数Ⅱ

指数関数 対数関数

指数関数

整数の指数

m, nを正の整数とする

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$a \fallingdotseq 0$ で nは正の整数とする

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

練習 1 次の値を求めよ。

(1) 4^0 (2) $(-5)^0$ (3) 3^{-1} (4) 10^{-2} (5) $(-2)^{-3}$

(1) $4^0 = 1$ (2) $(-5)^0 = 1$ (3) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (4) $10^{-2} = \frac{1}{100}$ (5) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$

指数法則

$a \neq 0, b \neq 0$ で m, n は整数とする.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

練習 2 次の式を計算せよ。

(1) a^5a^{-2} (2) $\dfrac{a^{-3}}{a^2}$ (3) $(a^{-4})^{-1}$ (4) $(a^{-2}b)^3$

(1) $a^5a^{-2} = a^3$

(2) $\dfrac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3} \div a^2 = a^{-5} \left(= \dfrac{1}{a^5}\right)$

(3) $(a^{-4})^{-1} = a^4$

(4) $(a^{-2}b)^3 = a^{-6}b^3 \left(= \dfrac{b^3}{a^6}\right)$

累乗根 … aの2乗根, 3乗根, 4乗根 … をまとめたもの

nを正の整数とするとき, n乗するとaになる数をaのn乗根という.

$x^n = a$ の解がaのn乗根.

・ $x^n = a$　　xはaのn乗根 $\Rightarrow \sqrt[n]{a}$ (n乗根a)

(例) $2^3 = 8$　　2は8の3乗根 $\Rightarrow \sqrt[3]{8}$ (3乗根8)

$a > 0$のとき $\sqrt[n]{a} > 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$

練習 3 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{1}$　　(2) $\sqrt[3]{27}$　　(3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

(1) $\sqrt[3]{1} = 1$　　(2) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$　　(3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{2}$

累乗根の性質

$a>0$, $b>0$ で, m, n, p は正の整数とする.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ ,\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ ,\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

練習 4 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$　(3) $(\sqrt[4]{5})^3$　(4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{4}$

(3) $(\sqrt[4]{5})^3=\sqrt[4]{5^3}=\sqrt[4]{125}$　(4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}=\sqrt[3\times2]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$

有理数の指数

$a>0$ で m, n は正の整数．r は正の有理数とする．

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 　とくに　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ，　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

練習 5　次の値を求めよ。

(1) $9^{\frac{1}{2}}$　　(2) $16^{\frac{3}{4}}$　　(3) $125^{-\frac{2}{3}}$

(1) $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$

(2) $16^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{16})^3=(\sqrt[4]{2^4})^3=2^3=8$

(3) $125^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{125^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{125})^2}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{5^3})^2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$

指数法則（指数が有理数）

$a>0,\ b>0$，$r,\ s$ は有理数とする.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad (a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

練習 6 次の式を計算せよ。

(1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$　　(2) $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5}$　　(4) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$

(1) $2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = 2^2 = 4$

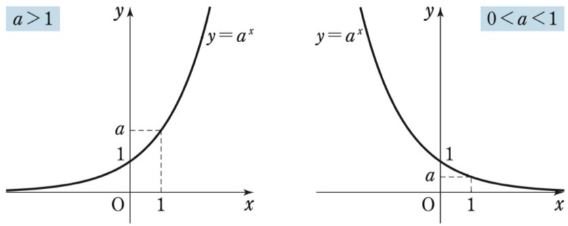
(2) $3^{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = 3^0 = 1$

(3) $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \div 5^{\frac{1}{2}}$

$= 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{5}$

(4) $4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

指数関数 $y=a^x$ のグラフ



いずれの場合も，x 軸を漸近線としてもち，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。
$a>1$ のとき右上がりの曲線，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

