

数Ⅲ

微分法



関数 $f(x)$ について極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能

この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数(変化率)といい $f'(a)$ で表す。

微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

練習
1

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について、 $x=1$ における微分係数を定義に従って求

めよ。

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{1+h} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1-(1+h)}{1+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

$$f'(1) = -1$$

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $x=a$ で連続である。

(この逆は成り立たない)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ($x=a$ で連続) - $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ($x=a$ で微分可能)

練習
2

関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

$$f(x) = |x^2 - 1| \text{ について}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(0)$ なので $f(x)$ は $x=1$ で連続。

また、 $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|(|+h)^2 - 1| - |1^2 - 1|}{h} = \frac{|h^2 + 2h|}{h}$

$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h^2 + 2h|}{h} = 2$, $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h^2 + 2h|}{h} = -2$ なので $h \rightarrow 0$ のとき極限はない。

よって関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ は微分可能ではない

・導関数 … 関数 $f(x)$ がある区間で微分可能であるとき、その区間の各値 a に対して
微分係数 $f'(a)$ を支柱させることで得られる関数

$f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

練習
3

導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{2x}$$

$$(2) \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{x}{2x(x+h)} - \frac{x+h}{2x(x+h)} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{-h}{2x(x+h)} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2x(x+h)} = -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

1 $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ ただし, k は定数

2 $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

3 $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

積の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

4 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

【4の証明】 $\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$

ここで, $f(x)$, $g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

また, 微分可能ならば連続であるから $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$

よって $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

終

練習
4 公式4の証明にならって, 公式2を証明せよ。

$$\begin{aligned} \{f(x) + g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = x^5 + 2x^4$$

$$(2) \quad y = 3x^6 - 4x^3$$

$$(3) \quad y = (x+1)(x^3 - 4x)$$

$$(4) \quad y = (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$$

$$(1) \quad y' = 5x^4 + 8x^3$$

$$(2) \quad y' = 18x^5 - 12x^2$$

$$(3) \quad y' = (x+1)'(x^3 - 4x) + (x+1)(x^3 - 4x)'$$

$$= x^3 - 4x + (x+1)(3x^2 - 4)$$

$$= x^3 - 4x + 3x^3 - 4x + 3x^2 - 4$$

$$= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4$$

$$(4) \quad y' = (3x^2 - 2)'(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 2)(x^2 + x + 1)'$$

$$= 6x(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 2)(2x + 1)$$

$$= 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2$$

$$= 12x^3 + 9x^2 + 2x - 2$$

商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$5 \quad \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$6 \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

練習 6 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ と 74 ページの公式 4, 上の公式 5 を用いて, 公式 6 を証明せよ。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\}' = \left\{ f(x) \right\}' \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \right] \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{2x-3}$

(2) $y = \frac{x}{x^2-2}$

(3) $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$

(1) $y' = \frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} = -\frac{2}{(2x-3)^2}$

(2) $y' = \frac{x'(x^2-2) - x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{(x^2-2) - x \cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}$

(3) $y' = \frac{(2x-1)'(x^2+1) - (2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

x^n の導関数

n が整数のとき

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

練習
8

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad y = -\frac{4}{x^2}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{3x^3}$$

$$(1) \quad y = x^{-1}$$

$$(2) \quad y = -4 \cdot x^{-2}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{3} \cdot x^{-3}$$

$$y' = -1 \cdot x^{-2}$$

$$y' = -4 \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot x^{-4}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = 8x^{-3}$$

$$y' = \frac{8}{x^3}$$

$$y' = -\frac{1}{x^4}$$

合成関数の微分法

$y = f(u)$ が u の関数として微分可能, $u = g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする。このとき, 合成関数 $y = f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ は y の式を x で微分するという意味。

$\frac{d}{dx} y$ とも表す。

(例) $y = x^2 + 2x$ について $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

練習

9

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (3x+1)^4$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{(4x+3)^2}$$

$$(1) \quad u = 3x+1 \text{ とすると } y = u^4$$

$$(2) \quad u = 4x+3 \text{ とすると } y = \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \cdot \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3} \cdot \frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 3 = 12u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{2}{u^3} \cdot 4 = -\frac{8}{u^3}$$

$$u = 3x+1 \text{ なので }$$

$$u = 4x+3 \text{ なので }$$

$$\frac{dy}{dx} = 12(3x+1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{(4x+3)^3}$$

関数 $f(x)$, $g(x)$ とその導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ について、次のことを示せ。ただし、 a , b は定数、 n は整数とする。

$$(1) \frac{d}{dx} f(ax+b) = af'(ax+b) \quad (2) \frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$$

$$(1) u = ax+b \text{ と } f(ax+b) = f(u)$$

$$(2) u = g(x) \text{ と } \{g(x)\}^n = u^n$$

$$\frac{d}{dx} f(ax+b) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = \frac{d}{du} u^n \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{du} f(u) = f'(u), \quad \frac{du}{dx} = a \quad \text{たとえ}$$

$$\frac{d}{du} u^n = n u^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \text{ たとえ}$$

$$\frac{d}{dx} f(ax+b) = a f'(u)$$

$$\therefore u = ax+b \text{ たとえ}$$

$$\frac{d}{dx} f(ax+b) = a f'(ax+b)$$

$$\frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = n \cdot u^{n-1} \cdot g'(x)$$

$$\therefore u = g(x) \text{ たとえ}$$

$$\frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = n \{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x)$$

