

数工

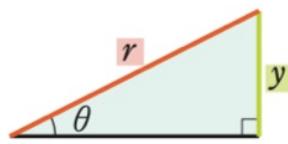
図形と計量



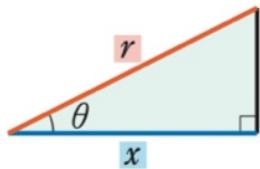
- ・ 三角比 … 三角形の大きさに関係なく、角度 θ の大きさだけで決まる辺の比
 \sin (正弦), \cos (余弦), \tan (正接)の3つがある。

三角比の定義

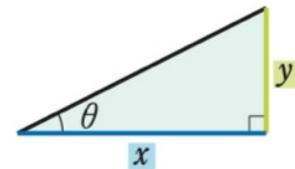
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$



$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

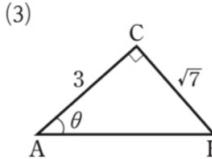
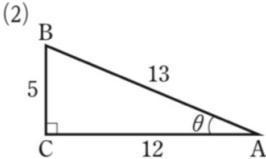
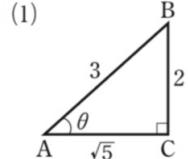


$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



練習
1

下の図において、 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を、それぞれ求めよ。



$$(1) \sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$$

(3) 三平方の定理より

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 16$$

$$AB = 4 \quad (AB > 0 \text{ なり)}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos\theta = \frac{3}{4}, \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

B 30° , 45° , 60° の三角比

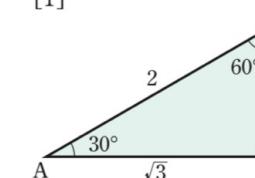
30° , 45° , 60° の三角比は、下の図 [1], [2] から求められる。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

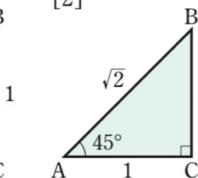
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

[1]



[2]

練習
2

右の表の空らんに適する数値を
入れて、表を完成させよ。

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の表

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし

練習

3

次の値を三角比の表から求めよ。

(1) $\sin 12^\circ$

(2) $\cos 48^\circ$

(3) $\tan 75^\circ$

(1) 0.2079

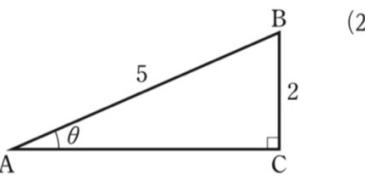
(2) 0.6691

(3) 3.7321

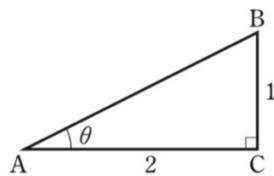
練習

4

(1)



(2)



(1) $\sin \theta = \frac{2}{5} = 0.4$

(2) $\tan \theta = \frac{1}{2} = 0.5$

$\theta = 24^\circ$

$\theta = 27^\circ$

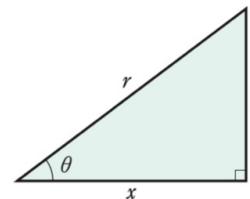
D 三角比の応用

右の図の直角三角形において、

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

であるから、次が成り立つ。

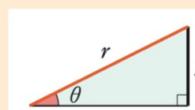
$$y = r \sin \theta$$



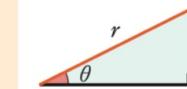
同様にして、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$ であるから、次が成り立つ。

$$x = r \cos \theta$$

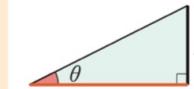
$$y = x \tan \theta$$



$$y = r \sin \theta$$



$$x = r \cos \theta$$



$$y = x \tan \theta$$

例題
1

傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき、鉛直方向には何m上がることになるか。1m未満を四捨五入して求めよ。

