数Ⅲ

微分法の応用

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

練習 1 次の曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{4}{x}$, A$(-1,\ -4)$　　(2) $y=\tan x$, A$(0,\ 0)$

(1) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ とする.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(-1)=-\dfrac{4}{(-1)^2}=-4$

$y-(-4)=-4\{x-(-1)\}$

$y=-4x-8$

(2) $f(x)=\tan x$ とする.

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f'(0)=\dfrac{1}{\cos^2 0}=1$

$y-0=1\cdot(x-0)$

$y=x$

法線 … 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式に垂直な直線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a) \neq 0$ のとき　　$\boldsymbol{y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)}$

練習 2　次の曲線上の点Aにおける法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{2}{x}$,　A(1,　2)　　(2)　$y=\sin x$,　$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(1) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ とする.

$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

$f'(1)=-\dfrac{2}{1^2}=-2$

法線の方程式は

$y-2=-\dfrac{1}{-2}(x-1)$

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

(2) $f(x)=\sin x$ とする.

$f'(x)=\cos x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

法線の方程式は

$y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}$

練習 3 曲線 $y=e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 1 である　　(2) 点 $(1,\ 0)$ を通る

$f(x)=e^x$ とする．接点のx座標をaとすると

接点は (a, e^a)

$f'(x)=e^x$

(1) $f'(a)=1$ より

$e^a=1$

$a=0$

$a=0$より接点は$(0,1)$

接線の方程式は

$y-1=1\cdot(x-0)$

$y=x+1$

(2) 接線の傾きは $f'(a)=e^a$

接線の方程式は

$y-e^a=e^a(x-a)$ …①

これが$(1,0)$を通るので

$0-e^a=e^a(1-a)$

$-e^a=e^a-ae^a$

$ae^a-2e^a=0$

$(a-2)e^a=0$

$a=2$

$a=2$ を①に代入

$y-e^2=e^2(x-2)$

$y=e^2x-e^2$

練習 4 次の曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，A$(-1,\ 2)$

(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$，A$(\sqrt{2},\ -1)$

(1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$

両辺をxで微分する.

$x+\dfrac{d}{dx}\cdot\dfrac{y^2}{8}=0$

$x+\dfrac{d}{dy}\dfrac{y^2}{8}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$x+\dfrac{y}{4}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$

接線の傾きは

$-\dfrac{4\cdot(-1)}{2}=2$

接線の方程式は

$y-2=2\{x-(-1)\}$

$y=2x+4$

(2) $x^2-y^2=1$

両辺をxで微分

$2x-\dfrac{d}{dx}y^2=0$

$2x-\dfrac{d}{dy}y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

接線の傾きは

$\dfrac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$

接線の方程式は

$y-(-1)=-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$y=-\sqrt{2}x+1$

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

練習 5 次の場合に，前ページの平均値の定理における c の値を求めよ。

$$f(x)=x^3,\ a=-1,\ b=2$$

$f(x)=x^3$ は区間 $[-1,2]$ で連続，区間 $(-1,2)$ で微分可能

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$　$-1<c<2$ をみたす実数 c が存在

$f'(c)=3c^2$ より

$3c^2=3$

$c^2=1$

$c=\pm 1$

$-1<c<2$ より　$c=1$

練習 6 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$a<b$ のとき　$e^{a}<\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}<e^{b}$

$f(x)=e^{x}$ とする.　$f(x)$ は 連続で微分可能　$f'(x)=e^{x}$

区間 $[a, b]$ において平均値の定理より

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=e^{c}$ …①　$a<c<b$ …②　をみたす実数 c が存在.

$f'(x)=e^{x}$ は増加関数なので ② より　$e^{a}<e^{c}<e^{b}$

① より

$$e^{a}<\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}<e^{a}$$

導関数の符号と関数の増減

1　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば,
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。

2　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)<0$ ならば,
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。

3　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)=0$ ならば,
　　$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

練習 7　上の **2**, **3** を証明せよ。

閉区間 $[a, b]$ において, $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ を満たす任意の x_1, x_2 をとると平均値の定理より

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c)$　$x_1 < c < x_2$ を満たす実数 c が存在する.

