数Ⅲ

極限

数列の極限

- 収束 …数列$\{a_n\}$においてnを限りなく大きくしたときa_nがある値αに限りなく近づくこと

  そのαを$\{a_n\}$の極限値という.

  このことを以下のようにして表現する.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n\to\infty \text{のとき } a_n \to \alpha$$

練習 1 次の数列の極限値をいえ。

(1) $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ……, $\frac{n+1}{n}$, ……

(2) -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, ……, $\frac{(-1)^n}{n}$, ……

(3) $\cos\pi$, $\cos 3\pi$, $\cos 5\pi$, ……, $\cos(2n-1)\pi$, ……

(1) $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ なので

極限値は1

(2) 極限値は0

(3) 極限値は−1

・発散 … 数列$\{a_n\}$が収束しないこと

発散には主に3つの場合がある。

① 正の無限大に発散　$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　(例) $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

② 負の無限大に発散　$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$　(例) $\lim_{n\to\infty} (-3n) = -\infty$

③ 振動(正の無限大にも負の無限大にも発散しない)　(例) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

※ ∞と$-\infty$は極限ではあるが極限値ではない。

数列の収束と発散についてのまとめは以下

数列の収束・発散

収束	値αに収束	$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	……	極限は　α
発散(収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	……	極限は　∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	……	極限は　$-\infty$
	振動		……	極限は　ない

練習 2 第n項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$2n$　　(2)　$-\frac{1}{n}$　　(3)　$-n^2$　　(4)　$1+(-1)^n$

(1) $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$　(2) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$　(3) $\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$　(4) 極限はない

数列の極限の性質(1)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。

1 $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ ただし，k は定数

2 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

3 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta\neq0$

練習 3 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 1-(-2)=3$

(2) $\lim_{n\to\infty} 3a_n + \lim_{n\to\infty} 2b_n = 3\times1+2\times(-2)=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} 1 = 1-1=0$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1\times(-2)=-2$

(5) $\lim_{n\to\infty}(b_n+5)=3$，$\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=1$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}=\frac{3}{1}=3$

(6) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-1$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\frac{3}{-1}=-3$

練習 4 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

(1) $\lim_{n\to\infty} n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2+\frac{1}{n}}=\infty$

練習 5 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の極限について，さらに次のことが成り立つ。

数列の極限の性質(2)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

5　すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

6　すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

〈**注意**〉 性質**6**を「はさみうちの原理」ということがある。

練習 6　θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

$$-1 \leqq \cos\frac{n\theta}{6} \leqq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6} \leqq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ なので

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6} = 0$$

・無限等比数列…項が無限に続く等比数列

数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると，次のようになる。

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r>1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$	
$r=1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=1$	収束する
$\lvert r\rvert<1$ のとき	$\lim_{n\to\infty} r^n=0$	収束する
$r\leqq -1$ のとき	振動する ……	極限はない

練習 7 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$　(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$　(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$　(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n=\infty$　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$　(3) 振動し極限はない　(4) $\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=0$

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は，$-1 < r \leqq 1$ である。

練習 8 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x-1 \leqq 1$$

$$-1+1 < x-1+1 \leqq 1+1$$

$$\underline{0 < x \leqq 2}$$

またそのときの極限値は

$0 < x < 2$ のとき 0

$\underline{x = 2 \text{ のとき } 1}$

練習 9 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times 2}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n\times 2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=0$

練習 10 数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$ (2) $r=1$ (3) $|r|<1$ (4) $r<-1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}$

(1) $r>1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=-1$

(2) $r=1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=0$

(3) $|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=1$

(4) $r<-1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=-1$

練習 11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+1$$

$$\alpha=\frac{3}{4}$$

$$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{4}\right) \cdots ①$$

$b_n=a_n-\frac{3}{4}$ とすると①は

$$b_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n$$

また, $b_1=a_1-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

b_n は初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列なので

$$b_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ここで $b_n=a_n-\frac{3}{4}$ より

$$a_n=b_n+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}$$

$a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}$$

$\{a_n\}$ の極限は $\frac{3}{4}$

・無限級数…無限数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ の各項を順に＋で結んだ式

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ のこと、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも書ける.

