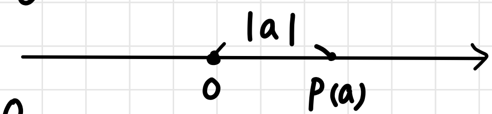
数Ⅱ

図形と方程式

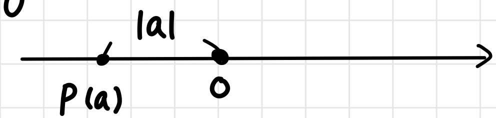
数直線上の2点間のキョリ

① 原点Oとのキョリ

$a > 0$



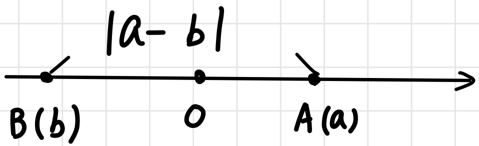
$a < 0$



・数直線上の点Pの座標を a とする。
原点Oと点Pの2点間のキョリOPは

$$OP = |a|$$

② 数直線上の2点間のキョリ



・数直線上の点Aの座標を a, 点Bの座標を b とする。
点Aと点Bの2点間のキョリABは

$$AB = |b - a|$$

練習 1 次の2点間の距離を求めよ。

(1) A(−1), B(6)　(2) A(4), B(2)　(3) O(0), A(−3)

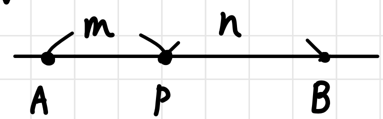
(1) $AB = |6-(-1)| = 7$

(3) $OA = |-3-0| = 3$

(2) $AB = |2-4| = 2$

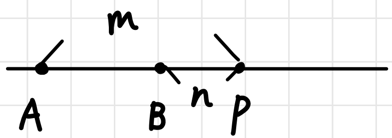
線分の内分点・外分点

・内分

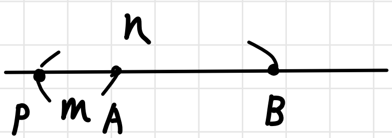


点PはABをm：nに内分する．点Pは内分点

・外分



点PはABをm：nに外分する．点Pは外分点．



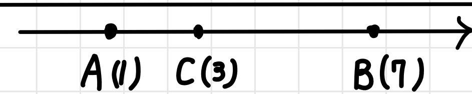
点PはABをm：nに外分する．点Pは外分点

練習 2 数直線上の 3 点 A(1)，B(7)，C(3) について，次の□に適する数または用語を入れよ。

(1) 点Cは線分 AB を □：□ に □ する。

(2) 点Bは線分 AC を □：□ に □ する。

(3) 点Aは線分 CB を □：□ に □ する。



(1) 1：2 に内分　(2) 3：2 に外分　(3) 1：3 に外分

線分の内分点・外分点（数直線）

数直線上の2点 A(a), B(b) を結ぶ線分ABを

・m:nに内分する点Pは $\dfrac{na+mb}{m+n}$　・m:nに外分する点Qは $\dfrac{-na+mb}{m-n}$

・線分ABの中点Mは $\dfrac{a+b}{2}$

練習 3　2点 A(4), B(8) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：2 に内分する点C　　(2)　3：1 に外分する点D

(3)　2：3 に外分する点E　　(4)　中点 M

(1) $\dfrac{2\cdot4+3\cdot8}{3+2}=\dfrac{32}{5}$

(2) $\dfrac{-1\cdot4+3\cdot8}{3-1}=10$

(3) $\dfrac{-3\cdot4+2\cdot8}{2-3}=-4$

(4) $\dfrac{4+8}{2}=6$

$C\left(\dfrac{32}{5}\right)$　$D(10)$　$E(-4)$　$M(6)$

座標平面上の2点間のキョリ

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の2点間のキョリは

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

原点Oと点 $A(x_1, y_1)$ の2点間のキョリは

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

練習 4 次の2点間の距離を求めよ。

(1) A(1, 2), B(4, 6) (2) A(−3, 1), B(2, −4)

(3) A(5, −2), B(3, −2) (4) 原点O, A(2, −3)

(1) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

(2) $AB = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(3) $AB = \sqrt{(3-5)^2 + \{-2-(-2)\}^2} = \sqrt{4} = 2$

(4) $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13}$

練習 5

点Pは y 軸上にあり，2点 $A(-4,\ 2)$，$B(1,\ -1)$ から等距離にある。Pの座標を求めよ。

点Pのy座標をyとすると点Pはy軸上の点なので

$P(0, y)$ とかける.

点PはA, Bと等キョリにあるので

$AP = BP$ となればよい

$$AP = \sqrt{\{0-(-4)\}^2 + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 4y + 20}$$

$$BP = \sqrt{(0-1)^2 + \{y-(-1)\}^2} = \sqrt{y^2 + 2y + 2}$$

$AP = BP$ より $AP^2 = BP^2$

つまり

$$y^2 - 4y + 20 = y^2 + 2y + 2$$

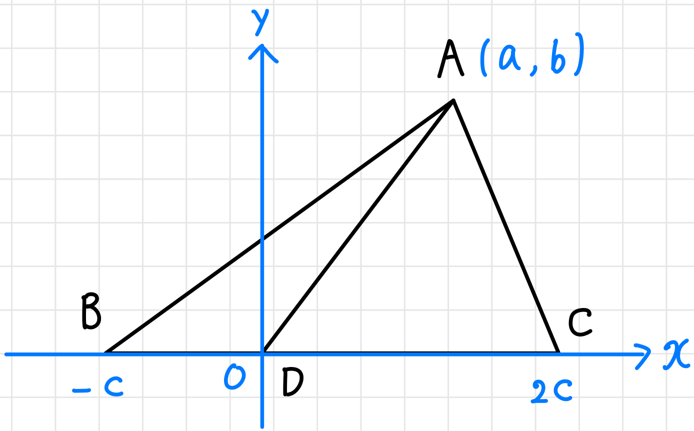
$$6y = 18$$

$$y = 3$$

よって

$P(0.3)$

練習 6 △ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点をDとするとき，等式 $2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)$ が成り立つ。このことを証明せよ。



左図のようにDを原点にとると
Dは BCを1:2に内分する点なので
A(a, b), B(−c, 0), C(2c, 0) とおける.

