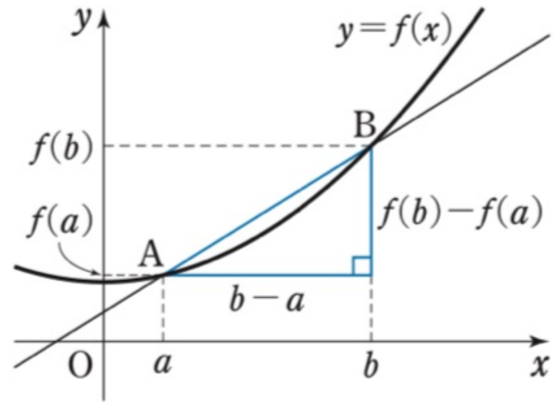
数Ⅱ

微分積分

平均変化率

$y=f(x)$ の値が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の変化の値

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



練習 1 次の平均変化率を求めよ。

(1) 1 次関数 $y=2x$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

(2) 2 次関数 $y=-x^2$ の，$x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

(1) $$\frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$$

(2) $$\frac{-(2+h)^2-(-2^2)}{(2+h)-2} = \frac{-h^2-4h}{h} = -h-4$$

極限値

関数$f(x)$においてxがaと異なる値をとりながらaに限りなく近づくとき$f(x)$の値が

一定の値αに限りなく近づくならば, αをxがaに限りなく近づくときの極限値という.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \to a \text{のとき} f(x) \to \alpha$$

練習 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 2}(x^2+1)$ (2) $\lim_{h \to 0}(6+h)$ (3) $\lim_{h \to 0}(12-6h+h^2)$

(1) $\lim_{x \to 2}(x^2+1) = 2^2+1 = 5$

(2) $\lim_{h \to 0}(6+h) = 6+0 = 6$

(3) $\lim_{h \to 0}(12-6h+h^2) = 12-6 \cdot 0+0^2 = 6$

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

練習 3　関数 $f(x)=3x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(1)$　　(2)　$f'(-2)$　　(3)　$f'(a)$

(1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-3\cdot 1^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h+6)$

$=6$

(2) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h)^2-3\cdot(-2)^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-12h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h-12)$

$=-12$

(3) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6ah}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h+6a)$

$=6a$

接線の傾きと微分係数

$y=f(x)$ のグラフ上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは
関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい

練習 4 関数 $y=x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ。

(1) 点 $(1,\ 1)$　　(2) 点 $(-2,\ 4)$

(1)
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$$

接線の傾き 2

(2)
$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4$$

接線の傾き -4

導関数 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は $(x^n)'=nx^{n-1}$

定数関数 c の導関数は $(c)'=0$

練習 5 導関数の定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=3x$　　(2) $f(x)=-x^2$

(1)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}3$$

$$=3$$

(2)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-h-2x)$$

$$=-2x$$

練習 6 上の公式を用いて，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=x^4$　　(2) $y=x^5$

(1) $y'=4x^3$　　(2) $y'=5x^4$

関数の定数倍および和，差の導関数

kは定数とする．

① $y=kf(x) \longrightarrow y'=kf'(x)$

② $y=f(x)+g(x) \longrightarrow y'=f'(x)+g'(x)$

③ $y=f(x)-g(x) \longrightarrow y'=f'(x)-g'(x)$

練習 7 次の関数を微分せよ。

(1) $y=4x^2+3x-4$　(2) $y=-3x^2+x-2$

(3) $y=4x^3-2x^2-5x$　(4) $y=-x^4-x+3$

(5) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x$　(6) $y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$

(1) $y'=8x+3$　(2) $y'=-6x+1$

(3) $y'=12x^2-4x-5$

(4) $y'=-4x^3-1$

(5) $y'=2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

(6) $y'=-\frac{3}{2}x^2+3x$

練習 8 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+2)(x+3)$　(2) $y=x(x+2)(x-2)$

(3) $y=-2x(x+1)(x-3)$　(4) $y=3(x^2-2)^2$

(1) $y=x^2+5x+6$

$y'=2x+5$

(2) $y=x^3-4x$

$y'=3x^2-4$

(3) $y=-2x^3+4x^2+6x$

$y'=-6x^2+8x+6$

(4) $y=3x^4-12x^2+12$

$y'=12x^2-24x$

練習 9

関数 $f(x)=x^3-3x^2+3$ について，次の x の値における微分係数を求めよ。

(1) $x=2$ (2) $x=0$ (3) $x=-2$

$f'(x)=3x^2-6x$

(1) $f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2$
$=0$

(2) $f'(0)=3\ 0^2-6\cdot 0$
$=0$

(3) $f'(-2)=3\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)$
$=24$

練習 10

次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(0)=-3,\quad f'(1)=1,\quad f(0)=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とする

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-3$ より $f'(0)=2a\cdot 0+b=-3$
$b=-3$

$f'(1)=1$ より $f'(1)=2a\cdot 1+b=1$
$2a+b=1$
$b=-3$ より $a=2$

$f(0)=2$ より $f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=2$
$c=2$

$f(x)=2x^2-3x+2$

練習 11 次の t の関数を微分せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $s=3t^2-4t+2$　　(2) $f(t)=at^3+bt^2$

(1) $s'=6t-4$

(2) $f'(t)=3at^2+2bt$

練習 12 半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$ である。V と S を r の関数とみて，それぞれ r で微分せよ。

$V'=4\pi r^2$

$S'=8\pi r$

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

練習 13 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に x 座標が 2 である点Aをとる。点Aにおける接線の方程式を求めよ。

$f(x)=2x^2-4x+3$ とする

$f(2)=2\cdot 2^2-4\cdot 2+3=3$

点Aは$(2, 3)$

$f'(x)=4x-4$

$f'(2)=4\cdot 2-4=4$

接線の傾きは4

$y-3=4(x-2)$

$y=4x-5$

練習 14

次の接線の方程式を求めよ。

(1) 関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 $C(-1,\ -7)$ から引いた接線

(2) 関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフに原点Oから引いた接線

(1) $f(x)=x^2+1$，接点のx座標をaとする.

