数C

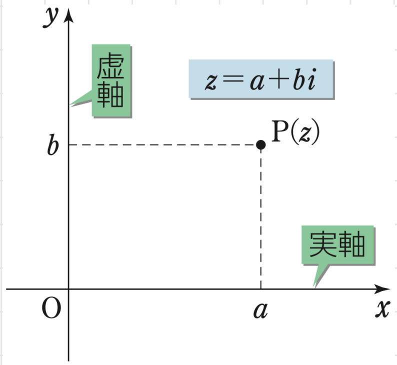
複素数平面

・複素数…2つの実数a, bと虚数単位iを用いて$a+bi$と表す。aを実部、bを虚部という。

複素数$a+bi$について

$a=0$のとき、biとなりこれは純虚数。$b=0$のときaとなり実数となる。

・複素数平面(複素平面)…複素数$a+bi$に対して、座標平面上の点(a, b)を対応させることで複素数を表す座標平面



複素数平面上の1つの点は1つの複素数を表す。

複素数平面において、x軸は実軸、y軸は虚軸として扱い

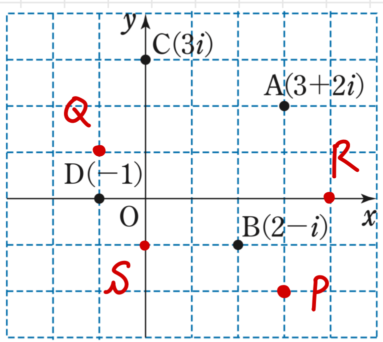
実軸上の点は実数、原点O以外の虚軸上の点は純虚数である。

複素数平面上で複素数zを表す点PをP(z)とかく。

練習 1 次の点を右の図に示せ。

P$(3-2i)$, Q$(-1+i)$,

R(4), S$(-i)$



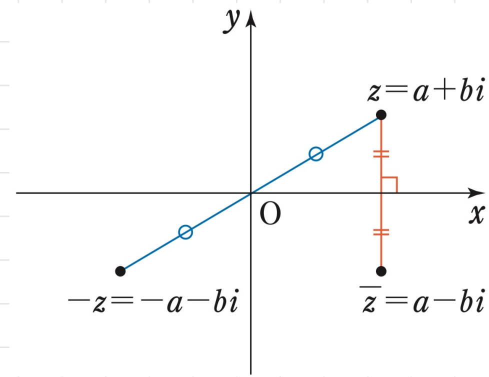
・共役複素数 … 複素数 $a+bi$ に対して $a-bi$ のこと.（虚部の符号のみ変える.）

複素数 z に対して $\bar{z}$ で表す.

複素数平面上で z, $\bar{z}$, $-z$ を図示すると以下がいえる

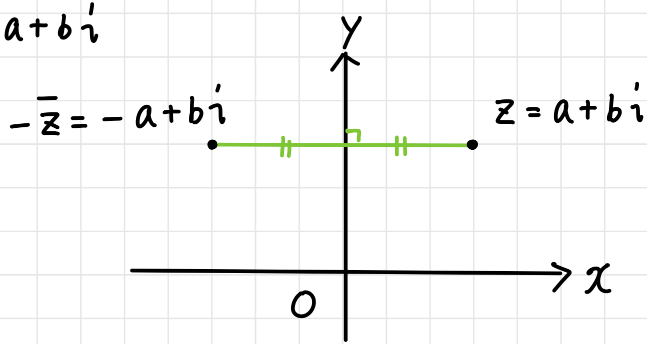
点 z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称.

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称



練習 2 複素数平面上で，点 z と点 $-\bar{z}$ の位置関係を述べよ。

$z=a+bi$ のとき $-\bar{z}=-a+bi$



z と $-\bar{z}$ は虚軸に関して対称

複素数 z について次が成立

1	z が実数	$\Longleftrightarrow$	$\overline{z}=z$	
2	z が純虚数	$\Longleftrightarrow$	$\overline{z}=-z$	ただし，$z\neq0$