$AB^2=\{a-(-c)\}^2+(b-0)^2=a^2+b^2+c^2+2ac$

$AC^2=(a-2c)^2+(b-0)^2=a^2+b^2+4c^2-4ac$

$AD^2=(a-0)^2+(b-0)^2=a^2+b^2$

$BD^2=\{0-(-c)\}^2+0^2=c^2$

$2AB^2+AC^2=2(a^2+b^2+c^2+2ac)+(a^2+b^2+4c^2-4ac)$

$=3a^2+3b^2+6c^2 \cdots ①$

$3(AD^2+2BD^2)=3\{(a^2+b^2)+2\cdot c^2\}=3a^2+3b^2+6c^2 \cdots ②$

①＝② より

$2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)$

内分点・外分点（座標）

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とする線分 AB を

・$m:n$ に内分する点 P の座標　$P\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

・$m:n$ に外分する点 Q の座標　$Q\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

・AB の中点の座標 M　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

練習 7　2 点 A(−3, 2), B(4, 5) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　2：1 に内分する点C　　(2)　2：1 に外分する点D

(3)　2：3 に外分する点E　　(4)　中点M

(1)

$C\left(\dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot4}{2+1}, \dfrac{1\cdot2+2\cdot10}{2+1}\right)$

$C\left(\dfrac{5}{3}, 4\right)$

(2)

$D\left(\dfrac{-1\cdot(-3)+2\cdot4}{2-1}, \dfrac{-1\cdot2+2\cdot5}{2-1}\right)$

$D(11, 8)$

(3)

$E\left(\dfrac{-3\cdot(-3)+2\cdot4}{2-3}, \dfrac{-3\cdot2+2\cdot5}{2-3}\right)$

$E(-17, -4)$

(4)

$M\left(\dfrac{-3+4}{2}, \dfrac{2+5}{2}\right)$

$M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

練習 8 点 A(−3, 2) に関して，点 P(0, −4) と対称な点Qの座標を求めよ。

点Qの座標をQ(x, y)とする.

点Aは点P, Qの中点となるので

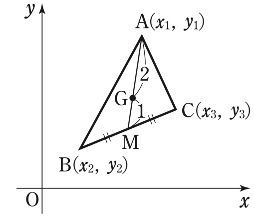
$$\frac{x+0}{2}=-3 \qquad \frac{y-4}{2}=2$$

$$x=-6 \qquad y-4=4$$

$$y=8$$

$$Q(-6,\ 8)$$

例題 3 3点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC において，辺 BC の中点をM，線分 AM を 2：1 に内分する点をGとする。Gの座標を求めよ。



練習 9 例題3の △ABC において，辺 AB の中点をN，線分 CN を 2：1 に内分する点を G′ とする。G′ の座標を求めよ。

NはABの中点なので $N\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

G′はCNを2:1に内分するので

$$G'\left(\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{2+1},\ \frac{y_3+2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{2+1}\right)$$

$$G'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

三角形の重心の座標

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする △ABC の

重心の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

練習 10 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

(1)　A(1，1)，B(5，2)，C(3，4)

(2)　A(−2，4)，B(0，−3)，C(2，1)

(1) $\left(\dfrac{1+5+3}{3}, \dfrac{1+2+4}{3}\right)$

$\left(3, \dfrac{7}{3}\right)$

(2) $\left(\dfrac{-2+0+2}{3}, \dfrac{4-3+1}{3}\right)$

$\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

直線の方程式

① $y = ax + b$ … 傾き a, 切片 b の直線

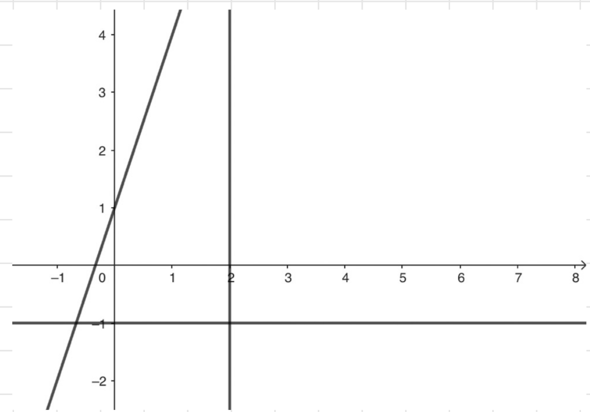
② $x - p = 0$ … x 軸に垂直な直線

③ $y - q = 0$ … y 軸に垂直な直線

練習 11 次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ。

(1) $3x - y + 1 = 0$ (2) $y + 1 = 0$ (3) $x - 2 = 0$

(1)



(2)

(3)

直線の方程式 (1)

点 (x_1, y_1) を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

練習 12 次のような直線の方程式を求めよ。

(1) 点 (2, −4) を通り，傾きが 3 の直線

(2) 点 (−3, 1) を通り，傾きが −2 の直線

(1)

$$y-(-4) = 3(x-2)$$

$$y+4 = 3x-6$$

$$y = 3x-10$$

(2)

$$y-1 = -2\{x-(-3)\}$$

$$y-1 = -2x-6$$

$$y = -2x-5$$

直線の方程式 (2)

異なる2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は

・$x_1 \neq x_2$ のとき　$y - y_1 = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

・$x_1 = x_2$ のとき　$x = x_1$

・$y_1 = y_2$ のとき　$y = y_1$

練習 13　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　(3, 2), (5, 6)　　(2)　(−1, 4), (2, −2)

(3)　(2, −1), (1, −1)　　(4)　(3, −1), (3, 4)

