

数工

数と式



・ 単項式 … 項が1つの式 (例) $3, x, -5x^2$

係数 … 文字の前の数 (例) $-5x^2$ の -5

次数 … 文字が何個かけられているか (例) $5x$ は次数1, $-xy$ は次数2

練習 次の単項式の係数と次数をいえ。

- 1 (1) $6x^2$ (2) x (3) $-x^2y^2$ (4) $-3abc$

	(1)	(2)	(3)	(4)
係数	6	1	-1	-3
次数	2	1	4	3

練習 次の単項式で [] 内の文字に着目したとき、その係数と次数をいえ。

- 2 (1) $2ax^3$ [x] (2) $3a^2bc^3$ [a] (3) $-6ax^2y$ [xとy]

	(1)	(2)	(3)
係数	$2a$	$3b^3c$	$-6a$
次数	3	2	3

・ 多項式 … 項が2つ以上の式 (例) $5x^2 + 4x - 2x^2 - 3$

同類項 … 文字の部分が同じ項 (例) 上の例の $5x^2$ と $-2x^2$

次数 … 同類項を整理した多項式の最も次数の高い項の次数

また、次数が2の多項式を二次式という。

(例) $4x^2 - 5x - 6$ の次数は2, 2次式

定数項 … 多項式の数字だけの項

練習 3 次の多項式の同類項をまとめよ。

(1) $4x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + 6$
(2) $3a^2 - 2ab - 4b^2 - 5a^2 + 2ab - 8b^2$

(1) $2x^2 - x + 5$

(2) $-2a^2 - 12b^2$

練習 4 次の多項式は何次式か。

(1) $x^3 + 4x^2 - 5$ (2) $1 + 6a - 8a^2 - 3a^4$

(1) 3次式 (2) 4次式

練習 5 多項式 $ax^3 - x^2y + by^2 + c$ は、次の文字に着目すると何次式か。

また、そのときの定数項は何か。

(1) x (2) y (3) x と y

	(1)	(2)	(3)
式	3次式	2次式	3次式
定数項	$by^2 + c$	$ax^3 + c$	c

- ・ 降べきの順…文字に着目した項の次数の高い順
 - ・ 引べきの順…文字に着目した項の次数の低い順
-

練習
6

次の多項式を、 x について降べきの順に整理せよ。

$$(1) \quad 4a^2 + ax + 2x - 3a$$

$$(2) \quad 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$$

$$(1) \quad ax + 2x + 4a^2 - 3a$$

$$(2) \quad 2x^2 + 5xy - 3x + 3y^2 - 5y - 2$$

$$= (a+2)x + (4a^2 - 3a)$$

$$= 2x^2 + (5y-3)x + (3y^2 - 5y - 2)$$

・ 多項式の加法と減法

$A + B \cdots A$ と B の項をすべて足し、同類項をまとめる。

$A - B \cdots B$ の項の符号を全部変え、同類項をまとめる。

練習
7

次の多項式 A, B について、 $A+B$ と $A-B$ を計算せよ。

(1) $A = 2x^2 + 3x - 1, B = 4x^2 - 5x - 6$

(2) $A = -3x^2 - 2x + 4x^3 + 5, B = 2x^3 + 7 - 3x^2$

$$\begin{aligned} (1) \quad A+B &= (2x^2 + 3x - 1) + (4x^2 - 5x - 6) \\ &= 2x^2 + 3x - 1 + 4x^2 - 5x - 6 \\ &= 6x^2 - 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (2x^2 + 3x - 1) - (4x^2 - 5x - 6) \\ &= 2x^2 + 3x - 1 - 4x^2 + 5x + 6 \\ &= -2x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad A+B &= (-3x^2 - 2x + 4x^3 + 5) + (2x^3 + 7 - 3x^2) \\ &= -3x^2 - 2x + 4x^3 + 5 + 2x^3 + 7 - 3x^2 \\ &= 6x^3 - 6x^2 - 2x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (-3x^2 - 2x + 4x^3 + 5) - (2x^3 + 7 - 3x^2) \\ &= -3x^2 - 2x + 4x^3 + 5 - 2x^3 - 7 + 3x^2 \\ &= 2x^3 - 2x - 2 \end{aligned}$$

$A = x^2 + 4x - 3$, $B = 2x^2 - x + 4$ とする。次の式を計算せよ。

- (1) $A + 2B$ (2) $2A - 3B$ (3) $A + B + 2(A - B)$

$$(1) A + 2B = (x^2 + 4x - 3) + 2(2x^2 - x + 4) = x^2 + 4x - 3 + 4x^2 - 2x + 8 \\ = \underline{\underline{5x^2 + 2x + 5}}$$

$$(2) 2A - 3B = 2(x^2 + 4x - 3) - 3(2x^2 - x + 4) = 2x^2 + 8x - 6 - 6x^2 + 3x - 12 \\ = \underline{\underline{-4x^2 + 11x - 18}}$$

$$(3) A + B + 2(A - B) = 3A - B = 3(x^2 + 4x - 3) - (2x^2 - x + 4) \\ = 3x^2 + 12x - 9 - 2x^2 + x - 4 \\ = \underline{\underline{x^2 + 13x - 13}}$$

・ 単項式の乗法

a を n 個かけたものを a の n 乗といい、 a^n とかく。 n を指數という。

$\because a^1 = a$ である。 $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdots$ をまとめて a の累乗という。

一般に、次の 指数法則 が成り立つ。

指数法則

m, n は正の整数とする。

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2 \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad 3 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

練習
9

次の式を計算せよ。

$$(1) \quad 2a^3 \times 4a^2 \quad (2) \quad 3x^2y \times (-2x^3y^2) \quad (3) \quad (-3x^2y)^3$$

$$(1) \quad 8a^5 \quad (2) \quad -6x^5y^3 \quad (3) \quad -27x^6y^3$$

・ 多項式の乗法

多項式の積は、次の分配法則を用いて計算する。

分配法則

$$A(B+C) = AB+AC \quad (A+B)C = AC+BC$$

練習 10 次の式を展開せよ。

(1) $4x^2(2x^2 - 3x + 5)$

(2) $(2x-1)(4x^2 + 3)$

(3) $(2x^2 + x - 3)(x - 2)$

(4) $(2x^2 + 3)(x^2 - 4x - 1)$

(1) $8x^4 - 12x^3 + 20x^2$ (2) $8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$