練習 3 複素数 $z=a+bi$ について，次の問いに答えよ。

(1) a，b をそれぞれ z と $\overline{z}$ を用いて表せ。

(2) (1)の結果を利用して，上の **1**，**2** が成り立つことを確かめよ。

$$\begin{cases} z=a+bi \cdots ① \\ \overline{z}=a-bi \cdots ② \end{cases}$$

(1) ①＋②より

$$\begin{array}{rl} & z=a+bi \\ +) & \overline{z}=a-bi \\ \hline & z+\overline{z}=2a \end{array}$$

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2}$$

①－②より

$$\begin{array}{rl} & z=a+bi \\ -) & \overline{z}=a-bi \\ \hline & z-\overline{z}=2bi \end{array}$$

$$b=\frac{z-\overline{z}}{2i}=-\frac{z-\overline{z}}{2}i$$

(2) z が実数となるのは

$b=0$ のとき．

$$-\frac{z-\overline{z}}{2}i=0$$

$$z-\overline{z}=0$$

$$z=\overline{z}$$

逆に $\overline{z}=z$ のとき(1)より $b=0$

よって $z=a+bi$ は実数

z が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z$

z が純虚数となるのは

$a=0$ のとき

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=0$$

$$z+\overline{z}=0$$

$$\overline{z}=-z$$

逆に $\overline{z}=-z$ で $z\neq0$ のとき

$a=0$，また $z\neq0$ のとき $b\neq0$

よって $z=a+bi$ は純虚数

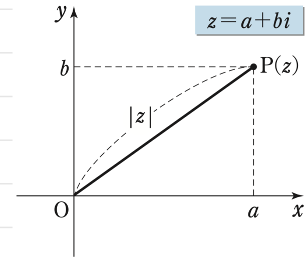
z が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=-z$

ただし $z\neq0$

・ 複素数 z の絶対値 … 複素数平面上における原点 O と点 P(z) のキョリ

複素数の絶対値

複素数 $a+bi$ の絶対値は　　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$



練習 4 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$3-2i$　　(2)　$-2+4i$　　(3)　-5　　(4)　$3i$

(1) $|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

(2) $|-2+4i|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(3) $|-5|=5$

(4) $|3i|=3$

練習 5 複素数 z について，$|-\overline{z}|=|z|$ であることを確かめよ。

$z=a+bi$ とする．

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$-\overline{z}$ は　$-\overline{z}=-a+bi$

$|-\overline{z}|=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

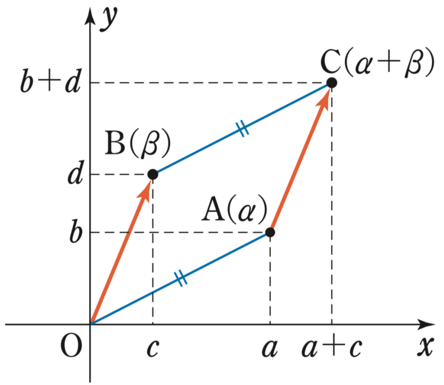
よって　$|-\overline{z}|=|z|$

・複素数の和と差の図示

複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ とすると $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$

複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha+\beta)$ をとる.

右図からわかるように, $\alpha+\beta$ は α の先に β の根がつくように β を平行移動させることで図示が可能である.

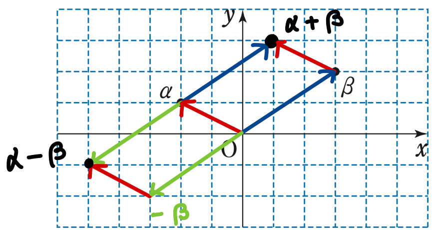


また, $\alpha - \beta$ を図示するときは $\alpha + (-\beta)$ として β の向きを逆にして平行移動すればよい.

練習 6 右の図の複素数平面上の点 α, β について, 次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$



練習 7 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $A(2+3i)$, $B(1+6i)$ (2) $C(3-4i)$, $D(1-2i)$

(1) $AB = (1+6i) - (2+3i) = -1 + 3i$

$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

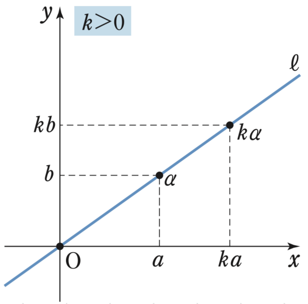
(2) $CD = (1-2i) - (3-4i) = -2 + 2i$

$|CD| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

・ 複素数の実数倍

複素数 α, β について $\alpha \neq 0$ のとき

3点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在



練習 8 $\alpha = 3-6i$, $\beta = 1+yi$ とする。2点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ と原点Oが一直線上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき
$\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在する.

