

数Ⅲ

積分法とその応用



$f(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \text{は積分定数}$$

x^α の不定積分

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{ただし, } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

練習 次の不定積分を求めよ。

1

$$(1) \int \frac{dx}{x^3}$$

$$(2) \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$(3) \int x\sqrt{x} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

C は積分定数とする。

$$(1) \int \frac{d\chi}{\chi^3} = \int \chi^{-3} d\chi = -\frac{1}{2} \chi^{-2} + C = \underline{-\frac{1}{2\chi^2} + C}$$

$$(2) \int \chi^{\frac{1}{3}} d\chi = \frac{3}{4} \chi^{\frac{4}{3}} + C \quad \underline{\underline{}}$$

$$(3) \int \chi\sqrt{x} d\chi = \int \chi^{\frac{3}{2}} d\chi = \frac{2}{5} \chi^{\frac{5}{2}} + C = \underline{\frac{2}{5} \chi^2 \sqrt{x} + C}$$

$$(4) \int \frac{d\chi}{\sqrt{x}} = \int \chi^{-\frac{1}{2}} d\chi = 2 \chi^{\frac{1}{2}} + C = \underline{2\sqrt{x} + C}$$

関数の定数倍および和、差の不定積分

1 $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ k は定数

2 $\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

3 $\int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

練習

2

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^3} dx$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$$

C は積分定数とする。

$$(3) \int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y} dy$$

$$(4) \int \left(3t^2 - \frac{1}{t}\right)^2 dt$$

(1)

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \underline{\log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C}$$

(2)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C}$$

(3)

$$\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y} dy = \int \frac{y-2\sqrt{y}+1}{y} dy = \int \left(1 - \frac{2\sqrt{y}}{y} + \frac{1}{y}\right) dy = \underline{y - 4\sqrt{y} + \log y + C}$$

(4)

$$\int \left(3t^2 - \frac{1}{t}\right)^2 dt = \int \left(9t^4 - 6t + \frac{1}{t^2}\right) dt = \underline{\frac{9}{5}t^5 - 3t^2 - \frac{1}{t} + C}$$

三角関数、指数関数の不定積分

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C, \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

練習
3

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (\cos x - 2 \sin x) \, dx$$

$$(2) \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{\tan^2 x}$$

$$(4) \int 5^x \, dx$$

$$(5) \int (3^x - 2e^x) \, dx$$

C は積分定数とする。

$$(1) \int (\cos x - 2 \sin x) \, dx = \underline{\sin x + 2 \cos x + C}$$

$$(2) \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) \, dx = \underline{2 \sin x - \tan x + C}$$

$$(3) \int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \, dx = \underline{-\frac{1}{\tan x} - x + C}$$

$$(4) \int 5^x \, dx = \underline{\frac{5^x}{\log 5} + C}$$

$$(5) \int (3^x - 2e^x) \, dx = \underline{\frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C}$$

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x) = f(x), \ a \neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

練習

4

次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int (3x+1)^4 dx$ (2) $\int (4x-3)^{-3} dx$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$
 (4) $\int \frac{dx}{2x+1}$ (5) $\int \sin 2x dx$ (6) $\int e^{3x-1} dx$

C は積分定数とする。

$$(1) \int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot (3x+1)^5 \cdot \frac{1}{(3x+1)'} + C = \frac{1}{15} (3x+1)^5 + C$$

$$(2) \int (4x-3)^{-3} dx = -\frac{1}{2} (4x-3)^{-2} \cdot \frac{1}{(4x-3)'} + C = -\frac{1}{8} (4x-3)^{-2} + C$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx = \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot (1-2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1-2x)'} + C = -\sqrt{1-2x} + C$$

次の不定積分を求めよ。

- (1) $\int (3x+1)^4 dx$ (2) $\int (4x-3)^{-3} dx$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$
 (4) $\int \frac{dx}{2x+1}$ (5) $\int \sin 2x dx$ (6) $\int e^{3x-1} dx$

