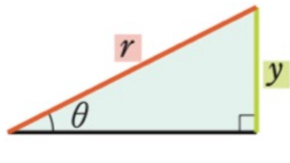
数Ⅰ

図形と計量

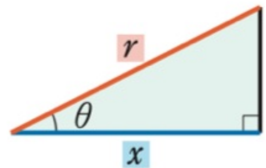
・三角比 … 三角形の大きさに関係なく、角度θの大きさだけで決まる辺の比
sin(正弦), cos(余弦), tan(正接)の3つがある。

三角比の定義

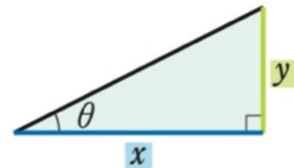
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$



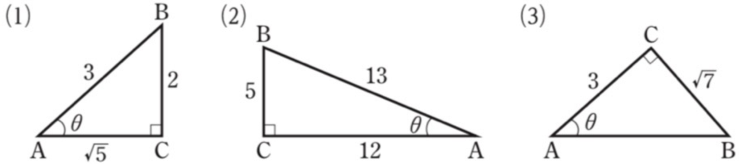
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



練習 1 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。



(1) $\sin\theta = \frac{2}{3}$，　$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$，　$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin\theta = \frac{5}{13}$，　$\cos\theta = \frac{12}{13}$，　$\tan\theta = \frac{5}{12}$

(3) 三平方の定理より

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$
$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = AB^2$$
$$AB^2 = 16$$
$$AB = 4 \quad (AB > 0 \text{ より})$$

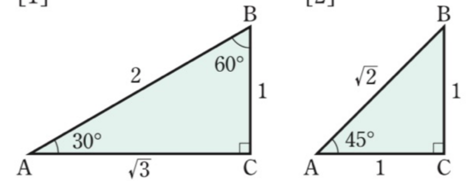
$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$　$\cos\theta = \frac{3}{4}$，　$\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

B　30°，45°，60° の三角比

30°，45°，60° の三角比は，下の図 [1]，[2] から求められる。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

[1]　[2]



練習 2 右の表の空らんに適する数値を入れて，表を完成させよ。

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし

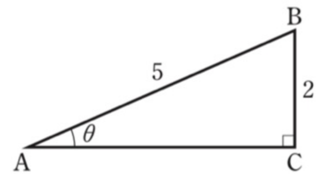
練習 3 次の値を三角比の表から求めよ。

(1) $\sin 12^\circ$　　(2) $\cos 48^\circ$　　(3) $\tan 75^\circ$

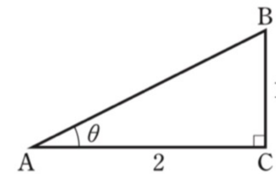
(1) 0.2079　　(2) 0.6691　　(3) 3,7321

練習 4 下の図における θ のおよその大きさを，三角比の表を用いて求めよ。

(1)



(2)



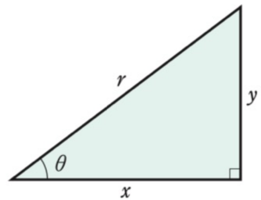
(1) $\sin\theta = \frac{2}{5} = 0.4$

$\theta \fallingdotseq 24^\circ$

(2) $\tan\theta = \frac{1}{2} = 0.5$

$\theta \fallingdotseq 27^\circ$

D 三角比の応用



右の図の直角三角形において，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

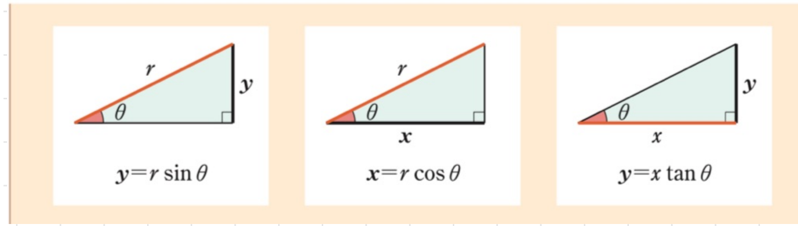
であるから，次が成り立つ。

$$y = r\sin\theta$$

同様にして，$\cos\theta = \frac{x}{r}$，$\tan\theta = \frac{y}{x}$ であるから，次が成り立つ。

$$x = r\cos\theta$$

$$y = x\tan\theta$$

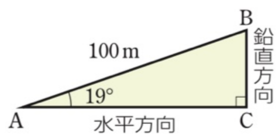


例題 1 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき，鉛直方向には何m上がることになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

