数C

平面上のベクトル

ベクトル …始点から終点へ向きと大きさをもつ量

$\overrightarrow{AB}$ … 始点Aから終点Bへ向かうベクトル

ABの長さが$\overrightarrow{AB}$の大きさ. $\overrightarrow{AB}$の大きさを$|\overrightarrow{AB}|$と表記する.

ベクトルは$\vec{a}$, $\vec{b}$とも表す.

ベクトルにおいて向きと大きさが同じベクトルは等しい.

(例) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$が等しいとは$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$と表記する.

また,ベクトル$\vec{a}$と大きさが等しく向きが反対のベクトルを逆ベクトルといい.

$\vec{a}$の逆ベクトルは$-\vec{a}$と表す.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき，$-\vec{a} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

また，$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

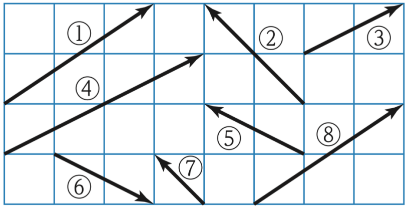
練習 1 右の図に示されたベクトルについて，次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。

(1) 大きさが等しいベクトル

(2) 向きが同じベクトル

(3) 等しいベクトル

(4) 互いに逆ベクトル



(1) ①と⑧，③と⑤と⑥

(2) ①と⑧，②と⑦，③と④

(3) ①と⑧

(4) ⑤と⑥

ベクトルの加法

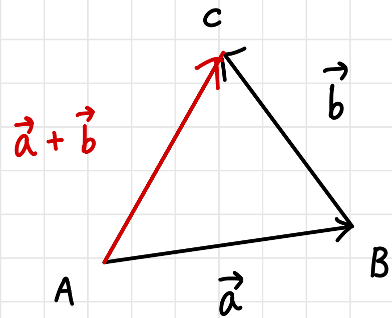
右図において $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

つまり $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

以下が成立

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

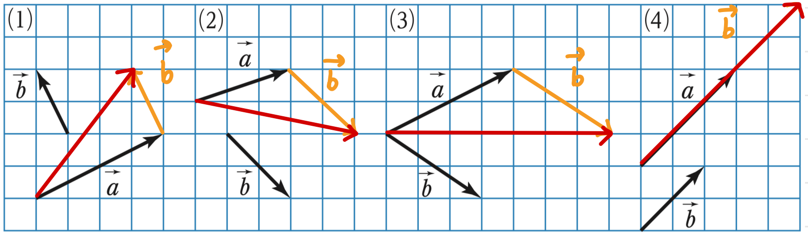


ベクトルの加法の性質

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(交換法則)}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{(結合法則)}$$

練習 2 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



上図赤矢印が答え.

$\vec{a}+\vec{b}$ は

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ となる $\vec{c}$ のこと.

$\vec{b}$ を平行移動させ，ベクトルを合成

($\vec{a}$ の終点に $\vec{b}$ の始点を合わせる)

練習 3 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}$$

(左辺) $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{CD}=$ (右辺)

(左辺) $=$ (右辺) となるので

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}$

零ベクトル…大きさが0のベクトル．向きは考えない．始点と終点が同じベクトル

零ベクトルに対して以下が成立

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0} \qquad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

練習 4 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC}+(-\overrightarrow{AC})\\ &= \vec{0}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって

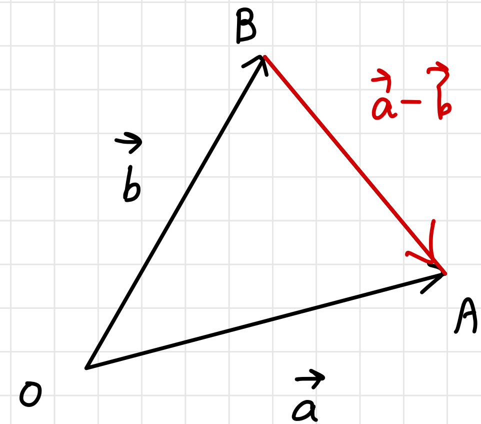
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

ベクトルの減法

図において $\vec{a}$, $\vec{b}$ を定める.

$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ をみたす $\vec{c}$ を

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差といい $\vec{a}-\vec{b}$ とかく.



一般に $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ なので次下が成立

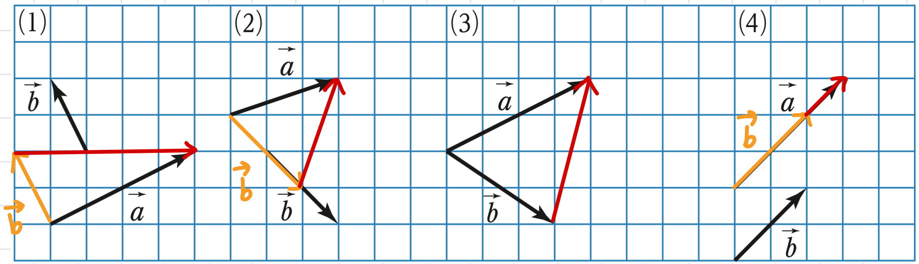
$$\boxed{\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}$$

ベクトルの減法の性質

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$$

練習 5　練習 2 のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



上図赤矢印が答え.