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

練習

11

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (2x^2 + 5)^4$$

$$(2) \quad y = (1 - 2x^2)^3$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$$

$$(1) \quad y' = 4(2x^2 + 5)^3 \cdot (2x^2 + 5)',$$

$$= 4(2x^2 + 5)^3 \cdot 4x$$

$$= 16x(2x^2 + 5)^3$$

$$(2) \quad y' = 3(1 - 2x^2)^2 \cdot (1 - 2x^2)',$$

$$= 3(1 - 2x^2)^2 \cdot (-4x)$$

$$= -12x(1 - 2x^2)^2$$

$$(3) \quad y = (x^2 + 1)^{-3}$$

$$y' = -3(x^2 + 1)^{-4} \cdot (x^2 + 1)'$$

$$= -3(x^2 + 1)^{-4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}$$

逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

練習
12

逆関数の微分法を用いて、関数 $y = \sqrt[6]{x}$ を微分せよ。

$$y = \sqrt[6]{x} \text{ は } x = y^6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y^5} = \frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

x^p の導関数

練習

13

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(1) $y = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(2) $y = x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(3) $y = x^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

練習

14

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

(2) $y = \sqrt{4-x^2}$

(1) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} (x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

(2) $y = (4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} (4-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (4-x^2)'$$

$$= \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

練習
15

関数 $\cos x$ の導関数が、次のようになることを示せ。

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh h - \sin x \sinh h - \cos x}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1) \cos x - \sin x \sinh h}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1) \cos x}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} \sin x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

練習
16

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \cos 2x$

(2) $y = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = \tan^2 x$

(5) $y = \frac{1}{\sin x}$

(6) $y = \cos^2 3x$

(1) $y' = (-\sin 2x) \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$

(2) $y' = \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)' = 3\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

(4) $y' = 2 \tan x \cdot (\tan x)' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$

(5) $y' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(6) $y' = 2 \cos 3x \cdot (\cos 3x)' \cdot (3x)' = -6 \sin 3x \cos 3x$

$= -3 \sin 6x$

練習
17

次の関数を微分せよ。

(1) $y = x \sin x + \cos x$

(2) $y = x \cos x - \sin x$

(1) $y' = x' \sin x + x (\sin x)' + (\cos x)'$

$= \sin x + x \cos x - \sin x$
 $= x \cos x$

(2) $y' = x' \cos x + x (\cos x)' - (\sin x)'$
 $= \cos x - x \sin x - \cos x$
 $= -x \sin x$

対数関数の導関数

1 $(\log x)' = \frac{1}{x}$

2 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$

$\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

自然対数 … $e (= 2.71828182845\dots)$ を底とする対数。自然対数 $\log_e x$ は $\ln x$ と表記する（底の e は省略）

練習

18

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log 3x$

(2) $y = \log_2(4x - 1)$

(3) $y = \log(x^2 + 1)$

(4) $y = x \log x - x$

$$(1) y' = \frac{(3x)'}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$$(2) y' = \frac{(4x-1)'}{(4x-1)\log 2} = \frac{4}{(4x-1)\log 2}$$

$$(3) y' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}(4) y' &= x' \log x + x (\log x)' - x' \\ &= \log x\end{aligned}$$

絶対値を含む対数関数の導関数

3 $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$

4 $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$

5 $\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

練習
19

$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$ であることを示せ。ただし、 a は 1 でない正の定数とする。

$x > 0$ のとき

$$(\log_a|x|)' = \frac{(x)'}{x \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

$x < 0$ のとき

$$(\log_a|x|)' = \frac{(-x)'}{-x \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

よって $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$

練習
20

次の関数を微分せよ。

- (1) $y = \log|3x+2|$ (2) $y = \log|\sin x|$ (3) $y = \log_2|x^2-4|$

(1) $y' = \frac{(3x+2)'}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$

(2) $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

(3) $y' = \frac{(x^2-4)'}{(x^2-4) \log 2} = \frac{2x}{(x^2-4) \log 2}$

$\log|y|$ の導関数を利用して、次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$(2) \quad y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$$

(1)

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \log \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2} \right|$$

$$\log|y| = \log|(x+1)^3| - \log|x-1| - \log|(x+2)^2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{-6}{(x+1)(x-1)(x+2)} \times \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^2(x+2)^3}$$

(2)