Cは積分定数とする。

$$(4) \int \frac{1}{2x+1} dx = \log|2x+1| \cdot \frac{1}{(2x+1)'} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log|2x+1| + C}}$$

$$(5) \int \sin 2x dx = -\cos 2x \cdot \frac{1}{(2x)'} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cos 2x + C}}$$

$$(6) \int e^{3x-1} dx = e^{3x-1} \cdot \frac{1}{(3x-1)'} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{3x-1} + C}}$$

置換積分法 (1)

$$1 \quad \int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt \quad \text{ただし, } x = g(t)$$

練習
5

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \sqrt{2x-1} dx$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad C \text{は積分定数とする。}$$

(1)

$$\sqrt{2x-1} = t \text{ とす。}$$

$$2x-1 = t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = t \rightarrow dx = t dt$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{2x-1} dx &= \int \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \right) \cdot t \cdot t dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3 + C \\ &= \frac{1}{30}t^3(3t^2 + 5) + C \\ &= \frac{1}{30}(2x-1)\sqrt{2x-1} \{3(2x-1)+5\} + C \\ &= \frac{1}{30}(2x-1)\sqrt{2x-1}(6x+2) + C \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{15}(2x-1)\sqrt{2x-1}(3x+1) + C}} \end{aligned}$$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{2x-1} dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ Cは積分定数とする。

(2)

$\sqrt{x+1} = t$ とする

$x+1 = t^2 \rightarrow x = t^2 - 1$

$\frac{dx}{dt} = 2t \rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt \\&= \int (2t^2 - 2) dt \\&= \frac{2}{3}t^3 - 2t + C \\&= \frac{2}{3}t(t^2 - 3) + C \\&= \frac{2}{3}\sqrt{x+1} \{(x+1)-3\} + C \\&= \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C}}\end{aligned}$$

置換積分法 (2)

$$2 \quad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{ただし, } g(x) = u$$

練習
6

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx \quad (2) \int \sin^3 x \cos x dx \quad (3) \int \frac{\log x}{x} dx$$

$$(1) \quad x^3 + 2 = u \text{ とす。}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$$

$$= \int x^2 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int \frac{\sqrt{u}}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u \sqrt{u} + C$$

$$= \frac{2}{9} (x^3 + 2) \sqrt{x^3 + 2} + C$$

$$(2) \quad \sin x = u \text{ とす。}$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx$$

$$= \int u^3 \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

$$(3) \quad \log x = u \text{ とす。}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

$$= \int \frac{u}{x} \cdot x du$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

$\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

3 $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$

練習
7

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

(3) $\int \frac{dx}{\tan x}$

C は積分定数とする。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx$

$$= \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1} dx$$

$$= \underline{\underline{\log|x^2+x-1| + C}}$$

(2) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$$= \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx$$

$$= \underline{\underline{\log(e^x+1) + C}}$$

(3) $\int \frac{dx}{\tan x}$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$$

$$= \underline{\underline{\log|\sin x| + C}}$$

部分積分法

$$4 \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

練習
8

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x \sin x dx$$

$$(2) \int x e^{-x} dx$$

Cは積分定数とする。

$$(1) \int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \underline{-x \cos x + \sin x + C}$$

$$(2) \int x e^{-x} dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx = \underline{-x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C}$$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x dx$

(2) $\int \log x^2 dx$

(3) $\int x \log x dx$

 C は積分定数とする。

$$(1) \int \log 2x dx = \int (x)' \log 2x dx = x \log 2x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log 2x - \int dx = \underline{x \log 2x - x + C}$$

$$(2) \int \log x^2 dx = \int (x)' \log x^2 dx = x \log x^2 - \int x \cdot \frac{2}{x} dx = x \log x^2 - \int 2 dx = \underline{x \log x^2 - 2x + C}$$

$$(3) \int x \log x dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x dx = \underline{\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C}$$

不定積分 $\int (x^2+1) \sin x dx$ を求めよ。

$$\int (x^2+1) \sin x dx = (x^2+1) \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx$$

$$= -(x^2+1) \cos x + \int 2x \cos x dx$$

$$= -(x^2+1) \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx$$

$$= -(x^2+1) \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$= (-x^2 - 1 + 2) \cos x + 2x \sin x + C$$

$$= (1 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C \quad (C \text{は積分定数})$$