$\vec{a}-\vec{b}$ は

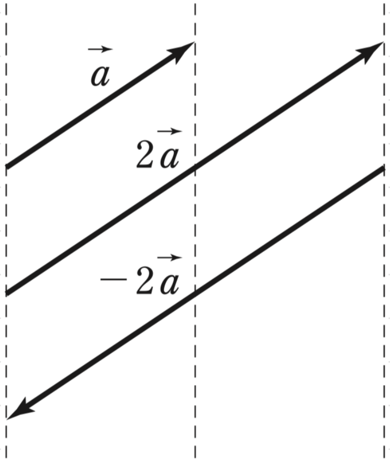
$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ となる $\vec{c}$ のこと.

$\vec{b}$ を平行移動させ, ベクトルを合成

($\vec{a}$ の始点に $\vec{b}$ の始点を合わせる)

ベクトルの実数倍

実数kとベクトル$\vec{a}$に対し$\vec{a}$のk倍のベクトルk$\vec{a}$を次のように定める.



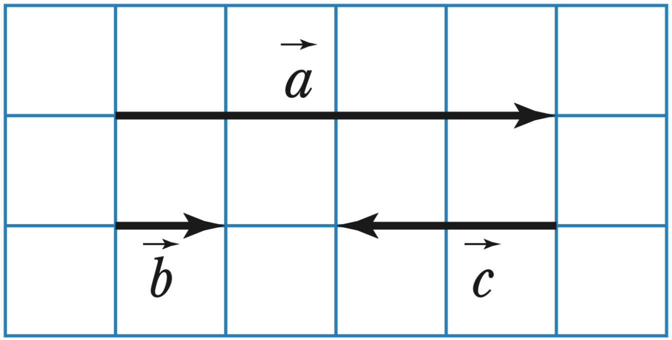
① $k>0$ならば $\vec{a}$と向きが同じ 大きさk倍のベクトル

② $k<0$ならば $\vec{a}$と向きが反対 大きさ$|k|$倍のベクトル

③ $k=0$ならば$\vec{0}$ $\vec{a}=\vec{0}$のときどんなkに対しても$\vec{0}$である.

練習 6 例3のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$について，次の（　）に適する実数を求めよ。

(1) $\vec{b}=(\quad)\vec{a}$　　(2) $\vec{a}=(\quad)\vec{c}$　　(3) $\vec{b}=(\quad)\vec{c}$



(1) $\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{a}$

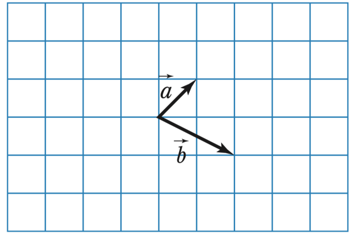
(2) $\vec{a}=-2\vec{c}$

(3) $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{c}$

練習 7 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

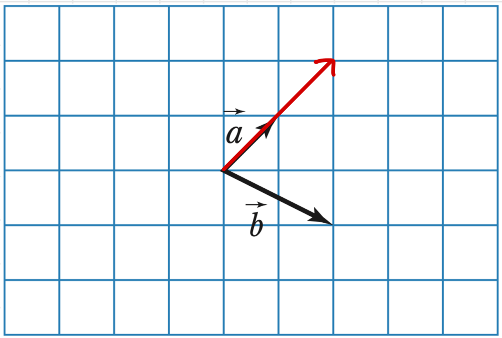
(1) $2\vec{a}$　　(2) $-2\vec{b}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　　(4) $\vec{a}-2\vec{b}$

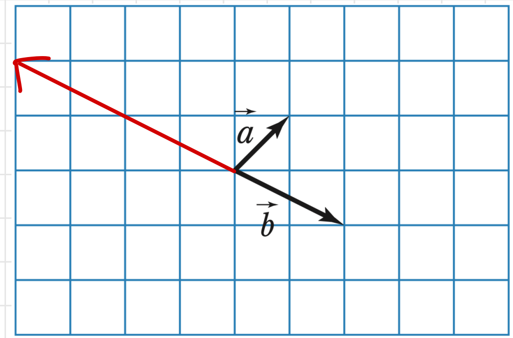


赤矢印が答え

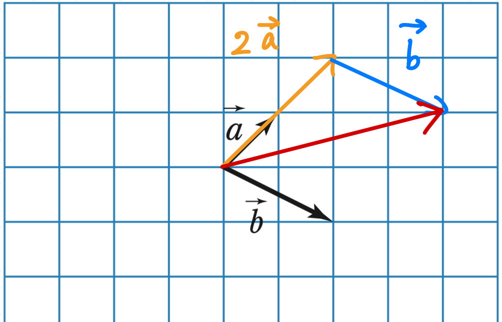
(1)