(3) $2x^3 - 4x^2 + x^2 - 2x - 3x + 6$
 $= 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$

(4) $2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 12x - 3$
 $= 2x^4 - 8x^3 + x^2 - 12x - 3$

練習 11 次の式を展開し、 x について降べきの順に整理せよ。

(1) $(x^2 + ax - 1)(x + a)$

(2) $(ax + b)(cx + d)$

(1) $x^3 + 2ax^2 + a^2x - x - a$
 $= x^3 + 2ax^2 + (a^2 - 1)x - a$

(2) $acx^2 + adx + bcx + bd$
 $= acx^2 + (ad + bc)x + bd$

展開の公式

1 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると、次の公式が得られる。

展開の公式

4 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

練習

12

次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+5)^2$ (2) $(3x-2y)^2$ (3) $(5x+4y)(5x-4y)$
(4) $(x+1)(x+5)$ (5) $(x-3)(x+8)$ (6) $(x-y)(x-4y)$

(1) $4x^2 + 20x + 25$ (2) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

(3) $25x^2 - 16y^2$ (4) $x^2 + 6x + 5$

(5) $x^2 + 5x - 24$ (6) $x^2 - 5xy + 4y^2$

練習

13

次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+1)(4x+5)$ (2) $(x+4)(2x-3)$ (3) $(3x-7)(x+2)$
(4) $(2x-5)(2x-1)$ (5) $(x+3y)(2x-y)$ (6) $(3x-2a)(4x-3a)$

(1) $8x^2 + 14x + 5$ (2) $2x^2 + 5x - 12$

(3) $3x^2 - x - 14$ (4) $4x^2 - 12x + 5$

(5) $2x^2 + 5xy - 3y^2$ (6) $12x^2 - 17ax + 6a^2$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

練習

14

次の式を展開せよ。

$$(1) (a+b-c)^2$$

$$(2) (x+2y+3z)^2$$

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$$

$$(2) x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx$$

練習

15

$$(1) (x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$$

$$(2) (x-y-z)(x-y+z)$$

$$(3) (x+1)^2(x-1)^2$$

$$(4) (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$(1) x^2 + 2 = A \text{ とする}$$

$$(A+3x)(A-3x)$$

$$= A^2 - 9x^2$$

$$= (x^2+2)^2 - 9x^2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2$$

$$= x^4 - 5x^2 + 4$$

$$(2) x-y=A \text{ とする}$$

$$(A-z)(A+z)$$

$$= A^2 - z^2$$

$$= (x-y)^2 - z^2$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 - z^2$$

$$(3) (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$$

$$x^2 + 1 = A \text{ とする}$$

$$(A+2x)(A-2x)$$

$$= A^2 - 4x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x^2$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1$$

$$(4) (x^2+1)(x^2-1)$$

$$= x^4 - 1$$

因数分解 … 多項式を積の単項式の形にする

共通因数 … 多項式の各項に共通してかけられている数 (例) $6x^2 + 9x$

$3x$ \times $2x$ $3x$ \times 3
共通因数

練習

16

次の式を因数分解せよ。

(1) $12x^3 - 8x^2y$

(2) $3a^2x + 6ax^2 + ax$

(1) $4x^2 \times 3x - 4x^2 \times 2y$

$= 4x^2(3x - 2y)$

(2) $ax \times 3a + ax \times 6x + ax \times 1$

$= ax(3a + 6x + 1)$

練習

17

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)c + d(a+b)$

(2) $(x-2y)a + (2y-x)b$

(1) $a+b = A$ とする (2) $(x-2y)a - (x-2y)b$

$Ac + Ad$

$x-2y = A$ とする

$= A(c+d)$

$Aa - Ab$

$= (a+b)(c+d)$

$= A(a-b)$

$= (x-2y)(a-b)$

因数分解の公式

1 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

2 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

3 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

練習

18

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 10x + 25$

(2) $x^2 - 12x + 36$

(3) $x^2 + 6xy + 9y^2$

(4) $4a^2 - 4ab + b^2$

(5) $x^2 - 9y^2$

(6) $16a^2 - 25b^2$

練習

19

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 8x + 12$

(2) $x^2 - 13x + 36$

(3) $a^2 + a - 20$

(4) $x^2 + 5xy + 6y^2$

(5) $a^2 - 8ab + 15b^2$

(6) $x^2 - ax - 12a^2$

(1)

$$(x+5)^2$$

(2)

$$(x-6)^2$$

(1)

$$(x+2)(x+6)$$

(2)

$$(x-4)(x-9)$$

(3)

$$(x+3y)^2$$

(4)

$$(2a-b)^2$$

(3)

$$(a+5)(a-4)$$

(4)

$$(x+2y)(x+3y)$$

(5)

$$(x+3y)(x-3y)$$

(6)

$$(4a+5b)(4a-5b)$$

(5)

$$(a-3b)(a-5b)$$

(6)

$$(x-4a)(x+3a)$$

たすき掛け

(例) $3x^2 + 14x + 8$ の因数分解は以下の手順

① 次数が2の項の係数と定数項の数字 がどんな数字の積になっているか考える.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 14x + 8 \\ \hline (1 \text{と} 3) \quad (1 \times 8, -1 \times -8) \\ \quad (2 \times 4, -2 \times -4) \end{array}$$

② ①の (ア)(イ) のそれぞれの組み合わせを従に並べ、X字にかけ算.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & 3 & \\ \cancel{3} & \cancel{\times} & \cancel{8} & + & \\ \boxed{1} & & \boxed{8} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & \times & 4 & 12 & \\ \cancel{3} & \cancel{\times} & \cancel{2} & + & \\ \boxed{1} & & \boxed{2} & & \end{array}$$

③ ②の結果をたし算し、(ウ)になつていうものを確定せよ.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 4 & 12 & \\ \cancel{3} & \cancel{\times} & \cancel{2} & + & \\ \boxed{1} & & \boxed{2} & & \\ & & & & 14 \end{array}$$

