数II

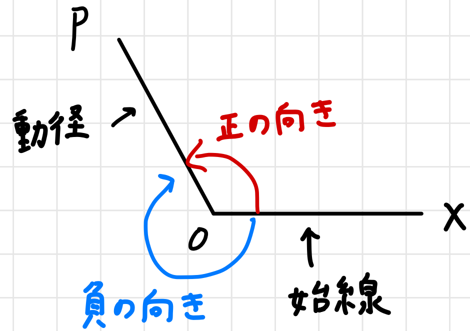
三角関数

三角関数

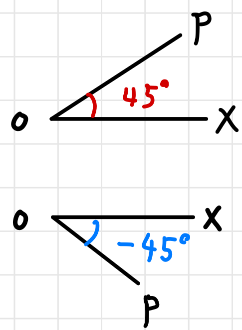
動径…平面上で点Oを中心として回転させる半直線OP

始線…動径の最初の位置を示す半直線OX

- 反時計回りを正の向き
- 詩計回りを負の向き



- 正の向きに回った角を正の角
- 負の向きに回った角を負の角



一般角

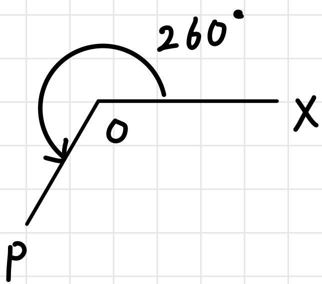
→ 回転の向きと大きさをもつ量として拡張した角

θを一般角とし始線OXからθだけ回転した位置にある動径OPをθの動径という.

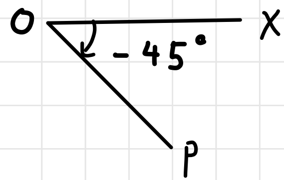
練習 1 次の角の動径を図示せよ。

(1)　260°　　(2)　−45°　　(3)　420°　　(4)　750°　　(5)　−240°

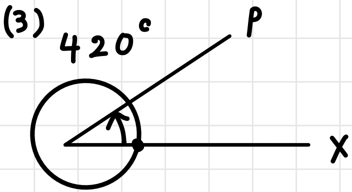
(1)



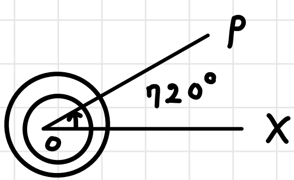
(2)



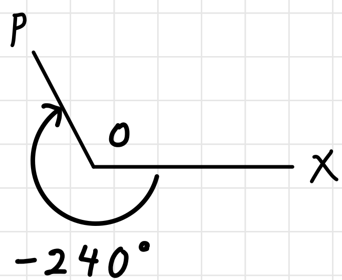
(3)



(4)



(5)

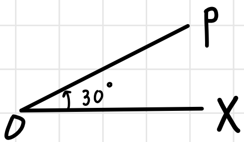


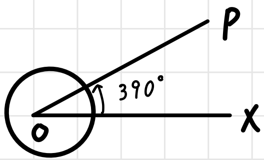
動径の表す角

動径は1回転360°すると同じ位置にくる.

動径OPと始線OXのなす角の1つをαとすると動径OPの表す角は $\alpha+360^\circ\times n$ (nは整数)

(例) 30°と390°の動径





$390^\circ=30^\circ+360^\circ\times1$

また, $30^\circ+360^\circ\times2=750^\circ$

$30^\circ+360^\circ\times(-1)=-330^\circ$ より

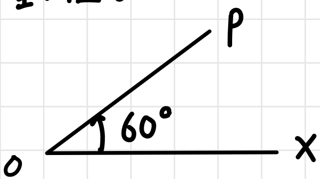
30°, 390°, 750°, −330°の動径はすべて同じ位置にある.

練習 2

次の角のうち，その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか。

300°，420°，1040°，−60°，−300°，−780°

動径 60°



$60° = \underline{60°} + 360° \times 0$

$300° = \underline{-60°} + 360° \times 1$

$420° = \underline{60°} + 360° \times 1$

$1040° = \underline{-40°} + 360° \times 3$

$-60° = -60° + 360° \times 0$

$-300° = \underline{60°} + 360° \times (-1)$

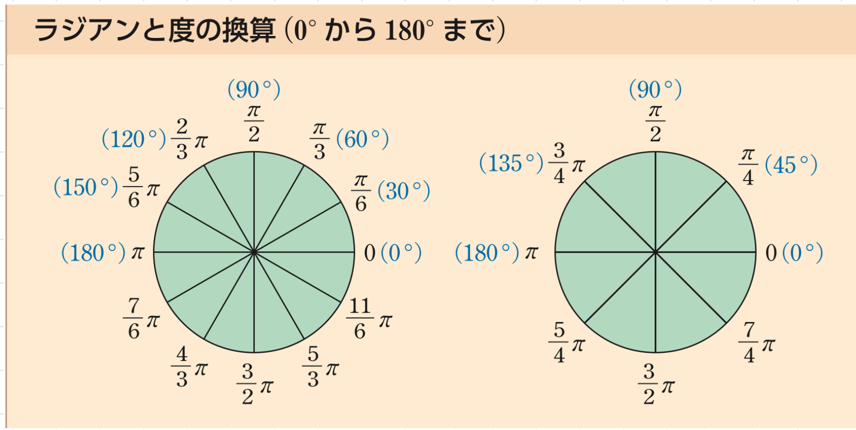
$-780° = \underline{-60°} + 360° \times (-2)$

$\underline{420° と -300°}$

・度数法…度(°)を単位とする角の表し方

・弧度法…ラジアンを単位とする角の表し方

・ラジアン…円において半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさ



また，弧度法では

動径OPと始線OXのなす角の1つをαとすると動径OPの表す角は $\alpha+2n\pi$（nは整数）

練習 3 次のことを確かめよ。

(1) 180° は π ラジアン (2) 1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

(1)

弧の長さ1に対する中心角の大きさが1ラジアンである中心角180°の弧は半円となるので

弧の長さは $2\pi\times\dfrac{1}{2}=\pi$

したがって，弧の長さπに対する中心角の大きさはπラジアンである.

(2)

1ラジアンに対する中心角の大きさをα°とする.

