数Ⅱ

複素数と方程式

複素数

2乗したら-1になる数を文字iとする. $\Rightarrow i^2=-1$

(iを虚数単位という)

aとbは実数とする

$$\underset{\text{実部}}{\underline{a}}+\underset{\text{虚部}}{\underline{b}}\,i$$

- $a \neq 0,\ b \neq 0$のとき　$a+bi$(虚数)
- $a = 0,\ b \neq 0$のとき　bi(純虚数)
- $a \neq 0,\ b = 0$のとき　a(実数)

練習 1　次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1)　$-3+5i$　　(2)　$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$　　(3)　1　　(4)　$-i$

	(1)	(2)	(3)	(4)
実	-3	$-\frac{1}{2}$	1	0
虚	5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1

複素数の相当

2つの複素数が等しいのは実部,虚部が一致するとき

a, b, c, d は実数とする

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

$$a+bi=0 \iff a=0 \text{ かつ } b=0$$

練習 2 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $(x-2y)+(x+3)i=2-i$　　(2) $(2x+y)+(x-y+3)i=0$

(1)
$$\begin{cases} x-2y=2 & \cdots ① \\ x+3=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

② より $x=-4$ なので

① より $y=-3$

$\underline{x=-4,\ y=-3}$

(2)
$$\begin{cases} 2x+y=0 & \cdots ① \\ x-y+3=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①②を連立すると

$\underline{x=-1,\ y=2}$

複素数の計算

加法減法は複素数の実部同士,虚部同士で計算

乗法は分配法則,乗法公式を利用. $i^2=-1$ も忘れずに

練習 3 次の式を計算せよ。

(1) $(2+3i)+(4+i)$　(2) $(-1+2i)+(3-4i)$

(3) $(6+4i)-(3+2i)$　(4) $(2-3i)-(4-2i)$

練習 4 次の式を計算せよ。

(1) $(1+2i)(4+3i)$　(2) $(2-i)(3+4i)$

(3) $(2+3i)^2$　(4) $(3+4i)(3-4i)$

(1) $6+4i$　(2) $2-2i$

(3) $3+2i$　(4) $-2-i$

(1) $(1+2i)(4+3i)=4+3i+8i+6i^2=-2+11i$

(2) $(2-i)(3+4i)=6+8i-3i-4i^2=10+5i$

(3) $(2+3i)^2=4+12i+9i^2=-5+12i$

(4) $(3+4i)(3-4i)=9-16i^2=25$

共役な複素数

2つの複素数，$a+bi$ と $a-bi$ のように虚部の符号だけちがう複素数

実数 a と共役な複素数は a　$(a+0i,\ a-0i)$

練習 5　次の複素数と共役な複素数をいえ。

(1)　$2+3i$　(2)　$1-i$　(3)　$\sqrt{3}\,i$　(4)　$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$　(5)　-4

(1) $2-3i$　(2) $1+i$　(3) $-\sqrt{3}\,i$　(4) $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$　(5) -4

複素数の計算

除法は分母と共役な複素数を分母と分子にかける．$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$ を利用

練習 6 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1+2i}{2+3i}$　(2) $\dfrac{1-i}{1+i}$　(3) $\dfrac{5i}{2-i}$

(1) $\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2-3i+4i-6i^2}{4-9i^2}=\dfrac{8+i}{13}$

(2) $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

(3) $\dfrac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{10i+5i^2}{4-i^2}=\dfrac{-5+10i}{5}=-1+2i$

負の数の平方根

$a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)\cdot a}=\sqrt{i^2\cdot a}=\sqrt{a}\,i$

とくに $\sqrt{-1}=i$

$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$，すなわち $\pm\sqrt{a}\,i$

練習 7 次の数を i を用いて表せ。

(1) $\sqrt{-5}$　(2) $\sqrt{-9}$　(3) -18 の平方根

(1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$

(2) $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\,i=3i$

(3) $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}\,i=\pm3\sqrt{2}\,i$

練習 8 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{2i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}}=2i$

(4) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i\times i}=-3i$

2次方程式の解

複素数の範囲では負の数にも平方根が存在する。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

練習 9 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2=-1$ (2) $x^2=-8$

(1) $x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

$x=\pm i$

(2) $x^2=-8$

$x=\pm\sqrt{-8}$

$x=\pm 2\sqrt{2}\,i$

練習 10 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+3x+4=0$ (2) $3x^2-4x+2=0$

