

数Ⅲ

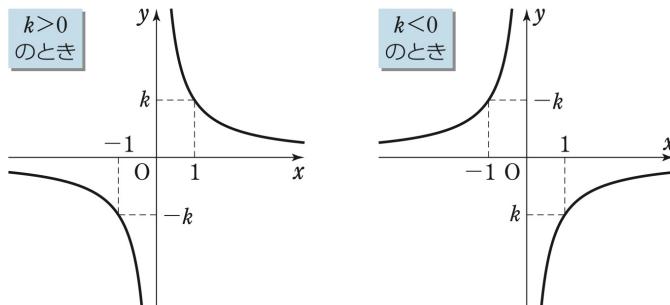
関数



・分数関数 … x の分数式で表される関数。定義域は分母を 0 にする x ： x 外の実数全体

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0) \quad x 軸と y 軸は漸近線$$

定義域は $x \neq 0$ 、値域は $y \neq 0$



〈補足〉 上のグラフは原点Oに関して対称であり、 x 軸、 y 軸は漸近線である。このように直交する 2 つの漸近線をもつ双曲線を **直角双曲線** という。

練習

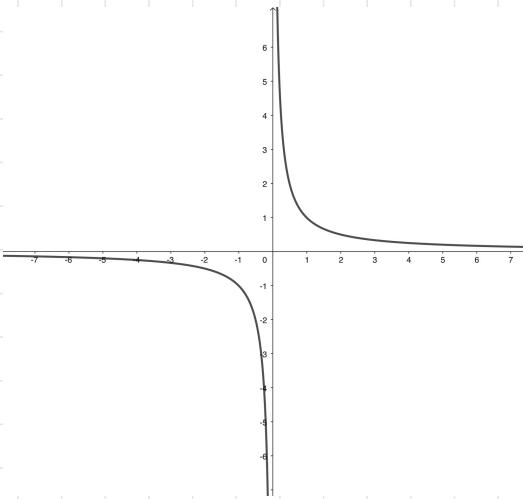
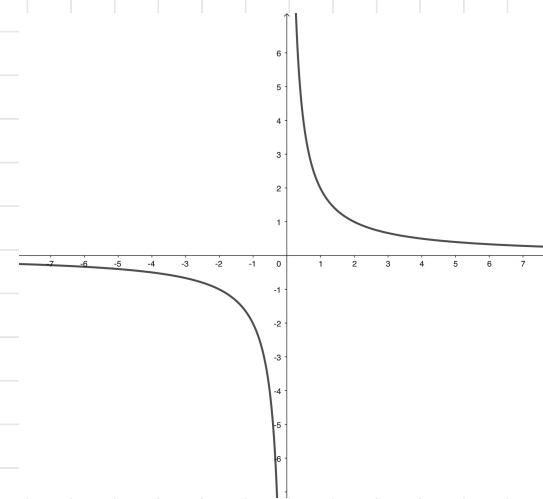
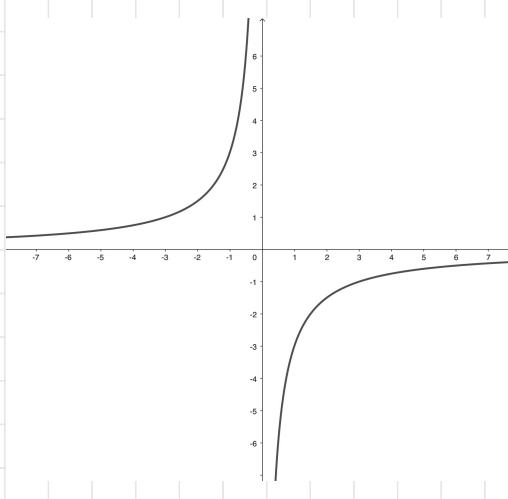
次の関数のグラフをかけ。

