数C

式と曲線

・放物線の方程式

放物線…平面上で，定点Fからのキョリと，Fを通らない定直線ℓからのキョリが等しい点の軌跡

この点Fを放物線の焦点，直線ℓを放物線の準線という.

放物線の標準形　$y^2=4px$　$(p \neq 0)$

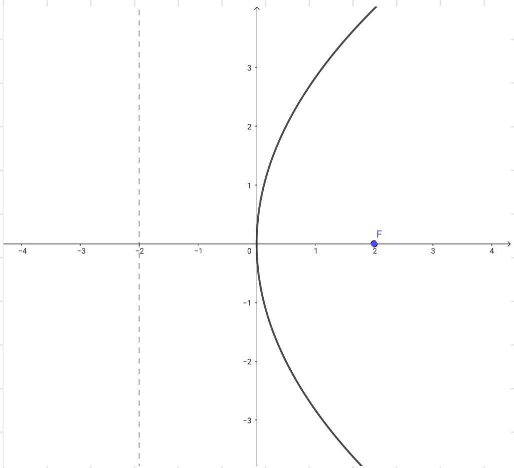
1　焦点は点$(p,\ 0)$，準線は直線　$x=-p$

2　軸はx軸，頂点は原点O　　3　曲線はx軸に関して対称

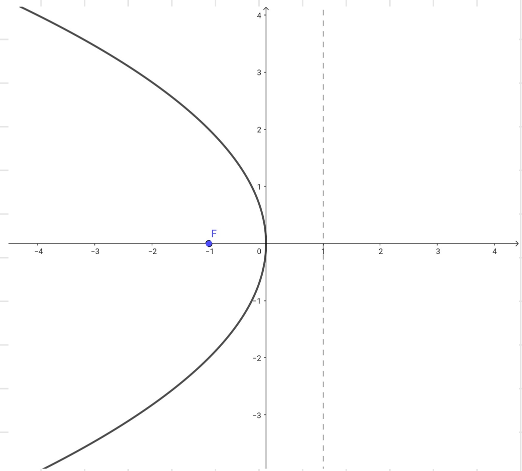
練習 1 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-4x$　　(3)　$y^2=x$

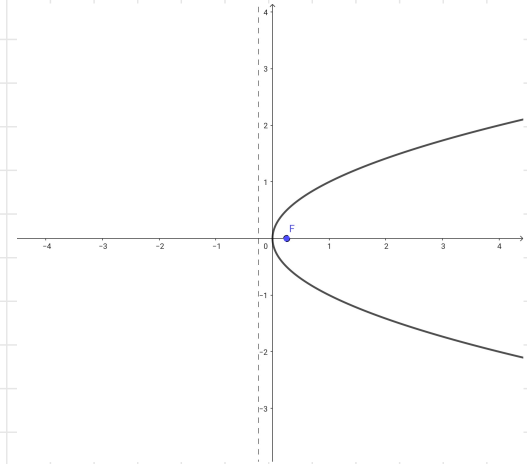
(1)



(2)



(3)



(1)
焦点 $(2, 0)$
準線 $x=-2$

(2)
焦点 $(-1, 0)$
準線 $x=1$

(3)
焦点 $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$
準線 $x=-\frac{1}{8}$

練習
2

焦点が点 $(-2,\ 0)$ で，準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。

$$y^2 = -8x$$

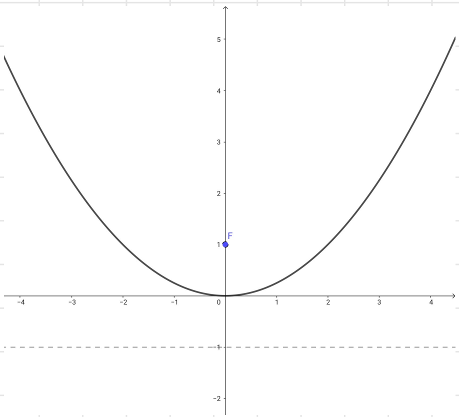
$x^2 = 4py \ (p \neq 0)$

- 焦点は点 $(0, p)$，準線は直線 $y = -p$
- 軸は y 軸，頂点は原点 O
- 曲線は y 軸に関して対称

練習 3 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1) $x^2 = 4y$ (2) $y = -2x^2$

