5 次の条件をすべて満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=1,\quad f'(2)=5,\quad f(0)=4$$

形のわからない2次関数は

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく

ちなみに3次関数は

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく

定数 a, b, c を用いて

$f(x)=ax^2+bx+c$ …① とすると

$f'(x)=2ax+b$ …②

$f'(1)=1$ なので ②より

$f'(1)=2a+b=1$ …③

$f'(2)=5$ なので ②より

$f'(2)=4a+b=5$ …④

$f(0)=4$ なので ①より

$f(0)=c=4$ …⑤

③ −④ を計算すると

$$\begin{array}{rl} & 2a+b=1 \\ -) & 4a+b=5 \\ \hline & -2a=-4 \\ & a=2 \end{array}$$

$a=2$ を①に代入すると

$2\cdot 2+b=1$

$b=-3$

∴ $a=2,\ b=-3,\ c=4$ を①に代入すると

$$f(x)=2x^2-3x+4$$

7 右の図のように，関数

$y=-x^2+6x$ $(0 \leqq x \leqq 6)$ ……①

のグラフ上の点Pからx軸に垂線PHを下ろす。原点をO，点Pのx座標をt $(0<t<6)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

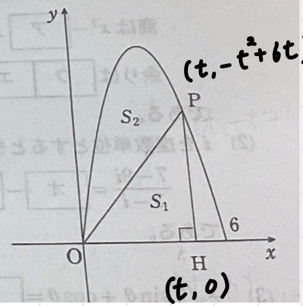
(1) △POHの面積をS_1とすると

$$S_1=\frac{\boxed{ア}\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}t^3+\boxed{エ}\,t^2$$

と表され，S_1は

$t=\boxed{オ}$ のとき，最大値 $\boxed{カ}\boxed{キ}$

をとる。



点Pは $y=-x^2+6x$ 上のx座標がtの点

点Pのy座標は $-t^2+6t$ なので

$P(t, -t^2+6t)$

点Hは点Pからx軸に下ろされたx軸との交点

$H(t, 0)$

$$S_1 = OH \times PH \times \frac{1}{2}$$

$$= t \times (-t^2+6t) \times \frac{1}{2}$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}t^3+3t^2$$