1

(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $y = \frac{2}{x}$

(3) $y = -\frac{3}{x}$

(1)**(2)****(3)**

$$\text{分数関数 } y = \frac{k}{x-p} + q$$

1 グラフは、 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ

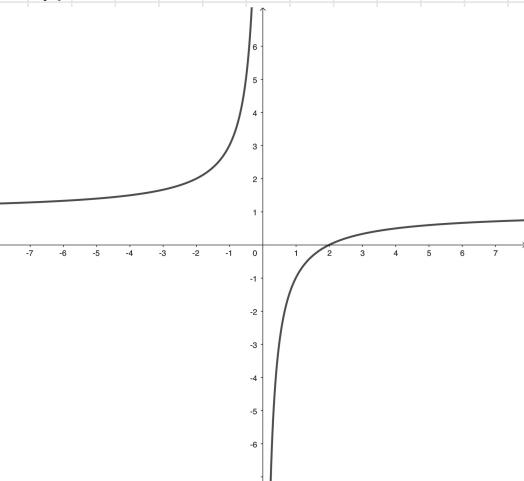
平行移動した曲線で、漸近線は 2 直線 $x = p$, $y = q$ である。

2 定義域は $x \neq p$, 値域は $y \neq q$ である。

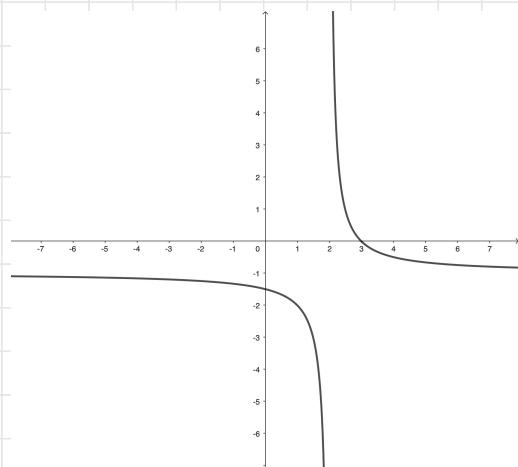
練習
2

- 次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。
- (1) $y = -\frac{2}{x} + 1$ (2) $y = \frac{1}{x-2} - 1$ (3) $y = \frac{2}{x+1} - 3$

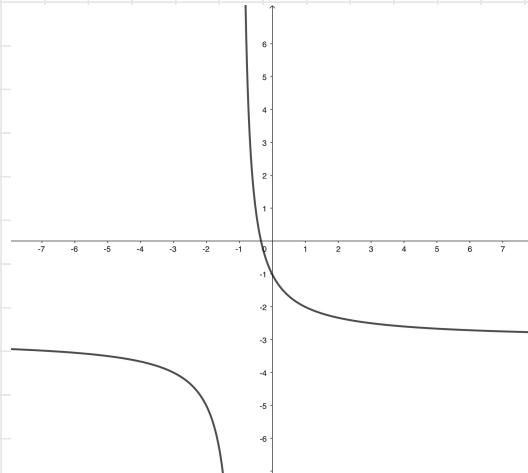
(1)



(2)



(3)



定義域 $x \neq 0$ 値域 $y \neq 1$

定義域 $x \neq 2$ 値域 $y \neq -1$

定義域 $x \neq -1$ 値域 $y \neq -3$

練習

3

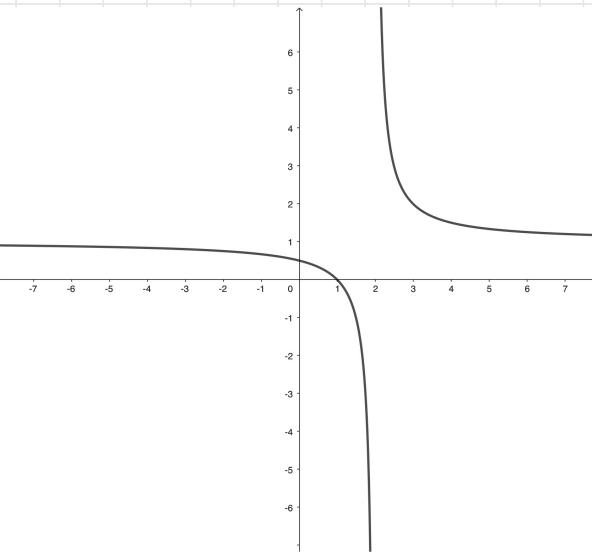
次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{x-1}{x-2}$$

