数Ⅰ

集合と命題

・集合 … 範囲がはっきりしたものの集まり

・要素 … 集合を構成するもの

(例) 1から10までの自然数の集まり

集合

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

要素 要素 要素 要素 要素 要素 要素 要素 要素 要素

x が集合Aに属するとき $x \in A$ と書く.

x が集合Aに属さないとき $x \notin A$ と書く.

練習 1 有理数全体の集合を Q とする。次の□に適する記号 $\in$ または $\notin$ を入れよ。

(1) $4 \square Q$　　(2) $-\dfrac{2}{3} \square Q$

(3) $\sqrt{2} \square Q$

(1) $4 \in Q$　　(2) $-\dfrac{2}{3} \in Q$　　(3) $\sqrt{2} \notin Q$

集合には2通りの書き表し方がある

① 集合Aの要素を全て並べる. ⇒ $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

② 集合Aの式と条件のみを書く. ⇒ $A=\{$式 $|$ 条件$\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A $A=\{x \mid x$は1から10までの自然数$\}$

練習 2 次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1) 20 の正の約数全体の集合 A

(2) $B=\{x \mid x$ は 10 以下の正の奇数$\}$

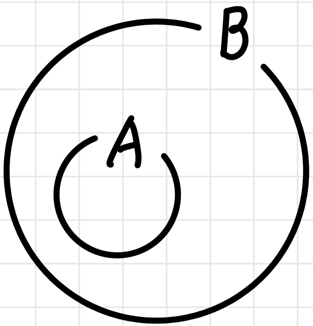
(3) $C=\{3n+1 \mid n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$

(1) $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2) $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(3) $C=\{1, 4, 7, 10, \cdots\}$

・部分集合 … 集合Aの要素の全てが集合Bに含まれているときの集合A



このとき、AはBに含まれる → $A \subset B$ と書く

BはAを含む → $B \supset A$ と書く。

また、AとBの要素が一致しているとき $A=B$. AとBは等しい。

(例) 集合Aを10以下の正の奇数、集合Bを1から10までの自然数とすると

$A \subset B$ が成立。

・空集合 … 要素が1つもない集合。記号 $\emptyset$ (ファイ) で表す。

空集合は全ての集合の部分集合である。

練習 3 次の 2 つの集合の関係を，⊂，＝を使って表せ。

(1) $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

(2) $C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，$D=\{x \mid x \text{ は 10 の正の約数}\}$

(3) $P=\{x \mid x \text{ は 12 以下の自然数}\}$，$Q=\{x \mid x \text{ は 12 の正の約数}\}$

(1) $A \subset B$

(2) $D=\{1,2,5,10\}$

$C=D$

(3) $P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$Q=\{1,2,3,4,6,12\}$

$P \supset Q$

練習 4 次の集合の部分集合をすべてあげよ。

(1) $\{1,\ 2\}$　　(2) $\{a,\ b,\ c\}$

(1) $\emptyset$

$\{1\}$, $\{2\}$

$\{1,2\}$

(2)

$\emptyset$

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

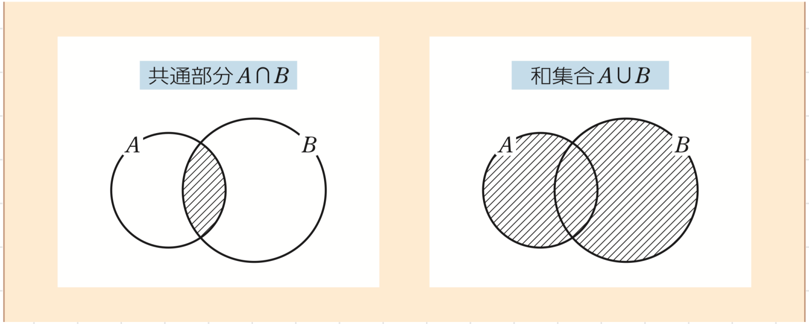
$\{a,b,c\}$

・共通部分 … 集合Aと集合Bの両方に属する要素の集合

$A \cap B$ と表す。 (共通部分がないとき、$A \cap B$ の要素は $\emptyset$)

・和集合 … 集合A, 集合Bの少なくともどちらか一方に属する要素の集合

$A \cup B$ と表す。



練習 5 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $C=\{1,\ 3\}$ について，次の集合を求めよ。

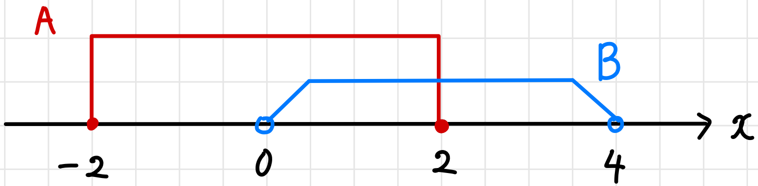
(1) $A \cap B$　(2) $A \cup B$　(3) $B \cap C$　(4) $B \cup C$