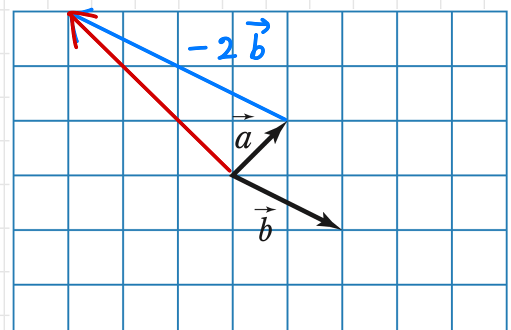
(2)



(3)



(4)



ベクトルの実数倍の性質

k, l は実数とする。

1 $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

2 $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

3 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

練習 8 次の計算をせよ。

(1) $\vec{a}+3\vec{a}-2\vec{a}$ (2) $2(\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

(1) $2\vec{a}$

(2) $2\vec{a}-6\vec{b}-9\vec{a}+6\vec{b}$

$=-7\vec{a}$

ベクトルの平行

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は向きが同じもしくは反対のとき平行であるといい

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ とかく

ベクトルの実数倍の定義により以下が成立.

ベクトルの平行条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数kが存在

また, 大きさが1のベクトルを単位ベクトルといい, 以下が成立.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

練習 9 次の問いに答えよ。

(1) 単位ベクトル $\vec{e}$ と平行で，大きさが 4 のベクトルを $\vec{e}$ を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

(1) 単位ベクトル $\vec{e}$ と平行 ⇒ 単位ベクトル $\vec{e}$ と向きが同じ or 逆

大きさが 4 のベクトル ⇒ 単位ベクトルの 4倍

$\underline{\pm 4\vec{e}}$

(2) $\vec{a}$ と同じ向き ⇒ $k\vec{a}$ $(k>0)$ となる k が存在

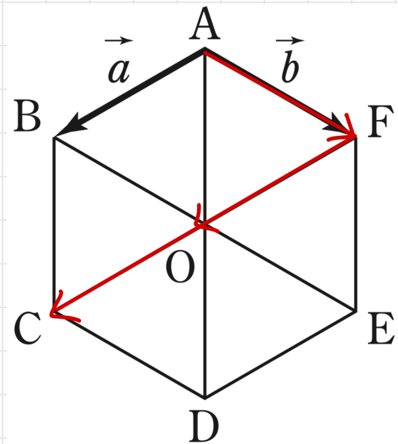
単位ベクトル ⇒ 大きさ 1 のベクトル ⇒ $\vec{a}$ に対して $\frac{1}{3}$ 倍

$\underline{\frac{1}{3}\vec{a}}$

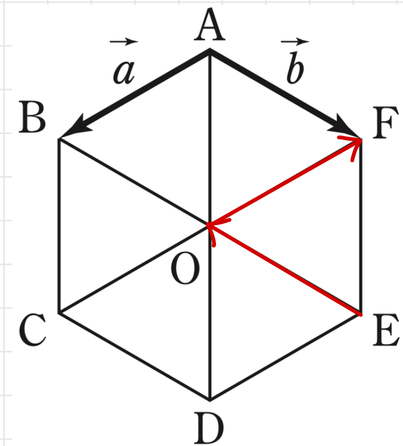
練習 10 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{EF}$　　(3) $\overrightarrow{DB}$

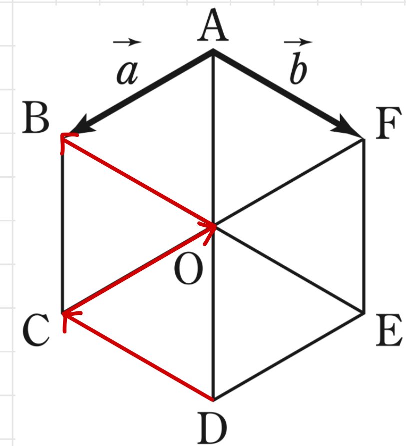
(1)



(2)



(3)



(1)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \vec{b} + \vec{a} + \vec{a}$$
$$= 2\vec{a} + \vec{b}$$

(2)

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$$
$$= -\vec{b} - \vec{a}$$

(3)

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b}$$
$$= -\vec{a} - 2\vec{b}$$

ベクトルの成分

基本ベクトル

↳ Oを原点とする座標平面上でx軸, y軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

それぞれ$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$で表す.

座標平面上のベクトル$\vec{a}$に対し

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$となる点Aの座標が

$A(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

また, $\vec{a}=(a_1, a_2)$

①におけるa_1を$\vec{a}$のx成分, a_2をy成分という.

これらをまとめて$\vec{a}$の成分といい①を$\vec{a}$の成分表示という.

基本ベクトル $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ と零ベクトルの成分表示は以下

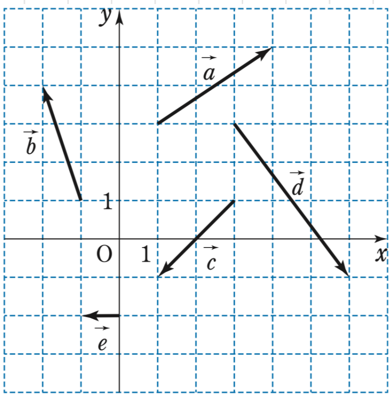
$\vec{e_1} = (1, 0)$ $\quad \vec{e_2} = (0, 1)$ $\quad \vec{0} = (0, 0)$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について以下が成立.

