

數B

數列



数列… 数を1列に並べたもの

項 … 数列における各数（1番目の項を初項、n番目の項を第n項）

1, 4, 9, 16 ...

初項 第2項 第3項 第4項

数列を一般的に表すには

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ (a_1 が初項, a_n が第n項)

また、第n項を数列の一般項という、

$\{a_n\}$ と数列を略記することもある。

1, 4, 9, 16,

①

練習
2

一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について、初項から第4項までを求めるよ。

(1) $a_n = 2n - 1$

(2) $a_n = n(n+1)$

(3) $a_n = 2^n$

練習
1

上の数列①の第2項と第4項をいえ。また、第5項を求めよ。

第2項 4

第4項 16

第5項 25

	a_1	a_2	a_3	a_4
(1)	1	3	5	7
(2)	2	6	12	20
(3)	2	4	8	16

例
2

(1) -1 と 1 が交互に並ぶ数列 $-1, 1, -1, 1, \dots$ の一般項を a_n として n の式で表すと $a_n = (-1)^n$

(2) 分子には自然数, 分母には分子より 1 大きい数が順に現れる

分数の数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ の一般項を a_n として n の式で表すと $a_n = \frac{n}{n+1}$

終

練習
3

次のような数列の一般項 a_n を, n の式で表せ。

(1) 偶数 $2, 4, 6, 8, \dots$ の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2, 4, -6, 8, \dots$$

(2) 分子には奇数, 分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$$

(1) -1 と 1 が交互に並ぶ数列と偶数の積

$$(-1)^n$$

$$2n$$

$$\underline{\underline{a_n = (-1)^n \cdot 2n}}$$

(2) 分子は奇数, 分母は 2 の累乗

$$2n-1$$

$$2^n$$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{2n-1}{2^n}}}$$

* 等差数列

偶数数列 $2, 4, 6, 8, \dots$ や奇数数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ のように各2項間の差が常に一定となつてゐる数列

初項に一定の数 d を次々に足して得られる数列

その一定の数 d を公差 という。

練習 4 次のような等差数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項 1, 公差 5

(2) 初項 10, 公差 -4

(1) $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 11, a_4 = 16$

(2) $a_1 = 10, a_2 = 6, a_3 = 2, a_4 = -2$

練習 5 次の等差数列の公差を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

5

(1) 1, 5, 9, □, □, (2) □, 5, 2, □, □,

(1) 公差 4

1, 5, 9, 13, 17

(2) 公差 -3

8, 5, 2, -1, -4

等差数列の一般項

初項 a_1 , 公差 d の等差数列の一般項 $\{a_n\}$ は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- 練習 6 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5, 公差 4

(2) 初項 10, 公差 -5

(1) $a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$

$$a_n = 4n + 1$$

$$a_{10} = 4 \times 10 + 1 = 41$$

(2) $a_n = 10 + (n-1) \cdot (-5)$

$$a_n = -5n + 15$$

$$a_{10} = -5 \times 10 + 15 = -35$$

- 練習 7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 4 項が 15, 第 8 項が 27 (2) 第 5 項が 20, 第 10 項が 0

(1) $a_4 = 15, a_8 = 27$ より

$$a_4 = a_1 + 3d = 15 \quad \cdots ①$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 27 \quad \cdots ②$$

①②より $a_1 = 6, d = 3$

$$\underline{\underline{a_n = 3n + 3}},$$

(2) $a_5 = 20, a_{10} = 0$ より

$$a_5 = a_1 + 4d = 20 \quad \cdots ①$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 0 \quad \cdots ②$$

①②より $a_1 = 36, d = -4$

$$\underline{\underline{a_n = -4n + 40}},$$

等差数列の性質

等差数列は初項 a_1 に公差 d を次々に足して得られる数列
となり合う2項間の差は常に一定

$$a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d$$

練習
8 一般項が $a_n = 2n + 5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを
示せ。また、初項と公差を求めよ。

