

数 C

式と曲線



放物線の方程式

放物線 … 平面上で、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡亦
この点 F を放物線の焦点、直線 l を放物線の準線という。

放物線の標準形 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)

- 1 焦点は点 $(p, 0)$ 、準線は直線 $x = -p$
- 2 軸は x 軸、頂点は原点 O
- 3 曲線は x 軸に関して対称

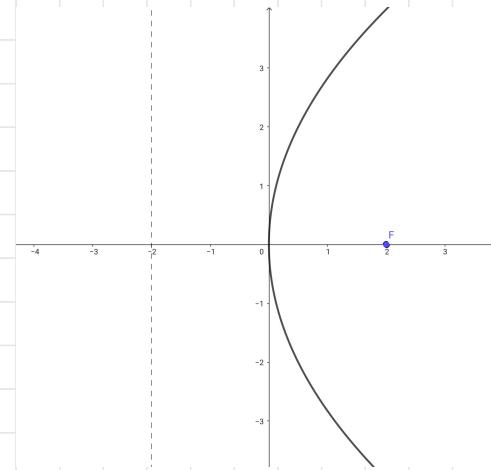
練習
1 次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

(1) $y^2 = 8x$

(2) $y^2 = -4x$

(3) $y^2 = x$

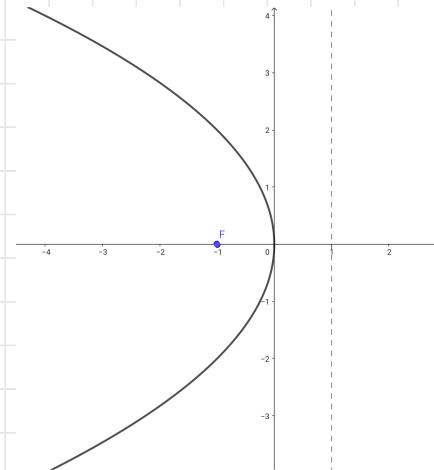
(1)



焦点 $(2, 0)$

準線 $x = -2$

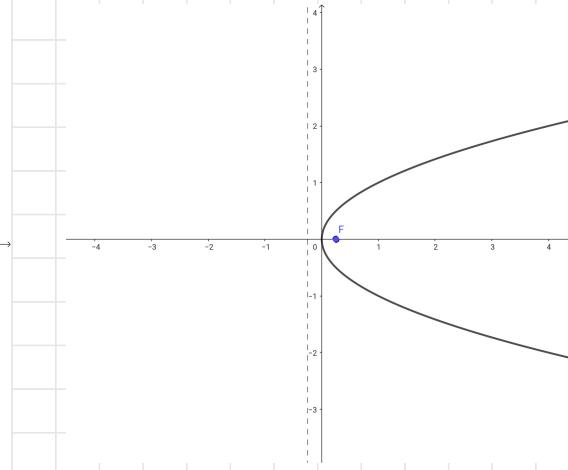
(2)



焦点 $(-1, 0)$

準線 $x = 1$

(3)



焦点 $(\frac{1}{8}, 0)$

準線 $x = -\frac{1}{8}$

焦点が点 $(-2, 0)$ で、準線が直線

$x = 2$ である放物線の方程式を求めよ。

$$y^2 = -8x$$

$$x^2 = 4py \quad (p \neq 0)$$

- 焦点は点 $(0, p)$, 準線は直線 $y = -p$
- 軸は y 軸, 頂点は原点 O
- 曲線は y 軸に関して対称

練習

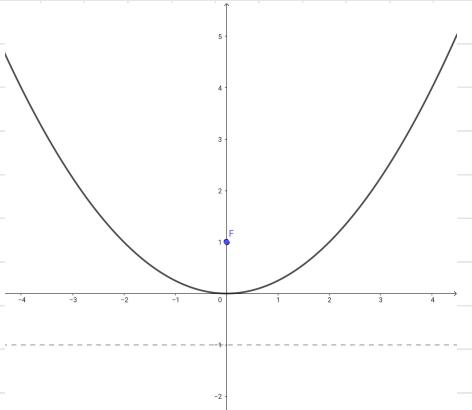
3

次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

$$(1) \quad x^2 = 4y$$

$$(2) \quad y = -2x^2$$

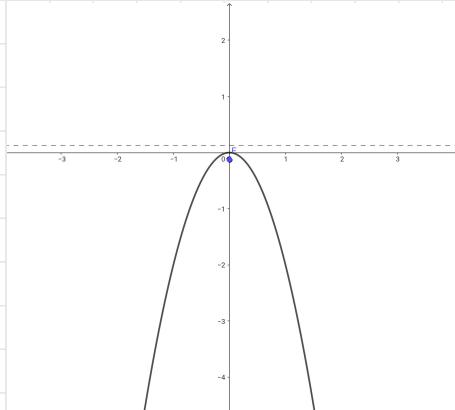
(1)



