数B

数列

数列…数を1列に並べたもの

項…数列における各数（1番目の項を初項，n番目の項を第n項）

1，4，9，16…

初項　第2項　第3項　第4項

数列を一般的に表すには

$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots$（$a_1$が初項，$a_n$が第n項）

また，第n項を数列の一般項という。

$\{a_n\}$と数列を略記することもある。

1，4，9，16，……　　①

練習 1 上の数列①の第 2 項と第 4 項をいえ。また，第 5 項を求めよ。

第2項　4

第4項　16

第5項　25

練習 2 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ。

(1)　$a_n=2n-1$　　(2)　$a_n=n(n+1)$　　(3)　$a_n=2^n$

	a_1	a_2	a_3	a_4
(1)	1	3	5	7
(2)	2	6	12	20
(3)	2	4	8	16

練習 3 次のような数列の一般項 a_n を，n の式で表せ。

(1) 偶数 2，4，6，8，…… の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2,\ 4,\ -6,\ 8,\ \cdots\cdots$$

(2) 分子には奇数，分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \cdots\cdots$$

(1)

$\underline{-1と1が交互に並ぶ数列}$と$\underline{偶数}$の積

$(-1)^n$ 　　　　$2n$

$$\underline{a_n = (-1)^n \cdot 2n}$$

(2)

$\underline{分子は奇数}$，$\underline{分母は2の累乗}$

$2n-1$ 　　　　2^n

$$\underline{a_n = \frac{2n-1}{2^n}}$$

等差数列

偶数数列 2, 4, 6, 8, … や奇数数列 1, 3, 5, 7, … のように各項間の差が常に一定の数列

初項に一定の数 d を次々に足して得られる数列。その一定の数 d を公差という。

練習 4 次のような等差数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1，公差 5　　(2) 初項 10，公差 −4

練習 5 次の等差数列の公差を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) 1, 5, 9, □, □, ……　　(2) □, 5, 2, □, □, ……

練習 4

(1)

$a_1=1,\ a_2=6,\ a_3=11,\ a_4=16$

(2)

$a_1=10,\ a_2=6,\ a_3=2,\ a_4=-2$

練習 5

(1)

公差 4

1, 5, 9, <u>13</u>, <u>17</u>

(2)

公差 −3

<u>8</u>, 5, 2, <u>−1</u>, <u>−4</u>

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a+(n-1)d$$

練習 6 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

(1) 初項 5，公差 4　　(2) 初項 10，公差 -5

(1)

$a_n = 5+(n-1)\cdot 4$

$a_n = 4n+1$

$a_{10} = 4\times 10+1 = 41$

(2)

$a_n = 10+(n-1)\cdot(-5)$

$a_n = -5n+15$

$a_{10} = -5\times 10+15 = -35$

練習 7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 4 項が 15，第 8 項が 27　　(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

(1) $a_4 = 15,\ a_8 = 27$

$a_4 = a_1+3d = 15 \cdots ①$

$a_8 = a_1+7d = 27 \cdots ②$

①②より

$a_1 = 6,\ d = 3$

$a_n = 3n+3$

(2) $a_5 = 20,\ a_{10} = 0$

$a_5 = a_1+4d = 20 \cdots ①$

$a_{10} = a_1+9d = 0 \cdots ②$

①②より

$a_1 = 36,\ d = -4$

$a_n = -4n+40$

等差数列の性質

等差数列は初項aに公差dを次々に足して得られる数列

となり合う2項間の差は常に一定

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d \iff a_{n+1} - a_n = d}$$

練習 8 一般項が $a_n = 2n+5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

等差数列であるためには

$$a_n = 2n+5$$

$$a_{n+1} = 2(n+1)+5 = 2n+7$$

$$a_{n+1} - a_n = (2n+7) - (2n+5) = 2$$

$$a_n = 2n+5$$

$$a_1 = 2\times 1 + 5 = 7$$

初項 7　公差 2

等差中項

数列 a.b.c が等差数列 <=> $2b = a + c$

練習 9 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3，x，11，……　　(2)　$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{6}$，……

(1)

$$2x = 3 + 11$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

(2)

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$x = 8$$

等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

1 初項 a，第 n 項 l のとき $S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$

2 初項 a，公差 d のとき $S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

練習 10 次の和 S を求めよ。

(1) 初項 2，末項 10，項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10，公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

