(2) $\frac{1}{9} \leqq x \leqq 1$ のとき，$y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$ の最大値・最小値を求めよ。また，そのときのxの値を求めよ。

$$y=(\log_3 x+\log_3 3)(\log_3 x+\log_3 9)$$
$$=(\log_3 x+1)(\log_3 x+2)$$
$$=(\log_3 x)^2+3\log_3 x+2$$

$\underline{\log_3 x = t \text{ とおくと}}$ (ア)

$$y=t^2+3t+2$$

また，$\frac{1}{9} \leqq x \leqq 1$ より

$$\log_3 \frac{1}{9} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 1$$
$$-2 \leqq \underline{\log_3 x} \leqq 0$$

(ア)より

$$-2 \leqq t \leqq 0$$

$$y=t^2+3t+2 \quad (-2 \leqq t \leqq 0)$$
$$=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$t=0$ のとき最大値 2

$t=-\frac{3}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

ここで $t=0$ は $\log_3 x=0$ なので $x=3^0=1$

$t=-\frac{3}{2}$ は $\log_3 x=-\frac{3}{2}$ なので $x=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

∴ $x=1$ のとき 最大値 2

$x=\frac{\sqrt{3}}{9}$ のとき 最小値 $-\frac{1}{4}$

対数関数の大小関係

① $a>1$ のとき $0<M<N \iff \log_a M < \log_a N$ （真数の大小関係と対数の大小関係は一致）

② $0<a<1$ のとき $0<M<N \iff \log_a M > \log_a N$ （真数の大小関係と対数の大小関係は逆）

15 次の各数の大小を比較せよ。

(1) $1,\ \log_2 3,\ \log_4 5,\ \log_{16} 36$　(2) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9,\ \log_3 \frac{1}{2}$

宿題 (3) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2},\ \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{5},\ -1$　(4) $\log_3 2,\ \log_6 4,\ \log_4 2,\ 0.6$

(2) はすべての対数の底がそろっていないので底をそろえる。

$\log_3 \frac{1}{2}$ を底が $\frac{1}{3}$ の対数に変換する。

$$\log_3 \frac{1}{2} = \frac{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}}{\log_{\frac{1}{3}} 3} = -\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{3}} 2$$

また，$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} 9^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{9} = \log_{\frac{1}{3}} 3$

(2) は底が $\frac{1}{3}$ の対数の大小を調べている。

$\square$ 内の②のパターンなので

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_3 \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

12 次の式を計算せよ。

(1) $\log_8 16$ (2) $\log_2 5 \cdot \log_5 2$ (3) $4\log_5\sqrt{5} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \log_{125} 250$

~~(4) $(\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$~~

(1) $\log_8 16$

$8 = 2^3$, $16 = 2^4$ なので

底が2の対数に変換

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \underline{\frac{4}{3}}$$

(3) $\log_{125} 250$ を底が5の対数に変換

$$\log_{125} 250 = \frac{\log_5 250}{\log_5 125} = \frac{1}{3}\log_5 250 = \log_5 250^{\frac{1}{3}} = \log_5 \sqrt[3]{250}$$

また，$4\log_5\sqrt{5} = \log_5(\sqrt{5})^4 = \log_5 25$

$$\frac{1}{3}\log_5 2 = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \log_5 \sqrt[3]{2}$$

$$\therefore\ 4\log_5\sqrt{5} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \log_{125} 250$$

$$= \log_5 25 - \log_5 \sqrt[3]{2} + \log_5 \sqrt[3]{250}$$

$$= \log_5\left(\frac{25}{\sqrt[3]{\cancel{2}}} \times \sqrt[3]{2\cancel{5}0}\right)$$

$$= \log_5\left(25 \times \sqrt[3]{125}\right) = \log_5(25 \times 5) = \log_5 125 = \underline{3}$$

12 次の式を計算せよ。

~~(1) $\log_8 16$ (2) $\log_2 5 \cdot \log_5 2$ (3) $4\log_5\sqrt{5} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \log_{125} 250$~~

(4) $(\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$

(4) $\left(\log_2 9 + \dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\left(\log_3 2 + \dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}\right)$

$= \left(\log_2 9 + \frac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 4\right)$

$= \left(\log_2 9 + \log_2 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(\log_3 2 + \log_3 4^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \left(\log_2 3^2 + \log_2 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(\log_3 2 + \log_3 2\right)$

$= \log_2 3^{\frac{5}{2}} \cdot \log_3 4$

$= \dfrac{5}{2}\log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}$

$= \dfrac{5}{2}\log_2 3 \cdot \dfrac{2}{\log_2 3}$

$= \underline{5}$

13 $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$ とするとき，次の値を a , b の式で表せ。