(3) $x^2+\sqrt{2}\,x+1=0$ (4) $x^2-2\sqrt{3}\,x+4=0$

(1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\times3}=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}\,i}{6}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{3}$

(3) $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\times1}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm2i}{2}$

(4) $x=\dfrac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{(-2\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot4}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm2i}{2}=\sqrt{3}\pm i$

2次方程式の解の判別式

$ax^2+by+c=0$ の判別式を D とすると

$$D=b^2-4ac$$

- $D>0$ のとき　異なる2つの実数解
- $D=0$ のとき　重解
- $D<0$ のとき　異なる2つの虚数解（実数解なし）
- $D \geqq 0$ のとき　実数解をもつ

練習 11 次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $x^2+5x+5=0$　(2) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

(3) $-4x^2+x-1=0$　(4) $3x^2-4\sqrt{6}x+8=0$

判別式をDとする

(1) $D=5^2-4\cdot1\cdot5$
$=25-20=5$

$D>0$ より
異なる2つの実数解

(2) $D=(-2\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot2$
$=12-8=4$

$D>0$ より
異なる2つの実数解

(3) $D=1^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)$
$=1-16=-15$

$D<0$ より
異なる2つの虚数解

(4) $D=(-4\sqrt{6})^2-4\cdot3\cdot8$
$=96-96=0$

$D=0$ より
重解

練習 12 m は定数とする。次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2+(m+1)x+1=0$$

判別式をDとすると

$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot1=m^2+2m+1-4$
$=m^2+2m-3$
$=(m+3)(m-1)$

(ア) $D>0$ つまり　$m<-3,\ 1<m$ のとき
異なる2つの実数解

(イ) $D=0$ つまり　$m=-3,\ 1$ のとき
重解

(ウ) $D<0$ つまり　$-3<m<1$ のとき
異なる2つの虚数解

解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解を α, β とするとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

練習 13 次の2次方程式について，2つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2+4x+2=0$ (2) $3x^2-6x-4=0$

(1)

和 $-\frac{4}{1}=-4$

積 $\frac{2}{1}=2$

(2)

和 $-\frac{(-6)}{3}=2$

積 $-\frac{4}{3}$

練習 14 2次方程式 $x^2+3x-1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $(\alpha-\beta)^2$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{3}{1}=-3$, $\alpha\beta=-\frac{1}{1}=-1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2(-1)=11$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=-3\{11-(-1)\}=-36$

(3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=11-(-2)\cdot(-1)=13$

練習 15 2次方程式 $x^2+5x+m=0$ の2つの解が次の条件を満たすとき，定数 m の値と2つの解を，それぞれ求めよ。

(1) 1つの解が他の解の4倍である。 (2) 2つの解の差が1である。

(1) 2解を α, β とすると 1つの解が他の解の4倍なので

$\beta = 4\alpha$

$x^2+5x+m=0$ について解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-5, \ \alpha\beta=m$

$\beta=4\alpha$ を $\alpha+\beta=-5$ に代入すると

$$\begin{aligned} \alpha+4\alpha &= -5 \\ 5\alpha &= -5 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}$$

$\alpha=-1$ より $\alpha+\beta=-5$ から $\beta=-4$

$m=\alpha\beta$

$m=(-1)\cdot(-4)=4$

m の値は 4

2解は -1 と -4

(2) 2解を α, β とすると 2解の差が1なので

$\alpha-\beta=1 \Rightarrow \beta=\alpha-1$

$x^2+5x+m=0$ について解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-5, \ \alpha\beta=m$

$\beta=\alpha-1$ を $\alpha+\beta=-5$ に代入すると

$$\begin{aligned} \alpha+(\alpha-1) &= -5 \\ 2\alpha &= -4 \\ \alpha &= -2 \end{aligned}$$

$\alpha=-2$ より $\beta=\alpha-1$ から $\beta=-3$

$m=\alpha\beta$ より $m=(-2)\cdot(-3)=6$

m の値は 6

2つの解は -2 と -3

2次式の因数分解

2次方程式

$ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とするとき

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

複素数の範囲で因数分解

→ すべての因数を1次式にする.