焦点 $(0, 1)$

準線 $y = -1$

(2)



焦点 $(0, -\frac{1}{8})$

準線 $y = -\frac{1}{8}$

椭円の方程式

椭円…平面上で、2定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡

この2点 F, F' を椭円の焦点

$$\text{椭円の標準形} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

- 1 焦点は 2点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- 2 椭円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2a$
- 3 長軸の長さは $2a$, 短軸の長さは $2b$
- 4 曲線は x 軸, y 軸, 原点Oに関して対称

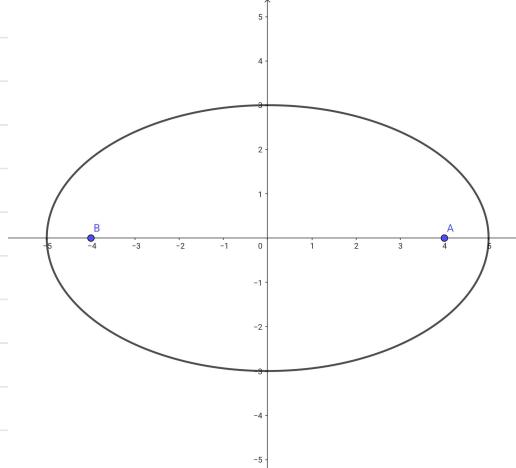
次の楕円の概形をかけ。また、その焦点、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。

$$(1) \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$(2) \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

$$(3) x^2 + 16y^2 = 16$$

(1)

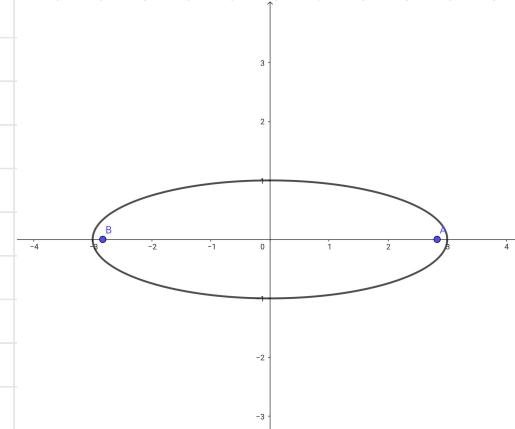


焦点 $(4, 0), (-4, 0)$

長軸 10

短軸 6

(2)

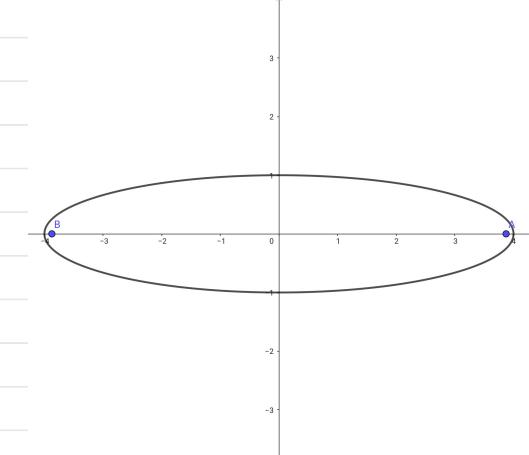


焦点 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

長軸 6

短軸 2

(3)



焦点 $(\sqrt{15}, 0), (-\sqrt{15}, 0)$

長軸 8

短軸 2

2点 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が4である橢円の方程式を求めよ。

求める方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) における

焦点からのキヨリの和について $2a = 4$ より $a = 2$

焦点の座標について $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ であるから $b^2 = 1$

よって求める橤円の方程式は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

楕円の方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)

① 焦点は2点 $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$, $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$

