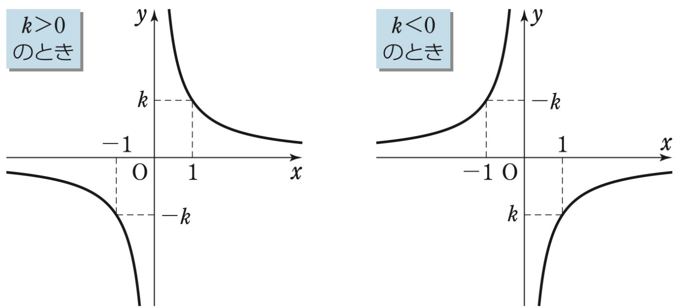
数Ⅲ

関数

・分数関数 … xの分数式で表される関数. 定義域は分母を0にするx以外の実数全体

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0)$$ x軸とy軸は漸近線

定義域は$x \neq 0$, 値域は$y \neq 0$

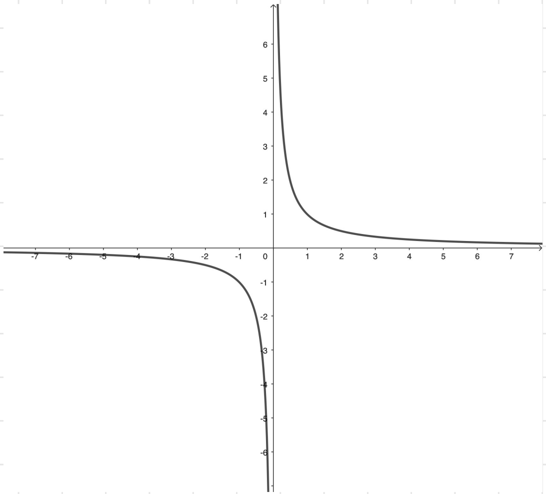


〈補足〉 上のグラフは原点Oに関して対称であり, x軸, y軸は漸近線である。このように直交する2つの漸近線をもつ双曲線を **直角双曲線** という。

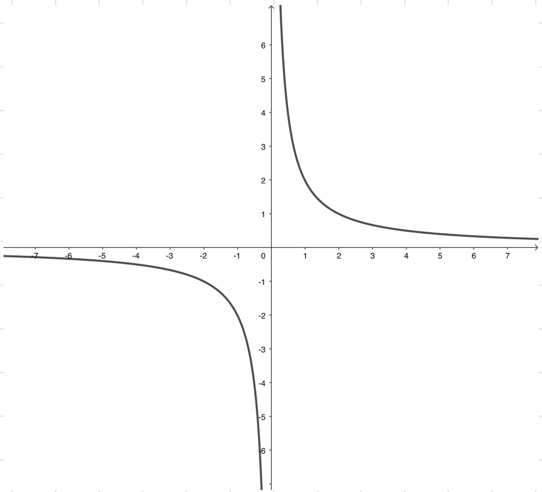
練習 1　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{2}{x}$　　(3)　$y=-\dfrac{3}{x}$

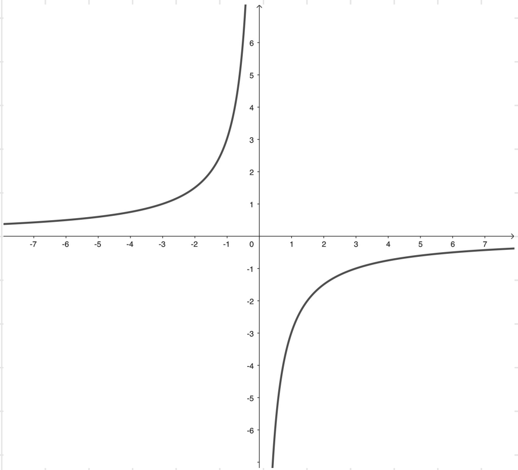
(1)



(2)



(3)



