

數 II

指數函數-對數函數



指数関数

整数の指数

m, n を正の整数とする。

$$\cdot a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$a \neq 0$ で n は正の整数とすると

$$\cdot a^0 = 1 \quad \cdot (a^{-n}) = \frac{1}{a^n} \quad \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$$

練習

1

次の値を求めよ。

- (1) 4^0 (2) $(-5)^0$ (3) 3^{-1} (4) 10^{-2} (5) $(-2)^{-3}$

$$(1) 4^0 = 1 \quad (2) (-5)^0 = 1 \quad (3) 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad (4) 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad (5) (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$$

指数法則

$a \neq 0, b \neq 0$ 且 m, n は 整数 とする。

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

練習
2

次の式を計算せよ。

(1) $a^5 a^{-2}$

(2) $\frac{a^{-3}}{a^2}$

(3) $(a^{-4})^{-1}$

(4) $(a^{-2}b)^3$

(1) $a^5 a^{-2} = a^3$

(2) $\frac{a^{-3}}{a^2} = a^{-5} \left(= \frac{1}{a^5} \right)$

(3) $(a^{-4})^{-1} = a^4$

(4) $(a^{-2}b)^3 = a^{-6}b^3 \left(= \frac{b^3}{a^6} \right)$

累乗根… a の 2 乗根, 3 乗根, 4 乗根… をまとめたもの

n を 正の整数 とするととき, n 乗すると a になる数を a の n 乗根 といふ。

$x^n = a$ の解が a の n 乗根。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot x^n = a \quad x \text{ は } a \text{ の } n \text{ 乗根} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \text{ (} n \text{ 乗根ルート } a \text{)} \\ \cdot 2^3 = 8 \quad 2 \text{ は } 8 \text{ の } 3 \text{ 乗根} \Rightarrow \sqrt[3]{8} \text{ (} 3 \text{ 乗根ルート } 8 \text{)} \end{array} \right.$$

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$

練習
3

次の値を求めよ。

$$(1) \sqrt[3]{1}$$

$$(2) \sqrt[3]{27}$$

$$(3) \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

$$(1) \sqrt[3]{1} = 1$$

$$(2) \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$(3) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

累乗根の性質

$a > 0, b > 0 \text{ で}, m, n, p \text{ は正の整数とする}.$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

練習
4

次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8} \quad (2) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$(3) (\sqrt[4]{5})^3 \quad (4) \sqrt[3]{\sqrt{27}}$$

$$(1) \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$(3) (\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[2 \times 3]{3^3} = \sqrt{3}$$

有理数の指数

$a > 0$ で m, n は正の整数、 r は正の有理数とする。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{とくに} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

練習

5

次の値を求めよ。

$$(1) 9^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) 16^{\frac{3}{4}}$$

$$(3) 125^{-\frac{2}{3}}$$

$$(1) 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$(2) 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 2^{\frac{3}{4}} = 8$$

$$(3) 125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

指数法則（指数が有理数）

$a > 0, b > 0$ r, s は有理数とする。

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

練習
6

次の式を計算せよ。

$$(1) 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$$

$$(2) 3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(3) \sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5}$$

$$(4) \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$$

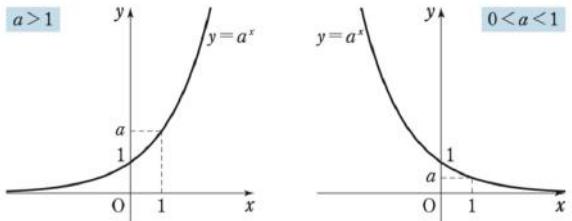
$$(1) 2^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4$$

$$(2) 3^{\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = 3^0 = 1$$

$$(3) 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \div 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}} \\ = 5^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{5}$$

$$(4) \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{4}} \\ = 4^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

指数関数 $y = a^x$ のグラフ



いずれの場合も、 x 軸を漸近線としてもち、点 $(0, 1)$, $(1, a)$ を通る。
 $a > 1$ のとき右上がりの曲線、 $0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である。

