

數Ⅱ

三角関数

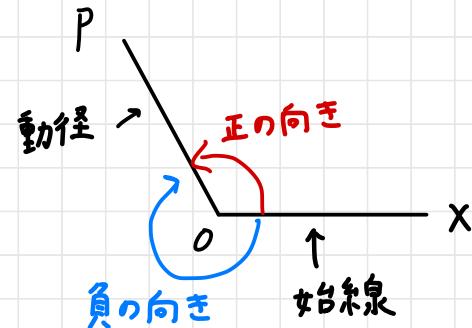


三角関数

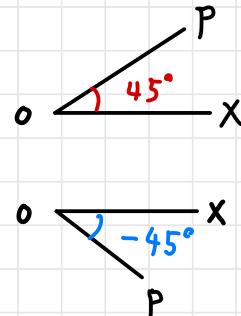
動径 … 平面上で点Oを中心として回転させる半直線OP

始線 … 動径の最初の位置を示す半直線OX

- } . 反時計回りを 正の向き
- } . 時計回りを 負の向き



- } . 正の向きに回った角を正の角
- } . 負の向きに回った角を負の角



一般角

→ 回転の向きと大きさをもつ量として
拡張した角

θ を一般角とし、原点 O から θ だけ回転した位置にある動径 OP を θ の動径という。

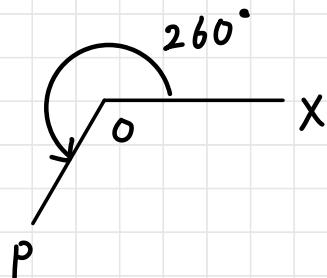
練習

1

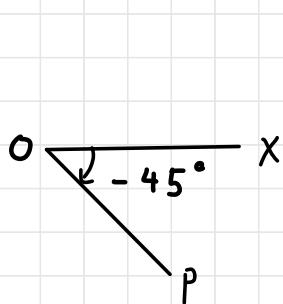
次の角の動径を図示せよ。

- (1) 260° (2) -45° (3) 420° (4) 750° (5) -240°

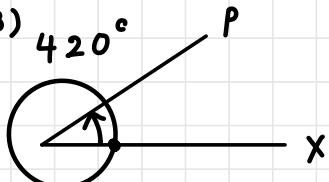
(1)



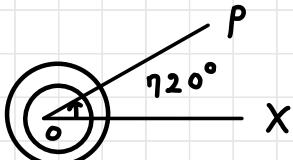
(2)



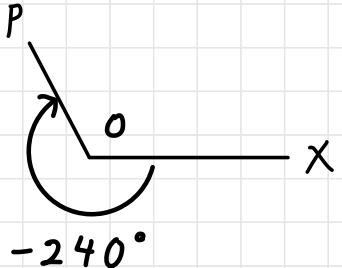
(3)



(4)



(5)

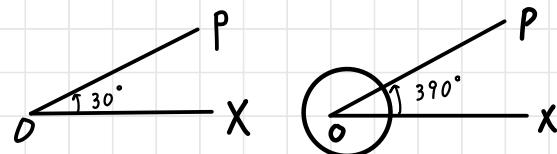


動径の表す角

動径は1回転で 360° すると同じ位置にくる。

動径OPと半直線OXのなす角の1つを α とすると動径OPの表す角は $\alpha + 360^\circ \times n$ (nは整数)

(例) 30° と 390° の動径



$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1$$

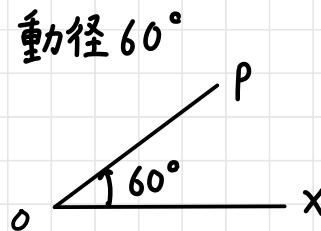
また, $30^\circ + 360^\circ \times 2 = 750^\circ$

$$30^\circ + 360^\circ \times (-1) = -330^\circ \text{ エリ}$$

$30^\circ, 390^\circ, 750^\circ, -330^\circ$ の動径はすべて同じ位置にある。

練習
2 次の角のうち、その動径が 60° の動径と同じ位置にある角はどれか。

$300^\circ, 420^\circ, 1040^\circ, -60^\circ, -300^\circ, -780^\circ$



$$60^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times 0$$

$$300^\circ = -60^\circ + 360^\circ \times 1$$

$$420^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times 1$$

$$1040^\circ = -\underline{40^\circ} + 360^\circ \times 3$$

$$-60^\circ = \underline{-60^\circ} + 360^\circ \times 0$$

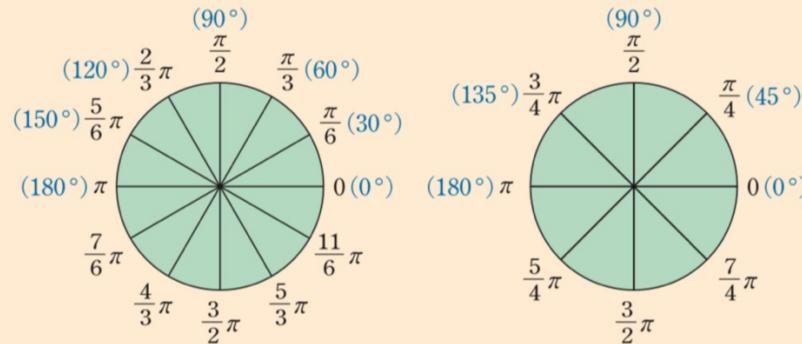
$$-300^\circ = \underline{60^\circ} + 360^\circ \times (-1)$$