・部分和… $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ のこと. 無限級数における初項から第 n 項までの和

部分和 S_n を第 n 項として新たに無限数列 $\{S_n\}$ をつくる.

$\{S_n\}$ は $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$ であり

無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ と書くことができ

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ は S に収束する.

無限級数の和

無限級数 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ の部分和 S_n から作られる無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である。

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき, 無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ も発散する

練習 12 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots$

(1)

第n項までの部分和をS_nとすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

よってこの無限級数は収束し，その和は$\dfrac{1}{2}$

(2) 第n項までの部分和をS_nとすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\cdots+\frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2n+1}}{2}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}=\infty$$

よってこの無限級数は発散する

・無限等比級数 … 初項a，公比rの等比数列から作られる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a \neq 0$ のとき

$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

$a=0$ のとき　　収束し，その和は 0 である。

練習 13 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 $\frac{1}{2}$　　(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$　　(4) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

(1) 公比 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ なので収束

和は $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

(2) 公比 $|-\sqrt{2}| \geqq 1$ なので発散

(3) 初項 1 公比 $-\frac{1}{3}$ である.

公比 $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$ なので収束

和は $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}$

(4) 初項 $\sqrt{2}+1$ 公比 $\sqrt{2}-1$ である.

公比 $|\sqrt{2}-1|<1$ なので収束

和は $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$

練習 14 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$ (2) $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

(1)

初項1, 公比 $2-x$ なので

この無限等比級数が収束するのは

$|2-x|<1$ より

$-1<2-x<1$

$-1-2<2-x-2<1-2$

$-3<-x<-1$

$\underline{1<x<3}$

(2)

初項 x 公比 $2-x$ なので

この無限等比級数が収束するのは

$x=0$ または $|2-x|<1$

$|2-x|<1$ より

$-1<2-x<1$

$-1-2<2-x-2<1-2$

$-3<-x<-1$

$1<x<3$

よって $\underline{x=0 \text{ または } 1<x<3}$

練習 15 数直線上で，点Ｐが原点Ｏから正の向きに１だけ進み，そこから負の向きに $\frac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点Ｐが近づいていく点の座標を求めよ。

これは 初項1，公比 $\left(-\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}$ の無限等比級数

公比 $\left|-\frac{1}{2^2}\right| < 1$ なので収束

和は $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)} = \dfrac{4}{5}$

点Pが近づいていく座標は $\frac{4}{5}$

練習 16 次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$　(2) $0.2\dot{3}\dot{4}$　(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

(1) $0.\dot{6} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots$

初項0.6 公比0.1の無限等比級数

公比 $|0.1| < 1$ なので収束

$0.\dot{6} = \dfrac{0.6}{1-0.1} = \dfrac{2}{3}$

(2) $0.2\dot{3}\dot{4} = 0.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 \cdots$

第2項目以降は初項0.034 公比0.01の無限等比級数

公比 $|0.01| < 1$ なので収束

$0.2\dot{3}\dot{4} = 0.2 + \dfrac{0.034}{1-0.01} = \dfrac{232}{990} = \dfrac{116}{495}$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2} = 0.4 + 0.0702 + 0.0000702 + \cdots$

第2項目以降は初項0.0702 公比0.001の無限等比級数

公比 $|0.001| < 1$ なので収束

$0.4\dot{7}0\dot{2} = 0.4 + \dfrac{0.0702}{1-0.001} = \dfrac{4698}{9990} = \dfrac{87}{185}$

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とする。

1 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$　　ただし，k は定数

2 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$，　$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$

練習 17 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right)$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

(1)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ は初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