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \log \left| \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} \right|$$

$$\log|y| = \log|\sqrt{x+2}| - \log|x+1|$$

$$\log|y| = \frac{1}{2} \log|x+2| - \log|x+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-(x+3)}{2(x+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{-(x+3)}{2(x+1)(x+2)} \times \frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)}$$

$$y' = \frac{-(x+3)\sqrt{x+2}}{2(x+1)^2(x+2)} = \frac{-(x+3)}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$$

x^α の導関数

α が実数のとき

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

練習
22

上の公式を証明せよ。

$x^\alpha > 0$ より $y = x^\alpha$ について両辺に自然対数をとると

$$\log y = \log x^\alpha$$

$$\log y = \alpha \log x$$

両辺で "微分すると"

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^\alpha$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

指数関数の導関数

1 $(e^x)' = e^x$

2 $(a^x)' = a^x \log a$

練習
23

次の関数を微分せよ。ただし、(6)の a は 1 でない正の定数とする。

(1) $y = e^{2x}$

(2) $y = e^{-x^2}$

(3) $y = 3^x$

(4) $y = 2^{-3x}$

(5) $y = xe^x$

(6) $y = (2x-1)a^x$

$$(1) y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$$

$$(2) y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2x e^{-x^2}$$

$$(3) y' = 3^x \log 3$$

$$(4) y' = 2^{-3x} \log 2 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 2^{-3x} \log 2$$

$$(5) y' = (x)e^x + x(e^x)' = e^x + x e^x = (1+x)e^x$$

$$(6) y' = (2x-1)'a^x + (2x-1) \cdot (a^x)' = 2a^x + (2x-1)a^x \log a = a^x \{ 2 + (2x-1) \log a \}$$

・ⁿ回導関数 … 関数 $y = f(x)$ を n 回 微分して得られる導関数. $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ と表す.

練習
24 次の関数について、第3次までの導関数を求めよ。

$$(1) \quad y = x^3 - 2x + 5 \quad (2) \quad y = \frac{1}{x} \quad (3) \quad y = \cos x$$

$$(4) \quad y = \log x \quad (5) \quad y = e^x \quad (6) \quad y = e^{-2x}$$

$$(1) \quad y' = 3x^2 - 2$$

$$(2) \quad y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(3) \quad y' = -\sin x$$

$$y'' = 6x$$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\cos x$$

$$y''' = 6$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}$$

$$y''' = \sin x$$

$$(4) \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$(5) \quad y' = e^x$$

$$(6) \quad y' = -2e^{-2x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = e^x$$

$$y'' = 4e^{-2x}$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = e^x$$

$$y''' = -8e^{-2x}$$

第n次導関数

・第2次導関数 … 関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が x の関数で微分可能であるとき、さらに微分して得られる導関数

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} f(x) \text{ などで表す。}$$

・第3次導関数 … $f'(x)$ がさらに微分可能であるとき $f''(x)$ を微分して得られる導関数

$$y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3} f(x) \text{ などで表す。}$$

・第n次導関数 … 関数 $y = f(x)$ をn回 微分して得られる導関数 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ などで表す。

練習

次の関数の第n次導関数を求めよ。

25

(1) $y = x^n$

$$(1) \quad y' = n x^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

⋮

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\} x^{n-n} = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

(2) $y = e^{2x}$

$$(2) \quad y' = 2e^{2x}$$

$$y'' = 4e^{2x}$$

⋮

$$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

放物線 $y^2 = -8x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式を y について解け。

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$ であることを示せ。

$$(1) \quad Y = \pm \sqrt{-8x}$$

(2) $y = \sqrt{-8x}$ のとき両辺を x で微分すると

$$y' = \frac{1}{2} (-8x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-8x)' = -\frac{4}{\sqrt{-8x}} = -\frac{4}{y}$$

$y = -\sqrt{-8x}$ のとき両辺を x で微分すると

$$y' = \frac{1}{2} \left\{ (-8x)^{\frac{1}{2}-1} \right\} \cdot (-8x)' = \frac{-4}{-\sqrt{-8x}} = -\frac{4}{y}$$

$$\therefore \text{2} \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$$

次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(2) \quad x^2 - y^2 = 1$$

(1) 両辺を x で微分すると

$$2x + \frac{dy}{dx} y^2 = 0$$

$$2x + \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$2x - \frac{dy}{dx} y^2 = 0$$

$$2x - \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

媒介変数表示(パラメータ)… 曲線上の点 $P(x, y)$ の座標が変数 t によって、 $x = f(t)$ $y = g(t)$ の形で表すこと

媒介変数表示と導関数

$x = f(t)$, $y = g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

練習
28

x の関数 y が、 t を媒介変数として、次の式で表されるとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t

の関数として表せ。

(1) $x = 2t^2$, $y = 2t - 1$

(2) $x = \cos t$, $y = \sin t$

(1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2, \frac{dx}{dt} = 4t \text{ なので}"$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{4t} = \frac{1}{2t}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t, \frac{dx}{dt} = -\sin t \text{ なので}"$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \cdot \frac{1}{-\sin t} = -\frac{1}{\tan t}$$