

數B

數列



数列… 数を1列に並べたもの

項 … 数列における各数（1番目の項を初項、n番目の項を第n項）

1, 4, 9, 16 ...
初項 第2項 第3項 第4項

数列を一般的に表すには

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ (a_1 が初項, a_n が第n項)

また、第n項を数列の一般項という、

$\{a_n\}$ と数列を略記することもある。

1, 4, 9, 16, ……

①

練習

2

一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について、初項から第4項までを求めるよ。

- (1) $a_n = 2n - 1$ (2) $a_n = n(n+1)$ (3) $a_n = 2^n$

練習
1

上の数列①の第2項と第4項をいえ。また、第5項を求めよ。

第2項 4

第4項 16

第5項 25

	a_1	a_2	a_3	a_4
(1)	1	3	5	7
(2)	2	6	12	20
(3)	2	4	8	16

次のような数列の一般項 a_n を、 n の式で表せ。

- (1) 偶数 2, 4, 6, 8, …… の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2, 4, -6, 8, \dots$$

- (2) 分子には奇数、分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$$

(1)

-1と1が交互に並ぶ数列と偶数の積

$$(-1)^n$$

$$2n$$

$$\underline{\underline{a_n = (-1)^n \cdot 2n}}$$

(2)

分子は奇数、分母は2の累乗

$$\underline{\underline{2n-1 \quad 2^n}}$$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{2n-1}{2^n}}}$$

等差数列

偶数数列 $2, 4, 6, 8, \dots$ や奇数数列 $1, 3, 5, 7, \dots$ のように各項間の差が常に一定の数列

初項に一定の数 d を次々に足して得られる数列。その一定の数 d を公差という。

練習
4

次のような等差数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項 1, 公差 5

(2) 初項 10, 公差 -4

(1)

$$a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 11, a_4 = 16$$

練習
5

次の等差数列の公差を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

(1) 1, 5, 9, □, □, (2) □, 5, 2, □, □,

(1)

公差 4

$$1, 5, 9, \underline{13}, \underline{17}$$

(2)

$$a_1 = 10, a_2 = 6, a_3 = 2, a_4 = -2$$

(2)

公差 -3

$$\underline{8}, \underline{5}, 2, \underline{-1}, \underline{-4}$$

等差数列の一般項

初項 a , 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

練習
6

次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5, 公差 4

(2) 初項 10, 公差 -5

練習
7

次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n + 1$$

$$a_{10} = 4 \times 10 + 1 = 41$$

$$(1) \quad a_4 = 15, a_8 = 27$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 15 \dots ①$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 27 \dots ②$$

(2)

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot (-5)$$

$$a_n = -5n + 15$$

$$a_{10} = -5 \times 10 + 15 = -35$$

①②より

$$a_1 = 6, d = 3$$

$$a_n = 3n + 3$$

①②より

$$a_1 = 36, d = -4$$

$$a_n = -4n + 40$$

(1) 第 4 項が 15, 第 8 項が 27

(2) 第 5 項が 20, 第 10 項が 0

等差数列の性質

等差数列は初項 a に公差 d を次々に足して得られる数列

となり合う 2 項間の差は常に一定

$$a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d$$

練習
8

一般項が $a_n = 2n + 5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また、初項と公差を求めよ。

等差数列であるためには

$$a_n = 2n + 5$$

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 7$$

$$a_{n+1} - a_n = (2n + 7) - (2n + 5) = 2$$

$$a_n = 2n + 5$$

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

初項 7 公差 2

等差中項

数列 a, b, c が等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$

練習
9

次の数列が等差数列であるとき、 x の値を求めよ。

(1) $3, x, 11, \dots$

(2) $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$

(1)

$$2x = 3 + 11$$

(2)

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$2x = 14$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

$$x = 7$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$x = 8$$

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

1 初項 a , 第 n 項 l のとき $S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$

2 初項 a , 公差 d のとき $S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

練習

10

次の和 S を求めよ。

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10, 公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