指数関数 $y = a^x$ の特徴

① 定義 \pm 或は実数全体

② $a > 1$ のとき増加関数

つまり、 $p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$

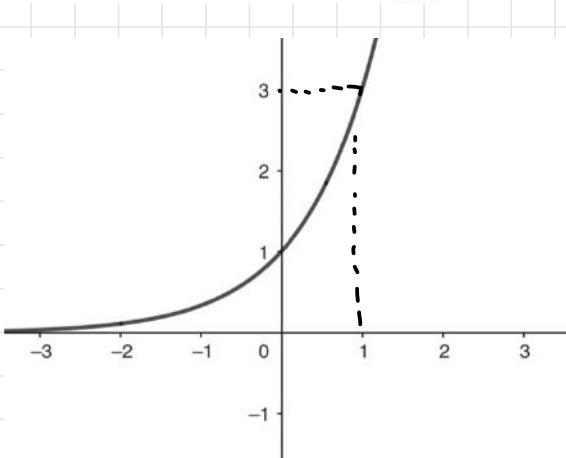
③ $0 < a < 1$ のとき減少関数

つまり、 $p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$

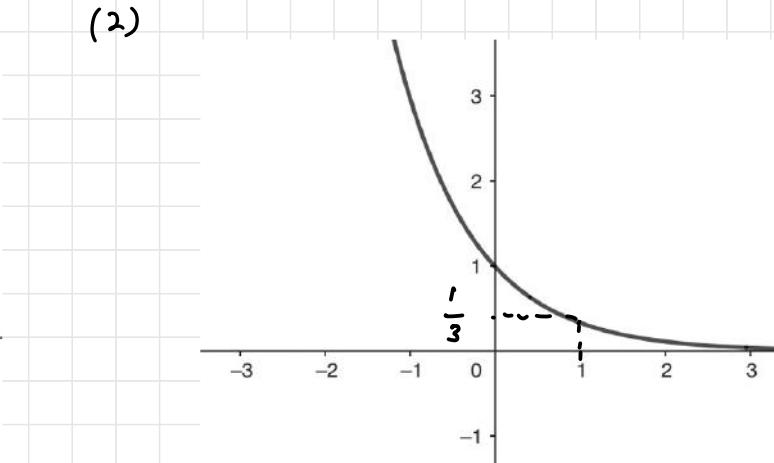
練習
8

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3^x$



(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{8}$$

$$(2) 1, 0.2^3, 0.2^{-1}$$

$$(1) \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{40}{60}}$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{45}{60}}$$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{36}{60}}$$

$$\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}$$

$$(2) 0.2^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$$0.2^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$$0.2^3 < 1 < 0.2^{-1}$$

指数関数を含む方程式・不等式

①両辺の底をそろえる

②両辺の指数部の方程式・不等式に書きかえる.

∴ 2^x < 2³ のとき不等号の向きはそのまま.

0 < a < 1 のとき不等号の向きを逆にする.

$$\left(\begin{array}{l} \text{例) } 2^x < 2^3 \rightarrow x < 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow x > 3 \end{array} \right)$$

③ ②の方程式・不等式を解く.

練習

10

次の方程式を解け。

(1) $4^x = 8$

(2) $8^x = \frac{1}{16}$

(3) $27^x = 3^{2-x}$

(1) $4^x = 8$

(2) $8^x = \frac{1}{16}$

$2^{2x} = 2^3$

$2^{3x} = 2^{-4}$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$

(3) $27^x = 3^{2-x}$

$3^{3x} = 3^{2-x}$

$3x = 2-x$

$4x = 2$

$x = \frac{1}{2}$

練習

11

次の不等式を解け。

(1) $3^x < 81$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32}$

(3) $2^{3x-4} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$

(1) $3^x < 81$

$3^x < 3^4$

$x < 4$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$x \leq 5$

(3) $2^{3x-4} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$2^{3x-4} > 2^{-2x}$

$3x-4 > -2x$

$5x > 4$

$x > \frac{4}{5}$

次の方程式を解け。

$$(1) \quad 4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$(2) \quad 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$(1) \quad (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$2^x = t \text{ とすと } t > 0 \cdots ①$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$t = -3, 1$$

$$\textcircled{1} \text{ で } t = 1$$

$$2^x = t \text{ で } t = 1$$

$$2^x = 1$$

$$x = 0$$

$$(2) \quad (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3^x = t \text{ とすと } t > 0 \cdots ②$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1, 3$$

