数Ⅱ

式と証明

展開の公式

1 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

練習 1 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$ (2) $(x-1)^3$

(3) $(3a+b)^3$ (4) $(x-2y)^3$

(1)

$(x+2)^3 = x^3+3x^2+12x+8$

(2)

$(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$

(3)

$(3a+b)^2 = 27a^3+18a^2b+6ab^2+b^3$

(4)

$(x-2y)^3 = x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

展開の公式

2 $$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

練習 2 展開の公式 **2** が成り立つことを，左辺を展開して確かめよ。

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^3-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$$

練習 3 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　　(2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$　　(4) $(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$

(1) x^3+8

(2) x^3-27

(3) x^3+27y^3

(4) $8x^3-a^3$

因数分解の公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

練習 4 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-1　(2) x^3+27a^3

(3) x^3-64　(4) $125x^3-y^3$

(1)

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

(2)

$x^3+27a^3=(x+3a)(x^2-3ax+9a^2)$

(3)

$x^3-64=(x-4)(x^2+4x+16)$

(4)

$125x^3-y^3=(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$

練習 5 次の式を因数分解せよ。

(1) x^6-1　(2) a^6-64b^6

(1)

x^6-1

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

(2)

a^6-64b^6

$=(a^3+8b^3)(a^3-8b^3)$

$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

パスカルの三角形 … 右図のような $(a+b)^n$ の展開における三角形状の係数の配列

$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

以下のような性質をもつ

1 数の配列は左右対称で，各行の両端の数は 1 である。

2 2 行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい。

練習 6 次の□に入る各数を，係数だけを取り出す計算によって求めよ。

$$(a+b)^5=a^5+\square a^4b+\square a^3b^2+\square a^2b^3+\square ab^4+b^5$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

練習 7 パスカルの三角形の性質を用いて，$(a+b)^6$ の展開式の各項の係数の配列を求めよ。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

二項定理

$$(a+b)^n = {}_nC_n\, a^{\boxed{n}} b^{\boxed{0}} + {}_nC_{n-1}\, a^{\boxed{n-1}} \cdot b^{\boxed{1}} + {}_nC_{n-2}\, a^{\boxed{n-2}} \cdot b^{\boxed{2}} + \cdots + {}_nC_0\, a^{\boxed{0}} \cdot b^{\boxed{n}} \qquad \left(\square + \square = \underline{\quad} \right)$$

練習 8 次の式の展開式を，二項定理を使って求めよ。

(1) $(x+1)^4$ (2) $(x-2)^6$

(1) $(x+1)^4$

$$= {}_4C_4 \cdot x^4 \cdot 1^0 + {}_4C_3 \cdot x^3 \cdot 1^1 + {}_4C_2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + {}_4C_1\, x^1 \cdot 1^3 + {}_4C_0 \cdot x^0 \cdot 1^4$$

$$= \underline{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$$

(2) $(x-2)^6$

$$= {}_6C_6 \cdot x^6 \cdot (-2)^0 + {}_6C_5 \cdot x^5 \cdot (-2)^1 + {}_6C_4 \cdot x^4 \cdot (-2)^2 + {}_6C_3 \cdot x^3 \cdot (-2)^3 + {}_6C_2 \cdot x^2 \cdot (-2)^4 + {}_6C_1 \cdot x^1 \cdot (-2)^5 + {}_6C_0 \cdot x^0 \cdot (-2)^6$$

$$= \underline{x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64}$$

練習 9 次の式の展開式において，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+3)^4$　$[x^3]$　　　(2)　$(x-2y)^5$　$[x^2y^3]$

(1) 二項定理より

$${}_4C_1(2x)^3\cdot 3^1$$

$$=4\cdot 8x^3\cdot 3$$

$$=96x^3$$

$\underline{96}$

(2) 二項定理より

$${}_5C_3\cdot x^2\cdot(-2y)^3$$

$$=-80x^2y^3$$

$\underline{-80}$

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n \quad ①$$

練習 10 上の等式 ① を用いて，次の等式を導け。

$${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$$

①について $x=-1$ のとき

$$(1-1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot(-1)+{}_nC_2(-1)^2+\cdots+{}_nC_n(-1)^n$$

$$0^n={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$

よって

$${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$$

練習 11 $(a+b+c)^6$ の展開式における次の項の係数を求めよ。

(1) a^3bc^2 (2) $a^2b^2c^2$ (3) a^2b^4

$\{(a+b)+c\}^6$ のように $a+b$ を1つのまとまりとして考える.