解答 右の図において

$$BC = AB\sin 19^\circ$$
$$= 100 \times 0.3256$$
$$= 32.56 \fallingdotseq 33$$

答 33 m



練習 5 例題 1 において，水平方向には何m進むことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

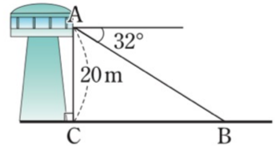
左図において

$$AC = AB\cos 19^\circ$$
$$= 100 \times 0.9455$$
$$= 94.55 \fallingdotseq 95$$

95 m

練習 6

地上からの高さ 20 m の地点Aで地上の場所Bを見下ろしたら，その角は右の図のように水平面に対して 32° であった。Bは，Aの真下の地点Cから何m離れているか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。



$\angle CAB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

$BC = AC \tan 58^\circ$

$= 20 \times 1.6003$

$= 32.006 \fallingdotseq 32$

32 m

三角比の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし

三角比の相互関係

1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

練習 7 θは鋭角とする。$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta=2\sqrt{2}$

練習 8 θは鋭角とする。$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$3=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

$\cos\theta>0$ より

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$90°-\theta$ の三角比

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

○+△=90° のとき

sin○=cos△

cos○=sin△

$\tan○=\dfrac{1}{\tan△}$

練習 9 次の□に適する鋭角の角度を入れよ。

(1) $\sin 62°=\cos□$ (2) $\cos 78°=\sin□$ (3) $\tan 23°\tan□=1$

(1) $\sin 62°=\cos(90°-62°)=\cos 28°$

(2) $\cos 78°=\sin(90°-78°)=\sin 12°$

(3) $\tan 23°=\dfrac{1}{\tan(90°-23°)}$

$\tan 23°=\dfrac{1}{\tan 67°}$

$\tan 23°\tan 67°=1$

練習 10 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 64°$ (2) $\cos 58°$ (3) $\tan 83°$

(1) $\sin 64°=\cos(90°-64°)=\cos 26°$

(2) $\cos 58°=\sin(90°-58°)=\sin 32°$

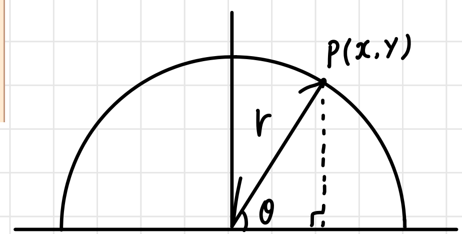
(3) $\tan 83°=\dfrac{1}{\tan(90°-83°)}=\dfrac{1}{\tan 7°}$

三角比の拡張 … θ の範囲を $0° \leqq \theta \leqq 180°$ まで拡張する.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

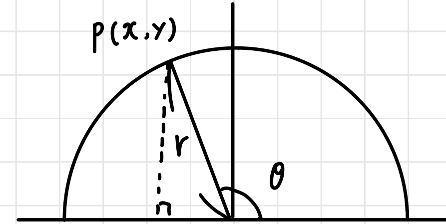
(三角比の定義は同じ)

$0° < \theta < 90°$ (鋭角)



$$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \cos\theta > 0 \\ \tan\theta > 0 \end{cases}$$

$90° < \theta < 180°$ (鈍角)



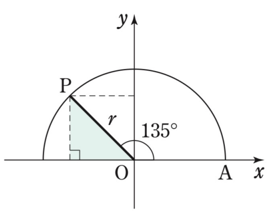
$$\begin{cases} \sin\theta > 0 \\ \cos\theta < 0 \\ \tan\theta < 0 \end{cases}$$