接点は $(a,\ f(a))=(a,\ a^2+1)$

$f'(x)=2x$ より

$f'(a)=2a$ なので 接線の傾きは $2a$

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$

これが $(-1,-7)$ をトールので

$-7-(a^2+1)=2a(-1-a)$

$a^2+2a-8=0$

$(a-2)(a+4)=0$

$a=2,\ -4$

$a=2$ のとき $y=4x-3$

$a=-4$ のとき $y=-8x-15$

(2) $f(x)=x^2-2x+4$，接点のx座標をaとする

接点は $(a,\ f(a))=(a,\ a^2-2a+4)$

$f'(x)=2x-2$ より

$f'(a)=2a-2$ なので 接線の傾きは $2a-2$

$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$

これが原点をトールので

$0-(a^2-2a+4)=(2a-2)(0-a)$

$a^2-4=0 \to a=\pm 2$

$a=2$ のとき $y=2x$

$a=-2$ のとき $y=-6x$

関数f(x)の増減とf'(x)の符号

ある区間で

常に $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で増加.

常に $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で減少.

常に $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で定数.

練習 15 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+5$　　(2) $f(x)=-2x^3-3x^2+1$

(1) $f'(x)=3x^2-12x$

$=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,4$

$f'(x)>0$ を解くと $x<0,4<x$

$f'(x)<0$ を解くと $0<x<4$

f(x)の増減は

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

f(x)は

$x\leqq 0,\ 4\leqq x$ で増加

$0\leqq x\leqq 4$ で減少

(2) $f'(x)=-6x^2-6x$

$=-6x(x+1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,-1$

$f'(x)>0$ を解くと $x<-1,0<x$

$f'(x)<0$ を解くと $-1<x<0$

f(x)の増減は

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

f(x)は

$x\leqq -1,\ 0\leqq x$ で減少

$-1\leqq x\leqq 0$ で増加

関数の極大・極小

$f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき

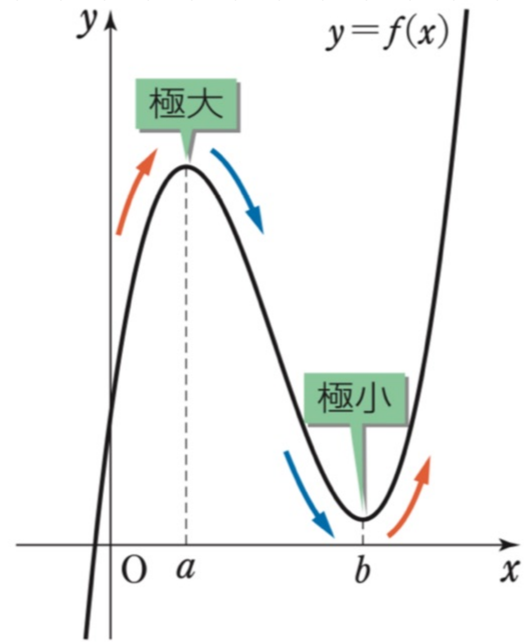
$f(x)$ は $x=a$ で極大であり, $f(a)$ は極大値

$f(x)$ が $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき

$f(x)$ は $x=b$ で極小であり, $f(b)$ は極小値

極大値と極小値をまとめて極値という.

※ 極値が必ずしも最大値・最小値になるとは限らない

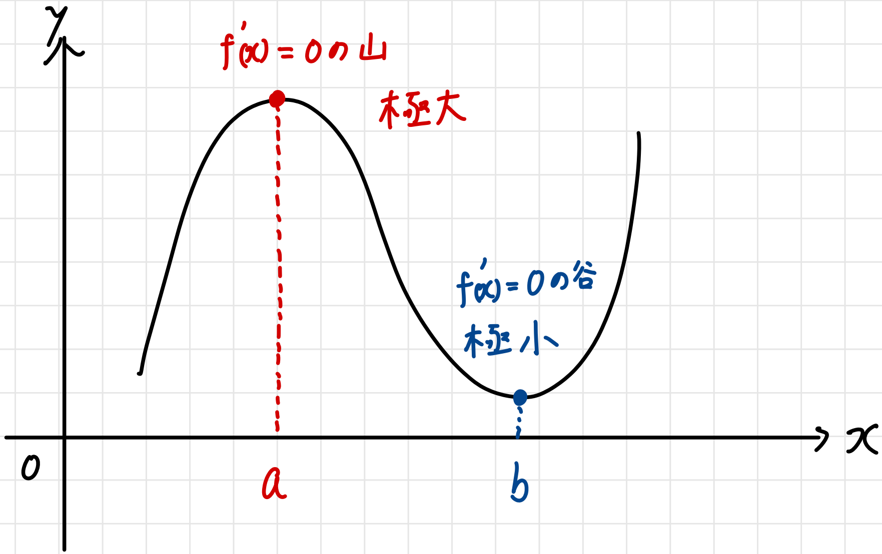


$f'(x)$ と $f(x)$ の増減

$f'(x) > 0$ のとき → 接線の傾きが正 → $f(x)$ は増加

$f'(x) < 0$ のとき → 接線の傾きが負 → $f(x)$ は減少

$f'(x) = 0$ のとき → 接線の傾きが 0 → $f(x)$ の増加減少の切り替わりポイント



$x = a$ のとき極大値
$x = b$ のとき極小値
} 極大値, 極小値をまとめて極値

※ 極値が最大値最小値になるとは限らない

練習 16

次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^3-6x^2+9x$ 　　　　　(2) ~~$y=-x^3+3x^2+1$~~