$$(2) \quad y = \frac{-2x+5}{x-1}$$

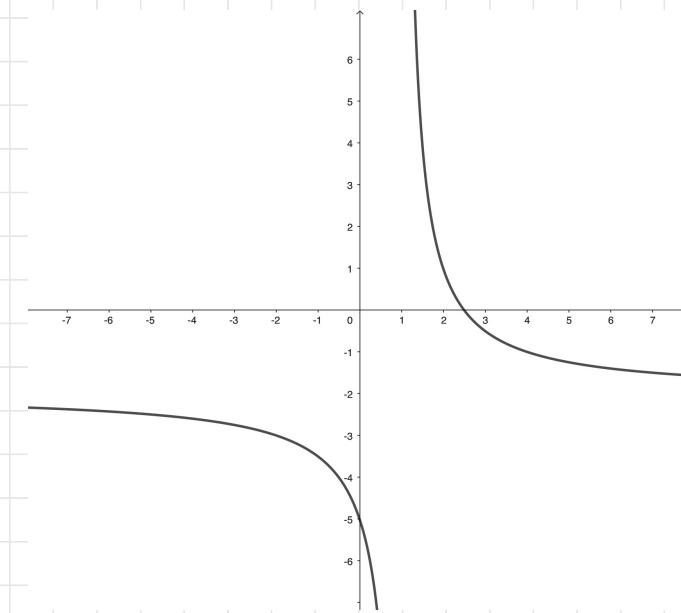
$$(3) \quad y = \frac{4x+3}{2x+1}$$

$$(1) \quad y = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$



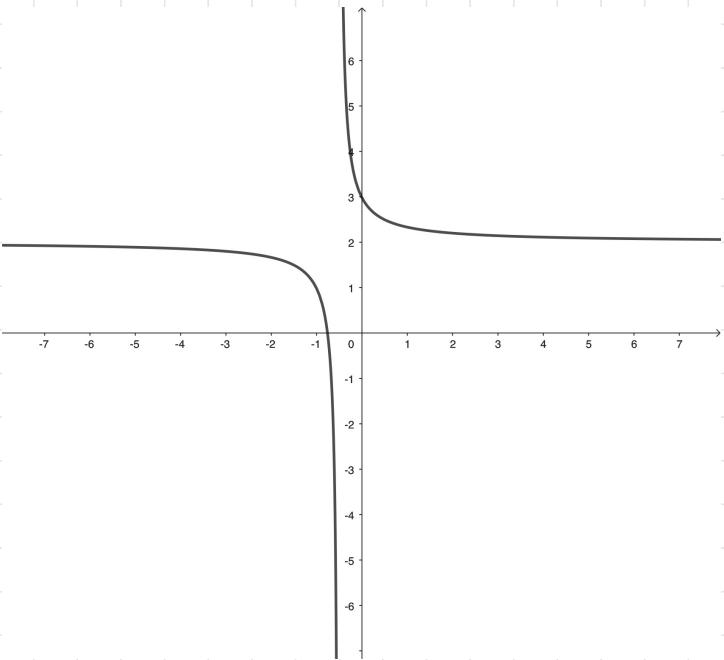
定義域 $x \neq 2$ 値域 $y \neq 1$

$$(2) \quad y = \frac{-2(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} - 2$$