練習 16 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) x^2-3x-2 (2) $2x^2-2x-3$ (3) x^2+4x+6

(1) $x^2-3x-2=0$ として

解の公式より

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

(2) $2x^2-2x-3=0$ として

解の公式より

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$2\left(x-\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$$

(3) $x^2+4x+6=0$ として

解の公式より

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=-2\pm\sqrt{2}i$$

$$\{x-(-2+\sqrt{2}i)\}\{x-(-2-\sqrt{2}i)\}$$

2数 α, β を解とする2次方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad (a \neq 0)$$

とくに $a=1$ のとき2数 α, β を2解とする2次方程式の1つは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

練習 17 次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

(1) 2, -1 (2) $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ (3) $1+2i$, $1-2i$

(1) $(x-2)(x+1)$

$=x^2-x-2$

$\underline{x^2-x-2=0}$

(2) $\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$

$=x^2-4x+1$

$\underline{x^2-4x+1=0}$

(3) $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$

$=x^2-2x+5$

$\underline{x^2-2x+5=0}$

練習 18 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1)　和が -2，積が 6　　　(2)　和と積がともに 3

2数を α, β とする

(1) $\alpha+\beta=-2$

$\alpha\beta=6$ より

$x^2+2x+6=0$

解の公式より

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$$

$x=-1\pm\sqrt{5}i$

(2) $\alpha+\beta=3$

$\alpha\beta=3$ より

$x^2-3x+3=0$

解の公式より

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$$

練習 19 2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1)　$1-\alpha$，$1-\beta$　　　(2)　α^2，β^2

$x^2-3x-1=0$ について解と係数の関係より

$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-1$

(1) $\{x-(1-\alpha)\}\{x-(1-\beta)\}=0$

$x^2-\{-(\alpha+\beta)+2\}x+\{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}=0$

$x^2-(-3+2)x+(1-3-1)=0$

$x^2+x-3=0$

(2) $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

$x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+(\alpha\beta)^2=0$

$x^2-11x+1=0$

2次方程式の実数解の符号

2つの実数 α, β について

$\boxed{1}$

(ア) $\alpha>0$ かつ $\beta>0 \iff \alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

(イ) $\alpha<0$ かつ $\beta<0 \iff \alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

(ウ) $\alpha>0$ かつ $\beta<0$
$\alpha<0$ かつ $\beta>0$ $\iff \alpha\beta<0$

$\boxed{2}$

$ax^2+bx+c=0$ の2解 α, β と判別式 D について

(ア) α, β は異なる2つの正の解 $\iff D>0$ で $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

(イ) α, β は異なる2つの負の解 $\iff D>0$ で $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

(ウ) α, β は異符号の解 $\iff \alpha\beta<0$

練習 20 2次方程式 $x^2+2(m-3)x+4m=0$ が，次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの正の解　　(2) 異なる2つの負の解

(3) 正の解と負の解

$x^2+2(m-3)x+4m=0$ について

判別式を D とすると

$D=\{2(m-3)\}^2-4\cdot1\cdot4m=4(m-1)(m-9)$

(1) $D>0$ で $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D>0$ より　$4(m-1)(m-9)>0$

$m<1,\ 9<m$ …①

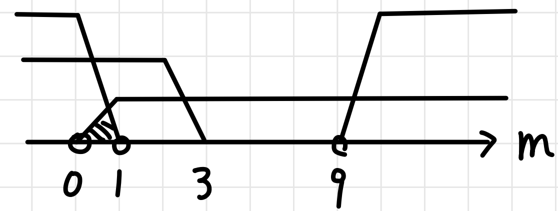
$\alpha+\beta>0$ より　$-2(m-3)>0$

$m<3$ …②

$\alpha\beta>0$ より　$4m>0$

$m>0$ …③

①②③より



$0<m<1$

(2) $D>0$ で $\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D>0$ より $4(m-1)(m-9)>0$

$m<1,\ 9<m \cdots ①$

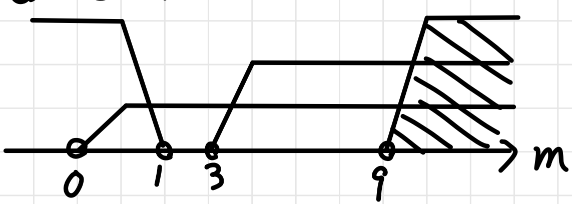
$\alpha+\beta<0$ より $-2(m-3)<0$

$m>3 \cdots ②$

$\alpha\beta>0$ より $4m>0$

$m>0 \cdots ③$

①②③より



$\underline{9<m}$

(3) $\alpha\beta<0$ より

$4m<0$

$\underline{m<0}$

多項式 $P(x)$ を1次式 $(x-k)$ で割った商を $Q(x)$、余りを R とすると

$$P(x)=(x-k)Q(x)+R$$

(割られる数) = (割る数) × 商 + 余り　(余りは割る数よりも高くても次数が1小さい式)