$$\beta = k\alpha$$
$$1+yi = k(3-6i)$$
$$1+yi = 3k-6ki$$
$$\begin{cases} 3k = 1 & \cdots ① \\ y = -6k & \cdots ② \end{cases}$$

①より $k = \dfrac{1}{3}$

これを②に代入すると

$$y = -6 \times \frac{1}{3} = -2$$

$$\underline{y = -2}$$

共役複素数の性質

1 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

2 $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

4 $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ について

1 $z+\overline{z}$ は実数である

2 $z\overline{z}=|z|^2$

練習 9 複素数 α，β について，$\alpha+\beta+i=0$ のとき，$\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ を求めよ。

$\alpha+\beta+i=0$ より

$\alpha+\beta=-i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$ なので

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{-i}$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=i$

$\underline{\overline{\alpha}+\overline{\beta}=i}$

練習 10 複素数 α について，次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

$|\alpha|=1$ のとき $|\alpha|^2=1$ なので

$\alpha\cdot\overline{\alpha}=1 \Rightarrow \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

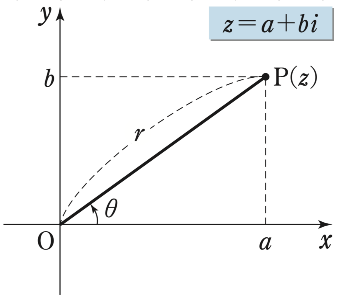
ここで

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=\alpha^2+\overline{\alpha^2}$

したがって $\alpha^2+\overline{\alpha^2}$ は実数であるから

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ も実数である.

・ 極形式 … 複素数平面上で0でない複素数 $z=a+bi$ を表す点をP, 線分OPの長さを r とする.
半直線OPを実軸の正の部分を始線とした動径と考えて, 動径OPの表す角を θ とする.



$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad a=r\cos\theta, \quad b=r\sin\theta$$

よって 0でない複素数 z は

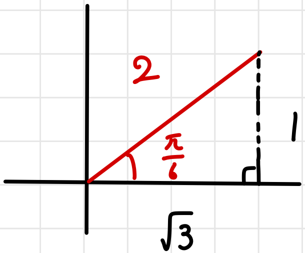
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$ ※ $r>0$, θ は弧度法で表された一般角.
$r=|z|$, $\theta=\arg z$

・ 偏角 … 複素数 z の極形式における角 θ. $\arg z$ と表す. (アーギュメントzと読む)
z の偏角の1つを θ_0 とすると $\arg z=\theta_0+2n\pi$ (nは整数) と表される.

練習 11 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)，(2)では $0 \leqq \theta < 2\pi$，(3)，(4)では $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

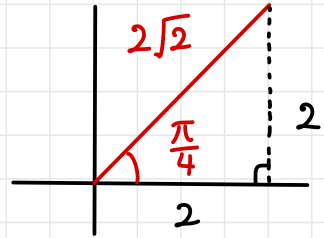
(1) $\sqrt{3}+i$　　(2) $2+2i$　　(3) $1-\sqrt{3}\,i$　　(4) $-i$

(1)



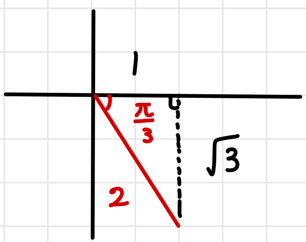
$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(2)



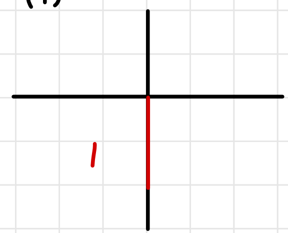
$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(3)



$$1-\sqrt{3}\,i = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

(4)



$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

z と $\bar{z}$ の極形式について

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき $\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

練習 12 複素数 z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。このとき，$-z$ の極形式について，次のことを示せ。

$$-z = r\{\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\}$$

加法定理より

$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

$$r\{\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\} = r(-\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= -r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なので

$$r\{\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\} = -z$$

極形式で表された複素数の積と商

$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $\beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\alpha\beta = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$$

