

数 A

---

図形の性質

---

---

---



# 内分と外分

$m, n$  を正の数とする。

線分 AB 上の点 P が

## 内分

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき、点 P は線分 AB を  
 $m : n$  に **内分する** という。



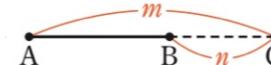
次に、 $m, n$  を異なる正の数とする。

## 外分 $m > n$ のとき

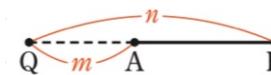
線分 AB の延長上の点 Q が

$$AQ : QB = m : n$$

を満たすとき、点 Q は線分 AB を  
 $m : n$  に **外分する** という。



## 外分 $m < n$ のとき



### 練習 1

下の図において、次の点を図にしよせ。

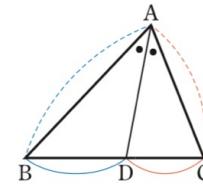
- (1) 線分 AB を 2:1 に内分する点 P
- (2) 線分 AB を 2:1 に外分する点 Q
- (3) 線分 BA を 2:1 に外分する点 R



## 三角形の内角の二等分線と比

定理1  $\triangle ABC$  の  $\angle A$  の二等分線と辺 BC との交点 D は、辺 BC を  $AB : AC$  に内分する。

すなわち  $BD : DC = AB : AC$

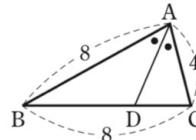


練習  
2

$AB = 8$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 4$  である  $\triangle ABC$  において、 $\angle A$  の二等分線と辺 BC の交点を D とする。次のものを求めよ。

(1)  $BD : DC$

(2) 線分 BD の長さ



(1)

$AD$  は  $\angle A$  の二等分線なので

(2)

$$BD : DC = AB : AC$$

$$BD : DC = AB : AC$$

$$= 8 : 4 = 2 : 1$$

$$BD = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}$$

$$\underline{\underline{BD : DC = 2 : 1}}$$

$$BD = \frac{16}{3}$$

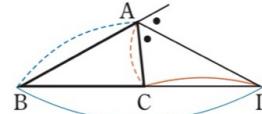
## 三角形の外角の二等分線と比

**定理2**  $AB \neq AC$  である  $\triangle ABC$  の

$\angle A$  の外角の二等分線と辺 BC  
の延長との交点 D は、辺 BC を  
AB : AC に外分する。

すなわち  $BD : DC = AB : AC$

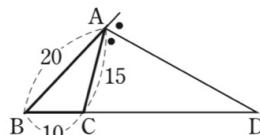
AB > AC の場合



練習  
3

$AB = 20$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 15$  である

$\triangle ABC$ において、 $\angle A$  の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。  
線分 BD の長さを求めよ。



$$AB : AC = BD : DC \dots \textcircled{1}$$

(P)(1) を \textcircled{1} に代入すると

$$BD = x \text{ とすると } DC = x - 10 \dots \textcircled{2}$$

$$4 : 3 = x : x - 10$$

$$AB : AC = 20 : 15 = 4 : 3 \dots \textcircled{3}$$

$$3x = 4(x - 10)$$

$$3x = 4x - 40$$

$$3x - 4x = -40$$

$$-x = -40$$

$$x = 40$$

$$\underline{\underline{BD = 40}},$$

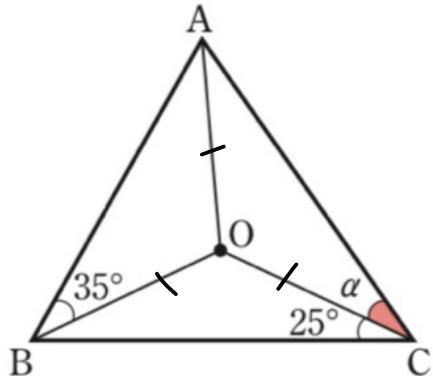
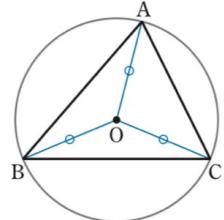
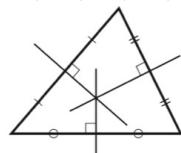
### 三角形の辺の垂直二等分線

定理3 三角形の3辺の垂直二等分線は  
1点で交わる。

$\triangle ABC$ において、3辺の垂直二等分線が交わる点をOとすると、前ページで示したように、点Oは $\triangle ABC$ の3つの頂点から等距離にある。よって、この点Oを中心とする半径OAの円は、 $\triangle ABC$ の3つの頂点を通る。

この円を、 $\triangle ABC$ の外接円といい、外接円の中心Oを $\triangle ABC$ の外心という。

三角形の外心は、3辺の垂直二等分線が交わる点である。



左図において  
Oは $\triangle ABC$ の外心

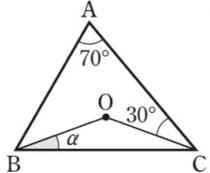
$\triangle OAB$ は  $OA = OB$  の二等辺三角形  
 $\angle OAB = \angle OBA = 35^\circ$

$\triangle OBC$ は  $OB = OC$  の二等辺三角形  
 $\angle OBC = \angle OCB = 25^\circ$

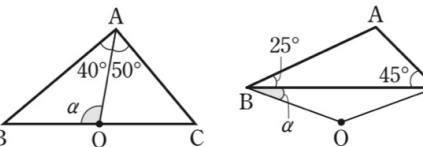
$\triangle OAC$ は  $OA = OC$  の二等辺三角形  
 $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$

下の図において、点Oは△ABC の外心である。 $\alpha$ を求めるよ。

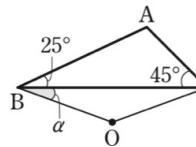
(1)



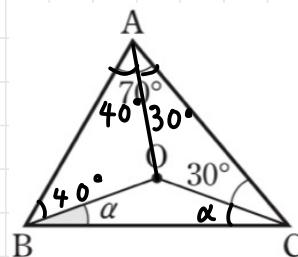
(2)



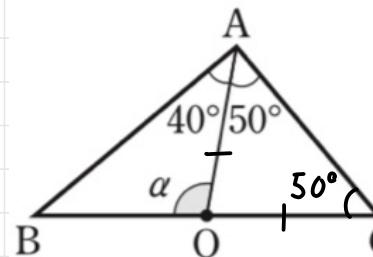
(3)