$$\textcircled{2} \text{ で } t = 1, 3$$

$$3^x = t \text{ で } t = 1, 3$$

$$3^x = 1, \quad 3^x = 3$$

$$x = 0, \quad x = 1$$

$$\begin{array}{r} x = 0, \quad | \\ \hline \end{array}$$

次の不等式を解け。

(1) $9^x + 3^x - 12 > 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0$

(1) $(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

$3^x = t \text{ とすと } t > 0 \dots \textcircled{1}$

$t^2 + t - 12 > 0$

$(t+4)(t-3) > 0$

$t < -4, 3 < t \dots \textcircled{2}$

①②より

$3 < t$

$3^x = t \text{ より}$

$3 < 3^x$

$1 < x$

(2) $\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\}^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \text{ とすと } t > 0 \dots \textcircled{3}$

$t^2 + 3t - 10 \leq 0$

$(t+5)(t-2) \leq 0$

$-5 \leq t \leq 2 \dots \textcircled{4}$

③④より

$0 < t \leq 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \text{ より}$

$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2$

$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x (= \text{ついては})$
 \nexists この実数 x にありて成立。

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2 (= \text{ついては})$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x \geq -1$

$\therefore x \geq -1$

対数関数

対数... どんな正の数 M に対して

$$M = a^P$$

となる実数 P が"ただ" 1つ定まる.

この M を $\log_a M$ で表し a を底とする M の対数という.

また, $\log_a M$ の正の数 M を真数という.

$$\log_a M \quad (a \in \text{底}, M \in \text{真数}, M > 0)$$

指数と対数

$a > 0, a \neq 1$ で $M > 0$ とするととき, 次が成立.

$$M = a^P \Leftrightarrow \log_a M = P$$

次のページで具体例とともに
対数 ($\log_a M$) の意味を確認する.

次の方程式を満たす x の値を求める。

$$\textcircled{1} \quad 2^x = 8 \quad \textcircled{2} \quad 2^x = 3$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = \dots ?$$

$$x = 3$$



↑ 整数値で表せない。

たゞか、 $2^x = 3$ を満たす x は存在するはず...

ここで

$\log_a M$... a を何乗したら M になるかの意。

の記号を用いて

$a^P = M$ を満たす P の値を表す。

(ex) $\log_2 8$... 2を何乗したら 8 になるか. \Rightarrow 3

よって $\log_2 8 = 3$ と書ける。

また、2を3乗したら 8 になるので $\log_2 8 = 3$ は $2^3 = 8$ と書ける。



次の関係を $\log_a M = p$ の形に書け。

$$(1) \quad 9 = 3^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{25} = 5^{-2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$(1) \quad \log_3 9 = 2$$

$$(2) \quad \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

$$(3) \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$$

$$a^P = M \Leftrightarrow P = \log_a M$$

a は底 ($a > 0, a \neq 1$)

M は真数 ($M > 0$)

前回にある $2^x = 3$ は $x = \log_2 3$ とできる。

練習

15

次の関係を $M = a^p$ の形に書け。

$$(1) \log_4 16 = 2 \quad (2) \log_{10} \frac{1}{100} = -2 \quad (3) \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

(1) 4を2乗したら16にならうという意味

$$\rightarrow 4^2 = 16$$

(2) 10を-2乗したら $\frac{1}{100}$ にならうという意味

$$\rightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

(3) 9を $\frac{1}{2}$ 乗したら3にならうという意味

$$\rightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\log_a a^P = P \quad \left(\begin{array}{l} \text{真数が底の} P \text{乗と書けるとき対数の値は} \\ \text{真数の指数の値と一致する。} \end{array} \right)$$

練習
16 次の値を求めよ。

- (1) $\log_2 2^5$ (2) $\log_5 25$ (3) $\log_3 \frac{1}{27}$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
 (5) $\log_{10} 0.1$ (6) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ (7) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ (8) $\log_{\sqrt{5}} 5$

$$(1) \log_2 2^5 = 5$$

$$(2) \log_5 5^2 = 2$$

$$(3) \log_3 3^{-3} = -3$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$$

$$(5) \log_{10} 10^{-1} = -1$$

$$(6) \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$$

$$(7) \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$(8) \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 = 2$$

対数の性質

$$|\log_a| = 0 \text{ (} a \text{ を } 0 \text{ 乗じたら } 1 \text{ になる). } \log_a a = 1 \text{ (} a \text{ を } 1 \text{ 乗じたら } a \text{ になる)}$$