練習 13 次の複素数 α, β について，$\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。

ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad \beta = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

複素数の積と商の絶対値と偏角

1 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ $\quad$ $\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$

2 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $\quad$ $\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$

練習 14 複素数 α，β について，$|\alpha|=2$，$|\beta|=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\alpha\beta|$ (2) $|\alpha^3|$ (3) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$ (4) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|$

(1) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=6$

(2) $|\alpha^3|=|\alpha|^3=8$

(3) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{3}$

(4) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha^2|}=\dfrac{\beta}{|\alpha|^2}=\dfrac{3}{4}$

・ 複素数の積と図形

2つの複素数 α と z の積 αz について，その絶対値と偏角は次のようになる.

$$|\alpha z| = |\alpha||z| \qquad \arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z$$

練習 15 次の点は，点 z をどのように移動した点であるか。

(1) $(1+\sqrt{3}\,i)z$　　(2) $(-1+i)z$　　(3) $2iz$

(1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より

点 $(1+\sqrt{3}i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し原点からのキョリを2倍にした点である.

(2) $(-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ より

点 $(-1+i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し原点からのキョリを $\sqrt{2}$ 倍にした点である.

(3) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ より

点 $2iz$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し原点からのキョリを2倍にした点である.

練習 16 $z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{2}{3}\pi$　(3) $-\frac{\pi}{2}$　(4) $-\frac{\pi}{3}$

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2i)=(2\sqrt{3}+1)+(2-\sqrt{3})i$

(2) $\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)z=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i$

(3) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}z=-i(4-2i)=-2-4i$

(4) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(2-\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+1)i$

練習 17 $\alpha=2+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，β の値を求めよ。

点 β は点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である.

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

または

$$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

よって　$\underline{\beta=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i \text{ または } \beta=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}$

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

練習 18 次の式を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}\,i)^5$ (2) $(1+i)^8$ (3) $(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}$

(1) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ なので

$$(1+\sqrt{3}i)^5=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^5=2^5\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}i$$

(2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$(1+i)^8=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^8=(\sqrt{2})^8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16$$

(3) $1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ なので

$$(1-\sqrt{3}i)^{-6}=\left[2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]^{-6}=2^{-6}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{1}{64}$$

1 の n 乗根

1 の n 乗根は，次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

練習 19　1 の 8 乗根を求めよ。

$$z_K = \cos\frac{2K}{8}\pi + i\sin\frac{2K}{8}\pi \quad (K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

よって

$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$z_3 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$z_5 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_6 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$

$z_7 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

練習 20 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^2=i$ ~~(2) $z^4=-4$ (3) $z^2=1+\sqrt{3}\,i$~~

(1)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また，$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ なので

$z^2=i$

$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

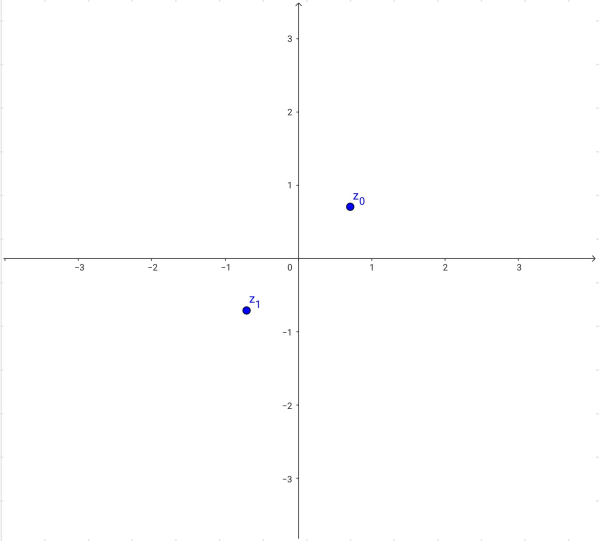
両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1$，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=1$ …②

$2\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では $k=0,1$ なので $\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{4}\pi$ …③



②③を①に代入すると

$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$z=\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