(1) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$　(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(3) $B \cap C = \emptyset$　(4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習 6

$A=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 2,\ x \text{ は実数}\}$，$B=\{x \mid 0<x<4,\ x \text{ は実数}\}$ について，$A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

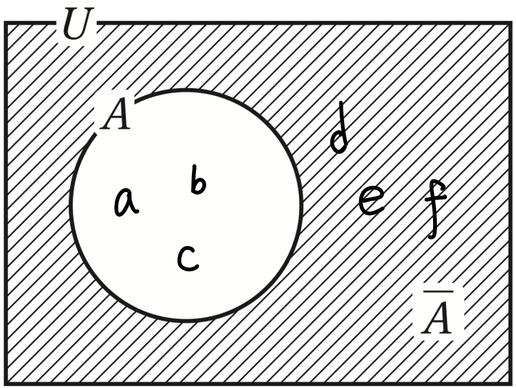


$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqq 2,\ x \text{ は実数}\}$

$A \cup B = \{x \mid -2 \leqq x < 4,\ x \text{ は実数}\}$

- 補集合 … 全体集合Uの部分集合Aに対して、Uの要素であるがAに属さない要素の集合。全体集合Uの部分集合Aの補集合は$\overline{A}$と表す。

- 全体集合 … 集合Aを部分集合にもつ集合。全体集合はUで表す。



左図のように要素が入っているとき

$U=\{a, b, c, d, e, f\}$

$A=\{a, b, c\}$

$\overline{A}=\{d, e, f\}$

補集合の性質

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とするとき

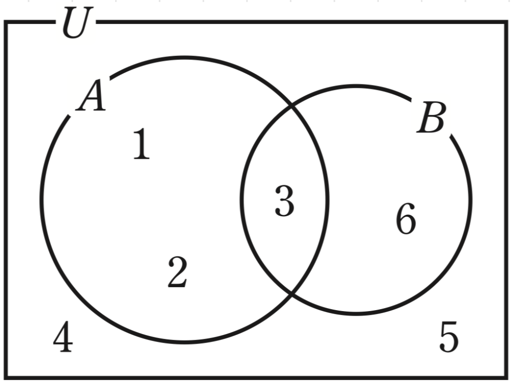
$$A\cap\overline{A}=\varnothing,\qquad A\cup\overline{A}=U,\qquad \overline{\overline{A}}=A$$

$A\subset B$　ならば　$\overline{A}\supset\overline{B}$

練習 7 例 7 の集合 U と A, B について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{B}$　　(2) $\overline{A \cap B}$　　(3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$　　(5) $\overline{A} \cap B$　　(6) $A \cap \overline{B}$



$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 6\}$

$A \cap B = \{3\}$

(1) $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$　(2) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$　(3) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$　(5) $\overline{A} \cap B = \{6\}$　(6) $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$

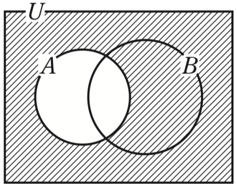
ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

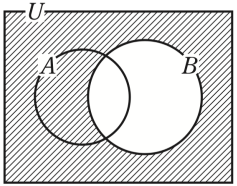
$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり，その共通部分 $\overline{A} \cap \overline{B}$ は，図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A \cup B}$ であるから，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ が成り立つ。

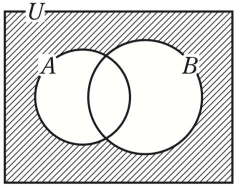
[1] $\overline{A}$



[2] $\overline{B}$



[3] $\overline{A} \cap \overline{B}$

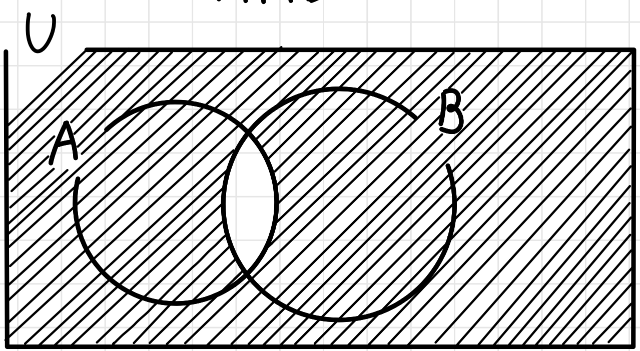


練習 8 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つことを，図を用いて確かめよ。

上 [1] [2] より

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

$\overline{A \cap B}$



・3つの共通部分と和集合

3つの集合の共通部分… 3つの集合A, B, Cのすべてに属する要素全体の集合

$A \cap B \cap C$ と書く.

