

# 数工

---

集合と命題

---

---

---

---



- ・ 集合 … 範囲がはっきりしたものの集まり
  - ・ 要素 … 集合を構成するもの

(例) 1から10までの自然数の集まり

集合

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

$x$  が集合  $A$  に属するとき  $x \in A$  と書く。

$x$  が集合  $A$  に属さないとき  $x \notin A$  と書く。

**練習**  
**1** 有理数全体の集合を  $Q$  とする。次の□に  
適する記号  $\in$  または  $\notin$  を入れよ。

(1)  $4 \square Q$

$$(2) \quad -\frac{2}{3} \square Q$$

(3)  $\sqrt{2} \square Q$

$$(1) \ 4 \in \mathbb{Q} \quad (2) -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad (3) \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

集合には2通りの書き表し方がある

① 集合Aの要素を全て並べる.  $\Rightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

② 集合Aの式と条件のみを書く.  $\Rightarrow A = \{\text{式} | \text{条件}\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A  $A = \{x | x \text{は } 1 \text{から } 10 \text{までの自然数}\}$

練習 2 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 20の正の約数全体の集合A

$$(1) A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

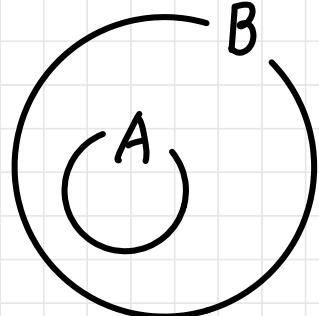
(2)  $B = \{x | x \text{は } 10 \text{以下の正の奇数}\}$

$$(2) B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(3)  $C = \{3n+1 | n=0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$(3) C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

- ・ 部分集合 … 集合Aの要素の全こが集合Bに含まれているときの集合A



このとき、AはBに含まれる  $\rightarrow A \subset B$  と書く

BはAを含む  $\rightarrow B \supset A$  と書く。

また、AとBの要素が一致しているとき  $A = B$ . AとBは等しい。

(例) 集合Aを10以下の正の奇数、集合Bを1から10までの自然数

とすると  $A \subset B$  が成立。

- ・ 空集合 … 要素が1つもない集合。記号 $\emptyset$ (フイ)で表す。  
空集合は全ての集合の部分集合である。

練習

3

次の2つの集合の関係を、 $\subset$ ,  $=$ を使って表せ。

- (1)  $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (2)  $C = \{1, 2, 5, 10\}$ ,  $D = \{x \mid x \text{は } 10 \text{ の正の約数}\}$
- (3)  $P = \{x \mid x \text{は } 12 \text{ 以下の自然数}\}$ ,  $Q = \{x \mid x \text{は } 12 \text{ の正の約数}\}$

$$(1) A \subset B$$

$$(2) D = \{1, 2, 5, 10\} \text{ なり}$$

$$C = D$$

$$(3) P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$P \supset Q$$

練習

4

次の集合の部分集合をすべてあげよ。

- (1)  $\{1, 2\}$
- (2)  $\{a, b, c\}$

$$(1) \emptyset$$

$$\{1\}, \{2\}$$

$$\{1, 2\}$$

$$(2)$$

$$\emptyset$$

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

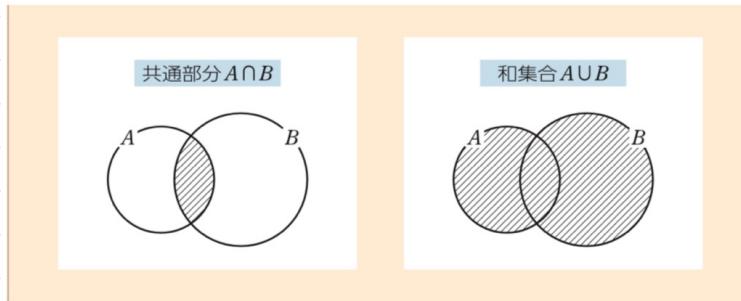
$$\{a, b, c\}$$

・ 共通部分 … 集合Aと集合Bの両方に属する要素の集合

$A \cap B$  と表す。 (共通部分がないとき,  $A \cap B$  の要素は  $\emptyset$ )

・ 和集合 … 集合A, 集合Bの少なくともどちらか一方に属する要素の集合

$A \cup B$  と表す。



練習  
5

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3\}$  について、次の  
集合を求めよ。

(1)  $A \cap B$

(2)  $A \cup B$

(3)  $B \cap C$

(4)  $B \cup C$

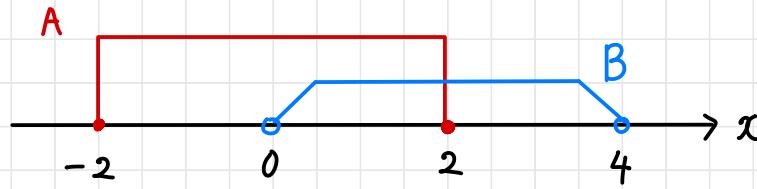
(1)  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(2)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$  (3)  $B \cap C = \emptyset$