(1) 二項定理より

${}_6C_2(a+b)^4\cdot c^2 = (a+b)^4 \times 15c^2$

$(a+b)^4$ について二項定理より ${}_4C_1 a^3\cdot b^1 = 4a^3b$

よって $4a^3b \times 15c^2 = 60a^3bc^2$ 60

(2) 二項定理より

${}_6C_2(a+b)^4\cdot c^2 = (a+b)^4 \times 15c^2$

$(a+b)^4$ について二項定理より ${}_4C_2 a^2b^2 = 6a^2b^2$

よって $6a^2b^2 \times 15c^2 = 90a^2b^2c^2$ 90

(3) 二項定理より

${}_6C_0(a+b)^6\cdot c^0 = (a+b)^6$

$(a+b)^6$ について二項定理より ${}_6C_4 a^2b^4 = 15a^2b^4$ 15

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^p b^q c^r$ の係数は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$ ただし，$p+q+r=n$

練習 1　$(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^5b^2c^3$ の項の係数を求めよ。

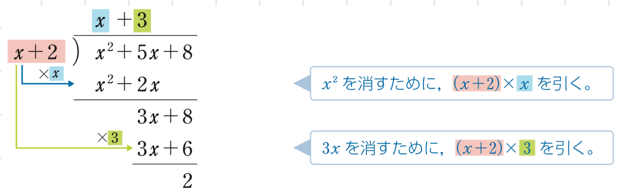
$$\frac{10!}{5!\,2!\,3!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 2520$$

$$\underline{2520}$$

・多項式の割り算

多項式を多項式で割る割り算は整数の割り算と似た方法で行う。

(例) $(x^2+5x+8)\div(x+2)$



左より，$(x^2+5x+8)\div(x+2)$ は 商 $x+3$，余り 2 である。

また，上の計算より $x^2+5x+8=(x+2)\times(x+3)+2$ とかける

割られる式を A，割る式を B，商を Q，余りを R とすると

$$\underset{\text{(割られる式)}}{A} = \underset{\text{(割る式)}}{B}\ \underset{\text{(商)}}{Q} + \underset{\text{(余り)}}{R}$$

R は $\mathbf{0}$ か，B より次数の低い多項式

ここで，$R=0$ のとき A は B で割りきれるといえる。

練習 12 次の多項式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A=x^3-4x^2-5$，$B=x-3$

(2) $A=2x^3+5x^2-2x+4$，$B=x^2-x+2$

(3) $A=x^3-7x+6$，$B=x^2-3+2x$

(1)

$$
\begin{array}{r}
x^2-x-3 \\
x-3\,\overline{)\,x^3-4x^2\qquad-5} \\
\underline{x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
-x^2\qquad-5 \\
\underline{-x^2+3x\qquad} \\
-3x-5 \\
\underline{-3x+9} \\
-14
\end{array}
$$

商 x^2-x-3

余り -14

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x+7 \\
x^2-x+2\,\overline{)\,2x^3+5x^2-2x+4} \\
\underline{2x^3-2x^2+4x\qquad} \\
7x^2-6x+4 \\
\underline{7x^2-7x+14} \\
x-10
\end{array}
$$

商 $2x+7$

余り $x-10$

(3)

$$
\begin{array}{r}
x-2 \\
x^2+2x-3\,\overline{)\,x^3\qquad-7x+6} \\
\underline{x^3+2x^2-3x\qquad} \\
-2x^2-4x+6 \\
\underline{-2x^2-4x+6} \\
0
\end{array}
$$

商 $x-2$

余り 0

練習 13 多項式 x^3+4x^2+4x-2 を多項式 B で割ると，商が $x+3$，余りが $2x+1$ であるという。B を求めよ。

この割り算について以下の等式が成立

$$x^3+4x^2+4x-2 = B\times(x+3)+2x+1$$

$$B\times(x+3)+2x+1 = x^3+4x^2+4x-2$$

$$B\times(x+3) = x^3+4x^2+2x-3$$

$$B = (x^3+4x^2+2x-3)\div(x+3)$$

$$\begin{array}{r}
x^2+x-1 \\
x+3\,\overline{)\,x^3+4x^2+2x-3} \\
\underline{x^3+3x^2} \\
x^2+2x-3 \\
\underline{x^2+3x} \\
-x-3 \\
\underline{-x-3} \\
0
\end{array}$$

$$\underline{B = x^2+x-1}$$

練習 14 $A=6x^2-11ax-10a^2$，$B=3x+2a$ を，x についての多項式とみて，A を B で割った商と余りを求めよ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-5a \\
\hline
3x+2a & 6x^2-11ax-10a^2 \\
 & 6x^2+4ax \\
\hline
 & -15ax-10a^2 \\
 & -15ax-10a^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

