

数Ⅱ

複素数と方程式



複素数

2乗したら-1になる数を文字*i*とする. $\Rightarrow i^2 = -1$

(*i*を虚数単位という)

*a*と*b*は実数とする

$$\begin{array}{c} \underline{a} + \underline{b}i \\ \text{実部} \quad \text{虚部} \end{array}$$

・ $a \neq 0, b \neq 0$ のとき $a+bi$ (虚数)

・ $a=0, b \neq 0$ のとき bi (純虚数)

・ $a \neq 0, b=0$ のとき a (実数)

練習
1

次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1) $-3+5i$ (2) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(3) 1

(4) $-i$

	(1)	(2)	(3)	(4)
実	-3	$-\frac{1}{2}$	1	0
虚	5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1

複素数の相当

2つの複素数が等しいのは実部、虚部が一致するとき

a, b, c, d は実数とする

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{かつ } b = d$$

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{かつ } b = 0$$

練習

2

次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

$$(1) (x-2y)+(x+3)i = 2-i \quad (2) (2x+y)+(x-y+3)i = 0$$

$$(1) \begin{cases} x - 2y = 2 \cdots ① \\ x + 3 = -1 \cdots ② \end{cases}$$

$$\text{②より } x = -4$$

これを①に代入して $y = -3$

$$\underline{x = -4, y = -3}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y = 0 \cdots ① \\ x - y + 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

①②を連立させて解くと

$$\underline{x = -1, y = 2}$$

複素数の計算

加法・減法は複素数の実部同士・虚部同士で計算

乗法は分配律・乗法公式を利用。 $i^2 = -1$ も忘れずに

練習
3

次の式を計算せよ。

$$(1) (2+3i)+(4+i)$$

$$(3) (6+4i)-(3+2i)$$

$$(1) 6 + 4i$$

$$(2) 2 - 2i$$

$$(3) 3 + 2i$$

$$(4) -2 - i$$

練習
4

次の式を計算せよ。

$$(1) (1+2i)(4+3i)$$

$$(3) (2+3i)^2$$

$$(1) 4 + 11i + 6i^2 = 4 + 11i - 6 = -2 + 11i$$

$$(2) 6 + 5i - 4i^2 = 6 + 5i + 4 = 10 + 5i$$

$$(3) 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

$$(4) 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

共役な複素数

2つの複素数、 $a+bi$ と $a-bi$ のように虚部の符号だけがうつる複素数

実数 a と共役な複素数は a ($a+0i, a-0i$)

練習

5

次の複素数と共役な複素数をいえ。

- (1) $2+3i$ (2) $1-i$ (3) $\sqrt{3}i$ (4) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (5) -4

(1) $2-3i$

(2) $1+i$

(3) $-\sqrt{3}i$

(4) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(5) -4

複素数の計算

除法は分母と共役な複素数を分母と分子にかける。 $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ を利用

練習
6

次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{1+2i}{2+3i}$$

$$(2) \frac{1-i}{1+i}$$

$$(3) \frac{5i}{2-i}$$

$$(1) \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2+i-6i^2}{4-9i^2} = \frac{2+i+6}{4+9} = \frac{8+i}{13}$$

$$(2) \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$(3) \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10i+5i^2}{4-i^2} = \frac{10i-5}{4+1} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

負の数の平方根

$$a > 0 のとき \sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{i^2 \cdot a} = \sqrt{a} i$$

$$i < 1 = \sqrt{-1} = i$$

$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$. すなわち $\pm\sqrt{a}i$

練習

7

次の数を i を用いて表せ。

$$(1) \sqrt{-5}$$

$$(2) \sqrt{-9}$$

$$(3) -18 \text{ の平方根}$$

$$(1) \sqrt{-5} = \sqrt{5} i$$

$$(2) \sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$$

(3) -18 の平方根は

$$\pm\sqrt{-18} = \pm\sqrt{18} i = \pm 3\sqrt{2} i$$

練習

8

次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt{-2}\sqrt{-6}$$

$$(2) \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$$

$$(3) \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$$

$$(4) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$$

$$(1) \sqrt{2}i \times \sqrt{6}i = \sqrt{12}i^2 = 2\sqrt{3}i^2 = -2\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{4}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \frac{\sqrt{8}i}{\sqrt{2}} = 2i$$

$$(4) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}i} = \frac{3}{i}, \frac{3i}{i \times i} = -3i$$