(1)

$$y - 2 = \frac{6-2}{5-3}(x-3)$$

$$y - 2 = 2(x-3)$$

$$y = 2x - 4$$

(2)

$$y - 4 = \frac{-2-4}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$y - 4 = -2(x+1)$$

$$y = -2x + 2$$

(3)

$$y = -1$$

(4)

$$x = 3$$

練習 14 $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。x 切片が a, y 切片が b である直線の方程式は, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ で表されることを示せ。

x 切片が a, y 切片が b なので

この直線は $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る

直線の傾きは $\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}$

直線の方程式は

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

$$\frac{b}{a}x+y=b$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

練習 15 次の直線のうち, 直線 $y=-2x$ と平行であるものはどれか。

① $y=2x-3$ ② $y=-2x+4$ ③ $2x+y+5=0$

③ $y=-2x-5$

直線が平行 → 直線の傾きが同じ

② と ③

2直線の平行・垂直

$y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ について

2直線が平行 $\Longleftrightarrow m_1=m_2$ (2直線の傾きが等しい)

2直線が垂直 $\Longleftrightarrow m_1\times m_2=-1$ (2直線の傾きの積が-1)

練習 16 次の2直線は，それぞれ平行，垂直のいずれであるか。

(1) $y=4x+1$, $y=4x-3$ (2) $y=3x-1$, $x+3y+2=0$

(3) $2x+3y=3$, $4x+6y=5$ (4) $3x+4y=2$, $4x-3y=1$

(1) 平行 (2) 垂直

(3) 平行 (4) 垂直

練習 17 点 A$(3, -1)$ を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線，平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

$3x+2y+1=0 \rightarrow y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

垂直…傾きが$\frac{2}{3}$で$(3,-1)$をトール

$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-3)$ $\underline{y=\frac{2}{3}x-3}$

平行…傾きが$-\frac{3}{2}$で$(3,-1)$をトール

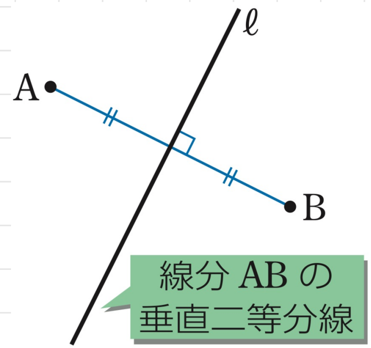
$y-(-1)=-\frac{3}{2}(x-3)$ $\underline{y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}$

直線に関して対称な点

2点 A, B が直線 ℓ に関して対称

① 直線 AB は ℓ に垂直

② 線分 AB の中点は ℓ 上にある.



練習 18 直線 $2x-y+2=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A(2, 1) と対称な点 B の座標を求めよ。

B(a, b) とする.

$2x-y+2=0 \Rightarrow y=2x+2$ … ℓ の傾きは 2

直線 AB の傾きは $\dfrac{b-1}{a-2}$

ℓ と AB は垂直 → 2つの直線の傾きは −1

$2\times\dfrac{b-1}{a-2}=-1 \Rightarrow a+2b=4$ … ①

また, AB の中点 $\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{1+b}{2}\right)$ は ℓ 上.

$2\times\dfrac{2+a}{2}-\dfrac{1+b}{2}+2=0 \Rightarrow 2a-b=-7$ … ②

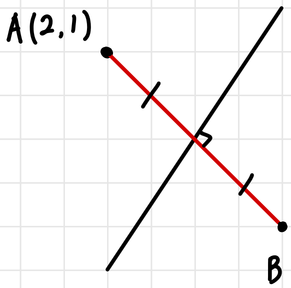
①②を連立させて解くと

$\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

よって B(−2, 3)

練習 18 直線 $2x-y+2=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 $A(2,\ 1)$ と対称な点Bの座標を求めよ。

(別)



$2x-y+2=0$ と直線ABは垂直に交わる → 傾きの積が -1

$2x-y+2=0 \rightarrow y=2x+2$ …① なので傾きは2

直線ABの傾きをmとすると $2\times m=-1$

$m=-\frac{1}{2}$

直線ABの方程式は $y=-\frac{1}{2}x+b$ とおける

これが(2,1)を通るので $1=-\frac{1}{2}\times2+b \rightarrow b=2$

よって直線ABの方程式は

$y=-\frac{1}{2}x+2$ …②

①②を連立すると

$2x+2=-\frac{1}{2}x+2 \rightarrow x=0$

$x=0$ を $y=2x+2$ に代入 → $y=2$

①②の交点は(0, 2)でこれは2点A,Bの中点である。

ここで点Bを(p, q)とすると、2点A, Bの中点は

$\left(\frac{2+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$ となりこれが(0, 2)と等しいので

$\frac{2+p}{2}=0 \rightarrow p=-2$

$\frac{1+q}{2}=2 \rightarrow q=3$

よって $\underline{B(-2, 3)}$

点と直線のキョリ

①

原点Oと直線 $ax+by+c=0$ のキョリ d は

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

②

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ のキョリ d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

練習 19 原点と次の直線の距離を求めよ。

(1) $2x-y+5=0$ (2) $2x+3y-4=0$

(1) $$\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(2) $$\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

練習 20 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 点 $(1, 2)$，直線 $3x-4y-1=0$

(2) 点 $(2, -3)$，直線 $2x+y-3=0$

(3) 点 $(-1, 5)$，直線 $y=3x-2$

(1) $$\frac{|3\cdot1+(-4)\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{25}}=\frac{6}{5}$$

(2) $$\frac{|2\cdot2+1\cdot(-3)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(3) $y=3x-2$

$3x-y-2=0$

$$\frac{|3\cdot(-1)+(-1)\cdot5-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

2直線の交点をトール直線

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \cdots ① \\ x-y-1=0 \cdots ② \end{cases}$$

は1点で交わり
その交点をAとする.

定数kを用いて

$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \cdots ③$ をつくる.　　$(x+2y-4)+k(x-y-1)=0$ も可

③は①②の交点Aを必ずトール.