S_1はtに関する3次関数

$$S_1' = -\frac{3}{2}t^2+6t$$

$S_1'=0$とすると

$$-\frac{3}{2}t^2+6t=0$$

$$-\frac{3}{2}t(t-4)=0$$

$$t=0,\ 4$$

増減表は

t	0	…	4	…	6
S_1'		+	0	−	
S_1		↗	16	↘	

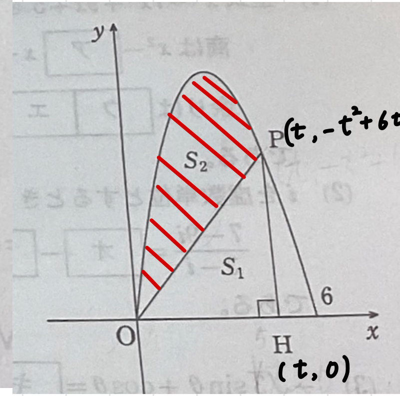
$t=4$のとき最大値16

(2) 放物線①と線分OPで囲まれた図形の面積をS_2とすると,

$$S_2=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}t^3$$

であり，$S_1=S_2$ を満たす t の値は

$$t=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$



直線OPの方程式は $y=\dfrac{-t^2+6t}{t}x$

$y=(-t+6)x$

$$S_2=\int_0^t\{(-x^2+6x)-(-t+6)x\}dx$$

$$=\int_0^t(-x^2+tx)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^3$$

$$=\underline{\frac{1}{6}t^3}$$

前項より $S_1=-\frac{1}{2}t^3+3t^2$ なので

$S_1=S_2$ は

$-\frac{1}{2}t^3+3t^2=\frac{1}{6}t^3$ 両辺×6

$-3t^3+18t^2=t^3$

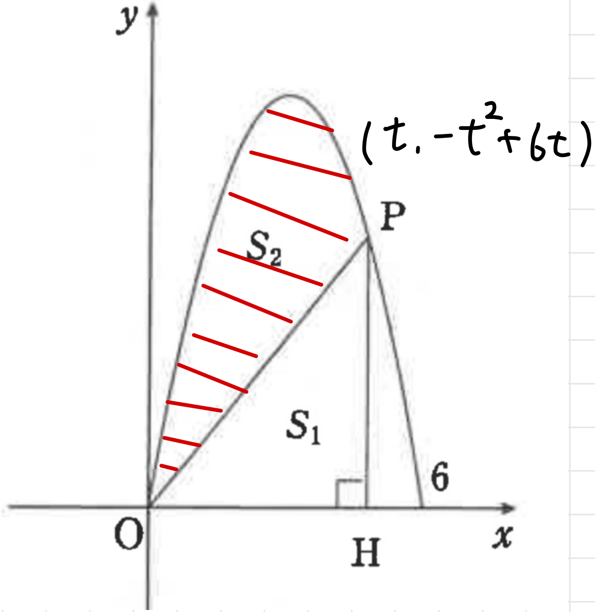
$4t^3-18t^2=0$

$2t^2(2t-9)=0$

$t=0,\ \frac{9}{2}$

$0<t<6$ より

$$\underline{t=\frac{9}{2}}$$



$$\int_0^t \{f(x) - g(x)\}\, dx$$

$g(x)$ は原点Oと点Pを通る直線なので

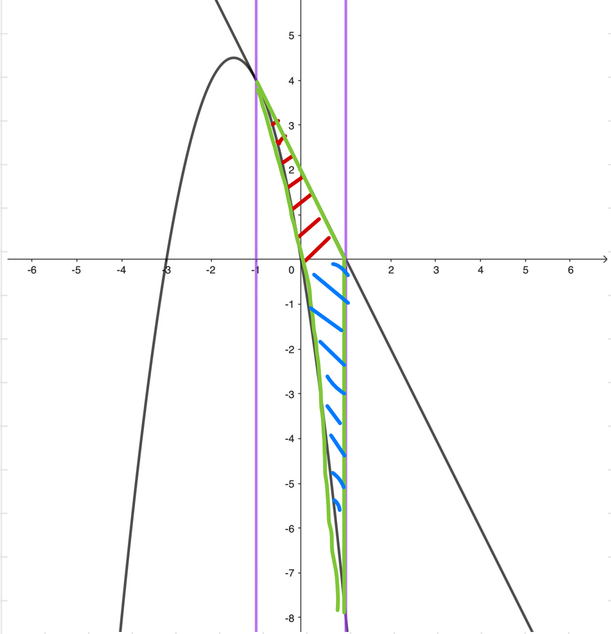
$y = \underbrace{a}_{} x$ の形で書ける.

$\hookrightarrow \dfrac{y}{x}$ より $\dfrac{-t^2+6t}{t} = -t+6$

$\therefore\ g(x) = (-t+6)x$

$f(x) = -x^2 + 6x$

直線OPを $g(x)$ とする.



$y = -2x^2 - 6x$

$y = -2x + 2$

求める面積は赤

$\bullet = \bullet - \bullet$

$$\bullet = \int_{-1}^{1} \{(-2x+2) - (-2x^2-6x)\}\,dx - \int_{0}^{1} -(-2x^2-6x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x^2+4x+2)\,dx - \int_{0}^{1} (2x^2+6x)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 2 + 2\right) - \left(-\frac{2}{3} + 2 - 2\right) - \left(\frac{2}{3} + 3\right)$$

$$= \frac{2}{3} + 2 + 2 + \frac{2}{3} - 2 + 2 - \frac{2}{3} - 3$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx}$$