等差数列であるためには

$$a_n = 2n + 5$$

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 7$$

$$a_{n+1} - a_n = (2n + 7) - (2n + 5) = 2$$

$$a_n = 2n + 5 \text{ で } \quad$$

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

初項 7, 公差 2

等差中項

数列 a, b, c が等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$

練習 9 次の数列が等差数列であるとき、 x の値を求めよ。

$$(1) \quad 3, x, 11, \dots$$

$$(2) \quad \frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$(1) \quad 2x = 3 + 11 \quad (2)$$

$$2x = 14$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\underline{x = 7}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$\underline{x = 8}$$

等差数列の和

等差数列の初項から第n項までの和を S_n とする

① 初項 a , 項数 n , 末項(第n項) $l \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$

② 初項 a , 項数 n , 公差 $d \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

練習

10

次の和 S を求めよ。

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

$$(1) \frac{1}{2} \times 9 \times (2+10) = 54$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 15 \times \{2 \times 10 + (15-1) \times (-4)\}$$

$$= -270$$

練習

11

初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \times 1 + (n-1) \times 2\}$$

$$S_n = n^2$$

次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) 2, 6, 10, ..., 74

(2) 102, 96, 90, ..., 6

(1) 一般項 a_n は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n - 2$$

で

$$4n - 2 = 74$$

$$n = 19$$

求める和は初項2, 公差4, 項数19の等差数列の和

$$S = \frac{1}{2} \times 19 \times \{2 \times 2 + (19-1) \times 4\}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} 722$$

(2) 一般項 a_n は

$$a_n = 102 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$a_n = -6n + 108$$

で

$$-6n + 108 = 6$$

$$n = 17$$

求める和は初項102, 公差-6, 項数17の等差数列の和

$$S = \frac{1}{2} \times 17 \times (102 + 6)$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} 918$$

・自然数の和 $\rightarrow 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

・奇数の和 $\rightarrow 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

・偶数の和 $\rightarrow 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

練習

13

次の和を求めよ。

(1) 1から100までのすべての自然数の和 $1+2+3+\cdots+100$

(2) 1から55までのすべての奇数の和 $1+3+5+\cdots+55$

$$\begin{aligned}(1) \quad & \frac{1}{2} \times 100 \times (100+1) \\&= 5050\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & a_n = 2n-1 \\& 2n-1=55 \\& n=28\end{aligned}$$

$$\underline{(28)^2 = 784}$$

練習

14

初項が100、公差が-7である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また、その和を求めよ。

(1) 一般項は

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n-1) \cdot (-7) \\&= -7n + 107\end{aligned}$$

$$-7n + 107 < 0$$

$$-7n < -107$$

$$n > \frac{107}{7} = 15.2\cdots$$

(2)

第15項までの和が最大

$$\frac{1}{2} \times 15 \times \left\{ 2 \times 100 + (15-1) \times (-7) \right\}$$

$$= \underline{\underline{765}}$$

第16項が初めて負の数になる

等比数列

となり合う2項間の比が常に一定になっている数列

初項に一定の数を次々にかけて得られる数列

その一定の数を公比という

練習
15

次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項 1, 公比 5

(2) 初項 -3 , 公比 $-\frac{1}{3}$

(1) 1, 5, 25, 125

(2) $-3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$

練習
16

次の等比数列の公比を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

16

(1) 1, -2, 4, □,

(2) □, 8, 4, □,

(1) 公比は -2 , 1, -2, 4, 8

(2) 公比は $\frac{1}{2}$ 16, 8, 4, 2

等比数列の一般項

初項 a_1 , 公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

練習
17

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第 5 項を求めよ。

- (1) 初項 2, 公比 3 (2) 初項 1, 公比 -3
(3) 初項 2, 公比 2 (4) 初項 -3, 公比 $\frac{1}{2}$

$$(1) a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad a_5 = 162$$

$$(2) a_n = (-3)^{n-1} \quad a_5 = 81$$

$$(3) a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad a_5 = 32$$

$$(4) a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a_5 = -\frac{3}{16}$$