練習 1 2 直線 $2x-y+1=0$, $x+y-4=0$ の交点と, 点 $(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

定数Kを用いて

$$K(2x-y+1)+(x+y-4)=0 \cdots ①$$

これが $(-2,1)$ をトールので

$$K\{2\cdot(-2)-1+1\}+(-2+1-4)=0$$

$$-4K-5=0$$

$$K=-\frac{5}{4}$$

これを①に代入する

$$-\frac{5}{4}(2x-y+1)+(x+y-4)=0$$

両辺4倍して

$$-5(2x-y+1)+4(x+y-4)=0$$

$$-10x+5y-5+4x+4y-16=0$$

$$-6x+9y-21=0$$

$$6x-9y+21=0$$

$$2x-3y+7=0$$

$$\underline{2x-3y+7=0}$$

円の方程式

・点 (a, b) を中心，半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

・原点中心，半径 r の円の方程式は

$$x^2+y^2=r^2$$

練習 21 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が原点，半径が 2　(2) 中心が点 $(2,\ 3)$，半径が 4

(3) 中心が点 $(-2,\ 1)$，半径が $\sqrt{10}$

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

(3) $(x+2)^2+(y-1)^2=10$

練習 22 円 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$ の中心の座標と半径を求めよ。

中心 $(3, -2)$

半径 $2\sqrt{2}$

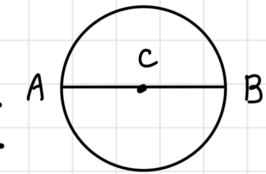
練習 23 2 点 $A(-3,\ 2)$，$B(1,\ 6)$ を直径の両端とする円について，中心 C の座標と半径 r を求めよ。また，その方程式を求めよ。

A，B が直径の両端なので

AB の中点が円の中心 C の座標になる.

$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \to C(-1, 4)$

右図より半径は AC



$AC=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$

よって 中心 $(-1, 4)$ 半径 $2\sqrt{2}$ なので

$$(x+1)^2+(y-4)^2=8$$

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表し方

中心 (a, b), 半径 r の円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ これを展開すると

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

ここで $l=-2a$, $m=-2b$, $n=a^2+b^2-r^2$ とすると

$x^2+y^2+lx+my+n=0$

練習 24 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+y^2+4x-2y-4=0$　　(2) $x^2+y^2+6x+8y+9=0$

(1) $x^2+4x+y^2-2y-4=0$

$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1-4=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

中心 $(-2, 1)$ 半径 3 の円

(2) $x^2+6x+y^2+8y+9=0$

$(x+3)^2-9+(y+4)^2-16+9=0$

$(x+3)^2+(y+4)^2=16$

中心 $(-3, -4)$ 半径 4 の円

練習 25 次の 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(1) A(1, 1)，B(2, 1)，C(−1, 0)

(2) A(1, 3)，B(5, −5)，C(4, 2)

(1) 円の方程式を定数 l, m, n を用いて

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

A(1,1), B(2,1), C(−1,0) を通るので

$1^2+1^2+l\cdot1+m\cdot1+n=0 \Rightarrow l+m+n=-2$ …①

$2^2+1^2+l\cdot2+m\cdot1+n=0 \Rightarrow 2l+m+n=-5$ …②

$(-1)^2+0^2+l\cdot(-1)+m\cdot0+n=0 \Rightarrow -l+n=-1$ …③

①②③を連立させて解くと

$l=-3,\ m=5,\ n=-4$

よって

$x^2+y^2-3x+5y-4=0$

(2) 円の方程式を定数 l, m, n を用いて

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

A(1,3), B(5,−5), C(4,2) を通るので

$1^2+3^2+l\cdot1+m\cdot3+n=0 \Rightarrow l+3m+n=-10$ …①

$5^2+(-5)^2+l\cdot5+m\cdot(-5)+n=0 \Rightarrow 5l-5m+n=-50$ …②

$4^2+2^2+l\cdot4+m\cdot2+n=0 \Rightarrow 4l+2m+n=-20$ …③

①②③を連立させて解くと

$l=-2,\ m=4,\ n=-20$

よって

$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

練習 26 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=25$, $y=x+1$ (2) $x^2+y^2=8$, $x+y=4$

(1) $y=x+1$ を $x^2+y^2=25$ に代入

$x^2+(x+1)^2=25$

$x^2+x^2+2x+1=25$

$2x^2+2x-24=0$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x=-4,\ 3$

$x=-4$ のとき $y=-3$

$x=3$ のとき $y=4$

よって

$(-4,-3),\ (3,\ 4)$

(2) $x+y=4 \Rightarrow y=-x+4$

$y=-x+4$ を $x^2+y^2=8$ に代入

$x^2+(-x+4)^2=8$

$x^2+x^2-8x+16=8$

$2x^2-8x+8=0$

$x^2-4x+4=0$

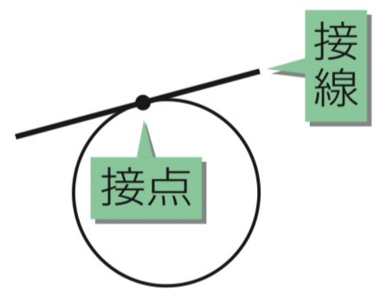
$(x-2)^2=0$

$x=2$ なので $y=2$

よって

$(2,\ 2)$

円の方程式と直線の方程式からyを消去すると2次方程式が得られる.
この2次方程式の判別式をDとすると,円と直線の位置関係について以下が成立

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる2つの実数解	重解(ただ1つ)	実数解をもたない
円と直線の位置関係	異なる2点で交わる 	接する 	共有点をもたない 
共有点の個数	2個	1個	0個

練習 27

円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円と直線が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2) 円と直線が接するとき，定数 m の値と接点の座標を求めよ。