(1)

$$\frac{1}{2}\times 9\times(2+10)=54$$

(2)

$$\frac{1}{2}\times 15\times\{2\times 10+(15-1)\times(-4)\}$$

$$=-270$$

練習 11 初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\times 1+(n-1)\times 2\}=n^2$$

$$S_n=n^2$$

練習 12 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) 2, 6, 10, ……, 74 (2) 102, 96, 90, ……, 6

(1) 一般項 a_n は

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 4$

$a_n = 4n - 2$

なので $4n - 2 = 74$

$n = 19$

求める和は初項2, 公差4, 項数19の等差数列の和

$S = \frac{1}{2} \times 19 \times \{2 \times 2 + (19-1) \times 4\} = 722$

(2) 一般項 a_n は

$a_n = 102 + (n-1)\cdot(-6)$

$a_n = -6n + 108$

なので $-6n + 108 = 6$

$n = 17$

求める和は初項102, 末項6, 項数17の等差数列の和

$S = \frac{1}{2} \times 17 \times (102 + 6) = 918$

・ 自然数の和 → $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

・ 奇数の和 → $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

・ 偶数の和 → $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

練習 13 次の和を求めよ。

(1) 1 から 100 までのすべての自然数の和 $1+2+3+\cdots\cdots+100$

(2) 1 から 55 までのすべての奇数の和 $1+3+5+\cdots\cdots+55$

(1)

$\frac{1}{2}\times100\times(1+101)=5050$

(2) $2n-1=55$ より $n=28$

$(28)^2=784$

練習 14 初項が 100，公差が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

(1) 一般項は

$a_n=100+(n-1)\cdot(-7)$

$a_n=-7n+107$

$-7n+107<0$

$n>\frac{107}{7}=15.2\cdots$

第16項がはじめて負の数になる

(2)

第15項目までの和が最大

$\frac{1}{2}\times15\times\{2\times100+(15-1)\times(-7)\}$

$=765$

等比数列

となり合う2項間の比が常に一定になっている数列．初項に一定の数を次々にかけて得られる数列

その一定の数 r を公比という

練習 15 次のような等比数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1，公比 5　　(2) 初項 -3，公比 $-\frac{1}{3}$

練習 16 次の等比数列の公比を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) 1，-2，4，□，……　　(2) □，8，4，□，……

(1)

$1,\ 5,\ 25,\ 125$

(2)

$-3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}$

(1)

公比は -2　　$1,\ -2,\ 4,\ \underline{-8}\cdots$

(2)

公比は $\frac{1}{2}$　　$\underline{16},\ 8,\ 4,\ \underline{2}\cdots$

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n = ar^{n-1}$

練習 17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) 初項 2，公比 3　(2) 初項 1，公比 -3

(3) 初項 2，公比 2　(4) 初項 -3，公比 $\frac{1}{2}$

(1)
$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$　$a_5 = 162$

(2)
$a_n = (-3)^{n-1}$　$a_5 = 81$

(3)
$a_n = 2^n$　$a_5 = 32$

(4)
$a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$a_5 = -\frac{3}{16}$

練習 18 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots$　(2) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \cdots\cdots$

(3) $-5,\ 5,\ -5,\ 5,\ \cdots\cdots$　(4) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots\cdots$

(1)
初項 1，公比 -2

$a_n = (-2)^{n-1}$

(2)
初項 $\frac{3}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$

$a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3)
初項 -5，公比 -1

$a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$

$= 5 \cdot (-1)^n$

(4)
初項 $\sqrt{2}$，公比 $\sqrt{2}$

$a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$

練習 19

次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 2 項が 6，第 4 項が 54　　(2) 第 5 項が -9，第 7 項が -27

(1)

等比数列の初項をa,公比をrとする.