（積分する関数が同じで積分区間がしりとり的になっているとき、積分をひとつにまとめることができるという積分の性質です。）

0〜1と1〜3 => 0〜3

$$\int_0^{1} \underbrace{(x^2-2x)}\,dx + \int_{1}^3 \underbrace{(x^2-2x)}\,dx$$

同じ

$$= \int_0^3 (x^2-2x)\,dx$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

$f'(x) = 0$ とする

$3(x-3)(x+1) = 0$

$x = -1, 3$

増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x = 3$ のとき 極小値 -16

$\left(f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 11 = 27 - 27 - 27 + 11 = -16 \right)$

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$\boxed{5}$ 次の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ について

~~(i) $f(x)$は~~

$x=$~~$\boxed{ア}$のとき，極小値$\boxed{イ}\boxed{ウ}$~~

~~をとる~~。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ 上の x 座標が1である点における接線の傾きは

$\boxed{エ}\boxed{オ}$

であり，この接線の y 軸上の切片は

$\boxed{カ}$

である。

$f(x)=x^3-3x^2+2$ より

$f'(x)=3x^2-6x$

x座標が1より $f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1=-3$

$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2=0$ なので

グラフ上の点は $(1, 0)$

よって $y-0=-3(x-1)=-3x+3$

$y=-3x+3$ より 傾きは -3, 切片は 3

7 次の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ ……① は

$x=$ $\boxed{ア}$ のとき，極小値 $\boxed{イ}\boxed{ウ}$

をとる。

(2) (1)の関数①のグラフの接線の傾きが最大になるとき，その接線の方程式は

$y=\boxed{エ}x-\boxed{オ}$

である。

$\boxed{\text{関数 } y=f(x) \text{ のグラフの接線の傾きは 接点の } x \text{ 座標を } a \text{ とすると } f'(a) \text{ で表すことができる.}}$

(2) は接線の傾きを求めたいが接点の x 座標が与えられていないので接点の x 座標を a とする.

また, $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$ とすると $f'(x)=-3x^2+12x-9$ なので

$f'(a)=-3a^2+12a-9$ ← こいつが $x=a$ における接線の傾き.

$f'(a)$ は a について の 2次関数の式.

接線の傾きの最大値は 2次関数 $f'(a)=-3a^2+12a-9$ の最大値を求めればよい.

$$f'(a)=-3a^2+12a-9$$
$$=-3(a-2)^2+3$$

平方完成

よって $a=2$ のとき 接線の傾き $f'(a)$ の最大値は 3

接線の方程式は直線の方程式と求め方は同じ.

接線の傾きは $f'(a)$ の最大値 3 とわかっているのであとはこの接線が通る1点の座標が分かればよい.

ここで,接線は接点を通り,その接点の x 座標 a は $f'(a)$ に最大値をとらせる $a=2$.
つまり接点の x 座標は 2 である.

また,この接点は関数 $y=-x^3+6x^2-9x+2$ における接線なので接点は $y=-x^3+6x^2-9x+2$ 上の点.

接点の x 座標が 2 なので接点の y 座標は $y=-2^3+6\cdot2^2-9\cdot2+2=0$

接点は $(2,0)$ である.

