

复数 C

複素数平面

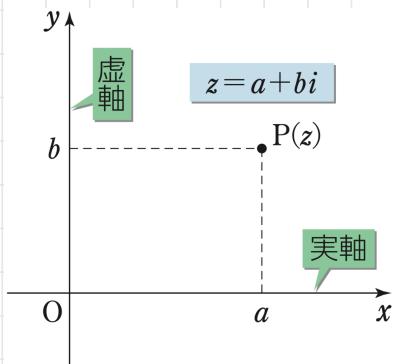


・ 複素数 … 2つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて $a+bi$ と表す。 a を実部, b を虚部という。

複素数 $a+bi$ について

$a=0$ のとき, bi となりこれは純粋虚数, $b=0$ のとき a となり実数となる。

・ 複素数平面(複素平面) … 複素数 $a+bi$ に対して, 座標平面上の点 (a, b) を対応させることで複素数を表す座標平面



複素数平面上の1つの点は1つの複素数を表す。

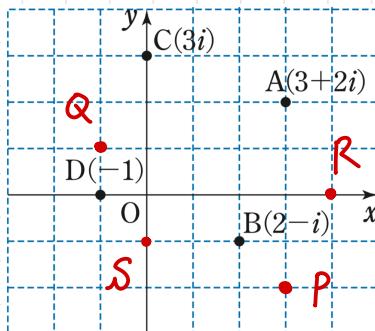
複素数平面において, x 軸は実軸, y 軸は虚軸として扱い
実軸上の点は実数, 原点以外の虚軸上の点は純虚数である。

複素数平面上で「複素数 z を表す点 P を $P(z)$ とかく。

練習 1

次の点を右の図に示せ。

$$P(3-2i), Q(-1+i), R(4), S(-i)$$

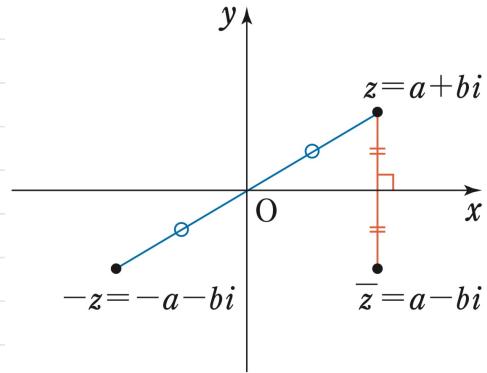


・共役複素数 ... 複素数 $a+bi$ に対して $a-bi$ のこと。(虚部の符号のみ変える。)
複素数 z に対して \bar{z} で表す。

複素数平面上で z , \bar{z} , $-z$ を図示すると以下がいえる

点 z と \bar{z} は実軸に関して対称。

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称

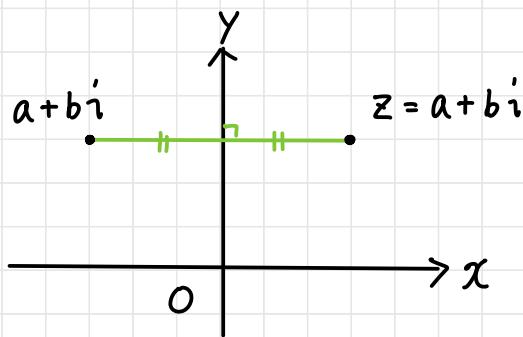


練習 2

複素数平面上で、点 z と点 $-\bar{z}$ の位置関係を述べよ。

$$z = a + bi \text{ のとき } -\bar{z} = -a + b'i$$

$$-\bar{z} = -a + b'i$$



z と $-\bar{z}$ は虚軸に関して対称

複素数 z について次が成立

1 z が実数 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

2 z が純虚数 $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ ただし, $z \neq 0$

練習
3

複素数 $z = a + bi$ について、次の問いに答えよ。

(1) a, b をそれぞれ z と \bar{z} を用いて表せ。

(2) (1)の結果を利用して、上の 1, 2 が成り立つことを確かめよ。

$$\begin{cases} z = a + bi & \dots \textcircled{1} \\ \bar{z} = a - bi & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$\begin{array}{l} z = a + bi \\ +) \bar{z} = a - bi \end{array} \quad \begin{array}{l} z = a + bi \\ -) \bar{z} = a - bi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z + \bar{z} = 2a \\ -) \bar{z} = 2bi \end{array}$$