$\boxed{2}$　$x_2 - x_1 > 0$, $f'(c) < 0$ より　$f(x_2)-f(x_1) < 0$

これより, $f(x_1) > f(x_2)$ なので閉区間 $[a, b]$ で単調減少

$\boxed{3}$　$f'(c) = 0$ より　$f(x_2)-f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ を満たす任意の x_1, x_2 に対して $f(x_1) = f(x_2)$ なので閉区間 $[a, b]$ で定数

区間 $(a,\ b)$ で常に $g'(x)=f'(x)$ ならば，区間 $[a,\ b]$ で
$g(x)=f(x)+C$　　ただし，C は定数

練習 8

上のことを証明せよ。

$F(x)=g(x)-f(x)$ とすると

$F'(x)=g'(x)-f'(x)$ なので

区間 (a,b) で常に $g'(x)=f'(x)$ ならば $F'(x)=0$

したがって，$F(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続で，C を定数として $F(x)=C$

よって $g(x)-f(x)=C$ であるから

閉区間 $[a,b]$ で

$g(x)=f(x)+C$ （C は定数）

練習 9 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=x-e^x$　　(2) $f(x)=x-\log x$

(3) $f(x)=x+\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

(1) $f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$ とする

$1-e^x=0$

$e^x=1$

$x=0$

増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

$f(x)$ は $x \leqq 0$ で単調増加

$x \geqq 0$ で単調減少

(2) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$ とする

$1-\dfrac{1}{x}=0$

$x-1=0$

$x=1$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で単調減少

$x \geqq 1$ で単調増加

(3) $f'(x)=1+\cos x$

$f'(x)=0$ とする

$1+\cos x=0$

$\cos x=-1$

$x=\pi$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	π

$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で単調増加

練習 10 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=x^2e^{-x}$ (2) $f(x)=x\log x$ ~~(3) $f(x)=x+\frac{2}{x}$~~

(1)

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x})$

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$f'(x)=0$ とする.

$2xe^{-x}-x^2e^{-x}=0$

$(2-x)xe^{-x}=0$

$x=0.2$

増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

$x=2$ のとき極大値 $\frac{4}{e^2}$

$x=0$ のとき極小値 0

(2)

$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ とする

$\log x+1=0$

$\log x=-1$

$x=\frac{1}{e}$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

$x=\frac{1}{e}$ のとき極小値 $-\frac{1}{e}$

練習 10 次の関数の極値を求めよ。

~~(1) $f(x)=x^2e^{-x}$~~ ~~(2) $f(x)=x\log x$~~ (3) $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$

(3)

$$f'(x)=1+\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とする

$$1-\frac{2}{x^2}=0$$

$$x^2-2=0$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

増減表は下図

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$

$x=-\sqrt{2}$ のとき極大値 $-2\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ のとき極小値 $2\sqrt{2}$

練習 11

次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=|x|(x+1)$ ~~(2) $f(x)=|x|\sqrt{x+2}$~~

(1)

$x<0$ のとき

$f(x)=-x(x+1)=-x^2-x$

$f'(x)=-2x-1$

$f'(x)=0$ とする

$-2x-1=0$

$x=-\frac{1}{2}$

$x\geqq 0$ のとき

$f(x)=x(x+1)=x^2+x$

$f'(x)=2x+1$

$x\geqq 0$ について常に $f'(x)>0$

増減表は下図

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=-\frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{1}{4}$

$x=0$ のとき極小値 0

練習 11

次の関数の極値を求めよ。

~~(1) $f(x)=|x|(x+1)$~~　　(2) $f(x)=|x|\sqrt{x+2}$

(2) $f(x)$ の定義域は $x \geqq -2$

$-2 \leqq x < 0$ のとき

$$f(x) = -x\sqrt{x+2}$$

$$f'(x) = -1\cdot\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}\cdot(-x)\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}}$$

$f'(x) = 0$ とする

$$\frac{-3x-4}{2\sqrt{x+2}} = 0$$

$$-3x-4=0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$x \geqq 0$ のとき

$$f(x) = x\sqrt{x+2}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

$x \geqq 0$ のとき常に $f'(x) > 0$

増減表は下図

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=-\frac{4}{3}$ のとき極大値 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

$x=0$ のとき極小値 0

練習 12 関数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ が $x=1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるとき $f'(1)=0$ …①

$f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$　　①より

$f'(1)=1-a$　　$1-a=0$

$a=1$

逆に $a=1$ のとき $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとることを示す.