分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$

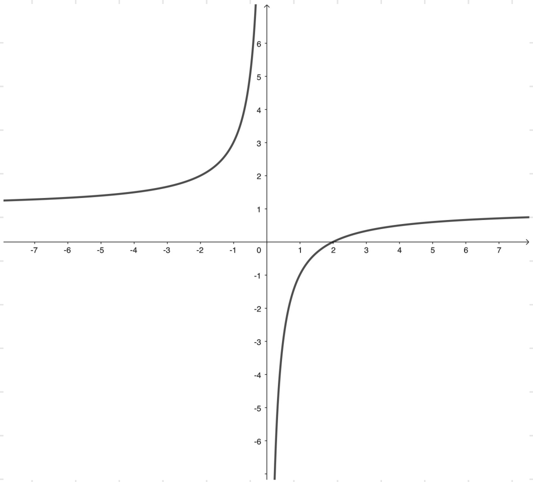
1 グラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線で，漸近線は 2 直線 $x=p$，$y=q$ である。

2 定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$ である。

練習 2 次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

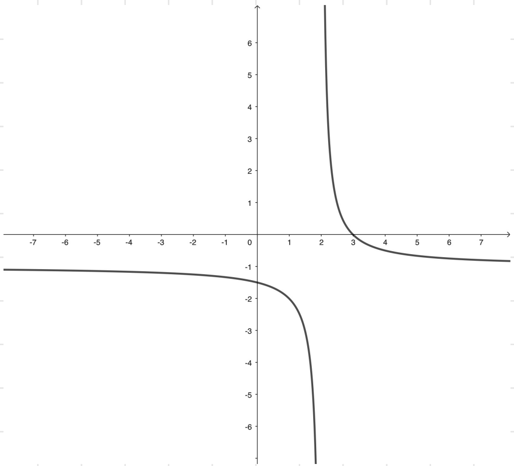
(1) $y=-\dfrac{2}{x}+1$ (2) $y=\dfrac{1}{x-2}-1$ (3) $y=\dfrac{2}{x+1}-3$

(1)



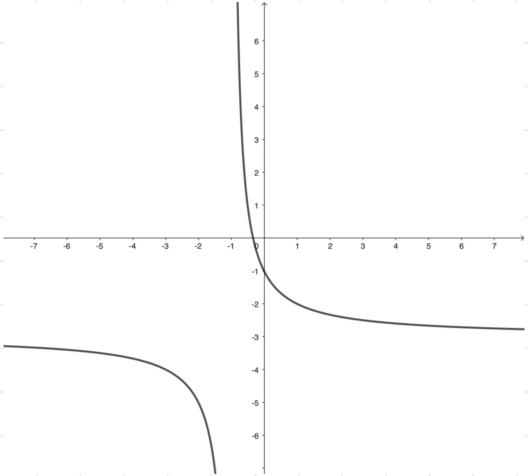
定義域 $x \neq 0$ 値域 $y \neq 1$

(2)



定義域 $x \neq 2$ 値域 $y \neq -1$

(3)



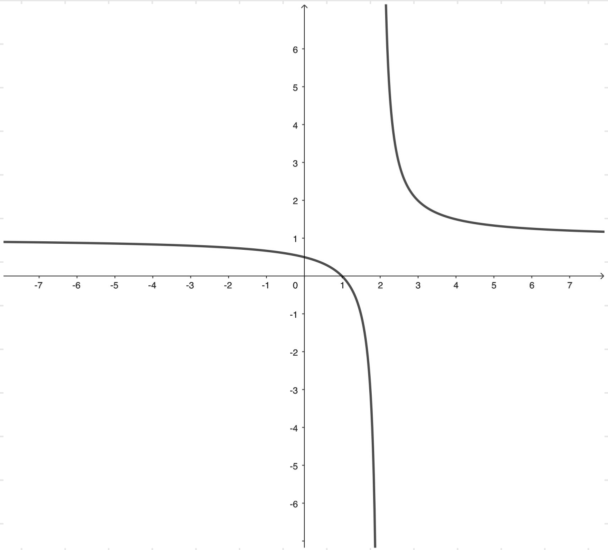
定義域 $x \neq -1$ 値域 $y \neq -3$

練習 3 次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ (2) $y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$ (3) $y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$