解答

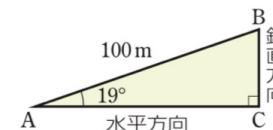
右の図において

$$BC = AB \sin 19^\circ$$

$$= 100 \times 0.3256$$

$$= 32.56 \approx 33$$

答 33 m



練習
5

例題1において、水平方向には何m進むことになるか。1m未満を四捨五入して求めよ。

左図において

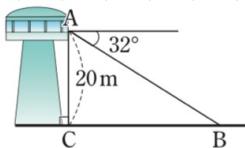
$$AC = AB \cos 19^\circ$$

$$= 100 \times 0.9455$$

$$= 94.55 \approx 95$$

95 m

地上からの高さ 20 m の地点 A で
地上の場所 B を見下ろしたら、そ
の角は右の図のように水平面に対
して 32° であった。B は、A の真
下の地点 C から何m離れているか。
1 m 未満を四捨五入して求めよ。



$$\angle CAB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$BC = AC \tan 58^\circ$$

$$= 20 \times 1.6003$$

$$= 32,006 \quad \underline{\quad} = 32$$

32 m

三角比の表

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	なし

三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

練習
7

θ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ なり}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \theta = 2\sqrt{2}$$

練習
8

θ は鋭角とする。 $\tan \theta = \sqrt{2}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$3 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta > 0 \text{ なり}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ なり}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$90^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

○+△=90°のとき

$$\sin \textcolor{blue}{O} = \cos \Delta$$

$$\cos \textcolor{blue}{O} = \sin \Delta$$

$$\tan \textcolor{blue}{O} = \frac{1}{\tan \Delta}$$

練習
9

次の□に適する鋭角の角度を入れよ。

- (1) $\sin 62^\circ = \cos \square$ (2) $\cos 78^\circ = \sin \square$ (3) $\tan 23^\circ \tan \square = 1$

$$(1) \sin 62^\circ = \cos(90^\circ - 62^\circ) = \cos \underline{28^\circ}$$

$$(2) \cos 78^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ) = \sin \underline{12^\circ}$$

$$(3) \tan 23^\circ = \frac{1}{\tan(90^\circ - 23^\circ)}$$

$$\tan 23^\circ = \frac{1}{\tan 67^\circ}$$

$$\tan 23^\circ \tan \underline{67^\circ} = 1$$

練習
10

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

- (1) $\sin 64^\circ$ (2) $\cos 58^\circ$ (3) $\tan 83^\circ$

$$(1) \sin 64^\circ = \cos(90^\circ - 64^\circ) = \cos 26^\circ$$

$$(2) \cos 58^\circ = \sin(90^\circ - 58^\circ) = \sin 32^\circ$$

$$(3) \tan 83^\circ = \frac{1}{\tan(90^\circ - 83^\circ)}, \frac{1}{\tan 7^\circ}$$

A 座標を用いた三角比の定義

右の図のように、座標平面上で、原点Oを中心とする半径 r の半円をかき、この半円と x 軸の正の部分との交点をAとする。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲にある θ に対して、 $\angle AOP = \theta$ となる点Pをこの半円上にとり、点Pの座標を (x, y) とする。

このとき、 θ の三角比を次の式で定義する。

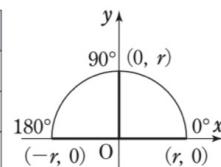
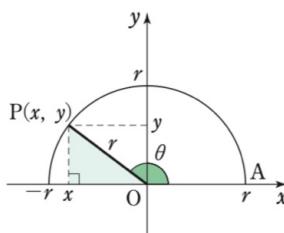
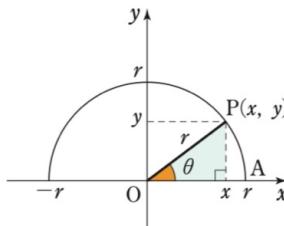
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

（注意） $\theta = 90^\circ$ のときは $x = 0$ であるから、 $\tan \theta \left(= \frac{y}{x}\right)$ は定義されない。し

