

数Ⅲ

微分法の応用



接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

練習

1

次の曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{4}{x}$, A(-1, -4)

(2) $y = \tan x$, A(0, 0)

(1) $f(x) = \frac{4}{x}$ とする。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(-1) = -\frac{4}{(-1)^2} = -4$$

$$y - (-4) = -4 \{x - (-1)\}$$

$$y = -4x - 8$$

(2) $f(x) = \tan x$ とする。

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$y = x$$

法線…曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式に垂直な直線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における法線の方程式は

$$f'(a) \neq 0 \text{ のとき} \quad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

練習
2 次の曲線上の点Aにおける法線の方程式を求めよ。

(1) $y = \frac{2}{x}$, A(1, 2)

(2) $y = \sin x$, A($\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$)

(1) $f(x) = \frac{2}{x}$ とする。

(2) $f(x) = \sin x$ とする。

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$f'(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

法線の方程式は

$$y - 2 = -\frac{1}{-2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}(x - \frac{\pi}{6})$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi + \frac{1}{2}$$

法線の方程式は

練習
3曲線 $y = e^x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である

(2) 点 (1, 0) を通る

 $f(x) = e^x$ とする。接点の x 座標を a とすると接点は (a, e^a)

$$f'(x) = e^x$$

(1) $f'(a) = 1$ たり

$$e^a = 1$$

$$a = 0$$

$$a = 0 \text{ たり接点は } (0, 1)$$

接線の方程式は

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$y = x + 1$$

(2) 接線の傾きは $f'(a) = e^a$

接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a) \dots \textcircled{1}$$

これが “(1, 0) を通る”

$$0 - e^a = e^a(1 - a)$$

$$-e^a = e^a - ae^a$$

$$ae^a - 2e^a = 0$$

$$(a-2)e^a = 0$$

$$a = 2$$

 $a = 2$ を \textcircled{1} に代入

$$y - e^2 = e^2(x - 2)$$

$$y = e^2x - e^2$$

次の曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, A(-1, 2)

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$, A($\sqrt{2}$, -1)

$$(1) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$$

両辺をxで微分する。

$$x + \frac{d}{dx} \cdot \frac{y^2}{8} = 0$$

$$x + \frac{d}{dy} \frac{y^2}{8} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + \frac{y}{4} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

接線の傾きは

$$-\frac{4 \cdot (-1)}{2} = 2$$

$$(2) x^2 - y^2 = 1$$

両辺をxで微分

$$y - 2 = 2 \{x - (-1)\}$$

$$y = 2x + 4$$

$$2x - \frac{d}{dx} y^2 = 0$$

$$2x - \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

接線の傾きは

$$\frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

接線の方程式は

$$y - (-1) = -\sqrt{2} (x - \sqrt{2})$$

$$y = -\sqrt{2}x + 1$$

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b \text{ を満たす実数 } c \text{ が存在する。}$$

練習
5

次の場合に、前ページの平均値の定理における c の値を求めよ。

$$f(x) = x^3, \quad a = -1, \quad b = 2$$

$f(x) = x^3$ は区間 $[-1, 2]$ で連続、区間 $(-1, 2)$ で微分可能

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) \quad -1 < c < 2 \text{ とみたす実数 } c \text{ が存在}$$

$$f'(c) = 3c^2$$

$$3c^2 = 3$$

$$c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$-1 < c < 2 \text{ と } c = 1$$

平均値の定理を用いて、次のことを証明せよ。

$$a < b \text{ のとき} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$$

$$f(x) = e^x \text{ とする。 } f(x) \text{ は 連続で } \text{ 微分可能} \quad f'(x) = e^x$$

区間 $[a, b]$ において平均値の定理より

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = e^c \dots \textcircled{1} \quad a < c < b \dots \textcircled{2} \quad \text{を満たす実数 } c \text{ が存在。}$$

$f'(x) = e^x$ は増加関数なので $\textcircled{2}$ より $e^a < e^c < e^b$

$\textcircled{1}$ より

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$$

導関数の符号と関数の増減

1 区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば,

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で増加する。

2 区間 (a, b) で常に $f'(x) < 0$ ならば,

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少する。

3 区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば,

$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。

練習
7

上の 2, 3 を証明せよ。

閉区間 $[a, b]$ において, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ を満たす任意の x_1, x_2 とすると平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \quad x_1 < c < x_2 \text{ を満たす実数 } c \text{ が存在する。}$$