(4)  $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習  
6

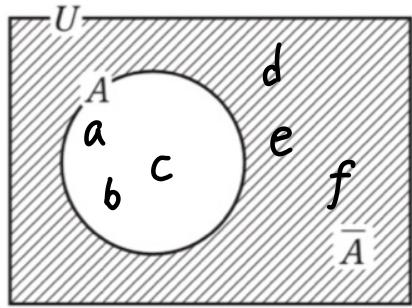
$A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$ ,  $B = \{x \mid 0 < x < 4, x \text{ は実数}\}$  について,  $A \cap B$  と  $A \cup B$  を求めよ。



$$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 2, x \text{ は実数}\}$$

$$A \cup B = \{x \mid -2 \leq x < 4, x \text{ は実数}\}$$

- ・ 补集合 … 全体集合  $U$  の部分集合  $A$  に対して,  $U$  の要素であるが  $A$  に属さない要素の集合. 全体集合  $U$  の部分集合  $A$  の补集合は  $\bar{A}$  と表す.
- ・ 全体集合 … 集合  $A$  を部分集合にもつ集合. 全体集合は  $U$  で表す.



左図のように要素が入っているとき

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\bar{A} = \{d, e, f\}$$

### 補集合の性質

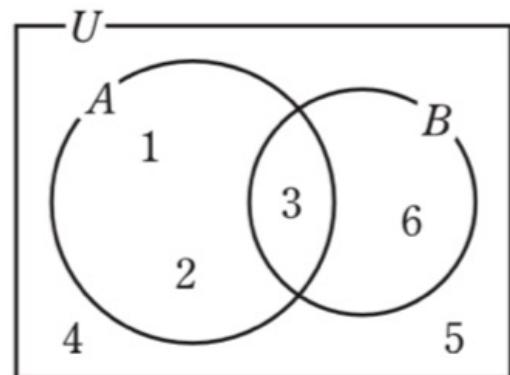
$U$  を全体集合とし,  $A, B$  をその部分集合とするとき

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = U, \quad \bar{\bar{A}} = A$$

$$A \subset B \text{ ならば } \bar{A} \supset \bar{B}$$

例 7 の集合  $U$  と  $A$ ,  $B$  について、次の集合を求めよ。

- (1)  $\overline{B}$
- (2)  $\overline{A \cap B}$
- (3)  $\overline{A} \cap \overline{B}$
- (4)  $\overline{A} \cup \overline{B}$
- (5)  $\overline{A} \cap B$
- (6)  $A \cap \overline{B}$



$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 6\}$$

$$\overline{A} = \{4, 5, 6\}, \quad \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$(1) \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\} \quad (2) \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\} \quad (3) \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$$

$$(4) \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\} \quad (5) \overline{A} \cap B = \{6\} \quad (6) A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$$

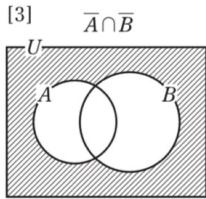
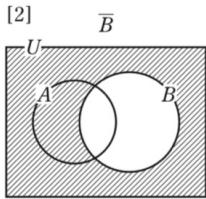
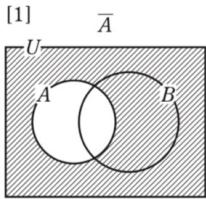
## ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$\overline{A}$  と  $\overline{B}$  は、それぞれ図[1]と図[2]の斜線部分であり、その共通部分

5  $\overline{A} \cap \overline{B}$  は、図[3]の斜線部分である。

図[3]の斜線部分は  $\overline{A \cup B}$  であるから、 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  が成り立つ。

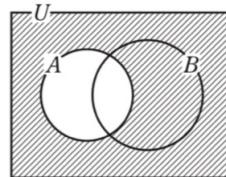


練習  
8

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つことを、図を用いて確かめよ。

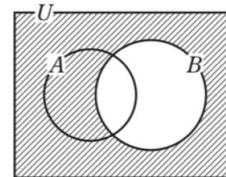
[1]