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ で割った余りは $P(k)$ となる

練習 21 $P(x)=x^3+x^2-3x-2$ を次の1次式で割った余りを求めよ。

(1) $x-1$　　(2) $x+1$　　(3) $x+2$

練習 22 次のことを示せ。

多項式 $P(x)$ を1次式 $ax+b$ で割った余りは，$P\left(-\frac{b}{a}\right)$ に等しい。

(1) $P(1)=1^3+1^2-3\cdot1-2=-3$

(2) $P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-3\cdot(-1)-2=1$

(3) $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-3\cdot(-2)-2=0$

商を $Q(x)$，余りを c とすると

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+c$$

練習 23 多項式 $P(x)=2x^3+5ax^2+ax+1$ を $x+1$ で割った余りが -5 であるとき，定数 a の値を求めよ。

$x+1$ で割った余りが -5 → $P(-1)=-5$

$P(-1)=2\cdot(-1)^3+5a\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+1=-5$

$-2+5a-a+1=-5$

$4a=-4$

$\underline{a=-1}$

練習 24 多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1，$x+1$ で割った余りが 5 である。$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ。

$x-3$ で割った余りが $1 \Rightarrow P(3)=1$

$x+1$ で割った余りが $5 \Rightarrow P(-1)=5$

$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$P(x)=(x-3)(x+1)Q(x)+ax+b$

$P(3)=1$ より

$P(3)=3a+b=1 \cdots ①$

$P(-1)=5$ より

$P(-1)=-a+b=5 \cdots ②$

①②を連立させて解くと

$a=-1,\ b=4$

よって $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りは $\underline{-x+4}$

因数定理

多項式 $P(x)$ が1次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

練習 25 次の1次式のうち，多項式 x^3+2x^2-5x-6 の因数であるものはどれか。

① $x-1$　② $x+1$　③ $x-2$　④ $x+2$

$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とする.

因数は $P(a)=0$ となる $x-a$

① $P(1)=1^3+2\cdot1^2-5\cdot1-6=-8$

$P(1)\neq0$ より $x-1$ は因数ではない

② $P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$

$P(-1)=0$ より $x+1$ は因数

③ $P(2)=2^3+2\cdot2^2-5\cdot2-6=0$

$P(2)=0$ より $x-2$ は因数

④ $P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-6=4$

$P(-2)\neq0$ より $x+2$ は因数でない

②③

練習 26 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-3x^2-6x+8　(2) x^3-5x^2+3x+9

(3) $2x^3+3x^2-11x-6$

(1) $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$ とする

$P(1)=0$ より $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつので

$P(x)=(x-1)(x^2-2x-8)=(x-1)(x-4)(x+2)$

(2) $P(x)=x^3-5x^2+3x+9$ とする.

$P(-1)=0$ より $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつので

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+9)=(x+1)(x-3)^2$

(3) $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$ とする.

$P(2)=0$ より $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつので

$P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)=(x-1)(2x+1)(x+3)$

組立除法

x^3-4x^2+x+6 を $x+1$ で割った商と余り

	x^3	x^2	x	定	
(係数)	1	-4	1	6	-1
		-1	5	-6	
	$\times(-1)$	$\times(-1)$	$\times(-1)$		
	1	-5	6	0	
	x^2	x	定	余	

← (割る式) = 0 となる x の値

$$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)+0$$

よって x^3-4x^2+x+6 を $x+1$ で割ったときの

商 x^2-x+6 余り 0

練習 1 x^3-4x^2+3 を $x-1$ で割った商と余りを求めよ。

	x^3	x^2	x	定	
					1
係数	1	-4	0	3	
		1	-3	-3	
	1	-3	-3	0	

商 x^2-3x-3

余り 0

高次方程式

(左辺)$=0$ の左辺を因数分解し, 各因数 $=0$ とおいたときにでる文字の値が解.