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ のとき

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN \quad \cdots \text{対数の和は真数の積}$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \quad \cdots \text{対数の差は真数の商}$$

$$\log_a M^k = k \log_a M \quad (k \text{ は実数}) \quad \cdots \text{真数の指数は対数の係数}$$

底がどう、ということが必要！ また、(左辺) \Rightarrow (右辺), (右辺) \Rightarrow (左辺) の変形可能

次の式を計算せよ。

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

(2) $\log_5 2 - \log_5 50$

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

(2) $\log_5 2 - \log_5 50$

$= \log_4 16 = \log_4 4^2 = \underline{\underline{2}}$

$= \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = \underline{\underline{-2}}$

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$

$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$

$= \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 2^{\frac{1}{3}}$

$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 8$

$= \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 \sqrt[3]{2}$

$= \log_3 \frac{4 \cdot 18}{8} = \log_3 9$

$= \log_3 \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \log_3 \sqrt[3]{3}$

$= \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$= \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

底の変換公式

a, b, c は正の数で $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ とすると

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{とくに } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

練習
19

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8$

(2) $\log_9 3$

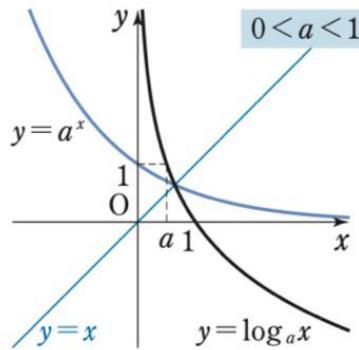
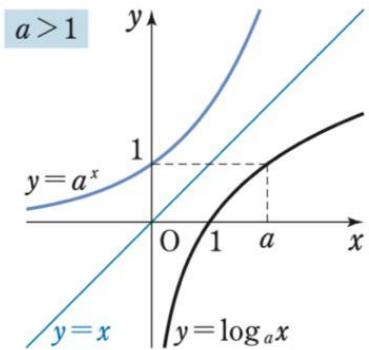
(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

$$\begin{aligned} (1) \log_4 8 &= \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} & (2) \log_9 3 &= \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2} & (3) \log_3 2 \cdot \log_2 27 \\ &&& = \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^3 \\ &&& = \frac{1}{\log_2 3} \cdot 3 \log_2 3 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

a を 1 と異なる正の数とするとき、 $y = \log_a x$ は x の関数を a を底とする対数関数という。

対数関数のグラフ $y = \log_a x$ は指数関数 $y = a^x$ と $y = x$ に似て対称



いずれの場合も、 y 軸を漸近線としてもち、点 $(1, 0)$, $(a, 1)$ を通る。

$a > 1$ のとき右上がりの曲線、 $0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である。

$y = \log_a x$ は $a > 1$ ので、左グラフのような右上がりの曲線

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ は $0 < a < 1$ ので、右グラフのような右下がりの曲線

対数関数の特徴

定義域は正の数全体、値域は実数全体

$a > 1$ のとき増加関数。すなわち $0 < p < q \Rightarrow \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$ のときは減少関数。すなわち $0 < p < q \Rightarrow \log_a p > \log_a q$

練習

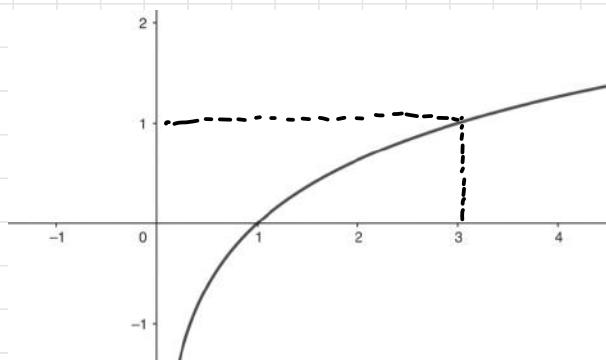
20

次の関数のグラフをかけ。

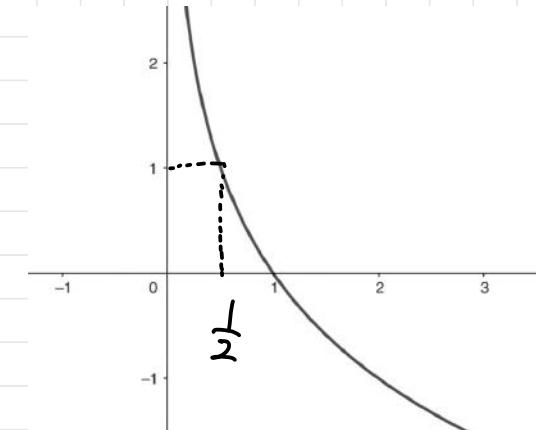
(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

