数学Ⅲ

微分法

関数 $f(x)$ について極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能

この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数（変化率）といい $f'(a)$ で表す.

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

練習 1 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について，$x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ。

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1-(1+h)}{1+h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=-1$$

$$f'(1)=-1$$

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

(この逆は成り立たない)

☆ これを示すには $x=a$ で微分可能なら $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ がいえればよい

練習 2 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

$f(x)=|x^2-1|$ について

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(0)$ なので $f(x)$ は $x=1$ で連続.

また，$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{|(1+h)^2-1|-|1^2-1|}{h}=\dfrac{|h^2+2h|}{h}$

$\lim_{h\to +0}\dfrac{|h^2+2h|}{h}=2$，$\lim_{h\to -0}\dfrac{|h^2+2h|}{h}=-2$ なので $h\to 0$ のとき極限はない.

よって関数 $f(x)=|x^2-1|$ は微分可能ではない

・導関数… 関数 $f(x)$ がある区間で微分可能であるとき，その区間の各値 a に対して
微分係数 $f'(a)$ を対応させることで得られる関数

$f(x)$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

練習 3 導関数の定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$ (2) $f(x)=\sqrt{x}$

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x}{2x(x+h)}-\frac{x+h}{2x(x+h)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-h}{2x(x+h)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2x(x+h)}=-\frac{1}{2x^2}$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　ただし，k は定数

2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

積の導関数

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

4　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

【4の証明】 $\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

よって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　終

練習 4 公式**4**の証明にならって，公式**2**を証明せよ。

$$\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

練習 5 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^5+2x^4$ (2) $y=3x^6-4x^3$

(3) $y=(x+1)(x^3-4x)$ (4) $y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$

(1) $y'=5x^4+8x^3$

(2) $y'=18x^5-12x^2$

(3) $y'=(x+1)'(x^3-4x)+(x+1)(x^3-4x)'$

$=x^3-4x+(x+1)(3x^2-4)$

$=x^3-4x+3x^3-4x+3x^2-4$

$=4x^3+3x^2-8x-4$

(4) $y'=(3x^2-2)'(x^2+x+1)+(3x^2-2)(x^2+x+1)'$

$=6x(x^2+x+1)+(3x^2-2)(2x+1)$

$=6x^3+6x^2+6x+6x^3+3x^2-4x-2$

$=12x^3+9x^2+2x-2$

商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

5 $\quad \left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

6 $\quad \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

練習 **6** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ と 74 ページの公式 **4**，上の公式 **5** を用いて，公式 **6** を証明せよ。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}' = \{f(x)\}'\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$= f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right]$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)}{\{g(x)\}^2} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

練習 7

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x-3}$　　(2) $y=\dfrac{x}{x^2-2}$　　(3) $y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

(1) $y'=\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{x'(x^2-2)-x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}=\dfrac{(x^2-2)-x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\dfrac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(2x-1)'(x^2+1)-(2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

x^n の導関数

n が整数のとき　　$(x^n)' = nx^{n-1}$

練習 8 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \dfrac{1}{x}$　　(2) $y = -\dfrac{4}{x^2}$　　(3) $y = \dfrac{1}{3x^3}$

(1) $y = x^{-1}$

$y' = -1 \cdot x^{-2}$

$y' = -\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y = -4 \cdot x^{-2}$

$y' = -4 \cdot (-2) \cdot x^{-3}$

$y' = 8x^{-3}$

$y' = \dfrac{8}{x^3}$

(3) $y = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-3}$

$y' = \dfrac{1}{3} \cdot (-3) \cdot x^{-4}$

$y' = -\dfrac{1}{x^4}$

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，$u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする。このとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ は y の式を x で微分するという意味．

$\frac{d}{dx}y$ とも表す.

(例) $y=x^2+2x$ について $\frac{dy}{dx}=2x+2$

練習 9 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)^4$　　(2) $y=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$

(1) $u=3x+1$ とすると $y=u^4$

$\frac{dy}{du}=4u^3$, $\frac{du}{dx}=3$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot 3=12u^3$

$u=3x+1$ なので

$\frac{dy}{dx}=12(3x+1)^3$

(2) $u=4x+3$ とすると $y=\frac{1}{u^2}$

$\frac{dy}{du}=-\frac{2u}{u^4}=-\frac{2}{u^3}$, $\frac{du}{dx}=4$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{2}{u^3}\cdot 4=-\frac{8}{u^3}$

$u=4x+3$ なので

$\frac{dy}{dx}=-\frac{8}{(4x+3)^3}$

練習 10

関数 $f(x)$, $g(x)$ とその導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ について，次のことを示せ。ただし，a, b は定数，n は整数とする。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$ (2) $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

(1) $u=ax+b$ とすると $f(ax+b)=f(u)$

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$\dfrac{d}{du}f(u)=f'(u)$, $\dfrac{du}{dx}=a$ なので