(1)より，弧の長さπに対する中心角の大きさはπラジアンであるので

$\pi : 180^{\circ} = 1 : \alpha^{\circ}$

よって，$\alpha=\dfrac{180}{\pi}$

したがって，1ラジアンは$\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

度数法 → 弧度法

$\frac{\pi}{180}$ をかける

弧度法 → 度数法

$\frac{180}{\pi}$ をかける

練習 4 次の(1)～(3)の角を弧度法で表せ。また，(4)，(5)の角を度数法で表せ。

(1)　210°　　(2)　240°　　(3)　330°　　(4)　$\frac{5}{4}\pi$　　(5)　$\frac{3}{2}\pi$

(1)

$$210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$$

(2)

$$240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$$

(3)

$$330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

(4)

$$\frac{5}{4}\pi \times \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

(5)

$$\frac{3}{2}\pi \times \frac{180}{\pi} = 270^\circ$$

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ（ラジアン）の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$l=r\theta,\qquad S=\frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S=\frac{1}{2}lr$$

練習 5 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 4，中心角 $\frac{\pi}{3}$ (2) 半径 6，中心角 $\frac{7}{6}\pi$

(1)

$$l=r\theta=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 4=\frac{8}{3}\pi$$

(2)

$$l=r\theta=6\times\frac{7}{6}\pi=7\pi$$

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 7\pi\times 6=21\pi$$

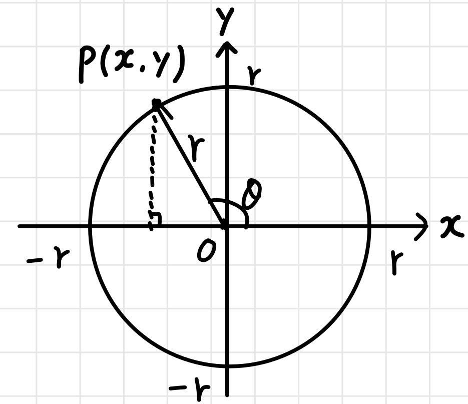
三角関数

座標平面上で x 軸の正の部分を始線として一般角 θ の動径と原点を中心とする

半径 r の円との交点 P の座標を (x, y) とすると

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

(正弦)　(余弦)　(正接)



これらは全て θ の関数であり、θ の三角関数という。

※ $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) に対して $\tan\theta$ は定義されない。

練習 6

次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $\theta=\frac{5}{4}\pi$　　(2) $\theta=\frac{11}{6}\pi$　　(3) $\theta=-\frac{\pi}{3}$

(1)

$$\sin\frac{5}{4}\pi\ (=\sin 225^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{5}{4}\pi\ (=\cos 225^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{5}{4}\pi\ (=\tan 225^\circ)=1$$

(2)

$$\sin\frac{11}{6}\pi\ (=\sin 330^\circ)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11}{6}\pi\ (=\cos 330^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11}{6}\pi\ (=\tan 330^\circ)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3)

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$$

原点中心半径1の円を単位円という.

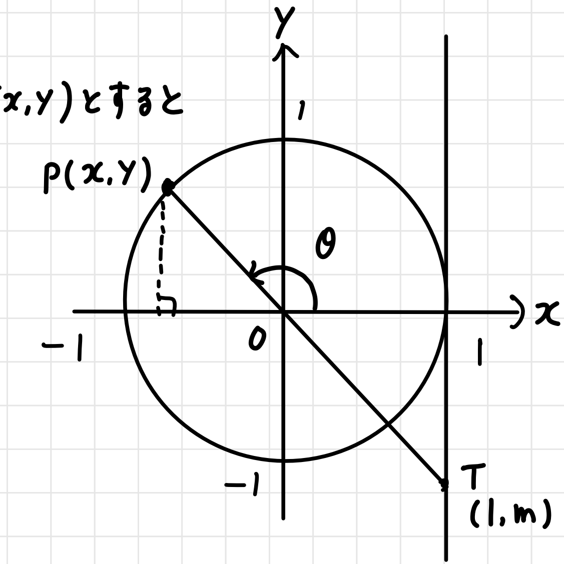
単位円では $r=1$ なので一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x,y)$ とすると

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y,\quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

また, OPと直線 $x=1$ の交点を $T(1,m)$ とすると

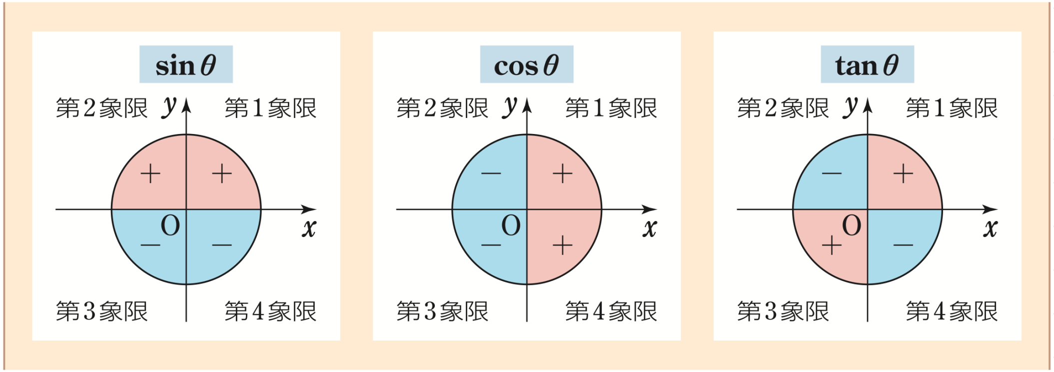
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = m$$

よって, $y=\sin\theta$, $x=\cos\theta$, $m=\tan\theta$



点Pは単位円の周上を動き, そのとき点Tは直線 $x=1$ 上のすべての点を動くので

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$, $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$, $\tan\theta$ の値の範囲は実数全体



練習 7 次の条件を満たすような θ の動径は，第何象限にあるか。

(1) $\sin\theta<0$ かつ $\cos\theta>0$ (2) $\cos\theta<0$ かつ $\tan\theta>0$

(1) 第4象限 (2) 第3象限

三角関数の相互関係

- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

練習 8 θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

θ の動径が第4象限なので

$\cos\theta > 0$, $\tan\theta < 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos\theta > 0$ より