定義域 $x \neq 1$ 値域 $y \neq -2$

$$(3) y = \frac{2(2x+1)+1}{2x+1} = \frac{1}{2x+1} + 2$$



定義域 $x \neq -\frac{1}{2}$ 值域 $y \neq 2$

練習
4 関数 $y = \frac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

$$(1) \quad y = x - 1 \quad (2) \quad y = \frac{1}{2}x \quad (3) \quad y = -3$$

$$(1) \quad x - 1 = \frac{3}{x+1}$$

$$(x+1)(x-1) = 3$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 - 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = -2, 2$$

$$x = -2 のとき \quad y = x - 1 \text{ に } \\ y = -2 - 1 = -3$$

$$y = -2 - 1 = -3$$

$$x = 2 のとき \quad y = x - 1 \text{ に } \\ y = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$y = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \text{共有点 } (-2, -3), (2, 1)$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}x = \frac{3}{x+1}$$

$$x(x+1) = 6$$

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3, 2$$

$$x = -3 のとき \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2}$$

$$x = 2 のとき \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\therefore \text{共有点 } \left(-3, -\frac{3}{2}\right), (2, 1)$$

$$(3) \quad -3 = \frac{3}{x+1}$$

$$-3(x+1) = 3$$

$$-(x+1) = 1$$

$$-x - 1 = 1$$

$$-x = 1 + 1$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

$$\therefore \text{共有点 } (-2, -3)$$

練習
5

次の方程式、不等式を解け。

(1) $\frac{2}{x+2} = x+3$

(2) $\frac{2}{x+2} \leq x+3$

(1)

$$\frac{2}{x+2} = x+3$$

$$2 = (x+3)(x+2)$$

$$2 = x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 + 5x + 6 = 2$$

$$x^2 + 5x + 6 - 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+4)(x+1) = 0$$

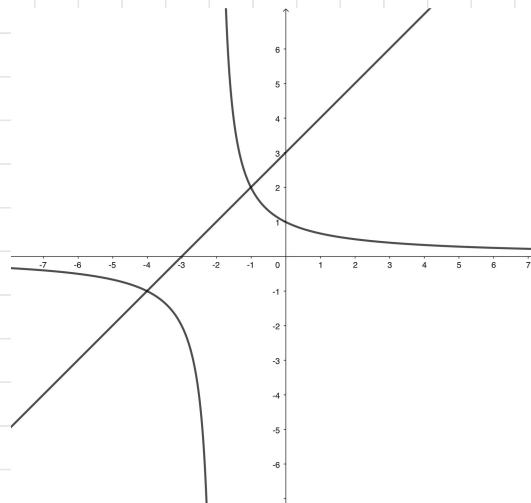
$$\underline{x = -4, -1}$$

(2)

$$\frac{2}{x+2} \leq x+3$$
 の解は

関数 $y = \frac{2}{x+2}$ のグラフが直線 $y = x+3$ との交点を含めて下側にある範囲また、 $y = \frac{2}{x+2}$ の定義域は $x \neq -2$

77は下図



左図より求める解は

$$\underline{-4 \leq x < -2, x \geq -1}$$

・無理関数 … x についての無理式で表された関数

定義域は「 $\sqrt{\quad}$ の中が 0 以上となる実数 x の全体」

無理式 … $\sqrt{\quad}$ の中に文字を含む式

無理関数 $y = \sqrt{ax}$ については、次のことがいえる。

$a > 0$ のとき

定義域は $x \geq 0$,

値域は $y \geq 0$ で,

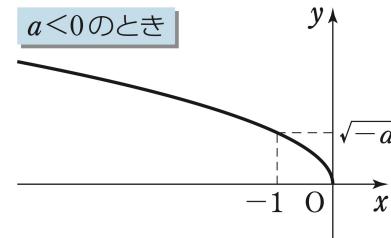
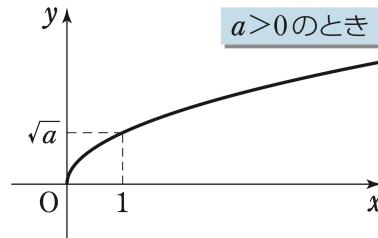
増加関数である。

