はなし

(2) $y=-2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)$

$=-2\left\{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right\}$

$=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

$x=\frac{5}{4}$のとき最大値 $\frac{25}{8}$

最小値はなし

練習 15 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=x^2+2x+3$ $(-2\leqq x\leqq 2)$　(2) $y=-x^2+4x-3$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3) $y=3x^2+6x-1$ $(1\leqq x\leqq 3)$　(4) $y=-2x^2+12x$ $(0\leqq x\leqq 6)$

(1) $y=(x+1)^2-1+3=(x+1)^2+2$

$x=-1$のとき最小値 2
$x=2$のとき最大値 11

(2) $y=-(x^2-4x)-3$
$=-\{(x-2)^2-4\}-3=-(x-2)^2+1$

$x=2$のとき最大値 1
$x=0$のとき最小値 -3

(3) $y=3(x^2+2x)-1$

$=3\{(x+1)^2-1\}-1=3(x+1)^2-4$
$x=1$のとき最小値 8
$x=3$のとき最大値 44

(4) $y=-2(x^2-6x)=-2\{(x-3)^2-9\}=-2(x-3)^2+18$

$x=3$のとき最大値 18
$x=0,6$のとき最小値 0

練習 16 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2-2x+c$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ の最大値が 5 である。

(2) 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最小値が -7 である。

(1) $Y=(x-1)^2-1+C$

頂点のx座標が1より

最大値をとるときのx座標は-2なので

$$(-2-1)^2-1+C=5$$

$$C=-3$$

(2) $Y=-(x^2-6x)+C$

$$=-\{(x-3)^2-9\}+C$$

$$=-(x-3)^2+9+C$$

頂点のx座標が3より

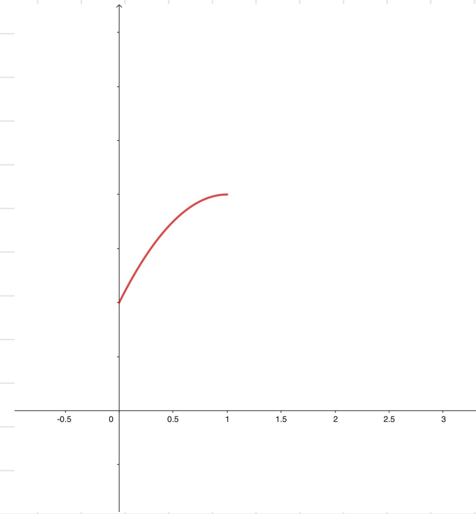
最小値をとるときのx座標は1なので

$$-(1-3)^2+9+C=-7$$

$$C=-12$$

練習 17 a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$



$$Y=-(x^2-2x)+1$$

$$=-\{(x-1)^2-1\}+1$$

$$=-(x-1)^2+2$$

これは上に凸の放物線なので頂点が最大値

頂点のx座標が1より $0 \leqq x \leqq a$ に1が含まれている必要があるので

$$a \geqq 1$$

$a \geqq 1$のとき $x=1$で最大値 2

また，$0<a<1$のとき $x=a$で最大値 $-a^2+2a+1$

練習 18 a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=2x^2-4ax+2a^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$Y=2(x^2-2ax)+2a^2$

$=2\{(x-a)^2-a^2\}+2a^2$

$=2(x-a)^2$

頂点 $(a, 0)$

(ア) $a<0$ のとき

$x=0$ で最小値 $2a^2$

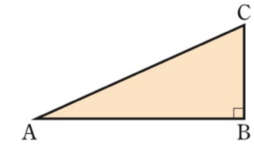
(イ) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$x=a$ で最小値 0

(ウ) $a>1$ のとき

$x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$

練習 19 直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



$AB = x$ cm とすると $BC=(14-x)$ cm

直角三角形ABCの面積を Y cm^2 とすると

$Y=x\times(14-x)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-14x)$

$=-\frac{1}{2}\{(x-7)^2-49\}$

$=-\frac{1}{2}(x-7)^2+\frac{49}{2}$

Yの式は上に凸の2次関数の式と見れるので

Yの最大値，つまり直角三角形ABCの面積の最大値は

ABが7cmのとき $\frac{49}{2}$ cm^2

練習 20 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 $(-2,\ 4)$ で，点 $(-4,\ 2)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=2$ で，2点 $(-1,\ 5)$，$(1,\ -11)$ を通る。

2次関数を $y=a(x-p)^2+b$ とする.