$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ が成り立つように、定数 a, b の値を

定めよ。また、不定積分 $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$ を求めよ。

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

これか $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ と等しくなるためには $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$ となればよいので $a=-1, b=2$

Cを積分定数とする

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = -\log|x+1| + 2\log|x+2| + C \\ &= \log(x+2)^2 - \log|x+1| + C \\ &= \log \frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C \end{aligned}$$

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{x^2 - 1}{x+2} dx$$

$$(2) \int \frac{4x^2}{2x-1} dx$$

$$(3) \int \frac{3}{x^2+x-2} dx$$

C は積分定数とする。

$$(1) \int \frac{x^2 - 1}{x+2} dx = \int \left(x - 2 + \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \log|x+2| + C$$

$$(2) \int \frac{4x^2}{2x-1} dx = \int \left(2x+1 + \frac{1}{2x-1} \right) dx = x^2 + x + \frac{1}{2} \log|2x-1| + C$$

$$(3) \int \frac{3}{x^2+x-2} dx = \int \frac{3}{(x-1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x dx$

(2) $\int \sin^2 3x dx$

(3) $\int \sin x \cos x dx$

 C は積分定数とする。

(4) $\int \cos 3x \cos 2x dx$

(5) $\int \sin x \sin 3x dx$

(1)
$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$$

(2)
$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C}$$

(3)
$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \underline{-\frac{1}{4} \cos 2x + C}$$

(4)
$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) dx = \underline{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \sin x \right) + C = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C}$$

(5)
$$\int \sin x \sin 3x dx = \int -\frac{1}{2} \{ \cos 4x - \cos(-2x) \} dx = \underline{-\frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 2x) dx}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \underline{-\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C}$$

定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし,

a, b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

練習

14

$$(1) \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$(3) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$$

$$(4) \int_{-1}^1 2^x dx$$

$$(1) \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$(3) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\log|x| \right]_{-2}^{-1} = \log|-1| - \log|-2| = \underline{\underline{-\log 2}}$$

$$(4) \int_{-1}^1 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2 \log 2} = \underline{\underline{\frac{3}{2 \log 2}}}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$

(2) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

(3) $\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt$

(4) $\int_0^\pi \sin 2x dx$

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta$

(1)
$$\int_1^2 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} \right]_1^2 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

(2)
$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8} (2x+1)^4 \right]_0^1 = \frac{80}{8} = 10$$

(3)
$$\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t}) dt = [e^t + e^{-t}]_{-1}^1 = (e + \frac{1}{e}) - (\frac{1}{e} + e) = 0$$

(4)
$$\int_0^\pi \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = \left(-\frac{1}{2} \cos 2\pi \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 \right) = 0$$

(5)
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi$$

(6)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin 6\theta + \sin 2\theta) d\theta = \left[-\frac{1}{12} \cos 6\theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1| dx$

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$|\sqrt{x} - 1| = -\sqrt{x} + 1$

 $1 \leq x \leq 4$ のとき

$|\sqrt{x} - 1| = \sqrt{x} - 1$

$$\int_0^1 (-\sqrt{x} + 1) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - 1) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \right]_1^4$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

(2) $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

(2) $-1 \leq x \leq 0$ のとき

$|e^x - 1| = -e^x + 1$

 $0 \leq x \leq 2$ のとき

$|e^x - 1| = e^x - 1$

$$\int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^2 (e^x - 1) dx$$

$$= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^2$$

$$= \underline{\underline{e^2 + \frac{1}{e} - 3}}$$

定積分の置換積分法

$x = g(t)$ とおくとき, $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

x	$a \rightarrow b$
t	$\alpha \rightarrow \beta$

練習
17

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 x(1-x)^5 dx$$

(1)

$$1-x=t \text{ とする。}$$

$$x=1-t$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 1 \rightarrow 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \quad (\text{∴})$$

$$dx = -dt$$

$$\int_0^1 x(1-x)^5 dx$$

$$= \int_1^0 -(1-t) \cdot t^5 dt$$

$$= \int_1^0 (t^6 - t^5) dt$$

$$= \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{6}t^6 \right]_1^0$$

$$= \frac{1}{42}$$

(2)

