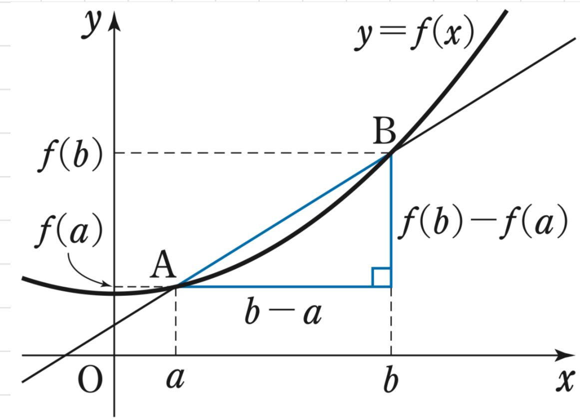
数Ⅱ

微分法と積分法

平均変化率

$y=f(x)$の値がaからbまで変化するときの関数$f(x)$の変化の値

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



練習 1　次の平均変化率を求めよ。

(1)　1 次関数 $y=2x$ の，$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率

(2)　2 次関数 $y=-x^2$ の，$x=2$ から $x=2+h$ までの平均変化率

(1)

$$\frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$$

(2)

$$\frac{-(2+h)^2-\{-2^2\}}{(2+h)-2} = \frac{-h^2-4h}{h} = -h-4$$

極限値

関数$f(x)$においてxがaと異なる値をとりながらaに限りなく近づくとき$f(x)$の値が一定の値αに限りなく近づくならば，αをxがaに限りなく近づくときの極限値という．

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \to a \text{のとき} f(x) \to \alpha$$

練習 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+1)$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(6+h)$ (3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2)$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+1) = 2^2+1 = 5$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(6+h) = 6+0 = 6$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(12-6h+h^2) = 12-6\cdot 0+0^2 = 12$

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

練習 3 関数 $f(x)=3x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(1)$　　(2)　$f'(-2)$　　(3)　$f'(a)$

(1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-3\cdot 1^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h+6)$

$=6$

(2) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h)^2-3\cdot(-2)^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-12h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h-12)$

$=-12$

(3) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6ah}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3h+6a)$

$=6a$

接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

練習 4 関数 $y=x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ。

(1) 点 $(1,\ 1)$ (2) 点 $(-2,\ 4)$

(1)
$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(h+2)=2
\end{aligned}
$$

接線の傾き 2

(2)
$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(h-4)=-4
\end{aligned}
$$

接線の傾き -4

導関数 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

練習 5 導関数の定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=3x$　　　(2)　$f(x)=-x^2$

(1)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}3$$
$$=3$$

(2)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(-h-2x)$$
$$=-2x$$

関数 x^n と定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は　$(x^n)' = nx^{n-1}$

定数関数 c の導関数は　$(c)' = 0$

練習 6 上の公式を用いて，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^4$　　(2) $y = x^5$

(1) $y' = 4x^3$

(2) $y' = 5x^4$

練習 7 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 4x^2 + 3x - 4$　　(2) $y = -3x^2 + x - 2$

(3) $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$　　(4) $y = -x^4 - x + 3$

(5) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$　　(6) $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

(1) $y' = 8x + 3$　　(2) $y' = -6x + 1$

(3) $y' = 12x^2 - 4x - 5$　　(4) $y' = -4x^3 - 1$

(5) $y' = 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$　　(6) $y' = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

練習 8 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+2)(x+3)$　(2) $y=x(x+2)(x-2)$

(3) $y=-2x(x+1)(x-3)$　(4) $y=3(x^2-2)^2$

(1)

$y=x^2+5x+6$

$y'=2x+5$

(2)

$y=x^3-4x$

$y'=3x^2-4$

(3)

$y=-2x^3+4x^2+6x$

$y'=-6x^2+8x+6$

(4)

$y=3x^4-12x^2+12$

$y'=12x^3-24x$

練習 9 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3$ について，次の x の値における微分係数を求めよ。

(1) $x=2$　(2) $x=0$　(3) $x=-2$

$f'(x)=3x^2-6x$

(1)

$f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2=0$

(2)

$f'(0)=3\ 0^2-6\cdot 0=0$

(3)

$f'(-2)=3\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)=24$

練習 10 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(0)=-3, \quad f'(1)=1, \quad f(0)=2$$

$f(x)=ax^2+bx+c$ とする

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-3$ より

$f'(0)=2a\cdot 0+b=-3$

$b=-3$

$f'(1)=1$ より

$f'(1)=2a\cdot 1+b=1$

$2a+b=1$

$b=-3$ より $a=2$

$f(0)=2$ より

$f(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=2$

$c=2$

$a=2,\ b=-3,\ c=2$ より

$f(x)=2x^2-3x+2$

練習 11 次の t の関数を微分せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $s=3t^2-4t+2$ (2) $f(t)=at^3+bt^2$