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a\cdot r^{n-1}$

第2項が6 → $a_2 = 6$ より

$a_2 = a\cdot r^{2-1} = ar = 6$ …①

第4項が54 → $a_4 = 54$ より

$a_4 = a\cdot r^{4-1} = ar^3 = 54$ …②

①を②に代入すると

$6r^2 = 54$

$r^2 = 9$

$r = \pm 3$

①より $r = 3$ のとき

$a = 2$

$r = -3$ のとき

$a = -2$

$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ または $a_n = (-2)\cdot(-3)^{n-1}$

(2)

等比数列の初項をa,公比をrとすると

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a\cdot r^{n-1}$

第5項が-9 → $a_5 = -9$ より

$a_5 = a\cdot r^{5-1} = ar^4 = -9$ …①

第7項が-27 → $a_7 = -27$ より

$a_7 = a\cdot r^{7-1} = ar^6 = -27$ …②

①を②に代入すると

$-9r^2 = -27$

$r^2 = 3$

$r = \pm\sqrt{3}$

①より $r = \sqrt{3}$ のとき

$a = -1$

$r = -\sqrt{3}$ のとき

$a = -1$

$a_n = -(\sqrt{3})^{n-1}$ または $a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}$

・等比数列の性質

等比数列は初項 a に公比 r を次々にかけて得られる数列

となり合う2項の比が一定.

$$\boxed{a_{n+1} = r a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = r}$$

・等比中項

a, b, c が 0 でないとき数列 a, b, c が等比数列 $\iff b^2 = ac$

練習 20　数列 3，x，9，…… が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき $\quad S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ または $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき $\quad S_n=na$

練習 21 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots\cdots$ (2) $2,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3^2},\ -\dfrac{2}{3^3},\ \cdots\cdots$

(1)

初項1, 公比2

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$$

$$S_n=2^n-1$$

(2)

初項2, 公比 $-\dfrac{1}{3}$

$$S_n=\frac{2\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

練習 22 初項から第 3 項までの和が 7，第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

等比数列の一般項は $a_n=a\cdot r^{n-1}$

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=7 \quad \cdots①$

$a_3+a_4+a_5=ar^2+ar^3+ar^4=28 \quad \cdots②$

②より $\quad r^2(a+ar+ar^2)=28$

①を代入して $\quad 7r^2=28$

$r^2=4$

$r=\pm 2$

$r=2$ のとき $a=1$

$r=-2$ のとき $a=\dfrac{7}{3}$

練習 23 恒等式 $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$ を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$k=1$ を代入　$1^4-(1-1)^4=4\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1-1$

$k=2$ を代入　$2^4-(2-1)^4=4\cdot2^3-6\cdot2^2+4\cdot2-1$

$k=3$ を代入　$3^4-(3-1)^4=4\cdot3^3-6\cdot3^2+4\cdot3-1$

⋮　　⋮

$k=n$ を代入　$n^4-(n-1)^4=4\cdot n^3-6\cdot n^2+4\cdot n-1$

辺々加えると　$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+3+\cdots+n)+n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+2n^3+n^2$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\{n(n+1)\}^2$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

・1～nまでの自然数の2乗の和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

・1～nまでの自然数の3乗の和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

練習 24 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2$ (2) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+15^3$

(1)

$$\frac{1}{6}\times 20\times(20+1)\times(2\times 20+1)=2870$$

(2)

$$\left\{\frac{1}{2}\times 15\times(15+1)\right\}^2=14400$$

和の記号Σ(シグマ)

数列$\{a_n\}$について初項から第n項までの和を第k項a_kと和の記号Σを用いて

$\sum_{k=1}^{n} a_k$と表し　$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ ($\sum_{k=\cdot} a_k$は第・項~第・項までの和)

練習 25 次の(1)~(3)の式を例 10 のような和の形で書け。(4), (5)の式を和の記号$\sum$を用いて書け。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$　(2) $\sum_{k=3}^{8}2^{k-1}$　(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(4) $2+3+4+5+6$　(5) $3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

(2) $4+8+16+32+64+128$

(3) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

(4) $\sum_{k=2}^{6} k$　(5) $\sum_{k=1}^{6}(2k+1)^2$

練習 26 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}$　(2) $\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}5^{k-1} = \frac{5^n-1}{5-1} = \frac{5^n-1}{4}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n-1}3^k = \frac{3\cdot 3^{n-1}-1}{3-1} = \frac{3^n-3}{2}$$

自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \text{とくに} \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

練習 27 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2$　(2) $\sum_{k=1}^{50} k$　(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2$　(4) $\sum_{k=1}^{7} k^3$

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \times 2 = 30$

(2) $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \times 50 \times (50+1) = 1275$

(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \times 12 \times (12+1) \times (2 \times 12 + 1) = 650$

(4) $\sum_{k=1}^{7} k^3 = \left\{\frac{1}{2} \times 7 \times (7+1)\right\}^2 = 784$