(1)

$$\frac{1}{2} \times 9 \times (2+10) = 54$$

練習

11

初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{2}n \{ 2 \times 1 + (n-1) \times 2 \} = n^2$$

$$S_n = n^2$$

(2)

$$\frac{1}{2} \times 15 \times \{ 2 \times 10 + (15-1) \times (-4) \}$$

$$= -270$$

次の等差数列の和 S を求めよ。

$$(1) \quad 2, \ 6, \ 10, \ \dots, \ 74$$

$$(2) \quad 102, \ 96, \ 90, \ \dots, \ 6$$

(1) 一般項 a_n は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n - 2$$

求める和は初項 2, 公差 4, 項数 19 の等差数列の和

$$\text{なので} \quad 4n - 2 = 74$$

$$n = 19 \quad S = \frac{1}{2} \times 19 \times \left\{ 2 \times 2 + (19-1) \times 4 \right\} = 722$$

(2) 一般項 a_n は

$$a_n = 102 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$a_n = -6n + 108$$

求める和は初項 102, 末項 6, 項数 17 の等差数列の和

$$\text{なので} \quad -6n + 108 = 6$$

$$n = 17$$

$$S = \frac{1}{2} \times 17 \times (102 + 6) = 918$$

・ 自然数の和 → $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

・ 奇数の和 → $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

・ 偶数の和 → $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

練習
13

次の和を求めよ。

- (1) 1から100までのすべての自然数の和 $1+2+3+\cdots+100$
- (2) 1から55までのすべての奇数の和 $1+3+5+\cdots+55$

(1)

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (1+100) = 5050$$

(2) $2n-1=55$ より $n=28$

$$(28)^2 = 784$$

練習
14

初項が100、公差が-7である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) 第何項が初めて負の数になるか。
- (2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また、その和を求めよ。

(1) -般工貢は

$$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-7)$$

$$a_n = -7n + 107$$

$$-7n + 107 < 0$$

(2)

第15項目までの和が最大

$$\frac{1}{2} \times 15 \times \{2 \times 100 + (15-1) \times (-7)\}$$

$$= 765$$

$$n > \frac{107}{7} = 15.2\cdots$$

第16項目がはじめて負の数になる

等比数列

となり合う2項間の比が常に一定になっている数列。初項に一定の数を次々にかけて得られる数列

その一定の数rを公比という

練習
15

次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項1, 公比5

(2) 初項-3, 公比 $-\frac{1}{3}$

(1)

$$1, 5, 25, 125$$

(2)

$$-3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

練習
16

次の等比数列の公比を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

(1) 1, -2, 4, □, ……

(2) □, 8, 4, □, ……

(1)

公比は-2

$$1, -2, 4, \underline{-8} \dots$$

(2)

公比は $\frac{1}{2}$

$$\underline{16}, 8, 4, \underline{2} \dots$$

等比数列の一般項

初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = ar^{n-1}$

練習
17

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、第5項を求めよ。

- (1) 初項2, 公比3
- (2) 初項1, 公比-3
- (3) 初項2, 公比2
- (4) 初項-3, 公比 $\frac{1}{2}$

(1)

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_5 = 162$$

(2)

$$a_n = (-3)^{n-1}$$

$$a_5 = 81$$

(3)

$$a_n = 2^n$$

$$a_5 = 32$$

(4)

$$a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_5 = -\frac{3}{16}$$

練習
18

次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) 1, -2, 4, -8, ……
- (2) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$
- (3) -5, 5, -5, 5, ……
- (4) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

(1)

初項1, 公比-2

$$a_n = (-2)^{n-1}$$

(2)

初項 $\frac{3}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)

初項-5, 公比-1

$$a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$$

(4)

初項 $\sqrt{2}$, 公比 $\sqrt{2}$

$$= 5 \cdot (-1)^n$$

$$a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるよ。

- (1) 第2項が6, 第4項が54 (2) 第5項が-9, 第7項が-27

(1)