たがって、 $\tan \theta$ と書いたときには $\theta \neq 90^\circ$ であるものとする。

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の三角比については、次のようになる。

θ	0°	90°	180°
$\sin \theta$	$\sin 0^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\cos \theta$	$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$
$\tan \theta$	$\tan 0^\circ = 0$		$\tan 180^\circ = 0$



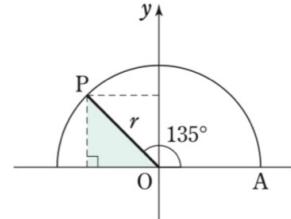
練習 11

次の角の正弦、余弦、正接の値を、下の図などを用いて求めよ。

(1) 135°

$r = \boxed{}$ になると、

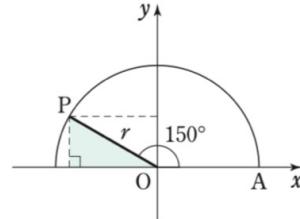
点Pの座標は $\boxed{}$



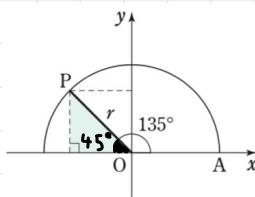
(2) 150°

$r = \boxed{}$ になると、

点Pの座標は $\boxed{}$



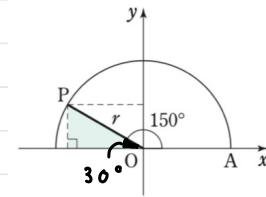
(1)



$$r = \sqrt{2}$$

$$P(-1, 1)$$

(2)



$$r = 2$$

$$P(-\sqrt{3}, 1)$$

・三角比の値の範囲

三角比とは θ の値のみで定まる値であるので、ここからは $r=1$ として考える。

原点Oを中心、半径1の半円上に角AOP = θ となる点 P(x, y)をとる。

$$\sin \theta = y, \cos \theta = x$$

となり、点Pは半円上にあるから

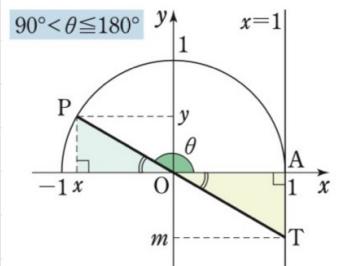
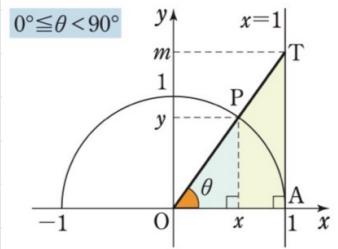
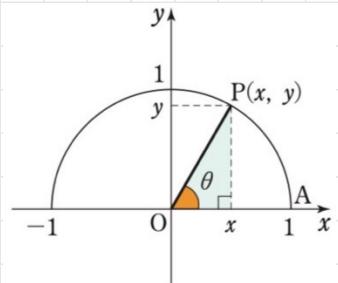
$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } 0 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$\theta \neq 90^\circ$ のとき、直線OPと直線 $x=1$ の交点を T(1, m)とするとき、 $\tan \theta = m$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \theta \neq 90^\circ$ のとき、 m のとる値の範囲は実数全体である。

三角比の符号とそのとる値の範囲について、以下のようになる。

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°	とる値の範囲
$\sin \theta$	0	+	1	+	0	$0 \leq \sin \theta \leq 1$
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1	$-1 \leq \cos \theta \leq 1$
$\tan \theta$	0	+		-	0	実数全体



180°-θ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

○+□=180°のとき

$$\sin \textcolor{red}{O} = \sin \textcolor{blue}{D}$$

$$\cos \textcolor{red}{O} = -\cos \textcolor{blue}{D}$$

$$\tan \textcolor{red}{O} = -\tan \textcolor{blue}{D}$$

練習

12

次の値を、三角比の表を用いて求めよ。

(1) $\sin 140^\circ$

(2) $\cos 156^\circ$

(3) $\tan 100^\circ$

練習

13

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

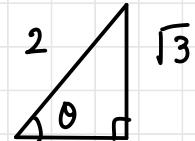
(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