① $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0$ とする

$3x^2-12x+9=0$

$3(x^2-4x+3)=0$

$3(x-1)(x-3)=0$

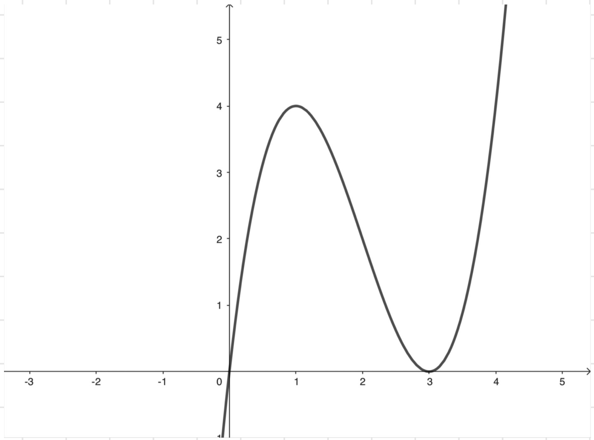
$x=1.\ 3$

②

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	4	↗

$x=1$ のとき極大値 4

$x=3$ のとき極小値 0



練習 16 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

~~(1)~~ $\cancel{y=x^3-6x^2+9x}$　　　(2) $y=-x^3+3x^2+1$

① $f(x)=-x^3+3x^2+1$

$f'(x)=-3x^2+6x$

$f'(x)=0$ とする

$-3x^2+6x=0$

$-3x(x-2)=0$

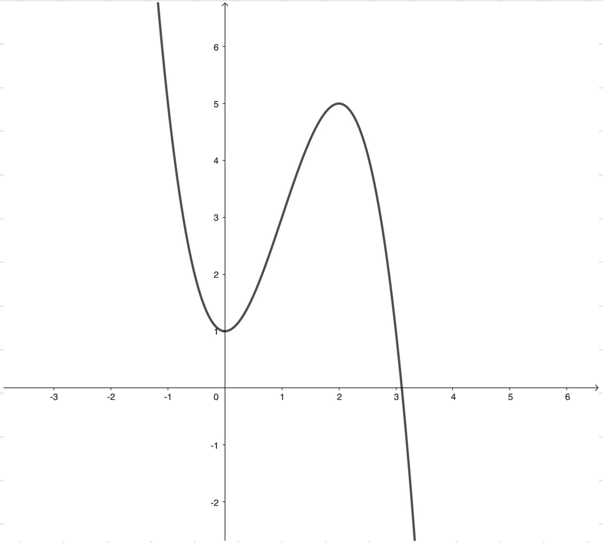
$x=0,\ 2$

②

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

$x=2$ のとき極大値 5

$x=0$ のとき極小値 1



練習 17 次の関数の増減を調べ，極値をもたないことを確かめよ。

(1) $f(x)=-x^3$ (2) $f(x)=x^3+2x$

(1) $f'(x)=-3x^2$

$f'(x)=0$ とすると

$x=0$

増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

$f(x)$ は常に減少し

$f(x)$ は極値をもたない

(2) $f'(x)=3x^2+2$ より

$3x^2 \geqq 0$ であるから常に $f'(x)>0$

$f(x)$ は常に増加し

$f(x)$ は極値をもたない

xの多項式で表される関数$f(x)$について

$f(x)$が$x=a$で極値をとる $\Rightarrow$ $f'(a)=0$

但し，$f'(a)=0$であっても$f(x)$は$x=a$で極値をとるとは限らない．

練習 19 関数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。また，極小値を求めよ。

$f(x)$が$x=1$で極大値8をとるので

$f(-1)=8$，$f'(-1)=0$がいえる

$f(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+b$

$a+b+8=8$

$a+b=0$ …①

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)-9=0$

$-2a-6=0$ …②

①②より $a=-3$，$b=3$ なので

$f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x+3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$とすると $x=-1, 3$

$f(-1)$は極大値なので$f(3)$が極小値

$f(3)=3^3-3\cdot3^2-9\cdot3+3=-24$

$a=-3$，$b=3$．$x=3$で極小値-24

練習 20 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^3+3x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$ (2) $y=-x^3+x^2+x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$

~~(3)~~ $y=x^4-2x^3+3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

(1) $f(x)=x^3+3x^2$ とする.

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0 \longrightarrow 3x(x+2)=0 \longrightarrow x=0,-2$

$f'(x)>0 \longrightarrow 3x(x+2)>0 \longrightarrow x<-2,\ 0<x$

$f'(x)<0 \longrightarrow 3x(x+2)<0 \longrightarrow -2<x<0$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	20

$x=2$ で最大値 20

$x=-3,0$ で最小値 0

(2) $f(x)=-x^3+x^2+x$ とする.