ではあるので $(1x+4)$ \times $(3x+2)$ の積が答え

$$\therefore 3x^2 + 14x + 8 = (x+4)(3x+2)$$

練習
20

次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 7x + 2$

(2) $2x^2 + 9x + 10$

(3) $2x^2 - 13x + 6$

$$(1) \quad \begin{array}{r} 3x^2 + 7x + 2 \\ \hline (1 \times 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ + \\ 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 2x^2 + 9x + 10 \\ \hline (1 \times 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \times 5 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ + \\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{r} 2x^2 - 13x + 6 \\ \hline (1 \times 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \times -6 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -12 \\ + \\ -1 \\ \hline -13 \end{array}$$

$$\begin{matrix} & 2 \\ (1x & 2) \\ (3x & 1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & 5 \\ (2x & 5) \\ (1x & 2) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & -6 \\ (1x - 6) \\ (2x - 1) \end{matrix}$$

$$\frac{(x+2)(3x+1)}{\longrightarrow}$$

$$\frac{(2x+5)(x+2)}{\longrightarrow}$$

$$\frac{(x-6)(2x-1)}{\longrightarrow}$$

$$(4) \quad 4y^2 + 5y - 21$$

$$(5) \quad 3x^2 + 5xy - 2y^2$$

$$(6) \quad 6x^2 - 7ax - 3a^2$$

$$(4) \quad 4y^2 + 5y - 21$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \times \\ \hline 3 \\ -7 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$(5) \quad 3x^2 + 5xy - 2y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \times \\ \hline 2 \\ -1 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$(6) \quad 6x^2 - 7ax - 3a^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \times \\ \hline -3 \\ 1 \\ \hline -7 \end{array}$$

F, Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(y+3)(4y-7)}$$

F, Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(x+2y)(3x-y)}$$

F, Z

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(2x-3a)(3x+a)}$$

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-y)^2 - 5(x-y) + 6$

(2) $2(x+3y)^2 - (x+3y) - 1$

(3) $(x+y)^2 - 9$

(4) $x^2 - (y-1)^2$

(5) $x^4 - 8x^2 - 9$

(6) $x^4 - 16$

(1) $x - y = A$ とする

$$A^2 - 5A + 6$$

$$= (A-2)(A-3)$$

$$= (x-y-2)(x-y-3)$$

(2) $x+3y = A$ とする

$$2A^2 - A - 1$$

$$= (2A+1)(A-1)$$

$$= \{2(x+3y)+1\}(x+3y-1)$$

$$= (2x+6y+1)(x+3y-1)$$

(4) $x^2 - (y-1)^2$

$$Y-1 = A$$
 とする

$$x^2 - A^2$$

$$= (x+A)(x-A)$$

$$= \{x+(y-1)\} \{x-(y-1)\}$$

$$= (x+y-1)(x-y+1)$$

(5) $x^4 - 8x^2 - 9$

$$= (x^2-9)(x^2+1)$$

$$= (x+3)(x-3)(x^2+1)$$

(3) $(x+y)^2 - 9$

$$x+y = A$$
 とする

$$A^2 - 9$$

$$= (A+3)(A-3)$$

$$= (x+y+3)(x+y-3)$$

(6) $x^4 - 16$

$$= (x^2-4)(x^2+4)$$

$$= (x+2)(x-2)(x^2+4)$$

次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^2 + xy - 4x - y + 3$$

$$(2) \quad x^2 + ax - 3a - 9$$

(教科書解法)

・x・次数の低い方の文字で整理
共通部分を文字で書いてくくり出す。

$$(1) \quad x^2 - 4x + 3 + xy - y$$

$$= (x-1)(x-3) + y(x-1)$$

$$x-1 = A \text{ とする}$$

$$A(x-3) + YA$$

$$= A(x-3+y)$$

$$= (x-1)(x+y-3)$$

$$(2) \quad ax - 3a + x^2 - 9$$

$$= a(x-3) + (x+3)(x-3)$$

$$x-3 = A \text{ とする}$$

$$aA + (x+3)A$$

$$= A(a+x+3)$$

$$= (x-3)(a+x+3)$$

次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^2 + xy - 4x - y + 3$$

$$(2) \quad x^2 + ax - 3a - 9$$

(別解)

・x 次数の高い方の文字で整理

定数項を因数分解

$$(1) \quad x^2 + xy - 4x - y + 3$$

$$= x^2 + (y-4)x \underbrace{-(y-3)}_{-1 \times (y-3)}$$

$$\therefore (x-1) \{ x + (y-3) \}$$

$$\therefore (x-1)(x+y-3)$$

$$(2) \quad x^2 + ax - 3a - 9$$

$$= x^2 + ax - 3(a+3)$$

$$\overline{-3 \times (a+3)}$$

$$\therefore (x-3) \{ x + (a+3) \}$$

$$\therefore (x-3)(x+a+3)$$

次の式を因数分解せよ。

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$$

$$= 2x^2 + 5xy - 3x + 3y^2 - 5y - 2 \quad \text{①}$$

$$= 2x^2 + \underline{(5y-3)x} + (3y^2 - 5y - 2) \quad \text{②}$$

$$\begin{array}{r} 3y^2 - 5y - 2 \\ 1 \times 3 \quad \cancel{-1 \times 2} \\ (1y \cancel{-2}) - 6 \\ (3y \quad 1) \end{array}$$

$$= 2x^2 + (5y-3)x + \frac{(3y+1)(y-2)}{(3y+1) \times (y-2)} \quad \text{③}$$

$$= (x+y-2)(2x+3y+1) \quad \text{④}$$

応用例題2、糸東23を解く手順

① x に着目して降べきの順に並べ替え

② 同類項をまとめろ。

(x の項、 x^2 と x の項は別なので注意。)

③ 定数項を因数分解。

(着目した文字が含まれない項)