(3) $\sin \theta = 0$

(1) $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

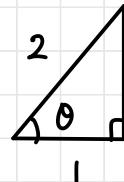
(1)



$\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(2) $\cos 156^\circ = -\cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ$

(2)



$\theta = 120^\circ$

(3) $\tan 100^\circ = -\tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ$

(3)



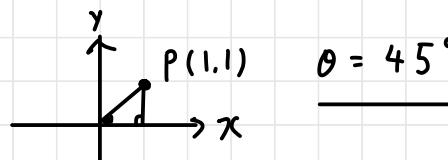
$\theta = 0^\circ, 180^\circ$

練習
14 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\tan \theta = 1$

(2) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(1) x 座標 y 座標 がともに 1 の点を P とすると



(2) x 座標が $-\sqrt{3}$, y 座標が 1 の点を P とすると



三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

練習
15

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

練習
16 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ のうち、1つが次の値をとるとき、他の2つの値を求めよ。

$$(1) \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \tan \theta = -2$$

(1)

$\cos \theta < 0$ なので $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = -2\sqrt{2}$$

(2)

$\tan \theta < 0$ なので $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\cos \theta < 0 \quad (4)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

直線 $y = mx$ と x 軸のなす角 θ

$$\tan \theta = m$$

練習
17

次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y = x$ (2) $y = -\sqrt{3}x$

(1) $y = x$ の傾きは 1 なので" (2) $y = -\sqrt{3}x$ の傾きは $-\sqrt{3}$ なので"

$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 120^\circ$$

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

練習

18

次のような $\triangle ABC$ において、外接円の半径 R を求めよ。

(1) $a = 5, A = 45^\circ$

(2) $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$

練習

19

$c = 10$ である $\triangle ABC$ において、外接円の半径が $R = 10$ のとき、 C

を求めよ。

(1) 正弦定理より

(2) 正弦定理より 正弦定理より

$$2R = \frac{5}{\sin 45^\circ}$$

$$2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{10}{\sin C} = 2 \times 10$$

$$2R = 5 \div \sin 45^\circ$$

$$2R = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sin C} = 2$$

$$2R = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2R = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$$2R = 5\sqrt{2}$$

$$2R = 2$$

$$0^\circ \leq C \leq 180^\circ \text{ 且し }$$

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$R = 1$$

$$C = 30^\circ$$

次のような $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

- (1) $c = \sqrt{2}$, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ のとき b
- (2) $a = 2$, $A = 45^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき c

(1)

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b \div \sin 30^\circ = \sqrt{2} \div \sin 45^\circ$$

$$b \div \frac{1}{2} = \sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b \times \frac{2}{1} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2b = 2$$

$$\overrightarrow{b = 1}$$

(2) 正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$c \div \sin 120^\circ = 2 \div \sin 45^\circ$$

$$c \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

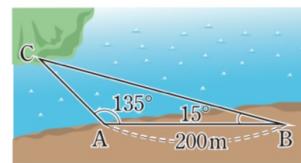
$$c = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{c = \sqrt{6}}$$

右の図のように、200 m 離れた海岸の2地点 A, B と、島にある地点 C について

$$\angle CAB = 135^\circ, \angle CBA = 15^\circ$$

であった。B, C 間の距離を求めよ。



三角形の内角の和より

$$\angle C = 180^\circ - 135^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C}$$