② 楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2b$

③ 長軸の長さは $2b$, 短軸の長さは $2a$

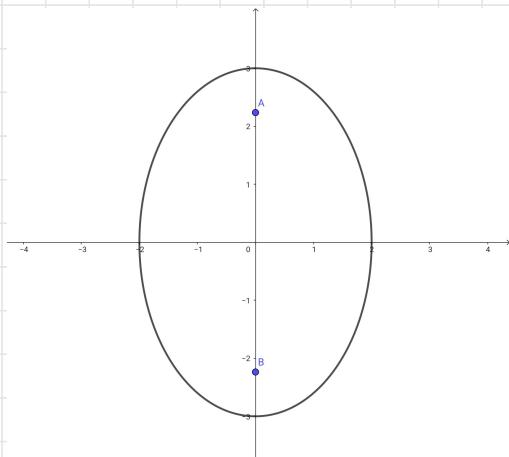
練習
6

次の楕円の概形をかけ。また、その焦点、長軸の長さ、短軸の長さを
求めよ。

$$(1) \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$(2) x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$$

(1)



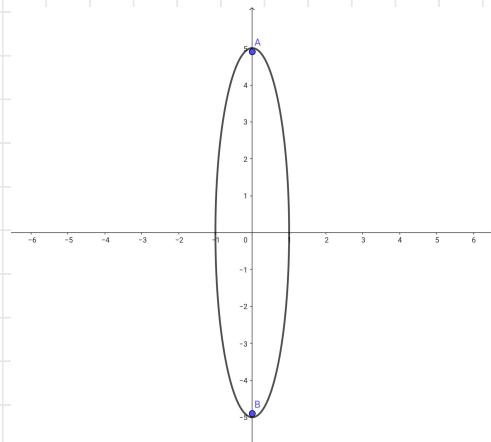
焦点

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

長軸 6

短軸 4

(2)



焦点

$$(0, 2\sqrt{6}), (0, -2\sqrt{6})$$

長軸 10

短軸 2

円 $x^2 + y^2 = 3^2$ を、 x 軸をもとに次のように縮小または拡大して

得られる橢円の方程式を求めよ。

(1) y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍

(1)

円上に点 $Q(s, t)$ をとり Q が移る点 $P(x, y)$ とすると

$$s^2 + t^2 = 3^2 \cdots ①$$

$$x = s, \quad y = \frac{2}{3}t \cdots ②$$

$$\textcircled{2} \text{ より } s = x, \quad t = \frac{3}{2}y \cdots \textcircled{3}$$

③を①に代入 すると

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 3^2$$

$$x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(2)

円上に点 $Q(s, t)$ をとり Q が移る点 $P(x, y)$ とすると

$$s^2 + t^2 = 3^2 \cdots ①$$

$$x = s, \quad y = \frac{4}{3}t \cdots ②$$

$$\textcircled{2} \text{ より } s = x, \quad t = \frac{3}{4}y \cdots \textcircled{3}$$

③を①に代入 すると

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}y\right)^2 = 3^2$$

$$x^2 + \frac{9}{16}y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

座標平面上において、長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 3:4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

点 $P(x, y)$, $A(s, 0)$, $B(0, t)$ とする。

$$AB = 7 \text{ たり} \quad AB^2 = 49$$

$$\therefore AB^2 = (s-0)^2 + (0-t)^2 = s^2 + t^2 = 49 \cdots ①$$

点 P は AB を 3:4 に内分する点なので

$$\left(\frac{4 \cdot s + 3 \cdot 0}{3+4}, \quad \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot t}{3+4} \right) = \left(\frac{4}{7}s, \quad \frac{3}{7}t \right) \text{ なので} \quad x = \frac{4}{7}s, \quad y = \frac{3}{7}t \cdots ②$$

$$② \text{ より} \quad s = \frac{7}{4}x, \quad t = \frac{7}{3}y \cdots ③$$

$$③ \text{ を } ① \text{ に代入} \quad \left(\frac{7}{4}x \right)^2 + \left(\frac{7}{3}y \right)^2 = 49$$

$$\frac{49}{16}x^2 + \frac{49}{9}y^2 = 49$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

よって点 P は本質円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上にある。

逆に、この本質円上のすべての点 P(x, y) は条件をみたす。

したがって、求める軌跡は本質円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

双曲線の方程式

双曲線…平面上で 2 定点 F, F' からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡

この 2 点 F, F' を双曲線の焦点

双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$

- 1 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0), (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$
- 2 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$
- 3 漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$
- 4 曲線は x 軸, y 軸, 原点 O に関して対称