練習 11 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ。

(1) 135°

$r = \boxed{}$ にとると，

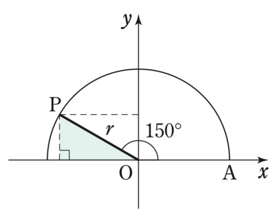
点Pの座標は $\boxed{}$



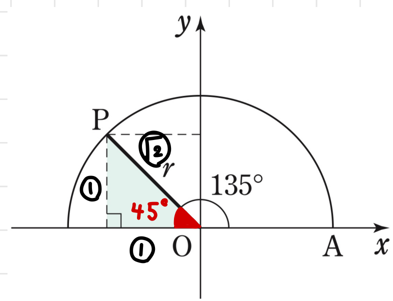
(2) 150°

$r = \boxed{}$ にとると，

点Pの座標は $\boxed{}$

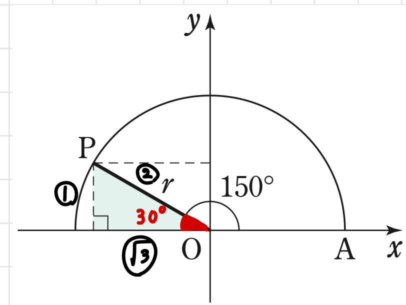


(1)



$r = \sqrt{2}$ P(−1, −1)

(2)



$r = 2$ P(−1, $-\sqrt{3}$)

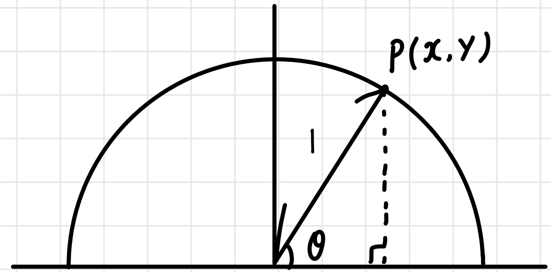
0°, 90°, 180°の三角比

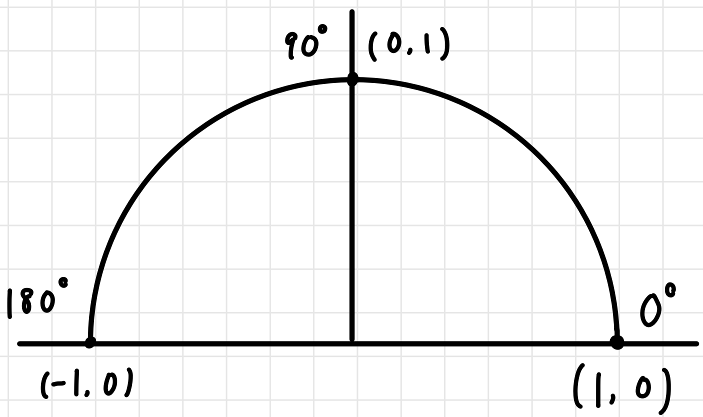
三角比は角度 θ のみで決まる三角形の辺の比。r の値によらず三角比の値は変わらない。

- $r = 1$ とすると、三角比の定義より

$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$, $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ なので

$\sin\theta$ は y 座標、$\cos\theta$ は x 座標に対応する。





左図より

θ	$0°$	$90°$	$180°$
$\sin\theta$	0	1	0
$\cos\theta$	1	0	−1
$\tan\theta$	0	×	0

三角比の表

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

それぞれの三角比の値の範囲は

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$　　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$　　$\tan\theta$は実数全体

$180°-\theta$ の三角比

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

○+□=180° のとき

sin○=sin□

cos○=−cos□

tan○=−tan□

練習 12 次の値を，三角比の表を用いて求めよ。

(1) $\sin 140°$ (2) $\cos 156°$ (3) $\tan 100°$

(1) $\sin 140° = \sin(180°-40°) = \sin 40°$

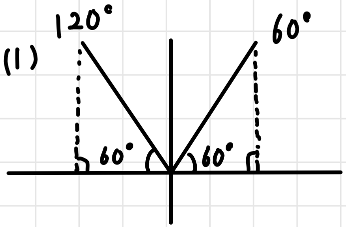
(2) $\cos 156° = -\cos(180°-24°) = -\cos 24°$