$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \ a_2 = b_2$

$$\boxed{\vec{a} = (a_1, a_2) \text{のとき} \ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

練習 11 右の図のベクトル $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ を，それぞれ成分表示せよ。また，各ベクトルの大きさを求めよ。



$\vec{b} = (-1, 3)$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\vec{c} = (-2, -2)$ $\quad |\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\vec{d} = (3, -4)$ $\quad |\vec{d}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\vec{e} = (-1, 0)$ $\quad |\vec{e}| = 1$

和·差·実数倍の成分表示

$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$(a_1, a_2)-(b_1, b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k(a_1, a_2)=(ka_1+ka_2)$（kは実数）

練習 12 $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $4\vec{a}$　(3) $4\vec{a}-3\vec{b}$　(4) $-2(\vec{a}-\vec{b})$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)+(-4,2)=(-1,1)$

(2) $4\vec{a}=4(3,-1)=(12,-4)$

(3) $4\vec{a}-3\vec{b}=4(3,-1)-3(-4,2)$

$=(12,-4)-(-12,6)$

$=(24,-10)$

(4) $-2(\vec{a}-\vec{b})$

$=-2\vec{a}+2\vec{b}$

$=-2(3,-1)+2(-4,2)$

$=(-6,2)+(-8,4)$

$=(-14,6)$

練習 13 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする。$\vec{c}=(8,\ -3)$ を，適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{c}$

$s(2,1)+t(-1,3)=(8,-3)$

$(2s,s)+(-t,3t)=(8,-3)$

$(2s-t,s+3t)=(8,-3)$

$$\begin{cases} 2s-t=8 & \cdots ① \\ s+3t=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

①②を連立させて解くと

$s=3$, $t=-2$

$3\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$

練習 14 次の 2 つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(x,\ -3)$ (2) $\vec{a}=(2,\ x)$, $\vec{b}=(3,\ 6)$

(1) 実数kを用いて

$\vec{b}=k\vec{a}$

$(x,-3)=k(-2,1)$

$(x,-3)=(-2k,k)$

$$\begin{cases} x=-2k & \cdots ① \\ -3=k & \cdots ② \end{cases}$$

②より $k=-3$ なので

これを①に代入

$x=-2\times(-3)$

$x=6$

(2) 実数kを用いて

$\vec{b}=k\vec{a}$

$(3,6)=k(2,x)$

$(3,6)=(2k,kx)$

$$\begin{cases} 3=2k & \cdots ① \\ 6=kx & \cdots ② \end{cases}$$

①より $k=\frac{3}{2}$

これを②に代入

$6=\frac{3}{2}\cdot x$

$x=4$

座標平面上の点とベクトル

2点 $A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ について

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

練習 15 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1) A(5, 2)，B(1, 6) (2) A(−3, 4)，B(2, 0)

(1) $\overrightarrow{AB} = (-4, 4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2}$

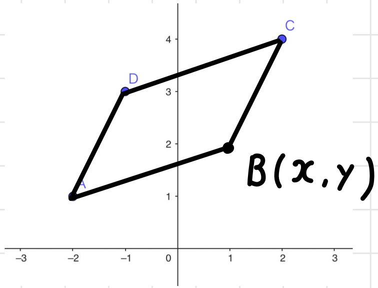
$= 4\sqrt{2}$

(2) $\overrightarrow{AB} = (5. -4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{41}$

練習 16 4 点 A(−2, 1)，B(x, y)，C(2, 4)，D(−1, 3) を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形になるように，x，y の値を定めよ。



平行四辺形になるには

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ のとき

$\overrightarrow{AD} = (-1-(-2), 3-1) = (1.2)$

$\overrightarrow{BC} = (2-x, 4-y)$

$\begin{cases} 2-x = 1 \\ 4-y = 2 \end{cases}$

$x = 1, y = 2$

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

練習 17 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\theta=45^\circ$ (2) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=6$, $\theta=150^\circ$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times3\times\cos45^\circ$

$= 12\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 6\sqrt{2}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6\times6\times\cos150^\circ$

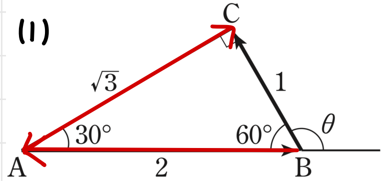
$= 6\times6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -18\sqrt{3}$

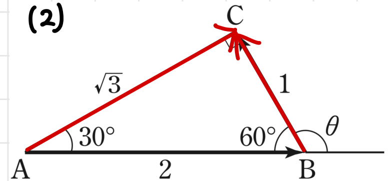
練習 18 例 10 の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$

(1)



(2)



(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos150^\circ$

$= 2\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos90^\circ = 0$

ベクトルの垂直・平行と内積

$\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ のとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

内積と成分

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

練習 19 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (3, -2)$

(2) $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = 6 - 10 = -4$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot (-1) = 0$

ベクトルのなす角の余弦($\cos\theta$)

内積の定義より

$\vec{0}$でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ のなす角をθとする.

ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

練習 20 次の 2 つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$　　(2) $\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

(3) $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 6)$　　(4) $\vec{a}=(-4,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$

(1)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+1\times1=-5$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=135^\circ$

(2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot1=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=30^\circ$

(3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2+(-1)\cdot6=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より $\theta=90^\circ$

(4)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot2+2\cdot(-1)=-10$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-10}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=-1$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=180^\circ$

練習 21 次の 2 つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 4)$　　(2) $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(x,\ x+2)$

2つのベクトルが垂直 → 内積0

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot x+6\cdot 4=0$

$3x+24=0$

$3x=-24$

$x=-8$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\cdot x+(-1)\cdot(x+2)=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

練習 22 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

~~(2) $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。~~

(1)

実数 x, y を用いて，$\vec{b}=(x, y)$ とする．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直 $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot x+1\cdot y=2x+y=0$

$y=-2x$ … ①

$\vec{b}$ の大きさは $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$

$|\vec{b}|^2=x^2+y^2=10$ … ②

①を②に代入 $x^2+(-2x)^2=10$

$5x^2=10$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

①より

$x=\sqrt{2}$ から $y=-2\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2}$ から $y=2\sqrt{2}$

$\vec{b}=(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})\ (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

練習 22 次の問いに答えよ。

~~(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。~~

(2) $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

(2)

実数 x, y を用いて，$\vec{e}=(x, y)$ とする.

$\vec{a}$ と $\vec{e}$ は垂直 $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{e}=4\cdot x+3\cdot y=4x+3y=0$

$3y=-4x$

$y=-\frac{4}{3}x \cdots ①$

$\vec{e}$ の大きさは 1 $\Rightarrow$ $|\vec{e}|=\sqrt{x^2+y^2}=1$

$|\vec{e}|^2=x^2+y^2=1 \cdots ②$

①を②に代入 $x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=1$

$x^2=\frac{9}{25}$

$x=\pm\frac{3}{5}$

①より

$x=\frac{3}{5}$ から $y=-\frac{4}{5}$

$x=-\frac{3}{5}$ から $y=\frac{4}{5}$

$\vec{e}=\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

練習 23 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と $\vec{b}=(a_2,\ -a_1)$ は垂直であることを示せ。

(2) (1)を用いて，$\vec{a}=(1,\ 2)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot a_2+a_2\cdot(-a_1)=0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直

(2) $\vec{a}=(1,2)$ に垂直なベクトルを $\vec{b}$ とすると

$\vec{b}=(2,-1),\ (-2,1)$

$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

単位ベクトルは大きさが1のベクトル

→ $\vec{b}$ を $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 倍したものが $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル

$$\vec{e}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

内積の性質

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ・ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ・ $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ kは実数

練習 24 次の等式を証明せよ。

(1) $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(1)

(左辺) $=|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=$ (右辺)

(2)

(左辺) $=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=$ (右辺)

練習 25 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$ (2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

(1)

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2+2\cdot(-3)+2^2=7$$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ より $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$

(2)

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=3^2-4\cdot(-3)+4\cdot 2^2=37$$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\geqq 0$ より $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{37}$

練習 26 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$ で，$3\vec{a}-2\vec{b}$ と $\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとする。このとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$3\vec{a}-2\vec{b}$ と $\vec{a}+4\vec{b}$ は垂直なので

$$(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+4\vec{b})=0$$

$$3|\vec{a}|^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$$

$$3\cdot 2^2+10\vec{a}\cdot\vec{b}-8\cdot 2^2=0$$

$$12+10\vec{a}\cdot\vec{b}-32=0$$

$$10\vec{a}\cdot\vec{b}=20$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

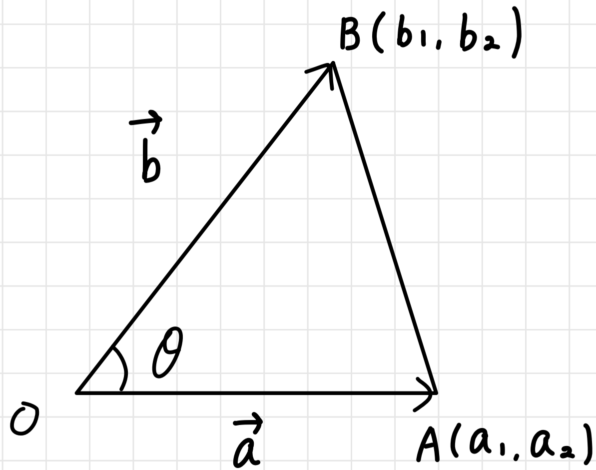
$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より

$$\theta=60^\circ$$

三角形の面積

△OABにおいて $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とする. △OABの面積をSとする.