指数関数 $y=a^x$ の特徴

① 定義域は実数全体

② $a>1$ のとき 増加関数

$p<q \Rightarrow a^p<a^q$

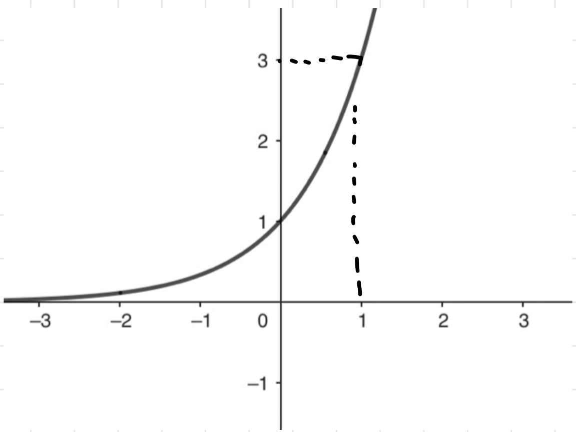
③ $0<a<1$ のとき 減少関数

$p<q \Rightarrow a^p>a^q$

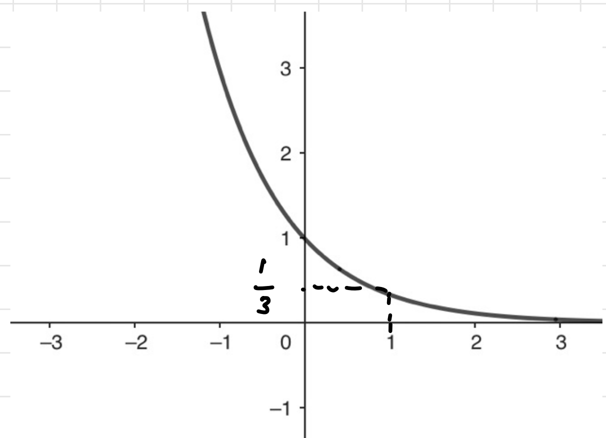
練習 8 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=3^x$　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

(1)



(2)



練習 9

次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{8}$　　　(2) 1, 0.2^3, 0.2^{-1}

(1)

$$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{40}{60}}$$

$$\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{45}{60}}$$

$$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{36}{60}}$$

$$\underline{\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}}$$

(2)

$$(0.2)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$$(0.2)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$$\underline{0.2^3 < 1 < 0.2^{-1}}$$

指数関数を含む方程式・不等式

① 両辺の底をそろえる

② 両辺の指数部の方程式・不等式に書きかえる.

ここで不等式の場合 $\begin{cases} \text{底 } a>1 \text{ のとき不等号の向きはそのまま} \\ \text{底 } 0<a<1 \text{ のとき不等号の向きは変える} \end{cases}$

③ ②の方程式・不等式を解く.

練習 10 次の方程式を解け。

(1) $4^x=8$　(2) $8^x=\frac{1}{16}$　(3) $27^x=3^{2-x}$

(1)
$$4^x=8$$
$$2^{2x}=2^3$$
$$2x=3$$
$$x=\frac{3}{2}$$

(2)
$$8^x=\frac{1}{16}$$
$$2^{3x}=2^{-4}$$
$$3x=-4$$
$$x=-\frac{4}{3}$$

(3)
$$27^x=3^{2-x}$$
$$3^{3x}=3^{2-x}$$
$$3x=2-x$$
$$4x=2$$
$$x=\frac{1}{2}$$

練習 11 次の不等式を解け。

(1) $3^x<81$　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \frac{1}{32}$　(3) $2^{3x-4}>\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(1)
$$3^x<81$$
$$3^x<3^4$$
$$x<4$$

(2)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \frac{1}{32}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$x \leqq 5$$

(3)
$$2^{3x-4}>\left(\frac{1}{4}\right)^x$$
$$2^{3x-4}>2^{-2x}$$
$$3x-4>-2x$$
$$5x>4$$
$$x>\frac{4}{5}$$

練習 12 次の方程式を解け。

(1) $4^x+2\cdot 2^x-3=0$ (2) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$