$f'(x)=-3x^2+2x+1$

$=-(3x^2-2x-1)$

$=-(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0 \longrightarrow -(3x+1)(x-1)=0 \longrightarrow x=-\frac{1}{3},1$

$f'(x)>0 \longrightarrow -(3x+1)(x-1)>0 \longrightarrow -\frac{1}{3}<x<1$

$f'(x)<0 \longrightarrow -(3x+1)(x-1)<0 \longrightarrow x<-\frac{1}{3},\ 1<x$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	0	↗	1	↘	-2

$x=1$ で最大値 1

$x=2$ で最小値 -2

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^3-6x+3=0$ (2) $x^3+3x^2+2=0$

(3) $-x^3+3x^2-4=0$ (4) $x^4-8x^2+1=0$

(1) $f(x)=2x^3-6x+3$ とする

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

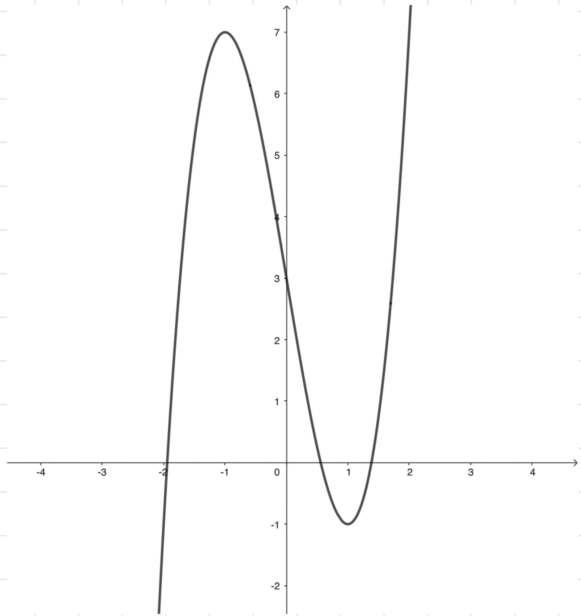
$f'(x)=0 \to 6(x+1)(x-1)=0 \to x=\pm 1$

$f'(x)>0 \to 6(x+1)(x-1)>0 \to x<-1,\ 1<x$

$f'(x)<0 \to 6(x+1)(x-1)<0 \to -1<x<1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$y=2x^3-6x+3$ は

x軸と3点で交わるので

異なる実数解 3コ

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ とする.

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

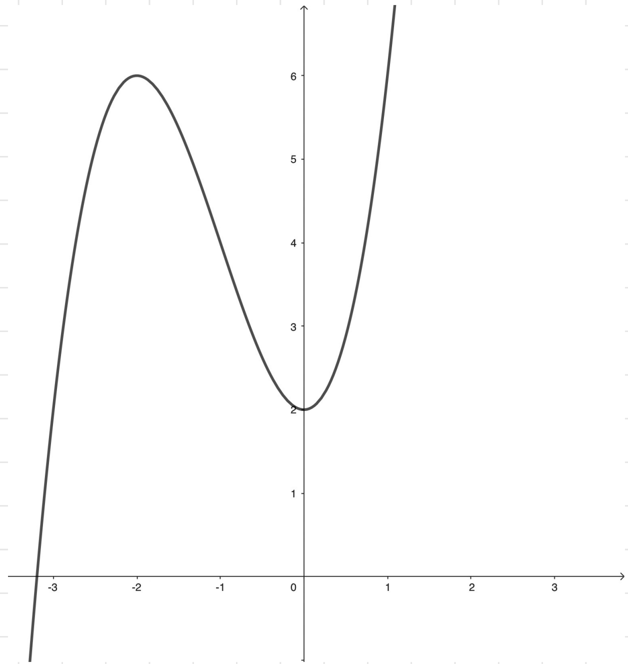
$f'(x) = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \rightarrow x = 0, -2$

$f'(x) > 0 \rightarrow 3x(x+2) > 0 \rightarrow x < -2,\ 0 < x$

$f'(x) < 0 \rightarrow 3x(x+2) < 0 \rightarrow -2 < x < 0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$Y = x^3 + 3x^2 + 2$

x軸と1点で交わるので

異なる実数解 1コ

(3) $f(x) = -x^3+3x^2-4$ とする

$f'(x) = -3x^2+6x = -3x(x-2)$

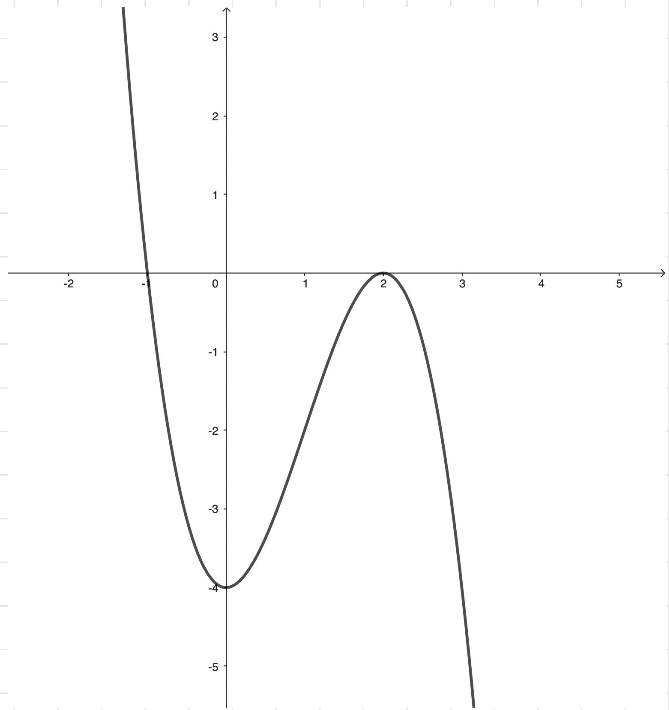
$f'(x) = 0 \rightarrow -3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2$