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

練習 9

θ の動径が第 3 象限にあり，$\tan\theta=2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

θの動径が第3象限 $\rightarrow$ $\sin\theta<0$

$\cos\theta<0$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\cos\theta<0$ より

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}$$

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{1+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\times2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

練習 10 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$-2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(1+\dfrac{4}{9}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{13}{9}$

$=\dfrac{13}{27}$

練習 11 等式 $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$ を証明せよ。

$$(右辺)=\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\cdot\sin^2\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2-\sin^2\theta$$

$$=(\tan\theta)^2-\sin^2\theta$$

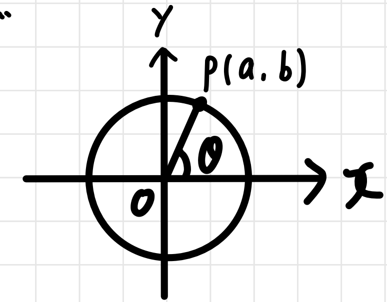
$$=\tan^2\theta-\sin^2\theta=(左辺)$$

よって (左辺)=(右辺) となるので

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

三角関数のグラフ　(グラフの形と周期をおさえる)

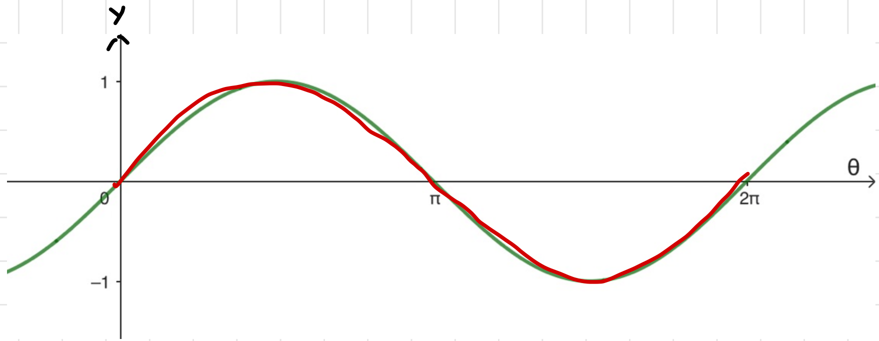
グラフがもとの形にもどるまで



一般角θの動径と単位円の交点をP(a, b)とすると $\sin\theta = b$, $\cos\theta = a$

$\sin\theta$はy座標, $\cos\theta$はx座標を表す.