(1) $y=a(x+2)^2+4$

これが $(-4,2)$ をトールので

$2=a(-4+2)^2+4$

$2=4a+4$

$a=-\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2+4$

(2) $y=a(x-2)^2+b$

$(-1,5)$ をトールので

$5=a(-1-2)^2+b$

$5=9a+b \cdots ①$

$(1,-11)$ をトールので

$-11=a(1-2)^2+b$

$-11=a+b \cdots ②$

① − ② より

$$\begin{array}{rrl} & 5 &= 9a+b \\ -) & -11 &= a+b \\ \hline & 16 &= 8a \end{array}$$

$a=2$

$a=2$ を① に代入

$5=18+b$

$b=-13$

よって

$y=2(x-2)^2-13$

連立 3 元 1 次方程式の解き方

① 1 文字を消去して，残り 2 文字の連立方程式を導く。

② 2 文字の連立方程式を解く。

③ 残りの 1 文字の値を求める。

練習 21 次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} a+b+c=0 \cdots ① \\ 4a+2b+c=0 \cdots ② \\ 9a+3b+c=4 \cdots ③ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y+z=6 \cdots ① \\ x-2y-z=-2 \cdots ② \\ 3x+2y-z=12 \cdots ③ \end{cases}$

(1) ②−①より

$3a+b=0 \cdots ①'$

③−②より

$5a+b=4 \cdots ②'$

②'−①'より

$2a=4$

$a=2$

$a=2$ を①'に代入

$b=-6$

$a=2,\ b=-6$ を①に代入

$c=4$

$\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \\ c=4 \end{cases}$

(2) ①+②より

$2x-y=4 \cdots ①'$

①+③より

$4x+3y=18 \cdots ②'$

①'×2−②'より

$y=2$

$y=2$ を①'に代入

$x=3$

$x=2,\ y=3$ を①に代入

$z=1$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

練習 22

2次関数のグラフが3点 $(2, -2)$, $(3, 5)$, $(-1, 1)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。

2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする.

$(2, -2)$ をトールので

$-2 = 4a + 2b + c \cdots ①$

$(3, 5)$ をトールので

$5 = 9a + 3b + c \cdots ②$

$(-1, 1)$ をトールので

$1 = a - b + c \cdots ③$

$$\begin{cases} -2 = 4a + 2b + c \cdots ① \\ 5 = 9a + 3b + c \cdots ② \\ 1 = a - b + c \cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より

$5a + b = 7 \cdots ④$

② − ③ より

$8a + 4b = 4$

$2a + b = 1 \cdots ⑤$

④ − ⑤ より

$3a = 6$

$a = 2$

$a = 2$ を⑤に代入して $b = -3$

$a = 2$, $b = -3$ を③に代入して $c = -4$

よって $\underline{y = 2x^2 - 3x - 4}$

2 つの実数 A, B について

$$AB=0 \iff A=0 \text{ または } B=0$$

練習 23 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x(x+4)=0$　　(2) $x^2-5x+6=0$

(3) $2x^2+3x+1=0$　　(4) $3x^2-4x-4=0$

(1) $x=0,\ -4$

(2) $(x-2)(x-3)=0$

$x=2,\ 3$

(3) $(2x+1)(x+1)=0$

$x=-1,\ -\frac{1}{2}$

(4) $(3x+2)(x-2)=0$

$x=-\frac{2}{3},\ 2$

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき解をもち，

その解は $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

練習 24 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+7x+4=0$　(2) $3x^2+4x-1=0$

(3) $3x^2-8x-3=0$　(4) $4x^2+12x+9=0$

(1) 解の公式より

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$$

(2) 解の公式より

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$$

$$x=\frac{-4\pm2\sqrt{7}}{6}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$$

(3) $(3x+1)(x-3)=0$

$x=-\frac{1}{3},\ 3$

(4) $(2x+3)^2=0$

$x=-\frac{3}{2}$

練習 25 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+2x-2=0$　(2) $3x^2-4x-2=0$

(3) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$　(4) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

(1) 解の公式より

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

$$x=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$x=-1\pm\sqrt{3}$$

(2) 解の公式より

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}$$

$$x=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$$

(3) $(x+\sqrt{3})^2=0$

$x=-\sqrt{3}$

(4) 解の公式より

$$x=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times2}}{2\times1}$$

$$x=\frac{2\sqrt{3}\pm2}{2}=\sqrt{3}\pm1$$

・ 実数解…方程式の実数の解

・ 判別式…2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の b^2-4ac. 基本 $D=b^2-4ac$ とする.