$a < 0$ のとき

定義域は $x \leq 0$,

値域は $y \geq 0$ で,

減少関数である。



また、 $y = -\sqrt{ax}$ のグラフは $y = \sqrt{ax}$ と x 軸に関して対称

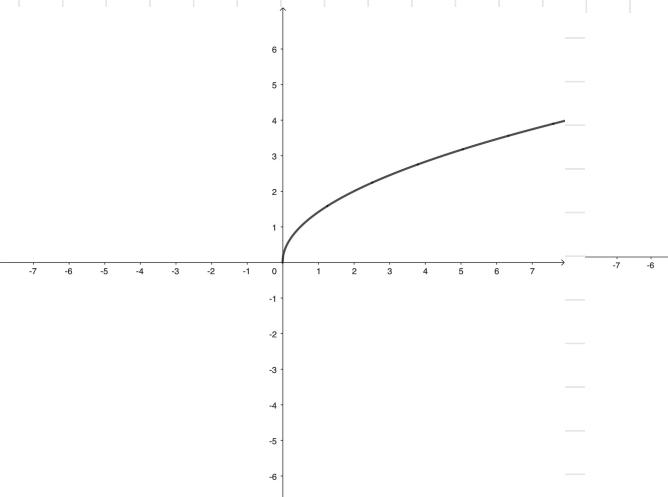
次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2x}$

(2) $y = -\sqrt{2x}$

(3) $y = \sqrt{-2x}$

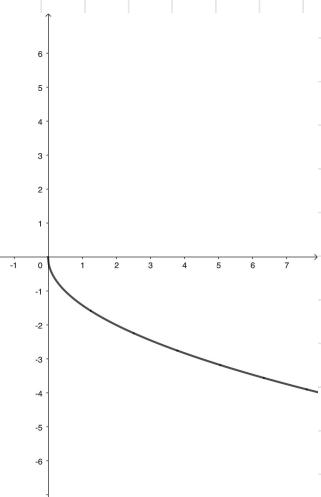
(1)



定義域 $x \geq 0$

値域 $y \geq 0$

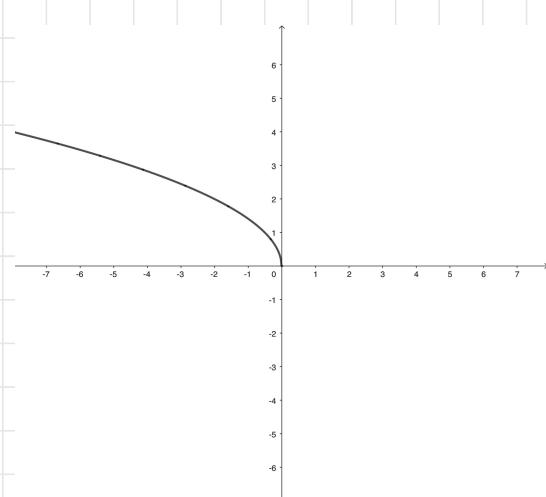
(2)



定義域 $x \geq 0$

値域 $y \leq 0$

(3)



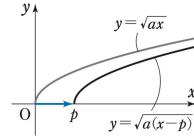
定義域 $x \leq 0$

値域 $y \geq 0$

無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)}$

1 グラフは、 $y = \sqrt{ax}$ のグラフを
 x 軸方向に p だけ平行移動
 した曲線である。

- 2 $a > 0$ のとき
 定義域は $x \geq p$, 値域は $y \geq 0$
 $a < 0$ のとき
 定義域は $x \leq p$, 値域は $y \geq 0$

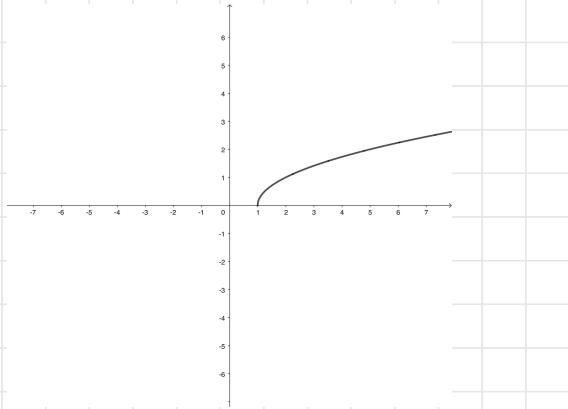


練習 7

次の関数のグラフをかけ。また、その定義域、値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-1}$ (2) $y = \sqrt{-2x+4}$ (3) $y = -\sqrt{3x+3}$