$y=2x+m$ を $x^2+y^2=5$ に代入

$x^2+(2x+m)^2=5$

$x^2+4x^2+4mx+m^2=5$

$5x^2+4mx+m^2-5=0 \cdots ①$

①の判別式を D とすると

$D=(4m)^2-4\cdot5\cdot(m^2-5)$

$=16m^2-20(m^2-5)$

$=16m^2-20m^2+100$

$=-4m^2+100$

(1) 円と直線が共有点をもつ → $D \geqq 0$

$-4m^2+100 \geqq 0$

$4m^2-100 \leqq 0$

$m^2-25 \leqq 0$

$(m+5)(m-5) \leqq 0$

よって

$-5 \leqq m \leqq 5$

(2) 円と直線が接する → $D=0$

$$-4m^2+100=0$$
$$-4m^2=-100$$
$$m^2=25$$
$$m=\pm 5$$

$m=5$ のとき

①に $m=5$ を代入

$$5x^2+20x+20=0$$
$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0$$
$$x=-2$$

$y=2x+m$ に $m=5, x=-2$ を代入

$$y=2\cdot(-2)+5=1$$

$(-2, 1)$

$m=-5$ のとき

①に $m=-5$ を代入

$$5x^2-20x+20=0$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

$y=2x+m$ に $m=-5, x=2$ を代入

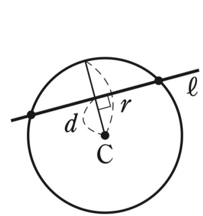
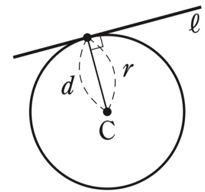
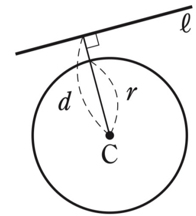
$$y=2\cdot 2-5=-1$$

$(2, -1)$

$m=5$ のとき $(-2, 1)$

$m=-5$ のとき $(2, -1)$

円の半径をr，円の中心Cと直線ℓとのキョリをdとする。

d と r の大小	$d<r$	$d=r$	$d>r$
円と直線の位置関係	異なる2点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

練習 28 半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $x+2y-5=0$ が接するとき，r の値を求めよ。

$x^2+y^2=r^2$ は原点中心半径 r の円

円と直線が接する

→ 円の中心から直線までのキョリ ＝ 半径の長さ

円の中心から直線までのキョリを d とする

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$d=r$ となるので

$$r=\sqrt{5}$$

円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

練習 29 次の円上の点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=10$, P(3, 1)　(2) $x^2+y^2=13$, P(2, −3)

(3) $x^2+y^2=16$, P(4, 0)　(4) $x^2+y^2=5$, P(0, $-\sqrt{5}$)

(1) $3x+y=10$　(2) $2x-3y=13$

(3) $4x=16$

$x=4$

(4) $-\sqrt{5}y=5$

$y=-\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$y=-\sqrt{5}$

練習 30 点 A(2, 1) から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

接点の座標を (a, b) とすると

接線の方程式は $ax+by=1$ …①

これは点Aから引いた接線なので(2,1)をトール.

①に(2,1)を代入　$2a+b=1 \Rightarrow b=1-2a$ …②

また接点 (a, b) は $x^2+y^2=1$ 上の点なので

$a^2+b^2=1$　これに②を代入すると

$a^2+(1-2a)^2=1$

$a^2+4a^2-4a+1=1$

$5a^2-4a=0$

$a(5a-4)=0$

$a=0, \dfrac{4}{5}$

$a=0$ のとき $b=1$

$a=\dfrac{4}{5}$ のとき $b=-\dfrac{3}{5}$

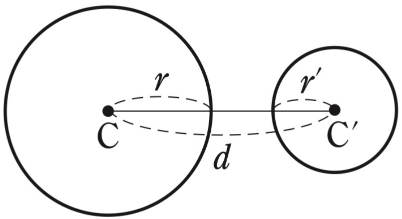
$$\begin{cases} \text{接線} & y=1 \\ \text{接点} & (0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{接線} & \dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y=1 \\ \text{接点} & \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$$

・2つの円の位置関係

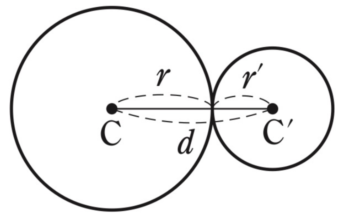
円Cの半径をr, C'の半径をr', 2つの円の中心間キョリをdとする.

[1] 互いに外部にある



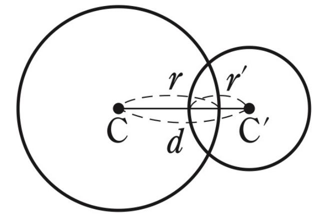
[1] $d > r + r'$

[2] 外接する（1点を共有する）



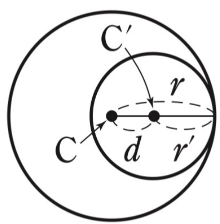
[2] $d = r + r'$

[3] 2点で交わる



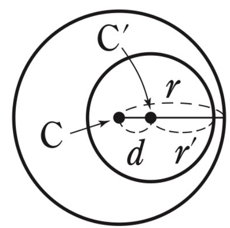
[3] $r - r' < d < r + r'$

[4] 内接する（1点を共有する）



[4] $d = r - r'$

[5] 一方が他方の内部にある



[5] $d < r - r'$

練習 31

円 $x^2+y^2=4$ と次の円について，その位置関係を調べよ。

(1) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$　　(2) $(x-3)^2+(y-3)^2=8$

$x^2+y^2=4$ は 原点中心 半径2の円

(1) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$ は $(-3,4)$ 中心 半径3の円

2つの円の中心間キョリ d は

$d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

ここで d は2つの円の和と等しいので

2つの円は外接している.

(2) $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ は

$(3,3)$ 中心 半径 $2\sqrt{2}$ の円

2つの円の中心間キョリ d は

$d=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ここで 2つの円の半径の 和は $2\sqrt{2}+2$

差は $|2\sqrt{2}-2|$

$|2\sqrt{2}-2|<d<2\sqrt{2}+2$

よって 2つの円は異なる2点で交わる.