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$b = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -\frac{z - \bar{z}}{2} i$$

$b = 0$ のとき.

$$-\frac{z - \bar{z}}{2} i = 0$$

$$z - \bar{z} = 0$$

$$z = \bar{z}$$

$a = 0$ のとき

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = 0$$

$$z + \bar{z} = 0$$

$$\bar{z} = -z$$

逆に $\bar{z} = z$ のとき (1) より $b = 0$

よって $z = a + bi$ は実数

z が実数 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

逆に $\bar{z} = -z$ で $z \neq 0$ のとき

$a = 0$, また $z \neq 0$ のとき $b \neq 0$

よって $z = a + bi$ は純虚数

z が純虚数 $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

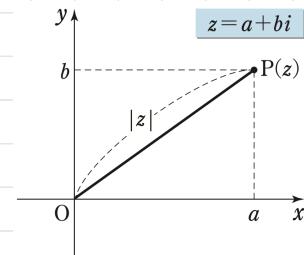
ただし $z \neq 0$

複素数 z の絶対値 … 複素数平面上における原点 O と点 P(z) のヨリ

複素数の絶対値

複素数 $a+bi$ の絶対値は

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$



$$z = a+bi$$

- 練習 4** 次の複素数の絶対値を求めよ。
- (1) $3-2i$ (2) $-2+4i$ (3) -5 (4) $3i$

$$(1) |3-2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$(2) |-2+4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$(3) |-5| = 5$$

$$(4) |3i| = 3$$

- 練習 5** 複素数 z について, $|-z| = |z|$ であることを確かめよ。

$z = a+bi$ とする。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$-\bar{z}$ は $-\bar{z} = -a+bi$

$$|-\bar{z}| = \sqrt{(-a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

よって $|-z| = |z|$

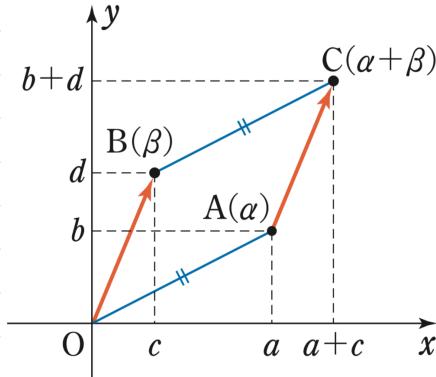
複素数の和と差の図示

複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ とすると $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$

複素数平面上に 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha + \beta)$ をとる。

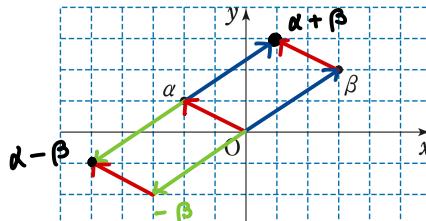
右図からわかるように、 $\alpha + \beta$ は α の先に β の末尾がつくように β を平行移動させることで“図示可能”である。

また、 $\alpha - \beta$ を図示するときは $\alpha + (-\beta)$ として β の向きを逆にして平行移動すればよい。



練習 6 右の図の複素数平面上の点 α , β について、次の点を図に示せ。

- (1) $\alpha + \beta$
- (2) $\alpha - \beta$



練習 7 次の 2 点間の距離を求めよ。

$$(1) A(2+3i), B(1+6i)$$

$$(2) C(3-4i), D(1-2i)$$

$$(1) AB = (1+6i) - (2+3i) = -1+3i$$

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

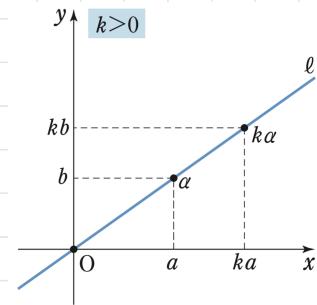
$$(2) CD = (1-2i) - (3-4i) = -2+2i$$

$$|CD| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

・ 複素数の実数倍

複素数 α, β について $\alpha \neq 0$ のとき

3点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある $\Leftrightarrow \beta = k\alpha$ となる実数 k が存在



