11. 全体集合を$\{x \mid -4 \leqq x \leqq 6,\ x\text{は整数}\}$とし，その部分集合 A，B について，$A=\{2,\ a-1,\ a\}$，$B=\{-4,\ a-3,\ 10-a\}$ であるとき，$A\cap B=\{2,\ 5\}$ となるように定数 a の値を定めよ。また，そのときの集合 $A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めよ。

$A\cap B=\{2,5\}$ は A と B の両方に 2 と 5 が入っている必要がある.

ここで $A=\{2,a-1,a\}$ より $a-1=5$，もしくは $a=5$ であれば

A の要素に 2 と 5 が存在するので $a-1=5$ と $a=5$ について考える.

(ア) $a-1=5$ つまり $a=6$ のとき

$A=\{2,5,6\}$，$B=\{-4,3,4\}$ なので $A\cap B=\emptyset$ より不適

(イ) $a=5$ のとき

$A=\{2,4,5\}$，$B=\{-4,2,5\}$ なので $A\cap B=\{2,5\}$

(ア)(イ)より $a=5$ であることがわかる.

また，$A\cup B=\{-4,2,4,5\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}$ はド・モルガンの法則より $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

ここで全体集合 $\{x \mid -4\leqq x\leqq 6,\ x\text{は整数}\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

したがって

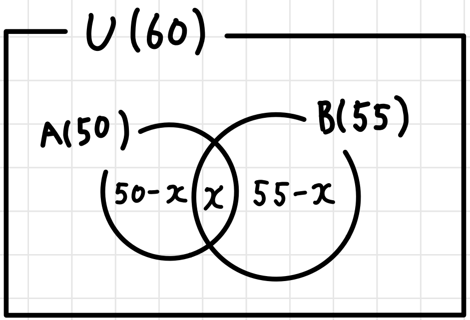
$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{-3,-2,-1,0,1,3,6\}$

生徒 60 人に数学と英語のテストをしたところ，数学に合格した生徒は 50 人，英語に合格した生徒は 55 人であった。このとき，次の生徒の人数は最も多くて何人か。また，最も少なくて何人か。

(1)　少なくとも一方に合格した生徒　　　(2)　両方とも合格した生徒

数学に合格した人の集合をA
英語に合格した人の集合をB

ここで $n(A \cap B) = x$ とすると
下図の状況になる.



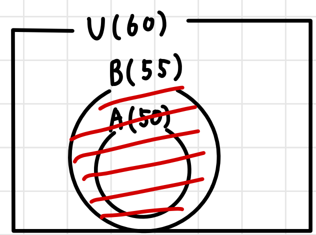
上図より $n(A \cup B) = (50-x) + x + (55-x)$

$n(A \cup B) = 105 - x$

(1) 少なくとも一方に合格
→ $n(A \cup B)$ の最大と最小がわかればよい.

最大は，AとBの和集合の数が全体集合の個数と等しくなるとき
つまり $n(A \cup B) = n(U) = 60$ 人

最小は AとBの和集合，つまり AとBを合わせた部分が最も小さくなればよい.
下図のような状況になればよい.



したがって，AとBの和集合は赤斜線部
$n(A \cup B) = 55$ 人

生徒 60 人に数学と英語のテストをしたところ，数学に合格した生徒は 50 人，英語に合格した生徒は 55 人であった。このとき，次の生徒の人数は最も多くて何人か。また，最も少なくて何人か。