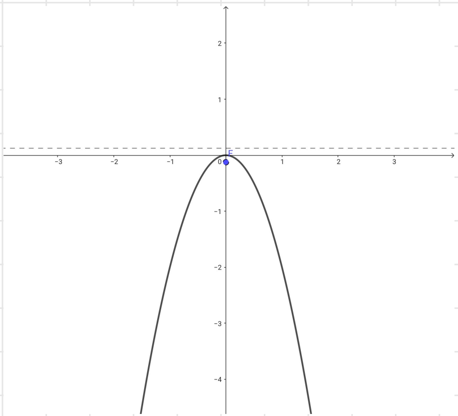
(1)



焦点 $(0, 1)$

準線 $y = -1$

(2)



焦点 $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$

準線 $y = -\frac{1}{8}$

・ 楕円の方程式

楕円 … 平面上で，2定点F, F′からのキョリの和が一定である点の軌跡

この2点 F, F′を楕円の焦点

楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

1 焦点は 2点 $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

2 楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2a$

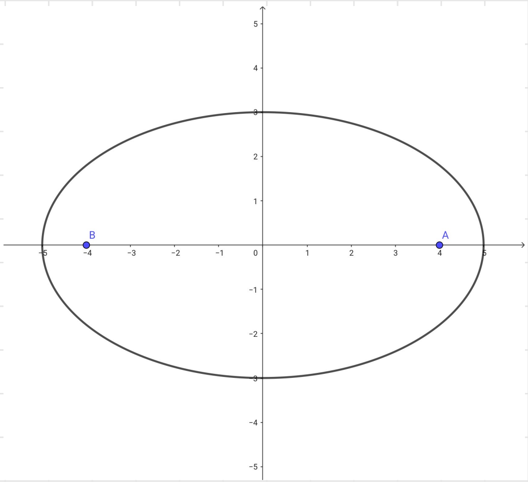
3 長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$

4 曲線は x 軸，y 軸，原点Oに関して対称

練習 4 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$　　(3) $x^2+16y^2=16$

(1)

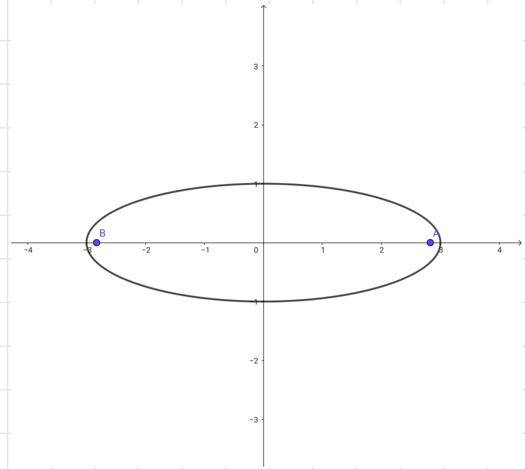


焦点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

長軸 10

短軸 6

(2)

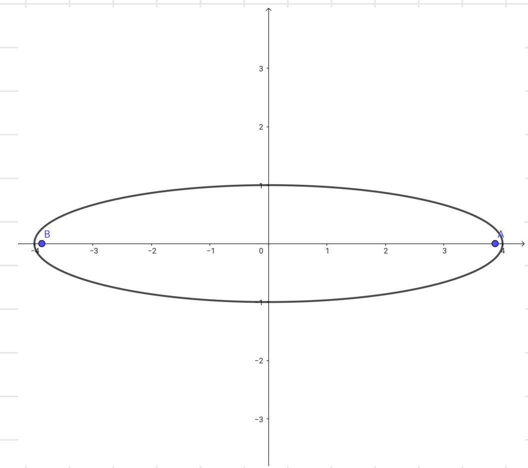


焦点 $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$

長軸 6

短軸 2

(3)



焦点 $(\sqrt{15}, 0)$, $(-\sqrt{15}, 0)$

長軸 8

短軸 2

練習 5

2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ。

求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ とおける

焦点からのキョリの和について $2a=4$ より $a=2$

焦点の座標について $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ であるから $b^2=1$

よって求める楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$

① 焦点は2点 $(0, \sqrt{b^2-a^2}), (0, -\sqrt{b^2-a^2})$

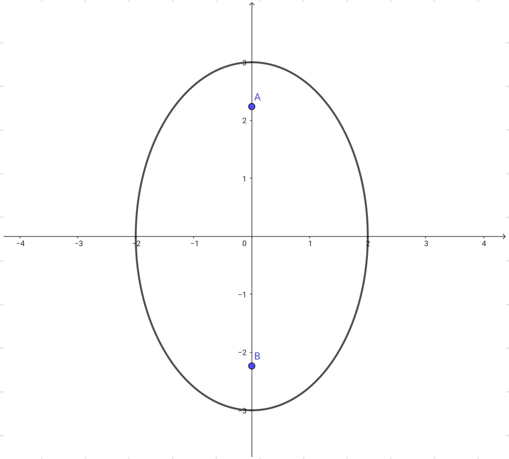
② 楕円上の点から2つの焦点までのキョリの和は $2b$

③ 長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$

練習 6 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

(1)