$$\sqrt{x-1} = t \text{ とする。}$$

$$x-1 = t^2$$

$$x = t^2 + 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 2 \rightarrow 5 \\ \hline t & 1 \rightarrow 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad (\text{∴})$$

$$dx = 2t dt$$

$$\int_2^5 x \sqrt{x-1} dx$$

$$= \int_1^2 (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2t dt$$

$$= \int_1^2 (2t^4 + 2t^2) dt$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{256}{15}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(1) $x = \sin \theta$ とする。

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \cos \theta d\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \quad \text{f'1)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(2)

 $x = 2 \sin \theta$ とする

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & \sqrt{3} \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \quad \text{f'1)}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2+2\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[2\theta + \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi + \sqrt{3}}{2}$$

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (2) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx \quad (3) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(3) x = 2 \sin \theta$$

$$\begin{array}{c|c} x & | \rightarrow \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \quad \text{f'')$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} \cdot 2 \cos \theta d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= [\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

(2) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

(1)

$x = \tan \theta$ と す。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & | & 0 \rightarrow \sqrt{3} & \\ \hline \theta & | & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{f'')$

$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$

$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\pi}{3}$

(2) $x = 2 \tan \theta$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & | & -2 \rightarrow 2 & \\ \hline \theta & | & -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} & \\ \hline \end{array}$$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \quad \text{f'')}$

$dx = \frac{2 d\theta}{\cos^2 \theta}$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \tan^2 \theta + 4} \cdot \frac{2 d\theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{2 d\theta}{\cos^2 \theta}$

$= \frac{2}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= \frac{1}{2} [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4}$

次の関数の中から、偶関数、奇関数を選べ。

① x^3

② $x^4 + 3$

③ $\tan x$

④ $x + \cos x$

① $f(x) = x^3$
 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$f(x) = -f(-x)$ より 奇関数

② $f(x) = x^4 + 3$
 $f(-x) = (-x)^4 + 3 = x^4 + 3$

$f(x) = f(-x)$ より 偶関数

③ $f(x) = \tan x$

$f(-x) = \tan(-x) = -\tan x$

$f(x) = -f(-x)$ より 奇関数

④ $f(x) = x + \cos x$

$f(-x) = -x + \cos(-x) = -x + \cos x$

$f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(x)$ なので

偶関数でも奇関数でもない。

偶関数 ②

奇関数 ① ③

偶関数、奇関数と定積分

1 偶関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

2 奇関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

練習
21

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$$

$$(2) \int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$(3) \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$(1) \int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2 + 5x \right]_{-2}^2$$

$$= \underline{36}$$

$$(3) f(x) = x\sqrt{4-x^2} \text{ は奇関数なので}$$

$$\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx = \underline{0}$$

(2) $f(x) = e^x - e^{-x}$ は奇関数なので

$$\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = \underline{0}$$

(4) $f(x) = \sin^2 x$ は偶関数なので

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underline{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

練習
22

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^\pi x \sin x dx$$

$$(2) \int_0^1 xe^x dx$$

$$(3) \int_1^2 x \log x dx$$

(1)

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

$$= [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx$$

$$= [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx$$

$$= [-x \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi$$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$

(2)

$$\int_0^1 x e^x dx$$

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$= \underline{1}$$

(3)

$$\int_1^2 x \log x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^2$$

$$= 2 \log 2 - \frac{3}{4}$$

練習
23

部分積分法によって、定積分 $\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx$ を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+1)^3(x-1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x+1)^4(x-1) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x+1)^4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x+1)^4(x-1) \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{20}(x+1)^5 \right]_{-1}^1$$

$$= -\frac{8}{5}$$

練習
24

部分積分法を 2 回利用して、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2x \cos x dx$$

$$= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$$

$$= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$$

$$= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2$$

定積分と導関数

$$a \text{ が定数のとき } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

練習

25

次の関数を x で微分せよ。ただし、(2)では $x > 0$ とする。

$$(1) \int_0^x \sin t dt$$

$$(2) \int_1^x t \log t dt$$

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \underline{\sin x}$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_1^x t \log t dt = \underline{x \log x}$$