練習
18

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) 1, -2, 4, -8, (2) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$
(3) -5, 5, -5, 5, (4) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

$$(1) \text{初項 } 1, \text{ 公比 } -2 \quad (2) \text{初項 } \frac{3}{2}, \text{ 公比 } \frac{1}{2}$$

$$a_n = (-2)^{n-1}$$
$$a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(3) \text{初項 } -5, \text{ 公比 } -1 \quad (4) \text{初項 } \sqrt{2}, \text{ 公比 } \sqrt{2}$$

$$a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$$
$$a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$
$$= (\sqrt{2})^n$$

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第2項が 6, 第4項が 54

(2) 第5項が -9, 第7項が -27

(1) 等比数列の初項を a , 公比を r とすると等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$ 第2項が 6 $\rightarrow a_2 = 6$ ①)

$$a_2 = a \cdot r^{2-1} = ar = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

第4項が 54 $\rightarrow a_4 = 54$ ②)

$$a_4 = a \cdot r^{4-1} = ar^3 = 54 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②) に代入すると ① ②) $r = 3$ のとき

$$6r^2 = 54$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

$$a = 2$$

$$r = -3 \text{ のとき}$$

$$a = -2$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ または } a_n = (-2) \cdot (-3)^{n-1}$$

(2) 等比数列の初項を a , 公比を r とすると等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$ 第5項が -9 $\rightarrow a_5 = -9$ ③)

$$a_5 = a \cdot r^{5-1} = ar^4 = -9 \quad \dots \textcircled{3}$$

第7項が -27 $\rightarrow a_7 = -27$ ④)

$$a_7 = a \cdot r^{7-1} = ar^6 = -27 \quad \dots \textcircled{4}$$

①と③) に代入すると ① ③) $r = \sqrt{3}$ のとき

$$-9r^2 = -27$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \pm \sqrt{3}$$

$$a = -1$$

$$r = -\sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$a = -1$$

$$\underline{\underline{a_n = -(\sqrt{3})^{n-1} \text{ または } a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}}}$$

・等比数列の性質

等比数列は初項 a_1 に公比 r を次々にかけて得られる数列
となり合う2項の比が一定。

$$a_{n+1} = r a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

・等比中項

a, b, c が 0 でないとき数列 a, b, c が等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = ac$

練習
20

数列 $3, x, 9, \dots$ が等比数列であるとき、 x の値を求めよ。

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm \sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

等比数列の和

初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$r \neq 1 \text{ のとき } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (|r| < 1) \quad \text{または} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (|r| > 1)$$

$$r=1 \text{ のとき } S_n = n a$$

練習
21

次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$(1) \quad 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

$$(2) \quad 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, -\frac{2}{3^3}, \dots$$

(1) 初項 1, 公比 2

$$S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$\underline{\underline{S_n = 2^n - 1}}$$

(2) 初項 2, 公比 $-\frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{2 \cdot \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)}$$

$$\underline{\underline{S_n = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}}}$$

練習
22

初項から第 3 項までの和が 7, 第 3 項から第 5 項までの和が 28 である

等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

等比数列の一般項は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 7 \dots ①$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 \dots ②$$

②より $\underbrace{r^2(a+ar+ar^2)}_{①} = 28$

$$7r^2 = 28$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

$$r=2 \text{ のとき } a=1$$

$$r=-2 \text{ のとき } a=\frac{7}{3}$$

1～nまでの自然数の2乗の和

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1～nまでの自然数の3乗の和

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

練習

24

次の和を求めよ。

$$(1) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

$$(2) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$$

$$(1) \frac{1}{6} \times 20 \times (20+1) \times (2 \times 20+1)$$

$$= 2870$$

$$(2) \left\{ \frac{1}{2} \times 15 \times (15+1) \right\}^2$$

$$= 14400$$

和の記号Σ(シグマ)

数列 $\{a_n\}$ について初項から第n項までの和を第k項 a_k と和の記号Σを用いて

$\sum_{k=1}^n a_k$ と表し

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$\sum_{k=0}^0 a_k$ は第0項～第0項までの和