(1)



(2)



次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

- (1) $3 \log_4 3, 2 \log_4 5$ (2) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8, \log_{\frac{1}{4}} 3$ (3) $\log_2 3, 2$

$$(1) 3 \log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$$

$$(3) 2 = \log_2 4$$

$$2 \log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$$

$$\underline{\log_2 3 < 2}$$

$$3 \log_4 3 > 2 \log_4 5$$

————— +

$$(2) \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{9}$$

$$\underline{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} 8 > \log_{\frac{1}{4}} 3}$$

文数関数を含む方程式・不等式

① 真数条件の石窟言^ハ 真数 >0 をますは述べる。

② 方程式・不等式を解く

ここで不等式を解いているとき底 $a > 1$ のとき不等号の向きはそのまま。

$0 < a < 1$ のとき不等号の向きを逆にする。

③ ②で求めた解が ①の条件を満たしているか石窟言^ハ。

練習 22 次の方程式、不等式を解け。

22

$$(1) \log_2 x = 4$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} x = 2$$

$$(3) \log_2 x \leq 4$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} x < 2$$

$$(5) \log_3 x > 2$$

$$(6) \log_{0.5} x \geq 2$$

(1) 対数の定義より

$$x = 2^4 = 16$$

$$x = 16$$

(4) 真数条件より

$$x > 0 \dots ①$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^2$$

$$x > (\frac{1}{2})^2$$

$$x > \frac{1}{4} \dots ②$$

$$\text{①②より } x > \frac{1}{4}$$

(2) 対数の定義より

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

(5) 真数条件より

$$x > 0 \dots ①$$

$$\log_3 x > 2$$

$$\log_3 x > \log_3 3^2$$

$$x > 3^2$$

$$x > 9 \dots ②$$

$$\text{①②より } x > 9$$

(3) 真数条件より

$$x > 0 \dots ①$$

$$\log_2 x \leq 4$$

$$\log_2 x \leq \log_2 2^4$$

$$x \leq 2^4$$

$$x \leq 16 \dots ②$$

$$\text{①②より } 0 < x \leq 16$$

(6) 真数条件より

$$x > 0 \dots ①$$

$$\log_{0.5} x \geq \log(0.5)^2$$

$$x \leq (0.5)^2$$

$$x \leq 0.25 \dots ②$$

$$\text{①②より } 0 < x \leq 0.25$$

次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

(2) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

(1) 真数条件から

 $x > 0$ かつ $x-6 > 0$ なので

$x > 6 \cdots \textcircled{1}$

$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$

$\log_4 x + \log_4(x-6) = \log_4 16$

$\log_4 x(x-6) = \log_4 16$

$x(x-6) = 16$

$x^2 - 6x = 16$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x-8)(x+2) = 0$

$x = 8, -2$

① より

$$\frac{x = 8}{\cancel{+}}$$

(2) 真数条件から

 $x+5 > 0$ かつ $x-2 > 0$ なので

$x > 2 \cdots \textcircled{2}$

$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$

$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = \log_2 8$

$\log_2(x+5)(x-2) = \log_2 8$

$(x+5)(x-2) = 8$

$x^2 + 3x - 10 = 8$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x+6)(x-3) = 0$

$x = -6, 3$

② より

$$\frac{x = 3}{\cancel{+}}$$

次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}x$

(2) $2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

(1) 真数条件から

$3-2x > 0$ かつ $x > 0$ なので

$0 < x < \frac{3}{2} \cdots \textcircled{1}$

$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}x$

$3-2x \geq x$

$3x \leq 3$

$x \leq 1 \cdots \textcircled{2}$

(1)(2) エリ

$$\begin{array}{c} 0 < x \leq 1 \\ \hline + \end{array}$$

(2) 真数条件から

$2-x > 0$ かつ $x+4 > 0$ なので

$-4 < x < 2 \cdots \textcircled{1}$

$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

$(2-x)^2 < x+4$

$x^2 - 4x + 4 < x + 4$

$x^2 - 5x < 0$

$x(x-5) < 0$

$0 < x < 5 \cdots \textcircled{2}$

(1)(2) エリ

$0 < x < 2$

$$\begin{array}{c} \\ + \end{array}$$

$1 \leq x \leq 16$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x^2$ の最大値と最小値を