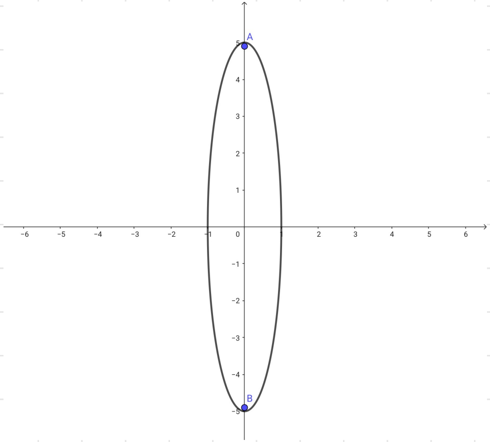
焦点

$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

長軸 6

短軸 4

(2)



焦点

$(0, 2\sqrt{6}), (0, -2\sqrt{6})$

長軸 10

短軸 2

練習 7 円 $x^2+y^2=3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1) y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍　　(2) y 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍

(1)

円上に点 $Q(s,t)$ をとり Q が移る点を $P(x,y)$ とすると

$$s^2+t^2=3^2 \cdots ①$$

$$x=s,\quad y=\frac{2}{3}t \cdots ②$$

② より $s=x,\ t=\frac{3}{2}y \cdots ③$

③ を ① に代入すると

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=3^2$$

$$x^2+\frac{9}{4}y^2=9$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

(2)

円上に点 $Q(s,t)$ をとり Q が移る点を $P(x,y)$ とすると

$$s^2+t^2=3^2 \cdots ①$$

$$x=s,\quad y=\frac{4}{3}t \cdots ②$$

② より $s=x,\ t=\frac{3}{4}y \cdots ③$

③ を ① に代入すると

$$x^2+\left(\frac{3}{4}y\right)^2=3^2$$

$$x^2+\frac{9}{16}y^2=9$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

練習 8

座標平面上において，長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を 3：4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

点 $P(x, y)$, $A(s, 0)$, $B(0, t)$ とする.

$AB = 7$ より $AB^2 = 49$

ここで $AB^2 = (s-0)^2 + (0-t)^2 = s^2 + t^2 = 49$ …①

点 P は AB を 3:4 に内分する点なので

$\left(\dfrac{4\cdot s + 3\cdot 0}{3+4}, \dfrac{4\cdot 0 + 3\cdot t}{3+4}\right) = \left(\dfrac{4}{7}s, \dfrac{3}{7}t\right)$ なので $x = \dfrac{4}{7}s$, $y = \dfrac{3}{7}t$ …②

②より $s = \dfrac{7}{4}x$, $t = \dfrac{7}{3}y$ …③

③を①に代入 $\left(\dfrac{7}{4}x\right)^2 + \left(\dfrac{7}{3}y\right)^2 = 49$

$\dfrac{49}{16}x^2 + \dfrac{49}{9}y^2 = 49$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

よって点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上にある.

逆に，この楕円上のすべての点 $P(x, y)$ は条件をみたす.

したがって，求める軌跡は楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

・双曲線の方程式

双曲線…平面上で2定点F, F'からのキョリの差が0でなく一定である点の軌跡

この2点F, F'を双曲線の焦点

双曲線の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

1 焦点は　2点 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

2 双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は　$2a$

3 漸近線は　2直線 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$

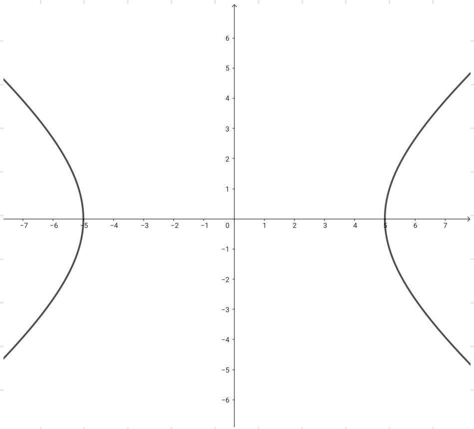
4 曲線は x 軸, y 軸, 原点Oに関して対称

5 頂点は $(a,0)$, $(-a,0)$, 中心は原点O

練習 9　次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　　(2)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(3)　$x^2-9y^2=9$