(1) $\log_{10}5$　(2) $\log_{75}24$

(2)
$$\log_{75}24=\frac{\log_{10}24}{\log_{10}75}$$
$$=\frac{\log_{10}(2^3\times3)}{\log_{10}(3\times5^2)}$$
$$=\frac{\log_{10}2^3+\log_{10}3}{\log_{10}3+\log_{10}5^2}$$
$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2\log_{10}5}$$
$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2\left(\log_{10}\frac{10}{2}\right)}$$
$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2(\log_{10}10-\log_{10}2)}$$
$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2(1-\log_{10}2)}$$
$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2-2\log_{10}2}$$
$$=\frac{3a+b}{b+2-2a}$$

$$a^p = M \Longleftrightarrow p = \log_a M$$

9 次の（1）を$p=\log_a M$の形に，（2）を$a^p=M$の形にせよ。

（1）$3^2=9$　（2）$\frac{1}{3}=\log_{27}3$

(1) $\underline{2 = \log_3 9}$

(2) $\underline{27^{\frac{1}{3}} = 3}$

10 次の値を求めよ。

（1）$\log_5 1$　（2）$\log_4 4$　（3）$\log_2\sqrt{8}$　（4）$\log_{0.2}25$　（5）$2^{\log_2 3}$

(4) $\log_{0.2} 25$

$= \log_{\frac{1}{5}} 25$

$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$= \underline{-2}$

(5) $2^{\log_2 3}$

$= \underline{3}$

$\boxed{11}$ 次の式を簡単にせよ。

（1）$\log_{10}2+\log_{10}5$　（2）$6\log_2\sqrt[3]{3}-\log_2 18$　$\boxed{宿題}$（3）$\frac{1}{2}\log_{10}\frac{5}{6}+\log_{10}\sqrt{7.5}+\frac{1}{2}\log_{10}1.6$

(3)

$$\frac{1}{2}\log_{10}\frac{5}{6}+\log_{10}\sqrt{7.5}+\frac{1}{2}\log_{10}1.6$$

$$=\log_{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_{10}\sqrt{7.5}+\log_{10}(1.6)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log_{10}\sqrt{\frac{5}{6}}+\log_{10}\sqrt{7.5}+\log_{10}\sqrt{1.6}$$

$$=\log_{10}\sqrt{\frac{5}{6}\times 7.5\times 1.6}$$

$$=\log_{10}\sqrt{\frac{5}{6}\times\frac{75}{10}\times\frac{16}{10}}$$

$$=\log_{10}\sqrt{10}=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

8 (1) $y=4^x-2^{x+2}$ $(-1\leqq x\leqq 3)$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときのxの値を求めよ。

宿題 (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\left(\frac{1}{2}\right)^x+10$ $(-3\leqq x\leqq 0)$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときのxの値を求めよ。

保

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+10 \quad (-3\leqq x\leqq 0)$

$=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^{2}-8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+10$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$ とする

$y=t^2-8t+10$

また，$-3\leqq x\leqq 0$ より

$1\leqq t\leqq 8$

$y=t^2-8t+10 \quad (1\leqq t\leqq 8)$

$=(t-4)^2-6$

$t=4$ のとき 最小値 -6

$t=8$ のとき 最大値 10

つまり $t=4$ のとき

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$x=-2$

$t=8$ のとき

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$x=-3$

$x=-2$ のとき 最小値 -6

$x=-3$ のとき 最大値 10

対数関数の大小関係

① $a>1$ のとき $0<M<N \iff \log_a M < \log_a N$ （真数の大小関係と対数の大小関係は一致）

② $0<a<1$ のとき $0<M<N \iff \log_a M > \log_a N$ （真数の大小関係と対数の大小関係は逆）

（3）$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{5}$, -1

-1 を底が $\frac{1}{2}$ の対数にする

$$-1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2$$

(3) は底が $\frac{1}{2}$ の大小を調べている.