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{200}{\sin 30^\circ}$$

$$BC \div \sin 135^\circ = 200 \div \sin 30^\circ$$

$$BC \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \div \frac{1}{2}$$

$$BC \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 200 \times \frac{2}{1}$$

$$BC = \frac{200 \times 2}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$$

$$BC = 200\sqrt{2} \text{ m}$$

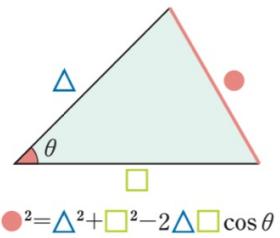
余弦定理

$\triangle ABC$ において、次が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



練習
23

次のような $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

(1) $a = 3, c = 2\sqrt{2}, B = 45^\circ$ のとき b

(2) $a = 3, b = 5, C = 120^\circ$ のとき c

(1) 余弦定理より

$$b^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$b^2 = 9 + 8 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 = 9 + 8 - 12 = 5$$

$$b > 0 \text{ なり}$$

$$b = \sqrt{5}$$

(2) 余弦定理より

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

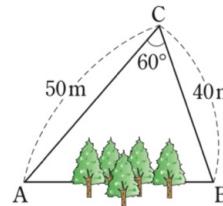
$$c^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c^2 = 9 + 25 + 15 = 49$$

$$c > 0 \text{ なり}$$

$$c = 7$$

右の図のように、林をはさんで 2 地点 A, B がある。地点 C から A と B を見て $\angle ACB$ を測ると 60° で、また A, C 間の距離は 50 m, B, C 間の距離は 40 m であった。A, B 間の距離を求めよ。



余弦定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$AB^2 = (50)^2 + (40)^2 - 2 \times 50 \times 40 \times \cos 60^\circ$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2 \times 50 \times 40 \times \frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2000$$

$$AB^2 = 2100$$

$$AB > 0 \text{ で } /$$

$$\underline{\underline{AB = 10\sqrt{21}}}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

△ABCにおいて、 $\cos A$ の符号は $b^2 + c^2 - a^2$ の符号と同じになるので、 $b^2 + c^2$ と a^2 の大小によって、次のことがいえる。

$b^2 + c^2$ と a^2 の大小	$b^2 + c^2 > a^2$	$b^2 + c^2 = a^2$	$b^2 + c^2 < a^2$
$\cos A$	$\cos A > 0$	$\cos A = 0$	$\cos A < 0$
Aの種類	A は鋭角	A は直角	A は鈍角

練習
25

次のような△ABCにおいて、指定されたものを求めよ。

$$(1) \quad a = \sqrt{7}, \quad b = 1, \quad c = 2\sqrt{3} \quad \text{のとき } A$$

$$(2) \quad a = 1, \quad b = \sqrt{5}, \quad c = \sqrt{2} \quad \text{のとき } B$$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{1^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}}$$

$$\cos A = \frac{6}{4\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq A \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$A = 30^\circ$$

練習
26

△ABCの3辺の長さが次のようなとき、Aは鋭角、直角、鈍角のいずれであるかを調べよ。

$$(1) \quad a = 9, \quad b = 3\sqrt{2}, \quad c = 7$$

$$(2) \quad a = \sqrt{7}, \quad b = \sqrt{6}, \quad c = 2$$

(2) 余弦定理より

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1}$$

$$\cos B = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq B \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$B = 135^\circ$$

(1)

$$b^2 + c^2 = (3\sqrt{2})^2 + 7^2 = 67$$

$$a^2 = 9^2 = 81$$

$$b^2 + c^2 < a^2 \text{ より}$$

A は钝角

(2)

$$b^2 + c^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 = 10$$

$$a^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$b^2 + c^2 > a^2 \text{ より}$$

A は锐角

$\triangle ABC$ において、 $a = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3} + 1$, $B = 45^\circ$ のとき、残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理より

$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cos 45^\circ$$

$$b^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2(\sqrt{3}+1)$$

$$b^2 = 6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$$

$$b^2 = 4$$

$$b > 0 \text{ つまり } b = 2$$

$$b = 2$$

余弦定理より

$$\cos A = \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)}$$

$$\cos A : \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)} : \frac{3 + \sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} : \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