練習 20 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

~~(1) $z^2=i$~~　(2) $z^4=-4$　~~(3) $z^2=1+\sqrt{3}i$~~

(2)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

また, $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$ なので

$$z^4=-4$$

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

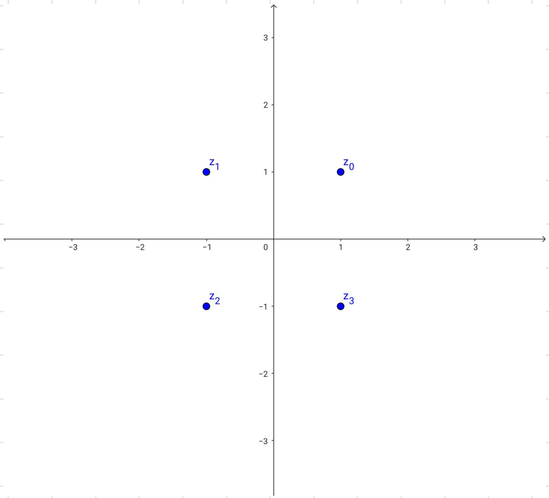
$r^4=4$, $4\theta=\pi+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ … ②

$4\theta=\pi+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$k=0,1,2,3$, なので $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ … ③



②③ を ① に代入すると

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=-1+i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)=-1-i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=1-i$

練習 20

次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

~~(1) $z^2=i$~~ ~~(2) $z^4=-4$~~ (3) $z^2=1+\sqrt{3}i$

(3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また，$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ なので

$z^2=1+\sqrt{3}i$

$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

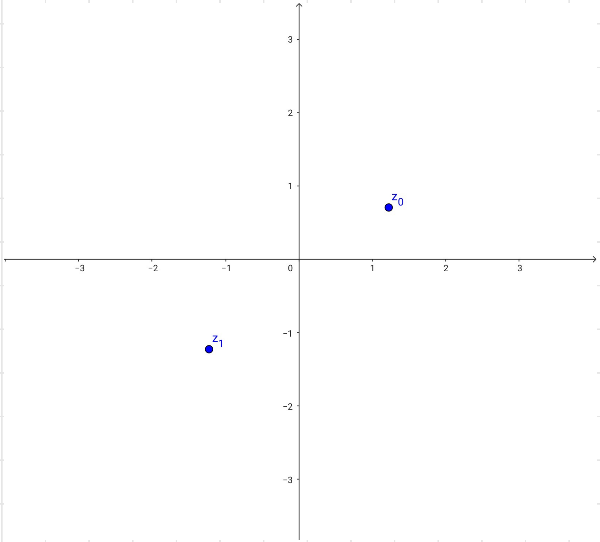
$r^2=2$, $2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ … ②

$2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$k=0,1$ なので $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ … ③



②③を①に代入すると

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を C(γ)，$m:n$ に外分する点を D($\overset{デルタ}{\delta}$) とすると

内分点　$\gamma=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　　外分点　$\delta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点を表す複素数は　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

練習 21　A($1+5i$)，B($7-i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1 : 2 に内分する点C　　(2)　線分 AB の中点M

(3)　線分 AB を 3 : 2 に外分する点D

(1)

$$C=\frac{2(1+5i)+(7-i)}{1+2}=\frac{9+9i}{3}=3+3i$$

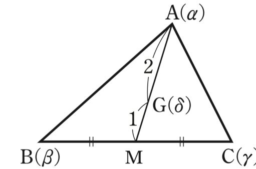
(2)

$$M=\frac{(1+5i)+(7-i)}{2}=\frac{8+4i}{2}=4+2i$$

(3)

$$D=\frac{-2(1+5i)+3(7-i)}{3-2}=19-13i$$

練習 22　3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，その重心を G(δ) とするとき，$\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ であることを示せ。



点Mは点B，Cの中点なので　$\dfrac{\beta+\gamma}{2}$

点Gは点A，Mを 2 : 1 に内分する点なので

$$\delta=\frac{\alpha+2\cdot\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{2+1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

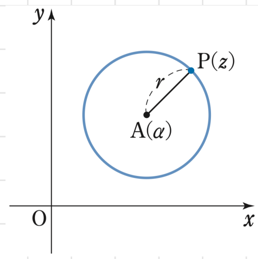
・方程式の表す図形

点A(α)を中心とする半径rの円上の点をP(z)とするとAP=rとなる.

$$|z-\alpha| = r \quad \cdots ①$$

したがって①を満たす点z全体の集合は点Aを中心とする半径rの円である.