和の記号Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$ ただし，p は k に無関係な定数

練習 28 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$ ~~(3)~~ $\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)}$ ~~(4)~~ $\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k}$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5)$

$\displaystyle = 4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}5$

$\displaystyle = 4\times\frac{1}{2}n(n+1)-5n$

$= 2n^2-3n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$

$\displaystyle = 3\sum_{k=1}^{n}k^2-7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-7\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n$

$\displaystyle = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{2}n(n+1)+\frac{8}{2}n$

$\displaystyle = \frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-7(n+1)+8\}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}n(2n^2-4n+2)$

$= n(n-1)^2$

練習 28 次の和を求めよ。

~~(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-5)$~~ ~~(2) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$~~ (3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)$ (4) $\sum_{k=1}^{n-1}2k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)$

$= \sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$

$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{2}{4}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\left\{n(n+1)+2\right\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$= 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k$

$= 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\left\{(n-1)+1\right\}$

$= n(n-1)$

練習 29

次の和を求めよ。

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{2}{4}n(n+1)(2n+1) + \frac{4}{4}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列

$a_{n+1}-a_n=b_n$ のように数列$\{a_n\}$のとなり合う２項間の差を項とする数列$\{b_n\}$を数列$\{a_n\}$の階差数列

a_n	1		3		7		13		…
b_n		2		4		6		8	…

左表より数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$は

初項2, 公差2の等差数列　$b_n=2n$

練習 30 階差数列を考えて，次の数列の第６項，第７項を求めよ。

1, 2, 5, 10, 17, ……

a_n	1		2		5		10		17		26		37
b_n		1		3		5		7		9		11	

上表より 階差数列$\{b_n\}$は $b_n=2n-1$

第6項は 26　　第7項は 37

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

練習 31 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，2，4，7，11，……　　　(2)　2，3，5，9，17，……

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする.

(1)

a_n	1		2		4		7		11 …
b_n		1		2		3		4	…

表より $b_n = n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

$n=1$ のとき　$\frac{1^2 - 1 + 2}{2} = 1$ なので成立

よって　$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

(2)

a_n	2		3		5		9		17 …
b_n		1		2		4		8	…

表より $b_n = 2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$

$n=1$ のとき　$2^{1-1} + 1 = 2$ で成立

よって　$a_n = 2^{n-1} + 1$

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

初項 a_1 は　　$\boldsymbol{a_1 = S_1}$

$\boldsymbol{n \geqq 2}$ **のとき**　　$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$

練習 32　初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= (n^2 - n) - (n^2 - 3n + 2)$

$= 2n - 2$

$n = 1$ のとき

$a_1 = 2 \times 1 - 2 = 0$ で成立

よって $a_n = 2n - 2$

練習 33 恒等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ を利用して，和

$S=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ を求めよ。

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

練習 34 次の和 S を求めよ。

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots\cdots + n\cdot 3^{n-1}$$

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$$

$$-)\ 3S = 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^{n}$$

$$-2S = \underline{1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot 3^{n-1}} - n\cdot 3^{n}$$

初項1, 公比3の等比数列の初項から第n項までの和

$$-2S = \frac{1\cdot(3^{n}-1)}{3-1} - n\cdot 3^{n}$$

$$-2S = \frac{3^{n}-1-2n\cdot 3^{n}}{2}$$

$$-2S = \frac{(1-2n)\cdot 3^{n}-1}{2}$$

$$S = \frac{(2n-1)\cdot 3^{n}+1}{4}$$

練習 35 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

数列は正の奇数の数列なので一般項は $2n-1$

各群の中にある項の個数の数列は n

(1) 第 n 群の最初の項ははじめから数えて第 $n-1$ 群までの項の次の項

第 $n-1$ 群までの項数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$

よって第 n 群の最初の項は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項目なので $2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1 = n^2-n+1$

(2) 数列は初項 1，公差 2 の等差数列．第 15 群には 15 個の項が入っている．

第 15 群に入るすべての数の和 S は $S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{(\text{第15群の初項})+(\text{第15群の末項})\}$ で求められる．

第 15 群の初項は (1) より $15^2-15+1 = 211$

第 15 群の末項は 239

よって $S = \frac{1}{2} \times 15\,(211+239) = 3375$

漸化式

数列において，前の項との関係を表す式.