3つの集合の和集合…A, B, Cの少なくとも1つに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$ と書く.

練習 1 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ について，$A\cap B\cap C$ と $A\cup B\cup C$ を求めよ。

$A \cap B \cap C = \{2, 6\}$

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

・命題…一般に正しいか正しくないかが定まる文や式

命題が正しいときその命題は真である.

命題が正しくないときその命題は偽である.

・条件…文字xを含む文や式でxに値を代入することで真偽が定まるもの

全体集合…条件を考えるときの条件に含まれる文字を要素とする集合

練習 9 次の命題の真偽を述べよ。

(1) 円周率 π は有理数である。

(2) 実数 -1 について $(-1)^2 \geqq 0$ である。

(1) π は無理数なので偽

(2) 真

命題 $p \Longrightarrow q$

1　命題 $p \Longrightarrow q$ は，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。

2　条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき，「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

p：仮定
q：結論

練習 10　次の条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を，集合を用いて調べよ。

(1)　実数 x に関する 2 つの条件　　$p：x \leqq 2$，$q：x \leqq 4$

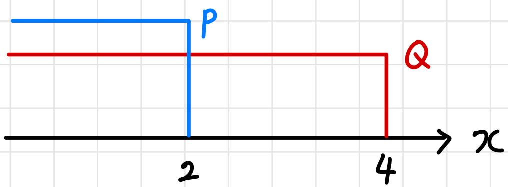
(2)　自然数 m に関する 2 つの条件

　　$p：m$ は 12 の正の約数，$q：m$ は 24 の正の約数

(3)　実数 x に関する 2 つの条件　　$p：-1 < x < 1$，$q：x > 0$

(1) 2 つの集合 P, Q を

$P = \{x \mid x \leqq 2\}$
$Q = \{x \mid x \leqq 4\}$ とする.



上図より $P \subset Q$ なので 真

(2)

2 つの集合 P, Q を

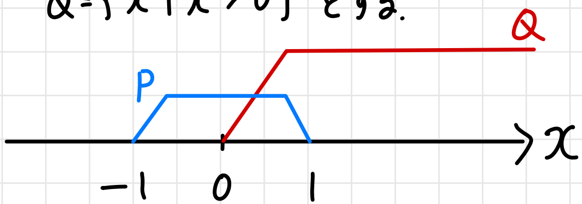
$P = \{m \mid m$ は 12 の正の約数$\}$
$Q = \{m \mid m$ は 24 の正の約数$\}$ とする.

$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$P \subset Q$ より 真

(3) 2 つの集合 P, Q を

$P = \{x \mid -1 < x < 1\}$
$Q = \{x \mid x > 0\}$ とする.



$P \subset Q$ ではないので 偽

・反例…命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示す例

練習 11 n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

n が素数ならば，n は奇数である。

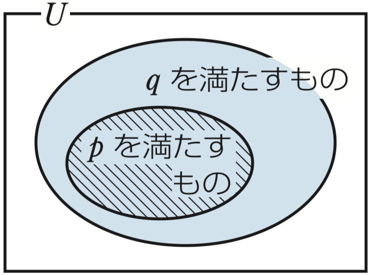
$n=2$ は素数だが偶数なのでこの命題は偽である.