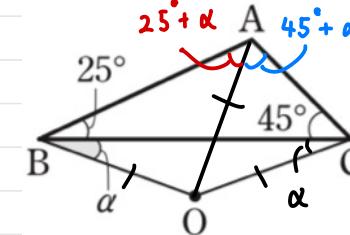
(1)



(2)



(3)



$$2(\alpha + 30 + 40) = 180$$

$$\alpha + 30 + 40 = 90$$

$$\alpha = 90 - 30 - 40$$

$$\alpha = 20$$

$$\underline{\alpha = 20^\circ}$$

$$\alpha = 50 + 50 = 100$$

$$\underline{\alpha = 100^\circ}$$

$\triangle ABC$ について

$$25 + (25 + \alpha) + (45 + \alpha) + 45 = 180$$

$$140 + 2\alpha = 180$$

$$2\alpha = 180 - 140$$

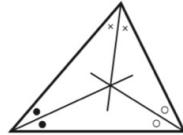
$$2\alpha = 40$$

$$\alpha = 20$$

$$\underline{\alpha = 20^\circ}$$

## 三角形の内角の二等分線

**定理4** 三角形の3つの内角の二等分線は  
1点で交わる。



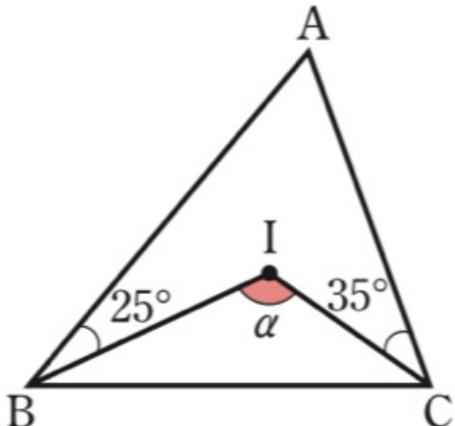
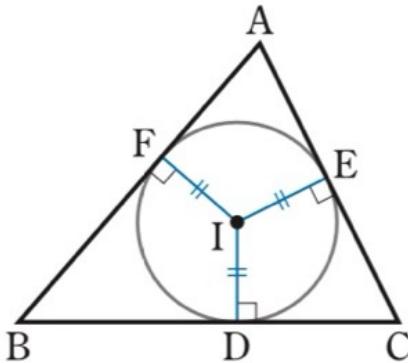
$$ID \perp BC, IE \perp CA, IF \perp AB$$

$$ID = IE = IF$$

よって、この点Iを中心とする半径ID  
の円は、 $\triangle ABC$ の3辺に接する。

この円を、 $\triangle ABC$ の**内接円**といい、内接円の中心Iを $\triangle ABC$ の  
**内心**という。

三角形の内心は、3つの内角の二等分線が交わる点である。



左図において

Iは $\triangle ABC$ の内心

BIは $\angle ABC$ の二等分線なので

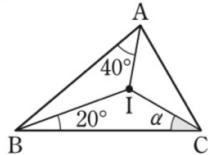
$$\angle ABI = \angle CBI = 25^\circ$$

CIは $\angle ACB$ の二等分線なので

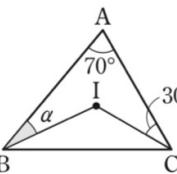
$$\angle ACI = \angle BCY = 35^\circ$$

下の図において、点 I は  $\triangle ABC$  の内心である。 $\alpha$  を求めよ。

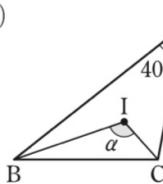
(1)



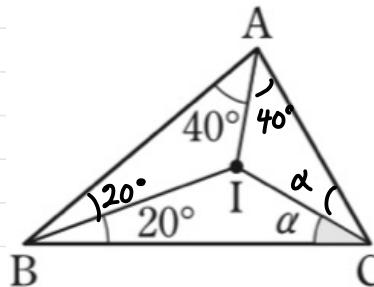
(2)



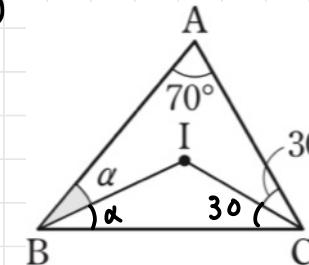
(3)



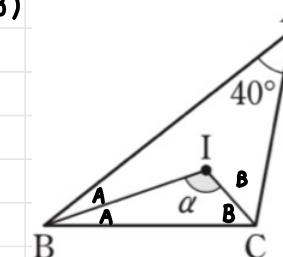
(1)



(2)



(3)



$$2(\alpha + 20 + 40) = 180$$

$$\alpha + 20 + 40 = 90$$

$$\alpha = 90 - 20 - 40$$

$$\alpha = 30$$

$$\underline{\underline{\alpha = 30^\circ}}$$

$$2(\alpha + 30) + 70 = 180$$

$$2(\alpha + 30) = 180 - 70$$

$$2(\alpha + 30) = 110$$

$$\alpha + 30 = 55$$

$$\alpha = 25$$

$$\underline{\underline{\alpha = 25^\circ}}$$

$\triangle IBC$ について

$$A + B = \alpha \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ について

$$2A + 2B + 40 = 180$$

$$2A + 2B = 140$$

$$A + B = 70 \dots \textcircled{2}$$

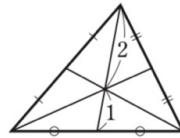
①②より

$$\underline{\underline{\alpha = 70^\circ}}$$

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を、三角形の  
中線 という。三角形の中線には、次のような性質がある。

### 三角形の中線

**定理5** 三角形の3本の中線は1点で交わり、  
その点は各中線を 2 : 1 に内分する。

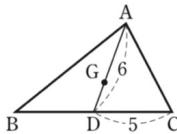


三角形の3本の中線が交わる点を、三角形の 重心 という。

練習  
6

右の図において、点Gは△ABCの重心  
である。次の線分の長さを求めよ。

- (1) BD      (2) AG



(1)

点Gが△ABCの重心なので  
ADは中線であるから

$$BD = DC \text{ なので}$$

$$\underline{\underline{BD = 5}}$$

(2)

$$AG : GD = 2 : 1$$

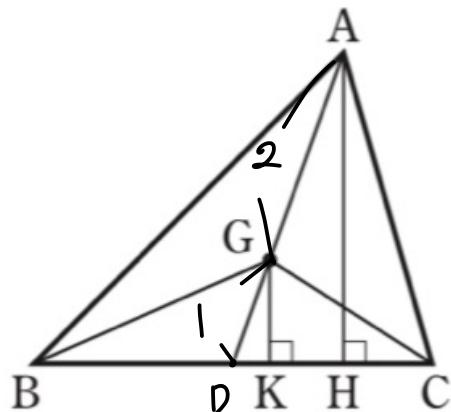
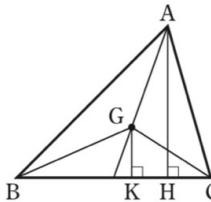
$$AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\underline{\underline{AG = 4}}$$