(1) $(2^x)^2+2\cdot 2^x-3=0$

$2^x=t$ とする. $t>0$ …①

$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$t=-3, 1$

①より $t=1$

$2^x=t$ より

$2^x=1$

$x=0$

(2) $(3^x)^2-4\cdot 3^x+3=0$

$3^x=t$ とすると $t>0$ …①

$t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$t=1, 3$

②より $t=1, 3$

$3^x=t$ より

$3^x=1$, $3^x=3$

$x=0$ $x=1$

$\underline{x=0, 1}$

練習 13 次の不等式を解け。

(1) $9^x+3^x-12>0$　　(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-10\leqq 0$

(1) $(3^x)^2+3^x-12>0$

$3^x=t$ とすると $t>0\cdots$ ①

$t^2+t-12>0$

$(t+4)(t-3)>0$

$t<-4,\ 3<t\cdots$ ②

①②より

$3<t$

$3^x=t$ より

$3<3^x$

$1<x$

(2) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-10\leqq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とする. $t>0\cdots$ ①

$t^2+3t-10\leqq 0$

$(t+5)(t-3)\leqq 0$

$-5\leqq t\leqq 3\cdots$ ②

①②より

$0<t\leqq 3$

$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x$ については

すべての実数 x において成立.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq 2$ については

$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x\geqq -1$

$\therefore\ x\geqq -1$

対数関数

対数…どんな正の数Mに対して

$$M = a^p$$

となる実数pがただ1つ定まる.

このMを$\log_a M$で表し aを底とするMの対数という.

また, $\log_a M$の正の数Mを真数という.

$$\log_a M \quad (a\text{を底}, M\text{を真数}, M>0)$$

指数と対数

$a>0$, $a \neq 1$で $M>0$とするとき 以下が成立

$$M = a^p \iff \log_a M = p$$

・ 対数($\log_a M$)の補足説明

次の方程式を満たすxの値を求めよ.

① $2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

② $2^x = 3$

$x = \cdots\cdots ?$

↑ 整数値で表すことができない

だが $2^x = 3$ を満たすxは存在するはず…

ここで

$$\boxed{\log_a M \cdots a\text{を何乗したら}M\text{になるかの意.}}$$

の記号を用いて

$a^p = M$を満たすpの値を書き表す.

(例) $\log_2 8$ … 2を何乗したら8になるか ⇒ 3

よって $\log_2 8 = 3$ と書ける.

また, 2を3乗したら8になるので $\log_2 8 = 3$ は $2^3 = 8$ と書ける.

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

aは底 $(a > 0,\ a \neq 1)$

Mは真数 $(M > 0)$

(例) $2^x = 3 \iff x = \log_2 3$

練習 14 次の関係を $\log_a M = p$ の形に書け。

(1) $9 = 3^2$ (2) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ (3) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

(1) $\log_3 9 = 2$

(2) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

練習 15 次の関係を $M = a^p$ の形に書け。

(1) $\log_4 16 = 2$ (2) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ (3) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

(1) $16 = 4^2$

(2) $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

(3) $3 = 9^{\frac{1}{2}}$

$\log_a a^P = P$ （真数を底のP乗と書けるとき対数の値は真数の指数の値に一致する.）

練習 16 次の値を求めよ。

(1) $\log_2 2^5$　(2) $\log_5 25$　(3) $\log_3 \frac{1}{27}$　(4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

(5) $\log_{10} 0.1$　(6) $\log_{\frac{1}{3}} 3$　(7) $\log_2 \sqrt[3]{2}$　(8) $\log_{\sqrt{5}} 5$