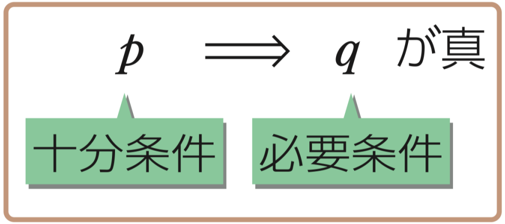
2つの条件 p, q について

・命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき

p は q であるための十分条件

q は p であるための必要条件





・命題 $p \Rightarrow q$ が成り立つかつ $q \Rightarrow p$ が成り立つとき

p は q であるための必要十分条件である。

q は p であるための必要十分条件である。　（このとき p と q は同値 ($p = q$) である。）

条件 p, q を満たすもの全体の集合を P, Q とすると、$p \Leftrightarrow q$ が成り立つことと $P = Q$ は同じ。

練習 12

x，y は実数とする。次の □ に，「必要」，「十分」のうち，適する言葉を入れよ。

(1)　$x = -2$ は $x^2 = 4$ であるための $\boxed{\text{十分}}$ 条件である。

(2)　$x > 0$ は $x > 1$ であるための $\boxed{\text{必要}}$ 条件である。

(3)　$x = y$ は $(x - y)x = 0$ であるための $\boxed{\text{十分}}$ 条件である。

練習 13 x, y, z は実数とする。次の中で，$x=y$ と同値な条件をすべて選べ。

① $x+z=y+z$　② $x^2=y^2$　③ $(x-y)^2=0$

① は両辺から z を引くと $x=y$

② は $x=\pm y$

③ は $x-y=\pm 0 \Rightarrow x=y$

よって ① と ③

練習 14 x, y は実数とする。次の $\boxed{}$ に，

「必要条件であるが十分条件ではない」，

「十分条件であるが必要条件ではない」，

「必要十分条件である」

のうち，適する言葉を入れよ。

(1) △ABC が正三角形であることは，△ABC が二等辺三角形であるための $\boxed{}$。

(2) $x<3$ は $-1<x<1$ であるための $\boxed{}$。

(3) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{}$。

(1) 十分条件であるが必要条件でない

(2) 必要条件であるが十分条件でない

(3) 必要十分条件である.

・条件の否定 … 条件 p に対して存在する「p でない」条件. p に対して $\overline{p}$ で表す.

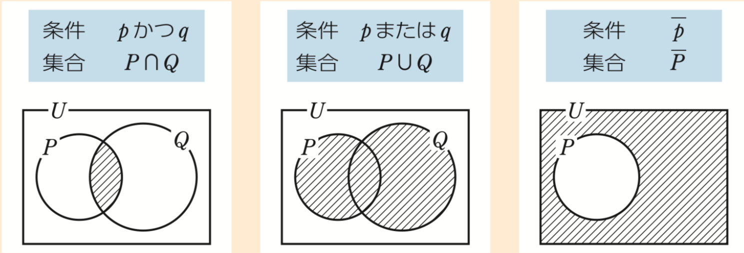
練習 15 n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) n は偶数である　　(2) n は5より小さい

(1) n は奇数である.　(2) n は5以上である.

全体集合を U とし，U の要素の中で，条件 p，q を満たすもの全体の集合を，それぞれ P，Q で表す。

条件「p かつ q」，「p または q」，$\overline{p}$ と集合の関係は，次のようになる。



「かつ」の否定，「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

「ともに」の否定は「少なくとも一方」

「少なくとも一方」の否定は「ともに」

練習 16 x，y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$　　(2) $x=0$ または $y=0$

(3) x，y はともに有理数

(1) $x<0$ または $y<0$　(2) $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$

(3) x, y の少なくとも一方は無理数

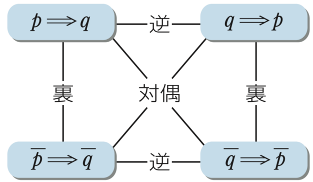
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

$q \Longrightarrow p$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**逆**

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**対偶**

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**裏**

という。命題 $p \Longrightarrow q$ とその逆，対偶，裏は，互いに右の図のような関係にある。



もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。

※ 対偶の真偽は一致する.

練習 17　x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1)　$x > y \Longrightarrow x - y > 0$　　　(2)　$x \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$

(1) 真

逆 $x - y > 0 \Rightarrow x > y$ 真

裏 $x \leqq y \Rightarrow x - y \leqq 0$ 真

対偶 $x - y \leqq 0 \Rightarrow x \leqq y$ 真

(2) 偽

逆 $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 真

裏 $x = 0 \Rightarrow xy = 0$ 真

対偶 $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ 偽

練習 18 n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^2 が奇数ならば，n は奇数である。

この命題の対偶

「nが偶数ならば n^2 は偶数」を証明する.

nが偶数のとき, nは整数kを用いて $n=2k$ と表せる.

このとき $n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$

$2k^2$ は整数であるから. $2\times 2k^2$ は偶数.

よって, 対偶が真なのでもとの命題も真となる.

練習 19 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，次の命題を証明せよ。

$1+3\sqrt{2}$ は無理数である。

$1+3\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

ある有理数 x を用いて $1+3\sqrt{2}=x$ と表せる.

ここで

$$1+3\sqrt{2}=x$$

$$3\sqrt{2}=x-1$$

$$\sqrt{2}=\frac{x-1}{3}$$

x が有理数なら $\frac{x-1}{3}$ も有理数なので

この式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する

したがって $1+3\sqrt{2}$ は無理数である.

p は x に関する条件とする。

命題「すべての x について p」の否定は 「ある x について $\overline{p}$」

命題「ある x について p」の否定は 「すべての x について $\overline{p}$」

練習 1 次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての実数 x について $x+1>0$

(2) ある素数 n について $n+2$ は素数である。

(1)

もとの命題は 偽 反例 $x=-1$

否定 「ある実数 x について $x+1 \leqq 0$」 真

(2) 真

否定「すべての素数 n について $n+2$ は素数でない」 偽 反例 $n=3$