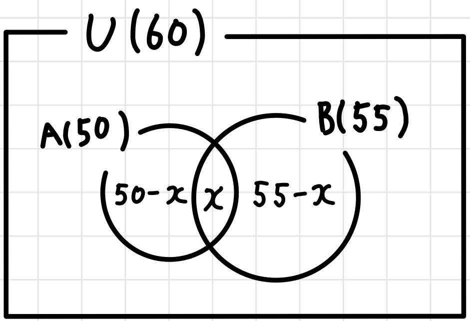
(1)　少なくとも一方に合格した生徒　　　(2)　両方とも合格した生徒

数学に合格した人の集合をA

英語に合格した人の集合をB

ここで $n(A \cap B) = x$ とすると

下図の状況になる。



上図より $n(A \cup B) = (50-x) + x + (55-x)$

$n(A \cup B) = 105 - x$

(2)　両方とも合格した生徒

→ $n(A \cap B)$ の最大最小を求める。

はじめに $n(A \cap B) = x$ とおいているので

(1)の結果と $n(A \cup B) = 105 - x$ を用いて

x の値を求める。

ここで

$n(A \cup B) = 105 - x$ について

$n(A \cup B)$ が最大なら x は最小

$n(A \cup B)$ が最小なら x は最大

(1)より

$n(A \cup B)$ の最大は 60 なので

$n(A \cup B) = 60$ のとき x は最小

$60 = 105 - x$

$x = 45$

よって両方とも合格した生徒は

少なくとも 45人

また，

(1)より $n(A \cup B)$ の最小は 55 なので

$n(A \cup B) = 55$ のとき x は最大

$55 = 105 - x$

$x = 50$

よって両方とも合格した生徒は

多くても 50人

70. 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$ (2) $a<b<c<d$

(3) $a \geqq b>c>d$ (4) $a<b<c \leqq d$

(1)

a, b, c, d には 0～9 のいずれかが入るが

4桁の整数を考えているので千の位が 0，つまり $a=0$ であってはならない.

(1) は $a>b>c>d$ なので 0～9 の 10コの整数から 4コ選び

4桁の整数を作った場合，選んだ数字の中に 0 があっても a に 0 が入ることはない.

(例) 0～9 のうち 0, 2, 5, 8 を選んだとき

$a>b>c>d$ より 4桁の整数は 8520 となる.

したがって 0～9 の 10コの整数から 4コを選べばよいので

$$ {}_{10}C_4 = \frac{{}_{10}P_4}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{(個)} $$

70. 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$　　(2) $a<b<c<d$

(3) $a \geqq b>c>d$　　(4) $a<b<c \leqq d$

(2)

a, b, c, d には $0 \sim 9$ のいずれかが入るが

4桁の整数を考えているので千の位が 0，つまり $a=0$ であってはならない.

(2) は $a<b<c<d$ なので $0 \sim 9$ の 10 コの整数から4コ選び

4桁の整数を作った場合，選んだ数字の中に0があったら必ず a に 0 が入ってしまう.

(例) $0 \sim 9$ のうち $0, 2, 5, 8$ を選んだとき

$a<b<c<d$ より4桁の整数は 0258 となり不適.

したがって，選んだ4コの整数の中に0が含まれなければよいので

$1 \sim 9$ の 9 コの整数から4コの整数を選べばよい.

$${}_9C_4 = \frac{{}_9P_4}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{(個)}$$

70. 4 桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$　　(2) $a<b<c<d$

(3) $a\geqq b>c>d$　　(4) $a<b<c\leqq d$

(3)

a, b, c, d には 0～9 のいずれかが入るが
4桁の整数を考えているので千の位が 0 , つまり a = 0 であってはならない.
(1) は $a>b>c\geqq d$ なので 0～9 の 10コ の整数から 4コ 選び

4桁の整数を作った場合, 選んだ数字の中に 0 があっても a に 0 が入ることはない.

(例) 0～9 のうち 0, 2, 5, 8 を選んだとき
$a>b>c>d$ より 4桁の整数は 8520 となる.

また $a>b>c\geqq d$ は $a>b>c>d$ または $a>b>c=d$ で分けると考えやすい.

($a>b>c>d$ となる個数) + ($a>b>c=d$ となる個数)

(1) より 210 個

$a>b>c=d$ となる個数は 0～9 の 10コ の整数から 3コ を選べばよいので

$${}_{10}C_3 = \frac{{}_{10}P_3}{3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120 \text{ (個)}$$

よって $210+120=330$ (個)

70. 4桁の自然数 n の千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ a，b，c，d とする。次の条件を満たす n は何個あるか。

(1) $a>b>c>d$　　(2) $a<b<c<d$

(3) $a \geqq b>c>d$　　(4) $a<b<c \leqq d$

(4)

a, b, c, d には 0〜9のいずれかが入るが
4桁の整数を考えているので千の位が 0，つまり $a=0$ であってはならない.

(4) は $a<b<c \leqq d$ なので 0〜9の10コの整数から4コ選び

4桁の整数を作った場合，選んだ数字の中に0があったら必ず a に0が入ってしまう.

(例) 0〜9のうち 0, 2, 5, 8を選んだとき
$a<b<c<d$ より 4桁の整数は 0258 となり不適.

また $a<b<c \leqq d$ は $a<b<c<d$ または $a<b<c=d$ で分けると考えやすい.

