数C

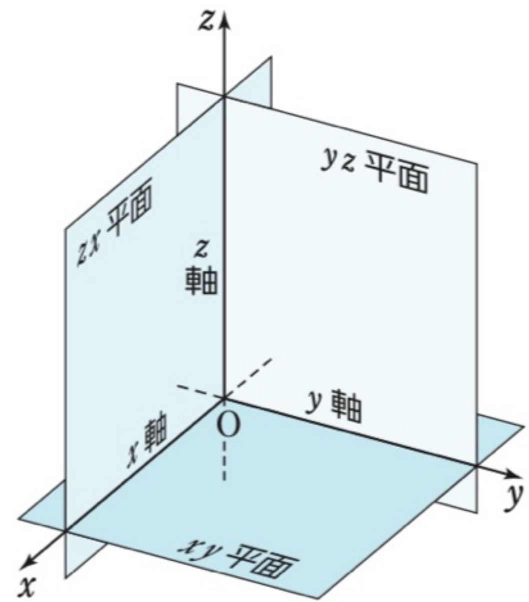
空間のベクトル

空間の点の座標

空間に点Oをとり、Oで互いに直交する3本の数直線を、x軸、y軸、z軸といい、
これらをまとめて座標軸という。点Oは原点

x軸とy軸で定まる平面を xy平面
y軸とz軸で定まる平面を yz平面
z軸とx軸で定まる平面を zx平面

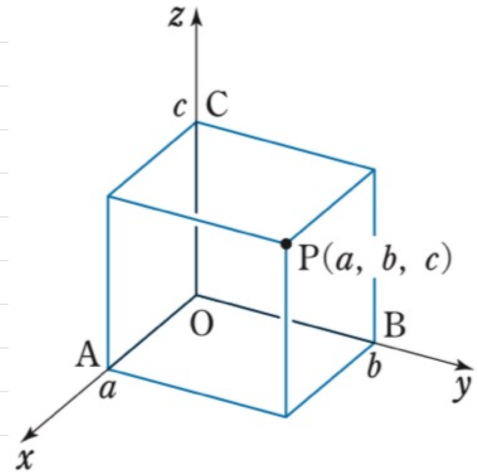
まとめて座標平面という。



空間の点Pに対してPを通り各座標軸に垂直な平面が

x軸, y軸, z軸と交わる点をA, B, Cとする.

A, B, Cの各座標軸上での座標がそれぞれa, b, cのとき
(a, b, c)を点Pの座標という.



また, O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)
の座標で定められた空間を座標空間という.

P(a, b, c)について

xy平面と対称な座標は(a, b, −c)
yz平面と対称な座標は(−a, b, c)
zx平面と対称な座標は(a, −b, c)

x軸に関して対称な座標は(a, −b, −c)
y軸に関して対称な座標は(−a, b, −c)
z軸に関して対称な座標は(−a, −b, c)

練習 1 点P(1, 3, 2)に対して, 次の点の座標を求めよ。
(1) yz 平面に関して対称な点　(2) zx 平面に関して対称な点
(3) z 軸に関して対称な点　(4) 原点に関して対称な点

(1) (−1, 3, 2)　(2) (1, −3, 2)

(3) (−1, −3, 2)　(4) (−1, −3, −2)

座標空間において

原点Oと点P(a, b, c)とのキョリOPは

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

練習 2 原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)　　(2) Q(3, −4, 5)

(1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{4+9+36}$

$= \sqrt{49}$

$OP = 7$

(2) $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{9+16+25}$

$= \sqrt{50}$

$OQ = 5\sqrt{2}$

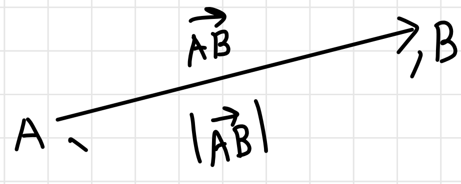
空間における始点A, 終点Bとする. ABが表すベクトルを$\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$の大きさは$|\overrightarrow{AB}|$

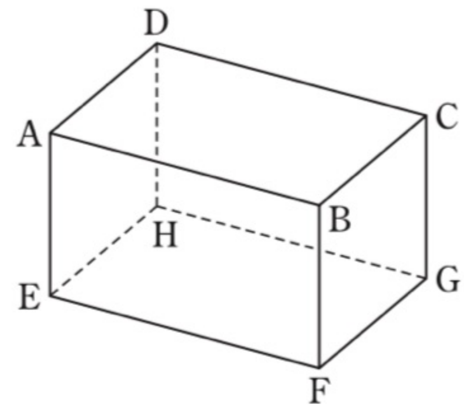
$\overrightarrow{AB}$の逆ベクトル…大きさが同じで向きが逆なので$\overrightarrow{BA}$. また, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

零ベクトル…大きさが零のベクトル. $\vec{0}$と表す.