公比 $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ より収束し, その和は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ は初項 $\frac{2}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

公比 $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ より収束し, その和は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} + 1 = \underline{\frac{4}{3}}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数

公比 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ より収束し, その和は $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ は初項 $\frac{3}{4}$, 公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数

公比 $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ より収束し, その和は $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} = 1 - 3 = \underline{-2}$$

1 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

練習 18 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ。

第 n 項を a_n とすると

$a_n = (-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$

$n\to\infty$ のとき a_n は振動して極限はない。

つまり $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ なので この無限級数は発散する。

関数の極限

・極限値(極限)…一般に関数 $f(x)$ において x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が限りなく近づく一定の値 α

$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ は収束する. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ とかく

関数の極限の性質(1)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。

1 $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$ ただし, k は定数

2 $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$, $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

3 $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

4 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし, $\beta \neq 0$

a が関数 $f(x)$ の定義域内の値であるとき

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立.

練習 19 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

(1)

$$\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)=2\cdot1^2-3\cdot1-1=-2$$

(2)

$$\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)=(-2-3)(-2+2)=0$$

(3)

$$\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{0+1}{0-3}=-\frac{1}{3}$$

(4)

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}$$

練習 20 次の極限を求めよ。ただし，(3)の a は 0 でない定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

(1)

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6$$

(2)

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-3$$

(3)

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{a+x}{a(a+x)}-\frac{a}{a(a+x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{a(a+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a(a+x)}=\frac{1}{a^2}$$

練習 21 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(1)

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

(2)

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)$$

$$=\sqrt{4}+2$$

$$=4$$

練習 22

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$ …①

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ なので

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x}+b)=0$ が成立

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x}+b)=0$

$\sqrt{2}a+b=0$

$b=-\sqrt{2}a$ …②

②を①に代入

$$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x}-\sqrt{2}a}{x-2}=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{a(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-2)(x+\sqrt{2})}=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=-1$$

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}=-1$$

$$a=-2\sqrt{2}$$

$a=-2\sqrt{2}$ を②に代入すると

$b=-\sqrt{2}a=-\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=4$

$a=-2\sqrt{2}$，$b=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$ …①

$\displaystyle\lim_{x\to 0}x=0$ なので

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$

$2a+b=0$

$b=-2a$ …②

②を①に代入

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{x+4}-2a}{x}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{x+4}+2)}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2}=1$

$\dfrac{a}{4}=1$

$a=4$

$a=4$ を②に代入

$b=-2\times 4=-8$

$\underline{a=4\quad b=-8}$

・正の無限大に発散…関数 $f(x)$ が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき

$f(x)$ の値が限りなく大きくなること.

$x \to a$ のときの極限は ∞

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to \infty$ とかく

・負の無限大に発散…関数 $f(x)$ が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき

$f(x)$ の値が負で限りなく大きくなること.

$x \to a$ のときの極限は $-\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ または $x \to a$ のとき $f(x) \to -\infty$ とかく

※極限が ∞ または $-\infty$ のときこれらを極限値とはいわない.

練習 23 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\} = -\infty$

・右側極限 … $x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が限りなく近づく一定の値 α

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$ とかく．

・左側極限 … $x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が限りなく近づく一定の値 β

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \beta$$ とかく．

$a = 0$ のとき $\begin{cases} \text{右側極限は } \displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = \alpha \\ \text{左側極限は } \displaystyle\lim_{x \to -0} f(x) = \beta \end{cases}$ とかく．

また，関数 $f(x)$ について以下が成立．

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

練習 24 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1+0}(x+1)=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|}=\lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1-0}\{-(x+1)\}=-2$

練習 25 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

練習 26 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ (4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}=\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)=\infty$

練習 27 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$ (4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

練習 28 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

(1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$=1$$

(2) $x=-t$ とすると

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\sqrt{4\cdot(-t)^2+2\cdot(-t)}+2\cdot(-t)\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2-2t-4t^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\left(\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}=-\frac{1}{2}$$