② $x_2 - x_1 > 0, f'(c) < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$

これより, $f(x_1) > f(x_2)$ なので閉区間 $[a, b]$ で単調減少

③ $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$a \leq x_1 < x_2 \leq b$ を満たす任意の x_1, x_2 に対して $f(x_1) = f(x_2)$ なので閉区間 $[a, b]$ で定数

区間 (a, b) で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば、区間 $[a, b]$ で
 $g(x) = f(x) + C$ ただし、 C は定数

練習
8

上のことを証明せよ。

$$F(x) = g(x) - f(x) \text{ とすると}$$

$$F'(x) = g'(x) - f'(x) \text{ なので}$$

区間 (a, b) で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば $F'(x) = 0$

したがって、 $F(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で、 C を定数として $F(x) = C$

よって $g(x) - f(x) = C$ であるから

閉区間 $[a, b]$ で

$$g(x) = f(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

次の関数の増減を調べよ。

$$(1) f(x) = x - e^x$$

$$(2) f(x) = x - \log x$$

$$(3) f(x) = x + \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$(1) f'(x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$1 - e^x = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

増減表は下図

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	-1 ↘	↙

$f(x)$ は $x \leq 0$ で "単調増加"

$x \geq 0$ で "単調減少"

$$(2) f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

増減表は下図

x	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	↘	1 ↗	1 ↗	↗

$f(x)$ は $0 < x \leq 1$ で "単調減少"

$x \geq 1$ で "単調増加"

$$(3) f'(x) = 1 + \cos x$$

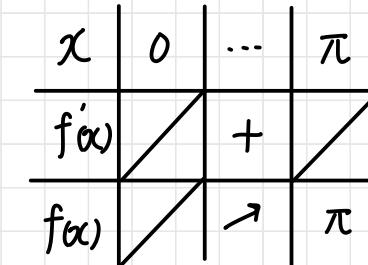
$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$1 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi$$

増減表は下図



$f(x)$ は $0 \leq x \leq \pi$ で "単調増加"

次の関数の極値を求めるよ。

$$(1) f(x) = x^2 e^{-x} \quad (2) f(x) = x \log x \quad (3) f(x) = x + \frac{2}{x}$$

(1)

$$f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする。}$$

$$2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = 0$$

$$(2-x)x e^{-x} = 0$$

$$x = 0, 2$$

増減表は下図

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	y	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

$$x=2 \text{ のとき極大値 } \frac{4}{e^2}$$

$$x=0 \text{ のとき極小値 } 0$$

(2)

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \log x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$\log x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \log x &= -1 \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

増減表は下図

x	0	...	$\frac{1}{e}$...
$f'(x)$	-	0	+	...
$f(x)$	y	- $\frac{1}{e}$	↗	...

$x = \frac{1}{e}$ のとき極小値 $-\frac{1}{e}$

次の関数の極値を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 e^{-x} \quad (2) f(x) = x \log x \quad (3) f(x) = x + \frac{2}{x}$$

(3)

$$f'(x) = 1 + \left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ と } \exists$$

増減表は下図

$$1 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

x	...	$-\sqrt{2}$...	0	...	$\sqrt{2}$...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$-2\sqrt{2}$	\searrow		\searrow	$2\sqrt{2}$	\nearrow

$$x = -\sqrt{2} \text{ のとき極大値 } -2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき極小値 } 2\sqrt{2}$$

次の関数の極値を求めよ。

$$(1) f(x) = |x|(x+1)$$

$$(2) f(x) = |x|\sqrt{x+2}$$

(1)

$x < 0$ のとき

$x \geq 0$ のとき

$$f(x) = -x(x+1) = -x^2 - x$$

$$f(x) = x(x+1) = x^2 + x$$

$$f'(x) = -2x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ とき}$$

$$x \geq 0 \text{ (つまり常に } f'(x) > 0)$$

$$-2x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

増減表は下図

x	...	$-\frac{1}{2}$...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	/	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗

$$x = -\frac{1}{2} \text{ のとき極大値 } \frac{1}{4}$$

$$x = 0 \text{ のとき極小値 } 0$$

次の関数の極値を求めよ。

$$(1) f(x) = |x|(x+1)$$

$$(2) f(x) = |x|\sqrt{x+2}$$

(2) $f(x)$ の定義域は $x \geq -2$

$-2 \leq x < 0$ のとき

$$f(x) = -x\sqrt{x+2}$$

$$f'(x) = -1 \cdot \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} \cdot (-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}}$$