練習 32 中心が点 $(-3,\ 4)$ である円 C と，円 $x^2+y^2=1$ が内接するとき，円 C の方程式を求めよ。

$x^2+y^2=1$ は原点中心半径 1 の円

2つの円の中心間キョリ d は

$$d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

円 C の半径を r とすると2つの円が内接するのは

$5=r-1$ をみたすとき

$r=6$ のときである.

よって円 C は $(-3,\ 4)$ 中心半径 6 の円

$$\underline{(x+3)^2+(y-4)^2=36}$$

練習 33 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$$x^2+y^2=10,\qquad x^2+y^2-2x-y-5=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \cdots ① \\ x^2+y^2-2x-y-5=0 \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$2x+y+5=10$

$y=5-2x \cdots ③$

③ を ① に代入すると

$x^2+(5-2x)^2=10$

$x^2+4x^2-20x+25=10$

$5x^2-20x+15=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=1,\ 3$

$x=1$ のとき

$y=3$

$x=3$ のとき

$y=-1$

よって共有点は

$\underline{(1,\ 3)\ (3,\ -1)}$

2つの円の交点を通る図形

円 $x^2+y^2-r^2=0$ と 円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の交点をトールル円の方程式は

定数Kを用いて

$$K(x^2+y^2-r^2)+(x^2+y^2+lx+my+n)=0$$

練習 1 2つの円 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の2つの交点と点 (1, 2) を通る円の方程式を求めよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \cdots ① \\ x^2+y^2-4x+2y-6=0 \cdots ② \end{cases}$$

Kを定数として

$$K(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0 \cdots ③$$

③は(1, 2)をトールので

$$K(1^2+2^2-4)+(1^2+2^2-4\cdot 1+2\cdot 2-6)=0$$

$$K-1=0 \Rightarrow K=1$$

K=1を③に代入

$$(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$$

$$2x^2+2y^2-4x+2y-10=0$$

$$\underline{x^2+y^2-2x+y-5=0}$$

練習 34

2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ に対して，$AP^2-BP^2=8$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

点Pの座標を(x, y)とする.

$$AP^2=\{x-(-1)\}^2+(y-0)^2=x^2+2x+1+y^2$$

$$BP^2=(x-1)^2+(y-0)^2=x^2-2x+1+y^2$$

$$AP^2-BP^2=(x^2+2x+1+y^2)-(x^2-2x+1+y^2)=8$$

$$4x=8$$

$$x=2$$

点Pは $x=2$ 上にある.

逆にこの直線上のすべての点P(x, y)について

$AP^2-BP^2=8$ は成立.

よって点Pの軌跡は

直線 $x=2$

練習 35

2 点 A(−3, 0), B(2, 0) からの距離の比が 3 : 2 である点 P の軌跡を求めよ。

点Pの座標を (x, y) とする

$AP : BP = 3 : 2$ より

$2AP = 3BP$

$4AP^2 = 9BP^2 \cdots ①$

$AP^2 = \{x-(-3)\}^2 + (y-0)^2$

$= x^2 + 6x + 9 + y^2 \cdots ②$

$BP^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2 \cdots ③$

②③を①に代入

$4(x^2+6x+9+y^2) = 9(x^2-4x+4+y^2)$

$4x^2+24x+36+4y^2 = 9x^2-36x+36+9y^2$

$5x^2-60x+5y^2 = 0$

$x^2-12x+y^2 = 0$

$(x-6)^2-36+y^2 = 0$

$(x-6)^2+y^2 = 36$

よって点Pは円 $(x-6)^2+y^2=36$ 上にある.

逆にこの円上のすべての点 $P(x, y)$ は条件をみたす.

よって求める軌跡は (6, 0) 中心 半径 6 の円

練習 36 点Qが直線 $y=x+2$ 上を動くとき，点 A(1, 6) と点Qを結ぶ線分AQを 2：1 に内分する点Pの軌跡を求めよ。

$P(x, y)$ とする.

また, Q の座標を (s, t) とする

点Qは $y=x+2$ 上の点なので $t=s+2$ …①

点PはAQを 2：1 に内分するので

$$P\left(\frac{1\cdot 1+2\cdot s}{2+1}, \frac{1\cdot 6+2\cdot t}{2+1}\right)$$

$$P\left(\frac{1+2s}{3}, \frac{6+2t}{3}\right)$$

$$x=\frac{1+2s}{3}, \quad y=\frac{6+2t}{3}$$

$$s=\frac{3x-1}{2}, \quad t=\frac{3y-6}{2} \cdots ②$$

②を①に代入

$$\frac{3y-6}{2}=\frac{3x-1}{2}+2$$

$$3y-6=3x-1+4$$

$$3x-3y+9=0$$

$$x-y+3=0$$

よって点Pは直線 $x-y+3=0$ 上にある.

逆にこの直線上のすべての点 $P(x, y)$ は条件をみたす.

よって求める軌跡は直線 $x-y+3=0$

領域…座標平面上で x, y の不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合

境界線を含む含まないの記述が必要

直線と領域

直線 $y = mx + n$ を ℓ とする.

① 不等式 $y > mx + n$ が表す領域は直線 ℓ より上側.

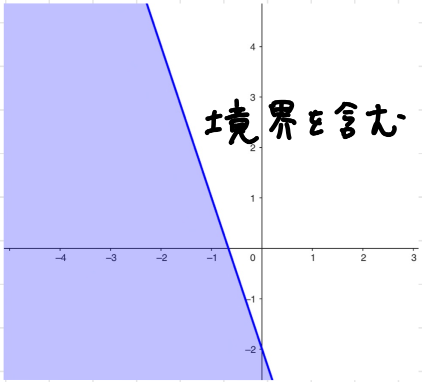
② 不等式 $y < mx + n$ が表す領域は直線 ℓ より下側.