$f'(x) > 0 \rightarrow -3x(x-2) > 0 \rightarrow 0 < x < 2$

$f'(x) < 0 \rightarrow -3x(x-2) < 0 \rightarrow x < 0, 2 < x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$

グラフは下図



左図より

$y = -x^3+3x^2-4$

x 軸と2点で交わるので

異なる実数解 2コ

練習 23　方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ がただ 1 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$2x^3-3x^2=a$

$f(x)=2x^3-3x^2$ とする

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

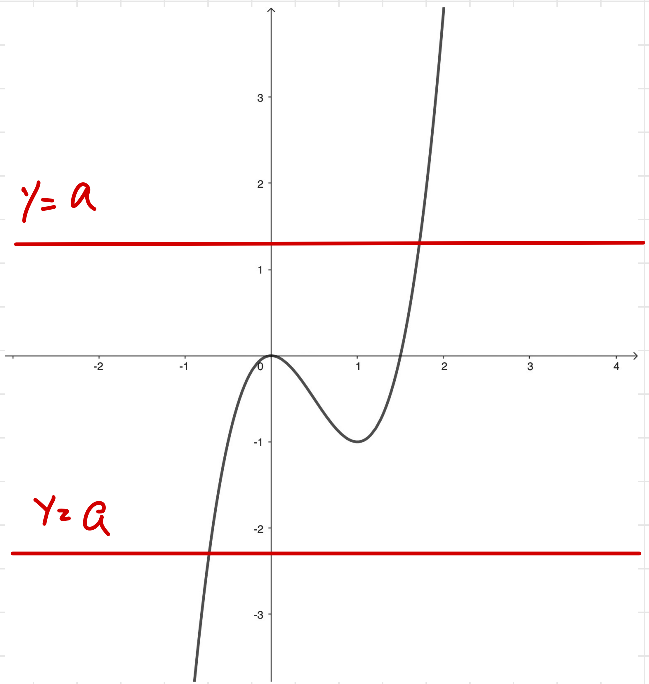
$f'(x)=0 \to 6x(x-1)=0 \to x=0,\ 1$

$f'(x)>0 \to 6x(x-1)>0 \to x<0,\ 1<x$

$f'(x)<0 \to 6x(x-1)<0 \to 0<x<1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$y=2x^3-3x^2$ が

ただ1つの実数解を

もつのは

$a>0,\ a<-1$

不定積分

x で微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数という.

一般に関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると, $f(x)$ の任意の原始関数は

$$F(x)+C \quad (C\text{は積分定数})$$

といい, この表示を $f(x)$ の不定積分という.

$\int f(x)\,dx$ と表し $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ (Cは積分定数) とかく

関数 $f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ (Cは積分定数)

関数 x^n の不定積分

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

練習 25 次の中から，$3x^2$ の原始関数であるものを選べ。

① $6x$　　② x^3　　③ x^3+2x　　④ x^3-4

$3x^2$ の原始関数 $\longrightarrow$ 微分したら $3x^2$ になる.

① $6x \xrightarrow{\text{ビブン}} 6$

② $x^3 \xrightarrow{\text{ビブン}} 3x^2$

③ $x^3+2x \xrightarrow{\text{ビブン}} 3x^2+2$

④ $x^3-4 \xrightarrow{\text{ビブン}} 3x^2$

②と④

不定積分の性質

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ のとき

① $\int kf(x)\,dx = kF(x)+C$ (Cは積分定数) kは定数

② $\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = F(x)+G(x)+C$ (Cは積分定数)

③ $\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = F(x)-G(x)+C$ (Cは積分定数)

練習 27 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 5x^2dx$　(2) $\int (x^2+x-1)dx$

(3) $\int (x^3-6x^2-2x+5)dx$　(4) $\int (-2x^2-x+7)dx$

(1) $\int 5x^2dx = \frac{5}{3}x^3 + C$ (Cは積分定数)

(2) $\int (x^2+x-1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ (Cは積分定数)

(3) $\int (x^3-6x^2-2x+5)dx$

$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C$ (Cは積分定数)

(4) $\int (-2x^2-x+7)dx$

$= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$ (Cは積分定数)

練習 28 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (t+2)(3t-1)dt$　(2) $\int 3(t-1)^2dt$

(1) $\int (t+2)(3t-1)dt$

$= \int (3t^2+5t-2)dt$

$= t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + C$ (Cは積分定数)

(2) $\int 3(t-1)^2dt$

$= \int 3(t^2-2t+1)dt$

$= \int (3t^2-6t+3)dt$

$= t^3 - 3t^2 + 3t + C$ (Cは積分定数)

練習 29

次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

[1] $F'(x)=3x^2-4$　　　　[2] $F(-1)=5$

[1] より

$F(x)=\int(3x^2-4)dx=x^3-4x+C$ (Cは積分定数) … ①

① [2] より

$F(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)+C=5$

$-1+4+C=5$

$C=2$

$\therefore F(x)=x^3-4x+2$ //

定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

($f(x)$ を a から b まで積分する)

練習 30 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 x\,dx$　(2) $\int_{-1}^2 x^2 dx$　(3) $\int_{-2}^1 x^3 dx$　(4) $\int_3^0 2\,dx$

(1) $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = \underline{4}$

(2) $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2$

$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = \underline{3}$

(3) $\int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^1$

$= \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = \underline{-\frac{15}{4}}$