(1) $s'=6t-4$

(2) $f'(t)=3at^2+2bt$

練習 12 半径 r の球の体積を V，表面積を S とすると，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$ である。V と S を r の関数とみて，それぞれ r で微分せよ。

$V'=4\pi r^2$

$S'=8\pi r$

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

練習 13 関数 $y=2x^2-4x+3$ のグラフ上に x 座標が 2 である点Aをとる。点Aにおける接線の方程式を求めよ。

$f(x)=2x^2-4x+3$ とする

$f(2)=2\cdot 2^2-4\cdot 2+3=3$

点Aは $(2,3)$

$f'(x)=4x-4$

$f'(2)=4\cdot 2-4=4$

接線の傾きは4

よって

$y-3=4(x-2)$

$y=4x-5$

練習 14 次の接線の方程式を求めよ。

(1) 関数 $y=x^2+1$ のグラフに点 C$(-1,\ -7)$ から引いた接線

(2) 関数 $y=x^2-2x+4$ のグラフに原点Oから引いた接線

(1) $f(x)=x^2+1$, 接点のx座標をaとする.

接点は$(a, f(a))=(a, a^2+1)$

$f'(x)=2x$ より

$f'(a)=2a$ なので接線の傾きは $2a$

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$

これが$(-1,-7)$をトールので

$-7-(a^2+1)=2a(-1-a)$

$a^2+2a-8=0$

$(a-2)(a+4)=0$

$a=2, -4$

$a=2$のとき $y=4x-3$

$a=-4$のとき $y=-8x-15$

(2) $f(x)=x^2-2x+4$, 接点のx座標をaとする

接点は$(a, f(a))=(a, a^2-2a+4)$

$f'(x)=2x-2$ より

$f'(a)=2a-2$ なので接線の傾きは $2a-2$

$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$

これが原点をトールので

$0-(a^2-2a+4)=(2a-2)(0-a)$

$a^2-4=0 \rightarrow a=\pm 2$

$a=2$のとき $y=2x$

$a=-2$のとき $y=-6x$

関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **増加** する。

常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **減少** する。

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **定数** である。

練習 15 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+5$ ~~(2) $f(x)=-2x^3-3x^2+1$~~

(1)

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,4$

$f'(x)>0$ を解くと $x<0,\ 4<x$

$f'(x)<0$ を解くと $0<x<4$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$f(x)$ は $x\leqq 0,\ 4\leqq x$ で増加

$0\leqq x\leqq 4$ で減少

練習 15 次の関数の増減を調べよ。

~~(1) $f(x)=x^3-6x^2+5$~~ (2) $f(x)=-2x^3-3x^2+1$

(2)

$f'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$

$f'(x)=0$とすると $x=0,-1$

$f'(x)>0$を解くと $-1<x<0$

$f'(x)<0$を解くと $x<-1,\ 0<x$

$f(x)$の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘

$f(x)$は $x\leqq-1,\ 0\leqq x$で減少

$-1\leqq x\leqq 0$で増加

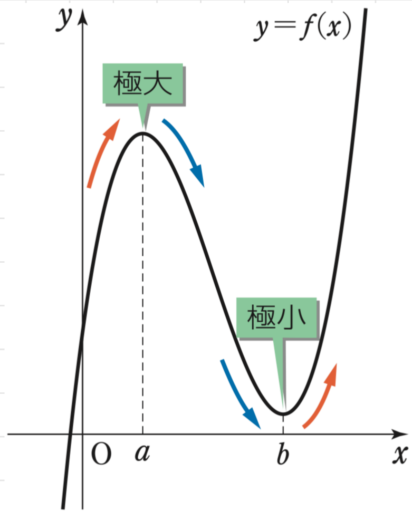
関数の極大・極小

$f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき

$f(x)$ は $x=a$ で極大であり, $f(a)$ は極大値

$f(x)$ が $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき

$f(x)$ は $x=b$ で極小であり, $f(b)$ は極小値



極大値と極小値をまとめて極値という.