2次方程式の解

複素数の範囲では負の数にも平方根が存在する。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

練習
9

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 = -1$

(2) $x^2 = -8$

練習
10

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 3x + 4 = 0$

(2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

(3) $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$

(4) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

$$(1) x = \pm \sqrt{-1} \\ = \pm i$$

$$(2) x = \pm \sqrt{-8} \\ = \pm \sqrt{8}i \\ = \pm 2\sqrt{2}i$$

$$(1) x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} : \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} : \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$(2) x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} : \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} : \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

$$(3) x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} : \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$$

$$(4) x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} : \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} : \sqrt{3} \pm i$$

2次方程式の解の判別式

$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると

$$D = b^2 - 4ac$$

- ・ $D > 0$ のとき 異なる 2 つの実数解
- ・ $D = 0$ のとき 重解
- ・ $D < 0$ のとき 異なる 2 つの虚数解 (実数解なし)
- ・ $D \geq 0$ のとき 実数解をもつ

次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$(1) \quad x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$(3) \quad -4x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$$

$$(4) \quad 3x^2 - 4\sqrt{6}x + 8 = 0$$

判別式をDとする

$$\begin{aligned}(1) \quad D &= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ &= 25 - 20 = 5\end{aligned}$$

$D > 0$ より

異なる2つの実数解

$$\begin{aligned}(2) \quad D &= (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 12 - 8 = 4\end{aligned}$$

$D > 0$ より

異なる2つの実数解

$$\begin{aligned}(3) \quad D &= 1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) \quad (4) \quad D = (-4\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \\ &= 1 - 16 = -15 \quad \quad \quad = 96 - 96 = 0\end{aligned}$$

$D < 0$ より

異なる2つの虚数解

$D = 0$ より

重解

m は定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2 + (m+1)x + 1 = 0$$

判別式をDとすると

$$\begin{aligned}D &= (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = m^2 + 2m + 1 - 4 \\ &= m^2 + 2m - 3 \\ &= (m+3)(m-1)\end{aligned}$$

(5) $D > 0$ つまり $m < -3, 1 < m$ のとき

異なる2つの実数解

(6) $D = 0$ つまり $m = -3, 1$ のとき

重解

(7) $D < 0$ つまり $-3 < m < 1$ のとき

異なる2つの虚数解

解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 解を α, β とするとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

- 練習 13** 次の 2 次方程式について、2つの解の和と積を求めよ。
- (1) $x^2+4x+2=0$ (2) $3x^2-6x-4=0$

(1)

$$\text{和 } -\frac{4}{1} = -4$$

(2)

$$\text{和 } -\frac{(-6)}{3} = 2$$

$$\text{積 } \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{積 } -\frac{4}{3}$$

- 練習 14** 2 次方程式 $x^2+3x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。
- (1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $(\alpha-\beta)^2$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{1} = -3, \quad \alpha \beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-3)^2 - 2 \cdot (-1) = 11$$

$$(2) \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\ : (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = -3 \cdot \{11 - (-1)\} = -36$$

$$(3) \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 11 - 2 \cdot (-1) = 13$$

2次方程式 $x^2 + 5x + m = 0$ の 2つの解が次の条件を満たすとき、定数 m の値と 2つの解を、それぞれ求めよ。

- (1) 1つの解が他の解の 4倍である。 (2) 2つの解の差が 1である。

(1) 2解を α, β とすると 1つの解が他の解の 4倍なので (2) 2解を α, β とすると 2解の差が 1なので

$$\beta = 4\alpha \text{ とかける。}$$

$x^2 + 5x + m = 0$ について解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = m$$