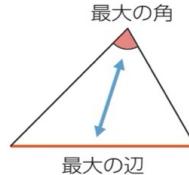
$$A = 30^\circ$$

$$C = 180 - 30 - 45 = 105^\circ$$

$$\underline{b = 2, A = 30^\circ, C = 105^\circ}$$

三角形の 2 辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。

よって、三角形の最大の辺に向かい合う角が、その三角形の最大の角である。



練習
28

△ABCにおいて次の等式が成り立つとき、この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

正弦定理より $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$a : b : c = 8 : 7 : 13$$

正の数 k を用いて

$$a = 8k, b = 7k, c = 13k \text{ となるので}$$

C が“最大の角”である。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

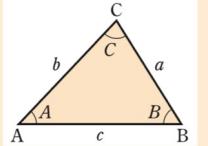
$$\underline{\quad C = 120^\circ \quad}$$

三角形の面積

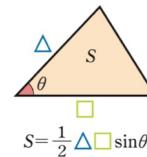
$\triangle ABC$ の面積 S は、次の式で表される。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



三角形の面積 S は、2辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる。



練習

29

次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad b = 10, \quad c = 8, \quad A = 45^\circ \quad (2) \quad a = 6, \quad c = 5, \quad B = 150^\circ$$

$$(3) \quad 1 \text{ 辺の長さが } a \text{ の正三角形 } ABC$$

$$(1) \quad S = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

3辺の長さが次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1) $a = 8, b = 5, c = 7$

(2) $a = 13, b = 14, c = 15$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} : \frac{1}{7}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

$$\underline{10\sqrt{3}}$$

(2) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{(14)^2 + (15)^2 - (13)^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} : \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 14 \times 15 \times \frac{4}{5} = 84$$

$$\underline{84}$$

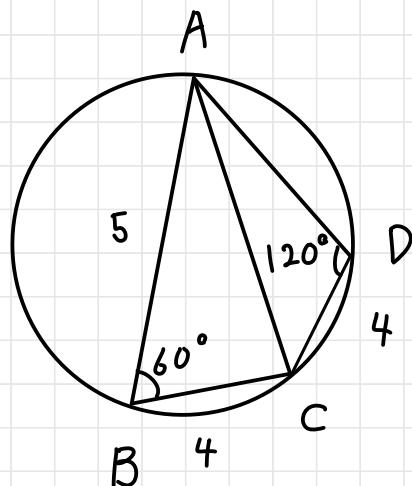
円に内接する四角形 ABCD において、AB = 5, BC = 4, CD = 4,

$\angle B = 60^\circ$ のとき、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は 180° なので

$$\angle B = 60^\circ \text{ と } \angle D = 120^\circ$$

また、四角形 ABCD の対角線を引くと下図になる。



$\triangle ABC$ について余弦定理から

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 21$$

$$AC > 0 \text{ と } AC = \sqrt{21}$$

$\triangle ACD$ について余弦定理

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$(\sqrt{21})^2 = AD^2 + 4^2 - 2 \times AD \times 4 \times (-\frac{1}{2})$$

$$AD^2 + 4AD - 5 = 0$$

$$(AD+5)(AD-1) = 0$$

$$AD > 0 \text{ と } AD = 1$$

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{S = 6\sqrt{3}}}$$

C 三角形の内接円と面積

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

練習
32

△ABCにおいて、 $a=4$, $b=3$, $c=2$ のとき、この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

余弦定理より

$$\cos A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{また、 } S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{ より}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \cdot r(4+3+2)$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$r = \frac{3\sqrt{15}}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