単位ベクトル…大きさが1のベクトル



練習 3 例 2 において，$\overline{\text{AE}}$ に等しいベクトルで $\overline{\text{AE}}$ 以外のものをすべてあげよ。また，$\overline{\text{AD}}$ の逆ベクトルで $\overline{\text{DA}}$ 以外のものをすべてあげよ。

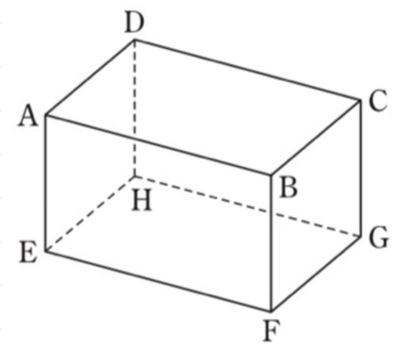


$\overrightarrow{AE}$に等しいベクトル　$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AD}$の逆ベクトル　$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HE}$

練習 4 例 3 の直方体において，次の□に適する頂点の文字を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{A\square}$　　(2) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{\square D}$



(1) $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BC}$ より

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

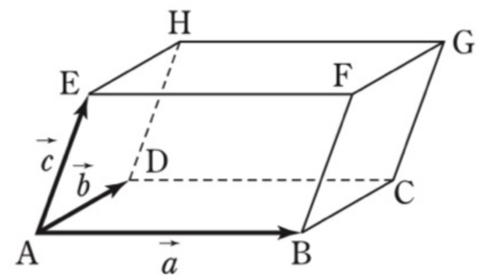
(2) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{BD}$

練習 5 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{EC}$　　(2) $\overrightarrow{BH}$　　(3) $\overrightarrow{DF}$　　(4) $\overrightarrow{HF}$



(1) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}$

空間ベクトルの成分表示

Oを原点とする座標空間

基本ベクトル…x軸，y軸，z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

それぞれ，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ と表す。

$\vec{a}=\vec{OA}$ のAの座標が (a_1, a_2, a_3) のとき $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$

a_1 を x 成分，a_2 を y 成分，a_3 を z 成分といい，(a_1, a_2, a_3) を成分表示という。

基本ベクトルの成分表示は $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$，$\vec{e_2}=(0, 1, 0)$，$\vec{e_3}=(0, 0, 1)$ となる。

零ベクトルの成分表示は $\vec{0}=(0, 0, 0)$

練習 6 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しくなるように，x，y，z の値を定めよ。

$\vec{a}=(2,\ -1,\ -3)$，$\vec{b}=(x-4,\ y+2,\ -z+1)$

$\vec{a}=\vec{b}$ より
$$\begin{cases} 2=x-4 & \cdots ① \\ -1=y+2 & \cdots ② \\ -3=-z+1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③を解くと

$x=6$，$y=-3$，$z=4$

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

和,差,実数倍の成分表示

$(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

$(a_1, a_2, a_3)-(b_1, b_2, b_3)=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

$k(a_1, a_2, a_3)=(ka_1, ka_2, ka_3)$ kは実数

練習 7 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -2)$ (2) $\vec{b}=(-5,\ 3,\ -4)$

(1)

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{1+4+4}$$
$$=\sqrt{9}$$
$$=3$$

(2)

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+3^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{25+9+16}$$
$$=\sqrt{50}$$
$$=5\sqrt{2}$$

練習 8 $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ -3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\vec{a}-\vec{b}$ (3) $2\vec{a}+3\vec{b}$ (4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,3,-2)+(4,-3,0)=(5,0,-2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(1,3,-2)-(4,-3,0)=(-3,6,-2)$

(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,3,-2)+3(4,-3,0)=(14,-3,-4)$

(4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})=-3\{(1,3,-2)-2(4,-3,0)\}$

$$=-3(-7,9,-2)$$
$$=(21,-27,6)$$

2点A, Bとベクトル $\overrightarrow{AB}$

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ について

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

練習 9 次の2点A，Bについて，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(2, 1, 4), B(3, −1, 5) (2) A(3, 0, −2), B(1, −4, 2)

(1)

$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 5) - (2, 1, 4) = \underline{(1, -2, 1)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{1+4+1} = \underline{\sqrt{6}}$

(2)

$\overrightarrow{AB} = (1, -4, 2) - (3, 0, -2) = \underline{(-2, -4, 4)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = \underline{6}$