関数 $G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$ について、 $G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

$$G(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$$

$$= x \int_0^x e^t dt - \int_0^x t e^t dt$$

$$G'(x) = (x)' \int_0^x e^t dt + x \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt - \frac{d}{dx} \int_0^x t e^t dt$$

$$= \int_0^x e^t dt + x e^x - x e^x$$

$$= \int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

$$G''(x) = (e^x - 1)' = e^x$$

$$\therefore G'(x) = e^x - 1$$

$$\underline{\underline{G''(x) = e^x}}$$

練習
27

関数 $\int_x^{3x} t \cos t dt$ を x で微分せよ。

$$F'(t) = t \cos t \text{ とする。}$$

$$\int_x^{3x} t \cos t dt = [F(t)]_x^{3x} = F(3x) - F(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_x^{3x} t \cos t dt &= F'(3x) \cdot (3x)' - F'(x) \\ &= 3 \cdot 3x \cos 3x - x \cos x \\ &= 9x \cos 3x - x \cos x\end{aligned}$$

練習
28

等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t) e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_0^1 f(t) e^t dt = a \text{ とする。}$$

$$f(x) = x + a$$

$$f(t) = t + a \text{ となるので。}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) e^t dt &= \int_0^1 (t+a) e^t dt \\ &= [(t+a) e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= [(t+a) e^t]_0^1 - [e^t]_0^1 \\ &= (e-1)a + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) e^t dt &= a \quad \text{ゆえに} \\ (e-1)a + 1 &= a \Rightarrow a = \frac{1}{2-e}\end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = x + \frac{1}{2-e}$$

区分求積法と定積分

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

ただし、 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$

よって、以下の形を用いる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

練習
30

極限値 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \left(\frac{3}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^4 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ここで } f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^4 \text{ なので } f(x) = x^4 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 &= \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

曲線 $y = f(x)$ と面積

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき,
 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線
 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積
 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

練習
33

次の曲線と 2 直線、および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e$$

$$(2) \quad y = \sqrt{x+1}, \quad x = 0, \quad x = 3$$

$$(1) \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_1^e = \underline{\underline{1}}$$

練習
34 曲線 $y = e^x - e$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$\begin{aligned} & 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } y \leq 0 \\ & 1 \leq x \leq 2 \text{ のとき } y \geq 0 \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 -(e^x - e) dx + \int_1^2 (e^x - e) dx \\ & = [-e^x + ex]_0^1 + [e^x - ex]_1^2 \\ & = \underline{\underline{e^2 - 2e + 1}} \end{aligned}$$

2つの曲線の間の面積

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq g(x)$ のとき,
2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線
 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

練習
35

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$$

$$(2) \quad x + 4y = 5, \quad xy = 1$$

$$(1) \quad x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

求める面積は

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad x + 4y = 5 \quad \text{∴} \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$xy = 1 \quad \text{∴} \quad y = \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$x = 1, 4$$

求める面積は

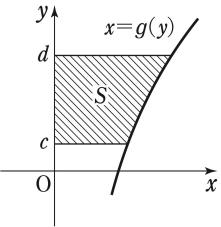
$$\int_1^4 \left\{ \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \right) - \frac{1}{x} \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \log x \right]_1^4$$

$$= \frac{15}{8} - 2 \log 2$$

区間 $c \leq y \leq d$ で常に $g(y) \geq 0$ のとき,
曲線 $x = g(y)$ と y 軸および 2 直線
 $y=c, y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_c^d g(y) dy$$