※ $a_{n+1}=3a_n+5$ …①

①において a_1 がわかれば a_2 がわかる，a_2 がわかれば a_3 がわかる…
$n=1, 2, 3, \cdots$ において①は成立.

練習 36 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1) $a_1=100,\ a_{n+1}=a_n-5$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2$

(1)

$a_2=a_1-5=95$

$a_3=a_2-5=90$

$a_4=a_3-5=85$

$a_5=a_4-5=80$

(2)

$a_2=3a_1+2=8$

$a_3=3a_2+2=26$

$a_4=3a_3+2=80$

$a_5=3a_4+2=242$

漸化式で定められる数列の一般項

等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = a_n + d$ (等差型)

等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $a_{n+1} = r a_n$ (等比型)

練習 37 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$

(1) $a_{n+1} - a_n = 3$

$\{a_n\}$ は初項 2, 公差 3 の等差数列

$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

$a_n = 3n - 1$

(2) $\{a_n\}$ は初項 1, 公比 2 の等比数列

$a_n = 2^{n-1}$

練習 38 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$　　(2) $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

(1)

$a_{n+1}-a_n=3^n$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$=1+\frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=1+\frac{3^n-3}{2}$$

$$=\frac{3^n-1}{2}$$

$n=1$ のとき, $a_1=\frac{3^1-1}{2}=1$ で成立

よって $a_n=\frac{3^n-1}{2}$

(2)

$a_{n+1}-a_n=2n+1$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$

$$=0+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=0+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+n$$

$$=n^2-1$$

$n=1$ のとき, $a_1=1^2-1=0$ で成立

よって $a_n=n^2-1$

$a_{n+1}=pa_n+q$ の漸化式

$a_{n+1}=pa_n+q$ の一般項 a_n を求める.

手順

① a_{n+1}, a_n を α とおき, α の値を求める.

② ①より $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形にする.

③ $b_n=a_n-\alpha$ とおく. すると $b_{n+1}=pb_n$ の形ができる.

$b_1=a_1-\alpha$ より b_1 が求まり, b_n は公比 p の等比数列である.

④ b_n の一般項を求める.

⑤ $b_n=a_n-\alpha$ より $a_n=b_n+\alpha$. ⑤より a_n が定まる.

練習 39

次の□に適する数を求めよ。

(1) $a_{n+1}=4a_n-6$ を変形すると $a_{n+1}-\square=4(a_n-\square)$

(2) $a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると $a_{n+1}+\square=2(a_n+\square)$

(3) $a_{n+1}=-2a_n+3$ を変形すると $a_{n+1}-\square=-2(a_n-\square)$

(1)

$\alpha=4\alpha-6$ として

$\alpha=2$

$a_{n+1}-\underline{2}=4(a_n-\underline{2})$

(2)

$\alpha=2\alpha+1$ として

$\alpha=-1$

$a_{n+1}-(-1)=2\{a_n-(-1)\}$

$a_{n+1}+\underline{1}=2(a_n+\underline{1})$

(3)

$\alpha=-2\alpha+3$ として

$\alpha=1$

$a_{n+1}-\underline{1}=-2(a_n-\underline{1})$

練習 40 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=4a_n-6$ (2) $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

(1) $\alpha=4\alpha-6$ として

$\alpha=2$

$a_{n+1}-2=4(a_n-2)$

$b_n=a_n-2$ とすると

$b_{n+1}=4b_n$

また, $b_1=a_1-2=5-2=3$

b_n は初項3, 公比4の等比数列

$b_n=3\cdot 4^{n-1}$

ここで $b_n=a_n-2$ より

$a_n=3\cdot 4^{n-1}+2$

(2) $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$

$\alpha=2$

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$b_n=a_n-2$ とすると

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

$b_1=a_1-2=3-2=1$

b_n は初項1, 公比$\frac{1}{2}$の等比数列

$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ここで $b_n=a_n-2$ より

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+2$

隣接3項間の漸化式

一般に、漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ において、$p=-(\alpha+\beta)$, $q=\alpha\beta$ である。

すると、 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ となり、以下の2通りに変形できる。

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \quad \cdots ①$$

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \quad \cdots ②$$

練習 1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$

(2) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

(1)

$a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n)$ … ①

$a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n)$ … ②

①より $a_{n+1}-2a_n=5^{n-1}$ … ①'