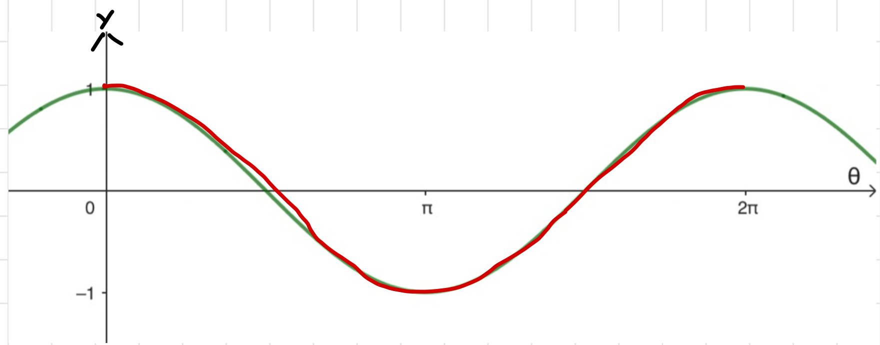
$y = \sin\theta$



周期 2π

値域 $-1 \leqq y \leqq 1$

$y = \cos\theta$

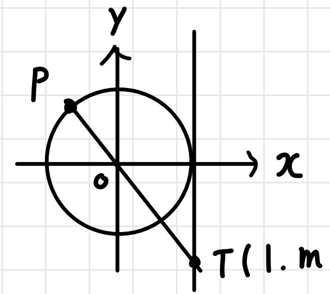


周期 2π

値域 $-1 \leqq y \leqq 1$

一般角θの動径と単位円の交点をPとし、直線OPと直線$x=1$の交点をT(1, m)とすると

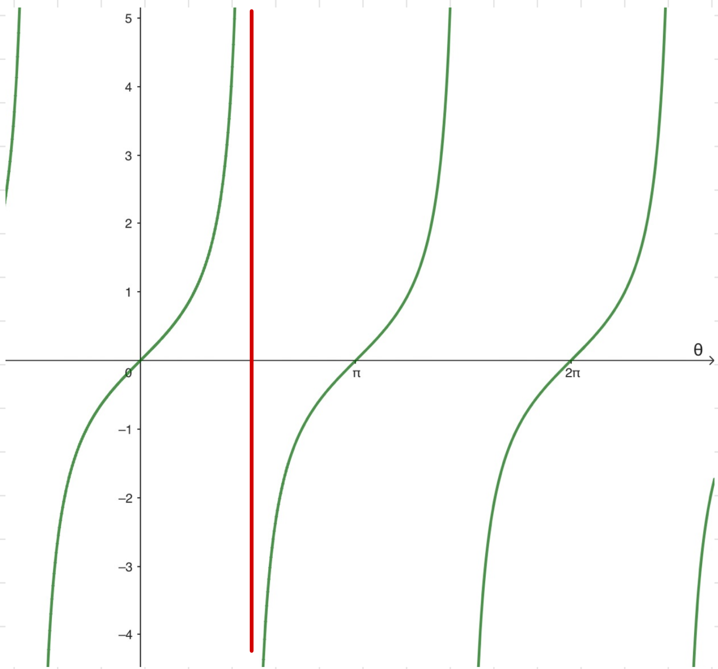
$$\tan\theta = m$$



$x=1$

$y=\tan\theta$

$\theta=\frac{\pi}{2}$



周期π

値域 実数全体

$\tan\theta$は$\theta=\frac{\pi}{2}$が定義されないためグラフは

θが$\frac{\pi}{2}$に近づくにつれて直線$\theta=\frac{\pi}{2}$に

限りなく近づく。

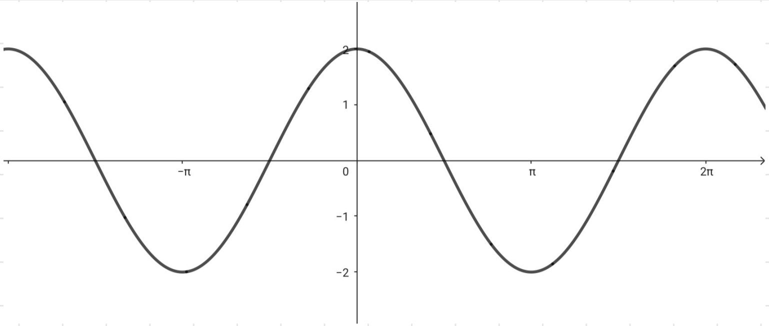
グラフが限りなく近づく直線を漸近線

練習 12

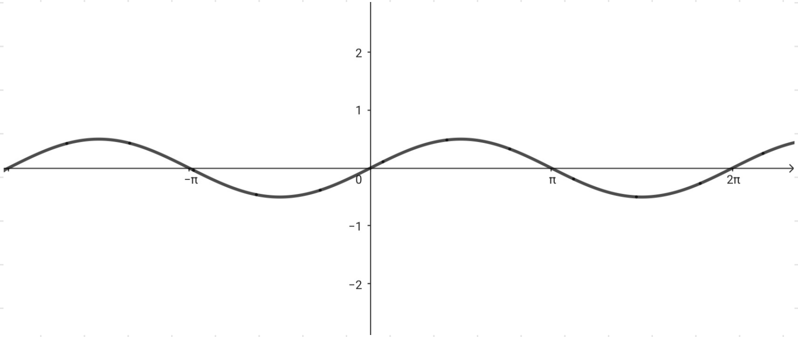
次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=2\cos\theta$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　　(3)　$y=\dfrac{1}{2}\tan\theta$

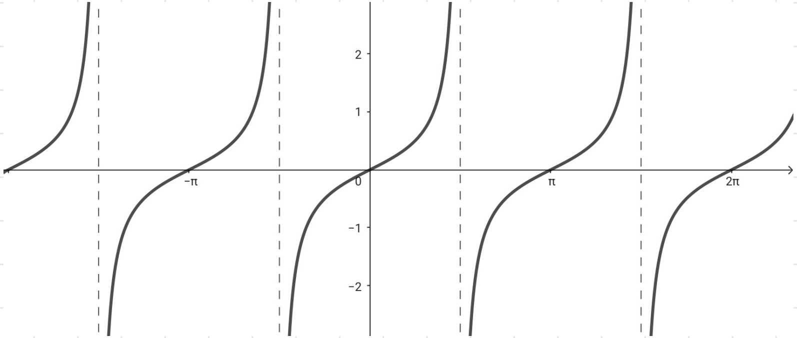
(1)　$y=2\cos\theta$　周期 2π



(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　周期 2π



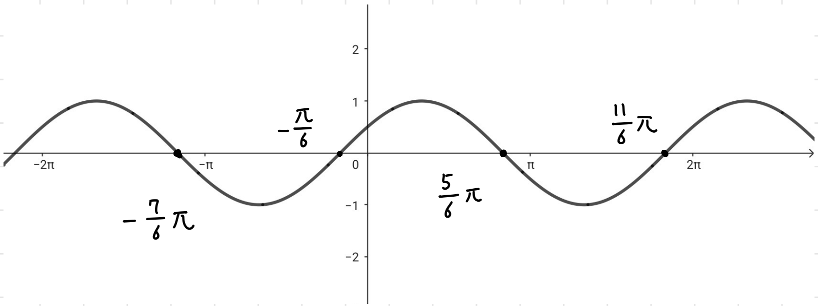
(3)　$y=\dfrac{1}{2}\tan\theta$　周期 π



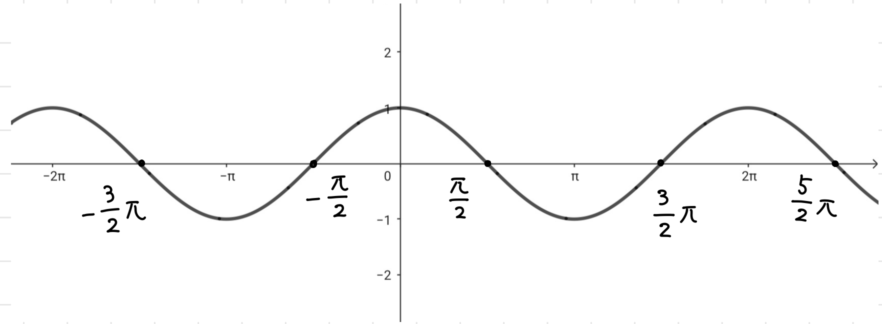
練習 13 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ (3) $y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

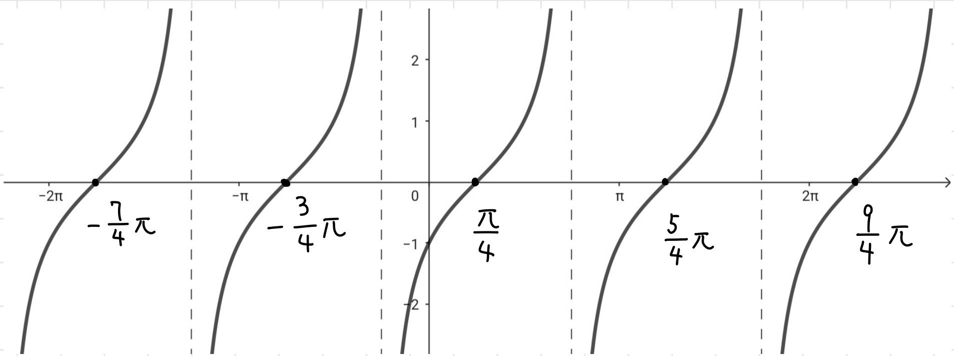
(1) $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 周期 2π