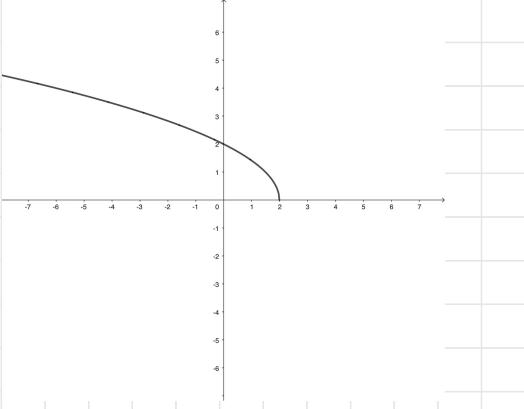
(1)



定義域 $x \geq 1$

値域 $y \geq 0$

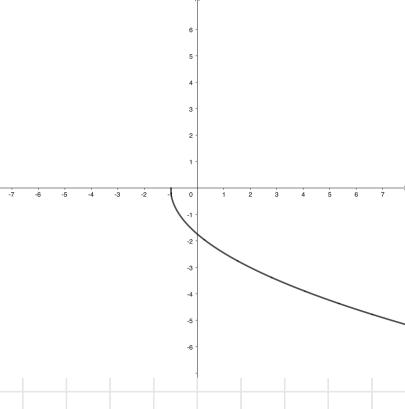
(2)



定義域 $x \leq 2$

値域 $y \geq 0$

(3)



定義域 $x \geq -1$

値域 $y \leq 0$

次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

$$(1) \quad y = \sqrt{2x+2}, \quad y = x - 3$$

$$(2) \quad y = -\sqrt{x+1}, \quad y = x - 1$$

(1)

$y = \sqrt{2x+2}$ の定義域は $x \geq -1$

値域は $y \geq 0$

$$\sqrt{2x+2} = x - 3$$

$$(\sqrt{2x+2})^2 = (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 = (\sqrt{2x+2})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x + 2$$

$$x^2 - 6x + 9 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-1)(x-7) = 0$$

$$x = 1, 7$$

$$x = 7 \text{ のとき } y = x - 3 \text{ より}$$

$$y = 7 - 3 = 4$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = x - 3 \text{ より}$$

$$y = 1 - 3 = -2$$

これは $y \geq 0$ より不適

∴

$$(7, 4)$$

(2)

$y = -\sqrt{x+1}$ の定義域は $x \geq -1$
値域は $y \leq 0$

$$-\sqrt{x+1} = x - 1$$

$$(-\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = (-\sqrt{x+1})^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 - x - 1 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, 3$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = x - 1 \text{ より}$$

$$y = 0 - 1 = -1$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = x - 1 \text{ より}$$

$$y = 3 - 1 = 2$$

これは $y \leq 0$ より不適

$$\underline{(0, -1)}$$

次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \sqrt{x-1} = -x+3$$

$$(2) \sqrt{x-1} \leq -x+3$$

(1)

$$(\sqrt{x-1})^2 = (-x+3)^2$$

$$(-x+3)^2 = (\sqrt{x-1})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = x - 1$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2, 5$$

これらのうち方程式をみたすのは

$$\underline{x = 2}$$

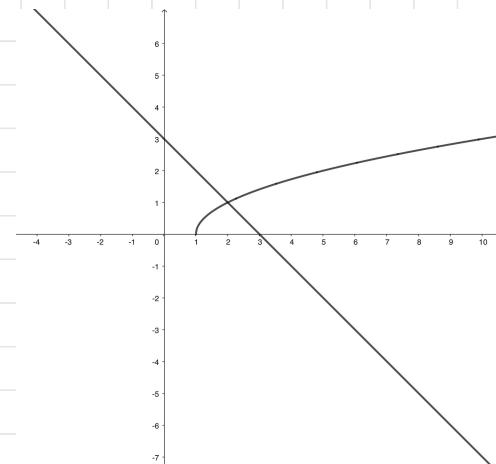
(2)