等比数列の初項を a , 公比を r とする。

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

第2項が6 $\rightarrow a_2 = 6$ ①

$$a_2 = a \cdot r^{2-1} = ar = 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

第4項が54 $\rightarrow a_4 = 54$ ②

$$a_4 = a \cdot r^{4-1} = ar^3 = 54 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②を代入すると ①より $r = 3$ のとき

$$6r^2 = 54$$

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

$$a = 2$$

$$r = -3 \text{ のとき}$$

$$a = -2$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ または } a_n = (-2) \cdot (-3)^{n-1}$$

(2)

等比数列の初項を a , 公比を r とする

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

第5項が-9 $\rightarrow a_5 = -9$ ③

$$a_5 = a \cdot r^{5-1} = ar^4 = -9 \quad \dots \textcircled{3}$$

第7項が-27 $\rightarrow a_7 = -27$ ④

$$a_7 = a \cdot r^{7-1} = ar^6 = -27 \quad \dots \textcircled{4}$$

①と③を代入すると

$$-9r^2 = -27$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \pm \sqrt{3}$$

①より $r = \sqrt{3}$ のとき

$$a = -1$$

$$r = -\sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$a = -1$$

$$\underline{\underline{a_n = -(\sqrt{3})^{n-1} \text{ または } a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}}}$$

・等比数列の性質

等比数列は初項 a_1 に公比 r を次々にかけて得られる数列
となり合う2項の比が一定。

$$a_{n+1} = r a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

・等比中項

a, b, c が 0 でないとき数列 a, b, c が等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = ac$

練習
20

数列 $3, x, 9, \dots$ が等比数列であるとき、 x の値を求めよ。

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

等比数列の和

初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$r \neq 1 \text{ のとき} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{または} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad S_n = na$$

練習
21

次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$(1) \quad 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

$$(2) \quad 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, -\frac{2}{3^3}, \dots$$

(1)

初項 1, 公比 2

$$S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = 2^n - 1$$

(2)

初項 2, 公比 $-\frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)}$$

$$S_n = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

練習
22

初項から第 3 項までの和が 7, 第 3 項から第 5 項までの和が 28 である

等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

等比数列の一 般項は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } r^2(a + ar + ar^2) = 28$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して } 7r^2 = 28$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

$$r = 2 \text{ のとき } a = 1$$

$$r = -2 \text{ のとき } a = -\frac{7}{3}$$

恒等式 $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

$$k=1 \text{ を代入} \quad 1^4 - (1-1)^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$

$$k=2 \text{ を代入} \quad 2^4 - (2-1)^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$$

$$k=3 \text{ を代入} \quad 3^4 - (3-1)^4 = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1$$

⋮

$$k=n \text{ を代入} \quad n^4 - (n-1)^4 = 4 \cdot n^3 - 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1$$

$$\text{辺々加えると} \quad n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4(1+2+3+\dots+n) - n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^4 + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4(1+2+3+\dots+n) + n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \{n(n+1)\}^2$$

$$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

• 1～nまでの自然数の2乗の和

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

• 1～nまでの自然数の3乗の和

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

練習

24

次の和を求めよ。

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3$

(1)

$$\frac{1}{6} \times 20 \times (20+1) \times (2 \times 20+1) = 2870$$

(2)

$$\left\{ \frac{1}{2} \times 15 \times (15+1) \right\}^2 = 14400$$

和の記号Σ(シグマ)

数列 $\{a_n\}$ について初項から第 n 項までの和を第 k 項 a_k と和の記号 Σ を用いて

$\sum_{k=1}^n a_k$ と表し

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k \text{ は第 } 1 \text{ 項～第 } n \text{ 項までの和} \right)$$

練習
25

次の(1)～(3)の式を例 10 のような和の形で書け。(4), (5)の式を和の記号 Σ を用いて書け。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

$$(2) \sum_{k=3}^8 2^{k-1}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$(4) 2+3+4+5+6$$

$$(5) 3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$$

$$(1) 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

$$(2) 4+8+16+32+64+128$$

$$(3) \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$(4) \sum_{k=2}^6 k$$

$$(5) \sum_{k=1}^6 (2k+1)^2$$

練習
26

次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n 5^{k-1}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