$f'(x) = 0$ とする

$$\frac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

$$-3x-4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$x \geq 0$ のとき

$$f(x) = x\sqrt{x+2}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

$x \geq 0$ のとき常に $f'(x) > 0$

増減表は下図

x	-2	...	$-\frac{4}{3}$...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	+		
$f(x)$	0	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0	↗

$$x = -\frac{4}{3} \text{ のとき極大値 } \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$x = 0 \text{ のとき極小値 } 0$$

関数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように、定数 a の値を定めよ。また、このとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとると $f'(1) = 0$... ①

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \quad \text{①式} \\ 1-a = 0$$

$$f'(1) = 1-a \quad a=1$$

逆に $a=1$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを示す。

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \cdot f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする} \\ 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

増減表は下図

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗	-2	↙		↙	2	↗

よって $f(x)$ は $x=-1$ で極値をとる

$$a = 1$$

$$x = -1 \text{ のとき 極大値 } -2$$

$$x = 1 \text{ のとき 極小値 } 2$$

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

$$(1) \quad y = (1 + \cos x) \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$(2) \quad y = \frac{4 - 3x}{x^2 + 1} \quad (1 \leq x \leq 4)$$

(1)

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x \text{ とする。}$$

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cos x$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$$

$$f'(x) = -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x$$

$$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ より}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

増減表は下図

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$...	2π
$f'(x)$	/	+	0	-	0	-	0	+	/
$f(x)$	0	/	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	0	↓	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	/	0

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{5}{3}\pi \text{ のとき最小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

$$(1) \quad y = (1 + \cos x) \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$(2) \quad y = \frac{4 - 3x}{x^2 + 1} \quad (1 \leq x \leq 4)$$

(2)

$$f(x) = \frac{4 - 3x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2 + 1) - (4 - 3x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とき } x = 3$$

$$\frac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 3) = 0$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{ より } x = 3$$

増減表は下図

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$	-		0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{8}{17}$

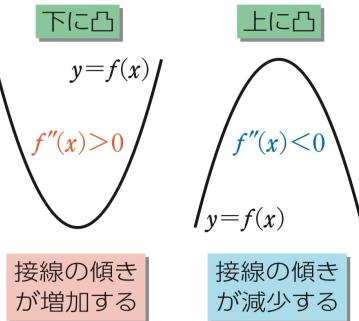
$x = 1$ のとき最大値 |

$x = 3$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

$f''(x)$ の符号と曲線 $y = f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつとき

- 1 $f''(x) > 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は下に凸である。
- 2 $f''(x) < 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は上に凸である。



練習
14

次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y = x^4 + 2x^3 + 1$

(2) $y = xe^{-x}$

(3) $y = x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$

(4) $y = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$

(1) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ とする。

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 0 \text{ とする}$$

$$12x^2 + 12x = 0$$

$$12x(x+1) = 0$$

$$x = 0, -1$$

7テテの凹凸は以下の表

x	...	-1	...	0	...
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	0	↓		↑

$x < -1, 0 < x$ で下に凸

$-1 < x < 0$ で上に凸

変曲点 $(-1, 0), (0, 1)$

次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

$$(1) \quad y = x^4 + 2x^3 + 1$$

$$(2) \quad y = xe^{-x}$$

$$(3) \quad y = x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

$$(4) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

(2)

$$f(x) = x e^{-x} \text{ とする。}$$

$$f'(x) = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$(x-2)e^{-x} = 0$$

$$x = 2$$

グラフの凹凸は以下の表

x	...	2	...
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	$\frac{2}{e^2}$	↗

$x < 2$ で 上に凸

$x > 2$ で 下に凸

変曲点は $(2, \frac{2}{e^2})$

次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

$$(1) \quad y = x^4 + 2x^3 + 1$$

$$(2) \quad y = xe^{-x}$$

$$(3) \quad y = x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

$$(4) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

(3)

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f''(x) = \cos x$$

$$f''(x) = 0 \text{ とする}$$

$$\cos x = 0$$

$$0 < x < \pi \text{ のとき}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

7. テーブルの凹凸は以下の表

x	0	\cdots	$\frac{\pi}{2}$	\cdots	π
$f''(x)$	+	0	-		
$f(x)$	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$	\searrow		

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき 下に凸

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき 上に凸

変曲点は $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

$$(1) \quad y = x^4 + 2x^3 + 1$$

$$(2) \quad y = xe^{-x}$$

$$(3) \quad y = x - \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

$$(4) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

(4)