(1)

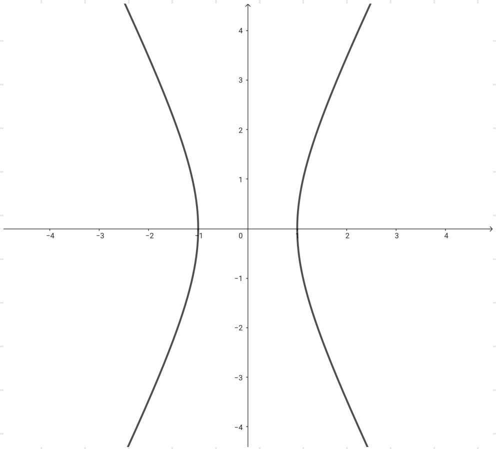


焦点 $(\sqrt{41}, 0), (-\sqrt{41}, 0)$

頂点 $(5, 0), (-5, 0)$

漸近線 $y=\dfrac{4}{5}x$, $y=-\dfrac{4}{5}x$

(2)

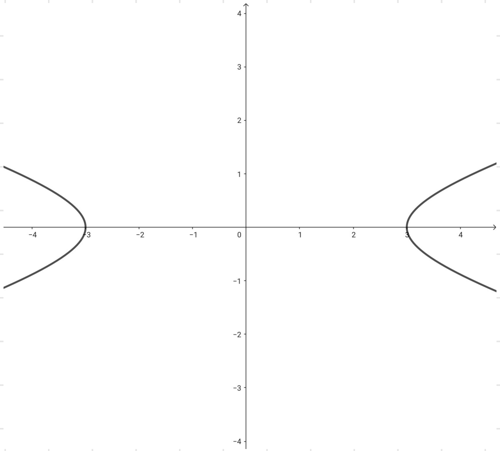


焦点 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

頂点 $(1, 0), (-1, 0)$

漸近線 $y=2x$, $y=-2x$

(3)



焦点 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$

頂点 $(3, 0), (-3, 0)$

漸近線 $y=\dfrac{1}{3}x$, $y=-\dfrac{1}{3}x$

練習 10 2 点 (5, 0), (−5, 0) を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

求める双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>0, b>0)$ とおく.

焦点からのキョリの差について $2a = 8$ より $a = 4$

焦点の座標について $\sqrt{a^2+b^2} = 5$ なので $a = 4$ より

$$\sqrt{4^2+b^2} = 5$$

$$16 + b^2 = 25$$

$$b^2 = 9$$

$b > 0$ より

$$b = 3$$

よって $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

・ 直角双曲線 …直角に交わる漸近線をもつ双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ の形で表される.

練習 11 2点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

求める直角双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>0)$ とおける

焦点の座標について $\sqrt{a^2+a^2}=2$ なので

$$2a^2=4$$

$$a^2=2$$

$a>0$ より

$$a=\sqrt{2}$$

よって $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

焦点がy軸上にある双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$

① 焦点は2点 $(0,\sqrt{a^2+b^2}),\ (0,-\sqrt{a^2+b^2})$

② 頂点は 2点 $(0,b),\ (0,-b)$

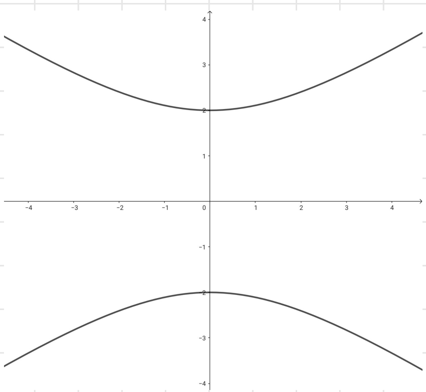
③ 漸近線は2直線 $y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x$

④ 双曲線上の点から2つの焦点までのキョリの差は $2b$

練習 12 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

(1)