練習 37 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $3x+y+2 \leqq 0$　　(2) $2x-3y+6 \leqq 0$

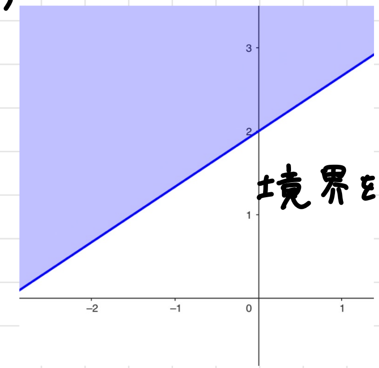
(3) $y>2$　　(4) $x \leqq -1$

(1)



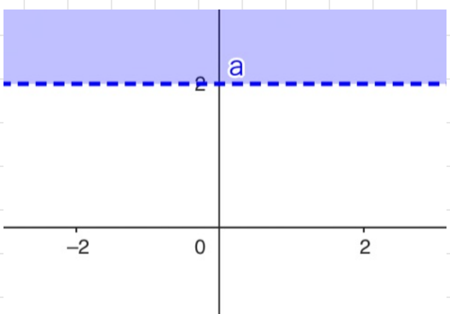
境界を含む

(2)



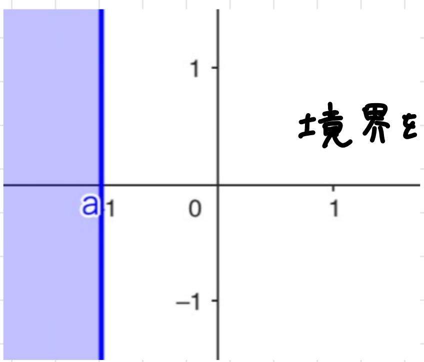
境界を含む

(3)



境界を含まない

(4)



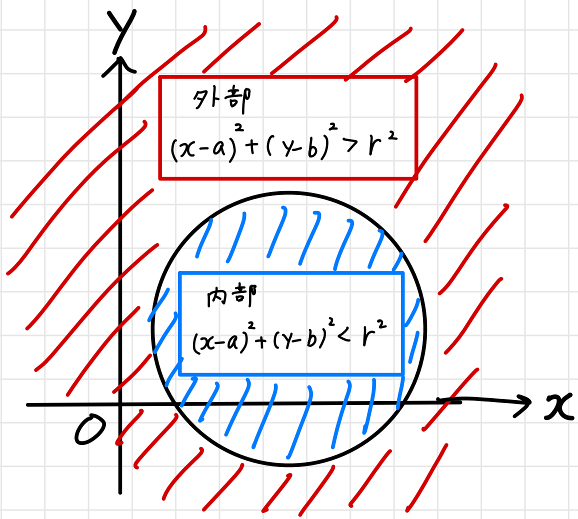
境界を含む

円と領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を円 C とする.

① 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は円 C の内部.

② 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は円 C の外部.

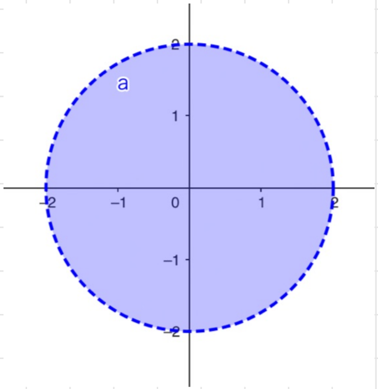


練習 38 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2+y^2<4$　　(2) $x^2+y^2\geqq 6$

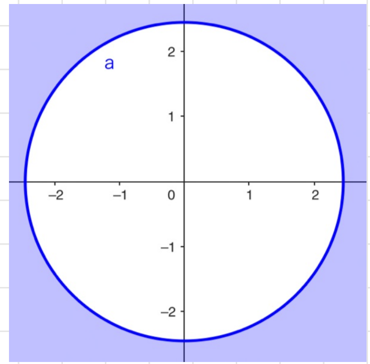
(3) $(x+2)^2+y^2\leqq 4$　　(4) $(x-1)^2+(y+3)^2>9$

(1)



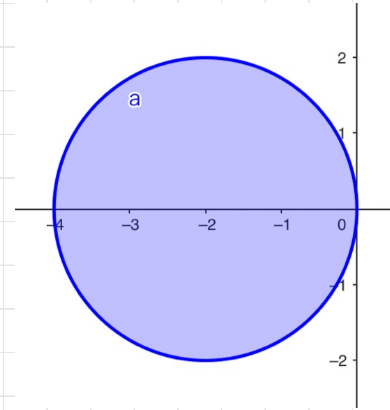
境界を含まない

(2)



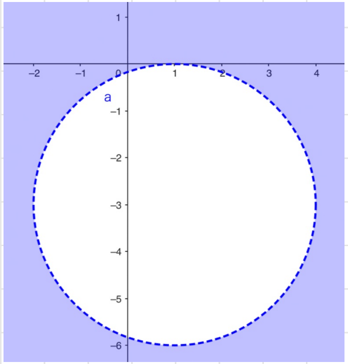
境界を含む

(3)



境界を含む

(4)



境界を含まない

練習 39 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

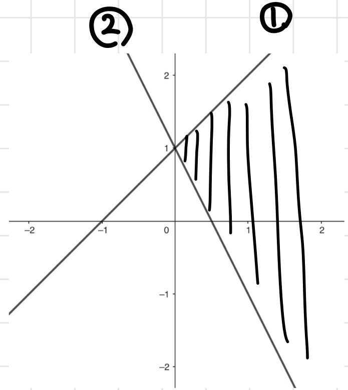
(1) $\begin{cases} x-y+1>0 \cdots ① \\ 2x+y-1>0 \cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-3 \leqq 0 \cdots ① \\ 4x-y-2 \geqq 0 \cdots ② \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2<25 \cdots ① \\ 3x-y+3<0 \cdots ② \end{cases}$