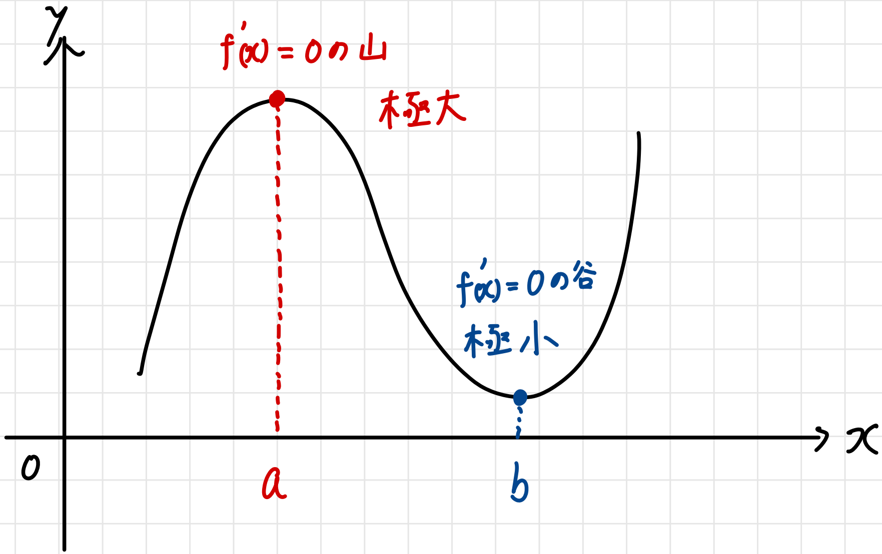
※ 極値が必ずしも最大値・最小値になるとは限らない

$f'(x)$ と $f(x)$ の増減

$f'(x) > 0$ のとき → 接線の傾きが正 → $f(x)$ は増加

$f'(x) < 0$ のとき → 接線の傾きが負 → $f(x)$ は減少

$f'(x) = 0$ のとき → 接線の傾きが 0 → $f(x)$ の増加減少の切り替わりポイント



$x = a$ のとき極大値

$x = b$ のとき極小値

} 極大値, 極小値をまとめて極値

※ 極値が最大値最小値になるとは限らない

練習 16 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x$　　　(2)　~~$y=-x^3+3x^2+1$~~

(1)

① $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f'(x)=0$ とする

$3x^2-12x+9=0$

$3(x^2-4x+3)=0$

$3(x-1)(x-3)=0$

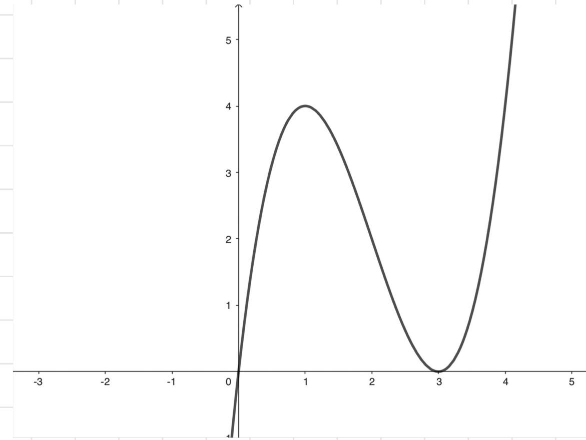
$x=1,\ 3$

②

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	4	↗

$x=1$ のとき極大値 4

$x=3$ のとき極小値 0



練習 16 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

~~(1)　$y=x^3-6x^2+9x$~~　　(2)　$y=-x^3+3x^2+1$

(2)

① $f(x) = -x^3+3x^2+1$

$f'(x) = -3x^2+6x$

$f'(x) = 0$ とする

$-3x^2+6x=0$

$-3x(x-2)=0$

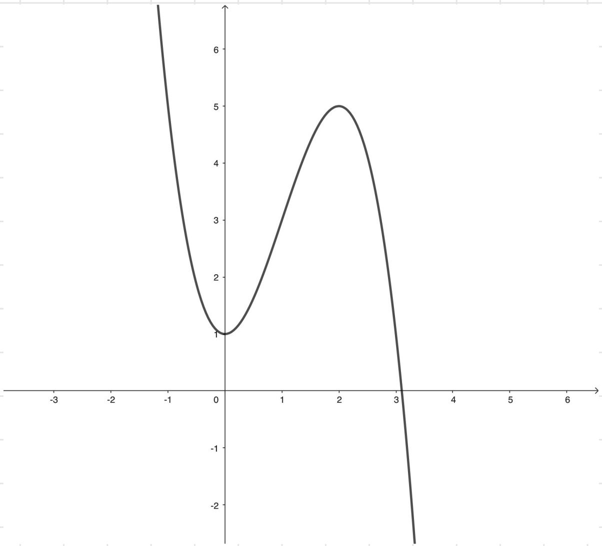
$x=0,\ 2$

②

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$

$x=2$ のとき極大値 5

$x=0$ のとき極小値 1



練習 17 次の関数の増減を調べ，極値をもたないことを確かめよ。

(1) $f(x)=-x^3$　　(2) $f(x)=x^3+2x$

(1)