(3) $\tan 100° = -\tan(180°-80°) = -\tan 80°$

練習 13 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

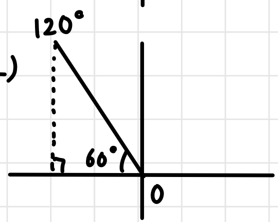
(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(3) $\sin\theta = 0$

(1)



$\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(2)



$\theta = 120^\circ$

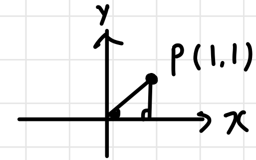
(3)

$\theta = 0^\circ, 180^\circ$

練習 14 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

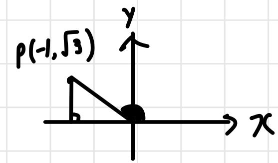
(1) $\tan\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(1) x座標 y座標がともに1の点をPとすると



$\theta = 45^\circ$

(2) x座標が $-\sqrt{3}$，y座標が1の点をPとすると



$\theta = 150^\circ$

三角比の相互関係

1　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　3　$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

練習 15　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

練習 16 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のうち，1つが次の値をとるとき，他の2つの値を求めよ。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$　　(2) $\tan\theta = -2$

(1)

$\cos\theta < 0$ なので $\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$$

$\sin\theta > 0$ より

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\theta = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\underline{\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan\theta = -2\sqrt{2}}$$

(2)

$\tan\theta < 0$ なので $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$$

$\cos\theta < 0$ より

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\underline{\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

直線 $y=mx$ と x 軸のなす角 θ

$$\tan\theta = m$$

練習 17 次の直線と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。

(1) $y=x$　　(2) $y=-\sqrt{3}x$

(1) $y=x$ の傾きは 1 なので

$$\tan\theta = 1$$

$$\underline{\theta = 45^\circ}$$

(2) $y=-\sqrt{3}x$ の傾きは $-\sqrt{3}$ なので

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\underline{\theta = 120^\circ}$$

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

練習 18 次のような △ABC において，外接円の半径 R を求めよ。

(1) $a=5$，$A=45^\circ$　　(2) $b=\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

練習 19 $c=10$ である △ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき，C を求めよ。

(1) 正弦定理より

$$2R=\frac{5}{\sin 45^\circ}$$

$$2R=5\div\sin 45^\circ$$

$$2R=5\div\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2R=5\times\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2R=5\sqrt{2}$$

$$R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2) 正弦定理より

$$2R=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$$

$$2R=\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2R=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2R=2$$

$$R=1$$

正弦定理より

$$\frac{10}{\sin C}=2\times 10$$

$$\frac{1}{\sin C}=2$$

$$\sin C=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq C\leqq 180^\circ$ より

$$C=30^\circ,\ 150^\circ$$

練習 20 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $c=\sqrt{2}$，$B=30^\circ$，$C=45^\circ$ のとき b

(2) $a=2$，$A=45^\circ$，$C=120^\circ$ のとき c

(1)

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b \div \sin 30^\circ = \sqrt{2} \div \sin 45^\circ$$

$$b \div \frac{1}{2} = \sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b \times \frac{2}{1} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2b = 2$$

$$\underline{b = 1}$$

(2)

正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$c \div \sin 120^\circ = 2 \div \sin 45^\circ$$

$$c \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

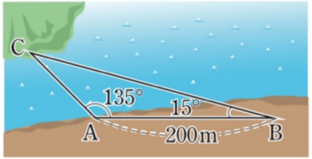
$$c = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{c = \sqrt{6}}$$

練習 21 右の図のように，200 m 離れた海岸の 2 地点 A，B と，島にある地点 C について

$\angle CAB = 135^\circ$，$\angle CBA = 15^\circ$

であった。B，C 間の距離を求めよ。



三角形の内角の和より

$\angle C = 180^\circ - 135^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AB}{\sin\angle C}$$

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{200}{\sin 30^\circ}$$

$$BC \div \sin 135^\circ = 200 \div \sin 30^\circ$$

$$BC \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \div \frac{1}{2}$$

$$BC \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 200 \times \frac{2}{1}$$

$$BC = \frac{200 \times 2}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$$