商 $2x-5a$

余り 0

分数式の約分

分数式 $\dfrac{A}{B}$ において，Bをその **分母**，Aをその **分子** という。*

分数式では，次のように，分母と分子に 0 でない同じ多項式を掛けても，分母と分子をその共通因数で割っても，もとの式と等しい。

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}\ (\text{ただし }C\neq 0),\qquad \frac{A\cancel{D}}{B\cancel{D}}=\frac{A}{B}$$

約分 …分数式の分母分子を共通因数で割ること

既約分数式 … それ以上約分できない分数

練習 15 次の式を約分して，既約分数式で表せ。

(1) $\dfrac{15ab^4}{6a^3b^2}$　(2) $\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$　(3) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$

(1)

$$\frac{15ab^4}{6a^3b^2}=\frac{5b^2}{2a^2}$$

(2)

$$\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+4)}=\frac{x-3}{x+4}$$

(3)

$$\frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-1)}=\frac{x+1}{2x-1}$$

分数式の乗法・除法

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

練習 16 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{2x}{2x+1}\times\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$　　(2) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-2x}{x^2-9}$

(1)

$$\frac{2x}{2x+1}\times\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\frac{2x}{2x+1}\times\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}=2x$$

(2)

$$\frac{x-2}{x^2+3x}\div\frac{x^2-2x}{x^2-9}=\frac{x-2}{x^2+3x}\times\frac{x^2-9}{x^2-2x}=\frac{x-2}{x(x+3)}\times\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}=\frac{x-3}{x^2}$$

分数式の加法・減法

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}, \qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

練習 17 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{2x}{x+3}+\frac{x+9}{x+3}$ (2) $\frac{3x+1}{2x-1}-\frac{2x-3}{2x-1}$ (3) $\frac{2x^2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}$

(1)

$$\frac{2x}{x+3}+\frac{x+9}{x+3}=\frac{2x+x+9}{x+3}=\frac{3x+9}{x+3}=\frac{3(x+3)}{x+3}=3$$

(2)

$$\frac{3x+1}{2x-1}-\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{(3x+1)-(2x-3)}{2x-1}=\frac{x+4}{2x-1}$$

(3)

$$\frac{2x^2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x^2-(x+1)}{x-1}=\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=2x+1$$

練習 18 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-2}$　　(2) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}$

(3) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$　　(4) $\dfrac{3x+5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}$

(1)

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}+\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x-4}{(x+1)(x-2)}+\frac{3x+3}{(x+1)(x-2)}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

(2)

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x^2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x}$$

(3)

$$\frac{x}{x+1}+\frac{3x-1}{x^2-2x-3}=\frac{x}{x+1}+\frac{3x-1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)}+\frac{3x-1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{x-1}{x-3}$$

(4)

$$\frac{3x+5}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x(3x+5)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(3x+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{3x+1}{x(x-1)}$$

練習 19 $A=1+\dfrac{1}{x}$, $B=x-\dfrac{1}{x}$ のとき，$\dfrac{A}{B}$ を簡単にせよ。

$$\frac{A}{B} = A \div B$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right) \div \left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x}$$

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x^2-1}$$

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1}$$

・恒等式…含まれている文字にどのような値を代入しても両辺の値が存在する限り常に成り立つ等式

練習 20 次の等式のうち，x についての恒等式はどれか。

(1) $(x+1)(x-1)=x^2-1$　(2) $x(x-1)+x=2x$

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{2x+1}$　(4) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x(x+2)}$

(1)

(左辺) $=(x+1)(x-1)=x^2-1=$ (右辺)

(左辺)=(右辺)なので恒等式

(2)

(左辺) $=x(x-1)+x=x^2-x+x=x^2$

(左辺) $\neq$ (右辺)なので恒等式ではない

(3)

(左辺) $=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

(左辺) $\neq$ (右辺)より恒等式ではない

(4)

(左辺) $=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x+2}{x(x+2)}-\dfrac{x}{x(x+2)}=\dfrac{2}{x(x+2)}=$ (右辺)

(左辺)=(右辺)なので恒等式

恒等式は(1)と(4)

恒等式の性質

1 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$\iff a=a',\quad b=b',\quad c=c'$