$f'(x)=-3x^2$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↘

$f(x)$ は常に減少し

$f(x)$ は極値をもたない

(2)

$f'(x)=3x^2+2$ より

$3x^2\geqq 0$ であるから常に $f'(x)>0$

$f(x)$ は常に増加し

$f(x)$ は極値をもたない

練習 18 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=3x^4+4x^3-12x^2+5$　　(2) ~~$y=x^4-8x^2+2$~~

~~(3) $y=-x^4+4x^3-4x^2$　　(4) $y=x^4-4x^3+12$~~

(1)

$y'=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)=12x(x+2)(x-1)$

$y'=0$ とすると $x=0, -2, 1$

y の増減表は

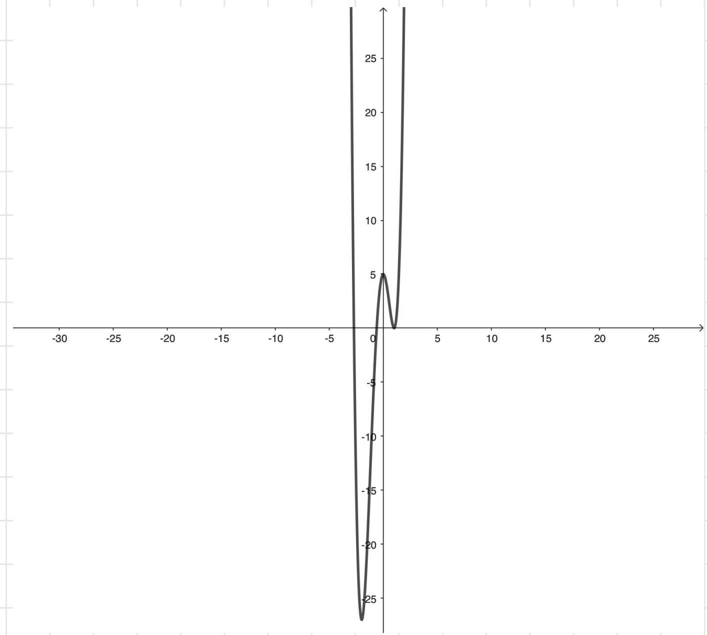
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=-2$ のとき極小値 -27

$x=0$ のとき極大値 5

$x=1$ のとき極小値 0

グラフは下図



練習 18

次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

~~(1) $y=3x^4+4x^3-12x^2+5$~~　　(2) $y=x^4-8x^2+2$

~~(3) $y=-x^4+4x^3-4x^2$　　(4) $y=x^4-4x^3+12$~~

(2)

$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$

$y'=0$とすると $x=0,\ \pm2$

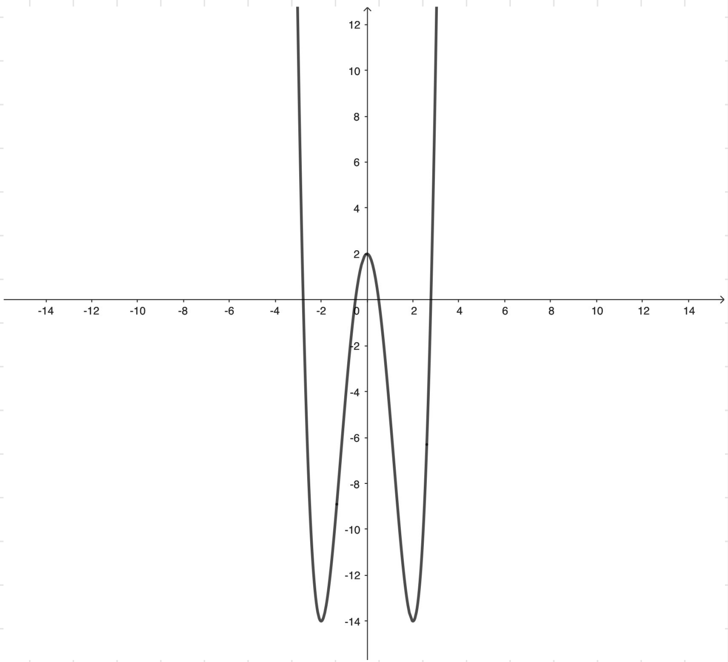
yの増減表は

x	…	-2	…	0	…	2	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-14	↗	2	↘	-14	↗

$x=0$のとき極大値 2

$x=\pm2$のとき極小値 -14

グラフは下図



練習 18 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

~~(1) $y=3x^4+4x^3-12x^2+5$~~ ~~(2) $y=x^4-8x^2+2$~~

(3) $y=-x^4+4x^3-4x^2$ ~~(4) $y=x^4-4x^3+12$~~

(3)