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(u)$$

ここで $u=ax+b$ なので

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$$

(2) $u=g(x)$ とすると $\{g(x)\}^n=u^n$

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^n=\frac{d}{du}u^n\cdot\frac{du}{dx}$$

$\dfrac{d}{du}u^n=nu^{n-1}$, $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\cdot u^{n-1}\cdot g'(x)$$

ここで $u=g(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\{g(x)\}^{n-1}\cdot g'(x)$$

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

練習 11 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^4$ (2) $y=(1-2x^2)^3$ (3) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

(1)

$$y' = 4(2x^2+5)^3\cdot(2x^2+5)'$$
$$= 4(2x^2+5)^3\cdot 4x$$
$$= 16x(2x^2+5)^3$$

(2)

$$y' = 3(1-2x^2)^2\cdot(1-2x^2)'$$
$$= 3(1-2x^2)^2\cdot(-4x)$$
$$= -12x(1-2x^2)^2$$

(3)

$$y = (x^2+1)^{-3}$$
$$y' = -3(x^2+1)^{-4}\cdot(x^2+1)'$$
$$= -3(x^2+1)^{-4}\cdot 2x$$
$$= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

練習 12 逆関数の微分法を用いて，関数 $y = \sqrt[6]{x}$ を微分せよ。

$y = \sqrt[6]{x}$ は $x = y^6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y^5} = \frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

x^p の導関数

p が有理数のとき　　$(x^p)' = px^{p-1}$

練習 13 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt{x}$　　(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$　　(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(1)

$y = x^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)

$y = x^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(3)

$y = x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

練習 14 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(1)

$y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

(2)

$y = (4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2)'$

$= \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$= -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

練習 15 関数 $\cos x$ の導関数が，次のようになることを示せ。

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)\cos x - \sin x \sin h}{h}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)\cos x}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \sin x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

練習 16 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos 2x$　(2) $y=\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $y=\sin^2 x$　(4) $y=\tan^2 x$

(5) $y=\dfrac{1}{\sin x}$　(6) $y=\cos^2 3x$

(1) $y'=(-\sin 2x)\cdot(2x)'=-2\sin 2x$

(2) $y'=\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)'=3\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

(4) $y'=2\tan x\cdot(\tan x)'=\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

(5) $y'=-\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(6) $y'=2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'\cdot(3x)'=-6\sin 3x\cos 3x$

$=-3\sin 6x$

練習 17 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\sin x+\cos x$　(2) $y=x\cos x-\sin x$

(1) $y'=x'\sin x+x(\sin x)'+(\cos x)'$

$=\sin x+x\cos x-\sin x$

$=x\cos x$

(2) $y'=x'\cos x+x(\cos x)'-(\sin x)'$

$=\cos x-x\sin x-\cos x$

$=-x\sin x$

対数関数の導関数

1 $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ 2 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

$$\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

自然対数 … e (=2.71828182845…) を底とする対数. 自然対数 $\log_e x$ は $\log x$ と表記する (底の e は省略)

練習 18 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log 3x$ (2) $y = \log_2(4x-1)$

(3) $y = \log(x^2+1)$ (4) $y = x\log x - x$

(1) $y' = \dfrac{(3x)'}{3x} = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$

(2) $y' = \dfrac{(4x-1)'}{(4x-1)\log 2} = \dfrac{4}{(4x-1)\log 2}$

(3) $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(4) $y' = x'\log x + x(\log x)' - x'$

$= \log x$

絶対値を含む対数関数の導関数

3 $(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$　　**4** $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$$\boxed{\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

練習 19 $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$ であることを示せ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$x>0$ のとき

$$(\log_a|x|)'=\frac{(x)'}{x\log a}=\frac{1}{x\log a}$$

$x<0$ のとき

$$(\log_a|x|)'=\frac{(-x)'}{-x\log a}=\frac{1}{x\log a}$$

よって $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

練習 20 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|3x+2|$　(2) $y=\log|\sin x|$　(3) $y=\log_2|x^2-4|$

(1)
$$y'=\frac{(3x+2)'}{3x+2}=\frac{3}{3x+2}$$

(2)
$$y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

(3)
$$y'=\frac{(x^2-4)'}{(x^2-4)\log 2}=\frac{2x}{(x^2-4)\log 2}$$

練習 21 $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

(1)

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log\left|\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}\right|$$

$$\log|y|=\log|(x+1)^3|-\log|x-1|-\log|(x+2)^2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$y'=\frac{-6}{(x+1)(x-1)(x+2)}\times\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$y'=\frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^2(x+2)^3}$$

(2)