2 $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$\iff a=b=c=0$

練習 21 等式 $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(右辺) $=(x-3)(ax+b)+c$

$= ax^2-3ax+bx-3b+c$

$= ax^2-(3a-b)x-3b+c$ なので

$2x^2-7x+8=ax^2-(3a-b)x-3b+c$

$$\begin{cases} a=2 & \cdots ① \\ 3a-b=7 & \cdots ② \\ -3b+c=8 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③より

$\underline{a=2,\ b=-1,\ c=5}$

練習 22

等式 $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

(右辺) $=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)}{x(x+1)}+\dfrac{bx}{x(x+1)}=\dfrac{ax+a+bx}{x(x+1)}=\dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$ なので

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 & \cdots ① \\ a=2 & \cdots ② \end{cases}$$

①②より

$\underline{a=2,\ b=-1}$

$A=B$ の証明

1 AかBの一方を変形して，他方を導く。

2 AとBの両方を変形して，同じ式を導く。

3 $A-B$ を変形して，0 になることを示す。

練習 23 次の等式を証明せよ。

(1) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(2) $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

(3) $(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

(1) (右辺) $=(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2=a^3-b^3=$ (左辺)

(左辺)=(右辺) より 等式は成立

(2) (右辺) $=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2=a^2+ab+b^2=$ (左辺)

(左辺)=(右辺) より 等式は成立

(3) (左辺) $=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$

(右辺) $=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2=1+x+x+x^2+x+2x^2+x^3=1+3x+3x^2+x^3$

(左辺)=(右辺) より 等式は成立

練習 24

$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2+ca=b^2+bc$$

$a^2+ca=b^2+bc$

$a^2+ca-b^2-bc=0$

$a^2-b^2+ca-bc=0$

$(a+b)(a-b)+c(a-b)=0$

$(a-b)\{(a+b)+c\}=0$

$(a-b)(a+b+c)=0$

$a+b+c=0$ より

(左辺) $=(a-b)(a+b+c)=0=$ (右辺)

(左辺) $=$ (右辺) より 等式は成立

練習 25

$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$$

(左辺) $=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

$=ba^2+b^2a+bc(b+c)+c^2a+ca^2+3abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$

ここで $a+b+c=0$ より $b+c=-a$ なので

$-a^3+\{(-a)^2+bc\}a+bc\cdot(-a)$

$=-a^3+a^3+abc-abc$

$=0$

$=$ (右辺)

(左辺) $=$ (右辺) より 等式は成立

・比の値…比 $a:b$ について $\frac{a}{b}$ のこと

・比例式…比 $a:b$ と $c:d$ が等しいことを表す式，$a:b=c:d$ のこと

比が等しいとき比例式も等しい $\longrightarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ がいえる

(例)

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=2$ のとき $\frac{a+3c}{b+3d}$ の値

$\frac{a}{b}=2$ より　$a=2b$ …①

$\frac{c}{d}=2$ より　$c=2d$ …②

①②より

$$\frac{a+3c}{b+3d}=\frac{2b+3\cdot 2d}{b+3d}=\frac{2(b+3d)}{b+3d}=2$$

(2) $a:b:c=2:3:4$ のとき $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

k を定数とすると，$a:b:c=2k:3k:4k$

つまり，$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ となるので

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2k\cdot 3k+3k\cdot 4k+4k\cdot 2k}{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}=\frac{26k^2}{29k^2}=\frac{26}{29}$$

練習 26 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$ (2) $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とすると，$\begin{cases} a=bk \\ c=dk \end{cases}$

(1)

$(\text{左辺})=\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

$(\text{右辺})=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}=\dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}=\dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$

(左辺)＝(右辺)より 等式は成立

(2)

$(\text{左辺})=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k^2$

ここで $\dfrac{a}{b}=k$ としているので $k^2=\dfrac{a^2}{b^2}$ より

$(\text{左辺})=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}=(\text{右辺})$

(左辺)＝(右辺)より 等式は成立

練習 27 $x > y$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$3x - 4y > x - 2y$$

(左辺) − (右辺)

$= (3x - 4y) - (x - 2y)$

$= 3x - 4y - x + 2y$

$= 2x - 2y$

$= 2(x - y)$

ここで，$x > y$ より $x - y > 0$

したがって，(左辺) − (右辺) > 0 となるので

$3x - 4y > x - 2y$

練習 28 $x > 2$，$y > 3$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$xy + 6 > 3x + 2y$$

(左辺) − (右辺)