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$ とする

$1-\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$

増減表は下図

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	/	↘	2	↗

よって $f(x)$ は $x=-1$ で極値をとる

$a=1$

$x=-1$ のとき極大値 -2

$x=1$ のとき極小値 2

練習 13 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=(1+\cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

~~(2) $y=\frac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$~~

(1)

$f(x)=(1+\cos x)\sin x$ とする.

$f'(x)=-\sin x\cdot\sin x+(1+\cos x)\cos x$

$f'(x)=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$

$f'(x)=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$

$f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1$

$f'(x)=0$ とする

$2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より

$x=\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

練習 13

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

~~(1) $y=(1+\cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$~~

(2) $y=\dfrac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

(2)

$$f(x)=\frac{4-3x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-3(x^2+1)-(4-3x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ とする

$$\frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}=0$$

$$3x^2-8x-3=0$$

$$(3x+1)(x-3)=0$$

$1 \leqq x \leqq 4$ より　$x=3$

増減表は下図

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{8}{17}$

$x=1$ のとき最大値 1

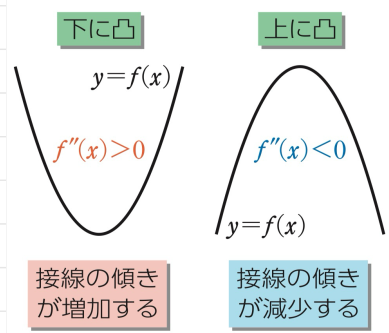
$x=3$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1 $f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。

2 $f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である。



練習 14 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+1$ ~~(2) $y=xe^{-x}$~~

~~(3) $y=x-\cos x$ $(0<x<\pi)$~~ ~~(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$~~

(1) $f(x)=x^4+2x^3+1$ とする.

$f'(x)=4x^3+6x^2$

$f''(x)=12x^2+12x$

$f''(x)=0$ とする

$12x^2+12x=0$

$12x(x+1)=0$

$x=0,-1$

グラフの凹凸は下の表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$

$x<-1$, $0<x$ で下に凸

$-1<x<0$ で上に凸

変曲点 $(-1,0)$, $(0,1)$

練習 14 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

~~(1) $y=x^4+2x^3+1$~~　(2) $y=xe^{-x}$

~~(3) $y=x-\cos x\ (0<x<\pi)$~~　~~(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$~~

(2)

$f(x)=xe^{-x}$ とする.

$f'(x)=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}+(1-x)\cdot(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$ とすると

$(x-2)e^{-x}=0$

$x=2$

グラフの凹凸は下の表

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\nearrow$

$x<2$ で上に凸

$2<x$ で下に凸

変曲点は $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

練習 14 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

~~(1) $y=x^4+2x^3+1$~~　~~(2) $y=xe^{-x}$~~

(3) $y=x-\cos x \quad (0<x<\pi)$　~~(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$~~

(3)

$f(x)=x-\cos x$

$f'(x)=1+\sin x$

$f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$ とする

$\cos x=0$

$0<x<\pi$ より

$x=\frac{\pi}{2}$

グラフの凹凸は下の表

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f''(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	/	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	/

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき 下に凸

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ のとき 上に凸

変曲点は $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

練習 14 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

~~(1) $y=x^4+2x^3+1$~~　~~(2) $y=xe^{-x}$~~

~~(3) $y=x-\cos x \quad (0<x<\pi)$~~　(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

(4)