($a<b<c<d$ となる個数) + ($a<b<c=d$ となる個数)
(2) より 126個

$a<b<c=d$ となる個数は 1〜9の 9コの整数から 3コの整数を選べばよい.

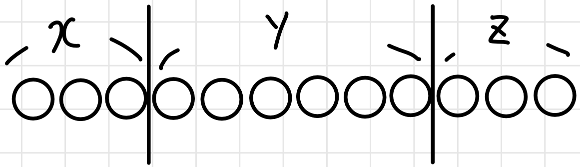
$${}_9C_3 = \frac{{}_9P_3}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{（個）}$$

よって
$126+84=210$（個）

79. 等式 $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x, y, z の組は，全部で何個あるか。

(1)　x, y, z は負でない整数　　　(2)　x, y, z は自然数

(1) 3種類の文字 x, y, z を重複を許して12コとる



○…12コ と |…2コ 計14コ

$${}_{14}C_{2} = \frac{{}_{14}P_{2}}{2!} = \frac{14\cdot 13}{2\cdot 1} = 91 \text{ (個)}$$

79. 等式 $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x, y, z の組は、全部で何個あるか。

(1) x, y, z は負でない整数　　(2) x, y, z は自然数

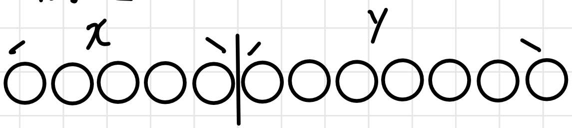
(2) x, y, z は自然数 $\Rightarrow$ x, y, z は最低でも1つは選ばれなければならない。

(1) は x, y, z が整数なので $\begin{cases} x\text{が}0\text{コ or } y\text{が}0\text{コ or } z\text{が}0\text{コ} \\ x, y\text{が}0\text{コ or } y, z\text{が}0\text{コ or } x, z\text{が}0\text{コ} \end{cases}$ の場合も含まれているので

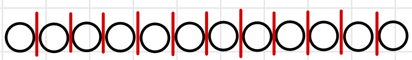
(1)の結果である91から ＿＿ の場合を引けばよい。

$\boxed{1}$ xが0コ or yが0コ or zが0コ の場合

例 zが0コ



ここで、xとyは0コになってはならないので | は



上図のような12コの | のどこか1か所に入らなければならないので

${}_{11}C_3$

これがxが0コ、yが0コ、zが0コの3パターンあるので

$3\times {}_{11}C_1 = 3\times 11 = 33$ (個)

$\boxed{2}$ x, yが0コ or y, zが0コ or x, zが0コ の場合

xが12コ or yが12コ or zが12コ の3個

よって $91-33-3=55$ (個)

57. 次の循環小数を分数で表せ。

~~(1) $0.\dot{4}$~~　(2) $3.9\dot{7}$　~~(3) $0.\dot{7}\dot{9}$~~　~~(4) $0.\dot{4}5\dot{6}$~~

(2)

$3.9\dot{7} = 3.9777\cdots$

$x = 3.977\cdots$ とする.

x は循環部が $77\cdots$ なので小数部分を $77\cdots$ のみにすると

$$10x = 39.777\cdots$$

$$-)\ 100x = 397.777\cdots$$

$$10x - 100x = 39 - 397$$

$$-90x = -358$$

$$x = \frac{358}{90} = \frac{179}{45}$$

循環小数を分数になおす手順

① 問題の小数を x とおく.

② ①を10倍, 100倍等して小数部分をそろえる.

小数部分を循環部のみにするのがコツ

③ ②で作った式を引き算.

45. 男子 3 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 両端が男子である。

(2) 女子 4 人が続いて並ぶ。

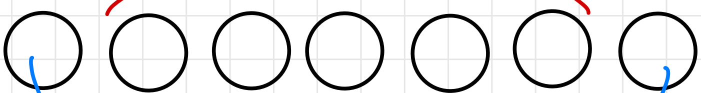
(3) 男子，女子が交互に並ぶ。

イメージ図を書くことがコツ

(1)

中の5人は全員の並べかえ

5!