$\underline{BC = 200\sqrt{2}\ \text{m}}$

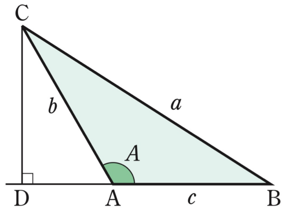
練習 22 右の図のように，A が鈍角の場合にも

$$BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

$$CD^2 = (b\sin A)^2,$$

$$BD^2 = (c - b\cos A)^2$$

が成り立つことを確かめよ。



△BCDについて三平方の定理より

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$

△ACDについて

$$\frac{CD}{b} = \sin(180^\circ - A)$$

$$\frac{CD}{b} = \sin A$$

$$CD = b\sin A$$

$$CD^2 = (b\sin A)^2$$

△ACDについて

$$\frac{AD}{b} = \cos(180^\circ - A)$$

$$\frac{AD}{b} = -\cos A$$

$$AD = -b\cos A$$

$$BD = AB + AD$$

$$BD = c - b\cos A$$

$$BD^2 = (c - b\cos A)^2$$

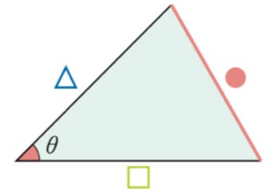
余弦定理

△ABC において，次が成り立つ。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



●^{2}＝△^{2}＋□^{2}−2△□$\cos\theta$

練習 23 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=3$, $c=2\sqrt{2}$, $B=45^\circ$ のとき b

(2) $a=3$, $b=5$, $C=120^\circ$ のとき c

(1) 余弦定理より

$$b^2=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\times3\times2\sqrt{2}\times\cos45^\circ$$

$$b^2=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2=9+8-12=5$$

$b>0$ より

$$\underline{b=\sqrt{5}}$$

(2) 余弦定理より

$$c^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$$

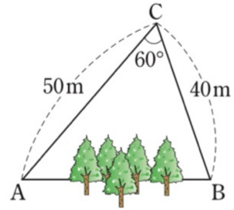
$$c^2=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c^2=9+25+15=49$$

$c>0$ より

$$\underline{c=7}$$

練習 24 右の図のように，林をはさんで 2 地点 A，B がある。地点 C から A と B を見て ∠ACB を測ると 60° で，また A，C 間の距離は 50 m，B，C 間の距離は 40 m であった。A，B 間の距離を求めよ。



余弦定理より

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$

$AB^2 = (50)^2 + (40)^2 - 2 \times 50 \times 40 \times \cos 60^\circ$

$AB^2 = 2500 + 1600 - 2 \times 50 \times 40 \times \frac{1}{2}$

$AB^2 = 2500 + 1600 - 2000$

$AB^2 = 2100$

$AB > 0$ より

$AB = 10\sqrt{21}$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

△ABC において，$\cos A$ の符号は $b^2+c^2-a^2$ の符号と同じになるので，b^2+c^2 と a^2 の大小によって，次のことがいえる。

b^2+c^2とa^2の大小	$b^2+c^2>a^2$	$b^2+c^2=a^2$	$b^2+c^2<a^2$
$\cos A$	$\cos A>0$	$\cos A=0$	$\cos A<0$
Aの種類	Aは鋭角	Aは直角	Aは鈍角

練習 25 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2\sqrt{3}$ のとき A

(2) $a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき B

練習 26 △ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1) $a=9$，$b=3\sqrt{2}$，$c=7$　(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

(1) 余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos A=\frac{1^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2\sqrt{3}}$$

$$\cos A=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq A\leqq180^\circ$ より

$A=30^\circ$

(2) 余弦定理より

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot1}$$

$$\cos B=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq B\leqq180^\circ$ より

$B=135^\circ$

(1)

$b^2+c^2=(3\sqrt{2})^2+7^2=67$

$a^2=9^2=81$

$b^2+c^2<a^2$ より

Aは鈍角

(2)