$\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし、点  $G$  から直線  $BC$  に下ろした垂線を  $GK$ 、点  $A$  から直線  $BC$  に下ろした垂線を  $AH$  とする。

(1)  $GK : AH$  を求めよ。

(2)  $\triangle GBC$  と  $\triangle ABC$  の面積比を求めよ。



(1)  $AG$  の延長と  $BC$  との交点を  $D$  とする。

点  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心なので

$$AG : GD = 2 : 1$$

$\triangle GDK$  と  $\triangle ADH$  は

$$\angle GKD = \angle AHD = 90^\circ$$

$$\angle GDK = \angle ADH \text{ (共通)}$$

2角が等しいので

$\triangle GDK \sim \triangle ADH$

よって  $GK : AH = GD : AD$

$$= 1 : 3$$

$$\underline{\underline{GK : AH = 1 : 3}}$$

(2)  $\triangle GBC$  と  $\triangle ABC$  は

底辺が共通の三角形なので  
面積比は高さの比に依存する。

よって  $GK : AH$  が 面積比

(1)より  $GK : AH = 1 : 3$  なので

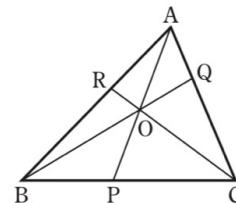
$$\triangle GBC : \triangle ABC = 1 : 3$$


---

## シェバの定理

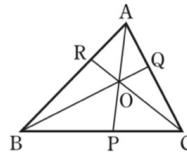
**定理6**  $\triangle ABC$  の内部に点Oがある。頂点A, B, C とOを結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



練習  
8

右の図の  $\triangle ABC$  において,  
 $AR : RB = 1 : 2$ ,  $BP : PC = 4 : 3$  である。  
 $CQ : QA$  を求めよ。



シェバの定理より

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

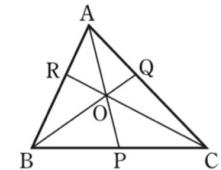
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{3}{2}$$

$$CQ : QA = 3 : 2$$

練習  
9

右の図の  $\triangle ABC$  において,  
 $AQ : QC = 2 : 3$ ,  $BP = PC$  である。  
 $AR : RB$  を求めよ。



$$BP = PC \text{ より } BP : PC = 1 : 1$$

シェバの定理より

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{2}{3}$$

$$AR : RB = 2 : 3$$

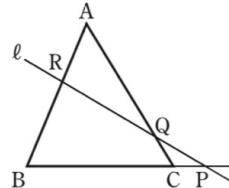
## メネラウスの定理

**定理7**  $\triangle ABC$  の辺 BC, CA, AB

またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線  $\ell$  と、それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

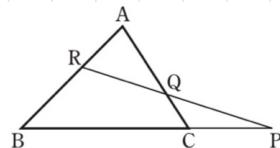
P が辺 BC の延長上にある場合



練習  
10

右の図の  $\triangle ABC$ において、  
 $AR : RB = 2 : 3$ ,  $BC : CP = 2 : 1$   
である。次の比を求めよ。

- (1)  $CQ : QA$  (2)  $PQ : QR$



(1)  $BC : CP = 2 : 1$  より  $BP : CP = 3 : 1$

メネラウスの定理より

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{CQ : QA = 1 : 2}}$$

(2)  $AR : RB = 2 : 3$  より  $AB : AR = 5 : 2$

メネラウスの定理より

$$\frac{AB}{AR} \cdot \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{CP}{BC} = 1$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

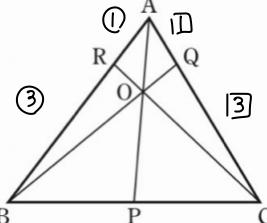
$$\frac{QR}{PQ} = \frac{4}{5}$$

$$\underline{\underline{PQ : QR = 5 : 4}}$$

$\triangle ABC$  の辺 AB, AC を 1:3 に内分する点を, それぞれ R, Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし, 直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1) BP : PC を求めよ。

(2)  $\triangle OBC$  :  $\triangle ABC$  を求めよ。



(2)  $\triangle ABC$  の面積を 1 とする。

$$\triangle ARC : \triangle BRC = AR : BR = 1 : 3$$

$$\therefore \triangle BRC = \frac{3}{4} \triangle ABC \cdots ①$$

$$\triangle BOR : \triangle BOQ = RO : OC$$

$\triangle CAR$  についてメネラウスの定理より

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

$$\frac{BP}{PC} = 1$$

$$\frac{BP : PC = 1 : 1}{}$$

$$\frac{AB}{BR} \cdot \frac{RO}{OC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{RO}{OC} \cdot \frac{3}{1} = 1$$

$$\frac{RO}{OC} = \frac{1}{4}$$

$$RO : OC = 1 : 4$$

$$\triangle BOR : \triangle BOQ = 1 : 4 \text{ なので}$$

$$\triangle BOQ = \frac{4}{5} \triangle BRC \cdots ③$$

① ② に代入すると

$$\triangle BOQ = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \triangle ABC$$

$$\triangle BOQ = \frac{3}{5} \triangle ABC$$

$$\frac{\triangle BOQ}{\triangle ABC} = \frac{3}{5}$$

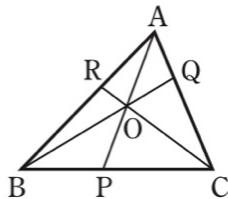
$$\triangle BOQ : \triangle ABC = 3 : 5$$

## チェバの定理

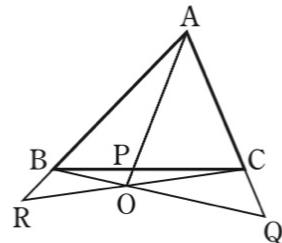
**定理6'**  $\triangle ABC$  の辺上にもその延長上にもない点Oがある。頂点A, B, C とOを結ぶ直線AO, BO, CO が、向かい合う辺BC, CA, AB またはその延長と、それぞれ点P, Q, R で交わるとき、次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