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
実数解	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 異なる2つの実数解	$x=-\frac{b}{2a}$ 重解（実数解）	実数解はない
実数解の個数	2個	1個	0個

特に，「$D\geqq 0 \iff$ 2次方程式が実数解をもつ」が成り立つ。

練習 26 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2+3x-5=0$ (2) $3x^2-5x+4=0$

(3) $3x^2+2\sqrt{3}x+1=0$

2次方程式の判別式をDとする.

(1) $D=3^2-4\times1\times(-5)=29$

$D>0$ より異なる実数解 2コ

(2) $D=(-5)^2-4\times3\times4=-23$

$D<0$ より実数解 0コ

(3) $D=(2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$

$D=0$ より実数解 1コ

練習 27 2次方程式 $x^2-4x+m+8=0$ が実数解をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

2次方程式の判別式をDとする.

$D=(-4)^2-4\times1\times(m+8)=-4m-16$

$x^2-4x+m+8=0$ が実数解をもたないので $D<0$

$-4m-16<0$

$-4m<16$

$m>-4$

練習 28 2次方程式 $x^2+(m+2)x+m+5=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

2次方程式の判別式をDとする.

$D=(m+2)^2-4\times1\times(m+5)=m^2-16$

$x^2+(m+2)x+m+5=0$ が重解をもつので $D=0$

$m^2-16=0$

$m^2=16$

$m=\pm4$

(ア) $m=4$ のとき 2次方程式は $x^2+6x+9=0$

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$x=-3$

(イ) $m=-4$ のとき 2次方程式は $x^2-2x+1=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

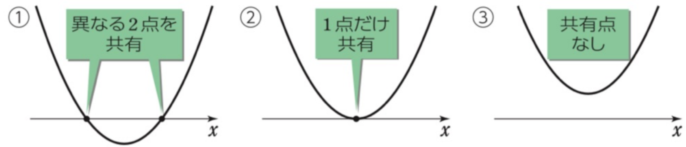
$x=1$

$m=4$ のとき $x=-3$

$m=-4$ のとき $x=1$

6 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数のグラフと x 軸の位置関係は，共有点の個数に着目すると，次の①，②，③のような3つの場合に分類できる。
ここでは，これらの場合についてもう少し詳しく調べることにしよう。



② のようにグラフと x 軸が1点のみで交わるとき
グラフと x 軸は接するという。
また，その共有点を接点という。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ が x 軸と共有点をもつとき 共有点の x 座標は
$y=0$ のときの x の値つまり $ax^2+bx+c=0$ の解である。

練習 29 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。また，グラフが x 軸に接するものはどれか。

(1) $y=x^2-2x-3$　　(2) $y=-x^2+3x-1$

(3) $y=2x^2+4x+2$　　(4) $y=2x^2-5x-3$

(1) $x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3,\ -1$

$(3,0)$ と $(-1,0)$

(2) $-x^2+3x-1=0$

$x^2-3x+1=0$

解の公式より

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ と $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

(3) $2x^2+4x+2=0$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1$

$(-1,0)$

(4) $2x^2-5x-3=0$

$(2x+1)(x-3)=0$

$x=-\dfrac{1}{2},\ 3$

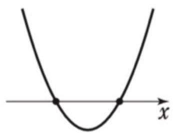
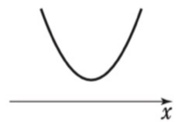
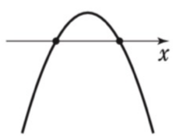
$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ と $(3,0)$

グラフが x 軸に接するのは (3)

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ と，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，次のことがいえる。