(2) $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ 周期 2π



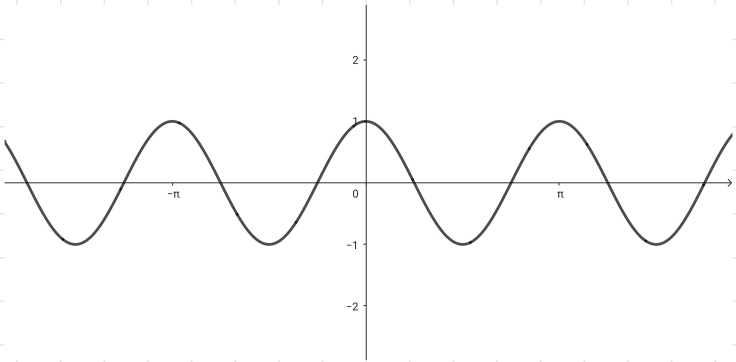
(3) $y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 周期 π



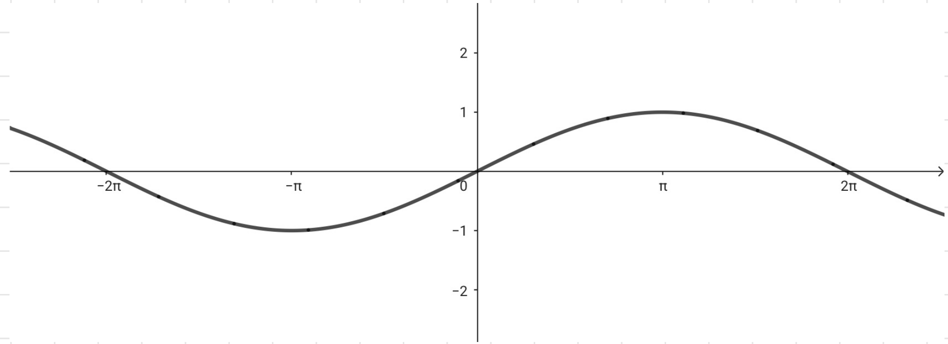
練習 14 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=\cos 2\theta$ (2) $y=\sin\dfrac{\theta}{2}$ (3) $y=\tan 2\theta$

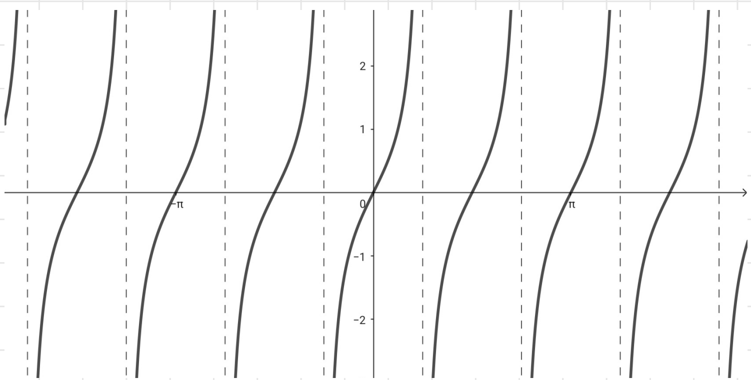
(1) $y=\cos 2\theta$ 周期 π



(2) $y=\sin\dfrac{\theta}{2}$ 周期 4π



(3) $y=\tan 2\theta$ 周期 $\dfrac{\pi}{2}$



k を正の定数とするとき

$\sin k\theta$，$\cos k\theta$ の周期はいずれも $\dfrac{2\pi}{k}$ である。

$\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$ である。

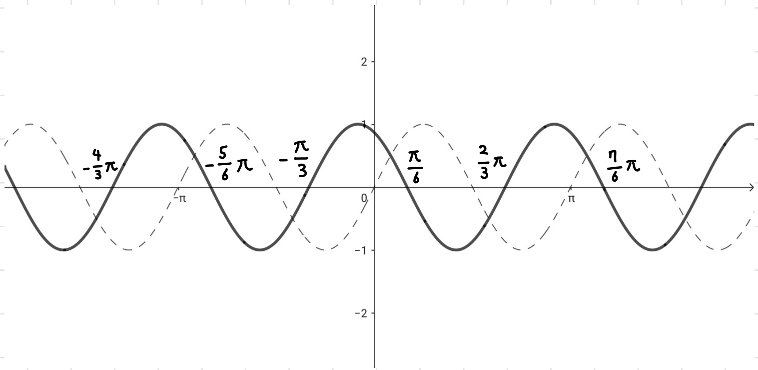
$\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$ から

$\sin k\left(\theta+\dfrac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

練習 15 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y=\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

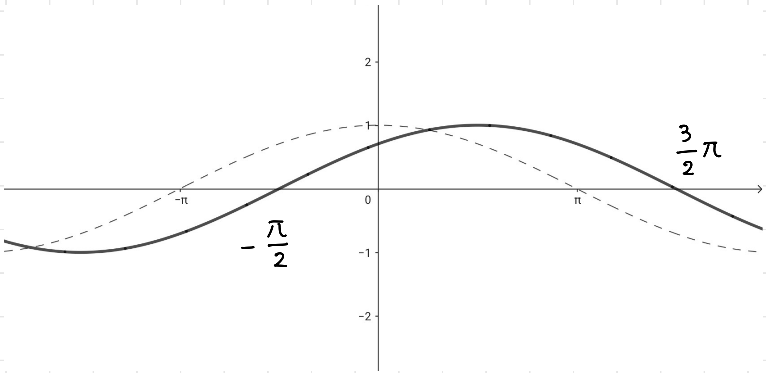
(1) $y=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 周期 π



$y=\sin 2\theta$ のグラフを

θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動

(2) $y=\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 周期 4π



$y=\cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを

θ 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動

三角関数で成り立つ等式

nを整数とする

$$\begin{cases} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

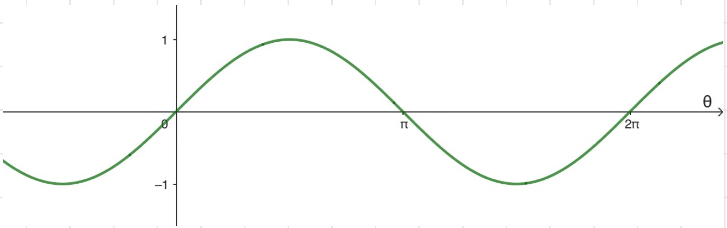
$$\begin{cases} \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \\ \tan(\theta + \pi) = -\tan\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