$y'=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x^2-3x+2)=-4x(x-1)(x-2)$

$y'=0$ とすると $x=0, 1, 2$

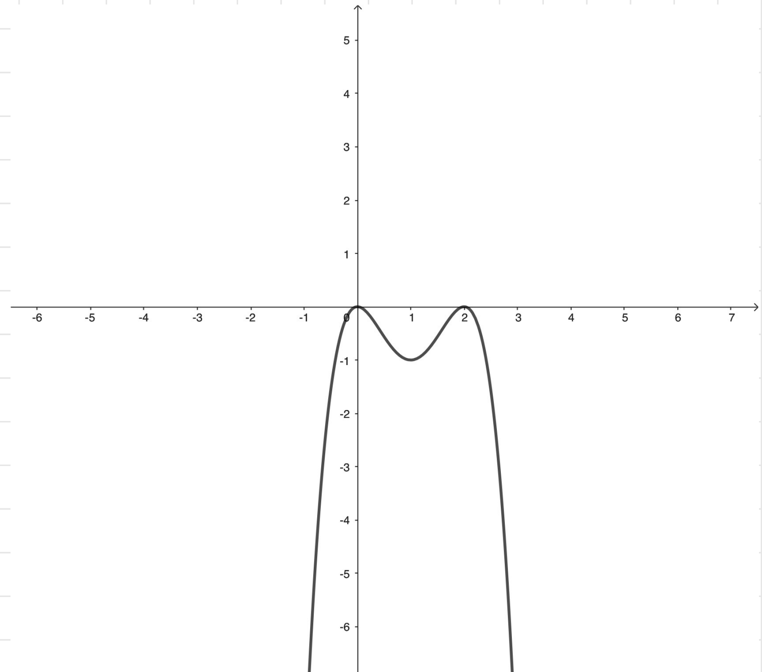
y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

$x=0, 2$ のとき極大値 0

$x=1$ のとき極小値 -1

グラフは下図



練習 18

次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

~~(1)　$y=3x^4+4x^3-12x^2+5$~~　　~~(2)　$y=x^4-8x^2+2$~~

~~(3)　$y=-x^4+4x^3-4x^2$~~　　(4)　$y=x^4-4x^3+12$

(4)

$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$y'=0$ とすると $x=0,\ 3$

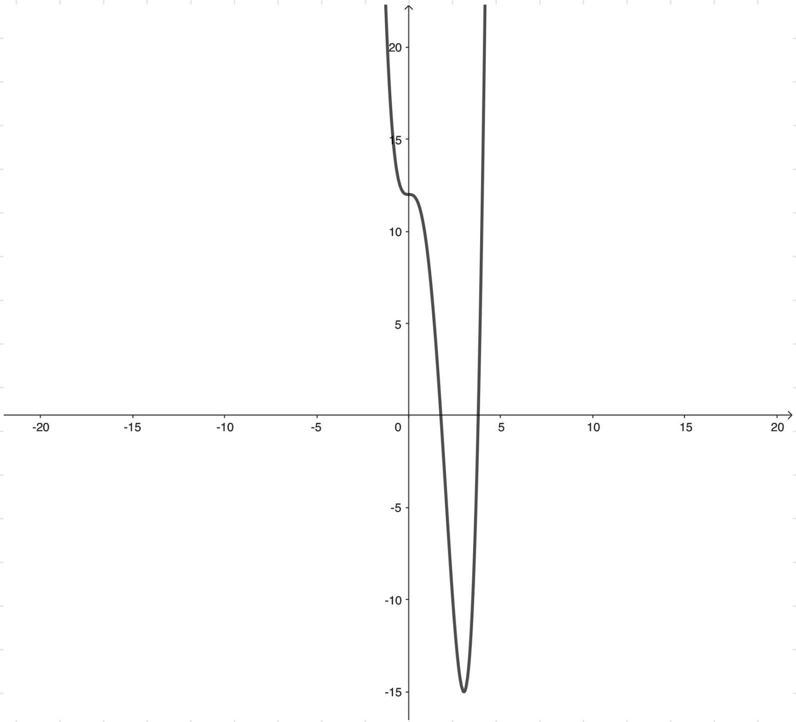
y の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	12	↘	-15	↗

$x=3$ のとき極小値 -15

極大値なし

グラフは下図



xの多項式で表される関数 $f(x)$ について

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる. $f'(a)=0$

但し, $f'(a)=0$ であっても $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない

練習 19 関数 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$ が $x=-1$ で極大値 8 をとるように, 定数 a, b の値を定めよ。また, 極小値を求めよ。