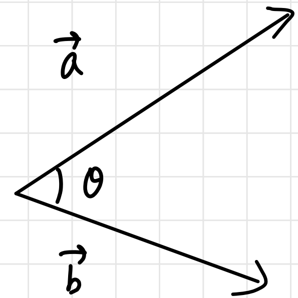
ベクトルの内積

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

また，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



練習 10 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$，$\vec{b} = (-3,\ 1,\ 2)$

(2) $\vec{a} = (2,\ 4,\ 3)$，$\vec{b} = (-2,\ 1,\ 0)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -7$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{14}$

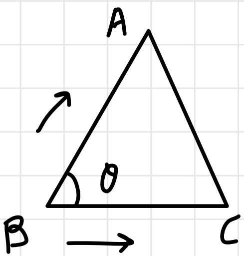
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$\theta = 120^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

よって $\theta = 90^\circ$

練習 11 3 点 A(6, 7, −8), B(5, 5, −6), C(6, 4, −2) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。



$\angle ABC = \theta$ とする。

θを求めるためには

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$ を求める。

$$\overrightarrow{BA} = (6, 7, -8) - (5, 5, -6) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (6, 4, -2) - (5, 5, -6) = (1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\cdot1 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot4 = -9$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-9}{3\cdot3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 135^\circ$$

練習 12

2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 0,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p}=(x, y, z)$ とする.

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x-z=0 \cdots ①$

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=x+3y-2z=0 \cdots ②$

$|\vec{p}|=\sqrt{6}$ より

$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$

$|\vec{p}|^2=x^2+y^2+z^2=6 \cdots ③$

① より $z=2x \cdots ①'$

①' を ② に代入

$x+3y-4x=0$

$y=x \cdots ②'$

①'②' を ③ に代入

$x^2+x^2+(2x)^2=6$

$6x^2=6$

$x^2=1 \quad x=\pm 1$

$x=1$ のとき

①'②' より $y=1,\ z=1$

$x=-1$ のとき

①'②' より $y=-1,\ z=-2$

$\vec{p}=(1,\ 1,\ 2),\ (-1,\ -1,\ -2)$

位置ベクトル

① 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

② 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して線分を $m:n$ に

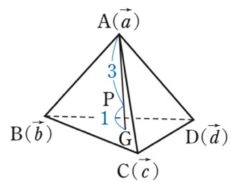
内分… $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$, 外分… $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

ABの中点の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

③ 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする△ABCの重心Gの位置ベクトル, $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

練習 13 4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，△BCD の重心を $G(\vec{g})$，線分 AG を 3：1 に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。$\vec{p}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\vec{g} = \frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{3}{4}(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{g} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

同じ平面上にある点

点Pが平面ABC上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

練習 15　3点 A$(-1,\ 2,\ -1)$, B$(2,\ -2,\ 3)$, C$(2,\ 4,\ -1)$ の定める平面 ABC 上に点 P$(x,\ 3,\ 1)$ があるとき，x の値を求めよ。

$\overrightarrow{CP} = (x-2, -1, 2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3, -2, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (0, -6, 4)$ に対して

$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$$(x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$$

$$(x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$$

$$\begin{cases} x-2 = -3s & \cdots ① \\ -1 = -2s-6t & \cdots ② \\ 2 = 4t & \cdots ③ \end{cases}$$

③より $t = \frac{1}{2}$, これを②に代入

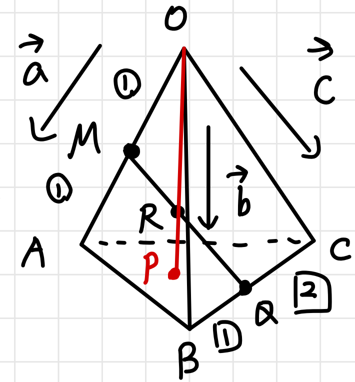
$s = -1$

これを①に代入すると

$\underline{x = 5}$

練習 16 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(応用例題の解答方法)



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$ 　 $\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}{2}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$

p は OR 上の点なので，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k が存在する.

$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}$ …①

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$

p は平面 ABC 上にあるので

$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ …②

①②より

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k = s \cdots (ア) \\ \frac{1}{3}k = t \cdots (イ) \\ \frac{1}{6}k = 1 - s - t \cdots (ウ) \end{cases}$$

(ア)(イ)を(ウ)に代入

$$\frac{1}{6}k = 1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{3}k$$

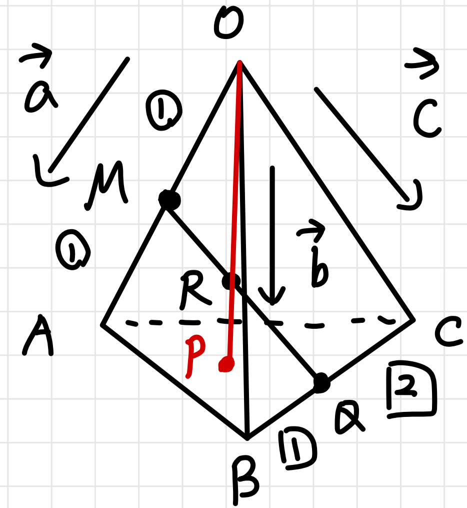
$$k = \frac{4}{3}$$

$k = \frac{4}{3}$ を①に代入

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

練習 16 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

($s+t+u=1$ の解答方法)