練習 8 $\alpha = 3 - 6i, \beta = 1 + yi$ とする。2点 $A(\alpha), B(\beta)$ と原点 O が一直線上

にあるとき、実数 y の値を求めよ。

2点 $A(\alpha), B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき

$\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在する。

$$\begin{aligned}\beta &= k\alpha \\ 1+yi &= k(3-6i)\end{aligned}$$

$$1+yi = 3k - 6ki$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3k = 1 \dots \textcircled{1} \\ y = -6k \dots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \text{より } k = \frac{1}{3}$$

これを \textcircled{2} に代入すると

$$y = -6 \times \frac{1}{3} = -2$$

$$\underline{\underline{y = -2}}$$

共役複素数の性質

$$1 \quad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$2 \quad \overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$$

$$3 \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

$$4 \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

練習
9

複素数 α, β について、 $\alpha + \beta + i = 0$ のとき、 $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$ を求めよ。

$$\alpha + \beta + i = 0 \quad \text{より}$$

$$\alpha + \beta = -i$$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta} \quad \text{などので}"$$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = i$$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = i$$

複素数 z とその共役複素数 \bar{z} について

$$1 \quad z + \bar{z} \text{ は実数である}$$

$$2 \quad z\bar{z} = |z|^2$$

練習
10

複素数 α について、次のことを証明せよ。

$$|\alpha| = 1 \text{ のとき, } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ は実数である。}$$

$$|\alpha| = 1 \text{ のとき } |\alpha|^2 = 1 \text{ ので}"$$

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = 1 \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

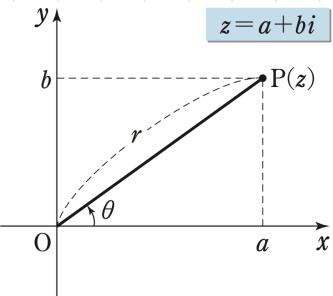
ここで"

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + (\bar{\alpha})^2 = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$$

したがって $\alpha^2 + \bar{\alpha}^2$ は実数であるから

$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ も実数である。

- 極形式 ... 複素数平面上で0でない複素数 $z = a + bi$ を表す点をP, 線分OPの長さをrとする。半直線OPを実軸の正の部分を始線とした動径と考えて、動径OPの表す角をθとする。



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

よって0でない複素数 z は

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad * \quad r > 0, \quad \theta \text{ は弧度法で表された一般角.}$$

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z$$

- 偏角 ... 複素数 z の極形式における角 θ . $\arg z$ と表す。(アーキュメント z と言える)

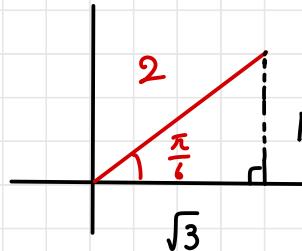
この偏角の1つを θ_0 とすると $\arg z = \theta_0 + 2n\pi$ (n は整数) と表される。

練習
11

次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は、(1), (2)では $0 \leq \theta < 2\pi$, (3), (4)では $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

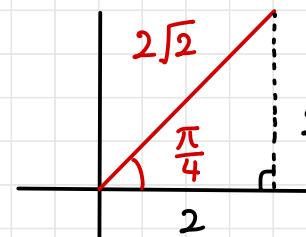
- (1) $\sqrt{3} + i$ (2) $2 + 2i$ (3) $1 - \sqrt{3}i$ (4) $-i$