練習 25 次の(1)～(3)の式を例 10 のような和の形で書け。(4), (5)の式を和の記号Σを用いて書け。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

$$(2) \sum_{k=3}^8 2^{k-1}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$(4) 2+3+4+5+6$$

$$(5) 3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$$

$$(1) 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

$$(2) 4+8+16+32+64+128$$

$$(3) \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$(4) \sum_{k=2}^6 k \quad (5) \sum_{k=2}^7 (2k-1)^2$$

練習 26 次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n 5^{k-1}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$(1) \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

$$(2) \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

自然数に関する和の公式

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n c = nc \quad (c \text{ は定数})$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\textcircled{4} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

和の記号 Σ の性質

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=1}^n P a_k = P \sum_{k=1}^n a_k$$

練習

27

次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2$

(2) $\sum_{k=1}^{50} k$

(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2$

(4) $\sum_{k=1}^7 k^3$

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \times 2 = \underline{30}$

(2) $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \times 50 \times (50+1) = \underline{1275}$

(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \times 12 \times (12+1) \times (2 \times 12 + 1) = \underline{650}$

(4) $\sum_{k=1}^7 k^3 = \left\{ \frac{1}{2} \times 7 \times (7+1) \right\}^2 = \underline{784}$

練習
28

次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n (4k-5)$

(2) $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4)$

(3) $\sum_{k=1}^n (k^3 + k)$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k$

(1) $\sum_{k=1}^n (4k-5) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 = 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 5n = \underline{2n^2 - 3n}$

(2) $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4$
 $= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 4n$

$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) - \frac{7}{2} n(n+1) + \frac{8}{2} n$
 $= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \}$

$= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2) = n(n^2 - 2n + 1) = \underline{n(n-1)^2}$

(3) $\sum_{k=1}^n (k^3 + k) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} n(n+1)$
 $= \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2 \}$
 $= \frac{1}{4} n(n+1) (n^2 + n + 2)$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \} = \underline{n(n-1)}$

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + \frac{2}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1) \left\{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \right\} \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1) (n^2 + 5n + 6) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)
 \end{aligned}$$

階差数列

$a_{n+1} - a_n = b_n$ のように数列 $\{a_n\}$ のとなり合う 2 項間の差を項とする数列 $\{b_n\}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

⋮	a_n	1	3	7	13	21	⋮
	b_n	2	4	6	8	⋮	

左表より階差数列 $\{b_n\}$ は
初項 2 公差 2 の等差数列 $b_n = 2n$

練習 階差数列を考えて、次の数列の第 6 項、第 7 項を求めよ。

30

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

a_n	1	2	5	10	17	26	37
b_n	1	3	5	7	9	11	

第6項は 26

第7項は 37

(階差数列は $2n-1$)

階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$n=1$ のときについても a_n が成立するか確認せよ。

練習 31 階差数列を利用して、次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) 1, 2, 4, 7, 11, (2) 2, 3, 5, 9, 17,

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)	$\begin{array}{c ccccc} a_n & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 \dots \\ b_n & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$
-----	--

表より $b_n = n$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2} \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ のとき } \frac{1-1+2}{2} = 1 \text{ で成立}$$

$$\therefore a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

(2)	$\begin{array}{c cccccc} a_n & 2 & 3 & 5 & 9 & 17 \dots \\ b_n & 1 & 2 & 4 & 8 & \dots \end{array}$
-----	---

$$\text{表より } b_n = 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} : 2 + \frac{(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ のとき } 2^0 + 1 = 2 \text{ で成立}$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1} + 1$$

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

$$\text{初項 } a_1 = S_1,$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1}$$

練習
32

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= (n^2 - n) - (n^2 - 2n + 1) \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$2 \cdot 1 - 2 = 0$$

∴ $a_n = 2n - 2$

練習
33 恒等式 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ を利用して、和

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
 を求めよ。

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{2n}{2n+1}}{\underline{\quad}} = \frac{n}{2n+1}$$