焦点

$(0,\sqrt{13}),\ (0,-\sqrt{13})$

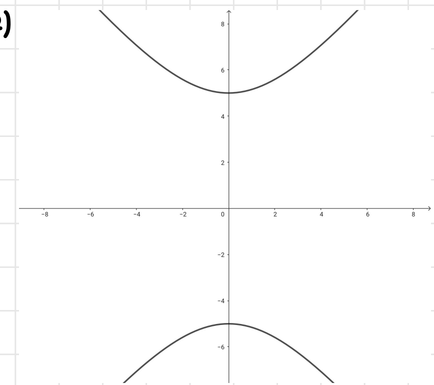
頂点

$(0,2),\ (0,-2)$

漸近線

$y=\dfrac{2}{3}x,\ y=-\dfrac{2}{3}x$

(2)



焦点

$(0,\sqrt{41}),\ (0,-\sqrt{41})$

頂点

$(0,5),\ (0,-5)$

漸近線

$y=\dfrac{5}{4}x,\ y=-\dfrac{5}{4}x$

曲線 $F(x, y)=0$ の平行移動

曲線 $F(x, y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は

$$F(x-p, y-q)=0$$

練習 13 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$$

焦点

$(\sqrt{3}+3, -2)$, $(-\sqrt{3}+3, -2)$

練習 14 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

方程式

$$(y-2)^2=4(x+1)$$

焦点

$(0, 2)$

練習 15 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

(2) $y^2+8y-16x=0$

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

(1)

$$x^2+4y^2+6x-8y+9=0$$

$$(x+3)^2-9+4(y^2-2y)+9=0$$

$$(x+3)^2-9+4\{(y-1)^2-1\}+9=0$$

$$(x+3)^2+4(y-1)^2=4$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を

x軸方向に-3, y軸方向に1だけ

平行移動させた楕円

(2)

$$y^2+8y-16x=0$$

$$(y+4)^2-16-16x=0$$

$$(y+4)^2=16(x+1)$$

放物線 $y^2=16x$ を

x軸方向に-1, y軸方向に-4だけ

平行移動させた放物線

(3)

$$4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$$

$$4(x^2-4x)-9(y^2+4y)=56$$

$$4\{(x-2)^2-4\}-9\{(y+2)^2-4\}=56$$

$$4(x-2)^2-16-9(y+2)^2+36=56$$

$$4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ を

x軸方向に2, y軸方向に-2だけ

平行移動させた双曲線

練習 16

k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ。

$$\begin{cases} x^2-2y^2=4 & \cdots ① \\ y=x+k & \cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入

$$x^2-2(x+k)^2=4$$

$$x^2-2(x^2+2kx+k^2)=4$$

$$x^2-2x^2-4kx-2k^2=4$$

$$-x^2-4kx-2k^2-4=0$$

$$x^2+4kx+2k^2+4=0 \quad \cdots ③$$

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot(2k^2+4)=2k^2-4=2(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$$

$D>0$ すなわち $k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき 2個

$D=0$ すなわち $k=\pm\sqrt{2}$ のとき 1個

$D<0$ すなわち $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき 0個

練習 17 点 C(4, 0) から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

点Cを通る接線はx軸に垂直でないので

$y=m(x-4)$ …① とおける.

これを放物線の式に代入すると

$\{m(x-4)\}^2=-4x$

$m^2(x^2-8x+16)=-4x$

$m^2x^2+(4-8m^2)x+16m^2=0$

$m^2x^2+2(2-4m^2)x+16m^2=0$

この2次方程式の判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=(2-4m^2)^2-16m^4=4-16m^2+16m^4-16m^4=4-16m^2$

直線が放物線と接するのはD=0のときなので

$4-16m^2=0 \rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$のとき 接線の方程式は①より $y=\frac{1}{2}x-2$

$m=-\frac{1}{2}$のとき 接線の方程式は①より $y=-\frac{1}{2}x+2$

また，接点の座標は $y=\frac{1}{2}x-2$ と $y=-\frac{1}{2}x+2$, $y^2=-4x$ より

$(-4,-4)$, $(-4,4)$

よって $y=\frac{1}{2}x-2$ $(-4,-4)$

$y=-\frac{1}{2}x+2$ $(-4,4)$

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x+x_1)$$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

練習 1 次の曲線上の点Ｐにおける接線の方程式を求めよ。

(1) 放物線 $y^2=4x$, P(1, 2)　　(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$, P(3, 1)

(1)

$$2y=2(x+1)$$

$$y=x+1$$

(2)

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$$

$$x+y=4$$

練習 18 点 F(4, 0) からの距離と，直線 $x=1$ からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡は，F を焦点の 1 つとする双曲線であることを示せ。

点Pを(x, y)とする.

$$PF=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+y^2}$$

点Pから直線 $x=1$ に垂線をおろし，その交点をHとすると

$$PH=(x-1)^2$$

ここで $PF:PH=2:1$ なので

$$PF^2:PH^2=4:1$$

$$(x^2-8x+16+y^2):(x^2-2x+1)=4:1$$

$$4x^2-8x+4=x^2-8x+16+y^2$$

$$3x^2-y^2=12$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

よって点Pは双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 上にある.