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$$

$$f''(x) = -12x^2 + 24x - 12$$

$$f''(x) = 0 \text{ とする}$$

$$-12x^2 + 24x - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

777の凹凸は以下の表

x	...	1	...
$f''(x)$	-	0	-
$f(x)$	↗		↗

$f(x)$ は常に上に凸

変曲点なし

関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減、グラフの凹凸、漸近線を調べて、グラフの概形をかけ。

$$f(x) = e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = -4x e^{-2x^2}$$

$$f''(x) = -4e^{-2x^2} + (-4x) \cdot e^{-2x^2} \cdot (-4x)$$

$$= -4e^{-2x^2} + 16x^2 e^{-2x^2}$$

$$= 4(4x^2 - 1)e^{-2x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると

$$-4x e^{-2x^2} = 0$$

$$x = 0$$

$f''(x) = 0$ とすると

$$4(4x^2 - 1)e^{-2x^2} = 0$$

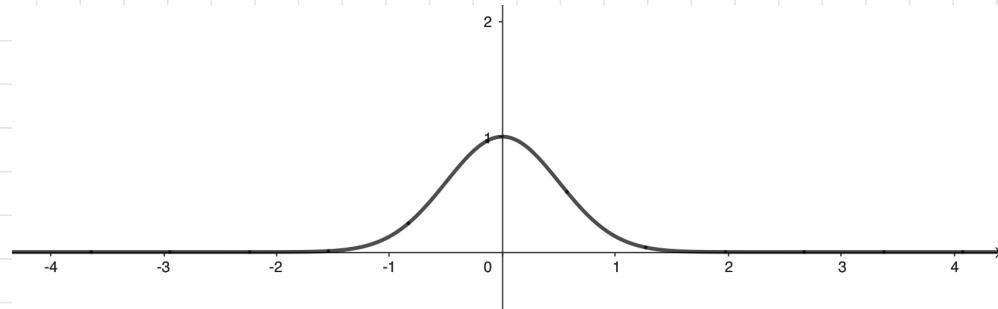
$$4x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

グラフの増減や凹凸は下の表

x	...	$-\frac{1}{2}$...	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\curvearrowright	1	\curvearrowleft	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\searrow

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ なので漸近線は x 軸



関数 $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ のグラフの概形をかけ。

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \text{ とする。}$$

定義域は $x \neq -1$

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると
 $x = 1, -3$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$$

$f''(x)$ は $x > -1$ で $f''(x) > 0$
 $x < -1$ で $f''(x) < 0$

グラフの増減や凹凸は下の表

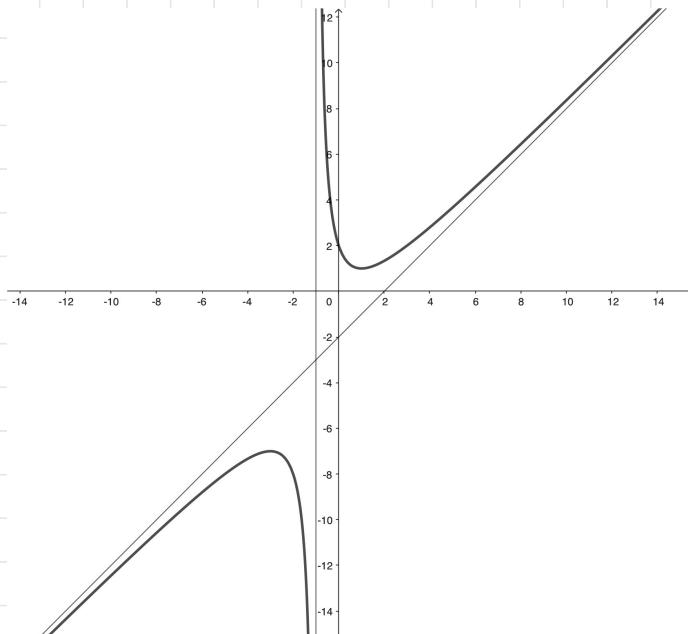
x	...	-3	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	↑	-7	↓		↓	1	↑

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x-2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$$



第2次導関数と極値

1 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば、 $f(a)$ は極小値である。

2 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば、 $f(a)$ は極大値である。

練習

17

次の関数の極値を、第2次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

(2) $f(x) = x + 2 \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(1)