$f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

$f'(x)=-4x^3+12x^2-12x+4$

$f''(x)=-12x^2+24x-12$

$f''(x)=0$とする

$-12x^2+24x-12=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

グラフの凹凸は下の表

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	→

$f(x)$は常に上に凸

変曲点なし

練習 15 関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

$$f(x)=e^{-2x^2}$$

$$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$$

$$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x)\cdot e^{-2x^2}\cdot(-4x)$$

$$=-4e^{-2x^2}+16x^2e^{-2x^2}$$

$$=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$-4xe^{-2x^2}=0$$

$$x=0$$

$f''(x)=0$ とすると

$$4(4x^2-1)e^{-2x^2}=0$$

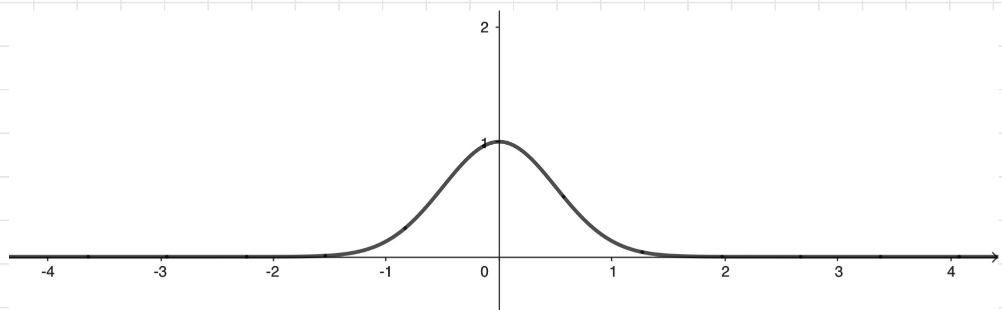
$$4x^2-1=0$$

$$x=\pm\frac{1}{2}$$

グラフの増減や凹凸は下の表

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ なので漸近線は x 軸



練習 16 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

$f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ とする.

定義域は $x \neq -1$

$f(x)=x-2+\dfrac{4}{x+1}$

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると

$x=1, -3$

$f''(x)=\dfrac{8}{(x+1)^3}$

$f''(x)$ は $x>-1$ で $f''(x)>0$

$x<-1$ で $f''(x)<0$

グラフの増減や凹凸は下の表

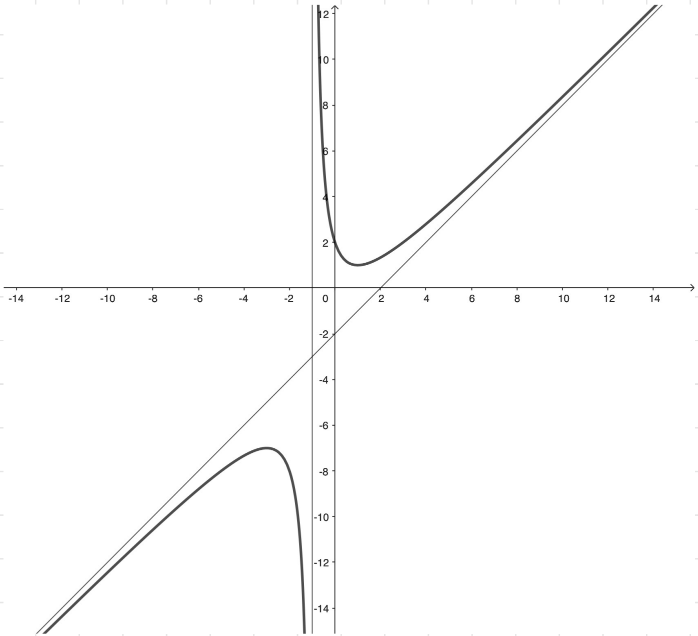
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↱	-7	↴		↳	1	⤴

$\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} f(x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to \infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$



第 2 次導関数と極値

1 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である。

2 $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である。

練習 17 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x)=x^4-6x^2+5$　　(2) $f(x)=x+2\sin x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(1)

$f'(x)=4x^3-12x$

$f''(x)=12x^2-12$

$f'(x)=0$ とすると

$4x^3-12x=0$

$4x(x^2-3)=0$

$4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x=0, \pm\sqrt{3}$

$f''(0)=-12<0$

$f''(\sqrt{3})=24>0$

$f''(-\sqrt{3})=24>0$

$x=0$ で 極大値 5

$x=\pm\sqrt{3}$ で 極小値 -4

(2)