$$-780^\circ = \underline{-60^\circ} + 360^\circ \times (-2)$$

$$\frac{420^\circ \text{ と } -300^\circ}{+}$$

- ・度数法…度($^{\circ}$)を単位とする角の表し方
- ・弧度法…ラジアンを単位とする角の表し方
- ・ラジアン…円において半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさ

ラジアンと度の換算 (0 $^{\circ}$ から180 $^{\circ}$ まで)



また、弧度法では

動径OPと始点線OXのなす角の1つを α とすると動径OPの表す角は $\alpha + 2n\pi$ (nは整数)

度数法 → 弧度法

弧度法 → 度数法

$$\frac{\pi}{180} \text{ をかける}$$

$$\frac{180}{\pi} \text{ をかける}$$

練習 4 次の(1)～(3)の角を弧度法で表せ。また、(4), (5)の角を度数法で表せ。

- (1) 210° (2) 240° (3) 330° (4) $\frac{5}{4}\pi$ (5) $\frac{3}{2}\pi$

(1) $210 \times \frac{\pi}{180}$ (2) $240 \times \frac{\pi}{180}$ (3) $330 \times \frac{\pi}{180}$

$$= \frac{7}{6}\pi \quad = \frac{4}{3}\pi \quad = \frac{11}{6}\pi$$

(4) $\frac{5}{4}\pi \times \frac{180}{\pi}$ (5) $\frac{3}{2}\pi \times \frac{180}{\pi}$

$$= 225^\circ \quad = 270^\circ$$

扇形の弧の長さと面積

半径 r , 中心角 θ (ラジアン) の扇形の弧の長さ l , 面積 S は

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2}lr$$

練習
5

次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 4, 中心角 $\frac{\pi}{3}$

(2) 半径 6, 中心角 $\frac{7}{6}\pi$

(1)

$$l = r\theta = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 4 = \frac{8}{3}\pi$$

(2)

$$l = r\theta = 6 \times \frac{7}{6}\pi = 7\pi$$

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 7\pi \times 6 = 21\pi$$

三角関数

座標平面上で、 x 軸由の正の部分を始点として一般角 θ の動径と原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を (x, y) とすると

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

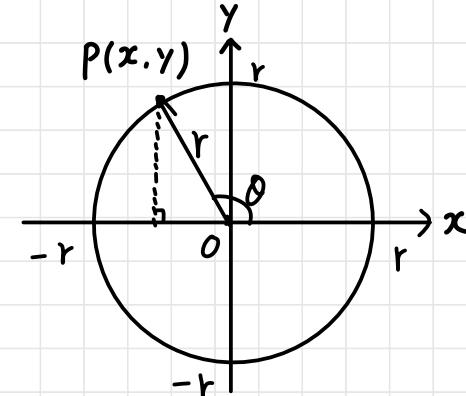
(正弦)

(余弦)

(正接)

これらは全て θ の関数であり、 θ の三角関数という。

$\because \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) に対して $\tan \theta$ は定義されない。



練習
6 次の θ について、 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を、それぞれ求めよ。

$$(1) \quad \theta = \frac{5}{4}\pi$$

$$(2) \quad \theta = \frac{11}{6}\pi$$

$$(3) \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$(1) \quad \sin \frac{5}{4}\pi (= \sin 225^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{5}{4}\pi (= \cos 225^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi (= \tan 225^\circ) = 1$$

$$(2) \quad \sin \frac{11}{6}\pi (= \sin 330^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi (= \cos 330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11}{6}\pi (= \tan 330^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