(1)

$$\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3 \cdot 3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^n c = nc \quad \text{とくに} \quad \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

練習

27

次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^{15} 2$$

$$(2) \sum_{k=1}^{50} k$$

$$(3) \sum_{k=1}^{12} k^2$$

$$(4) \sum_{k=1}^7 k^3$$

$$(1) \sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \times 2 = 30$$

$$(2) \sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \times 50 \times (50+1) = 1275$$

$$(3) \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \times 12 \times (12+1) \times (2 \times 12 + 1) = 650$$

$$(4) \sum_{k=1}^7 k^3 = \left\{ \frac{1}{2} \times 7 \times (7+1) \right\}^2 = 784$$

和の言ひ句 Σ の性質

$$1 \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$2 \quad \sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ただし, } p \text{ は } k \text{ に無関係な定数}$$

練習

28

次の和を求めよ。

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (4k - 5) \quad (2) \quad \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) \quad (3) \quad \sum_{k=1}^n (k^3 + k) \quad (4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n (4k - 5)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} n(n+1) - 5n$$

$$= 2n^2 - 3n$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 4n$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) - \frac{7}{2} n(n+1) + \frac{8}{2} n$$

$$= \frac{1}{2} n \left\{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2)$$

$$= n(n-1)^2$$

次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (4k - 5) \quad (2) \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) \quad (3) \sum_{k=1}^n (k^3 + k) \quad (4) \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (k^3 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{2}{4} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2 \}$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + n + 2)$$

$$(4) \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \{ (n-1) + 1 \}$$

$$= n(n-1)$$

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{2}{4}n(n+1)(2n+1) + \frac{4}{4}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1) \{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列

$a_{n+1} - a_n = b_n$ のように数列 $\{a_n\}$ のとなり合う 2 項間の差を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列

a_n	1	3	7	13	...
b_n	2	4	6	8	...

左表より数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は
初項 2、公差 2 の等差数列 $b_n = 2n$

練習
30

階差数列を考えて、次の数列の第 6 項、第 7 項を求めよ。

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

a_n	1	2	5	10	17	26	37
b_n	1	3	5	7	9	11	

上表より 階差数列 $\{b_n\}$ は $b_n = 2n - 1$

第 6 項は 26

第 7 項は 37

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

練習
31

階差数列を利用して、次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad 1, 2, 4, 7, 11, \dots$$

$$(2) \quad 2, 3, 5, 9, 17, \dots$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)

a_n	1	2	4	7	11	\dots
b_n	1	1	2	3	4	\dots

$$\text{表より } b_n = n$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$n=1 \text{ のとき } \frac{1^2 - 1 + 2}{2} = 1 \text{ なので成立}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

(2)

a_n	2	3	5	9	17	\dots
b_n	1	1	2	4	8	\dots

$$\text{表より } b_n = 2^{n-1}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$$

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$$

$$n=1 \text{ のとき } 2^{1-1} + 1 = 2 \text{ で成立}$$

$$\text{よって } a_n = 2^{n-1} + 1$$

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

$$\text{初項 } a_1 \text{ は} \quad a_1 = S_1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

練習
32

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$= (n^2 - n) - (n^2 - 3n + 2)$$

$$= 2n - 2$$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = 2 \times 1 - 2 = 0 \quad \text{∴ 成立}$$

$$\therefore a_n = 2n - 2$$

練習
33 恒等式 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ を利用して、和

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
 を求めよ。

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

次の和 S を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

$$\underline{-3S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n}$$

$$-2S = \underline{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 3^{n-1}} - n \cdot 3^n$$