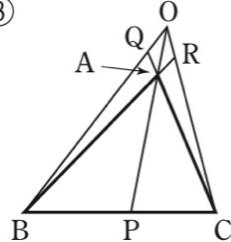
①



②



③

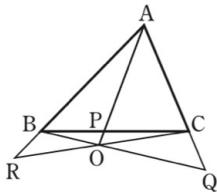


練習  
1

右の図の  $\triangle ABC$  において、  
 $AR : RB = 4 : 1$ ,  $BP : PC = 3 : 4$

である。

$CQ : QA$  を求めよ。



チエバの定理より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{4}{1} = 1$$

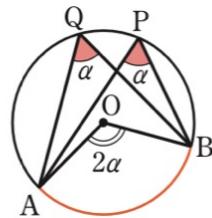
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{3}$$


---


$$CQ : QA = 1 : 3$$

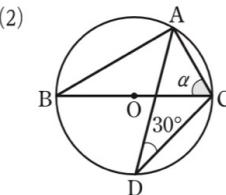
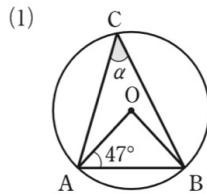
## 円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、  
その弧に対する中心角の大きさの半分である。



練習  
12

右の図において、 $\alpha$ を求める。ただし、Oは円の中心、(2)の線分BCは円の直径である。



(1) OA, OBは円Oの半径なので  $OA = OB$ . (2)  $\angle ABC$ と  $\angle CDO$ は  $\widehat{AC}$  の円周角なので

$\triangle OAB$  は二等辺三角形で底角が等しいから

$$\angle OAB = \angle OBA = 47^\circ.$$

$$\therefore \angle AOB = 180 - 47 - 47 = 86$$

$\angle AOB$  は  $\widehat{AB}$  の中心角なので

$$\alpha = \frac{86}{2} = 43$$

$$\underline{\alpha = 43^\circ}$$

$$\angle ABC = \angle CDO = 30^\circ$$

$\widehat{BC}$  の円周角より  $\angle BAC = 90^\circ$

$$\alpha = 180 - 30 - 90 = 60$$

$$\alpha = 60^\circ$$

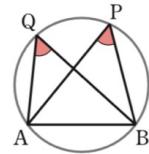
————→

### 円周角の定理の逆

4点 A, B, P, Qについて、点 P, Qが直線 AB  
に関して同じ側にあって

$$\angle APB = \angle AQB$$

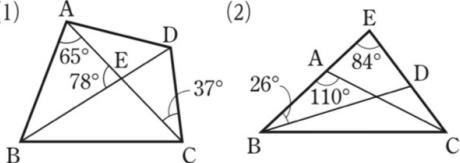
ならば、4点 A, B, P, Qは1つの円周上にある。



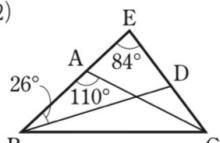
練習  
13

右の図において、  
4点 A, B, C, Dが  
1つの円周上にある  
ことを示せ。

(1)



(2)



(1) 対頂角より  $\angle AEB = \angle DEC = 78^\circ$  (2)  $\triangle BED$ について

$\triangle CDE$ の内角和は

外角である  $\angle CDB = \angle EBD + \angle BED = 26 + 84 = 110$

$$\angle EDC = 180 - 78 - 37 = 65$$

$$\angle BAC = \angle CDB = 110^\circ \text{ なり}$$

$$\angle BAC = \angle EDC = 65^\circ \text{ なり}$$

$\widehat{BC}$ に対する円周角が等しいので

$\widehat{BC}$ に対する円周角が等しいので

4点 A, B, C, Dは1つの円上にある。

4点 A, B, C, Dは1つの円周上にある。

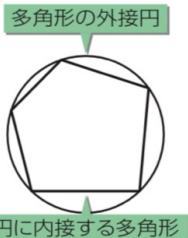
## 円に内接する四角形の性質

**定理8** 円に内接する四角形について、次の  
[1], [2]が成り立つ。

[1] 対角の和は  $180^\circ$  である。

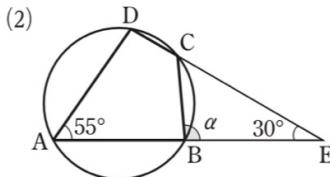
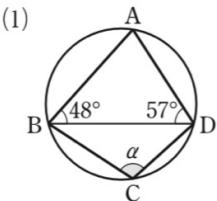
[2] 内角は、その対角の外角に等しい。

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき、この多角形は円に **内接する** という。また、この円をその多角形の **外接円** という。三角形には必ず外接円が存在するが、三角形以外の多角形では外接円が存在するとは限らない。



練習  
14

下の図において、 $\alpha$ を求めよ。



$$(1) \quad \alpha = 180 - \angle BAD$$

$$(2) \quad \angle DAB = \angle BCE = 55$$

$$\angle BAD = 180 - 48 - 57 \quad \alpha = 180 - \angle BCE - \angle CEB = 180 - 55 - 30 = 95$$

$$\angle BAD = 75^\circ$$

$$\alpha = 180 - 75 = 105$$

$$\underline{\underline{\alpha = 95^\circ}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 105^\circ}}$$

## 四角形が円に内接するための条件

定理9 次の[1]または[2]が成り立つ四角形は、円に内接する。

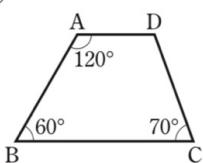
[1] 1組の対角の和が $180^\circ$ である。

[2] 内角が、その対角の外角に等しい。

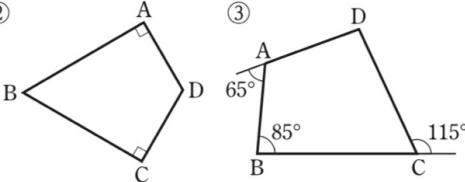
練習  
15

次の四角形ABCDのうち、円に内接するものはどれか。

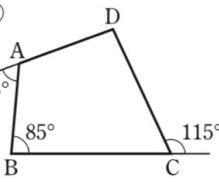
①



②



③



①について

$$\angle BAC + \angle BCD \neq 180^\circ$$

②について

$$\angle BAD + \angle BCD = 180$$

対角の和が $180^\circ$ で円に内接する

③について

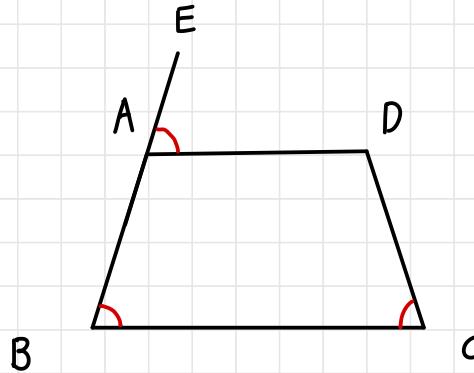
$$\angle A + \angle C = 180$$

1組の対角の和が $180^\circ$ なので、

円に内接する。

②と③

AD // BC である台形 ABCD において,  $\angle ABC = \angle BCD$  であるとき, この台形は円に内接する。このことを証明せよ。



