

# 数Ⅰ

---

集合と命題



・命題 ... 一般に正しいか正しくないかが定まる文や式

命題が正しいときその命題は真である。

命題が正しくないときその命題は偽である。

・条件 ... 文字 $x$ を含む文や式で $x$ に値を代入することで真偽が定まるもの

全体集合 ... 条件を考えるときの条件に含まれる文字を要素とする集合

練習

9

次の命題の真偽を述べよ。

(1) 円周率 $\pi$ は有理数である。

(2) 実数 $-1$ について $(-1)^2 \geq 0$ である。

(1)  $\pi$ は無理数なので偽

(2) 真

# 命題 $p \Rightarrow q$

- 1 命題  $p \Rightarrow q$  は、「 $p$  を満たすものはすべて  $q$  を満たす」ということを表す。
- 2 条件  $p$  を満たすものの全体の集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの全体の集合を  $Q$  とするとき、「命題  $p \Rightarrow q$  が真である」と「 $P \subset Q$  が成り立つ」とは同じことである。

$p$ : 仮定

$q$ : 結論

練習  
10

次の条件  $p, q$  について, 命題  $p \Rightarrow q$  の真偽を, 集合を用いて調べよ。

(1) 実数  $x$  に関する 2 つの条件  $p: x \leq 2, q: x \leq 4$

(2) 自然数  $m$  に関する 2 つの条件

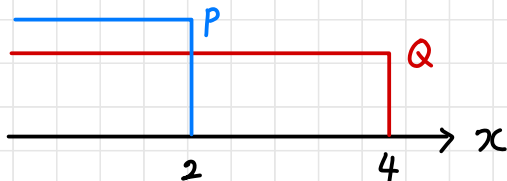
$p: m$  は 12 の正の約数,  $q: m$  は 24 の正の約数

(3) 実数  $x$  に関する 2 つの条件  $p: -1 < x < 1, q: x > 0$

(1) 2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{x \mid x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid x \leq 4\} \text{ とする.}$$



上図より  $P \subset Q$  なので 真

(2)

2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{m \mid m \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

$$Q = \{m \mid m \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\} \text{ とする.}$$

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

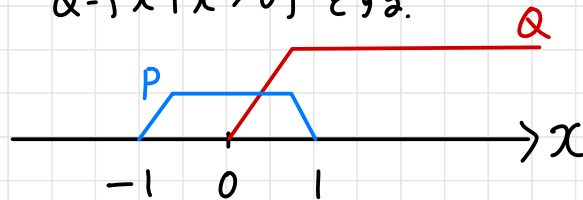
$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$P \subset Q$  より 真

(3) 2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

$$Q = \{x \mid x > 0\} \text{ とする.}$$



$P \subset Q$  ではないので 偽

## ・反例…命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示す例

練習 11  $n$  は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

$n$  が素数ならば、 $n$  は奇数である。

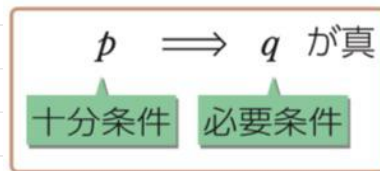
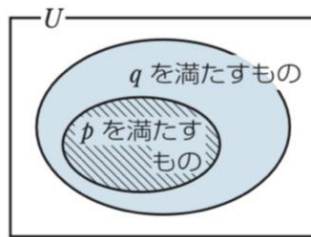
$n = 2$  は素数だが偶数なのでこの命題は偽である。

2つの条件  $P, Q$  について

命題  $P \Rightarrow Q$  が真であるとき

$P$  は  $Q$  であるための十分条件

$Q$  は  $P$  であるための必要条件



命題  $P \Rightarrow Q$  が成り立つかつ  $Q \Rightarrow P$  が成り立つとき

$P$  は  $Q$  であるための必要十分条件である。

$Q$  は  $P$  であるための必要十分条件である。

(このとき  $P$  と  $Q$  は同値 ( $P = Q$ ) である。)

条件  $P, Q$  を満たすものの全体の集合を  $P, Q$  とすると,  $P \Leftrightarrow Q$  が成り立つことと  $P = Q$  は同じ。