原点を中心半径1の円を単位円という。

単位円では $r=1$ なので一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

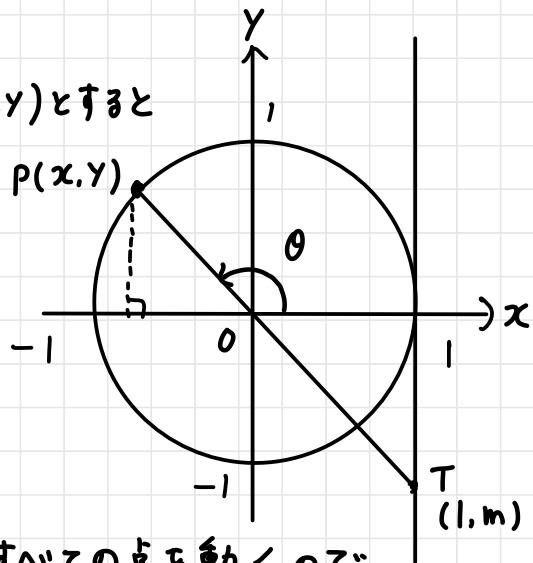
また、 OP と直線 $x=1$ の交点を $T(1, m)$ とすると

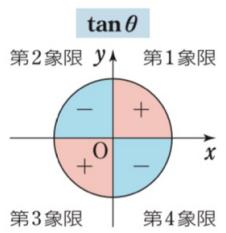
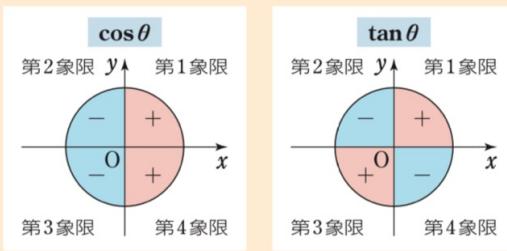
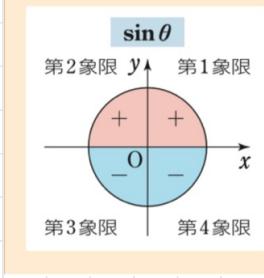
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = m$$

$$\therefore y = \sin \theta, x = \cos \theta, m = \tan \theta$$

点 P は単位円の周上を動き、そのとき点 T は直線 $x=1$ 上のすべての点を動くので

$-1 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1, \tan \theta$ の値の範囲は実数全体





練習
7

次の条件を満たすような θ の動径は、第何象限にあるか。

- (1) $\sin \theta < 0$ かつ $\cos \theta > 0$ (2) $\cos \theta < 0$ かつ $\tan \theta > 0$

(1) 第4象限 (2) 第3象限

三角関数の相互関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \cdot 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

練習
8

θ の動径が第4象限にあり、 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求める。

θ の動径が第4象限

$$\Rightarrow \cos \theta > 0$$

$$\tan \theta < 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta > 0 \text{ より}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

θ の動径が第3象限にあり、 $\tan \theta = 2$ のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めるよ。

θ の動径が第3象限 $\rightarrow \sin \theta < 0$
 $\cos \theta < 0$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos \theta < 0 \text{ より}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \times 2$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

練習
10 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

(1)

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\underline{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$-2\sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{9}$$

$$\underline{\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}}$$

(2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= (\sin \theta - \cos \theta) \left(\underline{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} + \underline{\sin \theta \cos \theta} \right)$$

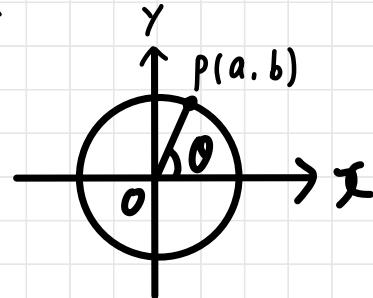
$$\underline{\frac{1}{3}} \quad \underline{1} \quad \underline{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

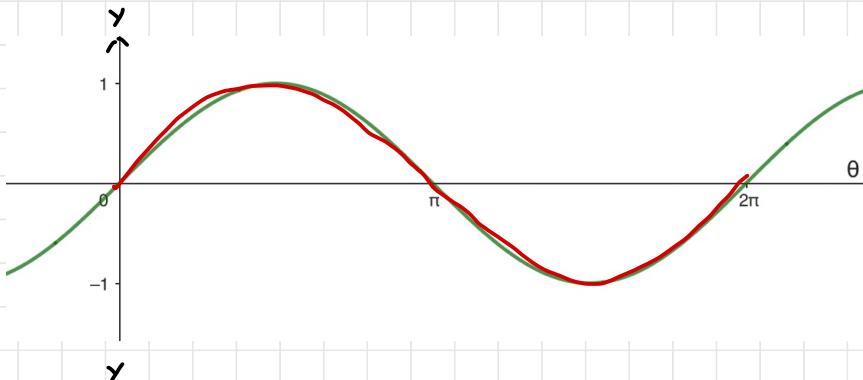
三角関数のグラフ (グラフの形と周其月をおさえる)

グラフがもとの形にもどるまで

一般角 θ の動径と単位円の交点を $P(a, b)$ とすると $\sin \theta = b, \cos \theta = a$
 $\sin \theta$ は y 座標, $\cos \theta$ は x 座標を表す。