②より $a_{n+1}-5a_n=2^{n-1}$ … ②'

①'②'の辺々を引くと

$$3a_n=5^{n-1}-2^{n-1}$$

$$a_n=\frac{5^{n-1}-2^{n-1}}{3}$$

(2)

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ … ①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$ … ②

①より $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ … ①'

②より $a_{n+1}-2a_n=1$ … ②'

①'②'の辺々を引くと

$$a_n=2^{n-1}-1$$

練習 2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

(1) $a_{n+1}-2a_n=2^n$ であることを示せ。

(2) $\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とする。$a_{n+1}-2a_n=2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ることによって，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)

$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

$c_n=a_{n+1}-2a_n$ とすると

$$c_{n+1}=2c_n$$

また，$c_1=a_2-2a_1=2$

c_n は初項 2，公比 2 の等比数列

$$c_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

よって $a_{n+1}-2a_n=2^n$

(2)

$a_{n+1}-2a_n=2^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{2a_n}{2^{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$$

$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とするので

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$$

$$b_1=\frac{a_1}{2^1}=0$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 0，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列

$$b_n=0+(n-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{2}(n-1)$$

(3)

$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ なので

$$a_n=b_n\times 2^n$$

(2) より $b_n=\frac{1}{2}(n-1)$ なので

$$a_n=\frac{1}{2}(n-1)\times 2^n$$

$$a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$$

練習 41

数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

(1) $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

~~(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$~~

(1) この等式を(A)とする.

(ア) $n=1$のとき (左辺) $=1$, (右辺) $=1$ なので

$n=1$のとき(A)は成立

(イ) $n=k$のとき(A)が成立する

つまり $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ が成立すると仮定すると

$n=k+1$のとき

(A)の左辺は (左辺) $=1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$

(A)の右辺は (右辺) $=(k+1)^2=k^2+2k+1$

(左辺) $=$ (右辺) より, $n=k+1$のときも(A)が成立.

(ア)(イ)よりすべての自然数nについて(A)が成立.

練習 41 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

~~(1) $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$~~

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) この等式を(A)とする.

(ア) $n=1$ のとき (左辺) $=2$, (右辺) $=2$ なので

$n=1$ のとき(A)は成立.

(イ) $n=K$ のとき(A)が成立

つまり $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+K(K+1)=\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)$ が成立すると仮定すると

$n=K+1$ のとき

(A)の左辺は (左辺) $=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+K(K+1)+(K+1)(K+2)=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$

(A)の右辺は (右辺) $=\frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3)$

(左辺) = (右辺) より, $n=K+1$ のときも(A)が成立.

(ア)(イ)よりすべての自然数 n について(A)が成立.

練習 42

n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 2n+1$$

この等式を(A)とする

(ア) $n=3$ のとき (左辺) $= 8$, (右辺) $= 7$ なので

$n=3$ のとき (A) は成立.

(イ) $k \geqq 3$ として $n=k$ のとき (A) が成立

つまり, $2^k > 2k+1$ が成立すると仮定すると

$n=k+1$ のとき

(A) の左辺は (左辺) $= 2^{k+1}$

(A) の右辺は (右辺) $= 2(k+1)+1 = 2k+3$

この (左辺)−(右辺) は (左辺)−(右辺) $= 2^{k+1} - 2k+3 = 2(2^k - k) + 3 > 0$

よって (左辺)−(右辺) > 0 なので (左辺) $>$ (右辺)

(ア)(イ) より 3以上のすべての自然数 n について (A) が成立

練習 43

n は自然数とする。5^n-1 は 4 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

「5^n-1 は4の倍数である」を(A)とする.

(ア) $n=1$ のとき　$5^1-1=4$　　よって $n=1$ のとき(A)は成立

(イ) $n=k$ のとき(A)が成立すると仮定すると，ある整数 m を用いて $5^k-1=4m$ …①　と表される.

$n=k+1$ を考えると

$$5^{k+1}-1=5\cdot5^k-1$$
$$=5\cdot5^k-1-4+4$$
$$=5\cdot5^k-5+4$$
$$=5(5^k-1)+4$$

①より　$5\cdot4m+4=4(5m+1)$

ここで m が整数なので $5m+1$ も整数なので $n=k+1$ のときも(A)は成立する.

(ア)(イ)より すべての自然数について(A)が成立