(4) $\int_3^0 2\,dx = \left[2x\right]_3^0$

$= 0 - 6 = \underline{-6}$

練習 31 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$ (2) $\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3+2t)\,dt$ (4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2\,dt$

(1) $\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx = \int_2^3 (x^2-5x+6)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3 = -\frac{1}{6}$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3+2t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^2\right]_{-1}^2$

$=-\frac{3}{4}$

(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2\,dt$

$=\int_{-2}^2 (t^3+4t^2+4t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_{-2}^2$

$=\frac{64}{3}$

関数の定数倍および和,差の定積分

① $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

練習 32 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^3 (x^3-3x+2)\,dx$$

$$\int_1^3 (x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\int_1^3 x^3\,dx - 3\int_1^3 x\,dx + \int_1^3 2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 - 3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 + \left[2x\right]_1^3 = \underline{12}$$

練習 33 次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2dx$$

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2dx$$

$$=\int_{-1}^1 \{(x+2)^2-(x-2)^2\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \{(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 8x\,dx = \left[4x^2\right]_{-1}^1 = 0$$

定積分の性質

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

練習 35 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 (3x^2-4x)dx+\int_2^3 (3x^2-4x)dx$

(2) $\int_0^3 (x^2+2x)\,dx-\int_1^3 (x^2+2x)\,dx$

(1)

$= \int_1^3 (3x^2-4x)\,dx$

$= \left[x^3-2x^2\right]_1^3$

$= 10$

(2)

$= \int_0^3 (x^2+2x)dx - \left(-\int_3^1 (x^2+2x)\,dx\right)$

$= \int_0^3 (x^2+2x)\,dx + \int_3^1 (x^2+2x)\,dx = \int_0^1 (x^2+2x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

$= \frac{4}{3}$

練習 36 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=4x+2\int_0^2 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=3x^2+\int_{-1}^1 f(t)\,dt$

(1) $\int_0^2 f(t)\,dt = a \cdots$ ① とおくと

$f(x) = 4x + 2a \cdots$ ②

② より $f(t) = 4t + 2a$

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (4t+2a)\,dt$$
$$= \left[2t^2 + 2at\right]_0^2$$
$$= 8 + 4a \cdots ③$$

①③より $\int_0^2 f(t)\,dt = 8 + 4a = a$

$8 + 4a = a$ より

$a = -\frac{8}{3}$

$a = -\frac{8}{3}$ を ② に代入すると

$f(x) = 4x - \frac{16}{3}$

(2) $\int_{-1}^1 f(t)\,dt = a \cdots$ ① とおくと

$f(x) = 3x^2 + a \cdots$ ②

② より $f(t) = 3t^2 + a$

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 (3t^2 + a)\,dt$$
$$= \left[t^3 + at\right]_{-1}^1$$
$$= 2 + 2a \cdots ③$$

①③より $\int_{-1}^1 f(t)\,dt = 2 + 2a = a$

$2 + 2a = a$ より

$a = -2$

$a = -2$ を ② に代入すると

$f(x) = 3x^2 - 2$

aを定数とするとき，xの関数 $\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は$f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

練習 37 x の関数 $\int_0^x (3t^2-2t-1)\,dt$ の導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (3t^2-2t-1)$$

$$= 3x^2-2x-1$$

練習 38 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2-x-2$$

両辺をxで微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = (x^2-x-2)'$$

$$f(x) = 2x-1$$

また，与えられた等式で $x=a$ とすると左辺は0になるから

$$0 = a^2-a-2$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$a = -1,\ 2$$

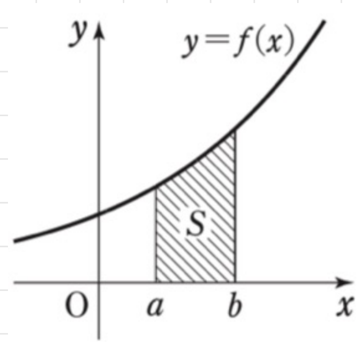
$\therefore\ f(x) = 2x-1,\ a = -1,\ 2$

曲線とx軸の間の面積

定積分と面積(1)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき,
$y=f(x)$のグラフとx軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

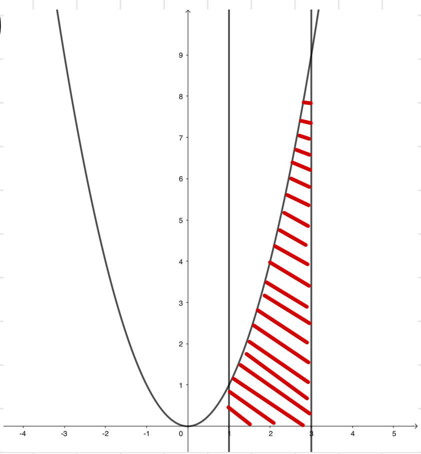


練習 39 次の放物線と2直線およびx軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$, 2直線 $x=1$, $x=3$

(2) 放物線 $y=x^2+2$, 2直線 $x=-1$, $x=2$

(1)



$1 \leqq x \leqq 3$ では $y>0$

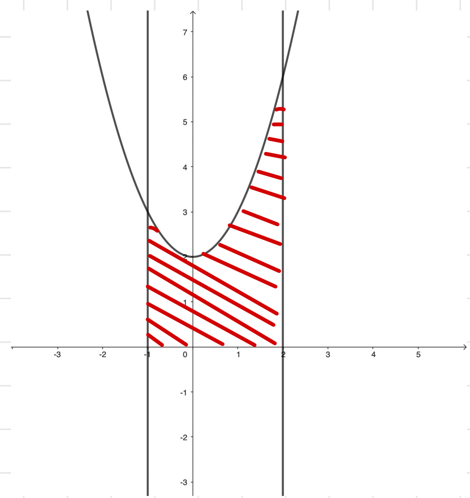
求める面積Sは

$$S=\int_1^3 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$=\frac{26}{3}$$