初項1, 公比3の等比数列の初項から第n項までの和

$$-2S = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^n$$

$$-2S = \frac{3^n - 1 - 2n \cdot 3^n}{2}$$

$$-2S = \frac{(1 - 2n) \cdot 3^n - 1}{2}$$

$$S = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4}$$

正の奇数の列を、次のような群に分ける。ただし、第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid 21, \dots$$

第1群 第2群 第3群 第4群

- (1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。
- (2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

(1) 第 n 群の最初の項ははじめから数えて第 $n-1$ 群までの項の次の項

$$\text{第 } n-1 \text{ 群までの項数は } \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

よって第 n 群の最初の項は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項目なので $2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1 = n^2-n+1$

(2) 数列は初項 1、公差 2 の等差数列。第 15 群には 15 個の項が入っている。

第 15 群に入るすべての数の和 S は $S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{($ 第 15 群の初項 $) +$ (第 15 群の末項 $)\}$ で求められる。

第 15 群の初項は (1) より $15^2 - 15 + 1 = 211$

第 15 群の末項は 239

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \times 15 (211 + 239) = 3375$$

数列は正の奇数の数列なので一般項は $2n-1$

各群の中にある項の個数の数列は n

漸化式

数列において、前の項との関係を表す式。

$$\text{※ } a_{n+1} = 3a_n + 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

①において a_1 がわかれば “ a_2 がわかる”, a_2 がわかれば “ a_3 がわかる”
 $n = 1, 2, 3, \dots$ において ① は成立。

練習
36

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 100, \quad a_{n+1} = a_n - 5$$

$$(2) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$$

(1)

$$a_2 = a_1 - 5 = 95$$

$$a_3 = a_2 - 5 = 90$$

$$a_4 = a_3 - 5 = 85$$

$$a_5 = a_4 - 5 = 80$$

(2)

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 26$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 80$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 242$$

漸化式で定められる数列の一般項

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = a_n + d$ (等差型)

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = r a_n$ (等比型)

練習

37

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

(1) $a_{n+1} - a_n = 3$

$\{a_n\}$ は初項2, 公差3の等差数列

(2) $\{a_n\}$ は初項1, 公比2の等比数列

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = 3n - 1$$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3^n$$

$$(2) \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

(1)

$$a_{n+1} - a_n = 3^n$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{3^n - 3}{2}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

$$n=1 \text{ のとき}, \quad a_1 = \frac{3^1 - 1}{2} = 1 \text{ で成立}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

(2)

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1) \\ &= 0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + n \\ &= n^2 - 1 \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ のとき}, \quad a_1 = 1^2 - 1 = 0 \text{ で成立}$$

$$\text{よって } a_n = n^2 - 1$$

$a_{n+1} = p a_n + q$ の漸化式

$a_{n+1} = P a_n + q$ の一般項 a_n を求める.

手順

① a_{n+1}, a_n を α とおき. α の値を求める.

② ①より $a_{n+1} - \alpha = P(a_n - \alpha)$ の形にする.

③ $b_n = a_n - \alpha$ とおく. すると $b_{n+1} = P b_n$ の形ができる.

$b_1 = a_1 - \alpha$ より b_1 が求まり, b_n は公比 P の等比数列である.

④ b_n の一般項を求める.

⑤ $b_n = a_n - \alpha$ より $a_n = b_n + \alpha$. ⑤より a_n が定まる.

次の□に適する数を求める。

$$(1) \quad a_{n+1} = 4a_n - 6 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = 4(a_n - \square)$$

$$(2) \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ を変形すると } a_{n+1} + \square = 2(a_n + \square)$$

$$(3) \quad a_{n+1} = -2a_n + 3 \text{ を変形すると } a_{n+1} - \square = -2(a_n - \square)$$