(1)

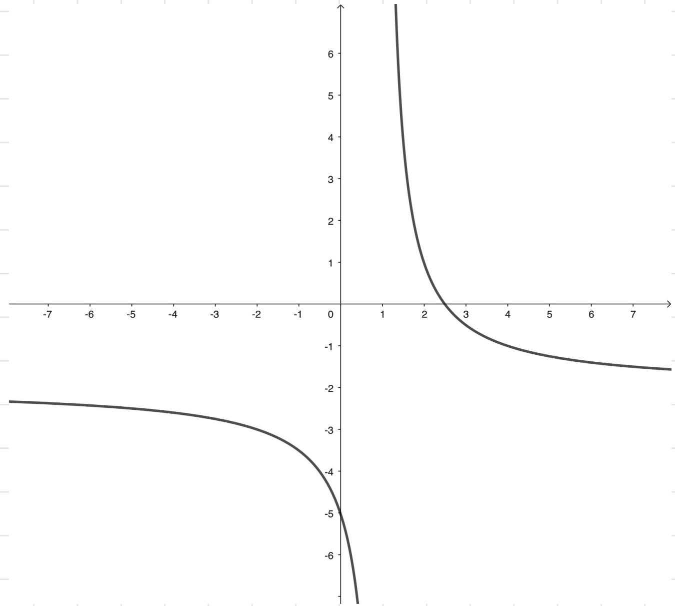
$$y=\frac{(x-2)+1}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1$$



定義域 $x \neq 2$ 値域 $y \neq 1$

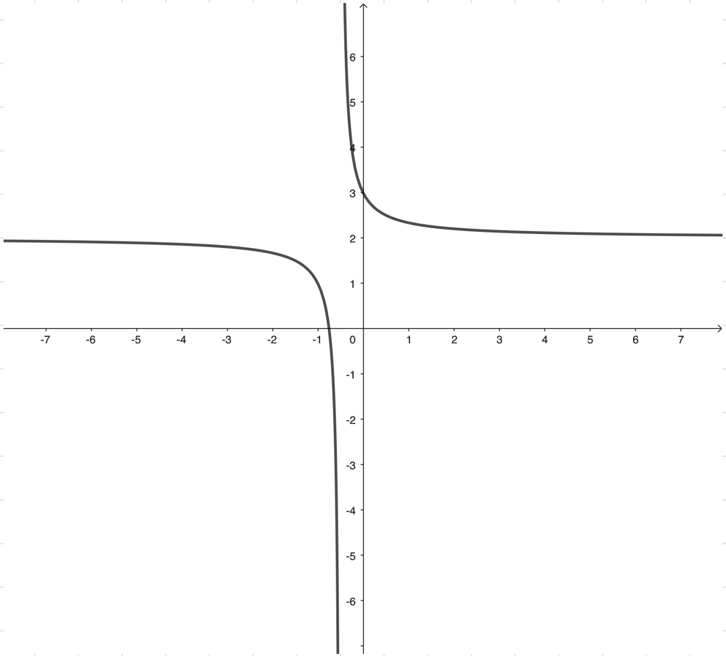
(2)

$$y=\frac{-2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}-2$$



定義域 $x \neq 1$ 値域 $y \neq -2$

(3) $y=\dfrac{2(2x+1)+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2x+1}+2$



定義域 $x \neq -\dfrac{1}{2}$ 値域 $y \neq 2$

練習 4 関数 $y=\frac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x-1$ (2) $y=\frac{1}{2}x$ (3) $y=-3$