練習

36

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad x = y^2 + 1, \quad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad y = 2$$

$$(2) \quad x = y^2 - 1, \quad x = y + 5$$

$$(1) \quad \int_0^2 (y^2 + 1) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}y^3 + y \right]_0^2$$

$$= \frac{14}{3}$$

$$(2) \quad y^2 - 1 = y + 5$$

$$\begin{aligned} y^2 - y - 6 &= 0 \\ (y-3)(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

$$y = -2, 3$$

$$\int_{-2}^3 \{(y+5) - (y^2 - 1)\} dy$$

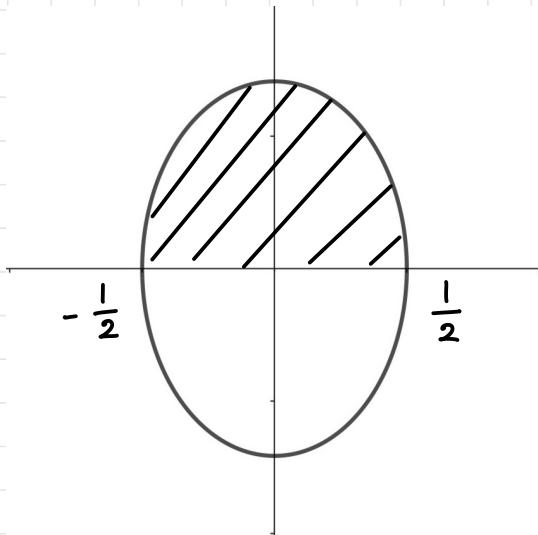
$$= \int_{-2}^3 (-y^2 + y + 6) dy$$

$$= - \int_{-2}^3 (y+2)(y-3) dy$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \{3 - (-2)\}^3$$

$$= \frac{125}{6}$$

曲線 $4x^2 + 2y^2 = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



求める面積 S は左図の余弦象限を 2 倍したものに等しい

$y \geq 0$ の範囲で $4x^2 + 2y^2 = 1$ を y について解く

$$4x^2 + 2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(1 - 4x^2)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - 4x^2} = 2(\frac{1}{4} - x^2)$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

$$S = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx$$

半径 $\frac{1}{2}$ の半円の面積

$$= 2\sqrt{2} \times \pi \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$S = \int_{-3}^{-3} 2 \sin \theta \, dx = - \int_{-3}^3 2 \sin \theta \, dx$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta \quad \text{∴}$$

$$dx = -3 \sin \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^\pi 2 \sin \theta \cdot (-3 \sin \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^\pi 6 \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \int_0^\pi 6 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \end{aligned}$$

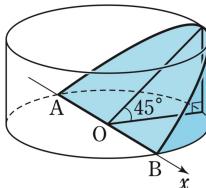
$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi (3 - 3 \cos 2\theta) \, d\theta \\ &\quad \left[3\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi \\ &= \underline{\underline{3\pi}} \end{aligned}$$

断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad \text{ただし, } a < b$$

練習
40

底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で、直円柱を 2 つの立体に分けるとき、小さい方の立体の体積 V を求めよ。



$$(底面) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\高さ) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \frac{1}{2} (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} a^3 = \underline{\underline{\frac{2}{3} a^3}}$$

x 軸の周りの回転体の体積

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{ただし, } a < b$$

練習
41

次の曲線と x 軸で囲まれた部分が、x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x$

(2) $y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

(1)

$$x^2 - 2x = 0 \text{ のとき}$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{16}{15}\pi$$

(2)

$$\sin x = 0 \text{ のとき}$$

$$x = 0, \pi$$

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

$a > 0, b > 0$ とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分が x 軸の周

りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ を } y \geq 0 \text{ の範囲で } y \text{ について解く}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a$$

$$= \frac{4}{3} \pi a b^2$$

y 軸の周りの回転体の体積

$$V = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy \quad \text{ただし, } c < d$$

練習
43

次の曲線と直線で囲まれた部分が、y 軸の周りに 1 回転してできる回

転体の体積 V を求めよ。

$$(1) \quad y = 4 - x^2, \quad y = 1$$

$$(2) \quad y = 1 - \sqrt{x}, \quad x \text{ 軸, } y \text{ 軸}$$

$$(1) \quad y = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y$$

$$V = \pi \int_1^4 (4 - y) dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^4$$

$$= \frac{9}{2} \pi$$

$$(2)$$

$$V = \pi \int_0^1 \left\{ (y-1)^2 \right\} dy$$

$$= \pi \int_0^1 (y-1)^4 dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} (y-1)^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{5}$$