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$4x^3 - 12x = 0$$

$$4x(x^2 - 3) = 0$$

$$4x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x = 0, \pm\sqrt{3}$$

$$f''(0) = -12 < 0$$

$$f'(\sqrt{3}) = 24 > 0$$

$$f'(-\sqrt{3}) = 24 > 0$$

$x = 0$ で 極大値 5

$x = \pm\sqrt{3}$ で 極小値 -4

(2)

$$f'(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$f''(x) = -2 \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$1 + 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} < 0$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき極大値 } \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき極小値 } \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

$x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。ただし、(2)では応用例題 4 で

証明したことを用いてもよい。

$$(1) \log(x+1) < x$$

$$(2) e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

(1)

$f(x) = \log(x+1) - x$ とすると

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$$

$x > 0$ のとき $f'(x) < 0$ であるから

$f(x)$ は $x \geq 0$ で減少する。

また、 $f(0) = 0$ なので、 $x > 0$ のとき $f(x) < 0$

したがって、 $\log(x+1) - x < 0$ なので

$$\log(x+1) < x \quad \text{□}$$

(2)

$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ とすると

$$f'(x) = e^x - (1 + x)$$

$x > 0$ のとき、 $e^x > 1$ より $f'(x) > 0$ であるから

$f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

また、 $f(0) = 0$ なので、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$

したがって $e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) > 0$ なので

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{□}$$

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) \frac{x^3}{x-1} = a$$

$$(2) xe^x - a = 0$$

(1)

$f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ とする。定義域は $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = 0$$

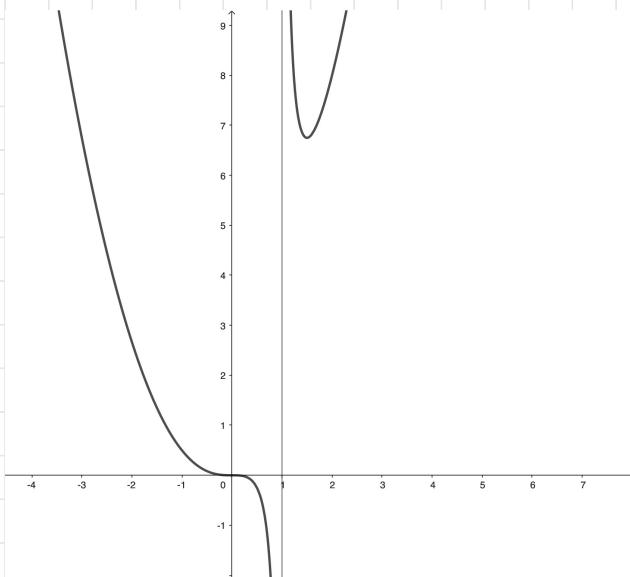
$$2x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(2x-3) = 0$$

$$x = 0, \frac{3}{2}$$

増減表は下図

x	...	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$...
$f'(x)$	-	0	-		-	0	+
$f(x)$	↓	0	↓		↓	$\frac{27}{4}$	↑



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

$a < \frac{27}{4}$ のとき 1コ

$a = \frac{27}{4}$ のとき 2コ

$a > \frac{27}{4}$ のとき 3コ

a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) \frac{x^3}{x-1} - a$$

$$(2) xe^x - a = 0$$

増減表は下図

(2)

$$xe^x = a$$

$f(x) = xe^x$ とする。

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

$f'(x) = 0$ とすると

$$e^x + xe^x = 0$$

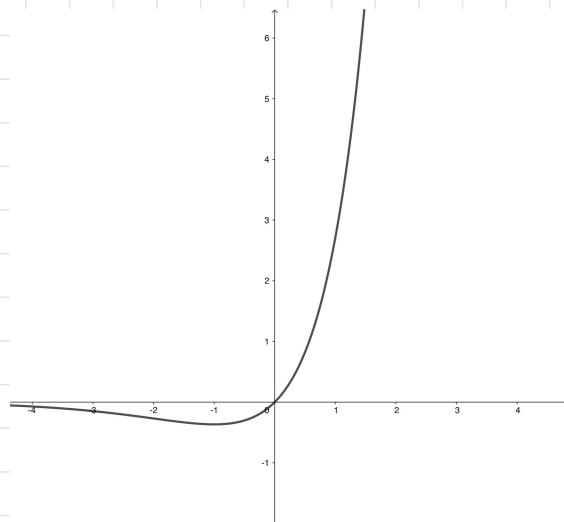
$$(1+x)e^x = 0$$

$$x = -1$$

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↓	$-\frac{1}{e}$	↑

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$a < -\frac{1}{e}$$
 のとき 0 つ

$$a = -\frac{1}{e}, a \geq 0$$
 のとき 1 つ

$$-\frac{1}{e} < a < 0$$
 のとき 2 つ

速度と加速度

数直線上を運動する点Pの時刻 t における座標 x が $x = f(t)$ で表されるとき、時刻 t におけるPの速度 v 、加速度 α は

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

- 練習
20 地上から、初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき、 t 秒後の高さ x m は、 $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ で与えられる。ただし、 g は定数とする。
 t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s² を求めよ。

