

数Ⅰ

集合と命題



・命題 ... 一般に正しいか正しくないかが定まる文や式

命題が正しいときその命題は真である。

命題が正しくないときその命題は偽である。

・条件 ... 文字 x を含む文や式で x に値を代入することで真偽が定まるもの

全体集合 ... 条件を考えるときの条件に含まれる文字を要素とする集合

練習

9

次の命題の真偽を述べよ。

(1) 円周率 π は有理数である。

(2) 実数 -1 について $(-1)^2 \geq 0$ である。

(1) π は無理数なので偽

(2) 真

命題 $p \Rightarrow q$

- 1 命題 $p \Rightarrow q$ は、「 p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。
- 2 条件 p を満たすものの全体の集合を P , 条件 q を満たすものの全体の集合を Q とするとき、「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」と「 $P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

p : 仮定

q : 結論

練習
10

次の条件 p, q について、命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を用いて調べよ。

(1) 実数 x に関する 2 つの条件 $p: x \leq 2, q: x \leq 4$

(2) 自然数 m に関する 2 つの条件

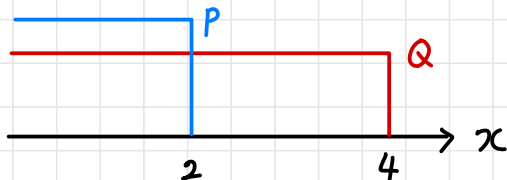
$p: m$ は 12 の正の約数, $q: m$ は 24 の正の約数

(3) 実数 x に関する 2 つの条件 $p: -1 < x < 1, q: x > 0$

(1) 2 つの集合 P, Q を

$$P = \{x \mid x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid x \leq 4\} \text{ とする.}$$



上図より $P \subset Q$ なので 真

(2)

2 つの集合 P, Q を

$$P = \{m \mid m \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

$$Q = \{m \mid m \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\} \text{ とする.}$$

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

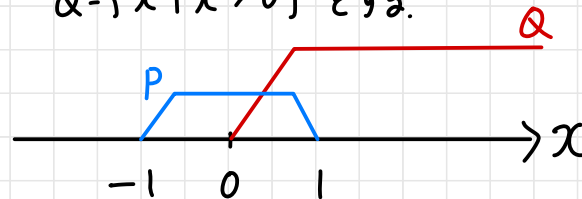
$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$P \subset Q$ より 真

(3) 2 つの集合 P, Q を

$$P = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

$$Q = \{x \mid x > 0\} \text{ とする.}$$



$P \subset Q$ ではないので 偽

・反例…命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示す例

練習 11 n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

n が素数ならば、 n は奇数である。

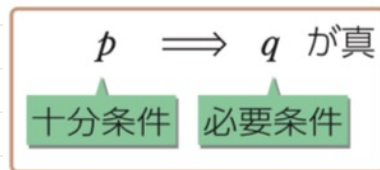
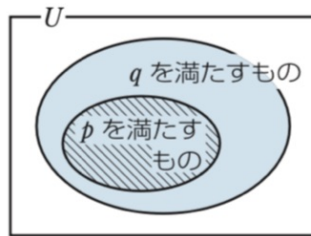
$n=2$ は素数だが偶数なのでこの命題は偽である。

2つの条件 P, Q について

命題 $P \Rightarrow Q$ が真であるとき

P は Q であるための十分条件

Q は P であるための必要条件



命題 $P \Rightarrow Q$ が成り立つかつ $Q \Rightarrow P$ が成り立つとき

P は Q であるための必要十分条件である.

Q は P であるための必要十分条件である.

(このとき P と Q は同値 ($P = Q$) である.)

条件 P, Q を満たすものの全体の集合を P, Q とすると, $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つことと $P = Q$ は同じ.

練習
12

x, y は実数とする. 次の に, 「必要」, 「十分」のうち, 適する言葉を入れよ.

(1) $x = -2$ は $x^2 = 4$ であるための 条件である.

(2) $x > 0$ は $x > 1$ であるための 条件である.

(3) $x = y$ は $(x - y)x = 0$ であるための 条件である.

x, y, z は実数とする。次の中で、 $x=y$ と同値な条件をすべて選べ。

① $x+z=y+z$

② $x^2=y^2$

③ $(x-y)^2=0$

① は両辺から z を引くと $x=y$

② は $x=\pm y$

③ は $x-y=\pm 0 \Rightarrow x=y$

よって ① と ③

x, y は実数とする。次の に、

「必要条件であるが十分条件ではない」、

「十分条件であるが必要条件ではない」、

「必要十分条件である」

のうち、適する言葉を入れよ。

(1) $\triangle ABC$ が正三角形であることは、 $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるための 。

(2) $x < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための 。

(3) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための 。

(1) 十分条件であるが必要条件でない

(2) 必要条件であるが十分条件でない

(3) 必要十分条件である。

・条件の否定 ... 条件 P に対して存在する「 P でない」条件 P に対して \bar{P} で表す。

練習
15

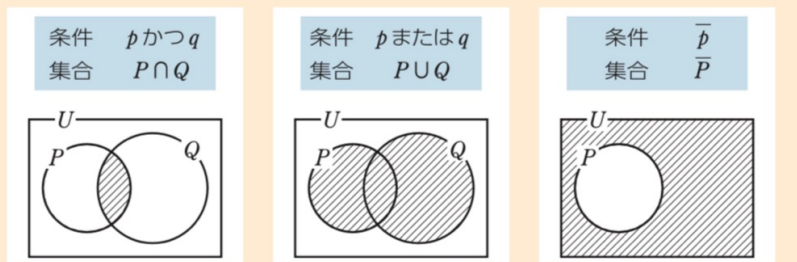
n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) n は偶数である (2) n は 5 より小さい

(1) n は奇数である. (2) n は 5 以上である.

全体集合を U とし、 U の要素の中で、条件 p , q を満たすものの全体の集合を、それぞれ P , Q で表す。

条件「 p かつ q 」, 「 p または q 」, \bar{p} と集合の関係は、次のようになる。



「かつ」の否定, 「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

「ともに」の否定は「少なくとも一方」
「少なくとも一方」の否定は「ともに」

練習
16

x , y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ (2) $x = 0$ または $y = 0$
(3) x , y はともに有理数

(1) $x < 0$ または $y < 0$ (2) $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$

(3) x, y の少なくとも一方は無理数

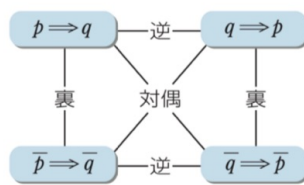
命題 $p \Rightarrow q$ に対して

$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の 逆

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の 対偶

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の 裏

という。命題 $p \Rightarrow q$ とその逆、対偶、裏は、互いに右の図のような関係にある。



もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

※ 文対偶の真偽は一致する。

練習 17 x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、対偶、裏を述べ、それらの真偽を調べよ。

- (1) $x > y \Rightarrow x - y > 0$ (2) $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

(1) 真

(2) 偽

逆 $x - y > 0 \Rightarrow x > y$ 真

逆 $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 真

裏 $x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$ 真

裏 $x = 0 \Rightarrow xy = 0$ 真

対偶 $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$ 真

対偶 $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ 偽