$b^2+c^2=(\sqrt{6})^2+2^2=10$

$a^2=(\sqrt{7})^2=7$

$b^2+c^2>a^2$ より

Aは鋭角

練習 27 △ABC において，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理より

$$b^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cos 45^\circ$$

$$b^2=2+3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2=2+3+2\sqrt{3}+1-2(\sqrt{3}+1)$$

$$b^2=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$$

$$b^2=4$$

$b>0$ より

$$b=2$$

余弦定理より

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)}$$

$$\cos A=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

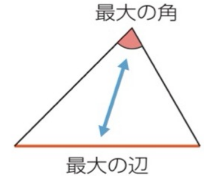
$$A=30^\circ$$

$$C=180-30-45=105^\circ$$

$$\underline{b=2,\ A=30^\circ,\ C=105^\circ}$$

三角形の 2 辺の大小関係は，その向かい合う角の大小関係と一致する。

よって，三角形の最大の辺に向かい合う角が，その三角形の最大の角である。



練習 28　△ABC において次の等式が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

正弦定理より　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$a : b : c = 8 : 7 : 13$

正の数 k を用いて

$a = 8k,\ b = 7k,\ c = 13k$ となるので

C が最大の角である。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

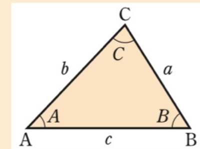
$$C = 120^\circ$$

三角形の面積

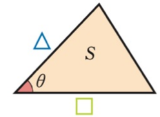
△ABC の面積 S は，次の式で表される。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$



三角形の面積 S は，２辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる。



$S=\frac{1}{2}\triangle\square\sin\theta$

練習 29 次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b=10$，$c=8$，$A=45^\circ$　　(2) $a=6$，$c=5$，$B=150^\circ$

(3) １辺の長さが a の正三角形 ABC

(1) $S=\frac{1}{2}\times10\times8\times\sin45^\circ=\frac{1}{2}\times10\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times6\times5\times\sin150^\circ=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

(3) $S=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

練習 30 3辺の長さが次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $a=8,\ b=5,\ c=7$ (2) $a=13,\ b=14,\ c=15$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot5\cdot7} = \frac{1}{7}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1-\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

$10\sqrt{3}$

(2) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{(14)^2+(15)^2-(13)^2}{2\cdot14\cdot15} = \frac{3}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}\times14\times15\times\frac{4}{5} = 84$$

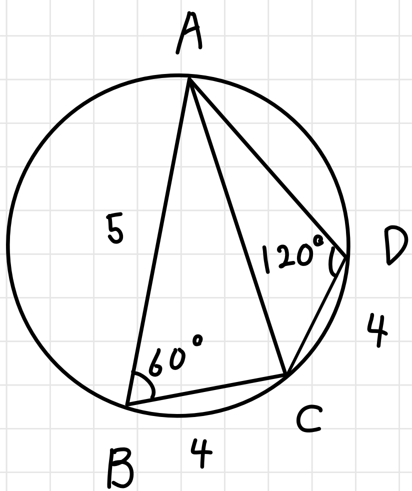
84

練習 31 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝4，CD＝4，$\angle B=60^\circ$ のとき，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は180°なので

$\angle B=60^\circ$ より $\angle D=120^\circ$

また．四角形ABCDの対角線を引くと下図になる．



△ABCについて余弦定理から

$AC^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos60^\circ=21$

$AC>0$ より $AC=\sqrt{21}$

△ACDについて余弦定理より

$AC^2=AD^2+CD^2-2\times AD\times CD\times\cos120^\circ$

$(\sqrt{21})^2=AD^2+4^2-2\times AD\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$AD^2+4AD-5=0$

$(AD+5)(AD-1)=0$

$AD>0$ より $AD=1$

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin120^\circ=6\sqrt{3}$

$S=6\sqrt{3}$

C 三角形の内接円と面積

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

練習 32 △ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

余弦定理より

$$\cos A = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\times 3\times 2} = -\frac{1}{4}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2}\times 3\times 2\times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

また，$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}\cdot r(4+3+2)$$

$$\frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$r = \frac{3\sqrt{15}}{4}\times\frac{2}{9} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