左図のよう  $AB$  の  $A$  側の延長上に点  $E$  とする。

$AB // CD$  より 同位角が等しいので

$$\angle ABC = \angle EAD$$

また,  $\angle ABC = \angle DCB$  より

$$\angle EAD = \angle DCB$$

よって  $\angle DCB$  はその補角の外角と等しいので

台形 ABCD は円に内接する。

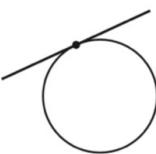
# ・円と直線

円と直線の位置関係には、次の3つの場合がある。

[1] 2点で交わる



[2] 接する



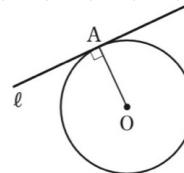
[3] 離れている



# ・円の接線

円Oの周上の点Aを通る直線 $\ell$ について、次  
が成り立つ。

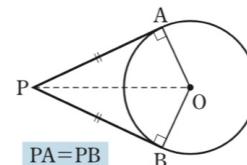
直線 $\ell$ が点Aで円Oに接する  $\Leftrightarrow OA \perp \ell$



直線 $\ell$ は点Aにおける円の接線

円に引いた2つの接線の長さについて  
は、次のことがいえる。

円の外部の1点からその円に引いた  
2つの接線の長さは等しい。



円の外部の1点から引いた

円の接線は2本

PA, PBを接線の長さという。

$\triangle ABC$ において、

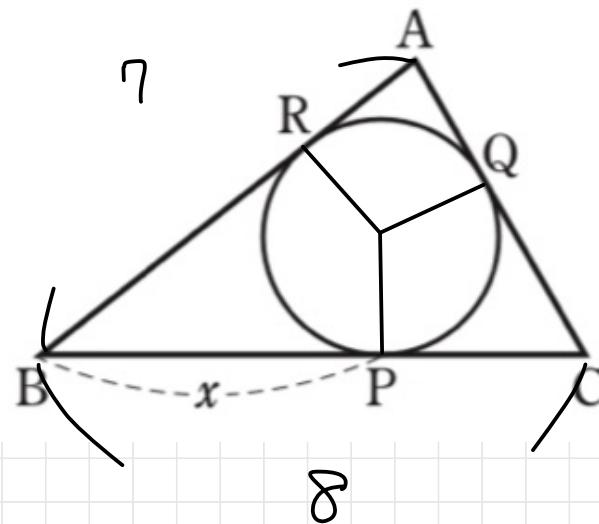
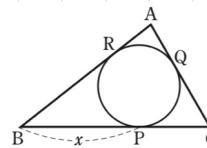
$$AB = 7, BC = 8$$

とする。

この三角形の内接円と辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ との接点を、それぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $BP$  の長さを  $x$  とするとき、 $AQ$  と  $CQ$  の長さを、それぞれ  $x$  で表せ。

(2)  $CA = 5$  であるとき、 $BP$  の長さを求めよ。

(1)  $P, Q, R$  が接点なので

$$AR = AQ \dots ①, BP = BR \dots ②, CP = CQ \dots ③$$

$$BP = x \text{ なので } ② \text{ より } BR = x \dots ④$$

$$AB = 7, ④ \text{ より } AR = AB - BR = 7 - x$$

$$① \text{ より } AQ = 7 - x$$

$$BC = 8, ② \text{ より } CP = BC - BP = 8 - x$$

$$③ \text{ より } CQ = 8 - x$$

$$AQ = 7 - x$$

$$CQ = 8 - x$$

$$(2) AQ + CQ = CA$$

$$(1) \text{ より } AQ = 7 - x, CQ = 8 - x \text{ なので}$$

$$(7 - x) + (8 - x) = 5$$

$$-2x + 15 = 5$$

$$x = 5$$

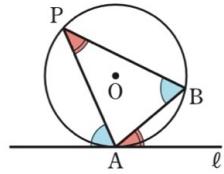
$$BP = x \text{ より}$$

$$BP = 5$$



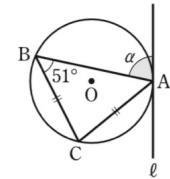
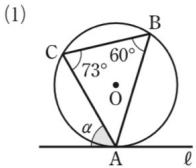
## 円の接線と弦の作る角

**定理10** 円の接線とその接点を通る弦の作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



練習  
19

右の図において、 $\alpha$ を求めるよ。ただし、直線  $\ell$  は円  $O$  の接線で、A は接点である。



$$(1) \quad \alpha = 60^\circ$$

$$(2) \quad CB = CA \text{ 且し } \angle CBA = \angle CAB = 51^\circ$$

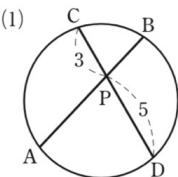
$$\angle BCA = 180 - \angle CBA - \angle CAB = 78^\circ$$

$$\alpha = 78^\circ$$

## 方べきの定理 I

**定理 11** 円の 2 つの弦 AB, CD の交点, またはそれらの延長の交点を P とすると,  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  が成り立つ。

**練習 20** 下の図において,  $PA \cdot PB$  の値を求めよ。ただし, (2) の O は円の中心である。



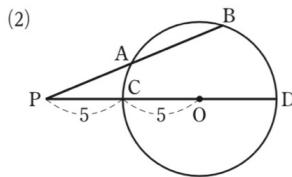
(1)

方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$PA \cdot PB = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\underline{\underline{PA \cdot PB = 15}}$$



(2)