$\overline{A}$



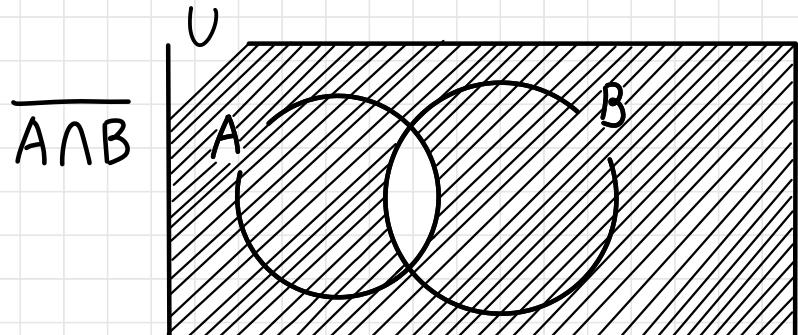
[2]

$\overline{B}$



[1][2] より  $\overline{A} \cup \overline{B}$  は  $\overline{A \cap B}$  である

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$



## ・3つの共通部分と和集合

3つの集合の共通部分 … 3つの集合  $A, B, C$  のすべてに属する要素全体の集合

$A \cap B \cap C$  と書く。

3つの集合の和集合 …  $A, B, C$  の少なくとも1つに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$  と書く。

---

練習  $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  に

1 ついて、 $A \cap B \cap C$  と  $A \cup B \cup C$  を求めよ。

$$A \cap B \cap C = \{2, 6\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

・命題 … 一般に正しいか正しくないかが定まる文や式

命題が正しいときその命題は真である。

命題が正しくないときその命題は偽である。

・条件 … 文字  $x$  を含む文や式で  $x$  に値を代入することで真偽が定まるもの

全体集合 … 条件を考えるときの条件に含まれる文字を要素とする集合

練習

9

次の命題の真偽を述べよ。

- (1) 円周率  $\pi$  は有理数である。
- (2) 実数  $-1$  について  $(-1)^2 \geq 0$  である。

(1)  $\pi$  は無理数なので偽

(2) 真

### 命題 $p \Rightarrow q$

- 命題  $p \Rightarrow q$  は、「 $p$ を満たすものはすべて  $q$  を満たす」ということを表す。
- 条件  $p$  を満たすものの全体の集合を  $P$ , 条件  $q$  を満たすものの全体の集合を  $Q$  とするとき, 「命題  $p \Rightarrow q$  が真である」と「 $P \subset Q$  が成り立つ」とは同じことである。

$P$ : 仮定

$Q$ : 結論

練習  
10

次の条件  $p, q$  について, 命題  $p \Rightarrow q$  の真偽を, 集合を用いて調べよ。

(1) 実数  $x$  に関する 2 つの条件  $p : x \leq 2, q : x \leq 4$

(2) 自然数  $m$  に関する 2 つの条件

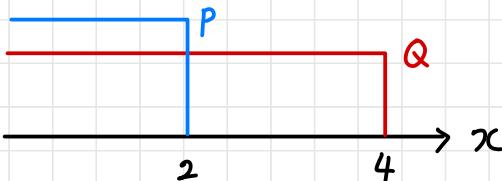
$p : m$  は 12 の正の約数,  $q : m$  は 24 の正の約数

(3) 実数  $x$  に関する 2 つの条件  $p : -1 < x < 1, q : x > 0$

(1) 2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{x \mid x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid x \leq 4\}$$
 とする。



(2)

2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{m \mid m \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

$$Q = \{m \mid m \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$$
 とする。

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

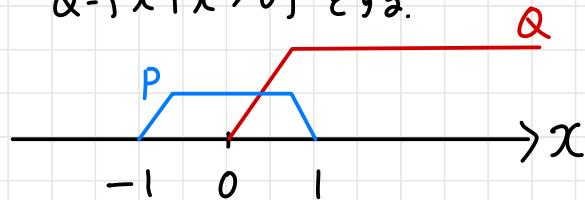
$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$P \subset Q$  でないのが 偽

(3) 2 つの集合  $P, Q$  を

$$P = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

$$Q = \{x \mid x > 0\}$$
 とする。



上図より  $P \subset Q$  なので 真

・反例…命題  $p \Rightarrow q$  が偽であることを示す例

練習  
11

$n$  は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

$n$  が素数ならば、 $n$  は奇数である。

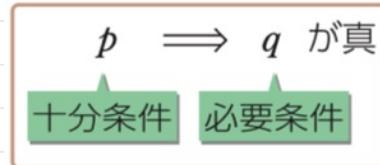
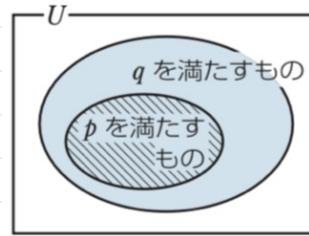
$n=2$  は素数たゞが偶数なのでこの命題は偽である。