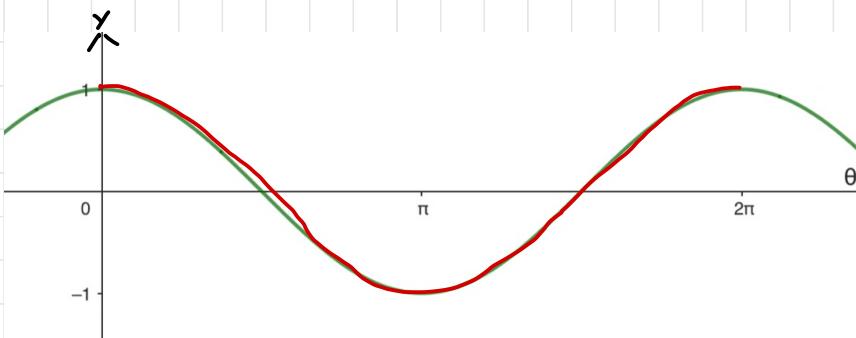
$$Y = \sin \theta$$



周期 2π

値域 $-1 \leq Y \leq 1$

$$Y = \cos \theta$$



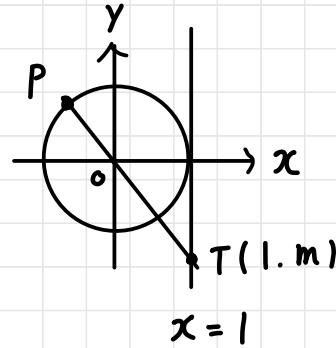
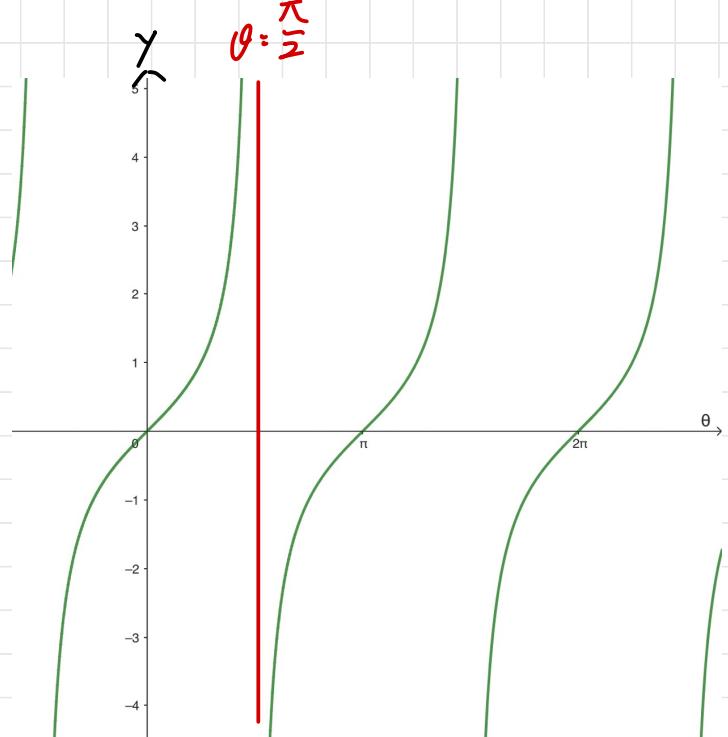
周期 2π

値域 $-1 \leq Y \leq 1$

一般角 θ の動径と単位円の交点をPとし、直線OPと直線 $x=1$ の交点をT(1, m)とすると

$$\tan \theta = m$$

$$Y = \tan \theta$$



周期 π

値域実数全体

$\tan \theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ が定義されないためグラフは θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。
グラフが限りなく近づく直線を漸近線

練習

12

次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

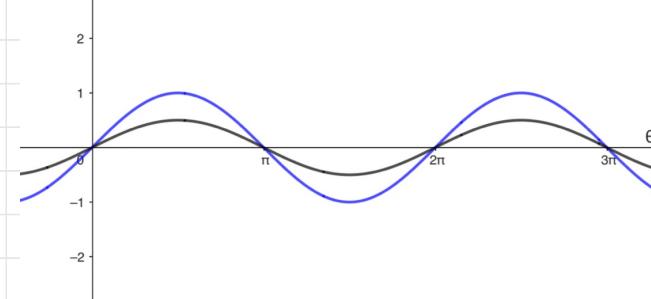
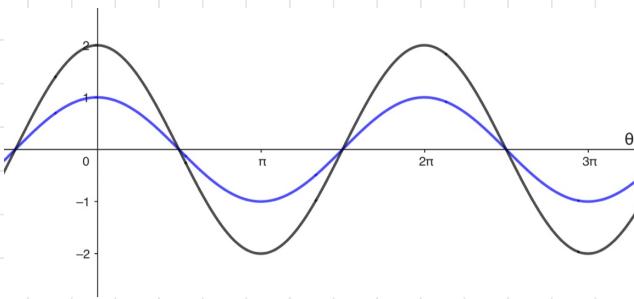
(1) $y = 2 \cos \theta$

(2) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$

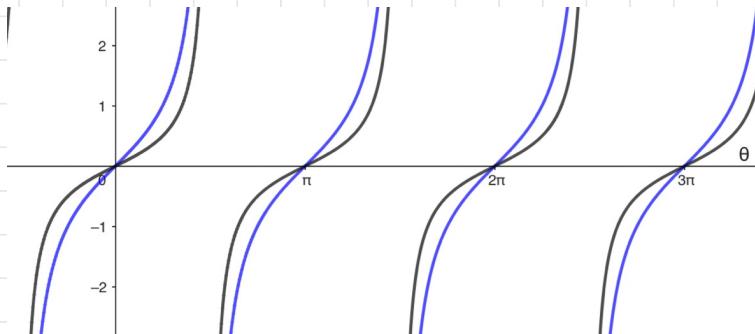
(3) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$