(2)



$-1 \leqq x \leqq 2$ では $y>0$

求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^2 (x^2+2)\,dx$$

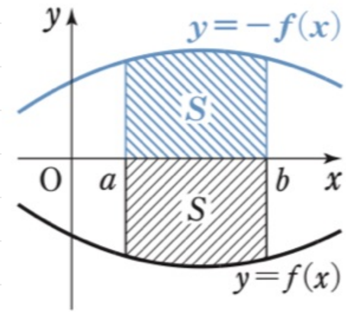
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^2$$

$$=9$$

定積分と面積(2)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき,
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

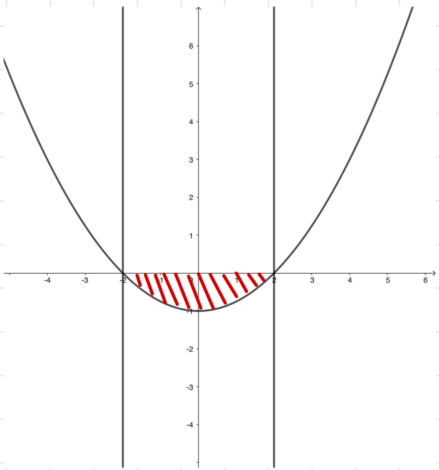
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$



練習 40 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\frac{1}{4}x^2-1$　　(2) $y=x^2-2x$

(1)



$\frac{1}{4}x^2-1=0$ を解いて

$x=\pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ において

$y \leqq 0$ なので

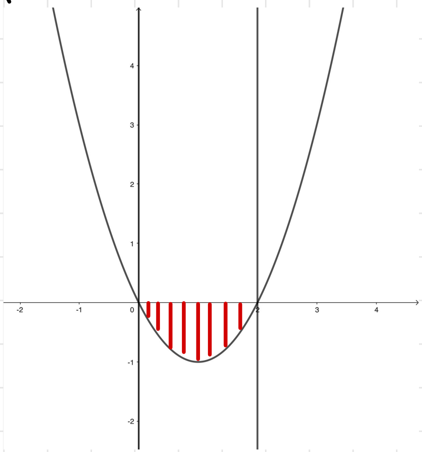
求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{2} -\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}$$

(2)



$x^2-2x=0$ を解いて

$x=0,\ 2$

$0 \leqq x \leqq 2$ において

$y \leqq 0$ なので

求める面積 S は

$$S=\int_0^2 -(x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

$\frac{1}{6}$公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

練習 1 放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$-x^2+6x-7=0$ を解くと

$x=3\pm\sqrt{2}$

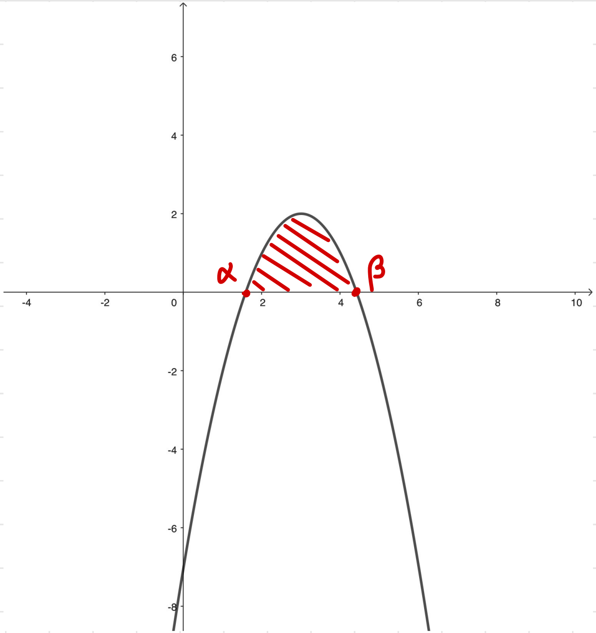
$\alpha=3-\sqrt{2}$, $\beta=3+\sqrt{2}$ とすると

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+6x-7)\,dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-6x+7)\,dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

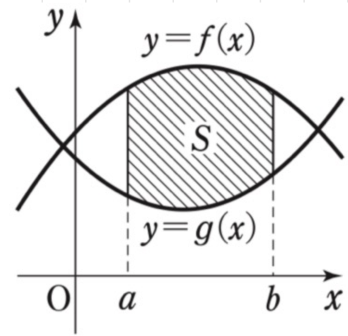
$$=-\frac{(-1)}{6}\left\{(3+\sqrt{2})-(3-\sqrt{2})\right\}^3=\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$



定積分と面積(3)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび2直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

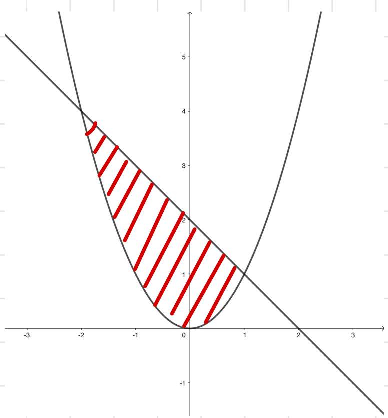
$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$



練習 41 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2$, $y=-x+2$　　(2) $y=-x^2+3$, $y=2x$