(1) $x-1=\frac{3}{x+1}$

$(x+1)(x-1)=3$

$x^2-1=3$

$x^2-1-3=0$

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=-2,\ 2$

$x=-2$ のとき $y=x-1$ より

$y=-2-1=-3$

$x=2$ のとき $y=x-1$ より

$y=2-1=1$

よって $(-2,-3),\ (2,1)$

(2) $\frac{1}{2}x=\frac{3}{x+1}$

$x(x+1)=6$

$x^2+x=6$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3,\ 2$

$x=-3$ のとき $y=\frac{1}{2}x$ より

$y=\frac{1}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}$

$x=2$ のとき $y=\frac{1}{2}x$ より

$y=\frac{1}{2}\times2=1$

よって $\left(-3,-\frac{3}{2}\right),\ (2,1)$

(3) $-3=\frac{3}{x+1}$

$-3(x+1)=3$

$-(x+1)=1$

$-x-1=1$

$-x=1+1$

$-x=2$

$x=-2$

よって $(-2,-3)$

練習 5

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{x+2}=x+3$　　(2) $\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$

(1)

$$\frac{2}{x+2}=x+3$$

$$2=(x+3)(x+2)$$

$$2=x^2+5x+6$$

$$x^2+5x+6=2$$

$$x^2+5x+6-2=0$$

$$x^2+5x+4=0$$

$$(x+4)(x+1)=0$$

$$\underline{x=-4,\ -1}$$

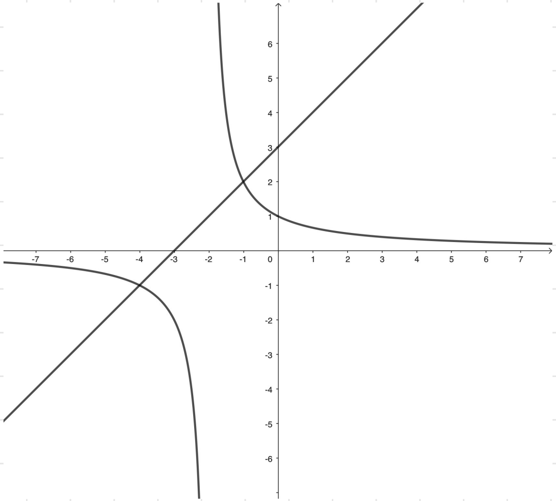
(2)

$\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$ の解は

関数 $y=\dfrac{2}{x+2}$ のグラフが直線 $y=x+3$ との交点を含めて下側にある範囲

また，$y=\dfrac{2}{x+2}$ の定義域は $x\neq -2$

グラフは下図



左図より求める解は

$$\underline{-4\leqq x<-2,\ x\geqq -1}$$

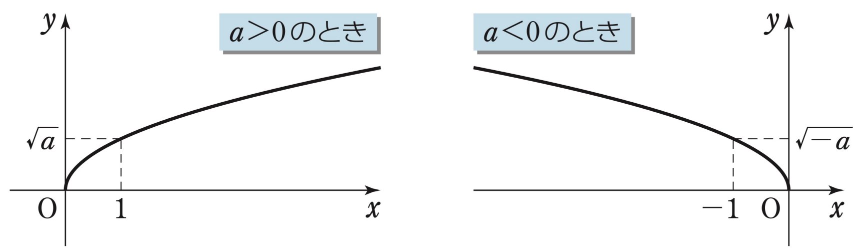
・無理関数…xについての無理式で表された関数

定義域は$\sqrt{\ }$の中が0以上となる実数xの全体

無理式…$\sqrt{\ }$の中に文字を含む式

無理関数 $y=\sqrt{ax}$ については，次のことがいえる。

$a>0$ のとき	$a<0$ のとき
定義域は　$x \geqq 0$,	定義域は　$x \leqq 0$,
値域は　$y \geqq 0$ で,	値域は　$y \geqq 0$ で,
増加関数である。	減少関数である。