逆にこの双曲線上のすべての点Pは条件をみたす.

したがって点Pの軌跡は双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

ここでこの双曲線の焦点は$(4, 0)$, $(-4, 0)$ なので

この双曲線は点F$(4, 0)$を焦点の1つにもつ

・媒介変数表示… 曲線C上の点P(x, y)の座標が変数tによって $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ …① の形に表される.

変数tを媒介変数(パラメータ)という

①からtを消去して x, yの方程式 F(x, y)=0 が得られるとき, これは曲線Cを表す方程式.

練習 19 次のように媒介変数表示される曲線について，t を消去して x, y の方程式を求め，曲線の概形をかけ。

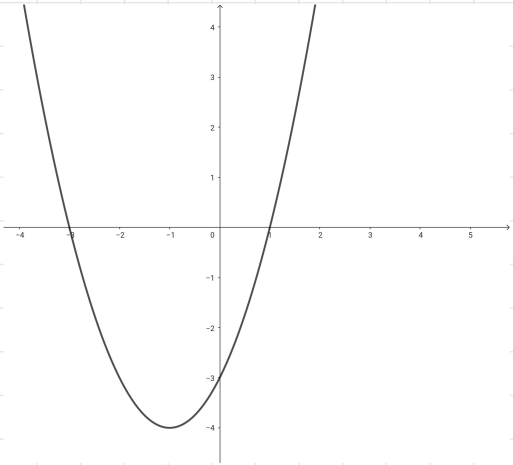
(1) $x=t+1$, $y=t^2+4t$　　(2) $x=2t$, $y=2t-t^2$

(1)

$x=t+1$ より $t=x-1$ なので

$y=(x-1)^2+4(x-1)$

$y=x^2+2x-3$

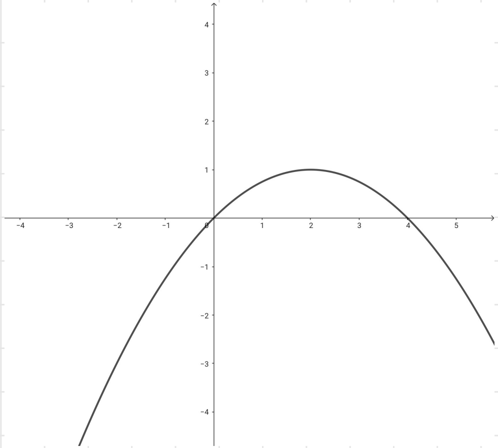


(2)

$x=2t$ より $t=\frac{x}{2}$ なので

$y=2\cdot\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$y=-\frac{1}{4}x^2+x$



練習 20　放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

$$y=-(x^2-4tx)+2t$$

$$y=-\{(x-2t)^2-4t^2\}+2t$$

$$y=-(x-2t)^2+4t^2+2t$$

頂点は $(2t,\ 4t^2+2t)$ なので

媒介変数表示すると $\begin{cases} x=2t \\ y=4t^2+2t \end{cases}$ …①

①から t を消去すると

$$y=4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x}{2}$$

$$y=x^2+x$$

よって頂点が描く曲線は 放物線 $y=x^2+x$

・一般角 θ を用いた媒介変数表示

円 $x^2+y^2=r^2$ について $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について $\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$

は媒介変数表示の一例

練習 21 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ。

(1) $x^2+y^2=2^2$　　(2) $x^2+y^2=2$

(1)

$x=2\cos\theta$

$y=2\sin\theta$

(2)

$x=\sqrt{2}\cos\theta$

$y=\sqrt{2}\sin\theta$

練習 22 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(1)

$x=3\cos\theta$

$y=2\sin\theta$

(2)

$x=4\cos\theta$

$y=5\sin\theta$

練習 23 θ が変化するとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{\cos\theta},\ 2\tan\theta\right)$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上を動くことを示せ。

$x=\dfrac{3}{\cos\theta}$, $y=2\tan\theta$ とすると

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$1+\frac{y^2}{4}=\frac{x^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