よって接線は傾きが 3 で $(2,0)$ を通るので $y=mx+n$ を用いると

$$y=3x+n$$
$$0=3\cdot2+n$$
$$n=-6$$

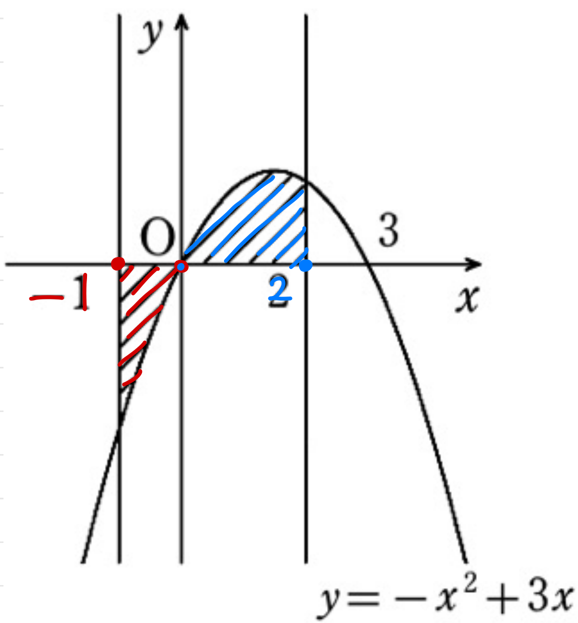
したがって接点の方程式は

$$\underline{y=3x-6}$$

(3) 放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸，直線 $x=-1$，および直線 $x=2$ で囲まれた右の 2 つの斜線部分の面積の和は

$$\frac{\boxed{カ}\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。



左図のように色分けをすると求める面積は ▨ + ▨

▨ $=\int_{-1}^{0}(-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=0-\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right\}$

$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{6}$

ここで求めるべきは面積，面積にマイナスはないので ▨ $=\underline{\frac{11}{6}}$

▨ $=\int_{0}^{2}(-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}=-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-0$

$=-\frac{8}{3}+6=\underline{\frac{10}{3}}=$ ▨

よって求める全体の面積は

▨ + ▨ $=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\underline{\frac{31}{6}}$

3　放物線 $y=-x^2+4x+3$ ……①　について，次の問いに答えなさい。

(3)　放物線①を y 軸方向に a だけ平行移動したグラフが x 軸と異なる2点で交わるとき，それらの交点を x 座標の小さいほうから A，B とする。
AB=10 となるとき $a=$ $\boxed{カ}\boxed{キ}$ である。

(R2.9)

①をY軸方向にaだけ平行移動 → $y-a=-x^2+4x+3$

$y=-x^2+4x+a+3$ … ①'

①'がx軸と交わる点は $y=0$ のときの点なので

$-x^2+4x+a+3=0$

$x^2-4x-a-3=0$

解の公式を用いて

$x=2\pm\sqrt{a+7}$

よって $A(2-\sqrt{a+7}, 0)$

$B(2+\sqrt{a+7}, 0)$

AB=10 より $AB=(2+\sqrt{a+7})-(2-\sqrt{a+7})$

$=2\sqrt{a+7}=10$

$\sqrt{a+7}=5$

$a+7=25$

$\underline{\underline{a=18}}$

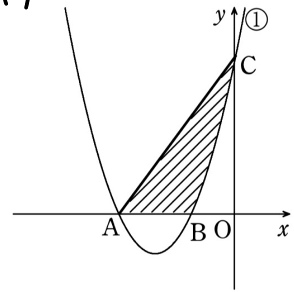
7 次の各問いに答えなさい。　(R2 9)

(1) 関数 $y=x^3+9x^2+24x+13$ は

$x=$ ア イ のとき，極小値 ウ エ をとる。

(2) 放物線 $y=x^2+7x+10$ ……①

と x 軸，y 軸の交点を右の図のように A，B，C とする。このとき，線分 AB と線分 AC および放物線 ① で囲まれた右の斜線部分の面積は $\dfrac{\text{オカ}}{\text{キ}}$ である。



(1) $y'=3x^2+18x+24$

$y'=0$とすると

$3x^2+18x+24=0$

$x^2+6x+8=0$

$(x+2)(x+4)=0$

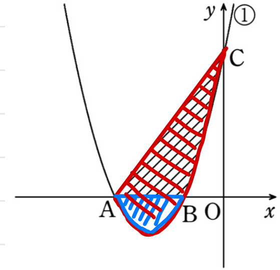
$x=-2,\ -4$

増減表は下図

x	…	-4	…	-2	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘	-7	↗

$x=-2$のとき極小値 -7

(2)