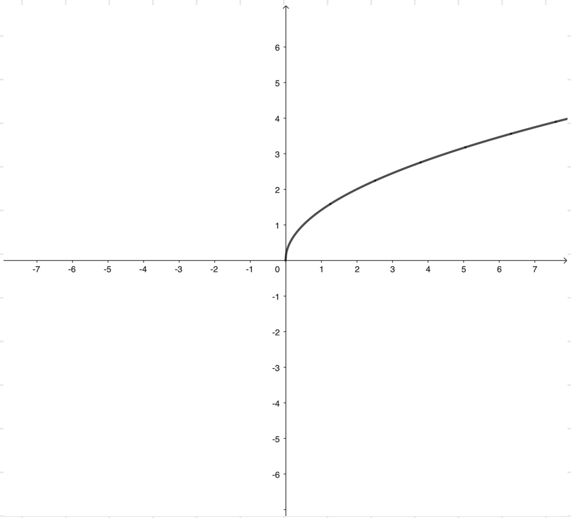


また，$y=-\sqrt{ax}$ のグラフは $y=\sqrt{ax}$ と x軸に関して対称

練習 6 次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{2x}$　　(2)　$y=-\sqrt{2x}$　　(3)　$y=\sqrt{-2x}$

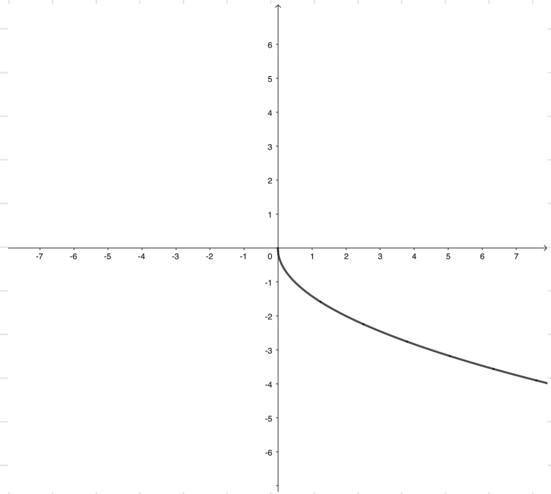
(1)



定義域　$x \geqq 0$

値域　$y \geqq 0$

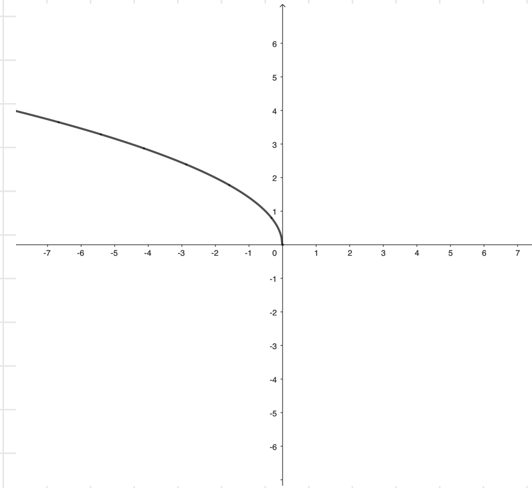
(2)



定義域　$x \geqq 0$

値域　$y \leqq 0$

(3)



定義域　$x \leqq 0$

値域　$y \geqq 0$

無理関数 $y=\sqrt{a(x-p)}$

1 グラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

x 軸方向に p だけ平行移動

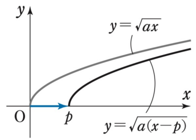
した曲線である。

2 $a>0$ のとき

定義域は $x \geqq p$，値域は $y \geqq 0$

$a<0$ のとき

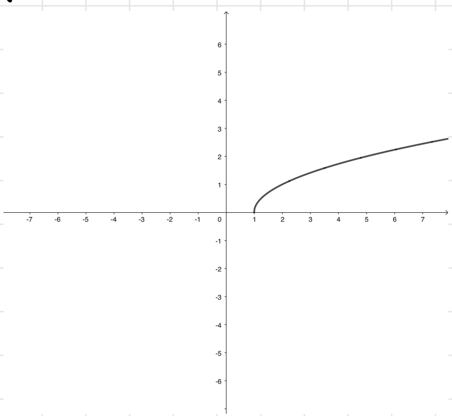
定義域は $x \leqq p$，値域は $y \geqq 0$



練習 7 次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x-1}$　　(2)　$y=\sqrt{-2x+4}$　　(3)　$y=-\sqrt{3x+3}$