練習
34 次の和 S を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \\ -3S &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \end{aligned}$$

$$-2S = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + \dots + 1 \cdot 3^{n-1} - n \cdot 3^n$$

$$-2S = \frac{(3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^n$$

$$-2S = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2n \cdot 3^n}{2}$$

$$-2S = \frac{(1-2n) \cdot 3^n - 1}{2}$$

$$S = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$$

漸化式

数列において、前の項との関係を表す式。

$$\because a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdots \textcircled{1}$$

①において a_1 がわかれれば a_2 がわかる。 a_2 がわかれれば a_3 がわかる

$n = 1, 2, 3, \dots$ において ① は成立

練習
36

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

- (1) $a_1 = 100, a_{n+1} = a_n - 5$ (2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$

$$(1) a_2 = a_1 - 5 = 95$$

$$a_3 = a_2 - 5 = 90$$

$$a_4 = a_3 - 5 = 85$$

$$a_5 = a_4 - 5 = 80$$

$$(2) a_2 = 3a_1 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 26$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 80$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 242$$

漸化式で定められる数列の一般項

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = a_n + d$ (等差型)

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = r a_n$ (等比型)

練習
37

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

(1) $a_{n+1} - a_n = 3$

(2) $\{a_n\}$ は初項 1, 公比 2 の等比数列

$\{a_n\}$ は初項 2, 公差 3 の等差数列

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$\underline{\underline{a_n = 2^{n-1}}}$$

$a_n = 3n - 1$,

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3^n$$

$$(2) \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

(1)

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2 + 3^n - 3}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$n = 1 \text{ のとき } \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{3^n - 1}{2}}}$$

$$(2) \quad a_{n+1} - a_n = 2n + 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) \\ &= n^2 - 1 \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ のとき } 1^2 - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{a_n = n^2 - 1}}$$

$a_{n+1} = Pa_n + \alpha$ の漸化式

$a_{n+1} = Pa_n + \alpha$ の一般項 a_n を求める.

手順

① a_{n+1}, a_n を α とおき、 α の値を求める.

② ①より $a_{n+1} - \alpha = P(a_n - \alpha)$ の形にする.

③ $b_n = a_n - \alpha$ とおく. すると $b_{n+1} = Pb_n$ の形ができる.

$b_1 = a_1 - \alpha$ より b_1 が求まり、 b_n は公比 P の等比数列である.

④ b_n の一般項を求める.

⑤ $b_n = a_n - \alpha$ より $a_n = b_n + \alpha$. ⑤より a_n が定まる.

次の□に適する数を求めよ。

$$(1) \quad a_{n+1} = 4a_n - 6 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = 4(a_n - \square)$$

$$(2) \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ を変形すると } a_{n+1} + \square = 2(a_n + \square)$$

$$(3) \quad a_{n+1} = -2a_n + 3 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = -2(a_n - \square)$$

$$(1) \quad d = 4d - 6$$

$$-3d = -6$$

$$d = 2$$

$$a_{n+1} - \underline{2} = 4(a_n - \underline{2})$$

$$(2) \quad d = 2d + 1$$

$$d = -1$$

$$a_{n+1} - (-1) = 2 \left\{ a_n - (-1) \right\}$$

$$a_{n+1} + \underline{1} = 2(a_n + \underline{1})$$

$$(3) \quad d = -2d + 3$$

$$d = 1$$

$$a_{n+1} - \underline{1} = -2(a_n - \underline{1})$$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$$

$$(2) \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

$$(1) \quad d = 4d - 6 \\ d = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$$

$$a_n - 2 = b_n \text{ とする}$$

$$b_{n+1} = 4b_n$$

$$\text{また, } b_1 = a_1 - 2 = 3$$

なので b_n は初項 3、公比 4

の等比数列

$$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_{n-2} = b_n + 1$$

$$a_{n-2} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\underline{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2}$$

$$(2) \quad d = \frac{1}{2}d + 1$$

$$d = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

$$a_{n-2} = b_n + 1$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$b_1 = a_1 - 2 = 1$$

b_n は初項 1、公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n - 2 = b_n + 1$$

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\underline{a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2},$$