④ 式全体を因数分解

- $$(1) \quad x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1 \quad (2) \quad 3x^2 - 5ax + 2a^2 - 3x + a - 6$$

$$(1) \quad x^2 + 3xy - 2x + 2y^2 - 3y + 1$$

$$= x^2 + (3y-2)x + (2y-1)(y-1)$$

$$\underline{| \quad x^2 \quad |} \qquad \qquad \qquad \underline{2y-1 \quad | \quad y-1}$$

$$(1 \times 1) - (2y-1)x - (y-1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times \\ 2y - 1 \\ \hline y - 1 \\ \hline 3y - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Factor } (x+2y-1) \\ \text{Factor } (x+y-1) \\ (x+2y-1)(x+y-1) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & (2) \quad 3x^2 - 5ax + 2a^2 - 3x + a - 6 \\
 & = 3x^2 - 5ax - 3x + \underline{2a^2} + \underline{a - 6} \\
 & \quad (1 \times 2) \quad (1 \times -6 \quad -1 \times 6) \\
 & \quad (2 \times -3 \quad -2 \times 3)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3x^2 + (-5a-3)x + (2a-3)(a+2)}{1 \times 3} = \frac{2a-3}{2a-3} \times \frac{x - (a+2)}{x - (a+2)}$$

$$\begin{array}{r}
 \boxed{3} \\
 \boxed{1} \\
 \times \\
 \hline
 -(2a - 3) \\
 -(a + 2) \\
 \hline
 -2a + 3 \\
 + \\
 -3a - 6 \\
 \hline
 -5a - 3
 \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} 3x - (2a - 3) \\ 1x - (a + 2) \end{array} \right\} \quad (3)$

次の式を因数分解せよ。

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$$

$$ba^2 - b^2a + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2$$

) 展開

$$= ba^2 - ca^2 - b^2a + c^2a + b^2c - bc^2$$

) a について降べきの順に

$$= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2$$

) 同類項をまとめろ

$$= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b-c)$$

) 定数項を因数分解

$$= (b-c)a^2 - (b-c)(b+c)a + (b-c)bc$$

) a の係数を因数分解

$$b-c = A \text{ とする}$$

) 共通部分を文字でおく

$$Aa^2 - A(b+c)a + Abc$$

) A でくくろ

$$= A \{ a^2 - (b+c)a + bc \}$$

) $A = b-c$ ともどす

$$= (b-c) \{ a^2 - (b+c)a + bc \}$$

) {} 内を因数分解

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

$$\frac{a^2 - (b+c)a + bc}{\text{たし} \quad \text{ひき}} = (a-b)(a-c)$$

(-b)+(-c) (-b)×(-c)

展開の公式

5

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

練習

1

次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$

(2) $(x-1)^3$

(3) $(3a+b)^3$

(4) $(2x-3y)^3$

(1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(3) $27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$

(4) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

展開の公式

6

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

因数分解の公式

5

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

練習
2

展開の公式6が成り立つことを、左辺を展開して確かめよ。

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

練習
3 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$(2) (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(3) (x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$$

$$(4) (2x-3a)(4x^2+6ax+9a^2)$$

$$(1) x^3 + 8 \quad (2) x^3 - 27$$

$$(3) x^3 + 27y^3 \quad (4) 8x^3 - 27a^3$$

練習
4

次の式を因数分解せよ。

(1)

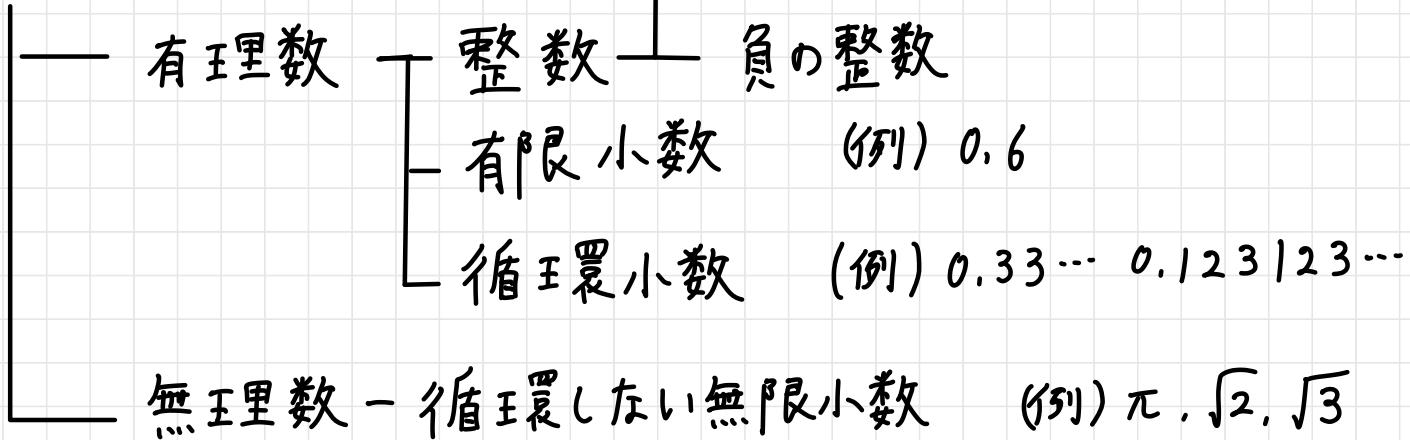
$$(x-1)(x^2+x+1)$$

$$(2) (x+3a)(x^2-3ax+a^2)$$

$$(3) (x-4)(x^2+4x+16)$$

$$(4) (5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$$

実数



※ 有限小数と循環小数は必ず分数の形で表せる。

$\frac{\text{整数}}{\text{整数} (\neq 0)}$ の形で表される数は有理数

※ 循環小数は次のように書くこともある。

$$(15!) \quad 0.666\cdots = 0.\overset{\cdot}{6} \quad 0.123123\cdots = 0.\overset{\cdot}{1}2\overset{\cdot}{3} \quad (\text{循環する両端の数の上に点})$$