1. 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と一致する。
2. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は，103 ページの表のように判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって分類される。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$ のとき			
$a<0$ のとき			
x 軸との位置関係	異なる 2 点で交わる	接する	共有点をもたない
x 軸との共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	実数解はない

練習 30 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=x^2+3x+3$ (2) $y=-2x^2+5x+1$ (3) $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$

(1) $x^2+3x+3=0$ として判別式を D とすると

$D=3^2-4\times1\times3=-3$

$D<0$ より x 軸との共有点の個数は 0 個

(2) $-2x^2+5x+1=0$ として判別式を D とすると

$D=5^2-4\times(-2)\times1=33$

$D>0$ より x 軸との共有点の個数は 2 個

(3) $\dfrac{1}{2}x^2-2x+2=0$ として判別式を D とすると

$D=(-2)^2-4\times\dfrac{1}{2}\times2=0$

$D=0$ より x 軸との共有点の個数は 1 個

練習 31

2 次関数 $y=x^2-2x-m-1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，定数 m の値によってどのように変わるか。

$x^2-2x-m-1=0$ として 判別式を D とすると

$D=(-2)^2-4\times1\times(-m-1)=4m+8$

$D>0$ のとき，つまり $4m+8>0$, $m>-2$ のとき 共有点の個数は 2 個

$D=0$ のとき，つまり $4m+8=0$, $m=-2$ のとき 共有点の個数は 1 個

$D<0$ のとき，つまり $4m+8<0$, $m<-2$ のとき 共有点の個数は 0 個

よって

$m>-2$ のとき 2 個

$m=-2$ のとき 1 個

$m<-2$ のとき 0 個

発展 放物線と直線の共有点

数学IIの内容です

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつとき，その点の x 座標は，2つの方程式から y を消去して得られる2次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解である。

練習 1 放物線 $y=x^2-6x+10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=2x-5$　　(2) $y=-2x+6$

(1) $x^2-6x+10=2x-5$

$x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

$x=3,\ 5$

$x=3$ のとき $y=2x-5$ より

$y=2\times3-5=1$

$x=5$ のとき $y=2x-5$ より

$y=2\times5-5=5$

よって

$(3,1)\ (5,5)$

(2) $x^2-6x+10=-2x+6$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

$y=-2x+6$ より

$y=-2\times2+6=2$

よって $(2,\ 2)$

一般に，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が接するのは，
2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ が重解をもつときである。

練習 2 放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=x+k$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

$$x^2-3x=x+k$$

$$x^2-4x-k=0$$

この2次方程式の判別式をDとすると
放物線と直線が接するのは2次方程式が重解をもつとき，D=0である.

$$D=(-4)^2-4\times1\times(-k)=16+4k=0$$

$$k=-4$$

$k=-4$ を $x^2-4x-k=0$ に代入すると

$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

$y=x+k$ より $y=2-4=-2$

よって $k=-4$

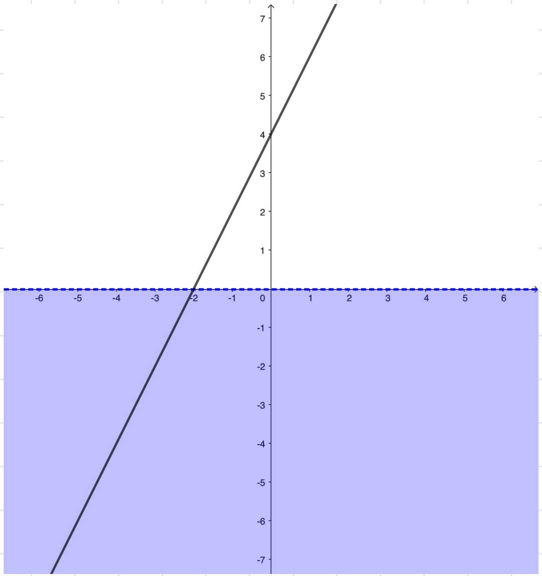
$(2,-2)$

・1次不等式と1次関数

練習 32　1次関数のグラフを利用して，次の1次不等式の解を求めよ。

(1)　$2x+4<0$　　(2)　$-3x+6\leqq 0$

(1)