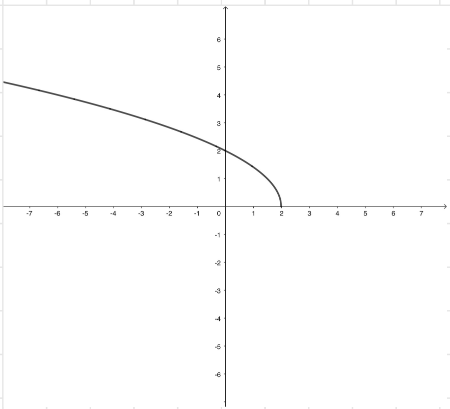
(1)



定義域　$x \geqq 1$

値域　$y \geqq 0$

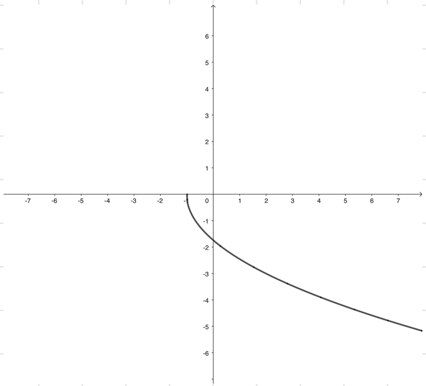
(2)



定義域　$x \leqq 2$

値域　$y \geqq 0$

(3)



定義域　$x \geqq -1$

値域　$y \leqq 0$

練習 8 次の 2 つの関数について，グラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+2}$，$y=x-3$　　(2) $y=-\sqrt{x+1}$，$y=x-1$

(1)

$y=\sqrt{2x+2}$ の定義域は $x \geqq -1$

値域は $y \geqq 0$

$\sqrt{2x+2}=x-3$

$(\sqrt{2x+2})^2=(x-3)^2$

$(x-3)^2=(\sqrt{2x+2})^2$

$x^2-6x+9=2x+2$

$x^2-6x+9-2x-2=0$

$x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$

$x=1, 7$

$x=7$ のとき $y=x-3$ より

$y=7-3=4$

$x=1$ のとき $y=x-3$ より

$y=1-3=-2$

これは $y \geqq 0$ より不適

よって $(7, 4)$

(2)

$y=-\sqrt{x+1}$ より定義域は $x \geqq -1$

値域は $y \leqq 0$

$-\sqrt{x+1}=x-1$

$(-\sqrt{x+1})^2=(x-1)^2$

$(x-1)^2=(-\sqrt{x+1})^2$

$x^2-2x+1=x+1$

$x^2-2x+1-x-1=0$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0, 3$

$x=0$ のとき $y=x-1$ より

$y=0-1=-1$

$x=3$ のとき $y=x-1$ より

$y=3-1=2$

これは $y \leqq 0$ より不適

よって $(0, -1)$

練習 9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{x-1}=-x+3$　　(2) $\sqrt{x-1}\leqq -x+3$

(1)

$$(\sqrt{x-1})^2=(-x+3)^2$$

$$(-x+3)^2=(\sqrt{x-1})^2$$

$$x^2-6x+9=x-1$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

$$x=2,\ 5$$

これらのうち方程式をみたすのは

$$\underline{x=2}$$

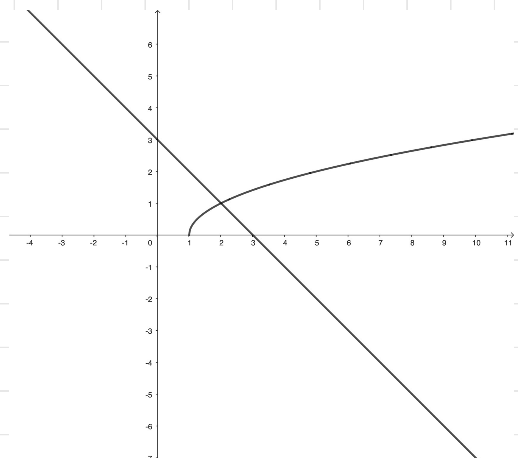
(2)