よって 点 $P\left(\dfrac{3}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$ は

双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上を動く

練習 24 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ を媒介変数 θ を用いて表せ。

$x=\dfrac{5}{\cos\theta}$ $y=4\tan\theta$

媒介変数表示 $x=f(t)+p$，$y=g(t)+q$ で表される曲線は，
媒介変数表示 $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される曲線を，
x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

練習 25 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta-1$

(2) $x=3\cos\theta+1$，$y=2\sin\theta+3$

(1)

$$\cos\theta=\frac{x-2}{3},\quad \sin\theta=\frac{y+1}{3}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9$$

中心 $(2,-1)$，半径 3 の円

(2)

$$\cos\theta=\frac{x-1}{3},\quad \sin\theta=\frac{y-3}{2}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

楕円 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

・ サイクロイド … 円が定直線上をすべることなく回転していくとき，円上の定点Pが描く曲線

媒介変数表示は $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$

練習 26 サイクロイド $x=2(\theta-\sin\theta)$, $y=2(1-\cos\theta)$ において，θ が次の値をとったときの点の座標を求めよ。

(1) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (2) $\theta=\pi$ (3) $\theta=\frac{3}{2}\pi$ (4) $\theta=2\pi$

(1)

$x=2\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

$y=2\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3},\ 1\right)$

(2)

$x=2(\pi-\sin\pi)=2\pi$

$y=2(1-\cos\pi)=4$

$(2\pi,\ 4)$

(3)

$x=2\left(\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi\right)=3\pi+2$

$y=2\left(1-\cos\frac{3}{2}\pi\right)=2$

$(3\pi+2,\ 2)$

(4)

$x=2(2\pi-\sin2\pi)=4\pi$

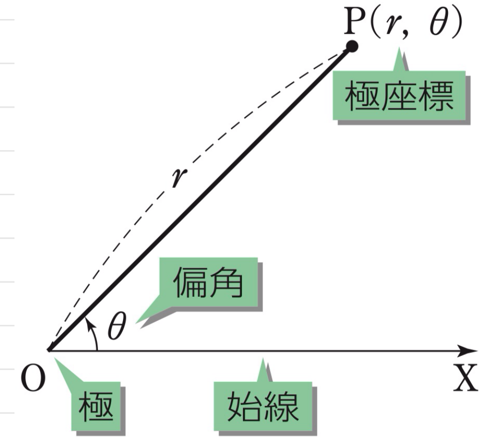
$y=2(1-\cos2\pi)=0$

$(4\pi,\ 0)$

極座標と極方程式

極座標… 2つの数の組(r,θ). $P(r,\theta)$と表記する.

直交座標… これまで用いてきたx座標とy座標の組(x,y)で表した座標



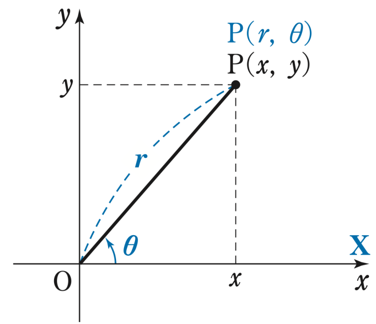
点Pの直交座標(x,y),極座標(r,θ)とすると以下が成立

1 $x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$

2 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r \neq 0$ のとき

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \ \sin\theta=\frac{y}{r}$$



練習 27 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　(2) $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　(3) $(3,\ \pi)$

(1)

$r=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$x=r\cos\theta=2\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

$y=r\sin\theta=2\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=1$

よって点Pの直交座標は

$(\sqrt{3},1)$

(2)

$r=\sqrt{2},\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=1$

$y=r\sin\theta=\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=1$

よって点Pの直交座標は $(1,1)$

(3)

$r=3,\ \theta=\pi$ であるから

$x=r\cos\theta=3\cdot\cos\pi=-3$

$y=r\sin\theta=3\cdot\sin\pi=0$

よって点Pの直交座標は $(-3,0)$

練習 28 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $(2,\ 2)$　(2) $(-1,\ \sqrt{3})$　(3) $(-\sqrt{3},\ -1)$

(1)

$x=2,\ y=2$ であるから

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって点Pの極座標の1つは

$\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)

$x=-1,\ y=\sqrt{3}$ であるから

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{1}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

よって点Pの極座標の1つは

$\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

(3)