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 8 をとるので

$f(-1)=8$, $f'(-1)=0$ がいえる

$f(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)+b$

$a+b+8=8$

$a+b=0$ … ①

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)-9=0$

$-2a-6=0$ … ②

①②より $a=-3$, $b=3$ なので

$f(x)=x^3-3x^2-9x+3$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x+3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1, 3$

$f(-1)$ は極大値なので $f(3)$ が極小値

$f(3)=3^3-3\cdot3^2-9\cdot3+3=-24$

$a=-3$, $b=3$. $x=3$ で極小値 -24

練習 20 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^3+3x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 2)$ (2) $y=-x^3+x^2+x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$

~~(3) $y=x^4-2x^3+3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$~~

(1) $f(x)=x^3+3x^2$ とする.

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,-2$

$f(x)$ の増減表は

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	20

$x=2$ で最大値 20

$x=-3, 0$ で最小値 0

(2) $f(x)=-x^3+x^2+x$ とする.

$f'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1, 1$

$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2

$x=1$ で最大値 1

$x=2$ で最小値 -2

練習 20 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

~~(1) $y=x^3+3x^2$ $(-3\leqq x\leqq 2)$ (2) $y=-x^3+x^2+x$ $(0\leqq x\leqq 2)$~~

(3) $y=x^4-2x^3+3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

(3) $f(x)=x^4-2x^3+3$ とする.

$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ \frac{3}{2}$

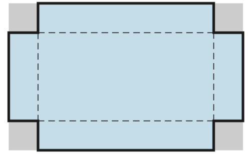
$f(x)$ の増減表は

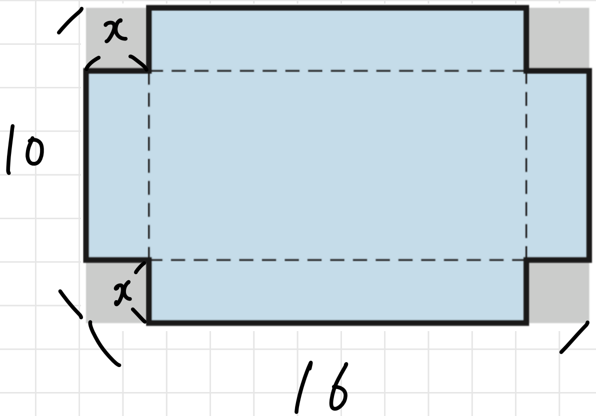
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	6	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{21}{16}$	$\nearrow$	3

$x=-1$ のとき最大値 6

$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{21}{16}$

練習 21 縦 10 cm，横 16 cm の長方形の厚紙の四隅から，合同な正方形を切り取り，ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。





切り取る長さを x cm とする. $(0 < x < 5)$

この直方体の体積を $f(x)$ とすると

$$f(x) = (10-2x)\cdot(16-2x)\cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x-20)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{20}{3}, 2$

$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	最大	↘	

2 cm

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $2x^3-6x+3=0$ ~~(2) $x^3+3x^2+2=0$~~

~~(3) $-x^3+3x^2-4=0$~~ ~~(4) $x^4-8x^2+1=0$~~

(1) $f(x)=2x^3-6x+3$

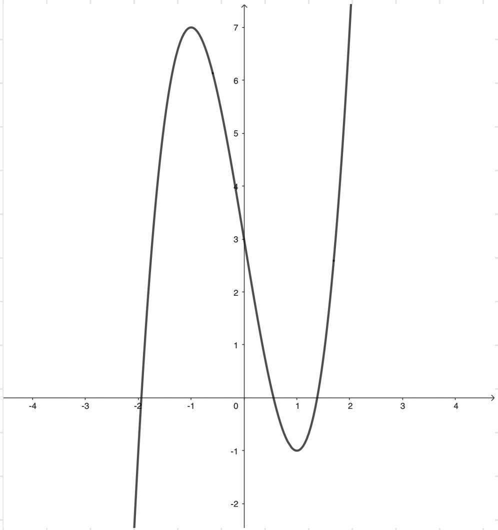
$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=\pm 1$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$y=2x^3-6x+3$ は

x 軸と3点で交わるので

異なる実数解 3コ

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

~~(1) $2x^3-6x+3=0$~~　(2) $x^3+3x^2+2=0$

~~(3) $-x^3+3x^2-4=0$~~　~~(4) $x^4-8x^2+1=0$~~

(2) $f(x)=x^3+3x^2+2$ とする.