練習  
12

$x, y$  は実数とする。次の  に、「必要」、「十分」のうち、適する言葉を入れよ。

(1)  $x = -2$  は  $x^2 = 4$  であるための  条件である。

(2)  $x > 0$  は  $x > 1$  であるための  条件である。

(3)  $x = y$  は  $(x - y)x = 0$  であるための  条件である。

練習  
13

$x, y, z$  は実数とする。次の中で、 $x=y$  と同値な条件をすべて選べ。

①  $x+z=y+z$

②  $x^2=y^2$

③  $(x-y)^2=0$

① は両辺から  $z$  を引くと  $x=y$

② は  $x=\pm y$

③ は  $x-y=\pm 0 \Rightarrow x=y$

よって ① と ③

練習  
14

$x, y$  は実数とする。次の  に、

「必要条件であるが十分条件ではない」、

「十分条件であるが必要条件ではない」、

「必要十分条件である」

のうち、適する言葉を入れよ。

(1)  $\triangle ABC$  が正三角形であることは、 $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるための 。

(2)  $x < 3$  は  $-1 < x < 1$  であるための 。

(3)  $|x|=|y|$  は  $x^2=y^2$  であるための 。

(1) 十分条件であるが必要条件でない

(2) 必要条件であるが十分条件でない

(3) 必要十分条件である。

・条件の否定 ... 条件  $P$  に対して存在する「 $P$ でない」条件  $P$  に対して  $\bar{P}$  で表す。

---

練習  
15

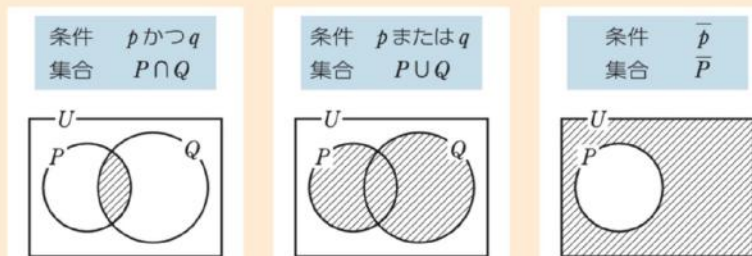
$n$  は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1)  $n$  は偶数である                      (2)  $n$  は 5 より小さい

(1)  $n$  は奇数である.      (2)  $n$  は 5 以上である.

全体集合を  $U$  とし、 $U$  の要素の中で、条件  $p$ ,  $q$  を満たすものの全体の集合を、それぞれ  $P$ ,  $Q$  で表す。

条件「 $p$  かつ  $q$ 」, 「 $p$  または  $q$ 」,  $\bar{p}$  と集合の関係は、次のようになる。



「かつ」の否定, 「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

「ともに」の否定は「少なくとも一方」,  
「少なくとも一方」の否定は「ともに」,

- 練習 16**  $x, y$  は実数とする。次の条件の否定を述べよ。
- (1)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$       (2)  $x = 0$  または  $y = 0$
- (3)  $x, y$  はともに有理数

(1)  $x < 0$  または  $y < 0$    (2)  $x \neq 0$  かつ  $y \neq 0$

(3)  $x, y$  の少なくとも一方は無理数



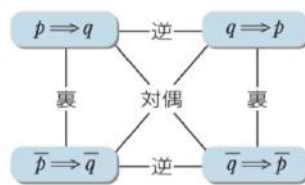
命題  $p \Rightarrow q$  に対して

$q \Rightarrow p$  を  $p \Rightarrow q$  の 逆

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  を  $p \Rightarrow q$  の 対偶

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$  を  $p \Rightarrow q$  の 裏

という。命題  $p \Rightarrow q$  とその逆、対偶、裏は、互いに右の図のような関係にある。



もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

※ 文対偶の真偽は一致する。

**練習 17**  $x, y$  は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、対偶、裏を述べ、それらの真偽を調べよ。

- (1)  $x > y \Rightarrow x - y > 0$       (2)  $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

(1) 真

(2) 偽

逆  $x - y > 0 \Rightarrow x > y$  真

逆  $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$  真

裏  $x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$  真

裏  $x = 0 \Rightarrow xy = 0$  真

対偶  $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$  真

対偶  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  偽