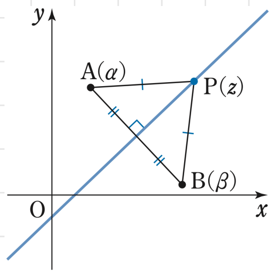
※原点中心半径rの円は $|z| = r$ と表される.



2点A(α), B(β)を結ぶ線分ABの垂直二等分線上の点をP(z)とすると AP=BP となる.

$$|z-\alpha| = |z-\beta| \quad \cdots ②$$

したがって②を満たす点z全体の集合は線分ABの垂直二等分線である.



練習 23 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か。

(1) $|z|=2$　　(2) $|z-(1+i)|=1$　　(3) $|z-2|=|z-4i|$

(1)
原点中心半径2の円

(2)
点 $1+i$ 中心半径1の円

(3)
2点A(2), B(4i)を結ぶ線分ABの垂直二等分線

練習 24 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か。

方程式の両辺を2乗すると

$$4|z-3|^2=|z|^2$$

$$4(z-3)\overline{(z-3)}=z\cdot\overline{z}$$

$$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\cdot\overline{z}$$

$$4(z\cdot\overline{z}-3z-3\overline{z}+9)=z\cdot\overline{z}$$

$$4z\cdot\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=z\cdot\overline{z}$$

$$3z\cdot\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=0$$

$$z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$$

$$z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+16-4=0$$

$$(z-4)(\overline{z}-4)=4$$

$$(z-4)\overline{(z-4)}=4$$

$$|z-4|^2=4$$

$$|z-4|=2$$

点4中心 半径2の円

練習 25 $w=i(z-2)$ とする。点 z が原点Oを中心とする半径1の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか。

点 z は $|z|=1$ を満たす.

$w=i(z-2)$ より $z=\dfrac{w+2i}{i}$

$$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$$

$|z|=1$ より

$$|w+2i|=1$$

よって

点 w は点 $-2i$ 中心半径1の円を描く

点 α を中心とする回転

点 β を，点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると　$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

練習 26 $\alpha=1+i$，$\beta=5+3i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

$$\gamma-(1+i)=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(5+3i)-(1+i)\}$$

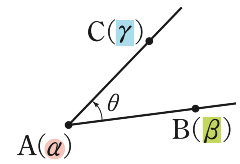
$$\gamma=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4+2i)+1+i$$

$$=2\sqrt{3}+(\sqrt{3}+3)i$$

半直線のなす角

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は

$$\boldsymbol{\theta = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$$



$$\theta = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

練習 27 3 点 A($1-i$)，B($2+i$)，C($2i$) に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\alpha=1-i,\ \beta=2+i,\ \gamma=2i$ とする.

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{2i-(1-i)}{(2+i)-(1-i)}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{4}$$

$$3\text{点 A, B, C が一直線上にある} \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\text{ が実数}$$

$$2\text{直線 AB, AC が垂直に交わる} \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\text{ が純虚数}$$

練習 28 3点 A$(-1+i)$，B$(3-i)$，C$(x+3i)$ について，次の問いに答えよ。ただし，x は実数とする。

(1) 2直線 AB，AC が垂直に交わるように，x の値を定めよ。

(2) 3点 A，B，C が一直線上にあるように，x の値を定めよ。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x+3i)-(-1+i)}{(3-i)-(-1+i)}=\frac{(x+1)+2i}{4-2i}=\frac{\{(x+1)+2i\}(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{2x+(x+5)i}{10}$$

(1) 2直線AB, ACが垂直に交わるとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となるので $\underline{x=0}$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるとき $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数となるので $x+5=0$ より $\underline{x=-5}$

練習 29 3点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする△ABC について，等式 $\gamma=(1-i)\alpha+i\beta$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値　　(2) △ABC の3つの角の大きさ

(1)

$$\gamma = \alpha - i\alpha + i\beta$$

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\, i$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = i$$

(2)

(1) より $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1$ なので

$|\gamma-\alpha| = |\beta-\alpha|$ となるから

$AC : AB = 1 : 1$

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{\pi}{2}$ なので

△ABC は $AB = AC$, $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

$$\underline{\angle A = \frac{\pi}{2},\ \angle B = \frac{\pi}{4},\ \angle C = \frac{\pi}{4}}$$