OC, OD は円 O の半径より

$$OC = OD = 5$$

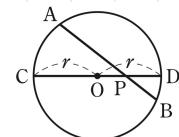
方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$PA \cdot PB = 5 \cdot 15 = 75$$

$$\underline{\underline{PA \cdot PB = 75}}$$

**練習 21** 円 O の半径を  $r$  とするとき, 右の図において,  $PA \cdot PB = r^2 - PO^2$  である。このことを示せ。



方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

図より  $PC = r + OP$ ,  $PD = r - OP$  なので

$$PA \cdot PB = (r + OP)(r - OP)$$

$$PA \cdot PB = r^2 - OP^2$$

## 方べきの定理Ⅱ

定理12 円の外部の点Pから円に引いた接線の接点をTとする。

Pを通ってこの円と2点A, Bで交わる直線を引くと,

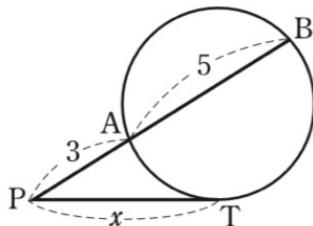
$PA \cdot PB = PT^2$  が成り立つ。

練習  
22

右の図において、 $x$ の値を求めよ。

ただし、直線PTは円の接線で、

Tは接点である。



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

$$x^2 = 3 \cdot 8 = 24$$

$$x > 0 \text{ なり}$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$x = 2\sqrt{6}$$

+

## A 2つの円の位置関係

半径が異なる2つの円の位置関係には、右の[1]～[5]の場合がある。

右の図では、円Oの半径を $r$ 、円O'の半径を $r'$ とし、2つの円の中心間の距離を $d$ とする。ただし、 $r > r'$ であるとする。

■ [1]～[5]の各場合の $r$ 、 $r'$ 、 $d$ の関係について、□に等号=、不等号>、<のうち、適する記号を入れよ。

[1]  $d \boxed{>} r+r'$

[2]  $d \boxed{=} r+r'$

[3]  $r-r' \boxed{<} d \boxed{<} r+r'$

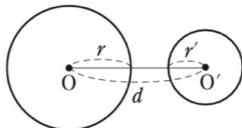
[4]  $d \boxed{=} r-r'$

[5]  $d \boxed{<} r-r'$

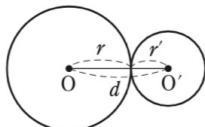
[2]、[4]のように、2つの円がただ1つの共有点をもつとき、2つの円は接するといい、この共有点を接点という。[2]のように接する場合、2つの円は外接するといい。[4]のように接する場合、2つの円は内接するといい。

2つの円が接するとき、接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

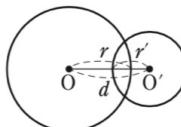
[1] 互いに外部にある



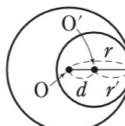
[2] 外接する(1点を共有する)



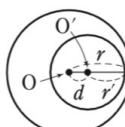
[3] 2点で交わる



[4] 内接する(1点を共有する)



[5] 一方が他方の内部にある



練習  
23

半径5と半径3の円がある。中心間の距離 $d$ の値が次のとき、2つの円の位置関係を前ページの[1]～[5]の中から選べ。

(1)  $d = 8$

(2)  $d = 10$

(3)  $d = 2$

(4)  $d = 4$

(5)  $d = 1$

$r_1 = 5, r_2 = 3$  とする。

(1)  $d = 8$  は  $r_1 + r_2 = d$  なので [2]

(2)  $d = 10$  は  $r_1 + r_2 < d$  なので [1]

(3)  $d = 2$  は  $r_1 - r_2 = d$  なので [4]

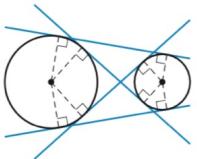
(4)  $d = 4$  は  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$  なので [3]

(5)  $d = 1$  は  $d < r_1 - r_2$  なので [5]

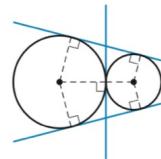
2つの円の両方に接する直線を、2つの円の **共通接線** という。

2つの円の共通接線には、次のような場合がある。

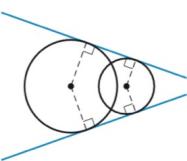
[1] 共通接線 4本



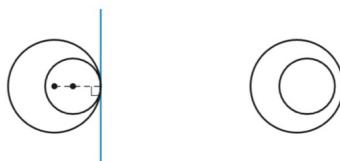
[2] 共通接線 3本



[3] 共通接線 2本



[4] 共通接線 1本

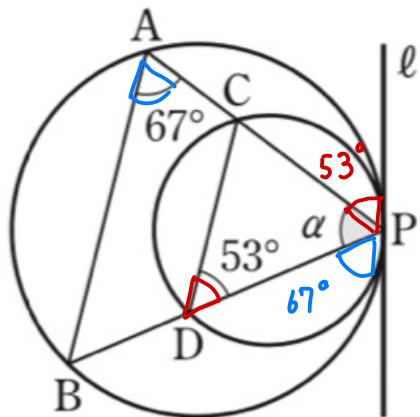
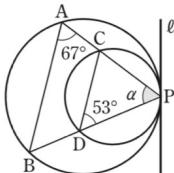


[5] 共通接線はない



練習  
24

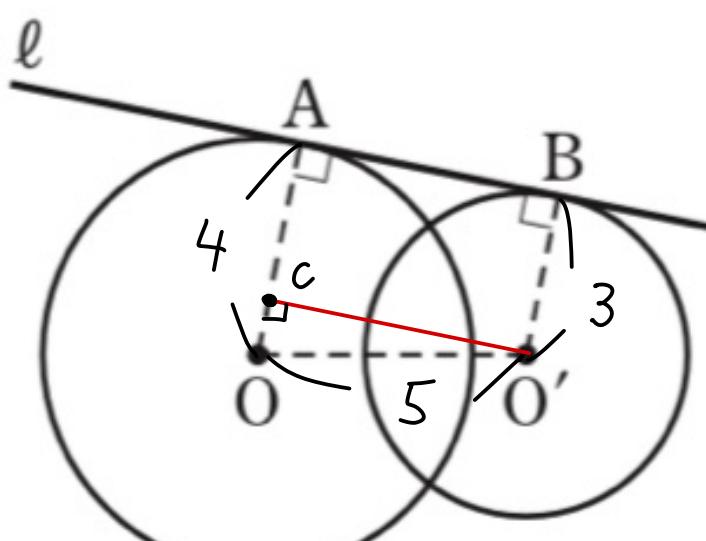
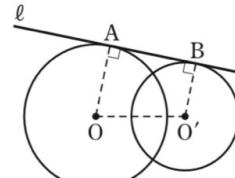
右の図で、 $\alpha$ を求めよ。ただし、直線  $\ell$  は2つの円の共通接線で、点Pは接点である。



$$67^\circ + \alpha + 53^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

右の図において、直線  $\ell$  は 2 つの円  $O, O'$  の共通接線で、 $A, B$  は接点である。円  $O, O'$  の半径を、それぞれ 4, 3 とし、 $O, O'$  間の距離を 5 とするとき、線分  $AB$  の長さを求めよ。