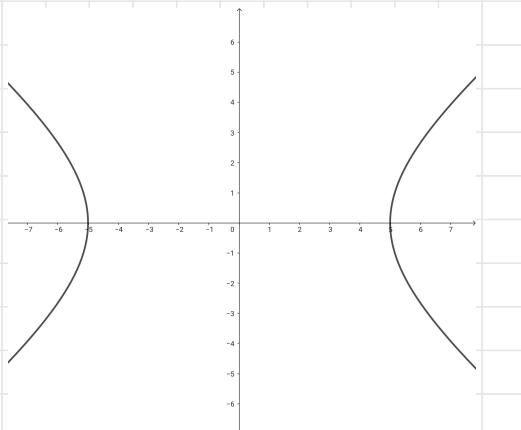
次の双曲線の概形をかけ。また、その焦点、頂点、漸近線を求めよ。

$$(1) \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

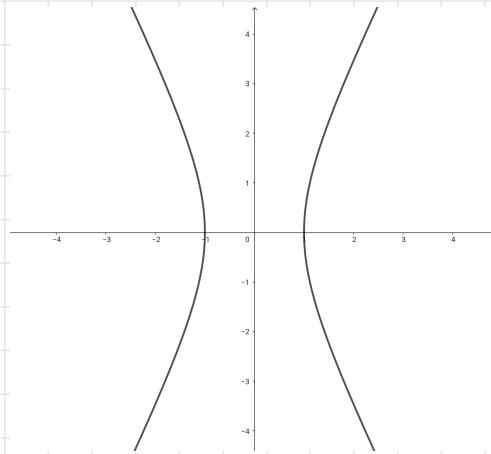
$$(2) x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(3) x^2 - 9y^2 = 9$$

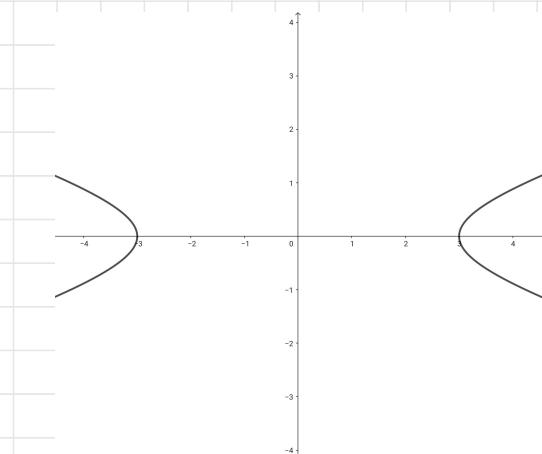
(1)



(2)



(3)



焦点 $(\sqrt{41}, 0), (-\sqrt{41}, 0)$

頂点 $(5, 0), (-5, 0)$

漸近線 $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

焦点 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

頂点 $(1, 0), (-1, 0)$

漸近線 $y = 2x, y = -2x$

焦点 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$

頂点 $(3, 0), (-3, 0)$

漸近線 $y = \frac{1}{3}x, y = -\frac{1}{3}x$

2点(5, 0), (-5, 0)を焦点とし、焦点からの距離の差が8である双曲

線の方程式を求めよ。

求める双曲线の方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) とおく。

焦点からの差について $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

焦点の座標について $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ なので $a = 4 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{4^2 + b^2} = 5$$

$$16 + b^2 = 25$$

$$b^2 = 9$$

$$b > 0 \Leftrightarrow$$

$$b = 3$$

よって $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

- 直角双曲線 …直角に交わる漸近線をもつ双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ の形で表される。
-

練習
11

2点(2, 0), (-2, 0)を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

求める直角双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > 0$)における

焦点の座標について $\sqrt{a^2 + a^2} = 2$ なので

$$2a^2 = 4$$

$$a^2 = 2$$

$$a > 0 \text{ で)}$$

$$a = \sqrt{2}$$

よって $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

焦点が y 軸上にある双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)

① 焦点は 2 点 $(0, \sqrt{a^2 + b^2}), (0, -\sqrt{a^2 + b^2})$

② 顶点は 2 点 $(0, b), (0, -b)$

③ 減近線は 2 直 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$

④ 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2b$

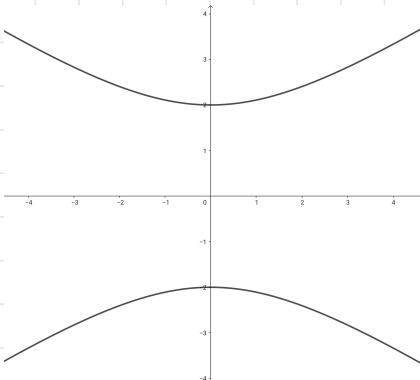
練習
12

次の双曲線の概形をかけ。また、その焦点、頂点、漸近線を求めよ。

$$(1) \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

$$(2) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$$

(1)