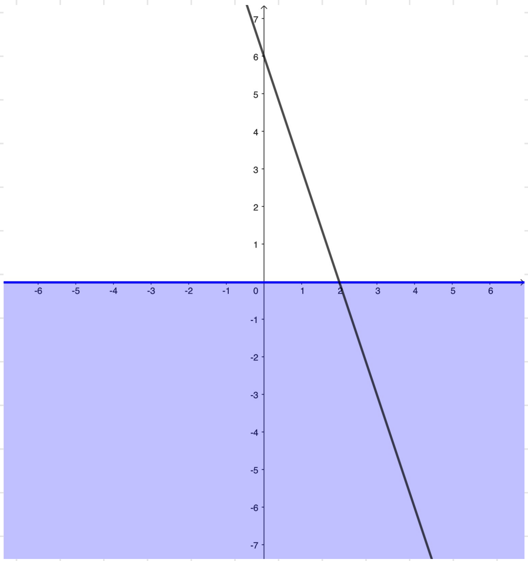


$2x+4<0$ の解は

$y=2x+4$ について $y<0$ となる

x の値の範囲，$x<-2$ である.

(2)



$-3x+6\leqq 0$ の解は

$y=-3x+6$ について $y\leqq 0$ となる

x の値の範囲，$x\geqq 2$ である.

・ 2次不等式と2次関数

2次関数がx軸と異なる2点で交わる

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を $ax^2+bx+c=0$ としその解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$ax^2+bx+c<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$$

$$ax^2+bx+c \leqq 0 \Rightarrow \alpha \leqq x \leqq \beta$$

$$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x<\alpha,\ \beta<x$$

$$ax^2+bx+c \geqq 0 \Rightarrow x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$$

練習 33 次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x-1)(x-3)>0$　(2) $(x+2)(x-5)<0$

(3) $x(x+1) \leqq 0$　(4) $x^2-x-2 \geqq 0$

(5) $x^2+5x+6>0$　(6) $x^2 \leqq 9$

(1) $x<1,\ 3<x$

(2) $-2<x<5$

(3) $-1 \leqq x \leqq 0$

(4) $(x-2)(x+1) \geqq 0$

$x \leqq -1,\ 2 \leqq x$

(5) $(x+2)(x+3)>0$

$x<-3,\ -2<x$

(6) $x^2-9 \leqq 0$

$(x+3)(x-3) \leqq 0$

$-3 \leqq x \leqq 3$

練習 34 次の 2 次不等式を解け。

(1) $2x^2-5x+2 \geqq 0$　(2) $2x^2+5x+3<0$

(3) $x^2+2x-1 \leqq 0$　(4) $x^2-5>0$

(1) $(2x-1)(x-2) \geqq 0$

$x \leqq \frac{1}{2}$　$2 \leqq x$

(2) $(2x+3)(x+1)<0$

$-\frac{3}{2}<x<-1$

(3) $x^2+2x-1=0$ として

解の公式より

$x=-1\pm\sqrt{2}$ なので

$-1-\sqrt{2} \leqq x \leqq -1+\sqrt{2}$

(4) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})>0$

$x<-\sqrt{5}.\ \sqrt{5}<x$

練習 35

次の 2 次不等式を解け。

(1) $-2x^2+x+1<0$　　(2) $-3x^2+5x-1 \geqq 0$

(1) $2x^2-x-1>0$

$(2x+1)(x-1)>0$

$x<-\frac{1}{2},\ 1<x$

(2) $3x^2-5x+1 \leqq 0$

$3x^2-5x+1=0$ として

解の公式より

$x=\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ なので

$\frac{5-\sqrt{13}}{6} \leqq x \leqq \frac{5+\sqrt{13}}{6}$

2次関数がx軸と接する

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を $ax^2+bx+c=0$ とし その解を α とすると

$ax^2+bx+c>0$	α以外のすべての実数
$ax^2+bx+c \geqq 0$	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$	解なし
$ax^2+bx+c \leqq 0$	$x=\alpha$

練習 36

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-4x+4>0$　　(2) $x^2-10x+25<0$

(3) $x^2+6x+9\leqq 0$　　(4) $4x^2+4x+1\geqq 0$

(1) $(x-2)^2>0$

2以外のすべての実数

(2) $(x-5)^2<0$

解なし

(3) $(x+3)^2\leqq 0$

$x=-3$

(4) $(2x+1)^2\geqq 0$

すべての実数

2次関数がx軸と共有点をもたない

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を $ax^2+bx+c=0$ とし解はない

$ax^2+bx+c>0$ すべての実数

$ax^2+bx+c \geqq 0$ すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ 解なし

$ax^2+bx+c \leqq 0$ 解なし

練習 37 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-4x+6>0$　(2) $x^2-2x+2\leqq 0$

(3) $2x^2+4x+3<0$　(4) $2x^2+8x+10\geqq 0$

(1) $y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$

頂点$(2,2)$なのでx軸と共有点はない.