循環小数を次のように書き表すことがある。

$$0.666\cdots = 0.\dot{6}$$

$$0.3181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$$

$$1.234234234\cdots = 1.\dot{2}3\dot{4}$$

$$1.234123412341\cdots = 1.\dot{2}34\dot{1}$$

練習 次の分数を小数で表せ。ただし、循環小数は上のような表し方で書け。

25

$$(1) \frac{1}{8}$$

$$(2) \frac{8}{9}$$

$$(3) \frac{10}{27}$$

$$(4) \frac{25}{22}$$

$$(1) \frac{1}{8} = 0.125$$

$$(2) \frac{8}{9} = 0.88\cdots = 0.\dot{8}$$

$$(3) \frac{10}{27} = 0.370370\cdots 0.\dot{3}\dot{7}\dot{0}$$

$$(4) \frac{25}{22} = 1.13636\cdots = 1.\dot{1}\dot{3}\dot{6}$$

次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{1}$

(2) $0.\dot{2}\dot{7}$

(3) $0.6\dot{4}\dot{8}$

(4) $0.2\dot{5}\dot{4}$

(1) $x = 0.111\dots$ とする

$$\begin{aligned}x &= 0.111\dots \\ -10x &= 1.111\dots \\ \hline -9x &= -1 \\ x &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

(2) $x = 0.2727\dots$ とする

$$\begin{aligned}x &= 0.2727\dots \\ -100x &= 27.2727\dots \\ \hline -99x &= -27 \\ x &= \frac{27}{99} = \frac{3}{11}\end{aligned}$$

(3) $x = 0.648648\dots$ とする

$$\begin{aligned}x &= 0.648648\dots \\ -1000x &= 648.648648\dots \\ \hline -999x &= -648 \\ x &= \frac{648}{999} = \frac{24}{37}\end{aligned}$$

(4) $x = 0.25454\dots$

$$\begin{aligned}10x &= 2.5454\dots \\ -1000x &= 254.5454\dots \\ \hline -990x &= -252 \\ x &= \frac{252}{990} = \frac{14}{55}\end{aligned}$$

・数の範囲と四則計算

2つの有理数の和、差、積、商は常に有理数である。

2つの実数の和、差、積、商は常に実数である。

(例)

2つの数 a, b の四則計算の結果について考える。

(i) a, b が自然数のとき

$a+b$ と ab (和と積)については常に自然数

$a-b$ と $\frac{a}{b}$ (差と商)については常に自然数とは限らない。

(ii) a, b が整数のとき

$a+b$ と $a-b$ と ab (和と差と積)については常に整数

$\frac{a}{b}$ (商)については常に整数とは限らない。

練習
27

下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである。

表の空らんに○か×のうち適切なものを入れよ。また、×の場合は、結果がその範囲にない計算の例を1つあげよ。

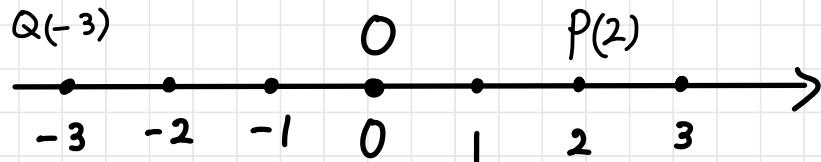
数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	○	×	○	×
整数	○	○	○	×
有理数	○	○	○	○
実数	○	○	○	○

■表の説明■

○は計算がその範囲で常にできる場合

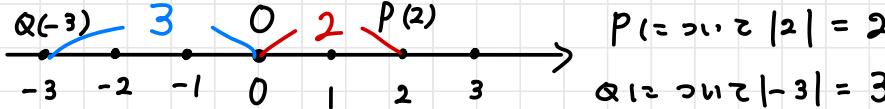
×は計算がその範囲で常にできるとは限らない場合

- 数直線… 直線上に基準の点 O , 単位長さと正の向きを定めたときの点 O に 0 , 直線上の点に実数を対応させた直線.
点 O を原点…という。
- 座標… 数直線上で実数 a が対応している点のこと。
その点を P とすると $P(a)$ と書く。



大きさを表すので
マイナスはない

- 絶対値… 数直線上の原点 $O(0)$ と点 $P(a)$ との距離。 $|a|$ と書く。



次の値を求めよ。

(1) $|3|$

(2) $|-4|$

(3) $|- \sqrt{2}|$

(1) 3 (2) 4 (3) $\sqrt{2}$

実数 a の絶対値について、 $a \geq 0$ のとき

$$|a| = a \text{ (絶対値の中がプラス} \Rightarrow \text{絶対値記号を外す)}$$

$$|-a| = a \text{ (絶対値の中がマイナス} \Rightarrow \text{符号を変えて絶対値記号を外す)}$$

練習

29

- (1) $|-2+3|$ (2) $|1-5|$ (3) $|3-\pi|$

$$(1) |-1| = 1 \quad (2) |-4| = 4$$

$$(3) \pi \approx 3.14 \dots \text{より}$$

$$3 - \pi < 0$$

$$\therefore |3 - \pi| = -3 + \pi$$

数直線上の2点 $A(a), B(b)$ の
2点間の距離 AB は
 $AB = |b - a|$

練習

1

- (1) A(2), B(5) (2) A(3), B(-1) (3) A(-2), B(-6)

$$(1) AB = |5 - 2| = |3| = 3$$

$$(2) AB = |-1 - 3| = |-4| = 4$$

$$(3) AB = |-6 - (-2)| = |-4| = 4$$

- ・ 平方根… 2乗したら α になる数。正の数の平方根は2つある。
負の数の平方根はない。

正の数 α の平方根は $\pm\sqrt{\alpha}$

練習
30

次の問いに答えよ。

(1) 6の平方根は何か。

(2) $\sqrt{16}$, $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ の値を、それぞれ求めよ。

$$(1) \pm\sqrt{6}$$

$$(2) \sqrt{16} = 4 \quad -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$a > 0, b > 0$ のとき

1 $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

練習

31

次の式を計算せよ。

- (1) $\sqrt{2} \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2} \sqrt{8}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$

(1) $\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{16} = 4$

(3) $\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

練習

32

次の式を計算せよ。

- (1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$

(1) $4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= -\sqrt{2}$

次の式を計算せよ。

- (1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ (2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
 (3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (4) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

$$(1) 16 - 4\sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 15$$

$$= 1 + 2\sqrt{10}$$

$$(2) 12 - 4\sqrt{6} + 2$$

$$= 14 - 4\sqrt{6}$$

$$(3) 3 - 2 = 1$$

$$(4) 9 - 5 = 4$$

次のように、分母に根号を含む式を変形して、分母に根号を含まない式にすることを、分母を **有理化** するという。

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

分母と分子に
 $\sqrt{2}$ を掛ける。

練習 次の式の分母を有理化せよ。

- (1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$$(1) \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(4) \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