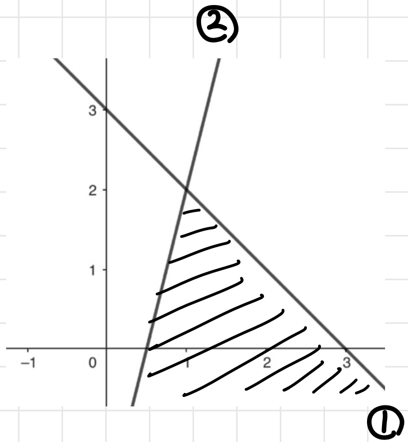
(4) $\begin{cases} (x+1)^2+y^2 \geqq 1 \cdots ① \\ x+2y+2 \geqq 0 \cdots ② \end{cases}$

(1)



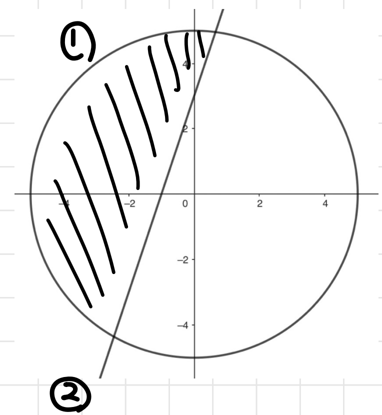
境界は含まない

(2)



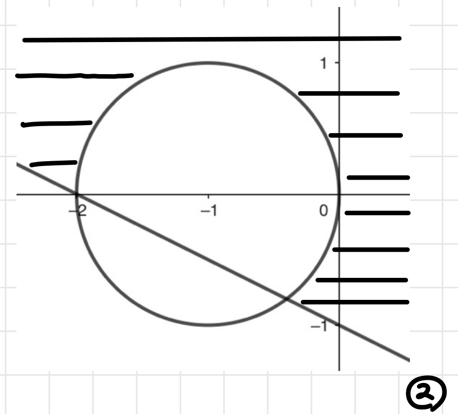
境界は含む

(3)



境界は含まない

(4)



境界は含む

練習 40

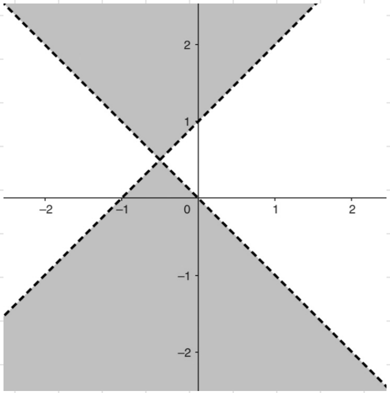
次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(x+y)(x-y+1)<0$

(2) $(x+y+2)(x+y-1)\geqq 0$

(1) $x+y<0$ かつ $x-y+1>0$

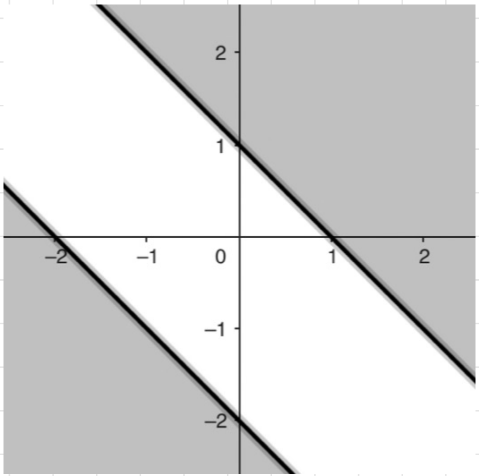
$x+y>0$ かつ $x-y+1<0$



境界は含まない

(2) $x+y+2\geqq 0$ かつ $x+y-1\geqq 0$

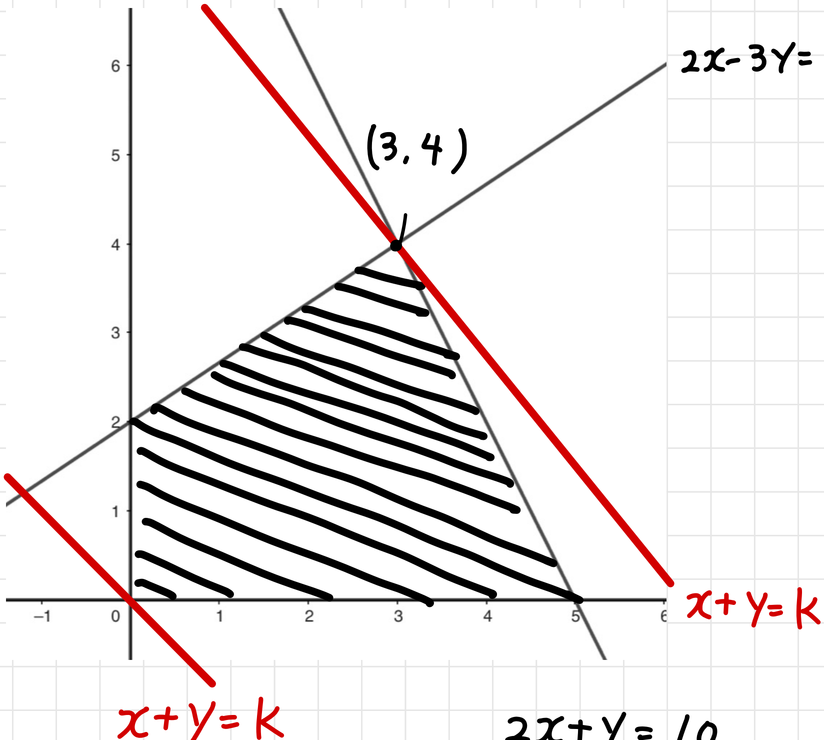
$x+y+2\leqq 0$ かつ $x+y-1\leqq 0$



境界は含む

練習 41 x, y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $2x+y \leqq 10$, $2x-3y \geqq -6$ を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

4つの不等式の共通範囲は下図



$x+y=k$ とする.

図より

$x=3,\ y=4$ のとき最大値 7

$x=0,\ y=0$ のとき最小値 0