両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log\left|\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\right|$$

$$\log|y|=\log|\sqrt{x+2}|-\log|x+1|$$

$$\log|y|=\frac{1}{2}\log|x+2|-\log|x+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-(x+3)}{2(x+1)(x+2)}$$

$$y'=\frac{-(x+3)}{2(x+1)(x+2)}\times\frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)}$$

$$y'=\frac{-(x+3)\sqrt{x+2}}{2(x+1)^2(x+2)}=\frac{-(x+3)}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$$

x^α の導関数

α が実数のとき　　　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

練習 22　上の公式を証明せよ。

$x^\alpha > 0$ より $y = x^\alpha$ について両辺に自然対数をとると

$$\log y = \log x^\alpha$$

$$\log y = \alpha \log x$$

両辺 x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^\alpha$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

指数関数の導関数

1 $(e^x)' = e^x$　　**2** $(a^x)' = a^x \log a$

練習 23 次の関数を微分せよ。ただし，(6)の a は 1 でない正の定数とする。

(1) $y = e^{2x}$　(2) $y = e^{-x^2}$　(3) $y = 3^x$

(4) $y = 2^{-3x}$　(5) $y = xe^x$　(6) $y = (2x-1)a^x$

(1) $y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$

(2) $y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$

(3) $y' = 3^x \log 3$

(4) $y' = 2^{-3x} \log 2 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 2^{-3x} \log 2$

(5) $y' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

(6) $y' = (2x-1)'a^x + (2x-1) \cdot (a^x)' = 2a^x + (2x-1)a^x \log a = a^x \{2 + (2x-1)\log a\}$

・第 n 次導関数 … 関数 $y=f(x)$ を n 回微分して得られる導関数．$y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ と表す.

練習 24 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ。

(1) $y=x^3-2x+5$　(2) $y=\dfrac{1}{x}$　(3) $y=\cos x$

(4) $y=\log x$　(5) $y=e^x$　(6) $y=e^{-2x}$

(1) $y'=3x^2-2$

$y''=6x$

$y'''=6$

(2) $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$y''=\dfrac{2}{x^3}$

$y'''=-\dfrac{6}{x^4}$

(3) $y'=-\sin x$

$y''=-\cos x$

$y'''=\sin x$

(4) $y'=\dfrac{1}{x}$

$y''=-\dfrac{1}{x^2}$

$y'''=\dfrac{2}{x^3}$

(5) $y'=e^x$

$y''=e^x$

$y'''=e^x$

(6) $y'=-2e^{-2x}$

$y''=4e^{-2x}$

$y'''=-8e^{-2x}$

第n次導関数

・第2次導関数 … 関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が x の関数で微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数

y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などで表す.

・第3次導関数 … $f''(x)$ がさらに微分可能であるとき $f''(x)$ を微分して得られる導関数

y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ などで表す.

・第n次導関数 … 関数 $y=f(x)$ を n 回 微分して得られる導関数　$y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などで表す.

練習 25 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=x^n$　　(2) $y=e^{2x}$

(1) $y'=nx^{n-1}$

$y''=n(n-1)x^{n-2}$

$\vdots$

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}x^{n-n}=n(n-1)(n-2)\cdots1=n!$

(2) $y'=2e^{2x}$

$y''=4e^{2x}$

$\vdots$

$y^{(n)}=2^ne^{2x}$

練習 26 放物線 $y^2=-8x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式を y について解け。

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{y}$ であることを示せ。

(1) $y=\pm\sqrt{-8x}$

(2) $y=\sqrt{-8x}$ のとき両辺をxで微分すると

$$y'=\frac{1}{2}(-8x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-8x)'=-\frac{4}{\sqrt{-8x}}=-\frac{4}{y}$$

$y=-\sqrt{-8x}$ のとき両辺をxで微分すると

$$y'=\frac{1}{2}\left\{-(-8x)^{\frac{1}{2}-1}\right\}\cdot(-8x)'=\frac{-4}{-\sqrt{-8x}}=-\frac{4}{y}$$

よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{y}$

練習 27 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$　　(2) $x^2-y^2=1$

(1) 両辺をxで微分すると

$$2x+\frac{dy}{dx}y^2=0$$

$$2x+\frac{d}{dy}y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

(2) 両辺をxで微分すると

$$2x-\frac{dy}{dx}y^2=0$$

$$2x-\frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$-2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

☆媒介変数表示(パラメータ)… 曲線上の点$P(x, y)$の座標が変数tによって、$x=f(t)$　$y=g(t)$ の形で表すこと

媒介変数表示と導関数

$x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

練習 28 x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=2t^2$, $y=2t-1$　　(2) $x=\cos t$, $y=\sin t$

(1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$\dfrac{dy}{dt}=2$, $\dfrac{dx}{dt}=4t$ なので

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{4t}=\frac{1}{2t}$$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$ なので

$$\frac{dy}{dx}=\cos t\cdot\frac{1}{-\sin t}=-\frac{1}{\tan t}$$