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{1}{2} g t = v_0 - g t$$

$$\alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

速度 $v_0 - g t$ m/s

加速度 $-g$ m/s²

時刻 t における点Pの座標 (x, y) が
次の式で与えられるとき, $t = 3$ におけるPの速さ, 加速度の大きさを求めよ。

$$(1) \quad x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 4t \quad (2) \quad x = 2 \cos \pi t, \quad y = 2 \sin \pi t$$

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t - 4$$

$$t = 3 \text{ のとき}, \quad \vec{v} = (2, 2)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

$$t = 3 \text{ のとき}, \quad \vec{\alpha} = (0, 2)$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

速度の大きさ $2\sqrt{2}$ m/s

加速度の大きさ 2 m/s²

(2)

$$\frac{dx}{dt} = -2\pi \sin \pi t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\pi \cos \pi t$$

$$t = 3 \text{ のとき}, \quad \vec{v} = (-2\pi \sin 3\pi, 2\pi \cos 3\pi) = (0, -2\pi)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-2\pi)^2} = 2\pi$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\pi^2 \cos \pi t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\pi^2 \sin \pi t$$

$$t = 3 \text{ のとき}, \quad \vec{\alpha} = (-2\pi^2 \cos 3\pi, -2\pi^2 \sin 3\pi) = (2\pi^2, 0)$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(2\pi^2)^2 + 0^2} = 2\pi^2$$

速度の大きさ 2π m/s

加速度の大きさ $2\pi^2$ m/s²

関数 $f(x)$ が $x=a$ で 微分可能であるとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ と定義される。}$$

ここで h が限りなく 0 に近いとき、以下のように考えることができ.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \doteq f'(a) \rightarrow f(a+h) \doteq f(a) + h f'(a)$$

1 次の近似式

$$h \doteq 0 \text{ のとき } f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

練習

22

$h \doteq 0$ のとき、次の関数の値について、1 次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$

(2) $\tan(a+h)$

(1) $f(x) = \cos x$ とすると $f'(x) = -\sin x$

$h \doteq 0$ のとき

$$\cos(a+h) \doteq \cos a - h \sin a$$

(2) $f(x) = \tan x$ とすると $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$h \doteq 0$ のとき

$$\tan(a+h) \doteq \tan a + \frac{h}{\cos^2 a}$$

$x \neq 0$ のとき、次の関数について、1次の近似式を作れ。

(1) e^x

(2) $\log(1+x)$

(3) $\frac{1}{1+x}$

(1) $e^x \doteq e^0 + e^0 \cdot x = 1 + x$

(2) $\log(1+x) \doteq \log(1+0) + \frac{1}{1+0} \cdot x = x$

(3) $\frac{1}{1+x} \doteq \frac{1}{1+0} + \left\{ -\frac{1}{(1+0)^2} \right\} \cdot x = 1 - x$

$x \doteq 0$ のときの 1 次の近似式

$$x \doteq 0 \text{ のとき} \quad f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

練習
24

1 次の近似式を用いて、次の数の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$

(2) $\log 1.01$

(3) $\frac{1}{0.998}$

(1) $\sqrt[4]{1.03} = (1 + 0.03)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$$\sqrt[4]{1.03} \doteq \sqrt[4]{1} + 0.03 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} = 1 + 0.0075 = 1.0075$$

$$\sqrt[4]{1.03} \doteq 1.0075$$

(2) $\log 1.01 = \log(1 + 0.01)$ であるから

$$\log 1.01 \doteq \log 1 + 0.01 \cdot \frac{1}{1} = 0 + 0.01 = 0.01$$

$$\log(1.01) \doteq 0.01$$

(3) $\frac{1}{0.998} = \frac{1}{1 - 0.002}$ であるから

$$\frac{1}{0.998} \doteq \frac{1}{1} + (-0.002) \cdot \left(-\frac{1}{1^2}\right) = 1 + 0.002 = 1.002$$

$$\frac{1}{0.998} \doteq 1.002$$