A, B の座標は

$x^2+7x+10=0$ より

$(x+2)(x+5)=0$

$x=-2,-5$ なので　A$(-5,0)$

B$(-2,0)$

C は①と y 軸の交点　C$(0,10)$

求める面積は ▨ − ▨

▨ $=\displaystyle\int_{-5}^{0}\{(\text{直線AC})-(\text{放物線①})\}dx$

直線 AC は A$(-5,0)$，C$(0,10)$ より　$y=2x+10$

▨ $=\displaystyle\int_{-5}^{0}\{(2x+10)-(x^2+7x+10)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-5}^{0}(-x^2-5x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right]_{-5}^{0}$

$=0-\left\{-\frac{1}{3}\cdot(-5)^3-\frac{5}{2}\cdot(-5)^2\right\}=\dfrac{125}{6}$

▨ $=-\displaystyle\int_{-5}^{-2}(x^2+7x+10)\,dx=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+10x\right]_{-5}^{-2}$

$=\dfrac{9}{2}$

よって ▨ − ▨ $=\dfrac{125}{6}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{98}{6}=\underline{\dfrac{49}{3}}$

$\boxed{7}$ 次の各問いに答えなさい。

(R4.9)

(1) 関数 $y=-x^3+2x^2-x+6$ ……① について

（ｉ） 関数①のグラフ上の点 P(−1，10) における接線の方程式は

$y=\boxed{ア}\boxed{イ}x+\boxed{ウ}$

である。

(i)

$f(x)=-x^3+2x^2-x+6$ とする

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

接線の傾きは $f'(-1)$

$f'(-1)=-3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-1=-8$

P(−1, 10) を通るので

$y-10=-8\{x-(-1)\}$

$y=-8x+2$

（ii） 関数①の極大値は

$\boxed{エ}$

である。

(i) の $f'(x)=0$ とすると

$-3x^2+4x-1=0$

$-(3x^2-4x+1)=0$

$-(3x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{3}, 1$

増減表は下図

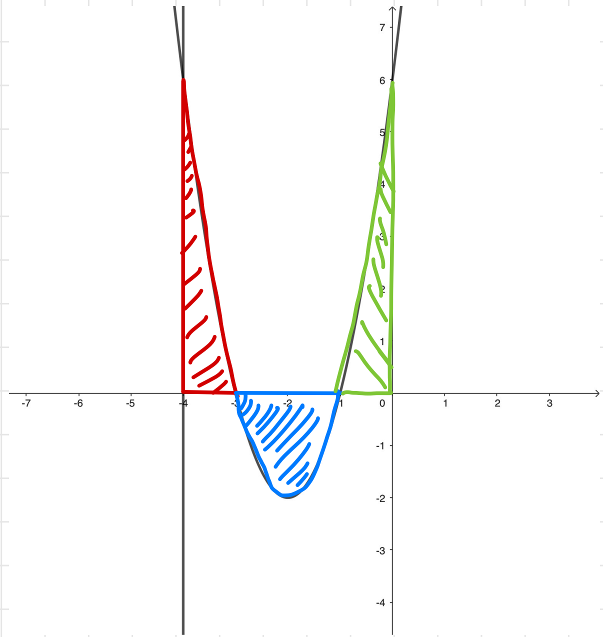
x	…	$\frac{1}{3}$	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗	極大	↘

$x=1$ のとき極大値 6

(2)　放物線 $y=2x^2+8x+6$ と直線 $x=-4$，x 軸，y 軸で囲まれた 3 つの部分の面積の和は

$\boxed{\text{オ}}$

である。



グラフの概形は左図

求める面積は + +

$$= \int_{-4}^{-3} (2x^2+8x+6)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3+4x^2+6x\right]_{-4}^{-3} = \frac{8}{3}$$

$$= -\int_{-3}^{-1} (2x^2+8x+6)\,dx = -\left[\frac{2}{3}x^3+4x^2+6x\right]_{-3}^{-1} = \frac{8}{3}$$

$$= \int_{-1}^{0} (2x^2+8x+6)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3+4x^2+6x\right]_{-1}^{0} = \frac{8}{3}$$

よって

$$+ + = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{8}{3} = 8$$