求めよ。

$$y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x$$

$$\log_2 x = t \text{ とする}$$

$$1 \leq x \leq 16 \Leftrightarrow \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16$$

$$0 \leq t \leq 4 \cdots ①$$

$$y = t^2 - 2t \quad (0 \leq t \leq 4)$$

$$y = (t-1)^2 - 1$$

$$t=1 \text{ のとき 最小値 } -1$$

$$t=4 \text{ のとき 最大値 } 8$$

$$\log_2 x = t+1$$

$$t=1 \text{ のとき}$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x=2$$

$$t=4 \text{ のとき}$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x=16$$

$$x=2 \text{ のとき 最小値 } -1$$

$$x=16 \text{ のとき 最大値 } 8$$

常用対数 ... 底が10の対数

練習

26

常用対数表を用いて、次の値を小数第4位まで求めよ。

(1) $\log_{10} 3450$

(2) $\log_{10} 92000$

(3) $\log_{10} 0.000618$

(1) $\log_{10} 3450$

$$= \log_{10}(3.45 \times 10^3)$$

$$= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^3$$

$$= 0.5378 + 3 = \underline{\underline{3.5378}}$$

(2) $\log_{10} 92000$

$$= \log_{10}(9.20 \times 10^4)$$

$$= \log_{10} 9.20 + \log_{10} 10^4$$

$$= 0.9638 + 4 = \underline{\underline{4.9638}}$$

(3) $\log_{10} 0.000618$

$$= \log_{10}(6.18 \times 10^{-4})$$

$$= \log_{10} 6.18 + \log_{10} 10^{-4}$$

$$= 0.7910 - 4 = \underline{\underline{-3.2090}}$$

常用対数の応用

正の数 N の整数部分の末行数と常用対数 $\log_{10} N$ の値の関係を調べる

(1列)

正の数 N の整数部分が 3 行である. $\Rightarrow 100 \leq N < 1000$

つまり. $10^2 \leq N < 10^3$ を満たす.

常用対数をとると $\log_{10} 10^2 \leq \log_{10} N < \log_{10} 10^3 \Rightarrow 2 \leq N < 3$

練習
27

2^{100} は何桁の数か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

練習
28

3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし、
 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

$$30 \leq 30.10 < 31 \text{ なので}$$

$$30 \leq \log_{10} 2^{100} < 31$$

$$\log_{10} 10^{30} \leq \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$

$$10^{30} \leq 2^{100} < 10^{31}$$

$\therefore 2^{100}$ は 31 桁

3^n が 8 桁の数になるのは

$$10^7 \leq 3^n < 10^8 \text{ なので}$$

$$\log_{10} 10^7 \leq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^8$$

$$7 \leq n \log_{10} 3 < 8$$

$$7 \leq n \times 0.4771 < 8$$

$$\frac{7}{0.4771} \leq n < \frac{8}{0.4771}$$

$$14.67\cdots \leq n < 16.76\cdots$$

∴ $n = 15, 16$

$0 < M < 1$ である小数 M と常用対数 $\log_{10}M$ の値の関係についても調べる。

(例)

M の小数第3位にはじめて 0 でない数字があらわれるとき

$$0.001 \leq M < 0.01$$

つまり、 $10^{-3} \leq M < 10^{-2}$ をみたす。

常用対数をとると

$$\log_{10}10^{-3} \leq \log_{10}M < \log_{10}10^{-2}$$

$$-3 \leq \log_{10}M < -2$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} &= 20 \cdot \log_{10}\frac{1}{2} \\ &= 20 \cdot \log_{10}2^{-1} \\ &= -20\log_{10}2 = -20 \times 0.3010 \\ &= -6.020\end{aligned}$$

$$-7 \leq -6.020 < -6 \text{ より}$$

$$\begin{aligned}-7 \leq \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} &< -6 \\ \log_{10}10^{-7} \leq \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} &< \log_{10}10^{-6}\end{aligned}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したときに初めて 0 でない数字が表れるのは
小数第 7 位。