$\sqrt{x-1} \leq -x+3$ の解は

関数 $y = \sqrt{x-1}$ のグラフが直線 $y = -x+3$ との交点を含めて下側にある範囲

また、 $y = \sqrt{x-1}$ の定義域は $x \geq 1$

グラフは下図



左図より求める解は

$$\underline{1 \leq x \leq 2}$$

・逆関数… $y = f(x)$ が “ y の値を 1 つ定めると x の値が“ただ” 1 つ定まる関数であるとき

この $y = f(x)$ を x について解いた式の x と y を入れかえて “ $y = g(x)$ ” のこと。 $f^{-1}(x)$ と表す。

$f(x)$ が増加関数または減少関数であるとき $f(x)$ の逆関数が存在する。

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1 $y = f(x)$ を x について解き、 $x = g(y)$ の形にする。

2 x と y を入れかえて、 $y = g(x)$ とする。

逆関数 $g(x)$ の定義域は、もとの関数 $f(x)$ の値域と同じ。

関数 $y = \sqrt{x}$ では、定義域 $x \geq 0$ の表示は省略することが多い。

関数 $y = \log_2 x$ では、定義域 $x > 0$ の表示は省略することが多い。

練習
10

次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = 3x - 1$ ($0 \leq x \leq 2$)

(2) $y = -\sqrt{x}$

(3) $y = 3^x$

(4) $y = \log_4 x$

(1)

$0 \leq x \leq 2$ より 値域は $-1 \leq y \leq 5$

$$y = 3x - 1$$

$$3x = y + 1$$

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

よって逆関数は

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad (-1 \leq y \leq 5)$$

(2)

値域は $y \leq 0$

$$y = -\sqrt{x}$$

$$y^2 = (-\sqrt{x})^2$$

$$y^2 = x$$

$$x = y^2$$

よって逆関数は

$$y = x^2 \quad (x \leq 0)$$

(3)

値域は $y > 0$

$$y = 3^x$$

$$\log_3 y = \log_3 3^x$$

$$\log_3 y = x$$

$$x = \log_3 y$$

よって逆関数は

$$y = \log_3 x \quad (x > 0)$$

(4)

値域は 実数全体

$$y = \log_4 x$$

$$x = 4^y$$

よって逆関数は

$$y = 4^x$$

次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = \frac{2x+3}{x-1}$

(2) $y = \frac{-x+2}{x+3}$

(1)

$$y = \frac{2(x-1)+5}{x-1}$$

また、 $y = \frac{2x+3}{x-1}$

$$= \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

$$(x-1)y = 2x+3$$

$$xy - y = 2x + 3$$

$$= 2 + \frac{5}{x-1}$$

$$xy - 2x = y + 3$$

$$= \frac{5}{x-1} + 2$$

$$(y-2)x = y + 3$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

値域または $y \neq 2$

よって逆関数は

$$y = \frac{x+3}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

(2)

$$y = \frac{-(x+3)+5}{x+3}$$

また、 $y = \frac{-x+2}{x+3}$

$$= \frac{-(x+3)}{x+3} + \frac{5}{x+3}$$

$$(x+3)y = -x + 2$$

$$= -1 + \frac{5}{x+3}$$

$$xy + 3y = -x + 2$$

$$xy + x = -3y + 2$$

$$= \frac{5}{x+3} - 1$$

$$(y+1)x = -3y + 2$$

$$x = \frac{-3y+2}{y+1}$$

値域または $y \neq -1$

よって逆関数は

$$y = \frac{-3x+2}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

次の関数の逆関数を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2 + 2 \quad (x \geq 0)$$

$$(2) \quad y = -x^2 \quad (x \leq 0)$$

(1)

1直線または $y \geq 2$

$$\text{また, } y = x^2 + 2$$

$$x^2 = y - 2$$

$$x = \pm\sqrt{y-2}$$

$x \geq 0$ より

$$x = \sqrt{y-2}$$

よって逆関数は

$$y = \sqrt{x-2} \quad (x \geq 2)$$

(2)