$x^2-4x+6>0$はすべての実数

(2) $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

頂点$(1,1)$なのでx軸と共有点はない.

$x^2-2x+2\leqq 0$は解なし

(3) $y=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$

頂点$(-1,1)$なのでx軸と共有点はない.

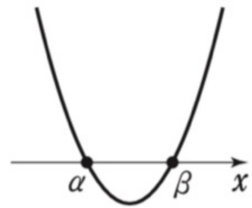
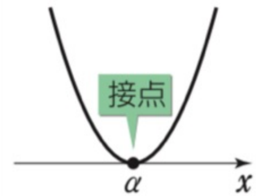
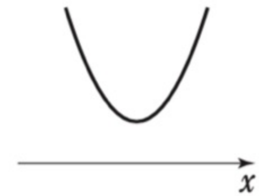
$2x^2+4x+3<0$は解なし

(4) $y=2x^2+8x+10=2(x+2)^2+2$

頂点$(-2,2)$なのでx軸と共有点はない.

$2x^2+8x+10\geqq 0$はすべての実数

2次不等式の解についてのまとめ（$a>0$ の場合）

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解	$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	解はない

練習 38 次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-3x+5>0$ (2) $-x^2+x-1\geqq 0$

(3) $3x^2-2\sqrt{3}x+1\leqq 0$ (4) $x^2-3x+2>2x^2-x$

(1) $x^2-3x+5=0$ の判別式をDとすると

$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 5=-11<0$

また、x^2の係数は正なので解はすべての実数.

(3) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ とすると

$(\sqrt{3}x-1)^2=0$

また、x^2の係数は正なので解は

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $-x^2+x-1=0$ の判別式をDとすると

$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=-3<0$

また、x^2の係数は負なので解はない

(4) $x^2-3x+2>2x^2-x$

$x^2+2x-2<0$

$x^2+2x-2=0$ の判別式をDとすると

$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-2)=12>0$ なので

解の公式より

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=-1\pm\sqrt{3}$

よって $-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$

練習 39 2次関数 $y=x^2+2mx+3$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

2次関数のグラフがx軸と共有点をもつ

=> 1点 or 2点で交わる => 判別式をDとすると $D \geqq 0$

$x^2+2mx+3=0$ とすると

$D=(2m)^2-4\cdot1\cdot3=4m^2-12$

ここで $D \geqq 0$ なので

$4m^2-12 \geqq 0$

$m^2-3 \geqq 0$

$m \leqq -\sqrt{3},\ \sqrt{3} \leqq m$

練習 40

2 次不等式 $-x^2+mx+m<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$-x^2+mx+m<0$

$x^2-mx-m>0$ …①

①について解がすべての実数であるためには

判別式 $D<0$ である.

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(-m)=m^2+4m$

$D<0$ より

$m^2+4m<0$

$m(m+4)<0$

$-4<m<0$

練習 41 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2-5x+4 \leqq 0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+x>0 \\ 3x^2+5x-2 \leqq 0 \end{cases}$