$$S = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$$



練習 1 次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

O(0, 0), A(4, 1), B(2, −1)

$$S = \frac{1}{2}|4\cdot(-1) - 1\cdot 2|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|-6|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6$$

$$= 3$$

位置ベクトル

点の場所を原点(平面上の任意の点)からの矢印(ベクトル)で表したもの。ベクトルの終点に着目しているため点のように扱う。

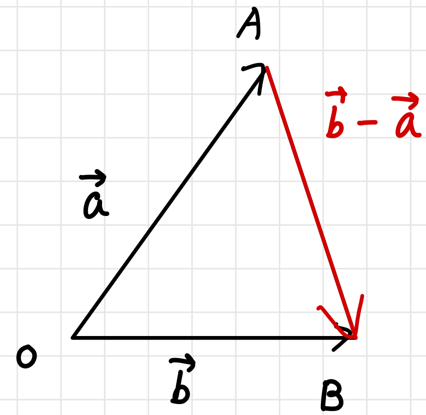
位置ベクトルが p である点PをP($\vec{p}$)で表す。

2点A, Bに対して

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

が成立するので以下のことがいえる。

2点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



練習 27 3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)に対して，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかを用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BC}$　(2) $\overrightarrow{CA}$　(3) $\overrightarrow{BA}$

(1) $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

内分点・外分点の位置ベクトル

2点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$に対して 線分ABを$m:n$に内分,外分する点は以下

内分… $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ 外分… $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

線分ABの中点の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

練習 28 2点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$を結ぶ線分ABに対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 2：3に内分する点 (2) 3：1に内分する点

(3) 4：1に外分する点 (4) 1：2に外分する点

(1) $\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$

(2) $\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$

(3) $\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}$

(4) $\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$

三角形の重心の位置ベクトル

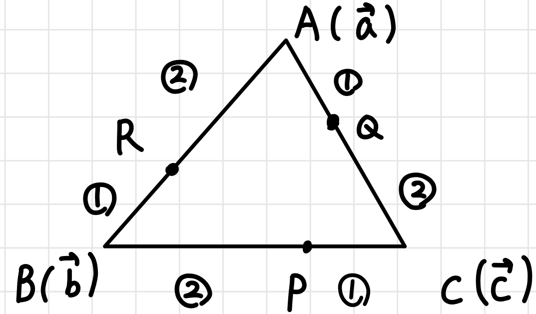
3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)を頂点とする△ABCの重心の位置ベクトル$\vec{g}$は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

練習 29 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC，CA，AB を 2：1 に内分する点を，それぞれ P，Q，R とする。また，△ABC の重心を G，△PQR の重心を G′ とする。

(1) 点 G′ の位置ベクトル $\vec{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

~~(2) 等式 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。~~



(1)

点P, Q, Rの位置ベクトルを $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ とする.

$$\vec{g'}=\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3} \cdots ①$$

$$\vec{p}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3},\quad \vec{q}=\frac{\vec{c}+2\vec{a}}{2+1}=\frac{\vec{c}+2\vec{a}}{3},\quad \vec{r}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3} \cdots ②$$

②を①に代入

$$\vec{g'}=\frac{\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}+\frac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}}{3}=\frac{\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}}{3}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

練習 29　3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする△ABC において，辺 BC，CA，AB を 2：1 に内分する点を，それぞれ P，Q，R とする。また，△ABC の重心を G，△PQR の重心を G′ とする。

~~(1)　点 G′ の位置ベクトル $\vec{g'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。~~

(2)　等式 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$(左辺)=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}$$

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$ より

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\,\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}=(右辺)$$

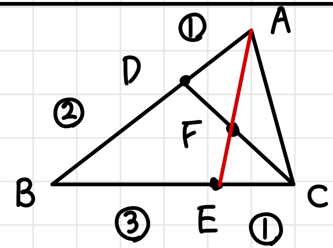
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

一直線上にある点

2点A, Bが異なるとき

点Cが直線AB上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数kが存在する.

練習 30 △ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を D，辺 BC を 3：1 に内分する点をEとし，線分 CD の中点をFとする。このとき，3点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とする.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+1} = \frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4} \cdots ①$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+3\vec{c}}{6} \cdots ②$$

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$$

$$k = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AE}}$$

①②より

$$k = \frac{\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{6}}{\frac{\vec{b}+3\vec{c}}{4}}$$

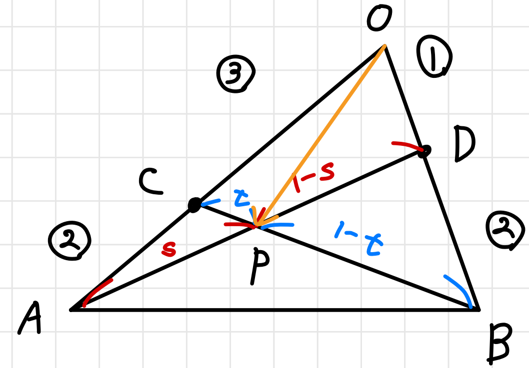
$$k = \frac{2}{3}$$

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ となるので

3点A, F, Eは一直線上にある

練習 31

△OAB において，辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



実数 s, t を用いて

$AP:PD=s:1-s$, $CP:PB=t:1-t$

また $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{b}$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(1-s)\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{OA}}{s+(1-s)}=\frac{1}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{a}=s\vec{a}+\frac{1}{3}(1-s)\vec{b}\cdots①$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}}{t+(1-t)}=\frac{3}{5}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\cdots②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから $\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いた表し方はただ1通りである.

$$\begin{cases} s=\frac{3}{5}(1-t)\cdots③ \\ \frac{1}{3}(1-s)=t\cdots④ \end{cases}$$