(1)



放物線と直線の交点の x 座標は

$x=-2,\ 1$

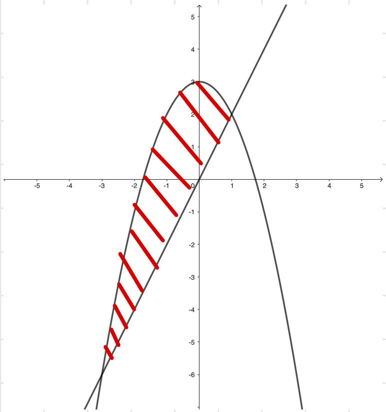
求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x+2)-x^2\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{9}{2}$$

(2)



放物線と直線の交点の x 座標は

$x=-3,\ 1$

求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{1}\{(-x^2+3)-2x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$

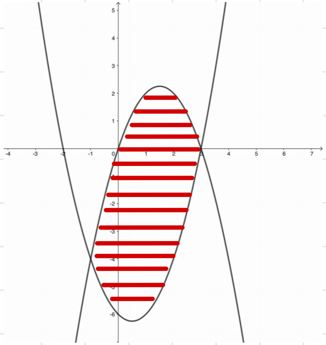
$$=\frac{32}{3}$$

(3) $y=-x^2+3x,\ y=x^2-x-6$

練習 42 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$y=x^3-x^2-2x$$

(3)



2つの放物線の交点のx座標は

$x=-1,\ 3$

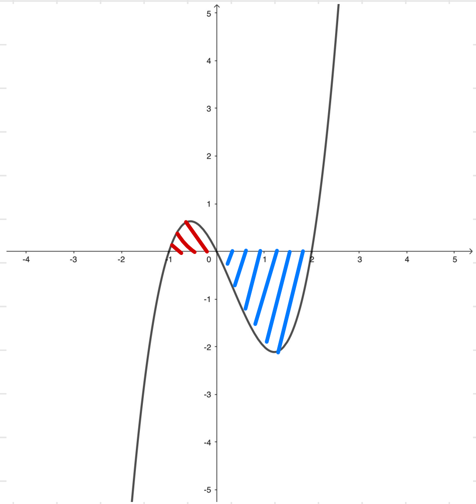
よって求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x)-(x^2-x-6)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{64}{3}$$



$y=x^3-x^2-2x$ と x 軸との交点の x 座標は

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x-2)(x+1)=0$

$x=-1,\ 0,\ 2$

グラフは左図より

$-1\leqq x\leqq 0$ で $y\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 2$ で $y\leqq 0$

よって求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}-(x^3-x^2-2x)\,dx$$

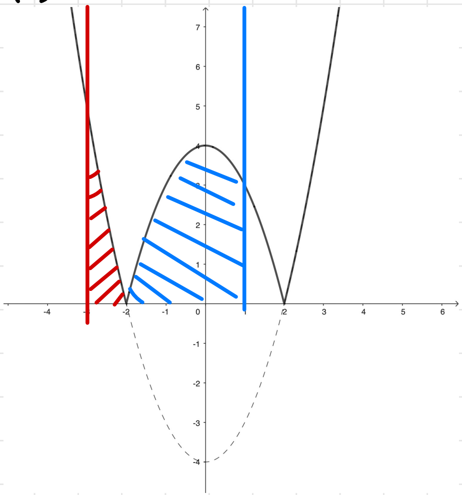
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{37}{12}$$

練習 43 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{1}|x^2-4|dx$ (2) $\int_{-1}^{5}|x(x-3)|dx$

(1)



$y=|x^2-4|$ は

$x \leqq -2,\ x \geqq 2$ のとき

$y=x^2-4$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=-x^2+4$

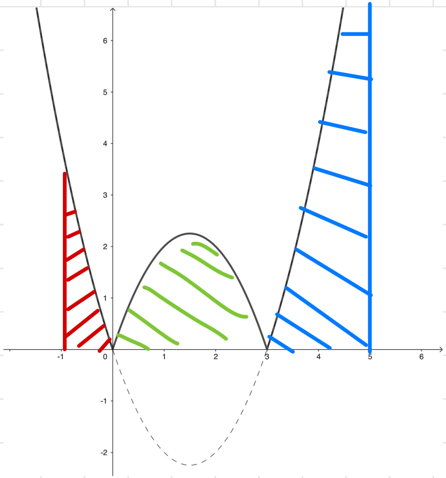
$$\int_{-3}^{1}|x^2-4| = \int_{-3}^{-2}(x^2-4)dx + \int_{-2}^{1}-(x^2-4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{7}{3}+9$$

$$=\frac{34}{3}$$

(2)



$y=|x(x-3)|$ は

$x \leqq 0,\ x \geqq 3$ のとき

$y=x(x-3)$

$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$y=-x(x-3)$

$$\int_{-1}^{5}|x(x-3)|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x(x-3)dx+\int_{0}^{3}-x(x-3)dx+\int_{3}^{5}x(x-3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{5}$$

$$=15$$

練習 1 曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と，その曲線上の点 $(1,\ 0)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$f(x)=x^3+x^2-2x$ とする.

接線の傾きは $f'(x)=3x^2+2x-2$ より $f'(1)=3$

接線の方程式は $y-0=3(x-1)$

$y=3x-3$

$f(x)$ と接線の交点の x 座標は

$x^3+x^2-2x=3x-3$

$x^3+x^2-5x+3=0$

$(x-1)^2(x+3)=0$

$x=1,\ -3$

よって求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$$