$\sqrt{x-1}\leqq -x+3$ の解は

関数 $y=\sqrt{x-1}$ のグラフが直線 $y=-x+3$ との交点を含めて下側にある範囲

また, $y=\sqrt{x-1}$ の定義域は $x\geqq 1$

グラフは下図



左図より求める解は

$$\underline{1\leqq x\leqq 2}$$

・逆関数…$y=f(x)$ が y の値を1つ定めると x の値がただ1つ定まる関数であるとき
このの $y=f(x)$ を x について解いた式の x と y を入れかえてできる $y=g(x)$ のこと。$f^{-1}(x)$ と表す。
$f(x)$ が増加関数または減少関数であるとき $f(x)$ の逆関数が存在する。

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1　$y=f(x)$ を x について解き，$x=g(y)$ の形にする。
2　x と y を入れかえて，$y=g(x)$ とする。
逆関数 $g(x)$ の定義域は，もとの関数 $f(x)$ の値域と同じ。

関数 $y=\sqrt{x}$ では，定義域 $x\geqq 0$ の表示は省略することが多い。

関数 $y=\log_2 x$ では，定義域 $x>0$ の表示は省略することが多い。

練習 10　次の関数の逆関数を求めよ。
(1)　$y=3x-1$　$(0\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=-\sqrt{x}$
(3)　$y=3^x$　　(4)　$y=\log_4 x$

(1)
$0\leqq x\leqq 2$ より値域は $-1\leqq y\leqq 5$
$y=3x-1$
$3x=y+1$
$x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$
よって逆関数は
$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　$(-1\leqq x\leqq 5)$

(2)
値域は $y\leqq 0$
$y=-\sqrt{x}$
$y^2=(-\sqrt{x})^2$
$y^2=x$
$x=y^2$
よって逆関数は
$y=x^2$ $(x\leqq 0)$

(3)
値域は $y>0$
$y=3^x$
$\log_3 y=\log_3 3^x$
$\log_3 y=x$
$x=\log_3 y$
よって逆関数は
$y=\log_3 x$ $(x>0)$

(4)
値域は実数全体
$y=\log_4 x$
$x=4^y$
よって逆関数は
$y=4^x$

練習 11 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=\frac{2x+3}{x-1}$　　(2) $y=\frac{-x+2}{x+3}$

(1)

$$y=\frac{2(x-1)+5}{x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$$

$$=2+\frac{5}{x-1}$$

$$=\frac{5}{x-1}+2$$

値域は $y \neq 2$

また、$y=\frac{2x+3}{x-1}$

$$(x-1)y=2x+3$$

$$xy-y=2x+3$$

$$xy-2x=y+3$$

$$(y-2)x=y+3$$

$$x=\frac{y+3}{y-2}$$

よって逆関数は

$$y=\frac{x+3}{x-2}\quad(x \neq 2)$$

(2)

$$y=\frac{-(x+3)+5}{x+3}$$

$$=\frac{-(x+3)}{x+3}+\frac{5}{x+3}$$

$$=-1+\frac{5}{x+3}$$

$$=\frac{5}{x+3}-1$$

値域は $y \neq -1$

また、$y=\frac{-x+2}{x+3}$

$$(x+3)y=-x+2$$

$$xy+3y=-x+2$$

$$xy+x=-3y+2$$

$$(y+1)x=-3y+2$$

$$x=\frac{-3y+2}{y+1}$$

よって逆関数は

$$y=\frac{-3x+2}{x+1}\quad(x \neq -1)$$

練習 12 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=x^2+2 \quad (x \geqq 0)$ (2) $y=-x^2 \quad (x \leqq 0)$

(1)