放物線 $y = 4x - x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$4x - x^2 = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, 3$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^3 (4x - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^3 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^3 \end{aligned}$$

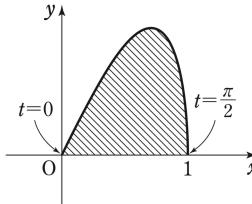
$$: \frac{153}{5}\pi$$

$$V_2 = 3 \times 3 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} = 9\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{153}{5}\pi - 9\pi = \underline{\underline{\frac{108}{5}\pi}}$$

次の曲線と x 軸で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$



$$\begin{array}{c|cc} t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline x & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \text{①)}$$

$$dx = \cos t dt$$

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \cos t dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cos^3 t dt$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^3 t dt$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t - \cos^5 t) dt$$

$$= 4\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t dt \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{2}{3} \quad \dots \text{①}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t dt = \frac{8}{15} \quad \dots \text{②}$$

左の式

$$4\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t dt \right)$$

$$= 4\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{15} \right)$$

$$= \frac{8}{15} \pi$$

①②の計算
→

$$\textcircled{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^2 \cos t dt$$

$$u = \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c|cc} t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\frac{du}{dt} = \cos t \quad \text{I}'$$

$$dt = \frac{du}{\cos t}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^2 \cos t dt \\ &= \int_0^1 (1 - u^2)^2 \cdot \cos t \cdot \frac{du}{\cos t} \\ &= \int_0^1 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int_0^1 (u^4 - 2u^2 + 1) du \\ &= \left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + u \right]_0^1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$f(t_1)$ は $t=t_1$ のときの P の座標 (P の初期位置)

$t=t_2$ における P の座標 X

$$x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

練習
46

数直線上を運動する点 P の速度が、時刻 t の関数として $v = 4 - 2t$ で与えられている。 $t=0$ における P の座標が 2 であるとき、 $t=3$ のときの P の座標を求めよ。

$t=3$ における P の座標を X とする。

$$x = 2 + \int_0^3 (4 - 2t) dt$$

$$= 2 + [4t - t^2]_0^3$$

$$= 2 + 3$$

$$= \frac{5}{}$$

数直線上を運動する点と道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とすると、

時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は $s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$

練習
47

数直線上を運動する点 P があり、時刻 t における P の速度は $v = \sin 2t$ であるとする。 $t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

$$s = \int_0^\pi |\sin 2t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\sin 2t dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi$$

$$= \frac{2}{}$$

座標平面上を運動する点と道のり

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における x 座標, y 座標が t の関数で表されるとき, 時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

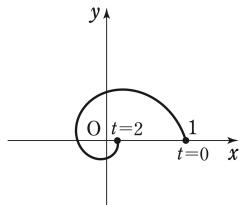
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$$

練習
48

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = e^{-t} \cos \pi t, \quad y = e^{-t} \sin \pi t$$

で表されるとき, $t = 0$ から $t = 2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。



$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \cos \pi t - \pi e^{-t} \sin \pi t$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t} \sin \pi t + \pi e^{-t} \cos \pi t$$

$$S = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(-e^{-t} \cos \pi t - \pi e^{-t} \sin \pi t)^2 + (-e^{-t} \sin \pi t + \pi e^{-t} \cos \pi t)^2} dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + \pi^2} e^{-t} dt = \left[-\sqrt{1 + \pi^2} e^{-t} \right]_0^\infty = \sqrt{1 + \pi^2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($a \leq t \leq b$) の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

練習
49

次のアステロイドの長さ L を求めよ。

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -3 \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} = 3 \sin t \cos t = \frac{3}{2} \sin 2t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left| \frac{3}{2} \sin 2t \right| dt$$

$$= \frac{3}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2t dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin 2t dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} -2 \sin 2t dt \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \left[\frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \right)$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

曲線 $y = f(x)$ の長さ

曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

練習
50

曲線 $y = x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 5$) の長さ L を求めよ。

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx$$

$$= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$= \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \right]_0^5$$

$$= \frac{335}{27}$$