$\boxed{}$ 内の②のパターンなので

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2} < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{5}$$

$$\therefore -1 < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2} < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{5}$$

（4）$\log_3 2$, $\log_6 4$, $\log_4 2$, 0.6

$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$$

$$\log_6 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 6} = \frac{2}{\log_2 6} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\log_2\sqrt{6}}$$

$$\log_4 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{\log_2 4}$$

$$\frac{1}{\log_2 4} < \frac{1}{\log_2 3} < \frac{1}{\log_2\sqrt{6}}$$ より $\log_4 2 < \log_3 2 < \log_6 4$

また, $\log_4 2 = \frac{1}{\log_2 4} = \frac{1}{2} = 0.5$ より

$$\log_4 2 < 0.6 < \log_3 2 < \log_6 4$$

17 （1）$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3\ (1\leqq x\leqq 16)$の最大値・最小値を求めよ。また，そのときの$x$の値を求めよ。

宿題（2）$\frac{1}{9}\leqq x\leqq 1$のとき，$y=(\log_3 3x)(\log_3 9x)$の最大値・最小値を求めよ。また，そのときの$x$の値を求めよ。

(1) $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3\ (1\leqq x\leqq 16)$

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3$

$\log_2 x=t$とおくと

$y=t^2-2t-3$

また，$1\leqq x\leqq 16$より

$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 16$

$0\leqq t\leqq 4$

$y=t^2-2t-3\ (0\leqq t\leqq 4)$

$=(t-1)^2-4$

$t=1$のとき つまり $\log_2 x=1$

$x=2$のとき最小値 -4

$t=4$のとき つまり $\log_2 x=4$

$x=16$のとき最大値 5

(2) $y=(\log_3 \underbrace{3x}_{3\times x})(\log_3 \underbrace{9x}_{9\times x})\ \left(\frac{1}{9}\leqq x\leqq 1\right)$

$y=(\log_3 3+\log_3 x)(\log_3 9+\log_3 x)$

$=(1+\log_3 x)(2+\log_3 x)$

$=(\log_3 x)^2+3\log_3 x+2\ \left(\frac{1}{9}\leqq x\leqq 1\right)$

$\log_3 x=t$とおくと

$y=t^2+3t+2$

また，$\frac{1}{9}\leqq x\leqq 1$より $\log_3\frac{1}{9}\leqq \log_3 x\leqq \log_3 1$

$-2\leqq t\leqq 0$

$y=t^2+3t+2\ (-2\leqq t\leqq 0)$

$=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$t=-\frac{3}{2}$のとき，つまり $\log_3 x=-\frac{3}{2}$

$x=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

$t=0$のとき．つまり $\log_3 x=0$

$x=3^0=1$のとき最大値 2

(2) $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{12}+\log_3\sqrt{8}$

$$=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\log_3\left(\sqrt[3]{12}\right)^{\frac{3}{2}}+\log_3\sqrt{8}$$

$$=\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\log_3\left(12^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+\log_3\sqrt{8}$$

$$=\log_3\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}-\log_3 12^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}+\log_3\sqrt{8}$$

$$=\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}-\log_3 12^{\frac{1}{2}}+\log_3\sqrt{8}$$

$$=\log_3\frac{1}{\sqrt{2}}-\log_3\sqrt{12}+\log_3\sqrt{8}$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\div\sqrt{12}\times\sqrt{8}\right)=\log_3\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}\times\sqrt{12}}=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_3\sqrt{3}^{-1}=\log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{4}$ (6) $4^x - 3\cdot 2^{x+1} - 16 = 0$

$(2^x)^2 - 3\cdot 2^1 \cdot 2^x - 16 = 0$

$(2^x)^2 - 6\cdot 2^x - 16 = 0$

$2^x = t$ とする $(t > 0)$

$t^2 - 6t - 16 = 0$

$(t-8)(t+2) = 0$

$t > 0$ より

$t = 8$

ここで $2^x = t$ より

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

$\underline{x = 3}$

(7) $\log_6(x+1)+\log_6(x+2)\leqq 1$

真数条件より

$x+1>0$ かつ $x+2>0$

$x>-1 \cdots ①$

$\log_6(x+1)+\log_6(x+2)\leqq 1$

$\log_6(x+1)(x+2)\leqq 1$

$\log_6(x+1)(x+2)\leqq \log_6 6$

$(x+1)(x+2)\leqq 6$

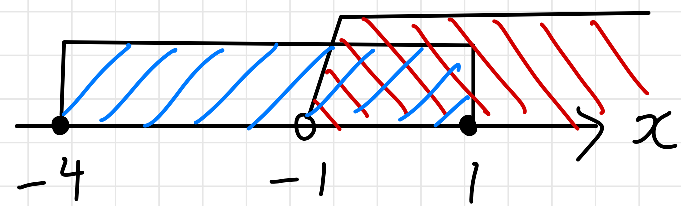
$x^2+3x+2\leqq 6$

$x^2+3x-4\leqq 0$

$(x+4)(x-1)\leqq 0$

$-4\leqq x\leqq 1 \cdots ②$

①②より



$-1<x\leqq 1$

(7) $\log_6(x+1)+\log_6(x+2) \leqq 1$

⋮

$(x+1)(x+2) \leqq 6$

$x^2+3x+2 \leqq 6$

$x^2+3x-4 \leqq 0$

$(x+4)(x-1) \leqq 0$

$-4 \leqq x \leqq 1 \cdots ②$

この形の不等式の答え方

$\alpha < \beta$ のとき

$(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ or $(x-\alpha)(x-\beta) \leqq 0$