焦点

$$(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$$

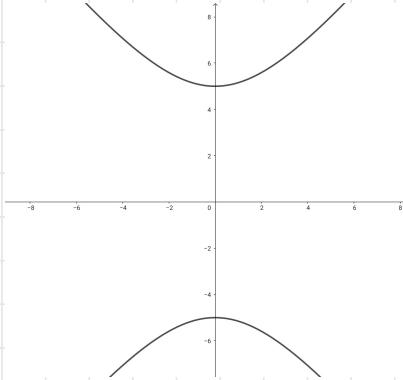
頂点

$$(0, 2), (0, -2)$$

漸近線

$$y = \frac{2}{3}x, y = -\frac{2}{3}x$$

(2)



焦点

$$(0, \sqrt{41}), (0, -\sqrt{41})$$

頂点

$$(0, 5), (0, -5)$$

漸近線

$$y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$$

曲線 $F(x, y) = 0$ の平行移動

曲線 $F(x, y) = 0$ を, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, 移動後の曲線の方程式は

$$F(x-p, y-q) = 0$$

練習
13

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を, x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき, 移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$$\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$$

焦点

$$(\sqrt{3}+3, -2), (-\sqrt{3}+3, -2)$$

練習
14

放物線 $y^2 = 4x$ を, x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$$(y-2)^2 = 4(x+1)$$

焦点

$$(0, 2)$$

次の方程式はどのような図形を表すか。

$$(1) \quad x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$$

$$(2) \quad y^2 + 8y - 16x = 0$$

$$(3) \quad 4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$$

(1)

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + 4(y^2 - 2y) + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + 4\{(y-1)^2 - 1\} + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$$

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ を}$$

x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ

平行移動させた楕円

(2)

$$y^2 + 8y - 16x = 0$$

$$(y+4)^2 - 16 - 16x = 0$$

$$(y+4)^2 = 16(x+1)$$

放物線 $y^2 = 16x$ を

x 軸方向に -1 , y 軸方向に -4 だけ

平行移動させた放物線

(3)

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 4y) = 56$$

$$4\{(x-2)^2 - 4\} - 9\{(y+2)^2 - 4\} = 56$$

$$4(x-2)^2 - 16 - 9(y+2)^2 + 36 = 56$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ を}$$

x 軸方向に 2 , y 軸方向に -2 だけ

平行移動させた楕円

k は定数とする。双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を調べよ。

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2y^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1} \\ y = x + k \quad \dots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 1 \cdot (2k^2 + 4) = 2k^2 - 4 = 2(k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2})$$

②を①に代入

$$x^2 - 2(x+k)^2 = 4$$

$D > 0$ すなわち $k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k$ のとき 2個

$$x^2 - 2(x^2 + 2kx + k^2) = 4$$

$D = 0$ すなわち $k = \pm\sqrt{2}$ のとき 1個

$$x^2 - 2x^2 - 4kx - 2k^2 = 4$$

$D < 0$ すなわち $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ のとき 0個

$$-x^2 - 4kx - 2k^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + 4kx + 2k^2 + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

点 C(4, 0) から放物線 $y^2 = -4x$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

点 C を通る接線は x 軸に垂直でないのでは

$$y = m(x - 4) \cdots ① \text{ とおける。}$$

これを放物線の式に代入すると

$$\{m(x - 4)\}^2 = -4x$$

$$m^2(x^2 - 8x + 16) = -4x$$

$$m^2x^2 + (4 - 8m^2)x + 16m^2 = 0$$

$$m^2x^2 + 2(2 - 4m^2)x + 16m^2 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2 - 4m^2)^2 - 16m^4 = 4 - 16m^2 + 16m^4 - 16m^4 = 4 - 16m^2$$

直線が放物線と接するのは $D = 0$ のときなので

$$4 - 16m^2 = 0 \rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ のとき 接線の方程式は } ① \text{ より } y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ のとき 接線の方程式は } ① \text{ より } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

また、接点の座標は $y = \frac{1}{2}x - 2$ と $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y^2 = -4x$ より

$$(-4, -4), (-4, 4)$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (-4, -4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (-4, 4)$$

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

橢円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

練習
1

次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。

- (1) 放物線 $y^2 = 4x$, $P(1, 2)$ (2) 楕円 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $P(3, 1)$