(1)

$$\alpha = 4\alpha - 6 \text{ として}$$

$$\alpha = 2$$

$$a_{n+1} - \underline{2} = 4(a_n - \underline{2})$$

(2)

$$\alpha = 2\alpha + 1 \text{ として}$$

$$\alpha = -1$$

$$a_{n+1} - (-1) = 2 \{ a_n - (-1) \}$$

$$a_{n+1} + \underline{1} = 2(a_n + \underline{1})$$

(3)

$$\alpha = -2\alpha + 3 \text{ として}$$

$$\alpha = 1$$

$$a_{n+1} - \underline{1} = -2(a_n - \underline{1})$$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 4a_n - 6$$

$$(2) \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

$$(1) \quad \alpha = 4\alpha - 6 \text{ として}$$

$$\alpha = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とすると}$$

$$b_{n+1} = 4b_n$$

$$\text{また, } b_1 = a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$$

b_n は初項 3、公比 4 の等比数列

$$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore b_n = a_n - 2 \text{ より}$$

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$$

$$(2) \quad \alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$$

$$\alpha = 2$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

$$b_n = a_n - 2 \text{ とすると}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$b_1 = a_1 - 2 = 3 - 2 = 1$$

b_n は初項 1、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = a_n - 2 \text{ より}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

3項間の漸化式

一般に、漸化式 $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$ において、 $p = -(\alpha + \beta)$, $q = \alpha \beta$ である。

すると、 $a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$ となり。以下2通りに変形できる。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} - \alpha \beta a_n$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha a_{n+1} - \alpha \beta a_n$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

練習
1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

(1) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

(1)

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \text{ を変形すると}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n) \cdots ①$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n) \cdots ②$$

$$\textcircled{1} \text{ 式}) \quad a_{n+1} - 2a_n = 5^{n-1} \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ 式}) \quad a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1} \cdots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{1}' \text{ } \textcircled{2}'$ の辺々を引くと

$$3a_n = 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

(2)

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \text{ を変形すると}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \cdots ①$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n \cdots ②$$

$$\textcircled{1} \text{ 式}) \quad a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ 式}) \quad a_{n+1} - 2a_n = 1 \cdots \textcircled{2}'$$

$\textcircled{1}' \text{ } \textcircled{2}'$ の辺々を引くと

$$a_n = 2^{n-1} - 1$$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

(1) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ であることを示せ。

(2) $\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とする。 $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ることによ

って、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き、 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \text{ を変形すると}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$c_n = a_{n+1} - 2a_n \text{ とすると}$$

$$c_{n+1} = 2c_n$$

$$\text{また, } c_1 = a_2 - 2a_1 = 2$$

c_n は初項 2、公比 2 の等比数列

$$c_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_{n+1} - 2a_n = 2^n$$

(2)

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n \text{ の両辺を } 2^{n+1} \text{ で割ると}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とするので}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 0$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 0、公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列

$$b_n = 0 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{2}(n-1)$$

(3)

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ なので}$$

$$a_n = b_n \times 2^n$$

$$(2) \text{ すなはち } b_n = \frac{1}{2}(n-1) \text{ なので}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1) \times 2^n$$

$$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$$

数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$(2) \quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(1) この等式を(A)とする。

(P) $n=1$ のとき (左辺) = 1, (右辺) = 1 なので

$n=1$ のとき (A) は成立

(1) $n=k$ のとき (A) が成立する

つまり $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ が成立すると仮定すると

$n=k+1$ のとき

(A)の左辺 は (左辺) = $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$

(A)の右辺 は (右辺) = $(k+1)^2=k^2+2k+1$

(左辺) = (右辺) より、 $n=k+1$ のときも (A) が成立。

(P)(1)よりすべての自然数 n について (A) が成立。

数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$(2) \quad 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) この等式を(A)とする。

(1) $n=1$ のとき (左辺) = 2, (右辺) = 2 なので

$n=1$ のとき (A) は成立。

(1) $n=k$ のとき (A) が成立

つまり $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ が成立すると仮定すると

$n=k+1$ のとき

(A) の左辺は (左辺) = $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

(A) の右辺は (右辺) = $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

(左辺) = (右辺) すなはち $n=k+1$ のときも (A) が成立。

(1)(2) よりすべての自然数 n について (A) が成立。