(1)



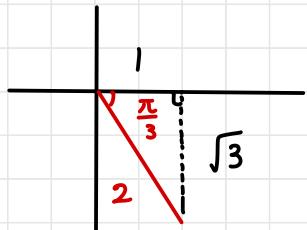
$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

(2)



$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(3)



$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

(4)



$$-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

z と \bar{z} の極形式について

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ のとき } \bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$

練習
12

複素数 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。このとき, $-z$ の極形式について, 次のことを示せ。

$$-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$$

加法定理より

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta, \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\} = r(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= -r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ なので

$$r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\} = -z$$

極形式で表された複素数の積と商

$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ のとき

$$\alpha\beta = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

練習
13

次の複素数 α , β について, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。

ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right), \quad \beta = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2} \cdot 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \right\} = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right\} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

複素数の積と商の絶対値と偏角

$$1 \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \quad \arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta$$

$$2 \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta$$

練習

14

複素数 α, β について、 $|\alpha|=2, |\beta|=3$ のとき、次の値を求めよ。

- (1) $|\alpha\beta| \quad$ (2) $|\alpha^3| \quad$ (3) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad$ (4) $\left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right|$

$$(1) \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 6$$

$$(2) \quad |\alpha^3| = |\alpha|^3 = 8$$

$$(3) \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{2}{3}$$

$$(4) \quad \left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|^2} = \frac{3}{4}$$

複素数の積と図形

2つの複素数 α とその積 αz について、その絶対値と偏角は以下のようになる。

$$|\alpha z| = |\alpha| |z| \quad \arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z$$

練習

15

次の点は、点 z をどのように移動した点であるか。

- (1) $(1 + \sqrt{3}i)z$ (2) $(-1 + i)z$ (3) $2iz$

(1) $|1 + \sqrt{3}i| = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ 真

点 $(1 + \sqrt{3}i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し原点からの距離を2倍にした点である。

(2) $(-1 + i)z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$ 假

点 $(-1 + i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍にした点である。

(3) $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ 真

点 $2iz$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し原点からの距離を2倍にした点である。

$z = 4 - 2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を

表す複素数を求めよ。

- (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$ (3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{3}$

$$(1) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (4 - 2i) = (2\sqrt{3} + 1) + (2 - \sqrt{3})i$$

$$(2) \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 - 2i) = (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 1)i$$

$$(3) \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} z = -i (4 - 2i) = -2 - 4i$$

$$(4) \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4 - 2i) = (2 - \sqrt{3}) - (2\sqrt{3} + 1)i$$

$\alpha = 2+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形

が、正三角形であるとき、 β の値を求めよ。

点 β は点 α を原点を中心 i に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

$$\beta = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (2+2i) = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) i$$

または

$$\beta = \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (2+2i) = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) i$$

よって $\beta = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) i$ または $\beta = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) i$

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

練習

18

次の式を計算せよ。

$$(1) \quad (1 + \sqrt{3}i)^5$$

$$(2) \quad (1+i)^8$$

$$(3) \quad (1 - \sqrt{3}i)^{-6}$$

$$(1) \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ とおこる}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^5 = \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\}^5 = 2^5 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = 32 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 16 - 16\sqrt{3}i$$

$$(2) \quad 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ とおこる}$$

$$(1 + i)^8 = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16$$

$$(3) \quad 1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \text{ とおこる}$$

$$(1 - \sqrt{3}i)^{-6} = \left[2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \right]^{-6} = 2^{-6} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \frac{1}{64}$$

1 の n 乗根

1 の n 乗根は、次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

練習
19

1 の 8 乗根を求めよ。

$$z_k = \cos \frac{2k}{8}\pi + i \sin \frac{2k}{8}\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

よって

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_5 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_6 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i$$

$$z_3 = \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_7 = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

次の方程式を解け。また、解を表す点を、それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^2 = i$

(2) $z^4 = -4$

(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

(1)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \cdots \text{①} \text{ とする。}$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