(1)

$$2y = 2(x+1)$$

$$y = x + 1$$

(2)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

$$x + y = 4$$

点 F(4, 0) からの距離と、直線 $x = 1$ からの距離の比が 2 : 1 である

点 P の軌跡は、F を焦点の 1 つとする双曲線であることを示せ。

点 P を (x, y) とする。

$$PF = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2}$$

点 P から直線 $x = 1$ に垂線を下ろし、その交点を H とすると

$$PH = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x - 1|$$

ここで $PF : PH = 2 : 1$ なので

$$PF^2 : PH^2 = 4 : 1$$

$$(x^2 - 8x + 16 + y^2) : (x^2 - 2x + 1) = 4 : 1$$

$$4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

よって点 P は双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上にある。

逆にこの双曲線上のすべての点 P は条件をみたす。

したがって求める軌跡は双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

・ 媒介変数表示 … 曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が 变数 t によって $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ … ① の形に表される。

变数 t を媒介変数 (パラメータ) という

①から t を消して x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ が得られると、これは曲線 C を表す方程式。

練習
19

次のように媒介変数表示される曲線について、 t を消去して x, y の方
程式を求め、曲線の概形をかけ。

$$(1) \quad x = t + 1, \quad y = t^2 + 4t$$

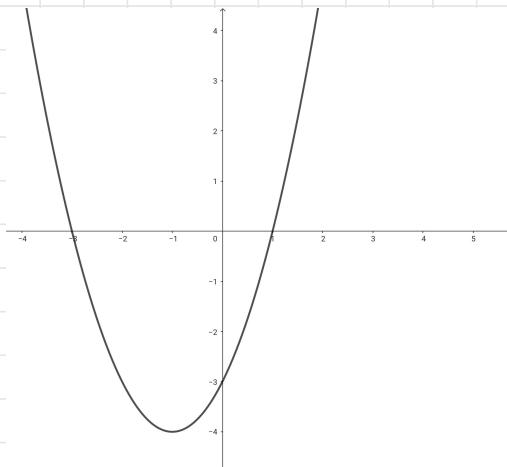
$$(2) \quad x = 2t, \quad y = 2t - t^2$$

(1)

$$x = t + 1 \text{ より } t = x - 1 \text{ なので}$$

$$y = (x-1)^2 + 4(x-1)$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

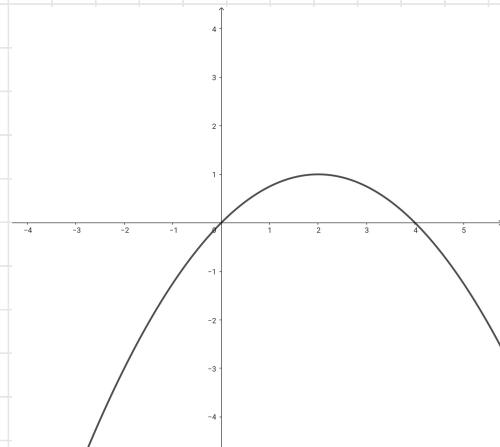


(2)

$$x = 2t \text{ より } t = \frac{x}{2} \text{ なので}$$

$$y = 2 \cdot \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$$



放物線 $y = -x^2 + 4tx + 2t$ の頂点は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

$$y = -(x^2 - 4tx) + 2t$$

$$y = -(x - 2t)^2 - 4t^2 + 2t$$

$$y = -(x - 2t)^2 + 4t^2 + 2t$$

頂点は $(2t, 4t^2 + 2t)$ なので

参数変数表示すると $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 2t \end{cases}$... ①

①から t を消去すると

$$y = 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$y = x^2 + x$$

よって 頂点が動く曲線は 放物線 $y = x^2 + x$

・一般角 θ を用いた媒介変数表示

円 $x^2 + y^2 = r^2$ について $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

橢円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$

は媒介変数表示の一例

練習
21 角 θ を媒介変数として、次の円を表せ。

(1) $x^2 + y^2 = 2^2$

(2) $x^2 + y^2 = 2$

(1)

$$x = 2 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta$$

(2)

$$x = \sqrt{2} \cos \theta$$

$$y = \sqrt{2} \sin \theta$$

練習
22 角 θ を媒介変数として、次の橰円を表せ。

(1) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

(1)

$$x = 3 \cos \theta$$

$$y = 2 \sin \theta$$

(2)

$$x = 4 \cos \theta$$

$$y = 5 \sin \theta$$

θ が変化するとき、点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2\tan \theta\right)$ は双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動くことを示せ。

$$x = \frac{3}{\cos \theta}, y = 2\tan \theta \text{ とすると}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{より}$$

$$1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$1 + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