分母が多項式の有理化

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

練習
35

次の式の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad (3) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \quad (4) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$(1) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} : \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$(3) \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} : \frac{2\sqrt{18} - 4\sqrt{3}}{6 - 4} : \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$(4) \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} : \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

・ x と y を有理化してから計算する。

・ $x^2 + y^2$ は $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ を利用する。

練習
36

$x = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x+y, xy$

(2) $x^2 + y^2$

$$x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

$$(1) \quad x+y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} : \sqrt{7}$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 7 - 1 = 6 \end{aligned}$$

$$xy = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} : \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $x+y$, xy (2) x^2+y^2 (3) x^2y+xy^2

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1, \quad y = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

$$(1) \quad x+y = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) \\ = 2\sqrt{2}$$

$$xy = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

$$(2) \quad x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \\ = (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \\ = 8 - 2 \\ = 6$$

$$(3) \quad x^2y+xy^2 = xy(x+y) \\ = 1 \cdot 2\sqrt{2} \\ = 2\sqrt{2}$$

2重根号

$a > 0, b > 0$ とする。

$$\sqrt{\underline{(a+b)} + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

足し算 かけ算

$$a > b \text{ のとき } \sqrt{\underline{(a+b)} - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

足し算 かけ算

練習

1

次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

$$(1) \sqrt{7+2\sqrt{10}}$$

$$(2) \sqrt{12-6\sqrt{3}}$$

$$(3) \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$(1) \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\times 2}}$$

$$(2) \sqrt{12-2\sqrt{27}}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$(3) \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3+1)-2\sqrt{3\times 1}}{2}}$$

$$= \sqrt{9} - \sqrt{3}$$

$$= 3 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

・ 不等式 … 数量の間の大小関係を不等号を用いて表した式

不等号	使い方の例	意味
<	$A < B$	A は B より小さい
>	$A > B$	A は B より大きい
\leq	$A \leq B$	A は B 以下
\geq	$A \geq B$	A は B 以上

練習
38

次の数量の大小関係を不等式で表せ。

- (1) ある数 x の 2 倍に 3 を足した数は 5 以上である。
- (2) 2 つの数 a, b の和は負で、 -2 より大きい。
- (3) 1 個 150 円の菓子を x 個買って 120 円の箱に詰めてもらったところ、代金を支払うには 1000 円では足りなかった。

$$(1) 2x + 3 \geq 5$$

$$(2) -2 < a + b < 0$$

$$(3) 150x + 120 > 1000$$

不等式の性質

1 $A < B$ ならば $A + C < B + C, A - C < B - C$

2 $A < B, C > 0$ ならば $AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

3 $A < B, C < 0$ ならば $AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

不等式では、

両辺に同じ負の数を掛けたり、

両辺を同じ負の数で割ったりすると、

両辺の大小関係が入れかわる。

$$A < B$$



負の数 -2 を掛けると
不等号の向きが変わる

$$-2A > -2B$$

練習
40

$a < b$ のとき、次の□に適する不等号>または<を入れよ。

(1) $3a \square 3b$

(2) $-3a \square -3b$

(3) $\frac{a}{2} \square \frac{b}{2}$

(4) $\frac{a}{-2} \square \frac{b}{-2}$

練習
41

$a < b$ のとき、次の□に適する不等号>または<を入れよ。

(1) $4a+1 \square 4b+1$

(2) $1-a \square 1-b$

(3) $\frac{a}{2}-3 \square \frac{b}{2}-3$

(4) $-\frac{a}{5}+2 \square -\frac{b}{5}+2$

(1) $3a < 3b$ (2) $-3a > -3b$

(1) $4a+1 < 4b+1$ (2) $1-a > 1-b$

(3) $\frac{a}{2}-3 < \frac{b}{2}-3$ (4) $-\frac{a}{5}+2 > -\frac{b}{5}+2$

(3) $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$

(4) $\frac{a}{-2} > \frac{b}{-2}$

・ 1次不等式

1次不等式の解き方

不等式を $ax > b$, $ax \leq b$ などの形に整理する。

整理された不等式の両辺を x の係数 a で割る。

練習
42

次の1次不等式を解け。

(1) $5x - 2 < 2x + 4$

(2) $6x - 3 \geq 8x + 7$

(3) $2(4x - 1) \geq 5x - 11$

(4) $3(3 - 2x) < 4 - 3x$

(1)

$$5x - 2x < 4 + 2$$

$$3x < 6$$

$$x < 2$$

(3)

$$8x - 2 \geq 5x - 11$$

$$8x - 5x \geq -11 + 2$$

$$3x \geq -9$$

$$x \geq -3$$

(2)

$$6x - 8x \geq 7 + 3$$

$$-2x \geq 10$$

$$x \leq -5$$

(4)

$$9 - 6x < 4 - 3x$$

$$-6x + 3x < 4 - 9$$

$$-3x < -5$$

$$x > \frac{5}{3}$$

練習
43

次の1次不等式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x - 1 \leq \frac{2}{7}x + \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}x + 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

(1) 両辺14倍すると

$$7x - 14 \leq 4x + 7$$

$$7x - 4x \leq 7 + 14$$

$$3x \leq 21$$

$$x \leq 7$$

(2) 両辺12倍すると

$$4x + 12 < 9x - 6$$

$$4x - 9x < -6 - 12$$

$$-5x < -18$$

$$x > \frac{18}{5}$$

・連立不等式 … 与えられた不等式の共通範囲を求める。

練習 次の連立不等式を解け。

44

$$(1) \begin{cases} 6x - 9 < 2x - 1 \dots ① \\ 3x + 7 \leq 4(2x + 3) \dots ② \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 1 \geq 7x - 5 \dots ① \\ -x + 6 < 3(1 - 2x) \dots ② \end{cases}$$