(1) $x^2-5x+4 \leqq 0$

$(x-1)(x-4) \leqq 0$

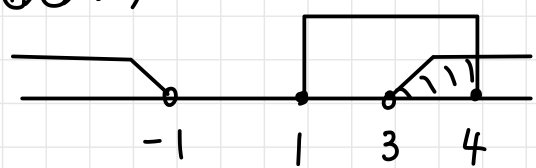
$1 \leqq x \leqq 4 \cdots ①$

$x^2-2x-3>0$

$(x-3)(x+1)>0$

$x<-1,\ 3<x \cdots ②$

①②より



$3<x \leqq 4$

(2) $x^2+x>0$

$x(x+1)>0$

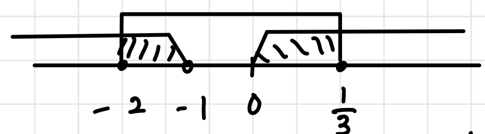
$x<-1,\ 0<x \cdots ①$

$3x^2+5x-2 \leqq 0$

$(3x-1)(x+2) \leqq 0$

$-2 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \cdots ②$

①②より



$-2 \leqq x<-1,\ 0<x \leqq \frac{1}{3}$

練習 42 次の不等式を解け。

(1) $-2 \leqq x^2+3x \leqq 4$　　(2) $5 < x^2-4x \leqq 6-3x$

(1) $\begin{cases} -2 \leqq x^2+3x \\ x^2+3x \leqq 4 \end{cases}$

$-2 \leqq x^2+3x$ より

$x^2+3x+2 \geqq 0$

$(x+1)(x+2) \geqq 0$

$x \leqq -2,\ -1 \leqq x$ …①

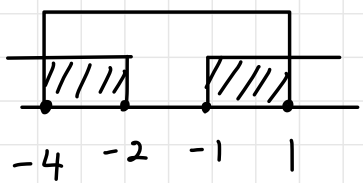
$x^2+3x \leqq 4$ より

$x^2+3x-4 \leqq 0$

$(x+4)(x-1) \leqq 0$

$-4 \leqq x \leqq 1$ …②

①②より



$-4 \leqq x \leqq -2$

$-1 \leqq x \leqq 1$

(2) $\begin{cases} 5 < x^2-4x \\ x^2-4x \leqq 6-3x \end{cases}$

$5 < x^2-4x$ より

$x^2-4x-5 > 0$

$(x-5)(x+1) > 0$

$x < -1,\ 5 < x$ …①

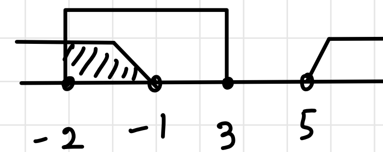
$x^2-4x \leqq 6-3x$ より

$x^2-x-6 \leqq 0$

$(x-3)(x+2) \leqq 0$

$-2 \leqq x \leqq 3$ …②

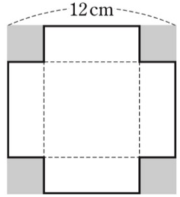
①②より



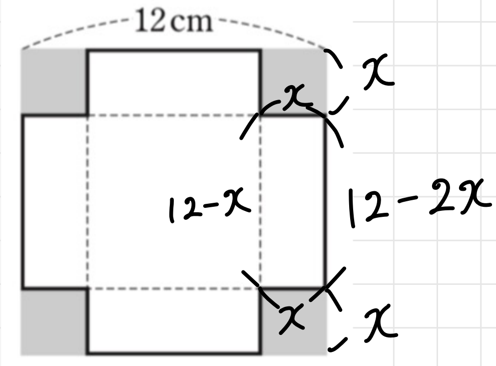
$-2 \leqq x < -1$

練習 43

1 辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から合同な正方形を切り取り，ふたのない箱を作る。底面の正方形の 1 辺が 6 cm 以上で，側面の 4 個の長方形の面積の和を 40 cm² 以上にするとき，切り取る正方形の 1 辺の長さをどのような範囲にとればよいか。



切り取る正方形の1辺の長さを x cm とする.



底面の正方形の1辺が 6cm 以上なので

$$12-2x \geqq 6$$

$$-2x \geqq -6$$

$$x \leqq 3 \cdots ①$$

側面の長方形の面積は $x(12-2x)$

側面の4つの長方形の面積の和が 40cm^2 以上なので

$$4x(12-2x) \geqq 40$$

$$x(12-2x) \geqq 10$$

$$12x-2x^2 \geqq 10$$

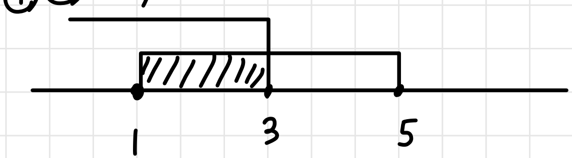
$$2x^2-12x+10 \leqq 0$$

$$x^2-6x+5 \leqq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leqq 0$$

$$1 \leqq x \leqq 5 \cdots ②$$

①②より



$$1 \leqq x \leqq 3$$

1cm 以上 3cm 以下

練習 44 2次関数 $y=x^2+2mx+m+6$ のグラフと x 軸の負の部分が，異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$x^2+2mx+m+6=0$ の判別式をDとする.