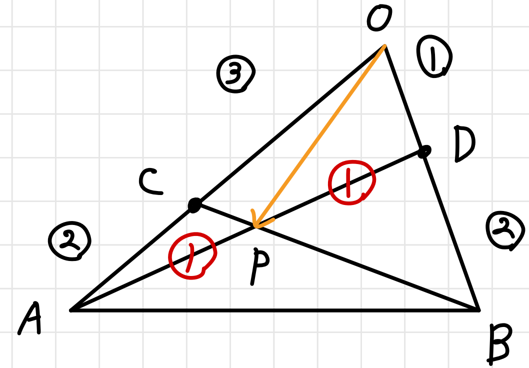
③④を連立させて解くと

$s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{5}{6}$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$$

練習 31

△OAB において，辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(別解)

メネラウスの定理より

$$\frac{OB}{BD}\cdot\frac{PD}{AP}\cdot\frac{AC}{CO}=1$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{PD}{AP}\cdot\frac{2}{3}=1$$

$$\frac{PD}{AP}=1$$

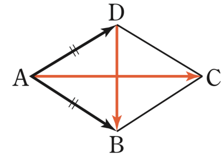
$$AP:PD=1:1$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{1+1}=\frac{\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}{2}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{6}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$$

$$\left(\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$$

練習 32 平行四辺形 ABCD において，AB＝AD のとき，AC ⊥ DB である。このことを，ベクトルを用いて証明せよ。



AC ⊥ DB は $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$，つまり $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ がいえればよい．

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする．

AC は平行四辺形 ABCD の対角線なので $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ …①

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{d}$ …②

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ は ①② より

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{b} + \vec{d})(\vec{b} - \vec{d}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2$

ここで，AB = AD より $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ つまり $|\vec{b}| = |\vec{d}|$ なので

$|\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0$

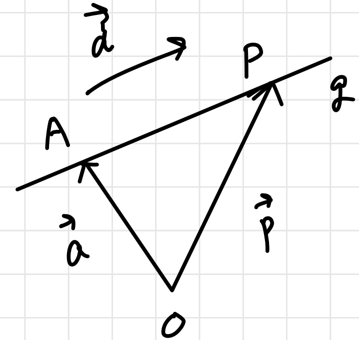
よって $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ であるから AC ⊥ DB

ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線

右図において $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{d}$ なので

$\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ （tは実数）が成立.

ここで $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ とかけるので



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p} - \vec{a} &= t\vec{d} \\ \vec{p} &= \vec{a} + t\vec{d} \cdots ① \end{aligned}}$$

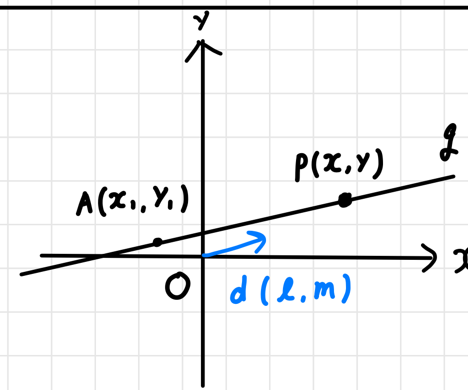
（①をgのベクトル方程式といいtを媒介変数（パラメータ）という）

Oを原点とする座標平面上で，$A(x_1, y_1)$を通り，$\vec{d} = (l, m)$に平行な直線g上の点を$P(x, y)$とする.

①より $(x, y) = (x_1, y_1) + t(l, m)$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \end{cases} \cdots ②}$$

②を直線gの媒介変数表示という.



練習 33 点 $A(2,\ -1)$ を通り，$\vec{d}=(-4,\ 3)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ。
また，媒介変数を消去した式で表せ。

媒介変数をtとすると

$$(x, y)=(2,-1)+t(-4,3)$$
$$=(2-4t,\ -1+3t)$$

$$\begin{cases} x=2-4t \quad \cdots ① \\ y=-1+3t \quad \cdots ② \end{cases}$$

①×3+②×4よりtを消去すると

$$\begin{array}{rl} & 3x=6-12t \\ +) & 4y=-4+12t \\ \hline & 3x+4y=2 \end{array}$$

$$3x+4y-2=0$$

平面上の点の存在範囲

異なる2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ について

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b},\quad s+t=1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

を満たす点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は線分AB

練習 34 △OAB において，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB},\quad s+t=\frac{1}{2},\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

$s+t=\frac{1}{2}$ より　$2s+2t=1$

また，$\overrightarrow{OP} = 2s\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

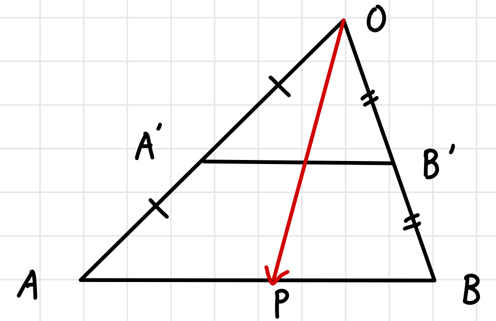
$2s = s'$, $2t = t'$ とすると

$\overrightarrow{OP} = s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$s'+t'=1$, $s' \geqq 0$, $t' \geqq 0$

よって，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A′, B′ をとると

点Pの存在範囲は線分A′B′である.