$x=-\sqrt{3},\ y=-1$ であるから

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では $\theta=\dfrac{7}{6}\pi$

よって点Pの極座標の1つは

$\left(2,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$

・極方程式…平面上の曲線が，極座標(r, θ)の方程式，$F(r, \theta)=0$や$r=f(\theta)$で表される方程式

練習 29 極座標が$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$である点Aを通り，始線に平行な直線を，極方程式で表せ。

極座標が$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$より点Aの直交座標は

$$x = r\cos\theta = 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r\sin\theta = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad より$$

A$(0, 1)$

この直線上の点Pの極座標を(r, θ)とすると

$$\mathrm{OP}\sin\theta = 1$$

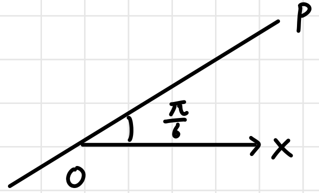
$$r\sin\theta = 1$$

$$r = \frac{1}{\sin\theta}$$

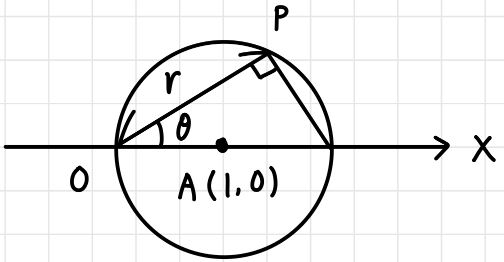
練習 30 次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$　　(2) $r = 2\cos\theta$

(1)



(2)



練習 31 極座標が $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ である点Aを通り，OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$ であることを示せ。

直線 ℓ 上の点Pの極座標を (r, θ) とすると

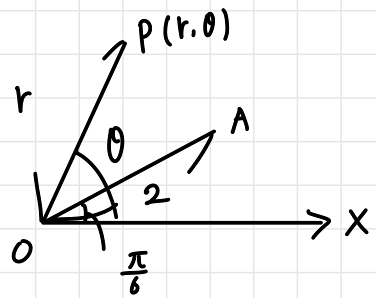
$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP} = \mathrm{OA}$$

ここで $\mathrm{OP}=r$, $\mathrm{OA}=2$

$$\cos\angle\mathrm{AOP} = \cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから直線 ℓ の極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$$



練習 32 楕円 $x^2+2y^2=4$ を極方程式で表せ。

楕円上の点 $P(x, y)$ の極座標を (r, θ) とすると

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

これらを $x^2+2y^2=4$ に代入すると

$$r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta=4$$

$$r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)=4$$

$$r^2(1+\sin^2\theta)=4$$

$$r^2\left(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)=4$$

$$r^2(3-\cos 2\theta)=8$$

練習 33 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

(1) $r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ (2) $r=2\sin\theta$

(1)

この曲線上の点 $P(r,\theta)$ の直交座標を (x,y) とすると

$r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$ …①

極方程式の分母をはらうと

$$r(\sin\theta+\cos\theta)=1$$

$$r\sin\theta+r\cos\theta=1$$

①を代入して

$$x+y=1$$

(2)

この曲線上の点 $P(r,\theta)$ の直交座標を (x,y) とすると

$r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$, $r^2=x^2+y^2$ …①

極方程式の両辺に r をかけると

$$r^2=2r\sin\theta$$

①を代入して

$$x^2+y^2=2y$$

$$x^2+y^2-2y=0$$

練習 34 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$$

この曲線上の点 $P(r,\theta)$ の直交座標を (x,y) とすると

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r^2=x^2+y^2$ …①

極方程式の分母をはらうと

$$r(1+2\cos\theta)=1$$
$$r+2r\cos\theta=1$$
$$r+2x=1$$
$$r=1-2x$$

両辺を2乗すると

$$r^2=(1-2x)^2$$

$$x^2+y^2=1-4x+4x^2$$

$$3x^2-y^2-4x+1=0$$

練習 35 始線 OX 上の点 A(2，0) を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。点 $P(r,\theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\frac{OP}{PH}=\frac{1}{2}$ であるような P の軌跡を，極方程式で表せ。

$OP=r$，$PH=2-r\cos\theta$

$\frac{OP}{PH}=\frac{r}{2-r\cos\theta}=\frac{1}{2}$ なので　$2r=2-r\cos\theta$

$$2r+r\cos\theta=2$$

$$r(2+\cos\theta)=2$$

$$r=\frac{2}{2+\cos\theta}$$