よって 点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2\tan \theta\right)$ は

双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動く

双曲線 $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ を媒介変数 θ を用いて表せ。

$$x = \frac{5}{\cos \theta}, y = 4\tan \theta$$

媒介変数表示 $x = f(t) + p$, $y = g(t) + q$ で表される曲線は,
 媒介変数表示 $x = f(t)$, $y = g(t)$ で表される曲線を,
 x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

練習
25

次の媒介変数表示は、どのような曲線を表すか。

- (1) $x = 3 \cos \theta + 2$, $y = 3 \sin \theta - 1$
 (2) $x = 3 \cos \theta + 1$, $y = 2 \sin \theta + 3$

(1)

$$\cos \theta = \frac{x-2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{y+1}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ つまり}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

中心 $(2, -1)$, 半径 3 の円

(2)

$$\cos \theta = \frac{x-1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{y-3}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ つまり}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

椭円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

・ サイクロイド “… 円が定直線上をすべることなく回転していくとき、円上の定点Pが描く曲線

#媒介変数表示は $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$

練習
26

サイクロイド $x = 2(\theta - \sin \theta)$, $y = 2(1 - \cos \theta)$ において、 θ が次の値をとったときの点の座標を求めよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (2) $\theta = \pi$ (3) $\theta = \frac{3}{2}\pi$ (4) $\theta = 2\pi$

(1)

$$x = 2\left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$$
$$y = 2(1 - \cos \frac{\pi}{3}) = 1 \quad \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}, 1\right)$$

(2)

$$x = 2(\pi - \sin \pi) = 2\pi$$
$$y = 2(1 - \cos \pi) = 4 \quad (2\pi, 4)$$

(3)

$$x = 2\left(\frac{3}{2}\pi - \sin \frac{3}{2}\pi\right) = 3\pi + 2$$
$$y = 2(1 - \cos \frac{3}{2}\pi) = 2 \quad (3\pi + 2, 2)$$

(4)

$$x = 2(2\pi - \sin 2\pi) = 4\pi$$
$$y = 2(1 - \cos 2\pi) = 0 \quad (4\pi, 0)$$

極座標と極方程式

極座標 … 2つの数の組 (r, θ) , $P(r, \theta)$ と表記する。

直交座標 … これまで用いてきた X 座標と Y 座標の組 (x, y) で表した座標

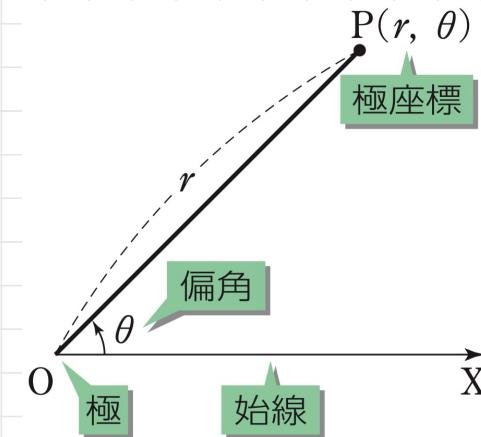
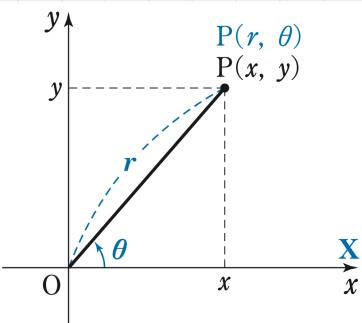
点 P の直交座標 (x, y) , 極座標 (r, θ) とすると以下が成立

1 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

2 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r \neq 0$ のとき

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}$$



極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

$$(1) \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(2) \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(3) (3, \pi)$$

(1)

$$r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ であるから}$$

$$x = r \cos \theta = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$y = r \sin \theta = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

よって点Pの直交座標は

$$(\sqrt{3}, 1)$$

(2)

$$r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ であるから}$$

$$x = r \cos \theta = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1$$

$$y = r \sin \theta = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

よって点Pの直交座標は (1, 1)

(3)

$$r = 3, \theta = \pi \text{ であるから}$$

$$x = r \cos \theta = 3 \cdot \cos \pi = -3$$

$$y = r \sin \theta = 3 \cdot \sin \pi = 0$$

よって点Pの直交座標は (-3, 0)

直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし、偏角 θ の範囲は

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) (2, 2)

(2) (-1, $\sqrt{3}$)

(3) (- $\sqrt{3}$, -1)

(1)