練習 27 次の 3 次方程式を解け。

(1) $x^3-8=0$　　(2) $x^3+1=0$

(1) $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x-2=0$ より $x=2$

$x^2+2x+4=0$ より 解の公式から

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{12}i}{2}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}$$

$$=-1\pm\sqrt{3}i$$

よって $\underline{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i}$

(2) $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x+1=0$ より $x=-1$

$x^2-x+1=0$ より 解の公式から

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

よって $\underline{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

練習 28 次の 4 次方程式を解け。

(1) $x^4+x^2-20=0$ (2) $x^4-1=0$

(1)

$(x^2+5)(x^2-4)=0$

$x^2+5=0$ または $x^2-4=0$

$x=\pm\sqrt{5},\ \pm 2$

(2)

$(x^2+1)(x^2-1)=0$

$x^2+1=0$ または $x^2-1=0$

$x=\pm 1,\ \pm i$

練習 29 次の 3 次方程式を解け。

(1) $x^3+4x^2+x-6=0$ (2) $x^3+4x^2+5x+2=0$

~~(3) $x^3-3x^2+2=0$ (4) $2x^3-3x^2-4=0$~~

(1)

$P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とする

$P(1)=1^3+4\cdot1^2+1-6=0$ より

$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ

$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)=0$

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

$\underline{x=1,-2,-3}$

(2)

$P(x)=x^3+4x^2+5x+2$ とする

$P(-1)=(-1)^3+4\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+2=0$ より

$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ

$P(x)=(x+1)(x^2+3x+2)=0$

$(x+1)(x+1)(x+2)=0$

$(x+1)^2(x+2)=0$

$\underline{x=-1,-2}$

練習 29 次の 3 次方程式を解け。

~~(1) $x^3+4x^2+x-6=0$~~ ~~(2) $x^3+4x^2+5x+2=0$~~

(3) $x^3-3x^2+2=0$ (4) $2x^3-3x^2-4=0$

(3)

$P(x)=x^3-3x^2+2$ とする

$P(1)=1^3-3\cdot1^2+2=0$ より

$P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)=0$

$x-1=0$ より $x=1$

$x^2-2x+2=0$ より解の公式から

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

(4)

$P(x)=2x^3-3x^2-4$ とする

$P(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2-4=0$ より

$P(x)=(x-2)(2x^2+x+2)=0$

$x-2=0$ より $x=2$

$2x^2+x+2=0$ より解の公式から

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$$

$x=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

3次方程式の解と係数の関係

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3解を α, β, γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

練習 1 3次方程式 $x^3-3x^2+x+2=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$x^3-3x^2+x+2=0$ について解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=3^2-2\cdot1=7$

$\underline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=7}$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=-2+1+3+1=3$

$\underline{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=3}$

練習 30 a，b は実数とする。3 次方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ が $1+i$ を解にもつとき，定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

$1+i$ が解なので $1-i$ も解となる.

$x=1+i$ を 3 次方程式に代入

$$(1+i)^3+(1+i)^2+a(1+i)+b=0$$

$$(1+3i+3i^2+i^3)+(1+2i+i^2)+a+ai+b=0$$

$$(1+3i-3-i)+(1+2i-1)+a+ai+b=0$$

$$-2+2i+2i+a+ai+b=0$$

$$a+b-2+ai+4i=0$$

$$(a+b-2)+(a+4)i=0$$

$$\begin{cases} a+b-2=0 \cdots ① \\ a+4=0 \cdots ② \end{cases}$$

①②より

$a=-4$, $b=6$

(教科書解法)

3 次方程式は

$$x^3+x^2-4x+6=0$$

$P(x)=x^3+x^2-4x+6$ とすると

$P(-3)=(-3)^3+(-3)^2-4\cdot(-3)+6=0$ より

$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつので

$P(x)=(x+3)(x^2-2x+2)=0$ より

$x=-3$ も解である.

$a=-4$, $b=6$

他の解は $1-i$, 3

練習 30

a，b は実数とする。3 次方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ が $1+i$ を解にもつとき，定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

(解と係数の関係を利用)

$1+i$ が解なので $1-i$ も解となる。

この3次方程式の他の解を α とすると

3次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+(1+i)+(1-i)=-1 \cdots ① \\ \alpha(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha=a \cdots ② \\ \alpha(1+i)(1-i)=-b \cdots ③ \end{cases}$$

① を解くと $\alpha=-3$

$\alpha=-3$ を ② に代入

$$-3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot(-3)=a$$

$$-3-3i+1-i^2-3+3i=a$$

$$-3-3i+1+1-3+3i=a$$

$$a=-4$$

$\alpha=-3$ を ③ に代入

$$-3(1+i)(1-i)=-b$$

$$-3(1-i^2)=-b$$

$$-b=-6$$

$$b=6$$

$a=-4$，$b=6$，他の解は $1-i$，-3