(1) $y = 2 \cos \theta$ $y = \cos \theta$ 周期 2π

(2) $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ $y = \sin \theta$ 周期 2π



(3) $y = \frac{1}{2} \tan \theta$ $y = \tan \theta$ 周期 π

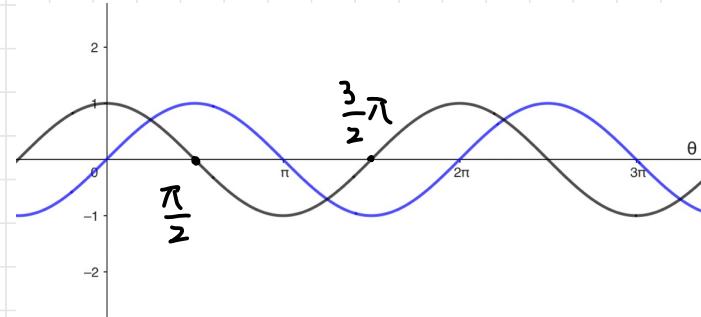
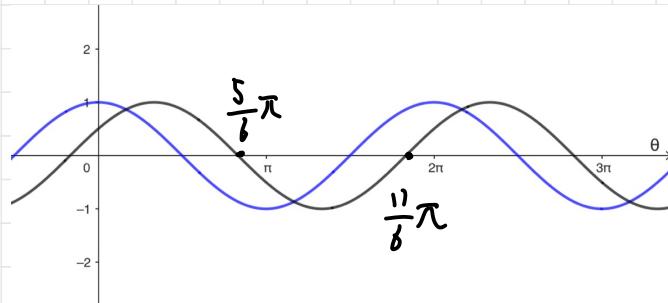


練習
13 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

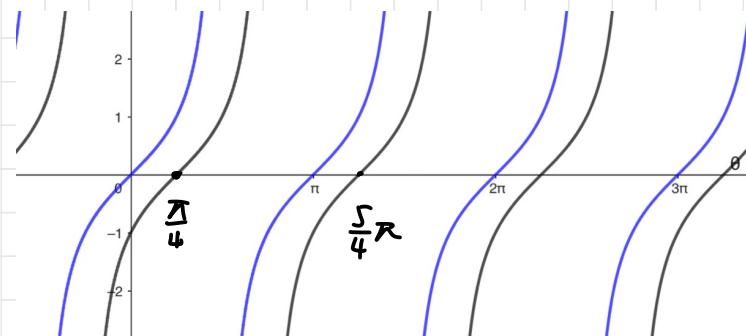
(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ (3) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

(1) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ $y = \cos\theta$ 周期 2π

(2) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \sin\theta$ 周期 2π



(3) $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ $y = \tan\theta$ 周期 π



練習 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

14

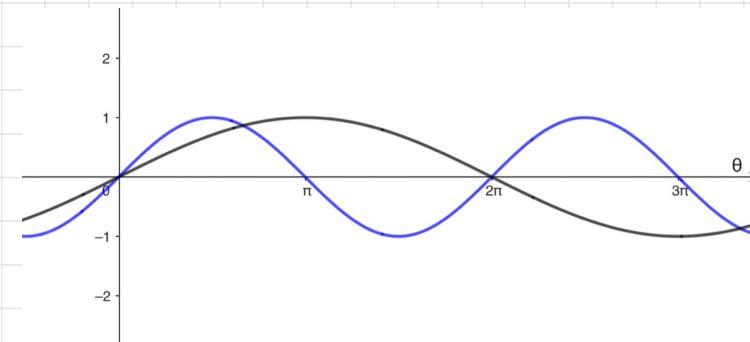
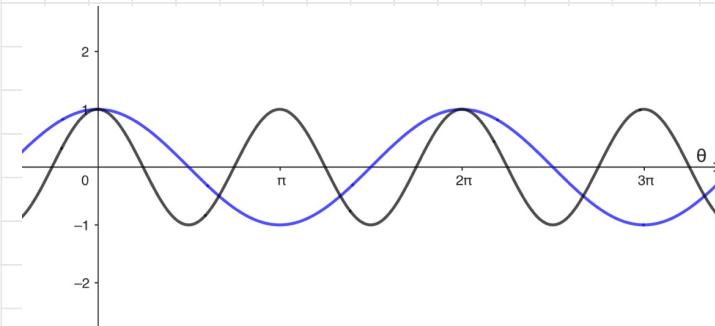
(1) $y = \cos 2\theta$