(1) ①を解くと

$$4x < 8$$

$$x < 2 \dots (P)$$

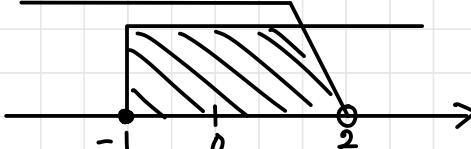
②を解くと

$$3x + 7 \leq 8x + 12$$

$$-5x \leq 5$$

$$x \geq -1 \dots (1)$$

(P)(1)より



$$-1 \leq x < 2$$

(2) ①を解くと

$$-4x \geq -6$$

$$x \leq \frac{3}{2} \dots (P)$$

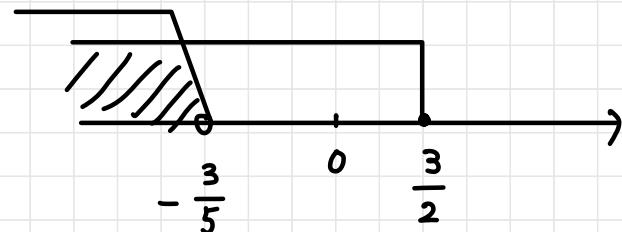
②を解くと

$$-x + 6 < 3 - 6x$$

$$5x < -3$$

$$x < -\frac{3}{5} \dots (1)$$

(P)(1)より



$$x < -\frac{3}{5}$$

練習
45

次の不等式を解け。

$$3x < x + 12 < 2x + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x < x + 12 \cdots ① \\ x + 12 < 2x + 8 \cdots ② \end{array} \right\}$$

①を解くと

$$2x < 12$$

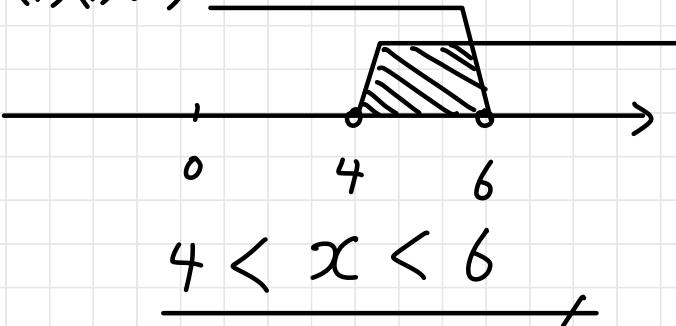
$$x < 6 \cdots (P)$$

②を解くと

$$-x < -4$$

$$x > 4 \cdots (I)$$

(P)(I)より

練習
46次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ。

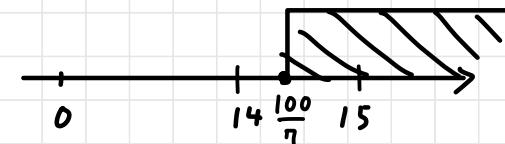
$$600 + 25(n - 20) \leq 32n$$

$$600 + 25n - 500 \leq 32n$$

$$25n - 32n \leq 500 - 600$$

$$-7n \leq -100$$

$$n \geq \frac{100}{7} = 14, 2 \cdots$$

よって、求める最小の自然数 n は

$$\underline{n = 15}$$

練習 次の不等式を満たす最大の自然数 n を求めよ。

$$4 + \frac{1}{5}(n-4) > \frac{1}{2}n$$

両辺10倍すると

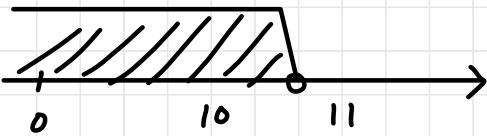
$$40 + 2(n-4) > 5n$$

$$40 + 2n - 8 > 5n$$

$$2n - 5n > 8 - 40$$

$$-3n > -32$$

$$n < \frac{32}{3} = 10.6\cdots$$



よって、求める最大の自然数 n は

$$\underline{\underline{n = 10}}$$

練習
48

1個 120 円の菓子 A と 1 個 80 円の菓子 B を合わせて 30 個買い、100 円の箱に詰めてもらう。菓子代と箱代の合計金額を 3000 円以下にするとき、菓子 A は最大で何個買えるか。

菓子 A の個数を x ことする

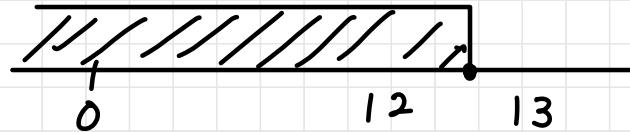
$$120x + 80(30-x) + 100 \leq 3000$$

$$120x + 2400 - 80x + 100 \leq 3000$$

$$120x - 80x \leq 3000 - 2400 - 100$$

$$40x \leq 500$$

$$x \leq \frac{25}{2} = 12.5$$



菓子 A は最大で 12 個 買える。

案内状を作ることになったので制作費を調べた。A 店では、100 部までは 5000 円、100 部を超える分は 1 部につき 40 円である。また、B 店では、100 部までは 4500 円、100 部を超える分は 1 部につき 43 円である。B 店で作るより A 店で作る方が安くなるのは、何部以上作るときか。

案内状の部数を x 部とする。 A 店の方が安くなればよいので

$$\text{A 店は } 5000 + 40(x - 100)$$

$$\text{B 店は } 4500 + 43(x - 100)$$

$$5000 + 40(x - 100) < 4500 + 43(x - 100)$$

$$5000 + 40x - 4000 < 4500 + 43x - 4300$$

$$40x + 1000 < 43x + 200$$

$$40x - 43x < 200 - 1000$$

$$-3x < -800$$

$$x > \frac{800}{3} = 266,6\cdots$$

267 部以上

・ 絶対値を含む方程式・不等式

c が正の定数のとき 方程式 $|x| = c$ の解は $x = \pm c$

不等式 $|x| < c$ の解は $-c < x < c$

不等式 $|x| > c$ の解は $x < -c, c < x$

練習

50

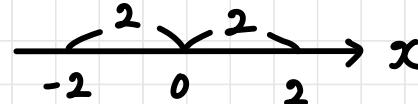
次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x| = 2$