点  $O'$  を通り  $AB$  に平行な直線を引く。  
その直線と  $OA$  の交点を  $C$  とする。

四角形  $O'A BC$  は長方形なので

$$AB = O'C$$

$$AC = BO' = 3 \text{ より } OC = 1$$

ここで、三角形  $OO'C$  は直角三角形なので「三平方の定理」から

$$OC^2 + O'C^2 = OO'^2$$

$$O'C^2 = OO'^2 - OC^2 = 5^2 - 1^2 = 24$$

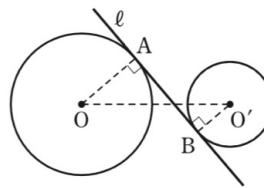
$$O'C > O \text{ なり}$$

$$O'C = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

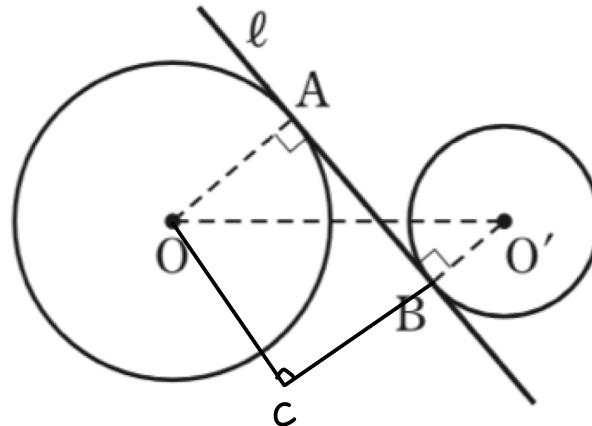
$$AB = O'C \text{ もり}$$

$$\underline{AB = 2\sqrt{6}}$$

右の図において、直線  $\ell$  は 2 つの円  $O, O'$  の共通接線で、 $A, B$  は接点である。円  $O$  の半径を  $r$ 、円  $O'$  の半径を  $r'$  とし、 $O, O'$  間の距離を  $d$  とするとき、線分  $AB$  の長さを求めよ。



$O'$  を延長し、その直線に  $O$  から垂線を下ろし、交点を  $C$  とする



四角形  $ABCO$  は長方形

$$\rightarrow AB = OC$$

左図より  $\triangle OO'C$  は直角三角形

三平方の定理から

$$OC^2 + O'C^2 = OO'^2$$

$$O'C = r + r', OO' = d \text{ なので}$$

$$OC^2 + (r + r')^2 = d^2$$

$$OC^2 = d^2 - (r + r')^2$$

$$OC > 0 \text{ より}$$

$$OC = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$

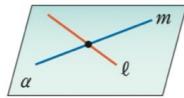
$$AB = OC \text{ より}$$

$$AB = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$

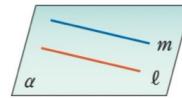
## A 2直線の位置関係

異なる2直線 $\ell, m$ の位置関係には、次の3つの場合がある。[1], [2]の場合、2直線 $\ell, m$ は1つの平面上にある。

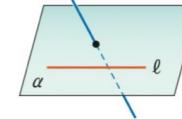
[1] 1点で交わる



[2] 平行である



[3] ねじれの位置にある



2直線 $\ell, m$ が平行であるとき、 $\ell \parallel m$ と書く。

〈注意〉 2直線 $\ell, m$ が一致する場合も、 $\ell \parallel m$ であると考えることにする。

3直線 $\ell, m, n$ について、次のことが成り立つ。

$$\ell \parallel m, m \parallel n \text{ ならば } \ell \parallel n$$

2直線 $\ell, m$ が平行でないとき、1点Oを通り、 $\ell, m$ に平行な直線を、それぞれ $\ell', m'$ とすると、 $\ell'$ と $m'$ は1つの平面上にある。このとき、 $\ell'$ と $m'$ のなす2つの角は、点Oをどこにとっても、一定である。この角を 2直線 $\ell, m$ のなす角 という。

2直線 $\ell, m$ のなす角が直角のとき、 $\ell$ と $m$ は 垂直 であるといい、

$\ell \perp m$ と書く。垂直な2直線 $\ell$ と $m$ が交わる

とき、 $\ell$ と $m$ は 直交 するといい。

また、次のことが成り立つ。

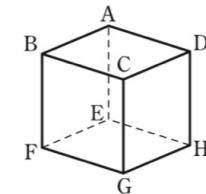
平行な2直線の一方に垂直な直線は、他方に  
も垂直である。

練習  
32

右の図の立方体ABCD-EFGHについて、  
次の2直線のなす角 $\theta$ を求める。ただし、  
 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

(1) AB, DH (2) AB, EG

(3) AC, FH

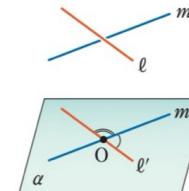


(1) 図は立方体なので ABとDHのなす角は  
ABとAEのなす角と同値である。

$$\theta = 90^\circ$$

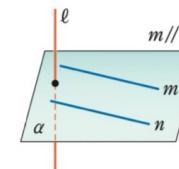
(2) 図は立方体なので ABとEGのなす角は  
ABとACのなす角と同値である。

$$\theta = 45^\circ$$



(3) 図は立方体なので ACとFHのなす角は  
ACとBDのなす角と同値である。

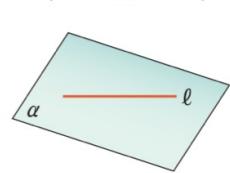
$$\theta = 90^\circ$$



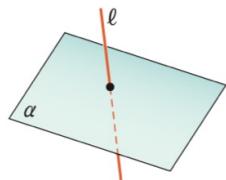
## B 直線と平面の位置関係

直線  $\ell$  と平面  $\alpha$  の位置関係には、次の 3 つの場合がある。

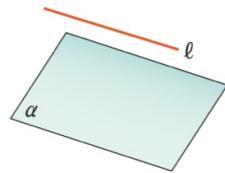
[1]  $\ell$  は  $\alpha$  に含まれる  
( $\ell$  は  $\alpha$  上にある)