(2) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

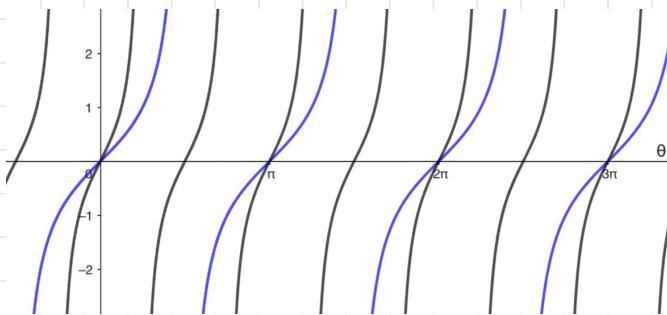
(3) $y = \tan 2\theta$

(1) $y = \cos 2\theta$ $y = \cos \theta$ 周期 π

(2) $y = \sin \frac{\theta}{2}$ $y = \sin \theta$ 周期 4π



(3) $y = \tan 2\theta$ $y = \tan \theta$ 周期 $\frac{\pi}{2}$



k を正の定数とするとき

$\sin k\theta, \cos k\theta$ の周期はいずれも $\frac{2\pi}{k}$ である。

$\tan k\theta$ の周期は $\frac{\pi}{k}$ である。

$\sin(k\theta+2\pi)=\sin k\theta$
から
 $\sin k\left(\theta+\frac{2\pi}{k}\right)=\sin k\theta$

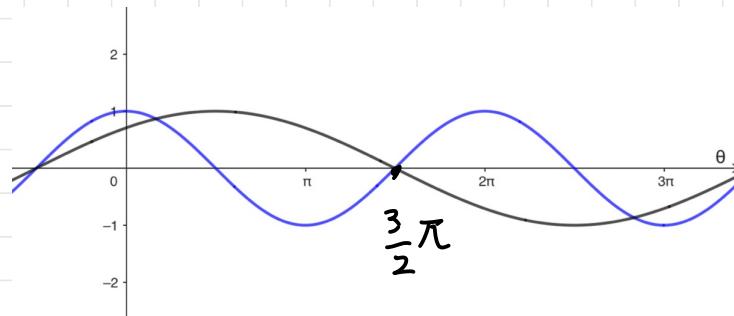
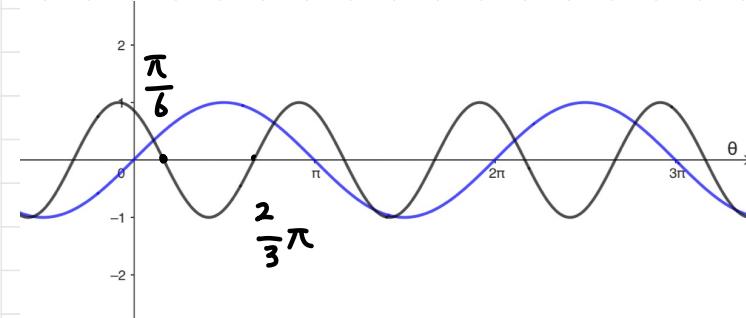
練習
15 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

$$(1) \quad y = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(1) $y = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ $y = \sin \theta$ 周期 π

(2) $y = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ $y = \cos \theta$ 周期 4π



三角関数で成り立つ等式

n を整数とする

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \\ \tan(\theta + \pi) = \tan \theta \end{array} \right.$$

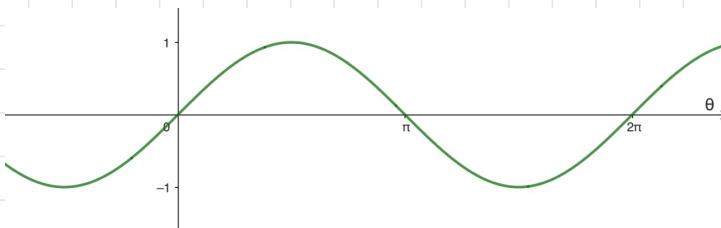
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{array} \right.$$

$y = f(x)$ について

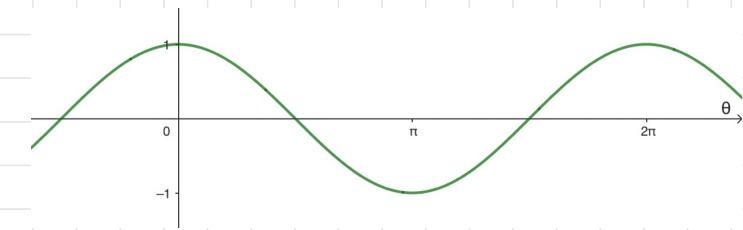
$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{奇関数} \\ f(-x) = f(x) \text{ が成立} \rightarrow \text{偶関数} \end{cases}$

$y = \sin \theta$



$y = \sin \theta$ は奇関数

$y = \cos \theta$



$y = \cos \theta$ は偶関数

次の値を求めよ。

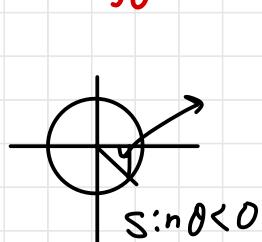
(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

(3) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

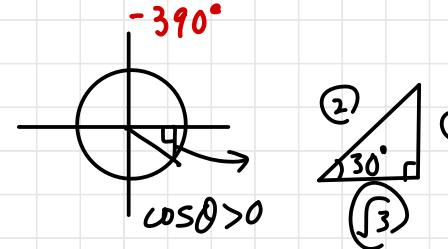
$$(1) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