また、 $i = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}$ なので

$$z^2 = i$$

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}$$

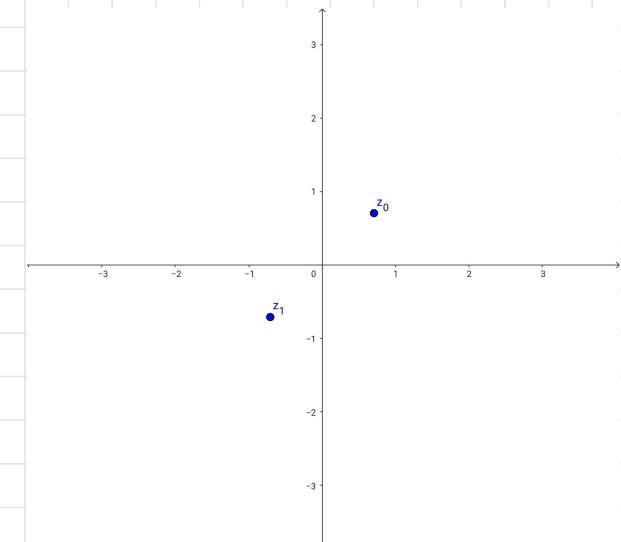
両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = 1 \quad \cdots \text{②}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲では } k = 0, 1 \text{ なので } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \cdots \text{③}$$



③③を①に代入すると

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z = \cos \frac{5}{4}\pi + i\sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

次の方程式を解け。また、解を表す点を、それぞれ複素数平面上に図示せよ。

$$(1) z^2 = i$$

$$(2) z^4 = -4$$

$$(3) z^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ① とする。

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

また、 $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ なので

$$z^4 = -4$$

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

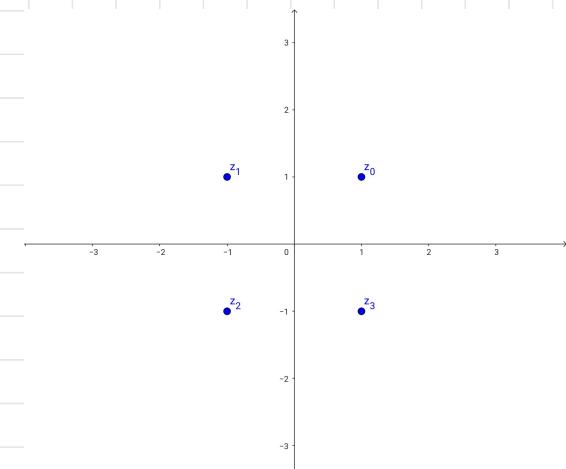
$$r^4 = 4, 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = \sqrt{2} \cdots ③$$

$$4\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$k = 0, 1, 2, 3, \text{ なので } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \cdots ③$$



④③を①に代入すると

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -1 - i$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 1 - i$$

次の方程式を解け。また、解を表す点を、それぞれ複素数平面上に図示せよ。

$$(1) z^2 = i \quad (2) z^4 = -4$$

$$(3) z^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ① とする。

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

また、 $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3})$ なので

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3})$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

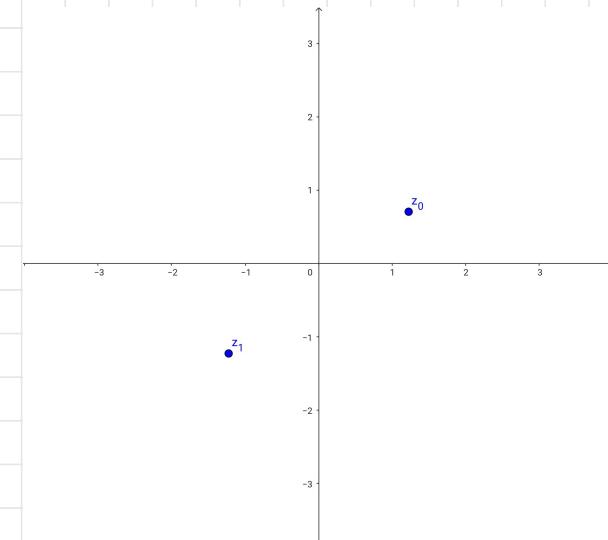
$$r^2 = 2, 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = \sqrt{2} \dots ②$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$k = 0, 1 \text{ なので } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \dots ③$$