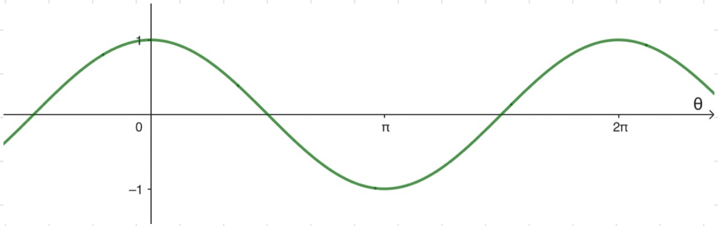
$y = f(x)$ について

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{奇関数} \\ f(-x) = f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{偶関数} \end{cases}$$

$y = \sin\theta$



$y = \cos\theta$



$y = \sin\theta$ は奇関数

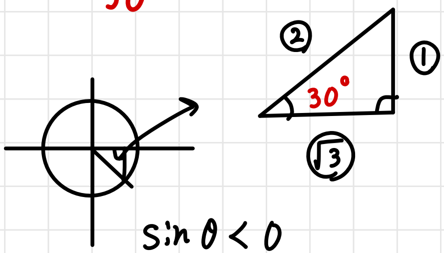
$y = \cos\theta$ は偶関数

練習 16 次の値を求めよ。

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$　　(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

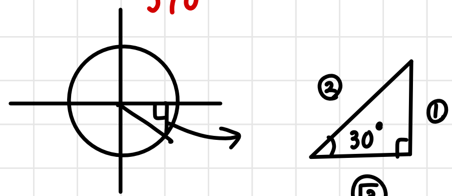
$-30°$



$\sin\theta < 0$

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

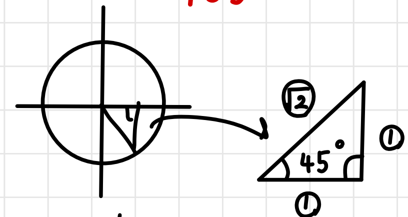
$-390°$



$\cos\theta > 0$

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -1$

$-405°$

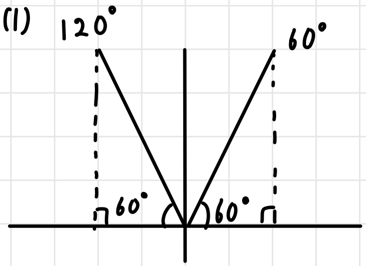


$\tan\theta < 0$

練習 17 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\sin\theta + 1 = 0$

(1)

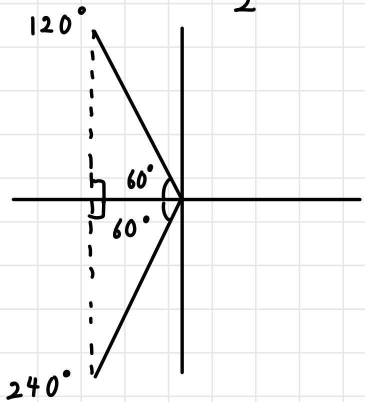


$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

(2)

$$2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

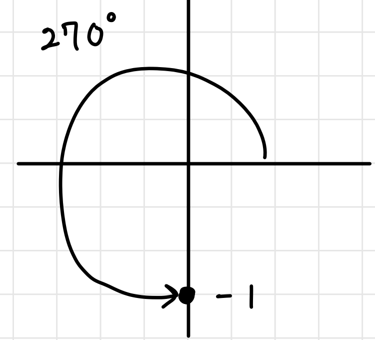


$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

(3)

$$\sin\theta = -1$$

$\sin\theta$ は座標平面では y 座標に対応

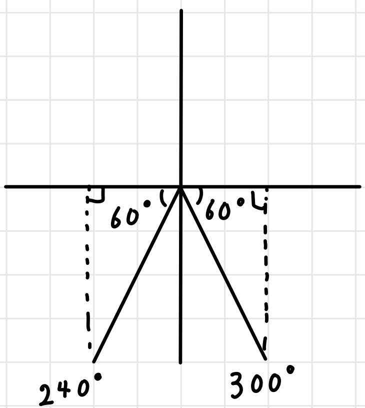


$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$

練習 18　次の方程式を解け。

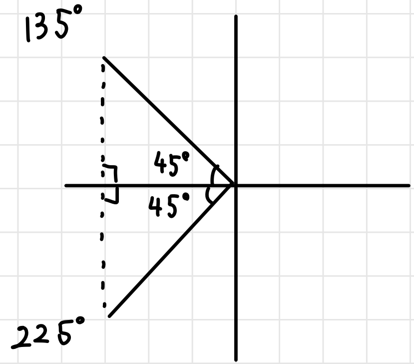
(1)　$2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta = -1$

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\theta = \dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi$　(nは整数)

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

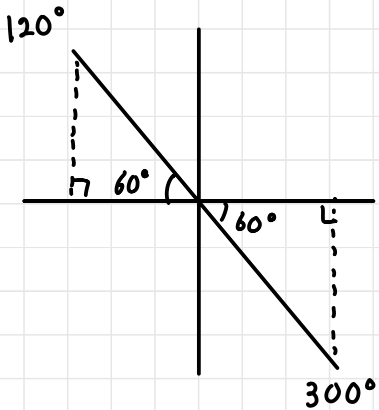


$\theta = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi$　(nは整数)

練習 19

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を解け。また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$



$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

θ の値の範囲に制限がないとき

$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi$ (n は整数)

練習 20 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ ~~(2)~~ $\cancel{\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(1) $\theta - \dfrac{\pi}{6} = t$ とおく

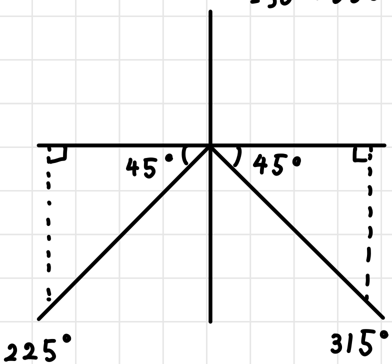
$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$0 - \dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} < 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{11}{6}\pi$

$\sin t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(-\dfrac{\pi}{6} \leqq t < \dfrac{11}{6}\pi\right)$

$-30^\circ \sim 330^\circ$



$t = \dfrac{5}{4}\pi, \ \dfrac{7}{4}\pi$

$\theta - \dfrac{\pi}{6} = t$ より

$\theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{4}\pi \qquad \theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7}{4}\pi$