## 2つの条件 $P, Q$ について

- 命題  $P \Rightarrow Q$  が「真」であるとき

$P$ は  $Q$ であるための十分条件

$Q$ は  $P$ であるための必要条件



- 命題  $P \Rightarrow Q$  が成り立つかつ  $Q \Rightarrow P$  が成り立つとき

$P$ は  $Q$ であるための必要十分条件である。

$Q$ は  $P$ であるための必要十分条件である。

(このとき  $P$ と  $Q$ は同値( $P=Q$ )である。)

条件  $P, Q$ を満たすものの全体の集合を  $P, Q$  とすると,  $P \Leftrightarrow Q$  が成り立つことと  $P = Q$  は同じ。

練習  
12  $x, y$  は実数とする。次の  に、「必要」、「十分」のうち、適する言葉を入れよ。

- (1)  $x = -2$  は  $x^2 = 4$  であるための  条件である。
- (2)  $x > 0$  は  $x > 1$  であるための  条件である。
- (3)  $x = y$  は  $(x-y)x = 0$  であるための  条件である。

$x, y, z$  は実数とする。次の中で、 $x = y$  と同値な条件をすべて選べ。

- ①  $x+z = y+z$     ②  $x^2 = y^2$     ③  $(x-y)^2 = 0$

① は両辺から  $z$  を引くと  $x = y$

② は  $x = \pm y$

③ は  $x-y = \pm 0 \Rightarrow x = y$

よって ① と ③

$x, y$  は実数とする。次の  に、

「必要条件であるが十分条件ではない」、

「十分条件であるが必要条件ではない」、

「必要十分条件である」

のうち、適する言葉を入れよ。

- (1)  $\triangle ABC$  が正三角形であることは、 $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるための 。
- (2)  $x < 3$  は  $-1 < x < 1$  であるための 。
- (3)  $|x| = |y|$  は  $x^2 = y^2$  であるための 。

(1) 十分条件であるか 必要条件でない

(2) 必要条件であるか 十分条件でない

(3) 必要十分条件である。

・条件の否定 … 条件  $P$  に対して存在する「 $P$  でない」条件.  $P$  に対して  $\bar{P}$  で表す.

---

練習  
15

$n$  は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)  $n$  は偶数である

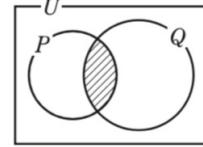
(2)  $n$  は 5 より小さい

(1)  $n$  は奇数である. (2)  $n$  は 5 以上である.

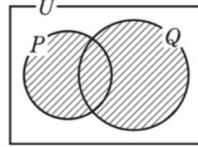
全体集合を  $U$  とし、 $U$  の要素の中で、条件  $p$ ,  $q$  を満たすものの全体の集合を、それぞれ  $P$ ,  $Q$  で表す。

条件「 $p$ かつ $q$ 」、「 $p$ または $q$ 」、 $\bar{p}$  と集合の関係は、次のようになる。

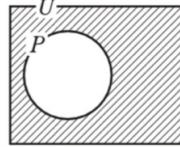
条件  $p$ かつ $q$   
集合  $P \cap Q$



条件  $p$ または $q$   
集合  $P \cup Q$



条件  $\bar{p}$   
集合  $\bar{P}$



「かつ」の否定、「または」の否定

$$\begin{aligned}\overline{p \text{かつ} q} &\Leftrightarrow \overline{p} \text{ または } \overline{q} \\ \overline{p \text{ または } q} &\Leftrightarrow \overline{p} \text{かつ} \overline{q}\end{aligned}$$

「ともに」の否定は「少なくとも一方」、  
「少なくとも一方」の否定は「ともに」

練習

16

$x, y$  は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$       (2)  $x = 0$  または  $y = 0$   
(3)  $x, y$  はともに有理数

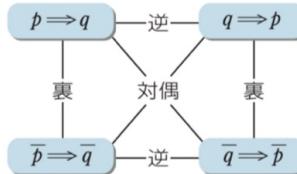
(1)  $x < 0$  または  $y < 0$     (2)  $x \neq 0$  かつ  $y \neq 0$

(3)  $x, y$  の少なくとも一方は無理数

命題  $p \Rightarrow q$  に対して

- |   |    |
|---|----|
| $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の             | 逆  |
| $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の | 対偶 |
| $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の | 裏  |

という。命題  $p \Rightarrow q$  とその逆、対偶、裏は、互いに右の図のような関係にある。



もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

※ 文才偶の真偽は一致する。

練習  
17

$x, y$  は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、対偶、裏を述べ、それらの真偽を調べよ。

(1)  $x > y \Rightarrow x - y > 0$       (2)  $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

(1) 真

(2) 偽

逆  $x - y > 0 \Rightarrow x > y$  真

逆  $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$  真

裏  $x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$  真

裏  $x = 0 \Rightarrow xy = 0$  真

対偶  $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$  真

対偶  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  偽