Pは OR上の点なので

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}}{2}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$$

$$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\cdots①$$

点Pが平面ABC上にあるので

$$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$$

$$k=\frac{4}{3}$$

$k=\frac{4}{3}$ を①に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

2点間のきょり，内分点・外分点の座標

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

① A, B 間のきょりは

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

② ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

③ ABを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

練習 18 2 点 A(1, 3, −2), B(4, −3, 1) について，次のものを求めよ。

(1) 2 点 A，B 間の距離　(2) 線分 AB の中点の座標

(3) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点の座標

(4) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点の座標

(1) $AB=\sqrt{(4-1)^2+(-3-3)^2+\{1-(-2)\}^2}=\underline{3\sqrt{6}}$

(2) $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)=\underline{\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)}$

(3) $\left(\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}, \frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{2+1}\right)$

$=\underline{(3, -1, 0)}$

(4) $\left(\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}, \frac{-1\cdot3+2\cdot(-3)}{2-1}, \frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot1}{2-1}\right)$

$=\underline{(7, -9, 4)}$

練習 19 3 点 A(2, −1, 4), B(1, 3, 0), C(3, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心の座標を，原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3}\right)$

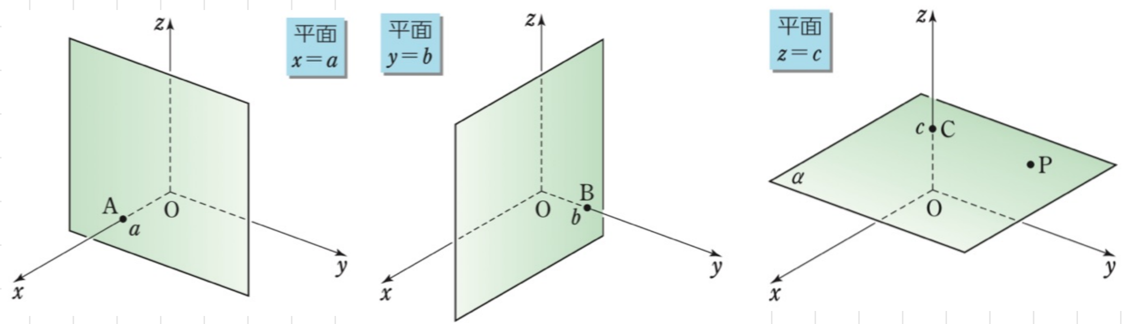
$=\underline{(2, 1, 2)}$

座標平面に平行な平面の方程式

点 A$(a, 0, 0)$ を通り、yz 平面に平行な平面の方程式は $x=a$ （x軸に垂直）

点 B$(0, b, 0)$ を通り、zx 平面に平行な平面の方程式は $y=b$ （y軸に垂直）

点 C$(0, 0, c)$ を通り、xy 平面に平行な平面の方程式は $z=c$ （z軸に垂直）



練習 20 点 (1, 2, 3) を通り，次のような平面の方程式を求めよ。

(1) xy 平面に平行　(2) yz 平面に平行　(3) y 軸に垂直

(1) $z=3$　(2) $x=1$　(3) $y=2$

球面の方程式

点(a, b, c)を中心とする半径rの球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに、原点中心 半径rの球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

練習 21 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

(2) 点 (1, 2, −3) を中心とする半径 4 の球面

(3) 点 A(0, 4, 1) を中心とし，点 B(2, 4, 5) を通る球面

(4) 2 点 A(2, 0, −3)，B(−2, 6, 1) を直径の両端とする球面

(1) $x^2+y^2+z^2=9$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$

(3) $AB=\sqrt{(2-0)^2+(4-4)^2+(5-1)^2}=\underline{2\sqrt{5}}$

半径 r

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=(2\sqrt{5})^2$

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=20$

(4) ABの中点は $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)=(0, 3, -1)$

中心

ABが直径 → 中心と点Aの長さが半径

$\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{17}$

$\therefore x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$

練習 22

応用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

球面と yz 平面が交わるのは $x=0$ のとき

球面の方程式は $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ なので

$x=0$ のとき

$$(0-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$$

$$(y+2)^2+(z-3)^2=9$$

この方程式は yz 平面上では円

中心は $(0, -2, 3)$ 半径は 3