$\theta = \dfrac{17}{12}\pi \qquad \theta = \dfrac{23}{12}\pi$

$\theta = \dfrac{17}{12}\pi, \ \dfrac{23}{12}\pi$

練習 20 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

~~(1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$~~　　(2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\theta + \frac{\pi}{4} = t$ とおく

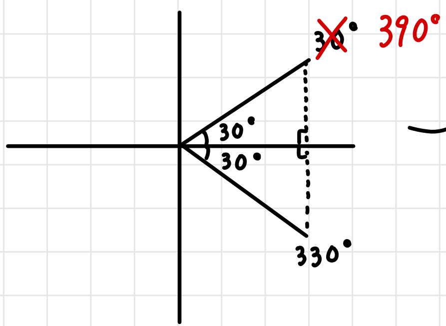
$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$0 + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} \leqq t < \frac{9}{4}\pi$

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq t < \frac{9}{4}\pi\right)$

$45^\circ \sim 405^\circ$



$t = \frac{11}{6}\pi, \ \frac{13}{6}\pi$

$\theta + \frac{\pi}{4} = t$ より

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi$　　$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$

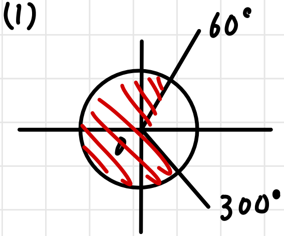
$\theta = \frac{19}{12}\pi$　　$\theta = \frac{23}{12}\pi$

$\theta = \frac{19}{12}\pi, \ \frac{23}{12}\pi$

練習 21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

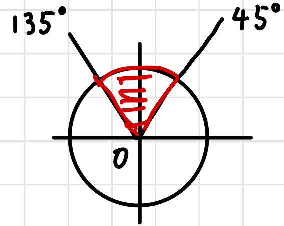
(1) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$　　(2) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\sin\theta < \dfrac{1}{2}$

(1)



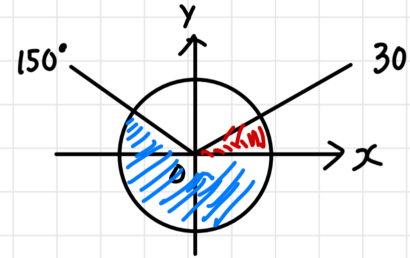
$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

(2)



$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi$

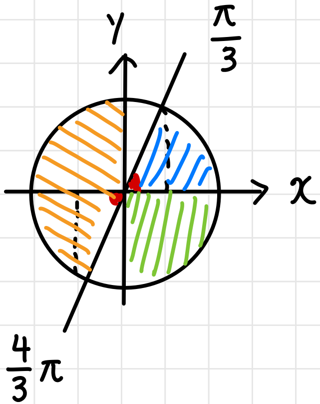
(3)

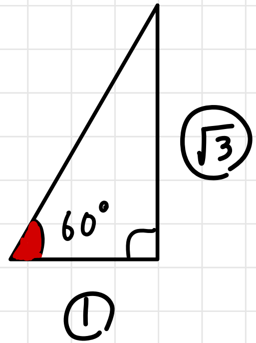


$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$

練習 22

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$ を解け。





$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

練習 23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = \cos^2\theta - \cos\theta$$

の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$\cos\theta = t$ とする.

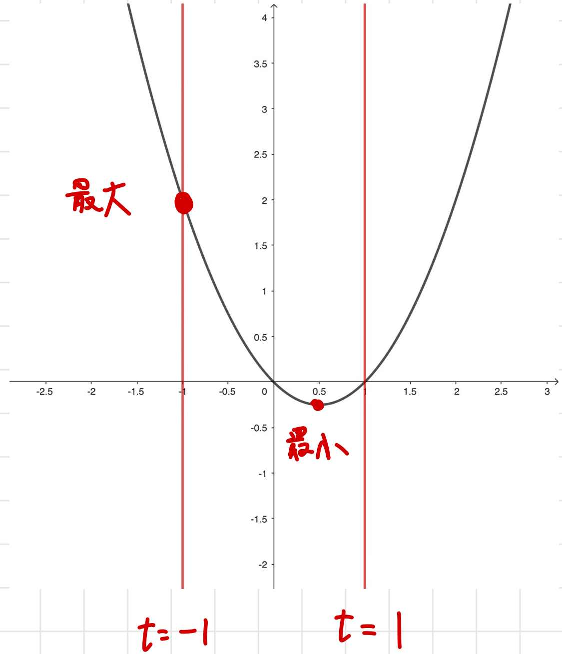
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$

$y = t^2 - t \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$

$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$



$t=1$ のとき, つまり $\theta = \pi$ のとき最大値 2

$t = \frac{1}{2}$ のとき, つまり $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

(sin) (cos)

正弦・余弦の加法定理

1	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

練習 24 加法定理を用いて，$\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

練習 25 $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

練習 26 α の動径が第 2 象限，β の動径が第 1 象限にあり，$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

α が第2象限 → $\sin\alpha > 0$，$\cos\alpha < 0$

β が第1象限 → $\sin\beta > 0$，$\cos\beta > 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha < 0$ より

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ より

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$\sin\beta > 0$ より

$\sin\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$

$\sin\beta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}$

$= \dfrac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= -\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

$= \dfrac{-3\sqrt{5} - 8}{15}$

(tan)

正接の加法定理

5 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

6 $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

練習 27 加法定理を用いて，$\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ=\tan(45^\circ+60^\circ)$$

$$=\frac{\tan(45^\circ+60^\circ)}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 60^\circ}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$=-2-\sqrt{3}$$

練習 28 $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

練習 29 2 直線 $y=2x-1$, $y=\frac{1}{3}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

x 軸と $y=2x-1$ がなす角を α とすると $\tan\alpha = 2$

x 軸と $y=\frac{1}{3}x+1$ がなす角を β とすると $\tan\beta = \frac{1}{3}$

2 直線 $y=2x-1$ と $y=\frac{1}{3}x+1$ がなす角 θ は $\theta = \alpha - \beta$

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$\tan\theta = 1$ なので

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より

$$\underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

2 倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

練習 30 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$　　(3) $\tan 2\alpha$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より