△OABについて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad 0\leqq s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$$

を満たす点P($\vec{p}$)の存在範囲は△OABの周および内部

練習 35 △OAB において，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $\quad 0\leqq s+t\leqq 2$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$

(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $\quad 0\leqq s+t\leqq \frac{1}{2}$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$

(1)

$0\leqq s+t\leqq 2$ より $\quad 0\leqq \frac{s}{2}+\frac{t}{2}\leqq 1$

また，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{2}\cdot(2\overrightarrow{OA})+\frac{t}{2}\cdot(2\overrightarrow{OB})$

$\frac{s}{2}=s'$, $\frac{t}{2}=t'$ とすると，

$\overrightarrow{OP}=s'(2\overrightarrow{OA})+t'(2\overrightarrow{OB})$

$0\leqq s'+t'\leqq 1$, $s'\geqq 0$, $t'\geqq 0$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$, $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点A', B'をとると

点Pの存在範囲は△OA'B'の周および内部である。

(2)

$0\leqq s+t\leqq \frac{1}{2}$ より $\quad 0\leqq 2s+2t\leqq 1$

また，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=2s\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$2s=s'$, $2t=t'$ とすると，

$\overrightarrow{OP}=s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

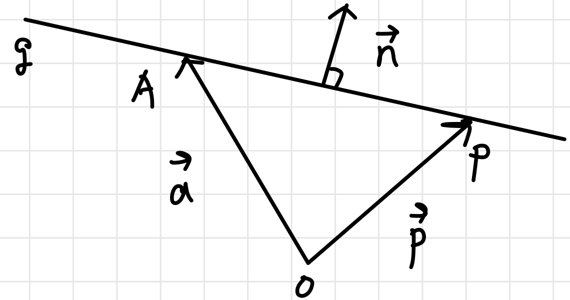
$0\leqq s'+t'\leqq 1$, $s'\geqq 0$, $t'\geqq 0$

よって，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点A', B'をとると

点Pの存在範囲は△OA'B'の周および内部である。

ベクトル$\vec{n}$に垂直な直線

右図において$\vec{AP} \perp \vec{n}$より



$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$とかけるので

$(\vec{p} - \vec{a})\vec{n} = 0 \cdots$ ①

（①は点Aをとおり$\vec{n}$に垂直な直線gのベクトル方程式
直線gに垂直なベクトル$\vec{n}$を直線gの法線ベクトルという）

① 点$A(x_1, y_1)$をとおり$\vec{n} = (a, b)$に垂直な直線の方程式は

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

② ベクトル$\vec{n} = (a, b)$は直線$ax + by + c = 0$に垂直

練習 36 次の点 A を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1) A(3, 4), $\vec{n}=(1,\ 2)$ (2) A(−1, 2), $\vec{n}=(3,\ -4)$

(1)

$$1\cdot(x-3)+2\cdot(y-4)=0$$

$$x-3+2y-8=0$$

$$x+2y-11=0$$

(2)

$$3\{x-(-1)\}+(-4)(y-2)=0$$

$$3(x+1)-4(y-2)=0$$

$$3x+3-4y+8=0$$

$$3x-4y+11=0$$

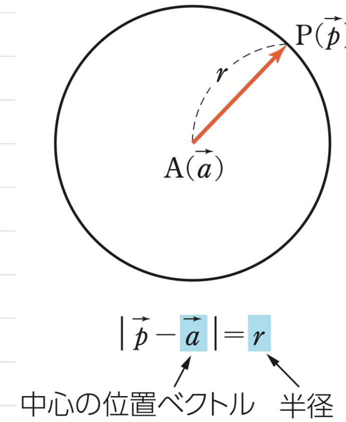
円のベクトル方程式

点 $A(\vec{a})$ を中心とする半径 r の円について

$|\overrightarrow{AP}| = r$ より　$|\vec{p}-\vec{a}| = r$ …①

また, $|\overrightarrow{AP}|^2 = r^2$ より　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = r^2$ …②

①②は点 $A(\vec{a})$ 中心半径 r の円のベクトル方程式である.



練習 37　点 $A(\vec{a})$ が与えられているとき，次のベクトル方程式において点 $P(\vec{p})$ の全体は円となる。円の中心の位置ベクトル，円の半径を求めよ。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=4$

(1)　点 $A(\vec{a})$ 中心半径 3 の円

(2)　点 $A(\frac{1}{2}\vec{a})$ 中心半径 2 の円

練習 38　平面上の異なる 2 点 O，A に対して $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ とすると，線分 OA を直径とする円のベクトル方程式は，その円上の点 P について $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ として，$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ で与えられることを示せ。

(i)　P が O に一致するとき, $\vec{p}=\vec{0}$

よって $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

(ii)　P が A に一致するとき, $\vec{p}=\vec{a}$

よって $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

(iii)　P が O, A に一致しないとき, $OP \perp AP \iff \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

よって $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

したがって, このベクトル方程式は $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$