(1) $\log_2 2^5 = 5$

(2) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

(3) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$

(5) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$

(6) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$

(7) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

(8) $\log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 = 2$

対数の性質

$\log_a 1 = 0$ （aを0乗したら1になる）　$\log_a a = 1$ （aを1乗したらaになる）

$a>0,\ a \neq 1,\ M>0,\ N>0$ のとき

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ …対数の和は真数の積

$\log_a M - \log_a N = \log_a \dfrac{M}{N}$ …対数の差は真数の商

$\log_a M^k = k \log_a M$ （kは実数）…真数の指数は対数の係数

底がそろっていなければ成立しないので注意

練習 18

次の式を計算せよ。

(1) $\log_4 2+\log_4 8$　　(2) $\log_5 2-\log_5 50$

(3) $\log_3 4+\log_3 18-3\log_3 2$　　(4) $\log_3 \sqrt[3]{6}-\frac{1}{3}\log_3 2$

(1) $\log_4 2+\log_4 8$

$= \log_4 16 = \log_4 4^2$

$= 2$

(2) $\log_5 2-\log_5 50$

$= \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2}$

$= -2$

(3) $\log_3 4+\log_3 18-3\log_3 2$

$= \log_3 4+\log_3 18-\log_3 2^3$

$= \log_3 4+\log_3 18-\log_3 8$

$= \log_3 \frac{4\times 18}{8}$

$= \log_3 9$

$= \log_3 3^2$

$= 2$

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6}-\frac{1}{3}\log_3 2$

$= \log_3 \sqrt[3]{6}-\log_3 2^{\frac{1}{3}}$

$= \log_3 \sqrt[3]{6}-\log_3 \sqrt[3]{2}$

$= \log_3 \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}$

$= \log_3 \sqrt[3]{3}$

$= \log_3 3^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}$

底の変換公式

a, b, c は正の数で $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ とすると

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad とくに\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

練習 19 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8$ (2) $\log_9 3$ (3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

(1) $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}$

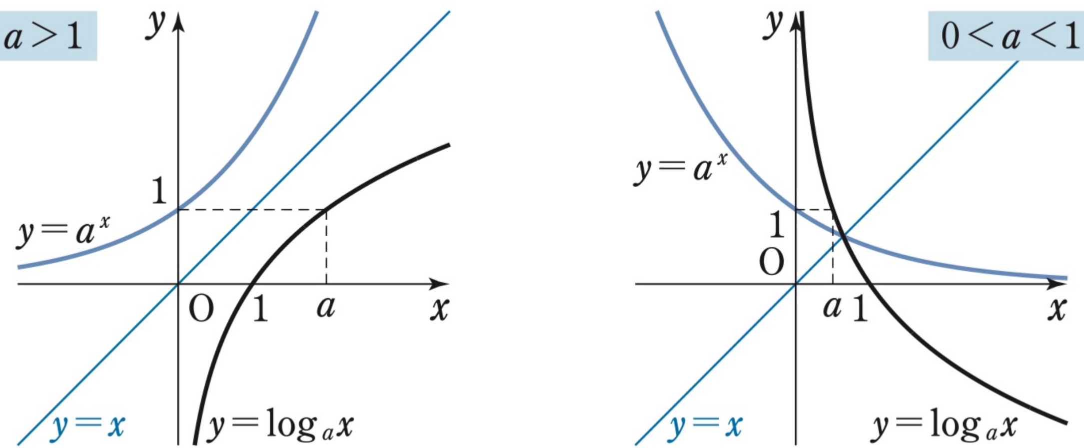
(2) $\log_9 3 = \dfrac{1}{\log_3 9} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \dfrac{1}{\log_2 3} \cdot 3\log_2 3 = 3$

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフ

aを1と異なる正の数とするとき, $y=\log_a x$ はxの関数をaを底とする対数関数という.

対数関数のグラフ $y=\log_a x$ は指数関数 $y=a^x$ と $y=x$ に関して対称



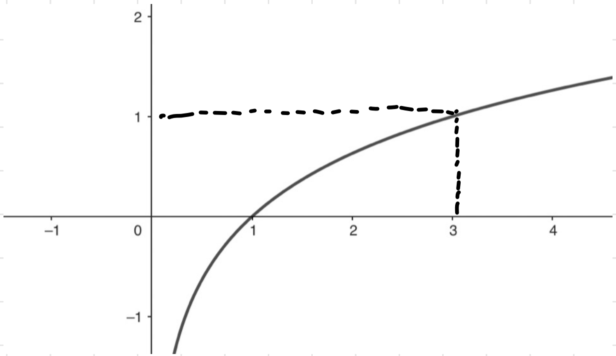
いずれの場合も, y 軸を漸近線としてもち, 点 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$ を通る。