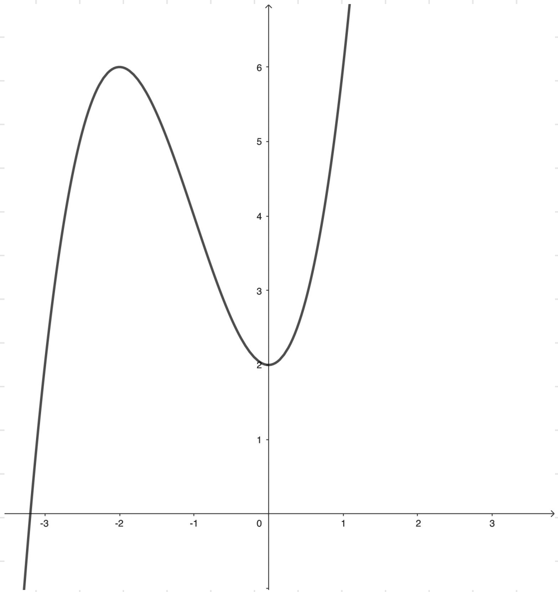
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,-2$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$y=x^3+3x^2+2$ は

x 軸と1点で交わるので

異なる実数解 1コ

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

~~(1) $2x^3-6x+3=0$~~ ~~(2) $x^3+3x^2+2=0$~~

(3) $-x^3+3x^2-4=0$ ~~(4) $x^4-8x^2+1=0$~~

(3) $f(x)=-x^3+3x^2-4$ とする.

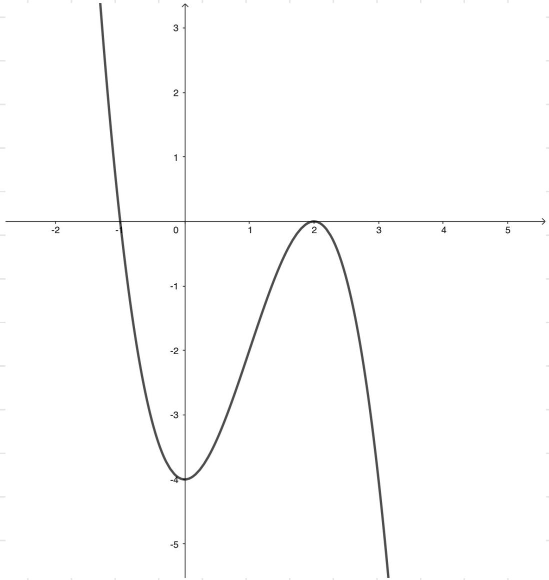
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ 2$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘

グラフは下図



左図より

$y=-x^3+3x^2-4$ は

x 軸と2点で交わるので

異なる実数解 2コ

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

~~(1) $2x^3-6x+3=0$~~　~~(2) $x^3+3x^2+2=0$~~

~~(3) $x^3+3x^2-4=0$~~　(4) $x^4-8x^2+1=0$

(4) $f(x)=x^4-8x^2+1$ とする

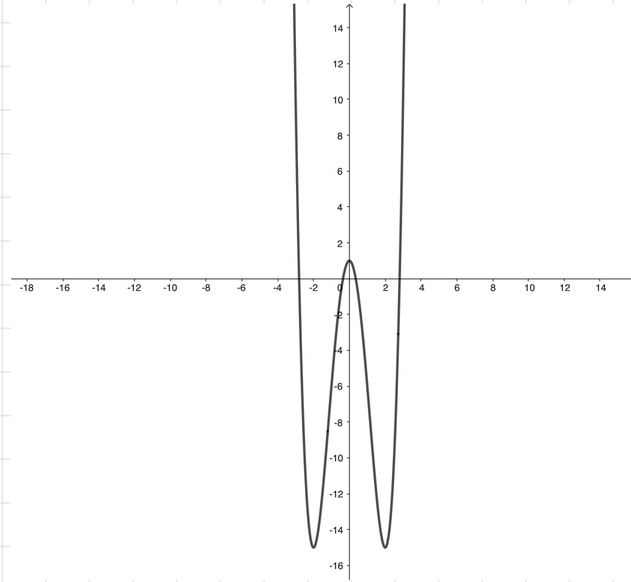
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ \pm 2$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-15	↗	1	↘	-15	↗

グラフは下図



上図より $y=x^4-8x^2+1$ は

x 軸と4点で交わるので

異なる実数解4コ

練習 23　方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ がただ 1 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$2x^3-3x^2=a$