-30°



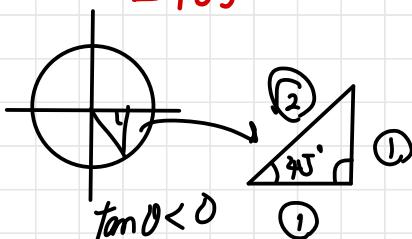
$$\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

-390°



$$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -1$$

-405°



練習
17 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2 \cos \theta + 1 = 0$

(3) $\sin \theta + 1 = 0$

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$

(2) $2 \cos \theta = -1$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

(3) $\sin \theta = -1$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$

練習
18 次の方程式を解け。

18

(1) $2 \sin \theta = -\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} \cos \theta = -1$

(1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi$ (nは整数)

(2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$ (nは整数)

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\tan \theta = -\sqrt{3}$ を解け。また, θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

$$\tan \theta = -\sqrt{3} \text{ より}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

また, θ の範囲に制限がないとき

$$\theta = \frac{2}{3}\pi + n\pi (n \text{ は整数})$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1) \quad 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = t \text{ とおく。}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

$$\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi$$

$$\theta = \frac{17}{12}\pi$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\theta = \frac{23}{12}\pi$$

$$\theta = \frac{17}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

$$(2) \quad 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ とする}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = t \text{ より}$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{19}{12}\pi$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{23}{12}\pi$$

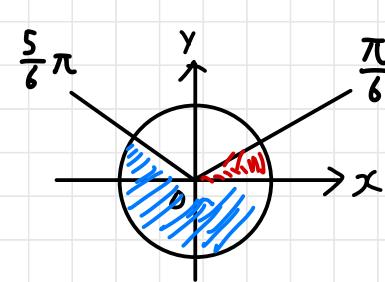
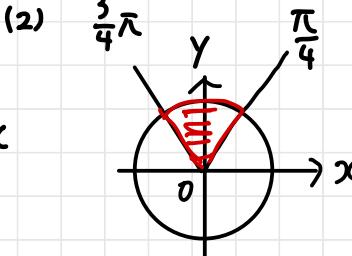
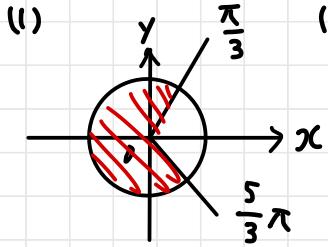
$$\theta = \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi.$$

練習
21 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$

(2) $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin \theta < \frac{1}{2}$

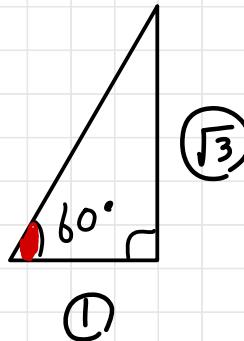
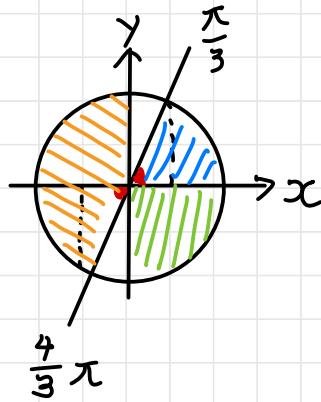


$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、不等式 $\tan \theta \leq \sqrt{3}$ を解け。



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



練習
23 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、関数

$$y = \cos^2 \theta - \cos \theta$$

の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の値を求めよ。

$$\cos \theta = t \text{ とする}$$

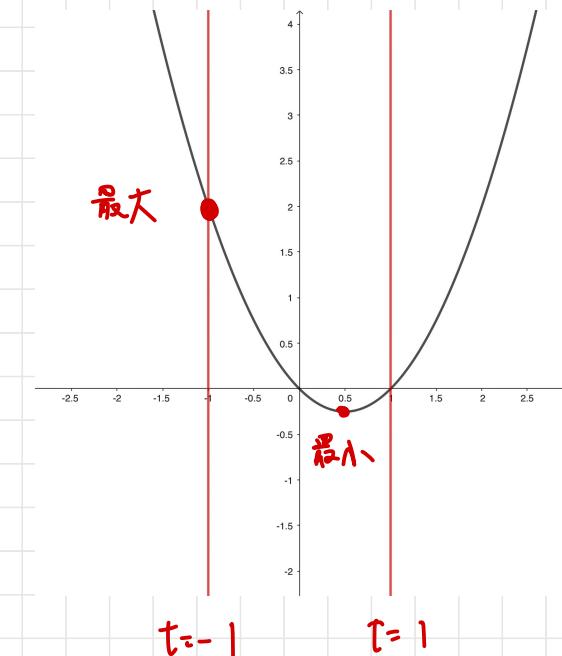
$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ エリ}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = t^2 - t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$



$t = -1$ のとき、つまり $\theta = \pi$ のとき 最大値 2

$t = \frac{1}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ のとき 最小値 $-\frac{1}{4}$

加法定理

(sin) (cos)

正弦・余弦の加法定理

1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

2 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

3 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

4 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

練習
24

加法定理を用いて、 $\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

練習
25 $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、 $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