$D=(2m)^2-4\cdot1\cdot(m+6)=4m^2-4m-24$

x軸と異なる2点で交わるので $D>0$

$4m^2-4m-24>0$

$m^2-m-6>0$

$(m-3)(m+2)>0$

$m<-2,\ 3<m$ …①

また，$y=x^2+2mx+m+6$

$=(x+m)^2-m^2+m+6$

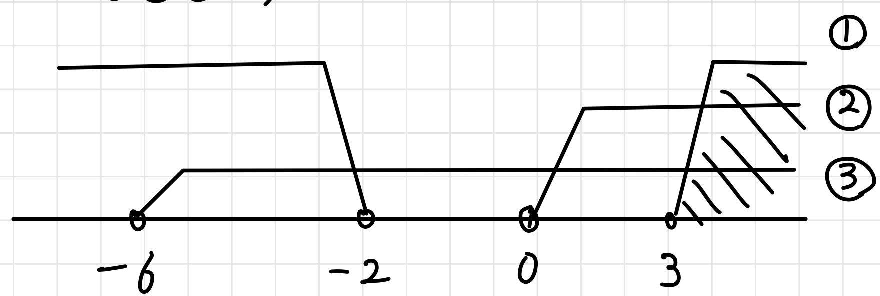
グラフの軸はy軸の左側なので $-m<0$ より

$m>0$ …②

y切片は正なので $m+6>0$ より

$m>-6$ …③

①②③より



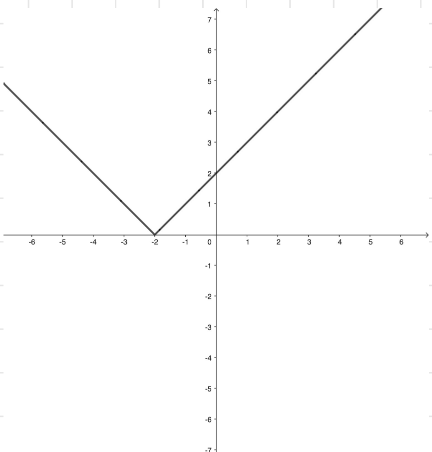
$3<m$

練習 1 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=|x+2|$ (2) $y=|x^2-1|$ (3) $y=|x^2-2x-3|$

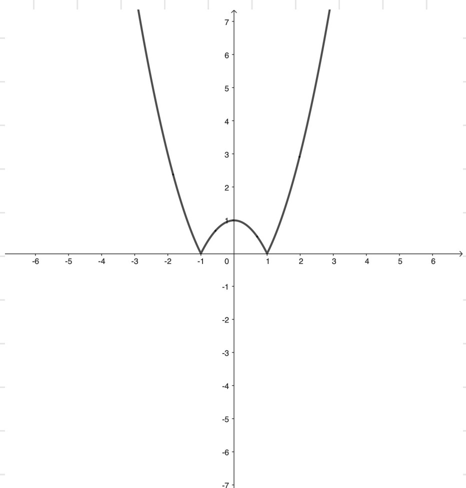
(1)
$x+2 \geqq 0$ のとき
つまり $x \geqq -2$ のとき
$y=x+2$

$x+2<0$ のとき
つまり $x<-2$ のとき
$y=-x-2$



(2) $x^2-1 \geqq 0$ のとき
つまり $x \leqq -1$, $1 \leqq x$ のとき
$y=x^2-1$

$x^2-1<0$ のとき
つまり $-1<x<1$ のとき
$y=-x^2+1$



(3) $x^2-2x-3 \geqq 0$ のとき
つまり. $x \leqq -1$, $3 \leqq x$ のとき
$y=x^2-2x-3$

$x^2-2x-3<0$ のとき
つまり $-1<x<3$ のとき
$y=-x^2+2x+3$