1直線または $y \leq 0$

$$\text{また, } y = -x^2$$

$$x^2 = -y$$

$$x = \pm\sqrt{-y}$$

$x \leq 0$ より

$$x = -\sqrt{-y}$$

よって逆関数は

$$y = -\sqrt{-x} \quad (x \leq 0)$$

逆関数の定義から、次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

練習

13

$a \neq 0$ とする。関数 $f(x) = ax + b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、

$f(2) = 4, f^{-1}(1) = -4$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$f(2) = 4 \text{ なので } 2a + b = 4 \cdots ①$$

$$f^{-1}(1) = -4 \text{ なので } f(-4) = 1 \text{ より } -4a + b = 1 \cdots ②$$

$$\begin{aligned} \text{①②を連立すると } a &= \frac{1}{2} \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$\underline{a = \frac{1}{2}, b = 3}$$

関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、
直線 $y = x$ に関して対称である。

練習
14

次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(1) $y = \sqrt{-x}$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

(1)

値域は $y \geq 0$

また、 $y = \sqrt{-x}$

$$y^2 = (\sqrt{-x})^2$$

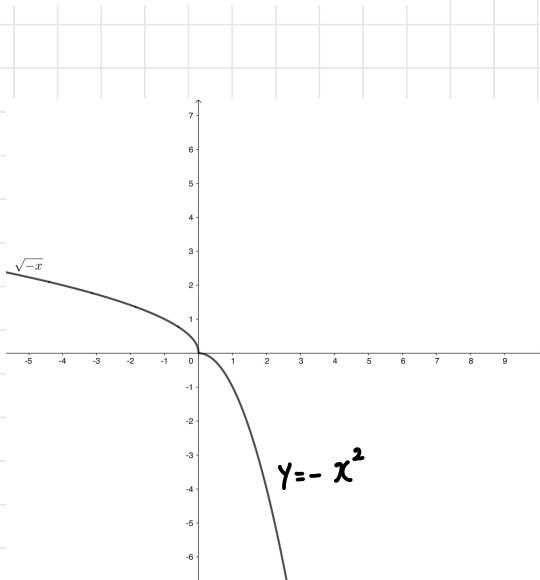
$$(\sqrt{-x})^2 = y^2$$

$$-x = y^2$$

$$x = -y^2$$

よって逆関数は

$$y = -x^2 \quad (x \geq 0)$$



(2)

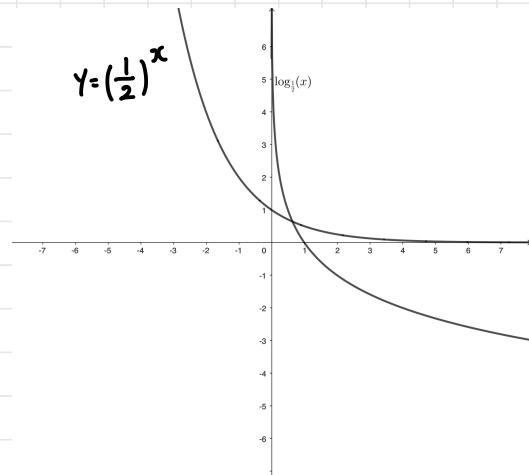
値域は実数全体

また、 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

よって逆関数は

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



・合成関数 … 2つの関数 $f(x), g(x)$ について $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき
 $f(x)$ と $g(x)$ から考える新しい関数 $g(f(x))$ のこと。 $g(f(x))$ は $(g \circ f)(x)$ とも書く。
一般に $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない

練習 15 $f(x) = x^2, g(x) = \log_2(x+1), h(x) = 2^x - 1$ について、次の合成関数を求めよ。

$$(1) (g \circ f)(x) \quad (2) (f \circ g)(x) \quad (3) (g \circ h)(x)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \log_2(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = \log_2(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \left\{ \log_2(x+1) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= \log_2(2^x - 1 + 1) \\ &= \log_2 2^x \\ &= x \log_2 2 \\ &= x \end{aligned}$$

$$(g \circ h)(x) = x$$