$a>1$ のとき右上がりの曲線, $0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

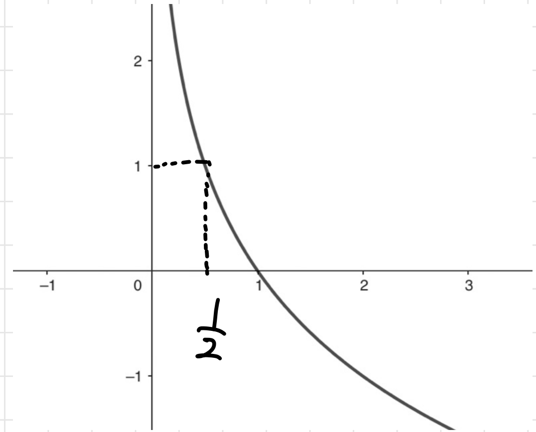
練習 20 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=\log_3 x$　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

(1)



(2)



対数関数の特徴

定義域は正の数全体　値域は実数全体

$a > 1$ のとき　増加関数　すなわち $0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$ のとき　減少関数　すなわち $0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$

練習 21　次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$3\log_4 3$，$2\log_4 5$　　(2)　$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$，$\log_{\frac{1}{4}} 3$　　(3)　$\log_2 3$，2

(1)

$$3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$$

$$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$$

$$\underline{3\log_4 3 > 2\log_4 5}$$

(2)

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

底は $0 < \frac{1}{4} < 1$ より

$$\underline{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 > \log_{\frac{1}{4}} 3}$$

(3)

$$2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$$

$$\underline{\log_2 3 < 4}$$

対数関数を含む方程式・不等式

① 真数条件の確認。真数>0をまず述べる。

② 方程式・不等式を解く

ここで不等式の場合
- 底 $a>1$ のとき不等号の向きはそのまま
- 底 $0<a<1$ のとき不等号の向きは変える

③ ②で求めた解が①の条件を満たしているか確認

練習 22 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x = 4$　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$　(3) $\log_2 x \leqq 4$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$　(5) $\log_3 x > 2$　(6) $\log_{0.5} x \geqq 2$

(1) 対数の定義より

$x = 2^4 = 16$

$\underline{x = 16}$

(2) 対数の定義より

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\underline{x = \frac{1}{4}}$

(3) 真数条件より

$x > 0 \cdots ①$

$\log_2 x \leqq 4$

$\log_2 x \leqq \log_2 2^4$

$x \leqq 2^4$

$x \leqq 16 \cdots ②$

①②より $\underline{0 < x \leqq 16}$

(4) 真数条件より

$x > 0 \cdots ①$

$\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x > \frac{1}{4} \cdots ②$

①②より $\underline{x > \frac{1}{4}}$

(5) 真数条件より

$x > 0 \cdots ①$

$\log_3 x > 2$

$\log_3 x > \log_3 3^2$

$x > 3^2$

$x > 9 \cdots ②$

①②より $\underline{x > 9}$

(6) 真数条件より

$x > 0 \cdots ①$

$\log_{0.5} x \geqq \log(0.5)^2$

$x \leqq (0.5)^2$

$x \leqq 0.25 \cdots ②$

①②より $\underline{0 < x \leqq 0.25}$

練習 23

次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x+\log_4(x-6)=2$　　(2) $\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=3$

(1) 真数条件から

$x>0$ かつ $x-6>0$ なので

$x>6$ …①

$\log_4 x+\log_4(x-6)=2$

$\log_4 x+\log_4(x-6)=\log_4 16$

$\log_4 x(x-6)=\log_4 16$

$x(x-6)=16$

$x^2-6x=16$

$x^2-6x-16=0$

$(x-8)(x+2)=0$

$x=8,\ -2$

①より

$\underline{x=8}$

(2) 真数条件から

$x+5>0$ かつ $x-2>0$ なので

$x>2$ …②

$\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=3$

$\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=\log_2 8$

$\log_2(x+5)(x-2)=\log_2 8$

$(x+5)(x-2)=8$

$x^2+3x-10=8$

$x^2+3x-18=0$

$(x+6)(x-3)=0$

$x=-6,\ 3$

②より

$\underline{x=3}$

練習 24 次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq \log_{\frac{1}{3}} x$　　(2) $2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