・指数関数の極限

$a>1$ のとき $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$

$0<a<1$ のとき $\lim_{x\to\infty} a^x=0$ $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$

・対数関数の極限

$a>1$ のとき $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$ $\lim_{x\to+0} \log_a x=-\infty$

$0<a<1$ のとき $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$ $\lim_{x\to+0} \log_a x=\infty$

練習 29 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$ (2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (3) $\lim_{x\to\infty}\log_2 x$ (4) $\lim_{x\to+0}\log_{0.5} x$

(1)

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x=0$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$$

(4)

$$\lim_{x\to+0}\log_{0.5} x=\infty$$

練習 30 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}$ (2) $\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}$ (3) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

(1)

$$\lim_{x\to\infty} 2^{-3x}=0$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{-2x}=\infty$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\log_2 4=2$$

三角関数の極限

- $\sin x$ と $\cos x$ は周期関数なので 2π ごと同じ値をくり返す.
  $x\to\infty$ のとき一定の値に近づくことがないため $x\to\infty$ のとき $\sin x$ と $\cos x$ の極限はない.

- $\tan x$ については次のことがいえる.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty$$

※ $x\to\frac{\pi}{2}$ のとき $\tan x$ の極限はない.

練習 31 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\tan x$

(1)

$$\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

(3)

$$\lim_{x\to\pi}\tan x=0$$

関数の極限の性質(2)

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。

5 $x=a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

6 $x=a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$$

練習 32 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$　(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$　(3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x}$

(1)

$0 \leqq \left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqq 1$ より

$0 \leqq |x|\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqq |x|$

$\lim_{x \to 0} |x| = 0$ より

$0 \leqq \lim_{x \to 0} |x|\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqq 0$ なので

$\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$

(2)

$0 \leqq |\sin x| \leqq 1$ より

$0 \leqq \frac{|\sin x|}{|x|} \leqq \frac{1}{|x|}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} = 0$ より

$0 \leqq \lim_{x \to \infty} \frac{|\sin x|}{|x|} \leqq 0$ なので

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

(3)

$0 \leqq |\cos x| \leqq 1$ より

$0 \leqq \frac{|\cos x|}{|x|} \leqq 1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ より

$0 \leqq \lim_{x \to -\infty} \frac{|\cos x|}{|x|} \leqq 0$ なので

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

練習 33 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

練習 34 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$

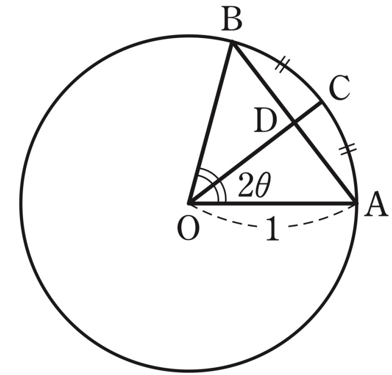
(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\{-(\cos x+1)\}\right]=-2$$

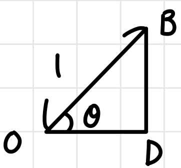
練習 35 応用例題 8 において，弧 AB の長さを $\overset{\frown}{AB}$ で表すとき，極限 $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{CD}{\overset{\frown}{AB}^2}$ を求めよ。



$CD = OC - OD$

OCは円の半径なので $OC = 1$

$\triangle OBD$について OBは円の半径なので $OB = 1$



左図より $\dfrac{OD}{OB} = \cos\theta$

$OD = OB\cos\theta = \cos\theta$

よって $CD = OC - OD = 1 - \cos\theta$

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times (\text{半径}) \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{2\pi} = 2 \times 1 \times \pi \times \frac{2\theta}{2\pi} = 2\theta$$