$\beta = 4\alpha$ を $\alpha + \beta = -5$ に代入すると

$$\alpha + 4\alpha = -5$$

$$5\alpha = -5$$

$$\alpha = -1$$

$$\alpha = -1 \text{ より } \alpha + \beta = -5 \text{ から } \beta = -4$$

$$m = \alpha\beta \text{ より}$$

$$m = (-1) \cdot (-4) = 4$$

m の値は 4

2解は -1 と -4

$$\alpha - \beta = 1 \Rightarrow \beta = \alpha - 1 \text{ とかける。}$$

$x^2 + 5x + m = 0$ について解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = m$$

$\beta = \alpha - 1$ を $\alpha + \beta = -5$ に代入すると

$$\alpha + (\alpha - 1) = -5$$

$$2\alpha = -4$$

$$\alpha = -2$$

$$\alpha = -2 \text{ より } \beta = \alpha - 1 \text{ から } \beta = -3$$

$$m = \alpha\beta \text{ より } m = (-2) \cdot (-3) = 6$$

m の値は 6

2つの解は -2 と -3

2次式の因数分解

2次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とするとき

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

複素数の範囲で因数分解

→ すべての因数を1次式にする。

練習

16

次の2次式を、複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 - 3x - 2$

(2) $2x^2 - 2x - 3$

(3) $x^2 + 4x + 6$

(1) $x^2 - 3x - 2 = 0$ として

解の公式より

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right)$$

(2) $2x^2 - 2x - 3 = 0$ として

解の公式より

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2 \left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$$

(3) $x^2 + 4x + 6 = 0$ として

解の公式より

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}i$$

$$\left\{ x - (-2 + \sqrt{2}i) \right\} \left\{ x - (-2 - \sqrt{2}i) \right\}$$

2数 α, β を解とする2次方程式は

$$\alpha(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \quad (\alpha \neq 0)$$

とくに $\alpha = 1$ のとき 2数 α, β を2解とする2次方程式の1つは

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

練習
17

次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

(1) 2, -1

(2) $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$

(3) $1+2i$, $1-2i$

(1) $(x-2)(x+1)$ (2) $\{x-(2+\sqrt{3})\} \{x-(2-\sqrt{3})\}$ (3) $\{x-(1+2i)\} \{x-(1-2i)\}$

$$= x^2 - x - 2$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

$$= x^2 - 2x + 5$$

$$\frac{x^2 - x - 2 = 0}{+}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 1 = 0}{+}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 = 0}{+}$$

和と積が次のようになる2数を求めよ。

(1) 和が -2 , 積が 6

2数を α, β とする

$$(1) \begin{aligned} \alpha + \beta &= -2 \\ \alpha \beta &= 6 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5} i$$

$$(2) \begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ \alpha \beta &= 3 \end{aligned}$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} i$$

2次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

(1) $1-\alpha, 1-\beta$

(2) α^2, β^2

$x^2 - 3x - 1 = 0$ について解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 3, \alpha \beta = -1$$

$$(1) \left\{ x - (1-\alpha) \right\} \left\{ x - (1-\beta) \right\} = 0$$

$$x^2 - (1-\alpha + 1-\beta)x + (1-\alpha)(1-\beta) = 0$$

$$x^2 - \{-(\alpha + \beta) + 2\}x + \{1 - (\alpha + \beta) + \alpha \beta\} = 0$$

$$x^2 - (-3 + 2)x + (1 - 3 - 1) = 0$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2) (x - \alpha^2)(x - \beta^2) = 0$$