$\alpha < x < \beta$ $\alpha \leqq x \leqq \beta$

(小さい解) (大きい解) (小さい解) (大きい解)

不等号が0の方に開いているとき

xを小さい解と大きい解ではさむ.

今回の不等式は

$(x+4)(x-1) \leqq 0$

↳ 小さい解は -4, 大きい解は 1 より

$-4 \leqq x \leqq 1$

5 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4 \quad (1 \leqq x \leqq 32)$

$y=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x = t$ とすると

$y=-t^2+4t$

また，$1 \leqq x \leqq 32$ より

$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 32$

$0 \leqq t \leqq 5$

$y=-t^2+4t \ (0 \leqq t \leqq 5)$

$y=-(t^2-4t)$

$=-\{(t-2)^2-4\}$

$=-(t-2)^2+4$

$t=2$ のとき最大値 4

$t=5$ のとき最小値 -5

よって

$t=2$ より $\log_2 x=2$

$x=4$

$t=5$ より $\log_2 x=5$

$x=32$

したがって

$x=4$ のとき最大値 4

$x=32$ のとき最小値 -5

5 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4 \quad (1\leqq x\leqq 32)$

$y=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x$

$\log_2 x=t$ とすると

$y=-t^2+4t$

また，$1\leqq x\leqq 32$ より

$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 32$

$0\leqq t\leqq 5$

$y=-t^2+4t \ (0\leqq t\leqq 5)$

$y=-(t^2-4t)$

$=-\{(t-2)^2-4\}$

$=-(t-2)^2+4$

平方完成です.

今回の二次関数は

$y=-t^2+4t$ → t^2の係数が負なので頂点が最大値

平方完成した結果が $y=-(t-2)^2+4$ より頂点は$(2, 4)$

よって $t=2$のとき最大値 4

また，$0\leqq t\leqq 5$ より $t=0$ or $t=5$のとき最小値をとる.

$t=0$のとき $y=-0^2+4\cdot 0=0$

$t=5$のとき $y=-5^2+4\cdot 5=-5$

$t=5$のとき最小値5

$\therefore$ $t=2$のとき最大値4

$t=5$のとき最小値-5

(2) $\underline{\log_9 2} - \underline{\frac{1}{2}\log_3 54}$

対数の引き算 ⟶ 真数の割り算。

—— と —— の底が不一致 ⟶ —— を底が 3 の対数に変換。…(ア)

—— の真数を素因数分解する ⟶ 真数が積の形になるので対数の和に分解する。…(イ)

(ア)より 底の変換公式から

$$\log_9 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 9} = \frac{\log_3 2}{2}$$

(イ)より

$$\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow 54 = 2\times 3^3$ なので $\frac{1}{2}\log_3 54 = \frac{1}{2}\log_3(2\times 3^3) = \frac{1}{2}(\log_3 2 + \log_3 3^3)$

$$= \frac{1}{2}(\log_3 2 + 3)$$

よって、$\log_9 2 - \frac{1}{2}\log_3 54 = \frac{\log_3 2}{2} - \frac{1}{2}(\log_3 2 + 3)$

$$= \frac{\log_3 2}{2} - \frac{1}{2}\log_3 2 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

対数の不等式を解く方法.

① 真数条件を確認.

② 両辺を底がそろった係数1の対数にする.

③ 両辺の真数部分を書き出す.

底が1より大きい → 不等号の向きは問題の向きと同じ.

底が1より小さい → 不等号の向きは問題の向きと逆.

④ 真数条件と不等式を解いた結果の共通範囲を求める.

$\log_{\frac{1}{5}} x > 0$

①より 真数条件から $x > 0$ …(ア)

②より 0を底が $\frac{1}{5}$ の対数にするので

$0 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$

よって $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 1$

③より 真数部分を書き出すと $x \quad 1$

ここで $\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} 1$ の底は $\frac{1}{5}$ → 1より小さいので

$x < 1$ …(イ)

④より (ア)と(イ)を用いて $\underline{0 < x < 1}$