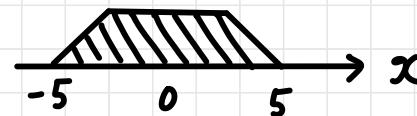
(2) $|x| < 5$

(3) $|x| \geq 4$

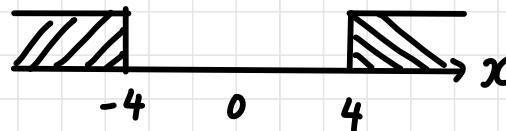
(1) $x = \pm 2$



(2) $-5 < x < 5$



(3) $x \leq -4, 4 \leq x$



次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x+4|=2$

(2) $|x+1|<1$

(3) $|x-2|\geq 1$

(4) $|2x-3|=1$

(5) $|3x-2|\leq 4$

(6) $|2x+5|>2$

(1)

$x+4=\pm 2$

$x=-4\pm 2$

$\underline{x = -6, -2}$

(2)

$-1 < x+1 < 1$

$-2 < x < 0$

(3)

$x-2 \leq -1 \quad x-2 \geq 1$

$x \leq 1 \quad x \geq 3$

$x \leq 1 \quad , \quad x \geq 3$

(4)

$2x-3=\pm 1$

$2x=3\pm 1$

$2x=4 \quad 2x=2$

$x=2 \quad x=1$

$\underline{x = 1, 2}$

(5)

$-4 \leq 3x-2 \leq 4$

$-2 \leq 3x \leq 6$

$-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$

(6)

$2x+5 < -2$

$2x < -7$

$x < -\frac{7}{2}$

$x < -\frac{7}{2}, \quad x > -\frac{3}{2}$

$2x+5 > 2$

$2x > -3$

$x > -\frac{3}{2}$

・ 絶対値と場合分け

絶対値の定義より

- $A \geq 0$ のとき $|A| = A$
- $A < 0$ のとき $|A| = -A$

練習

1

例1 にならって、次の式の絶対値記号をはずせ。

(1) $|x-3|$

(2) $|x+2|$

(3) $|2x-3|$

(1) $x-3 \geq 0$ のとき

つまり $x \geq 3$ のとき

$$|x-3| = x-3$$

$x-3 < 0$ のとき

つまり $x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} |x-3| &= -(x-3) \\ &= -x+3 \end{aligned}$$

(2) $x+2 \geq 0$ のとき

つまり $x \geq -2$ のとき

$$|x+2| = x+2$$

$x+2 < 0$ のとき

つまり $x < -2$ のとき

$$\begin{aligned} |x+2| &= -(x+2) \\ &= -x-2 \end{aligned}$$

(3) $2x-3 \geq 0$ のとき

つまり $x \geq \frac{3}{2}$ のとき

$$|2x-3| = 2x-3$$

$2x-3 < 0$ のとき

つまり $x < \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} |2x-3| &= -(2x-3) \\ &= -2x+3 \end{aligned}$$

練習

2

次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-3| = 2x$

(2) $|x-4| \leq 2x+1$

(1)

(P) $x-3 \geq 0$ のとき, つまり $x \geq 3$ のとき

$$x-3 = 2x$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

これは $x \geq 3$ より不適(1) $x-3 < 0$ のとき, つまり $x < 3$ のとき

$$-(x-3) = 2x$$

$$-x+3 = 2x$$

$$-3x = -3$$

$$x = 1$$

これは $x < 3$ を満たす

$$\text{よって } \underline{\underline{x=1}}$$

次の方程式、不等式を解け。

$$(1) |x-3|=2x$$

$$(2) |x-4| \leq 2x+1$$

(2)

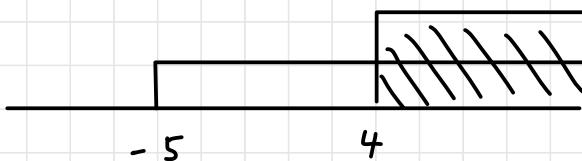
(3) $x-4 \geq 0$ のとき、つまり $x \geq 4$ のとき

$$x-4 \leq 2x+1$$

$$-x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

これと $x \geq 4$ を合わせて



$$\underline{x \geq 4 \cdots ①}$$

(1) $x-4 < 0$ のとき、つまり $x < 4$ のとき

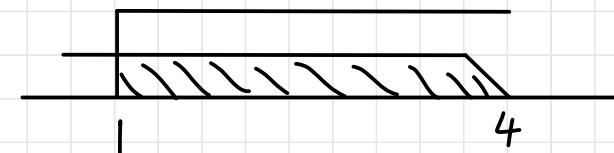
$$-(x-4) \leq 2x+1$$

$$-x+4 \leq 2x+1$$

$$-3x \leq -3$$

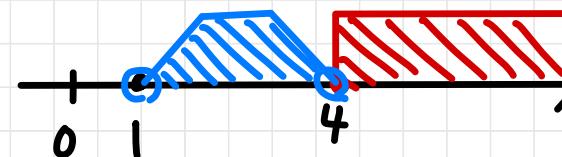
$$x \geq 1$$

これと $x < 4$ を合わせて



$$\underline{1 \leq x < 4 \cdots ②}$$

①②の共通範囲は



$$\underline{x \geq 1}$$

$$(3) |x+1| > 5x$$

(ア) $x+1 \geq 0$ のとき、つまり $x \geq -1$ のとき

$$x+1 > 5x$$

$$-4x > -1$$

$$x < \frac{1}{4}$$

これと $x \geq -1$ を合わせて $-1 \leq x < \frac{1}{4} \cdots ①$

(イ) $x+1 < 0$ のとき、つまり $x < -1$ のとき

$$-(x+1) > 5x$$

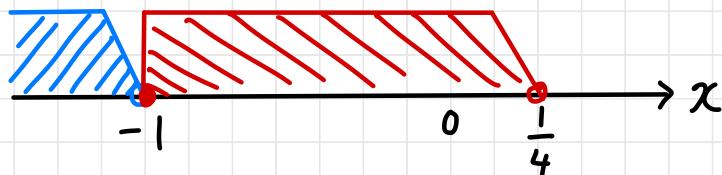
$$-x-1 > 5x$$

$$-6x > 1$$

$$x < -\frac{1}{6}$$

これと $x < -1$ を合わせて $x < -1 \cdots ②$

①②の共通範囲を求めて



$$x < \frac{1}{4}$$

 +