3人の男から2人を並べる

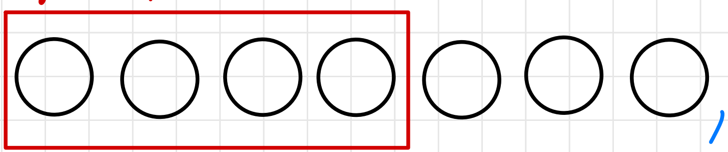
${}_3P_2$

$\Rightarrow {}_3P_2 \times 5! = 3\times2\times5\times4\times3\times2\times1=720$

720通り

(2) 4人が続く => 4人をまとめる.

まとめた中の4人全員の並び方は4!



まとめたかたまり1つと男3人 => 計4つの並べ方

4!

$\Rightarrow 4! \times 4! = 4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1=576$

576通り

45. 男子 3 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1) 両端が男子である。

(2) 女子 4 人が続いて並ぶ。

(3) 男子，女子が交互に並ぶ。

(3)

女 男 女 男 女 男 女

交互の並び方のイメージは上図.
この並びの中で $\underbrace{\text{女全員}}_{4!}$ と $\underbrace{\text{男全員}}_{3!}$ の並び方を考えればよい.

$$4! \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$$

144通り

46. 7個の数字0，1，2，3，4，5，6の中から異なる数字を使ってできる，次のような数は何個あるか。

(1) 5桁の整数　(2) 4桁の奇数

(3) 5桁の偶数

条件のある位の数字の入り方から考える.

(1)

万	千	百	十	一
0以外	万の位で使わなかった残り6コから4コ並べる			

$6 \times {}_6P_4 = 6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2160$

2160通り

(2)

千	百 十	一
0以外 1の位で使った奇数以外	残り5コから2コ並べる.	1 or 3 or 5

$3 \times 5 \times {}_5P_2 = 3 \times 5 \times 5 \times 4 = 300$

300通り

(3) (5ケタの偶数) = (5ケタの整数) − (5ケタの奇数)

(1)で求めた　これ求める.

万	千 百 十	一
0以外 1の位で使った奇数以外	残り5コから3コ並べる.	1 or 3 or 5

$3 \times 5 \times {}_5P_3 = 3 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 900$

よって5ケタの偶数は $2160 - 900 = 1260$

1260通り

3 赤玉が3個，白玉が2個，青玉が1個入った袋の中から無作為に3個の玉を同時に取り出すとき，次の問いに答えなさい。ただし、すべての玉は区別がつくものとする。

(H30.9)

(1) 3個の球の取り出し方は全部で

| ア | イ | 通り

である。

異なる6コから3コ選ぶ $_6C_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ (通り)

(2) 取り出した玉の色がすべて異なる確率は

$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}\boxed{オ}}$

である。

取り出した玉の色が全て異なる ⇒ 3コの赤から1コ選ぶ → $_3C_1$
2コの白から1コ選ぶ → $_2C_1$
1コの青から1コ選ぶ → $_1C_1$

$\frac{_3C_1 \times _2C_1 \times _1C_1}{_6C_3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(3) 取り出した玉の色がちょうど2色である確率は

$\frac{\boxed{カ}\boxed{キ}}{\boxed{ク}\boxed{ケ}}$

である。

取り出した玉の色がちょうど2色 ⇒ (全) − (1色) − (3色)

(1)

— は玉の個数が取り出す個数と同じ赤玉のみ

3コの赤玉から3コ選ぶ → $_3C_3$

$\therefore 1 - \frac{_3C_3}{20} - \frac{3}{10} = \frac{20-1-6}{20} = \frac{13}{20}$

3 赤，白，青のカードが3枚ずつあり，どの色のカードにも1から3までの数字が1つずつ書かれている。この9枚のカードから同時に3枚を取り出すとき，次の問いに答えなさい。 (R3.9)

(1) 3枚のカードの取り出し方は全部で

$\boxed{ア}\boxed{イ}$ 通り

である。

9枚のカードから3枚選ぶ → ${}_9C_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$(通り)

(2) 取り出したカードの中に赤のカードが1枚も含まれない確率は

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}\boxed{オ}}$

である。

赤のカードが1枚も含まれていない → 白3枚青3枚の計6枚から3枚選ぶ → ${}_6C_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$(通り)