$f'(x)=1+2\cos x$

$f''(x)=-2\sin x$

$f'(x)=0$ とする

$1+2\cos x=0$

$2\cos x=-1$

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$f''(\frac{2}{3}\pi)=-\sqrt{3}<0$

$f''(\frac{4}{3}\pi)=\sqrt{3}>0$

$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき 極大値 $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$x=\frac{4}{3}\pi$ のとき 極小値 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

練習 18 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。ただし，(2)では応用例題 4 で証明したことを用いてもよい。

(1) $\log(x+1)<x$　　(2) $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

(1)

$f(x)=\log(x+1)-x$ とすると

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき $f'(x)<0$ であるから

$f(x)$ は $x\geqq 0$ で減少する.

また, $f(0)=0$ なので　$x>0$ のとき $f(x)<0$

したがって, $\log(x+1)-x<0$ なので

$$\log(x+1)<x \quad \blacksquare$$

(2)

$f(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$ とすると

$f'(x)=e^x-(1+x)$

$x>0$ のとき, $e^x>1$ より $f'(x)>0$ であるから

$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する.

また, $f(0)=0$ なので　$x>0$ のとき $f(x)>0$

したがって　$e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)>0$ なので

$$e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2 \quad \blacksquare$$

練習 19 a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{x-1}=a$　　~~(2) $xe^x - a = 0$~~

(1)

$f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ とする. 定義域は $x \neq 1$

$$f(x)=\frac{x^3}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0$$

$$2x^3-3x^2=0$$

$$x^2(2x-3)=0$$

$$x=0,\ \frac{3}{2}$$

増減表は下図

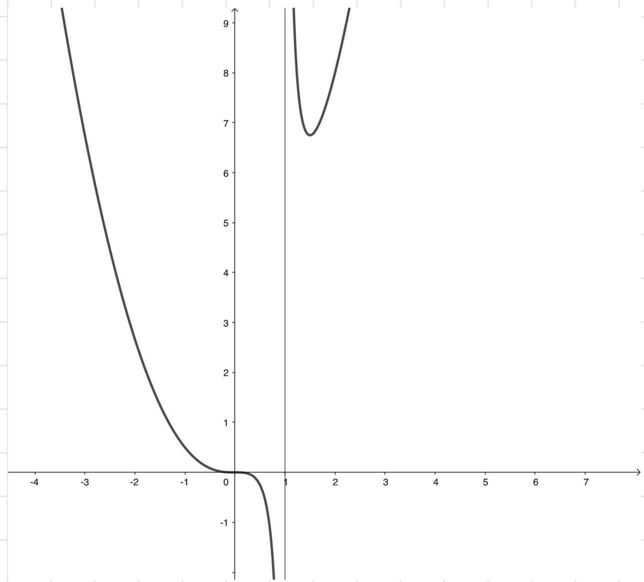
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↘	$\frac{27}{4}$	↗

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$$



$a<\frac{27}{4}$ のとき 1コ

$a=\frac{27}{4}$ のとき 2コ

$a>\frac{27}{4}$ のとき 3コ

練習 19 a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

~~(1)~~ $\cancel{\dfrac{x^3}{x-1}=a}$　　　(2) $xe^x-a=0$

(2)

$xe^x=a$

$f(x)=xe^x$ とする.

$f'(x)=e^x+xe^x$

$f'(x)=0$ とすると

$e^x+xe^x=0$

$(1+x)e^x=0$

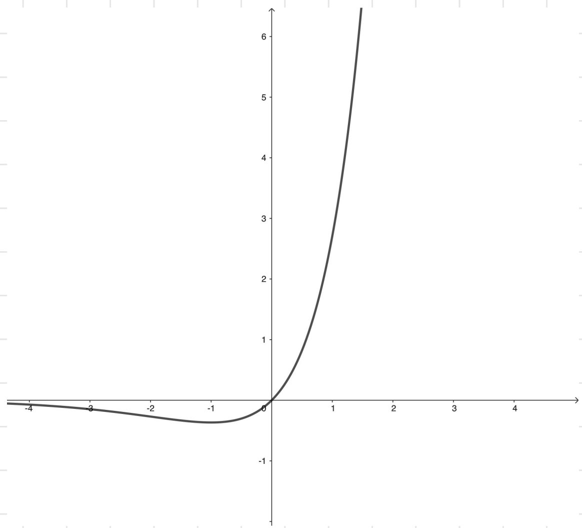
$x=-1$

増減表は下図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$



$a<-\dfrac{1}{e}$ のとき 0コ

$a=-\dfrac{1}{e}$, $a\geqq 0$ のとき 1コ

$-\dfrac{1}{e}<a<0$ のとき 2コ

速度と加速度

数直線上を運動する点Pの時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき，時刻 t におけるPの速度 v，加速度 α は