$x = 2, y = 2$ であるから

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{4}$$

よって点Pの極座標の1つは

$$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

(2)

$x = -1, y = \sqrt{3}$ であるから

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

よって点Pの極座標の1つは

$$(2, \frac{2}{3}\pi)$$

(3)

$x = -\sqrt{3}, y = -1$ であるから

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

よって点Pの極座標の1つは

$$(2, \frac{7}{6}\pi)$$

・ **極方程式** … 平面上の曲線が、極座標 (r, θ) の方程式、 $F(r, \theta) = 0$ や $r = f(\theta)$ で表される方程式

練習
29

極座標が $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ である点Aを通り、始線に平行な直線を、極方程式で表せ。

極座標が $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ なり 点Aの直交座標は

$$x = r \cos \theta = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r \sin \theta = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{なり}$$

A(0, 1)

この直線上の点Pの極座標を (r, θ) とすると

$$OP \sin \theta = 1$$

$$r \sin \theta = 1$$

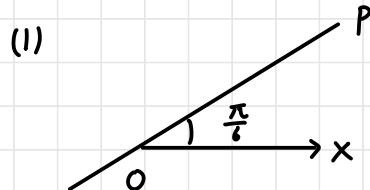
$$r = \frac{1}{\sin \theta}$$

練習
30

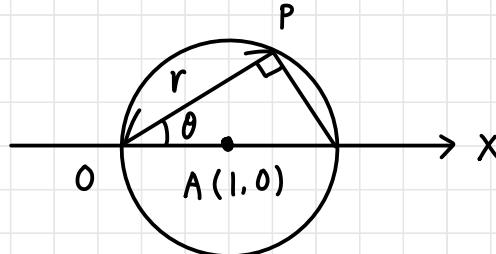
次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$

(2) $r = 2 \cos \theta$



(2)



極座標が $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ である点Aを通り、OAに垂直な直線 ℓ の極方程式は $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$ であることを示せ。

直線 ℓ 上の点Pの極座標を (r, θ) とすると

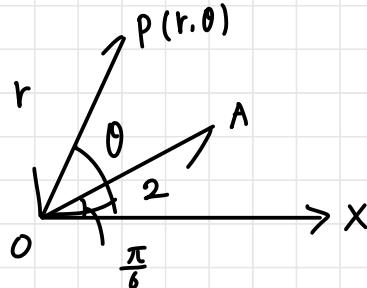
$$OP \cos \angle AOP = OA$$

$$\therefore OP = r, OA = 2$$

$$\cos \angle AOP = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから直線 ℓ の極方程式は

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$$



橭円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ。

橭円上の点P(x, y)の極座標を (r, θ) とすると

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

これらを $x^2 + 2y^2 = 4$ に代入すると

$$r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta = 4$$

$$r^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) = 4$$

$$r^2(1 + \sin^2\theta) = 4$$

$$r^2\left(1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) = 4$$

$$r^2(3 - \cos 2\theta) = 8$$

次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$(1) \quad r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$(2) \quad r = 2 \sin \theta$$

(1)

この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標 (x, y) とすると

$$r \cos \theta = x, r \sin \theta = y \quad \cdots ①$$

極方程式の分母をはらうと

$$r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$$

$$r \sin \theta + r \cos \theta = 1$$

①を代入して

$$x + y = 1$$

(2)

この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標 (x, y) とすると

$$r \cos \theta = x, r \sin \theta = y, r^2 = x^2 + y^2 \quad \cdots ①$$

極方程式の両辺に r をかけると

$$r^2 = 2r \sin \theta$$

①を代入して

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$$

この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とすると

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r^2 = x^2 + y^2 \dots \textcircled{1}$$

極方程式の分母とはうと

$$r(1+2\cos\theta) = 1$$

$$r + 2r\cos\theta = 1$$

$$r + 2x = 1$$

$$r = 1 - 2x$$

両辺を2乗すると

$$r^2 = (1 - 2x)^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$$

始線 OX 上の点 $A(2, 0)$ を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする。点 $P(r, \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき、 $\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$ である
ような P の軌跡を、極方程式で表せ。

$$OP = r, PH = 2 - r\cos\theta$$

$$\frac{OP}{PH} = \frac{r}{2 - r\cos\theta} = \frac{1}{2} \text{ なので } 2r = 2 - r\cos\theta$$

$$2r + r\cos\theta = 2$$

$$r(2 + \cos\theta) = 2$$

$$r = \frac{2}{2 + \cos\theta}$$