練習
26 α の動径が第2象限, β の動径が第1象限にあり, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$,

$\cos \beta = \frac{3}{5}$ のとき, $\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

α が 第2象限 \rightarrow $\sin \alpha > 0$
 $\cos \alpha < 0$

β が 第1象限 \rightarrow $\sin \beta > 0$
 $\cos \beta > 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ より}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha < 0 \text{ より}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$$

$$\sin \beta > 0 \text{ より}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{-3\sqrt{5} - 8}{15} \end{aligned}$$

(tan)

正接の加法定理

5 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

6 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

練習
27

加法定理を用いて、 $\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{-1}$$

練習
28

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて、 $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1}$$

2直線 $y=2x-1$, $y=\frac{1}{3}x+1$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

とする。

x 軸と $y=2x-1$ がなす角を α とすると $\tan \alpha = 2$

x 軸と $y=\frac{1}{3}x+1$ がなす角を β とすると $\tan \beta = \frac{1}{3}$

2直線 $y=2x-1$ と $y=\frac{1}{3}x+1$ がなす角 θ は

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} : \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$$\tan \theta = 1 \text{ なので } \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ より}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

練習
30

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\cos 2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad (1) \quad \sin \alpha > 0$$

$$\tan \alpha < 0$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha > 0 \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} \\ \sin \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

練習
32

半角の公式を用いて、次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\pi}{8}$$

$$(2) \sin \frac{3}{8}\pi$$

$$(3) \cos \frac{3}{8}\pi$$

$$(1) \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} : \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ たり } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} : \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$(2) \sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 - \cos \frac{3}{4}\pi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} : \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2} \text{ たり } \sin \frac{3}{8}\pi > 0$$

$$\sin \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$(3) \cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 + \cos \frac{3}{4}\pi}{2}$$

$$\cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \frac{3}{8}\pi < \frac{\pi}{2} \text{ たり } \cos \frac{3}{8}\pi > 0$$

$$\cos \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ のとき, 次の値を求めよ。

$$(1) \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$(2) \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$(3) \tan \frac{\alpha}{2}$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので

$\sin \frac{\alpha}{2} > 0, \cos \frac{\alpha}{2} > 0, \tan \frac{\alpha}{2} > 0$

$$(1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$$

$\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$(2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

$\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(3) \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 3$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \cos 2\theta + \sin \theta = 1$$

$$(2) \cos 2\theta + \sin \theta > 1$$

$$(1) -2\sin^2 \theta + \sin \theta = 1$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$-\sin \theta (2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = 0, \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ かつ}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$$

(2)

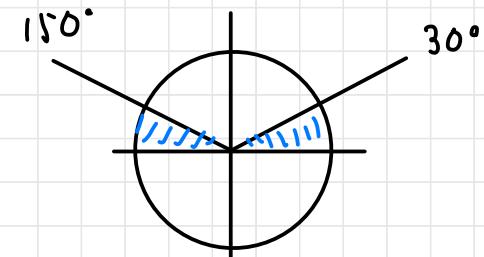
$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta > 1$$

$$-2\sin^2 \theta + \sin \theta > 0$$

$$2\sin^2 \theta - \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta (2\sin \theta - 1) < 0$$

$$0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$$



$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

ただし $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

練習
35

次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表せ。ただし, $r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$ とする。

(1) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

(1) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

(2) $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より}$$

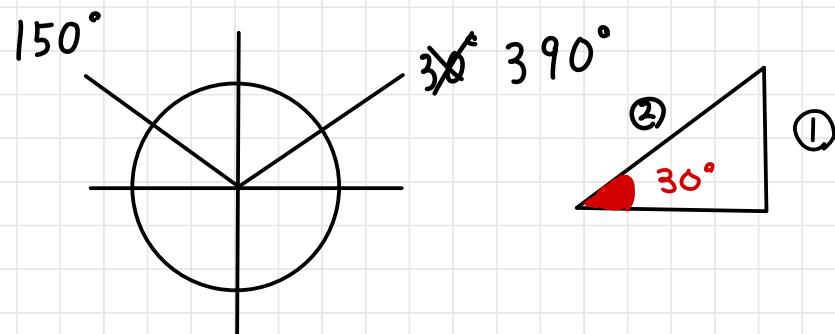
$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{3} = t \text{ とすると}$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi \right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi \right)$$

$$(60^\circ \sim 420^\circ)$$



$$t = 150^\circ, 390^\circ \rightarrow t = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{3} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{6}\pi \rightarrow x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore \underline{x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi}$$

練習
37 次の関数の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$y = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{また, } \sin t = 1 \text{ のとき } t = \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ とする。}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{6} \leq x + t < \frac{13}{6}\pi$$

$$y = \sin t \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi \right)$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi \text{ より} \quad -1 \leq \sin t \leq 1$$

つまり、 $\sin t = 1$ のとき **最大値 2**

$\sin t = -1$ のとき **最小値 -2**

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin t = -1 \text{ のとき } t = \frac{3}{2}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

したがって

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ のとき 最大値 2}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき 最小値 -2}$$