$= (xy + 6) - (3x + 2y)$

$= xy + 6 - 3x - 2y$

$= (y - 3)x - 2(y - 3)$

$= (y - 3)(x - 2)$

ここで $x > 2$ より $x - 2 > 0$，$y > 3$ より $y - 3 > 0$

よって (左辺) − (右辺) > 0 となるので

$xy + 6 > 3x + 2y$

練習 29 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1) $x^2+9y^2 \geqq 6xy$　　(2) $(a+b)^2 \geqq 4ab$

~~(3) $2x^2+9y^2 \geqq 6xy$　　(4) $a^2-ab+b^2 \geqq 0$~~

(1)

(左辺)−(右辺)

$= x^2+9y^2-6xy$

$= (x-3y)^2 \geqq 0$

よって　$x^2+9y^2 \geqq 6xy$

また，等号が成立するのは　$x-3y=0$

すなわち $x=3y$ のときである

(2)

(左辺)−(右辺)

$= (a+b)^2-4ab$

$= a^2+2ab+b^2-4ab$

$= a^2-2ab+b^2$

$= (a-b)^2 \geqq 0$

よって　$(a+b)^2 \geqq 4ab$

また，等号が成立するのは　$a-b=0$

すなわち $a=b$ のときである.

練習 29 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

~~(1) $x^2+9y^2 \geqq 6xy$~~ (2) ~~$(a+b)^2 \geqq 4ab$~~

(3) $2x^2+9y^2 \geqq 6xy$ (4) $a^2-ab+b^2 \geqq 0$

(3)

(左辺)−(右辺)

$= 2x^2+9y^2-6xy$

$= x^2+x^2-6xy+9y^2$

$= x^2+(x-3y)^2 \geqq 0$

よって　$2x^2+9y^2 \geqq 6xy$

また，等号が成立するのは

$x=0$ かつ $x-3y=0$

すなわち $x=y=0$ のときである.

(4)

(左辺) $= a^2-ab+b^2$

$= \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2-\frac{1}{4}b^2+b^2$

$= \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

よって　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

また，等号が成立するのは

$a-\frac{1}{2}b=0$ かつ $\frac{3}{4}b^2=0$

すなわち　$a=b=0$ のときである.

練習 30 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$1+x>\sqrt{1+2x}$$

両辺の平方の差を考えると

$(1+x)^2-(\sqrt{1+2x})^2$

$=(1+2x+x^2)-(1+2x)$

$=1+2x+x^2-1-2x$

$=x^2>0$

よって

$(1+x)^2-(\sqrt{1+2x})^2>0$

$1+x>0$, $\sqrt{1+2x}>0$ なので

$1+x>\sqrt{1+2x}$

練習 31 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

$$|a|+|b|\geqq|a-b|$$

両辺の平方の差を考えると

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2+2|a||b|+b^2-(a-b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=2(|ab|+ab)\geqq 0$

よって $(|a|+|b|)^2\geqq|a-b|^2$

ここで $|a|+|b|>0$, $|a-b|>0$ なので

$|a|+|b|\geqq|a-b|$

等号が成り立つのは

$|ab|+ab=0$, すなわち $ab\leqq 0$ のときである.

相加平均と相乗平均の大小関係

○ >0, ○ >0 のとき

$$○ + ○ \geqq 2\sqrt{○ \times ○}$$

○ $=$ ○ のとき等号が成立 → ○ $=$ ○ のとき ○ $+$ ○ の最小値は $2\sqrt{○○}$

(例) $a>0$, $b>0$, $ab=6$ のとき $2a+b$ の最小値

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$2a+b \geqq 2\sqrt{2a \times b}$$

$$2a+b \geqq 2\sqrt{2ab}$$

$$2a+b \geqq 2\sqrt{2 \times 6}$$

$$2a+b \geqq 4\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは $2a=b$ …①

①と $ab=6$ に代入

$$a \cdot 2a = 6$$

$$a^2 = 3$$

$a>0$ より

$$a=\sqrt{3}$$

$a=\sqrt{3}$ を①に代入すると

$$b=2\sqrt{3}$$

$a=\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$ のとき最小値 $4\sqrt{3}$

練習 32 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1) $a+\frac{4}{a}\geqq 4$ (2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$

(1)

$a>0$, $\frac{4}{a}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

また，等号が成立するのは $a=\frac{4}{a}$ のとき

$a>0$ より $a=2$ のときである。

(2)

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

また，等号が成立するのは $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ のとき

$a>0$, $b>0$ より $a=b$ のときである