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + (\alpha\beta)^2 = 0$$

$$x^2 - 11x + 1 = 0$$

2次方程式の実数解の符号

2つの実数 α, β について

①

$$(P) \alpha > 0 \text{かつ} \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(I) \alpha < 0 \text{かつ} \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(H) \begin{aligned} \alpha > 0 \text{かつ} \beta < 0 \\ \alpha < 0 \text{かつ} \beta > 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \alpha \beta < 0$$

②

$a\chi^2 + b\chi + c = 0$ の2解 α, β と判別式 D について

$$(P) \alpha, \beta \text{ は異なる2つの正の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で} \alpha + \beta > 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(I) \alpha, \beta \text{ は異なる2つの負の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で} \alpha + \beta < 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(H) \alpha, \beta \text{ は異符号の解} \Leftrightarrow \alpha \beta < 0$$

2次方程式 $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$ が、次のような解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる 2 つの正の解
- (2) 異なる 2 つの負の解
- (3) 正の解と負の解

$$x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0 \text{ について}$$

判別式を D とすると

$$D = \{2(m-3)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4m = 4(m-1)(m-9)$$

(1) $D > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha \beta > 0$

$$D > 0 \Leftrightarrow 4(m-1)(m-9) > 0$$

$$m < 1, 9 < m \quad \cdots \textcircled{1}$$

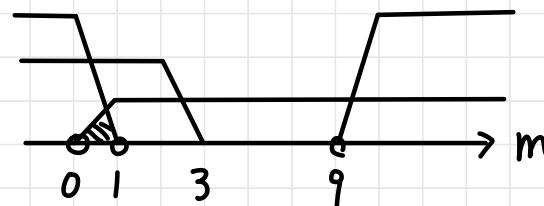
$$\alpha + \beta > 0 \Leftrightarrow -2(m-3) > 0$$

$$m < 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha \beta > 0 \Leftrightarrow 4m > 0$$

$$m > 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

① ② ③ エリ



$$0 < m < 1$$



$$(2) D > 0 \text{ で } \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha \beta > 0 \quad (3) \alpha \beta < 0 \text{ で }$$

$$D > 0 \text{ で } 4(m-1)(m-9) > 0$$

$$m < 1, 9 < m \dots \textcircled{1}$$

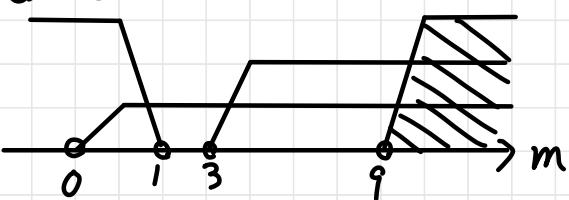
$$4m < 0$$

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta < 0 \\ -2(m-3) < 0 \\ m > 3 \end{array} \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \beta > 0 \\ 4m > 0 \\ m > 0 \end{array} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\alpha \beta > 0 \text{ で}}{m > 0}$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{ で}$



$$\frac{q < m}{\rightarrow}$$

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $(x - k)$ で割った商を $Q(x)$. 余りを R とすると

$$P(x) = (x - k) Q(x) + R$$

(割られる数) = (割る数) × 商 + 余り (余りは割る数よりも高くても次数が 1 小さい式)

剰余の定理

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x - k$ で割った余りは $P(k)$ となる

練習
21 $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ を次の 1 次式で割った余りを求めよ。
(1) $x - 1$ (2) $x + 1$ (3) $x + 2$

$$(1) P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -3$$

$$(2) P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = 1$$

$$(3) P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = 0$$

練習
23 多項式 $P(x) = 2x^3 + 5ax^2 + ax + 1$ を $x + 1$ で割った余りが -5 であるとき、定数 a の値を求めよ。

$$x + 1 \text{ で割った余りが } -5 \rightarrow P(-1) = -5$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 + 5a \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + 1 = -5 \\ -2 + 5a - a + 1 &= -5 \end{aligned}$$