△ABC の面積 S は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

練習
1

3 辺の長さが 7, 8, 13 である三角形の面積 S を求めよ。

$$2s = 7 + 8 + 13 \text{ から}$$

$$s = 14$$

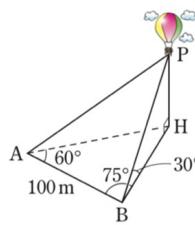
$$S = \sqrt{14 \cdot (14-7)(14-8)(14-13)} = 14\sqrt{3}$$

$$\underline{S = 14\sqrt{3}}$$

100 m 離れた 2 地点 A と B から、気球 P の
真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき、

$$\angle HAB = 60^\circ, \angle HBA = 75^\circ$$

であった。また、B から P を見上げた角度は 30° であった。図において、気球 P の高さ PH を求めよ。



$$\angle AHB = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

$\triangle HAB$ について正弦定理より

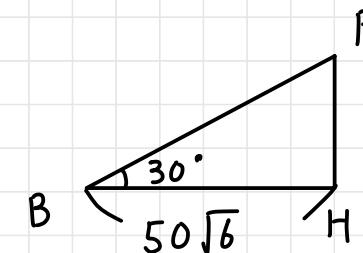
$$\frac{BH}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$$

$$BH = \frac{100}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$BH = 100 \div \sin 45^\circ \times \sin 60^\circ$$

$$BH : 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{6}$$

$\triangle PBH$ について



$$\frac{PH}{BH} = \tan 30^\circ$$

$$PH = BH \times \tan 30^\circ$$

$$PH = 50\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$$

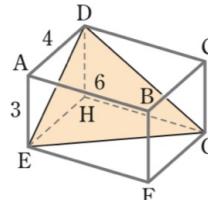
$$\underline{PH = 50\sqrt{2}}$$

右の図のように、

$$AB = 6, \quad AD = 4, \quad AE = 3$$

である直方体 ABCD-EFGH がある。

$\triangle DEG$ の面積 S を求めよ。



直方体の性質から 三平方の定理より

$$AB = DC = EF = 6 \quad DE^2 = AD^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$AD = FG = 4$$

$$AE = CG = 3$$

$$DE > 0 \text{ より}$$

$$DE = 5$$

$$DG^2 = CG^2 + DC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$DG > 0 \text{ より}$$

$$DG = 3\sqrt{5}$$

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$EG > 0 \text{ より}$$

$$EG = 2\sqrt{13}$$

余弦定理より

$$\cos \angle DGE = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{13})^2 - 5^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13}} : \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\sin^2 \angle DGE + \cos^2 \angle DGE = 1$$

$$\sin^2 \angle DGE = 1 - \cos^2 \angle DGE = \frac{59}{65}$$

$\sin \angle DGE > 0$ より

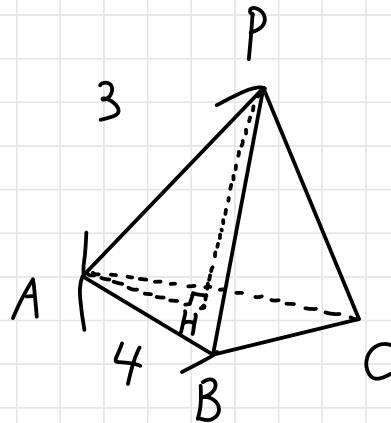
$$\sin \angle DGE = \sqrt{\frac{59}{65}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{13} \times \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{65}} = 3\sqrt{59}$$

$$\underline{\underline{S = 3\sqrt{59}}}$$

PA = PB = PC = 3, AB = BC = CA = 4 である三角錐 PABC の体

積 V を求めよ。

 $\triangle ABC$ について正弦定理より

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH$$

$$AH = \frac{2}{\sin 60^\circ} : 2 \div \sin 60^\circ : 2 \div \frac{\sqrt{3}}{2} : 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

 $\triangle PAH$ について三平方の定理より

$$AH^2 + PH^2 = PA^2$$

$$PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{33}{9}$$

$$PH > 0 \text{ より } PH = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$V = S \times PH \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{33}}{3} \times \frac{1}{3} : \frac{4\sqrt{11}}{3}$$

$$V = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$