[2] 1点で交わる



[3] 平行である

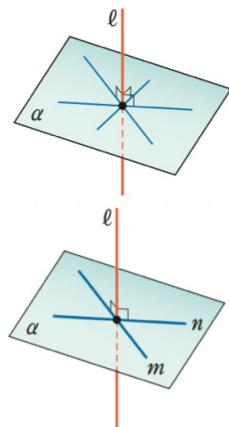


直線  $\ell$  と平面  $\alpha$  が平行であるとき、 $\ell \parallel \alpha$  と書く。

直線  $\ell$  が、平面  $\alpha$  上のすべての直線に垂直であるとき、 $\ell$  は  $\alpha$  に 垂直 である、または  $\ell$  は  $\alpha$  に 直交 するといい、 $\ell \perp \alpha$  と書く。このとき、 $\ell$  を平面  $\alpha$  の 垂線 という。

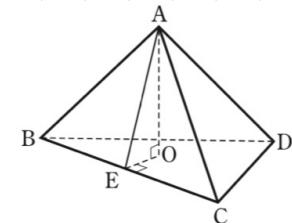
直線と平面の垂直について、次が成り立つことが知られている。

直線  $\ell$  が、平面  $\alpha$  上の交わる 2 直線  $m, n$  に垂直ならば、直線  $\ell$  は平面  $\alpha$  に垂直である。



練習  
33

四面体 ABCD において、点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AO とする。また、点 O から直線 BC に下ろした垂線を OE とする。このとき、 $AE \perp BC$  であることを証明せよ。



( $\frac{1}{2}$ 正)

仮定より  $AO \perp$  平面  $BCD$  なので

$BC \perp AO \cdots ①$

また、 $OE \perp BC \cdots ②$

①②より  $BC \perp$  平面  $AEO \cdots ③$

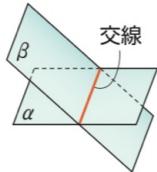
ここで “ $AE$  は 平面  $AEO$  の辺” なので

③より  $BC \perp AE$  もあることを言える。④

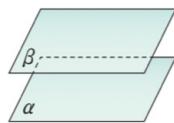
## C 2平面の位置関係

異なる2平面 $\alpha, \beta$ の位置関係には、次の2つの場合がある。

[1] 交わる



[2] 平行である



2平面が交わるとき、その交わりは直線になり、その直線を **交線** という。2平面 $\alpha, \beta$ が平行であるとき、 $\alpha // \beta$  と書く。

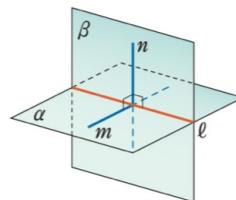
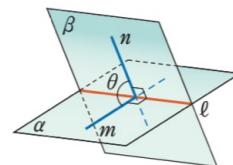
〈注意〉 2平面 $\alpha, \beta$ が一致する場合も、 $\alpha // \beta$  あると考えることにする。

交わる2平面の交線上の点から、各平面上で、交線に垂直に引いた2直線のなす角を **2平面のなす角** という。

2平面 $\alpha, \beta$ のなす角が直角のとき、 $\alpha$ と $\beta$ は **垂直** である、または **直交** するといい、 $\alpha \perp \beta$  と書く。 178ページ  
直線・平面の垂直と直交

2平面の垂直について、次のことが成り立つ。

平面 $\alpha$ に垂直な直線を含む平面は、 $\alpha$ に垂直である。

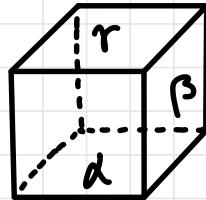


練習  
34

空間内の直線 $\ell$ と平面 $\alpha, \beta, \gamma$ について、次の記述は正しいか。正しくない場合、その理由も述べよ。

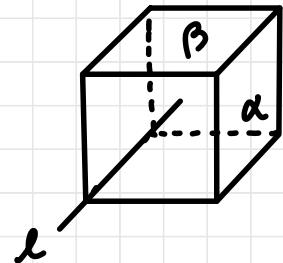
- (1)  $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$  ならば、 $\alpha // \gamma$  である。
- (2)  $\alpha \perp \beta, \beta // \gamma$  ならば、 $\alpha \perp \gamma$  である。
- (3)  $\ell // \alpha, \ell // \beta$  ならば、 $\alpha // \beta$  である。

(1) 右図のとき $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$ たゞか $\alpha \perp \gamma$   
よて正しくない。



(2) 正しい

(3) 右図のとき $\ell // \alpha, \ell // \beta$ たゞか $\alpha \perp \beta$   
よて正しくない。



## ・多面体

三角錐、四角柱のように、多角形の面で囲まれた立体を多面体という。

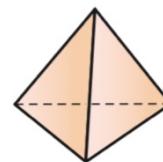
へこみのない多面体を凸多面体という。

次の[1]、[2]を満たす凸多面体を **正多面体** という。

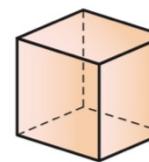
[1] 各面はすべて合同な正多角形である。

[2] 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

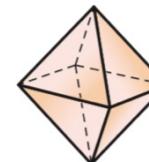
正多面体は、次の5種類しかないことが知られている。



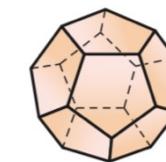
正四面体



正六面体(立方体)



正八面体



正十二面体



正二十面体

練習  
35

前ページの5種類の正多面体について、次の表を完成させよ。

正多面体	面の数	面の形	頂点の数	辺の数
正四面体	4	正三角形	4	6
正六面体	6	正方形	8	12
正八面体	8	正三角形	6	12
正十二面体	12	正五角形	20	30
正二十面体	20	正三角形	12	30

## オイラーの多面体定理

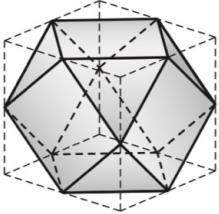
一般に、凸多面体の頂点の数を  $v$ 、辺の数を  $e$ 、面の数を  $f$  とすると

$$v - e + f = 2 \quad \dots \dots \text{①}$$

練習  
37

右の図のように、正六面体の各辺の中点を通る平面で 8 つかどを切り取った多面体について、次の問いに答えよ。

- (1) 面の数、頂点の数、辺の数を、それぞれ求めよ。
- (2) この多面体についても、上の等式 ① が成り立つことを確かめよ。



(1)

面 14

(2)

オイラーの多面体定理は

頂点 12

(頂点の数) - (辺の数) + (面の数) = 2 となれば“よい。”

辺 24

(1) ①)

$$12 - 24 + 14 = 2$$

よってこの多面体についても ① は成立。