$$4a = -4$$

$$\underline{a = -1}$$

練習
24 多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 1, $x+1$ で割った余りが 5 である。 $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割った余りを求めよ。

$$x-3 \text{ で "割った余りが" } 1 \Rightarrow P(3) = 1$$

$$x+1 \text{ で "割った余りが" } 5 \Rightarrow P(-1) = 5$$

$P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で "割ったときの 商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とする。

$$P(x) = (x-3)(x+1) Q(x) + ax + b$$

$$P(3) = 1 \text{ より}$$

$$P(3) = 3a + b = 1 \cdots ①$$

$$P(-1) = 5 \text{ より}$$

$$P(-1) = -a + b = 5 \cdots ②$$

①②を連立させて解くと

$$a = -1 \quad b = 4$$

よって $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で "割った余りは

$$\begin{array}{r} -x + 4 \\ \hline \end{array}$$

因数定理

多項式 $P(x)$ が 1 次式 $x - k$ を因数にもつ $\Leftrightarrow P(k) = 0$

練習 25 次の 1 次式のうち、多項式 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ の因数であるものはどれか。

- ① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 2$ ④ $x + 2$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \text{ として}$$

因数は $P(a) = 0$ となる $x - a$

$$\textcircled{1} \quad P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -8$$

$P(1) \neq 0$ より $x - 1$ は因数でない

$$\textcircled{2} \quad P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$$

$P(-1) = 0$ より $x + 1$ は因数

$$\textcircled{3} \quad P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

$P(2) = 0$ より $x - 2$ は因数

$$\textcircled{4} \quad P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6 = 4$$

$P(-2) \neq 0$ より $x + 2$ は因数でない

(2) (3)

練習 26 次の式を因数分解せよ。

26

$$(1) \quad x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

$$(3) \quad 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$$

$$(1) \quad P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \text{ とする}$$

$P(1) = 0$ より $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8) = (x-1)(x-4)(x+2)$$

$$(2) \quad P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \text{ とする}$$

$P(-1) = 0$ より $P(x)$ は $x + 1$ を因数にもつ

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 9) = (x+1)(x-3)^2$$

$$(3) \quad P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x + 6 \text{ とする}$$

$P(2) = 0$ より $P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつ

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 7x + 3) = (x-2)(2x+1)(x+3)$$

組立除法

$x^3 - 4x^2 + x + 6$ を $x+1$ で割った商と余り

$$\begin{array}{r}
 (\text{係数}) \quad (x^3) \quad (x^2) \quad (x) \quad (\text{定}) \\
 | \quad -4 \quad 1 \quad 6 \quad \boxed{-1} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 -1 & 5 & -6 & \\
 \xrightarrow{x(-1)} & \xrightarrow{x(-1)} & \xrightarrow{x(-1)} & \\
 \hline
 1 & -5 & 6 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

(割る式) = 0 の x の値

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6) + 0$$

よって $x^3 - 4x^2 + x + 6$ を $x+1$ で割ったときの商は $x^2 - 5x + 6$ 、余りは 0

練習
1

$x^3 - 4x^2 + 3$ を $x-1$ で割った商と余りを求めよ。

$$\begin{array}{r}
 (\text{係数}) \quad | \quad (x^3) \quad (x^2) \quad (x) \quad (\text{定}) \\
 | \quad -4 \quad 0 \quad 3 \\
 + | \quad \quad 1 \quad -3 \quad 3 \\
 \hline
 | \quad -3 \quad -3 \quad 0 \\
 \hline
 (\text{係数}) \quad (x^2) \quad (x) \quad (\text{定}) \quad (\text{余})
 \end{array}$$

商 $x^2 - 3x - 3$

余り 0

高次方程式

(左辺) = 0 の左辺を因数分解し、各因数 = 0 とおいたときにでる文字の値が解。

練習

27

次の3次方程式を解け。

$$(1) \ x^3 - 8 = 0$$

$$(2) \ x^3 + 1 = 0$$

$$(1) (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x-2=0 \text{ より } x=2$$

$$x^2+2x+4=0 \text{ より 解の公式から}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} : \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