$\sin\alpha > 0$

$\tan\alpha < 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin\alpha > 0$ より

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{2}{3}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ より

$\tan\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(3) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -4\sqrt{5}$

練習 31

$3\alpha=2\alpha+\alpha$ であることを用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　(2) $\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha)\\
&= \sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha\\
&= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\
&= \sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin(1-\sin^2\alpha)\\
&= \sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\
&= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(左辺)＝(右辺)となるので

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos 3\alpha = \cos(\alpha+2\alpha)\\
&= \cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha\\
&= \cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-\sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha\\
&= -3\cos\alpha+4\cos^3\alpha\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(左辺)＝(右辺)となるので

$$\cos 3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

練習 32 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{8}$　　(2) $\sin\frac{3}{8}\pi$　　(3) $\cos\frac{3}{8}\pi$

(1)

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\frac{\pi}{8}>0$

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(2)

$$\sin^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$0<\frac{3}{8}\pi<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\frac{3}{8}\pi>0$

$$\sin\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

(3)

$$\cos^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$0<\frac{3}{8}\pi<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{3}{8}\pi>0$

$$\cos\frac{3}{8}\pi=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

練習 33 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\alpha}{2}$　(2) $\cos\frac{\alpha}{2}$　(3) $\tan\frac{\alpha}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ なので

$\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, $\tan\frac{\alpha}{2}>0$

(1)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}=\frac{9}{10}$$

$\sin\frac{\alpha}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

(2)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}$$

$\cos\frac{\alpha}{2}>0$ より

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(3)

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\tan\frac{\alpha}{2}>0$ より

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=3$$

練習 34 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$ (2) $\cos 2\theta + \sin\theta > 1$

(1)

$1 - 2\sin^2\theta + \sin\theta = 1$

$-2\sin^2\theta + \sin\theta + 1 = 1$

$-2\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

$-\sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

$\sin\theta = 0, \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$

(2)

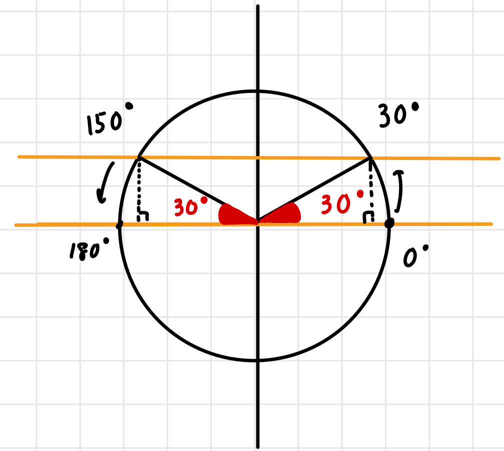
$1 - 2\sin^2\theta + \sin\theta > 1$

$-2\sin^2\theta + \sin\theta > 0$

$2\sin^2\theta - \sin\theta < 0$

$\sin\theta(2\sin\theta - 1) < 0$

$0 < \sin\theta < \frac{1}{2}$

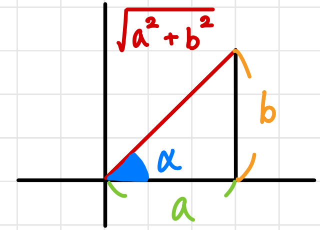


$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$

三角関数の合成

$$\boxed{a}\sin\theta+\boxed{b}\cos\theta=\underline{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin(\theta+\underline{\alpha})$$

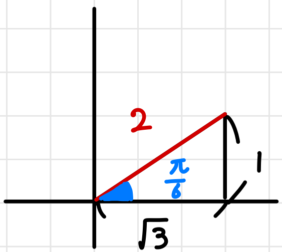
ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



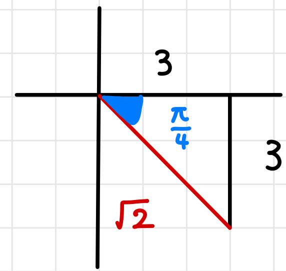
練習 35　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

(1)



(2)



$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

練習 36 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より

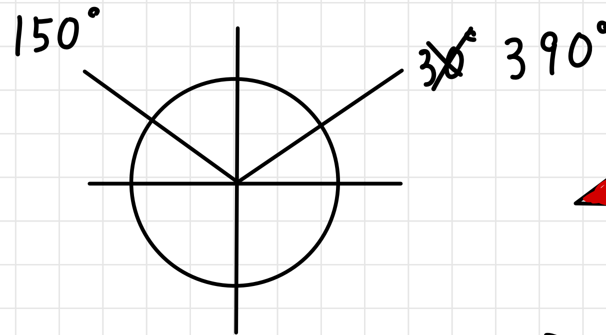
$\frac{\pi}{3} \leqq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$

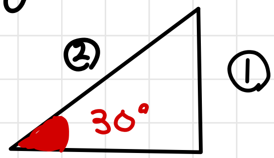
$x + \frac{\pi}{3} = t$ とすると

$\sin t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{7}{3}\pi\right)$

$\sin t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \leqq t < \frac{7}{3}\pi\right)$

$(60^\circ \sim 420^\circ)$





$t = 150^\circ, 390^\circ \rightarrow t = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$

$x + \frac{\pi}{3} = t$ より

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{6}\pi \rightarrow x = \frac{11}{6}\pi$

よって $\underline{x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi}$

練習 37 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$x+\frac{\pi}{6}=t$ とする．

$0\leqq x<2\pi$ より $\frac{\pi}{6}\leqq x+t<\frac{13}{6}\pi$

$y=\sin t \quad \left(\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{13}{6}\pi\right)$

$\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{13}{6}\pi$ より $-1\leqq \sin t\leqq 1$

つまり，$\sin t=1$ のとき最大値 2

$\sin t=-1$ のとき最小値 -2

また，$\sin t=1$ のとき $t=\frac{\pi}{2}$

$x+\frac{\pi}{6}=t$ より

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ $\quad x=\frac{\pi}{3}$

$\sin t=-1$ のとき $t=\frac{3}{2}\pi$

$x+\frac{\pi}{6}=t$ より

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$ $\quad x=\frac{4}{3}\pi$

したがって

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 2

$x=\frac{4}{3}\pi$ のとき最小値 -2