発展

ヘロンの公式

△ABC の面積 S は

$2s=a+b+c$ とすると　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

練習 1

3 辺の長さが 7，8，13 である三角形の面積 S を求めよ。

$2s=7+8+13$ から

$s=14$

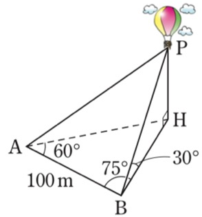
$S=\sqrt{14\cdot(14-7)(14-8)(14-13)}=14\sqrt{3}$

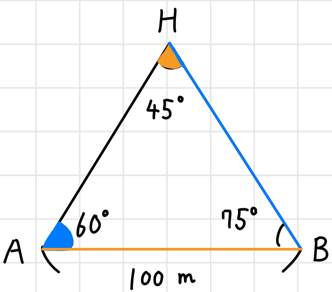
$S=14\sqrt{3}$

練習 33 100 m 離れた 2 地点AとBから，気球Pの真下でBと同じ標高の地点Hを見たとき，

$\angle HAB = 60°$，$\angle HBA = 75°$

であった。また，BからPを見上げた角度は 30° であった。図において，気球Pの高さ PH を求めよ。





△HABについて正弦定理より

$$\frac{BH}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°}$$

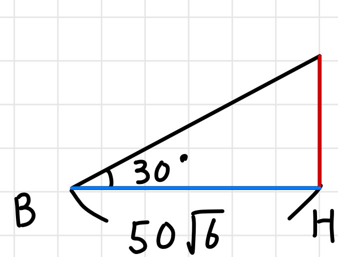
$$BH = \frac{AB}{\sin 45°} \times \sin 60°$$

$$BH = AB \div \sin 45° \times \sin 60°$$

$$BH = 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = 100 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{BH = 50\sqrt{6}}$$



$$\frac{\boxed{PH}}{\underline{BH}} = \tan 30°$$

$$PH = \underline{BH} \times \tan 30°$$

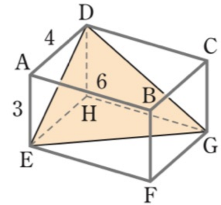
$$PH = \underline{50\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$$

$$\underline{PH = 50\sqrt{2}}$$

練習 34 右の図のように，

AB＝6，AD＝4，AE＝3

である直方体 ABCD-EFGH がある。
△DEG の面積 S を求めよ。



直方体の性質から

$AB = DC = EF = 6$

$AD = FG = 4$

$AE = CG = 3$

三平方の定理より

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$DE > 0$ より

$DE = 5$

$DG^2 = CG^2 + DC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$

$DG > 0$ より

$DG = 3\sqrt{5}$

$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

$EG > 0$ より

$EG = 2\sqrt{13}$

余弦定理より

$$\cos\angle DGE = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{13})^2 - 5^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$\sin^2\angle DGE + \cos^2\angle DGE = 1$

$\sin^2\angle DGE = 1 - \cos^2\angle DGE = \frac{59}{65}$

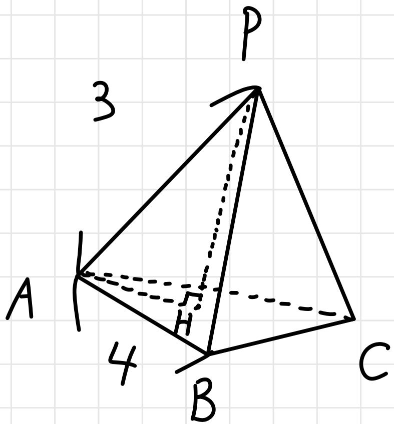
$\sin\angle DGE > 0$ より

$\sin\angle DGE = \sqrt{\frac{59}{65}}$

$$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{13} \times \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{65}} = 3\sqrt{59}$$

$\underline{S = 3\sqrt{59}}$

練習 1 PA＝PB＝PC＝3，AB＝BC＝CA＝4 である三角錐(すい) PABC の体積 V を求めよ。



△ABC について正弦定理より

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH$$

$$AH = \frac{2}{\sin 60^\circ} = 2 \div \sin 60^\circ = 2 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

△PAH について三平方の定理より

$$AH^2 + PH^2 = PA^2$$

$$PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{33}{9}$$

$PH > 0$ より $PH = \frac{\sqrt{33}}{3}$

$$V = S \times PH \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{33}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$

$$V = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$