(1) 真数条件から

$3-2x>0$ かつ $x>0$ なので

$0<x<\frac{3}{2}$ …①

$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leqq \log_{\frac{1}{3}} x$

$3-2x \geqq x$

$3x \leqq 3$

$x \leqq 1$ …②

①②より

$0<x\leqq 1$

(2) 真数条件から

$2-x>0$ かつ $x+4>0$ なので

$-4<x<2$ …①

$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

$(2-x)^2 < x+4$

$x^2-4x+4 < x+4$

$x^2-5x<0$

$x(x-5)<0$

$0<x<5$ …②

①②より

$0<x<2$

練習 25 $1 \leqq x \leqq 16$ のとき，関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\log_2 x = t$ とする

$1 \leqq x \leqq 16$ より

$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 16$

$0 \leqq t \leqq 4$ …①

$y = t^2 - 2t \ (0 \leqq t \leqq 4)$

$y = (t-1)^2 - 1$

$t=1$ のとき 最小値 -1

$t=4$ のとき 最大値 8

$\log_2 x = t$ より

$t=1$ のとき

$\log_2 x = 1$

$x = 2$

$t=4$ のとき

$\log_2 x = 4$

$x = 16$

$x=2$ のとき 最小値 -1

$x=16$ のとき 最大値 8

常用対数…底が10の対数

練習 26 常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1) $\log_{10}3450$ (2) $\log_{10}92000$ (3) $\log_{10}0.000618$

(1) $\log_{10}3450$

$= \log_{10}(3.45\times 10^3)$

$= \log_{10}3.45 + \log_{10}10^3$

$= 0.5378 + 3$

$= 3.5378$

(2) $\log_{10}92000$

$= \log_{10}(9\ 2\times 10^4)$

$= \log_{10}9.2 + \log_{10}10^4$

$= 0.9638 + 4$

$= 4.9638$

(3) $\log_{10}0.000618$

$= \log_{10}(6.18\times 10^{-4})$

$= \log_{10}6.18 + \log_{10}10^{-4}$

$= 0.7910 - 4$

$= -3.2090$

常用対数の応用

正の数Nの整数部分の桁数と常用対数$\log_{10}N$の値の関係を調べる

(例)

正の数Nの整数部分が3桁である. $\Rightarrow 100 \leqq N < 1000$

つまり, $10^2 \leqq N < 10^3$を満たす.

常用対数をとると$\log_{10}10^2 \leqq \log_{10}N < \log_{10}10^3 \Rightarrow 2 \leqq N < 3$

練習 27 2^{100} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

2^{100} に常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{100}$$
$$= 100 \log_{10} 2$$
$$= 100 \times 0.3010$$
$$= 30.10$$

$30 \leqq 30.10 < 31$ なので

$$30 \leqq \log_{10} 2^{100} < 31$$
$$\log_{10} 10^{30} \leqq \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$
$$10^{30} \leqq 2^{100} < 10^{31}$$

2^{100} は31桁

練習 28 3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

3^n が 8桁の数になるのは

$10^7 \leqq 3^n < 10^8$ のとき

$$\log_{10} 10^7 \leqq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^8$$
$$7 \leqq n \log_{10} 3 < 8$$
$$7 \leqq n \times 0.4771 < 8$$
$$\frac{7}{0.4771} \leqq n < \frac{8}{0.4771}$$
$$14.67\cdots \leqq n < 16.76\cdots$$

$n = 15, 16$

練習 29 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ に常用対数をとる.

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=20\times\log_{10}\frac{1}{2}$$
$$=20\times\log_{10}2^{-1}$$
$$=-20\times\log_{10}2$$
$$=-20\times0.3010$$
$$=-6.020$$

$-7\leqq-6.020<-6$ なので

$$-7\leqq\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}<-6$$

$$\log_{10}10^{-7}\leqq\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}<\log_{10}10^{-6}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したときはじめて 0 でない数字が表れるのは　小数第7位