よって $\dfrac{20}{84} = \dfrac{5}{21}$

(3) 取り出したカードが色も番号もすべて異なる確率は

$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}\boxed{ク}}$

である。

赤$_1$ < 青$_2$ − 白$_3$ ／ 青$_3$ − 白$_2$

赤$_2$ < 青$_1$ − 白$_3$ ／ 青$_3$ − 白$_1$

赤$_3$ < 青$_1$ − 白$_2$ ／ 青$_2$ − 白$_1$

6通り

よって $\dfrac{6}{84} = \dfrac{1}{14}$

3 5円硬貨，10円硬貨，50円硬貨，100円硬貨，500円硬貨が1枚ずつある。この5枚の硬貨を同時に投げるとき，次の問いに答えなさい。

(R4. 9)

(1) 5枚の硬貨の表裏の出方は全部で

$\boxed{ア}\boxed{イ}$ 通り

ある。

各硬貨の表裏の出方は2通りなので $\underset{⑤}{2} \times \underset{⑩}{2} \times \underset{㊿}{2} \times \underset{100}{2} \times \underset{500}{2} = 32$(通り)

(2) 表がちょうど2枚出る確率は

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}\boxed{オ}}$

である。

(反復試行)…試行をn回行ったとき事象Aがr回起こる確率は

$${}_nC_r \times P(A)^r \times P(\bar{A})^s \quad (r+s=n)$$

各硬貨の表が出る確率は $\frac{1}{2}$.

$$5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

(3) 裏が出た硬貨の金額の合計より表が出た硬貨の金額の合計が大きければ，その差額を受け取れるものとする。受け取る金額が350円以上となる確率は

$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}\boxed{ク}}$

である。

(表がでた金額の合計) − (裏がでた金額の合計) ≧ 350

x とおくと

$$x-(665-x) \geqq 350$$
$$2x \geqq 1015$$
$$x \geqq 507.5$$

表が出る硬貨の合計金額が507.5円以上になるには

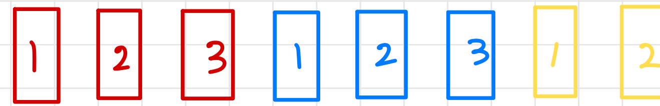
500円玉が表かつ10円, 50円, 100円の少なくとも1枚が表であればよい

$$\underset{\substack{500円\\表}}{1} \times \underset{\substack{10円\ 50円\ 100円\\少なくとも1枚表}}{(2^3-1)} \times \underset{\substack{5円\\表or裏}}{2} = 14(通り)$$

$$\therefore \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

3 赤色，青色のカードが3枚ずつと黄色のカードが2枚ある。赤色，青色のカードには1から3までの番号が1つずつ，黄色のカードには1と2の番号が1つずつ書かれている。この8枚のカードから同時に2枚を取り出すとき，次の問いに答えなさい。

(R5.9)



(1) 2枚のカードの取り出し方は全部で

$\boxed{ア}\boxed{イ}$ 通り

ある。

8枚のカードから2枚を選ぶ → ${}_8C_2 = 28$ 通り

(2) 取り出した2枚のカードが同じ色である確率は

$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

である。

赤2枚＋青2枚＋黄2枚 ⇒

3枚の赤から2枚選ぶ ${}_3C_2$

3枚の赤から2枚選ぶ ${}_3C_2$

3枚の赤から2枚選ぶ ${}_3C_3$

${}_3C_2 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 7$

$\therefore \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$

(3) 取り出した2枚のカードが色も番号も異なる確率は

$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

である。

・赤$_1$ < 青$_2$・ 青$_3$・ 黄$_2$・

・赤$_2$ < 青$_1$・ 青$_3$・ 黄$_1$・

・赤$_3$ < 青$_1$・ 青$_2$・ 黄$_1$・ 黄$_2$・

・青$_1$－黄$_2$・

・青$_2$－黄$_1$・

・青$_3$ < 黄$_1$・ 黄$_2$・

$\dfrac{14}{28} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$ 1から7までの数字が1つずつ書かれた7枚のカードから，同時に3枚のカードを取り出すとき，次の問いに答えなさい。

(3) 3枚のカードを取り出した後，カードを元に戻さずに，続けてもう1枚のカードの合計4枚のカードを取り出すことにする。このとき，最初の3枚のカードにも後の1枚のカードにも6以上のカードが含まれない確率は

$$\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

7枚のカードから計4枚のカードを選ぶのは ${}_7C_4$ 通り

最初に取り出す3枚にも後から取り出す1枚にも6以上のカードがない ⇒ 1, 2, 3, 4, 5の中から4枚選べばよい ⇒ ${}_5C_4$

よって $\dfrac{{}_5C_4}{{}_7C_4} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$