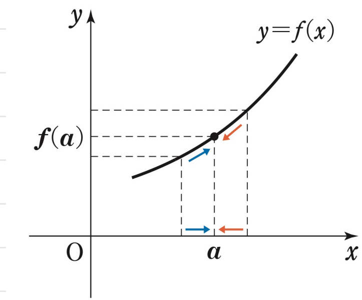
$$\lim_{\theta \to +0} \frac{CD}{\overset{\frown}{AB}^2} = \lim_{\theta \to +0} \frac{1-\cos\theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \to +0} \frac{1-\cos\theta}{4\theta^2} = \lim_{\theta \to +0} \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{4\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to +0} \frac{1-\cos^2\theta}{4\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{x \to +0} \left\{ \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{4(1+\cos\theta)} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}$$

関数の連続性

xの多項式で表された関数$f(x)$について 定義域内の値aに対して以下が成立

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$



連続である… 関数$f(x)$について定義域内の値$x=a$に対して

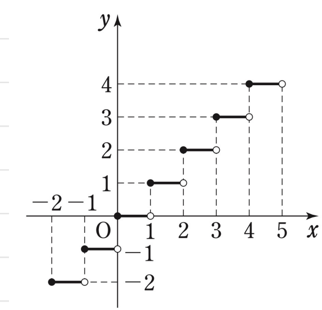
極限値$\lim_{x\to a} f(x)$が存在，かつ$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$が成り立つとき

$y=f(x)$のグラフは$x=a$でつながっている．($x=a$でつながっていない→不連続)

ガウス記号… xをこえない最大の整数を表す．$[x]$と表記する．

(例) $[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$

$f(x)=[x]$としたときのグラフは右図



練習 36 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x[x]$ (2) $f(x)=(x+1)[x]$ (3) $f(x)=\sqrt{x}$

(1) $\lim_{x\to+0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-0} f(x) = 0$

よって $x\to 0$ のとき

極限 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

したがって

$f(x)=x[x]$ は $x=0$ で連続

(2) $\lim_{x\to+0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-0} f(x) = -1$

よって $x\to 0$ のとき極限はない

したがって

$f(x)=(x+1)[x]$ は $x=0$ で不連続

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $x\geqq 0$

$\lim_{x\to+0} f(x) = 0$

よって $x\to 0$ のとき

極限 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

したがって

$f(x)=\sqrt{x}$ は $x=0$ で連続

区間における連続

- 区間… 不等式 $a<x<b$, $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq x$, $x<b$ などをみたす実数 x 全体の集合

$a<x<b \to (a, b)$, $a \leqq x \leqq b \to [a, b]$, $a \leqq x \to [a, \infty)$, $x<b \to (-\infty, b)$

開区間　　閉区間

- 区間で連続… 関数 $f(x)$ がある区間のすべての x で連続
- 連続関数 … 定義域内のすべての x の値で連続な関数

練習 37

次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

(1) 定義域は $x \leqq 1$ なので

$(-\infty, 1]$

(2)

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

実数全体のうち $x=1$, $x=2$ を除いた 3つの区間

$(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$ のそれぞれで連続

連続関数の性質

閉区間で連続な関数には，次のような性質がある。

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

練習 38 次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ。

(1) $[0,\ \pi]$　　(2) $[-\pi,\ \pi]$

(1) $f(x)=\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$

$x=\pi$ のとき最小値 -1

$x=0$ のとき最大値 1

(2) $f(x)=\cos x\ (-\pi\leqq x\leqq\pi)$

$x=\pm\pi$ のとき最小値 -1

$x=0$ のとき最大値 1

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，
$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c)=k, \qquad a<c<b$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つある。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

練習 39 方程式 $2^x-3x=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

$f(x)=2^x-3x$ とすると $f(x)$ は閉区間 $[3,4]$ で連続

$f(3)=2^3-3\cdot3=8-9=-1<0$

$f(4)=2^4-3\cdot4=16-12=4>0$

よって方程式 $f(x)=0$，つまり $2^x-3x=0$ は

$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