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t), \qquad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

練習 20 地上から，初速度 v_0 m/s でボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ で与えられる。ただし，g は定数とする。t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s^2 を求めよ。

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0-2\cdot\frac{1}{2}gt=v_0-gt$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-g$$

速度 v_0-gt m/s

加速度 $-g$ m/s^2

練習 21 時刻 t における点Pの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ におけるPの速さ，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=2t+1,\ y=t^2-4t$　　(2) $x=2\cos\pi t,\ y=2\sin\pi t$

(1)

$$\frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2t-4$$

$t=3$ のとき，$\vec{v}=(2,2)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=2$$

$t=3$ のとき，$\vec{\alpha}=(0,2)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+2^2}=2$$

速度の大きさ $2\sqrt{2}$ m/s

加速度の大きさ 2 m/s^2

(2)

$$\frac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t,\ \frac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$$

$t=3$ のとき，$\vec{v}=(-2\pi\sin3\pi,\ 2\pi\cos3t)=(0,-2\pi)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-2\pi)^2}=2\pi$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-2\pi^2\sin\pi t$$

$t=3$ のとき $\vec{\alpha}=(-2\pi^2\cos3\pi,\ -2\pi^2\sin3\pi)=(2\pi^2,0)$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(2\pi^2)^2+0^2}=2\pi^2$$

速度の大きさ 2π m/s

加速度の大きさ $2\pi^2$ m/s^2

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$ と定義される.

ここで h が限りなく0に近いとき以下のように考えることができる.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \fallingdotseq f'(a) \longrightarrow f(a+h) \fallingdotseq f(a) + hf'(a)$$

1 次の近似式

$h \fallingdotseq 0$ のとき　　$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

練習 22 $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$　　(2) $\tan(a+h)$

(1) $f(x)=\cos x$ とすると $f'(x)=-\sin x$

$h \fallingdotseq 0$ のとき

$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a - h\sin a$

(2) $f(x)=\tan x$ とすると $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\tan(a+h) \fallingdotseq \tan a + \frac{h}{\cos^2 a}$$

$x \fallingdotseq 0$ のときの 1 次の近似式

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

練習 23 $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ。

(1) e^x　　(2) $\log(1+x)$　　(3) $\dfrac{1}{1+x}$

(1) $e^x \fallingdotseq e^0 + e^0 \cdot x = 1+x$

(2) $\log(1+x) \fallingdotseq \log(1+0) + \dfrac{1}{1+0} \cdot x = x$

(3) $\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq \dfrac{1}{1+0} + \left\{-\dfrac{1}{(1+0)^2}\right\} \cdot x = 1-x$

練習 24

1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$　(2) $\log 1.01$　(3) $\dfrac{1}{0.998}$

(1) $x \fallingdotseq 0$ のとき $(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

$\sqrt[4]{1.03} = (1+0.03)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$\sqrt[4]{1.03} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{4} \times 0.03 = 1 + 0.0075 = 1.0075$

$\underline{\sqrt[4]{1.03} \fallingdotseq 1.0075}$

(2) $x \fallingdotseq 0$ のとき $\log(1+x) \fallingdotseq x$

$\log 1.01 = \log(1+0.01)$ であるから

$\log 1.01 \fallingdotseq 0.01$

$\underline{\log(1.01) \fallingdotseq 0.01}$

(3) $x \fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$

$\dfrac{1}{0\ 998} = \dfrac{1}{1-0.002}$ であるから

$\dfrac{1}{0.998} \fallingdotseq 1-(-0.002) = 1.002$

$\underline{\dfrac{1}{0.998} \fallingdotseq 1.002}$