よって $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

$$(2) (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x+1=0 \text{ より } x=-1$$

$$x^2-x+1=0 \text{ より 解の公式から}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} : \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

よって $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

次の3次方程式を解け。

(1) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

(3) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

(2) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

(4) $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

(1) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ とする

$P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$ より

 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ

$P(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6) = 0$

$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$

$\underline{x = 1, -2, -3}$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ とする

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$ より

$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$x-1 = 0$ より $x = 1$

$x^2 - 2x - 2 = 0$ より 解の公式から

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = |\pm \sqrt{3}|$

$\underline{x = 1, |\pm \sqrt{3}|}$

(2) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ とする
 $P(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2 = 0$ より

 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ

$P(x) = (x+1)(x^2 + 3x + 2) = 0$

$(x+1)(x+1)(x+2) = 0$

$(x+1)^2(x+2) = 0$

$\underline{x = -1, -2}$

(4) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$ とする

$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0$ より

$P(x) = (x-2)(2x^2 + x + 2) = 0$

$x-2 = 0$ より $x = 2$

$2x^2 + x + 2 = 0$ より 解の公式から

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$

$\underline{x = 2, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}}$

3次方程式の解と係数の関係

$a\chi^3 + b\chi^2 + c\chi + d = 0$ の 3 解を α, β, γ とする

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

練習
1

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次
の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ について解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad \alpha\beta\gamma = -2$$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$$

$$\underline{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 7}$$

$$(2) (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1$$
$$= -2 + 1 + 3 + 1 = 3$$

$$\underline{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 3}$$

a, b は実数とする。3次方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ が $1+i$ を解に
もつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

(解と係数の関係を利用)

$1+i$ が解なので $1-i$ も解となる。

この3次方程式の他の解を α とすると

3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha + (1+i) + (1-i) = -1 \cdots ①$$

$$\alpha(1+i) + (1+i)(1-i) + (1-i)\alpha = a \cdots ②$$

$$\alpha(1+i)(1-i) = -b \cdots ③$$

$$\text{①を解くと } \alpha = -3$$

$$\alpha = -3 \text{ を ③ に代入}$$

$$-3(1+i) + (1+i)(1-i) + (1-i)(-3) = a$$

$$-3 - 3i + 1 - i^2 - 3 + 3i = a$$

$$-3 - 3i + 1 + 1 - 3 + 3i = a$$

$$a = -4$$

$$\alpha = -3 \text{ を ③ に代入}$$

$$-3(1+i)(1-i) = -b$$

$$-3(1-i^2) = -b$$

$$-b = -6$$

$$b = 6$$

$$\alpha = -4, b = 6, \text{他の解は } 1-i, -3$$

a, b は実数とする。3次方程式 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ が $1+i$ を解に
もつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

$1+i$ が解なので $1-i$ も解となる。

$x = 1+i$ を 3 次方程式に代入

$$(1+i)^3 + (1+i)^2 + a(1+i) + b = 0$$

$$(1+3i+3i^2+i^3) + (1+2i+i^2) + a+ai+b = 0$$

$$(1+3i-3-i) + (1+2i-1) + a+ai+b = 0$$

$$-2+2i+2i+a+ai+b = 0$$

$$a+b-2+a i+4 i=0$$

$$(a+b-2)+(a+4)i=0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b-2=0 \cdots ① \\ a+4=0 \cdots ② \end{array} \right. \quad \text{①②より}$$

$$a=-4, b=6$$

(教科書解法)

3次方程式は

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$$

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$ とすると

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 6 = 0 \text{ つまり}$$

$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつので

$$P(x) = (x+3)(x^2-2x+2) = 0 \text{ つまり}$$

$x = -3$ も解である。

$$a = -4, b = 6$$

他の解は $1-i, 3$