④③を①に代入すると

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $C(\gamma)$,
 $m:n$ に外分する点を $D(\delta)$ とすると

$$\text{内分点 } \gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \quad \text{外分点 } \delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

とくに、線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha+\beta}{2}$

練習 21 A($1+5i$), B($7-i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

- (1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C
- (2) 線分 AB の中点 M
- (3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 D

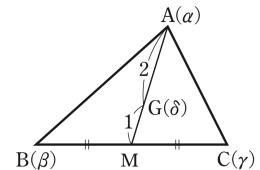
$$(1) C = \frac{2(1+5i)+(7-i)}{1+2} = \frac{9+9i}{3} = 3+3i$$

$$(2) M = \frac{(1+5i)+(7-i)}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i$$

$$(3) D = \frac{-2(1+5i)+3(7-i)}{3-2} = 19-13i$$

練習 22 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする

$\triangle ABC$ について、その重心を $G(\delta)$ と
するとき、 $\delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ であること
を示せ。



点 M は点 B, C の中点なので $\frac{\beta+\gamma}{2}$

点 G は点 A, M を $2:1$ に内分する点なので

$$\delta = \frac{\alpha + 2 \cdot \frac{\beta+\gamma}{2}}{2+1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

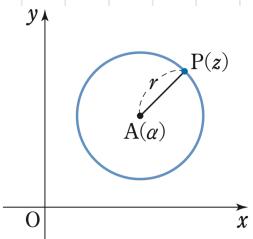
方程式の表す図形

点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点を $P(z)$ とすると $|z - \alpha| = r$ となる。

$$|z - \alpha| = r \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって $\textcircled{1}$ を満たす点 z 全体の集合は点 A を中心とする半径 r の円である。

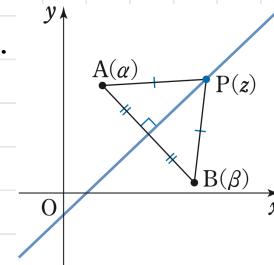
※ 原点中心半径 r の円は $|z| = r$ と表される。



2 点 $A(\alpha), B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(z)$ とすると $|z - \alpha| = |z - \beta|$ となる。

$$|z - \alpha| = |z - \beta| \quad \cdots \textcircled{2}$$

したがって $\textcircled{2}$ を満たす点 z 全体の集合は線分 AB の垂直二等分線である。



練習

23

次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か。

- (1) $|z| = 2$ (2) $|z - (1+i)| = 1$ (3) $|z - 2| = |z - 4i|$

(1)

原点中心半径 2 の円

(2)

点 $1+i$ 中心半径 1 の円

(3)

2 点 $A(2), B(4i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

練習
24 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か。

方程式の両辺を2乗すると

$$4|z-3|^2 = |z|^2$$

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = z \cdot \bar{z}$$

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = z \cdot \bar{z}$$

$$4(z \cdot \bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9) = z \cdot \bar{z}$$

$$4z \cdot \bar{z} - 12z - 12\bar{z} + 36 = z \cdot \bar{z}$$

$$3z \cdot \bar{z} - 12z - 12\bar{z} + 36 = 0$$

$$z \cdot \bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 12 = 0$$

$$z \cdot \bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 - 4 = 0$$

$$(z-4)(\bar{z}-4) = 4$$

$$(z-4)(\bar{z}-4) = 4$$

$$|z-4|^2 = 4$$

$$|z-4| = 2$$

点 z は $|z| = 1$ を満たす。

練習
25

$w = i(z-2)$ とする。点 z が原点Oを中心とする半径1の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