値域は $y \geqq 2$

また, $y=x^2+2$

$x^2=y-2$

$x=\pm\sqrt{y-2}$

$x \geqq 0$ より

$x=\sqrt{y-2}$

よって逆関数は

$y=\sqrt{x-2} \quad (x \geqq 2)$

(2)

値域は $y \leqq 0$

また, $y=-x^2$

$x^2=-y$

$x=\pm\sqrt{-y}$

$x \leqq 0$ より

$x=-\sqrt{-y}$

よって逆関数は

$y=-\sqrt{-x} \quad (x \leqq 0)$

逆関数の定義から，次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

練習 13 $a \neq 0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$f(2)=4$ なので $2a+b=4$ …①

$f^{-1}(1)=-4$ なので $f(-4)=1$ より $-4a+b=1$ …②

①②を連立すると $a=\frac{1}{2}$ $b=3$

$a=\frac{1}{2}$，$b=3$

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

練習 14 次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(1) $y=\sqrt{-x}$　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

(1)

値域は $y \geqq 0$

また，$y=\sqrt{-x}$

$y^2=(\sqrt{-x})^2$

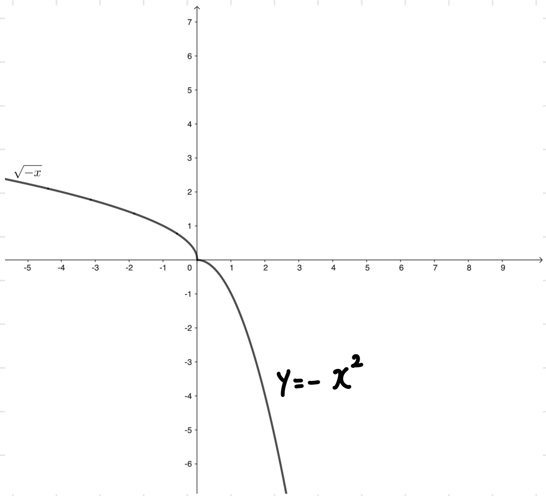
$(\sqrt{-x})^2=y^2$

$-x=y^2$

$x=-y^2$

よって逆関数は

$y=-x^2\ (x \geqq 0)$



(2)

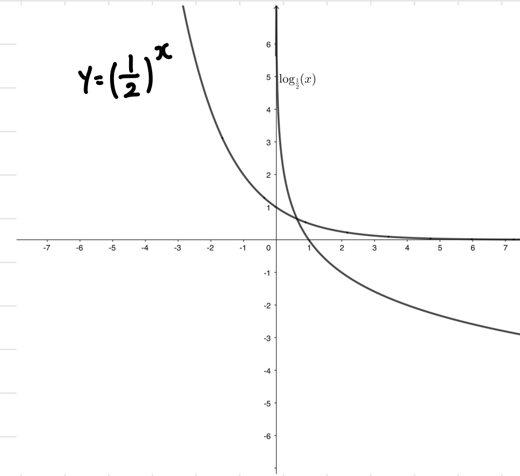
値域は実数全体

また，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$

よって逆関数は

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



・合成関数 … 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき
$f(x)$ と $g(x)$ から考える新しい関数 $g(f(x))$ のこと. $g(f(x))$ は $(g\circ f)(x)$ ともかく.
一般に $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は同じ関数ではない

練習 15 $f(x)=x^2$, $g(x)=\log_2(x+1)$, $h(x)=2^x-1$ について，次の合成関数を求めよ。

(1) $(g\circ f)(x)$ (2) $(f\circ g)(x)$ (3) $(g\circ h)(x)$

(1)
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=\log_2(x^2+1)$$
$$\underline{(g\circ f)(x)=\log_2(x^2+1)}$$

(2)
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\{\log_2(x+1)\}^2$$
$$\underline{(f\circ g)(x)=\{\log_2(x+1)\}^2}$$

(3)
$$(g\circ h)(x)=g(h(x))$$
$$=\log_2(2^x-1+1)$$
$$=\log_2 2^x$$
$$=x\log_2 2$$
$$=x$$
$$\underline{(g\circ h)(x)=x}$$