点 z は $|z| = 1$ を満たす。

$$w = i(z-2) \Leftrightarrow z = \frac{w+2i}{i}$$

$$|z| = \left| \frac{w+2i}{i} \right| = \frac{|w+2i|}{|i|} = |w+2i|$$

$$|z| = |w+2i|$$

$$|w+2i| = 1$$

よって

点 w は $-2i$ 中心半径1の円を描く

点 α を中心とする回転

点 β を、点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると
 $\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$

練習
26

$\alpha = 1+i$, $\beta = 5+3i$ とする。点 β を、点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

$$\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$$

$$\gamma - (1+i) = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \{ (5+3i) - (1+i) \}$$

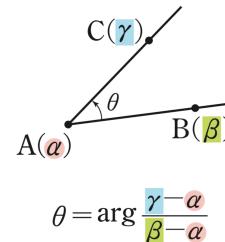
$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (4+2i) + 1+i$$

$$= 2\sqrt{3} + (\sqrt{3}+3)i$$

半直線のなす角

異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して,
半直線 AB から半直線 AC までの回転角

$$\theta \text{ は } \theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$



極形式の計算について

なす角の差は商となる

練習
27

3 点 $A(1-i)$, $B(2+i)$, $C(2i)$ に対して, 半直線 AB から半直線 AC

までの回転角 θ を求めよ。ただし, $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

$\alpha = 1 - i$, $\beta = 2 + i$, $\gamma = 2i$ とする。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2i - (1 - i)}{(2 + i) - (1 - i)} = \frac{-1 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ なので。}$$

$$\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{4}$$

3点 A, B, C が一直線上にある $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数

2直線 AB, AC が垂直に交わる $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数

練習

28

3点 A($-1+i$), B($3-i$), C($x+3i$)について、次の問いに答えよ。

ただし、 x は実数とする。

- (1) 2直線 AB, AC が垂直に交わるように、 x の値を定めよ。
- (2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように、 x の値を定めよ。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{(x+3i) - (-1+i)}{(3-i) - (-1+i)} = \frac{(x+1) + 2i}{4 - 2i} = \frac{(x+1) + 2i}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{2x + (x+5)i}{10}$$

(1) 2直線 AB, AC が垂直に交わるとき、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数となるので $\underline{x = 0}$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるとき $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数となるので $x+5=0 \therefore \underline{x = -5}$

練習

29

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、等式

$\gamma = (1-i)\alpha + i\beta$ が成り立つとき、次のものを求めよ。

(1) 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値

(2) $\triangle ABC$ の 3つの角の大きさ

(1)

$$\gamma = \alpha - i\alpha + i\beta$$

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)i$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = i$$

(2)

$$(1) \text{ (1)} \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = |\text{なごで}|$$

$$|\gamma - \alpha| = |\beta - \alpha| \text{ となるから}$$

$$AC : AB = 1 : 1$$

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\pi}{2} \text{ なごで}"$$

$\triangle ABC$ は $AB = AC$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

$$\underline{\angle A = \frac{\pi}{2}, \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{\pi}{4}}$$

3点 A $(-1+i)$, B $(1-i)$, C $(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はど

のような三角形か。

$$\alpha = -1+i, \beta = 1-i, \gamma = -\sqrt{3}-\sqrt{3}i \text{ とする}$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i) - (-1+i)}{(1-i) - (-1+i)} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (-1-\sqrt{3})i}{2(1-i)}$$

$$a = 1-\sqrt{3}, b = -1-\sqrt{3} \text{ とおく}.$$

$$\frac{(1-\sqrt{3}) + (-1-\sqrt{3})i}{2(1-i)} = \frac{a + bi}{2(1-i)} = \frac{(a+bi)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{(a-b) + (a+b)i}{2 \cdot 2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \therefore \angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = 1 \quad \therefore AB : AC = 1 : 1$$

よって $\triangle ABC$ は正三角形