$f(x)=2x^3-3x^2$ とする

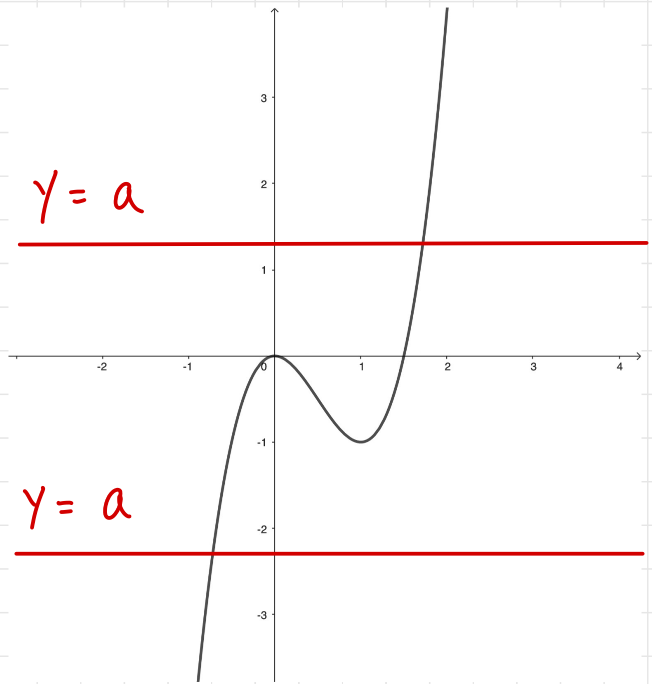
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ 1$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

グラフは下図



左図より

$2x^3-3x^2-a=0$ が

ただ1つの実数解をもつのは

$a<-1,\ a>0$

練習 24 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3+3x^2+5 \geqq 9x$$

$x^3+3x^2-9x+5 \geqq 0$ がいえればよい

$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ とする.

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=-3,\ 1$

$f(x)$ の $x \geqq 0$ の増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=1$ のとき 極小値 0

$f(x)$ の最小値が 0 なので $f(x) \geqq 0$

したがって $x \geqq 0$ のとき

$x^3+3x^2-9x+5 \geqq 0$ なので

$x \geqq 0$ のとき $x^3+3x^2+5 \geqq 9x$

不定積分

xで微分すると$f(x)$になる関数を$f(x)$の原始関数という.

一般に関数$f(x)$の原始関数の1つを$F(x)$とすると, $f(x)$の任意の原始関数は

$F(x)+C$ (Cは積分定数)　と表される. これを$f(x)$の不定積分という.

$\int f(x)\,dx$で表し, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ (Cは積分定数) とかく.

関数$f(x)$の不定積分

$F'(x)=f(x)$のとき $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ (Cは積分定数)

関数x^nの不定積分

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (\text{Cは積分定数})$$

練習 25 次の中から, $3x^2$ の原始関数であるものを選べ。

① $6x$　② x^3　③ x^3+2x　④ x^3-4

$3x^2$の原始関数 → 微分したら$3x^2$になる

② ④

練習 27 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 5x^2dx$　(2) $\int (x^2+x-1)\,dx$

(3) $\int (x^3-6x^2-2x+5)\,dx$　(4) $\int (-2x^2-x+7)\,dx$

Cは積分定数とする.

(1) $\int 5x^2\,dx = \frac{5}{3}x^3 + C$

(2) $\int (x^2+x-1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(3) $\int (x^3-6x^2-2x+5)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C$

(4) $\int (-2x^2-x+7)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$

練習 28 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (t+2)(3t-1)\,dt$　(2) $\int 3(t-1)^2dt$

Cは積分定数とする.

(1) $\int (t+2)(3t-1)\,dt$

$= \int (3t^2+5t-2)\,dt$

$= t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + C$

(2) $\int 3(t-1)^2\,dt$

$= \int (3t^2-6t+3)\,dt$

$= t^3 - 3t^2 + 3t + C$

練習 29 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

[1] $F'(x)=3x^2-4$　　[2] $F(-1)=5$

[1] より

$$F(x)=\int F'(x)\,dx=\int(3x^2-4)\,dx=x^3-4x+C\ (C\text{は積分定数})\ \cdots ①$$

① [2] より

$$F(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)+C=5$$

$$-1+4+C=5$$

$$C=2$$

$$\underline{F(x)=x^3-4x+2}$$

定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

($f(x)$ を a から b まで積分する)

練習 30

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2dx$ (3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3dx$ (4) $\displaystyle\int_3^0 2\,dx$

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=\frac{1}{2}\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{8}{2}=4$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3=\frac{9}{3}=3$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^1=\frac{1}{4}\cdot 1^4-\frac{1}{4}\cdot(-2)^4=-\frac{15}{4}$

(4) $\displaystyle\int_3^0 2\,dx=\Big[2x\Big]_3^0=2\cdot 0-2\cdot 3=-6$

練習 31

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx$　　(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3+2t)\,dt$　　(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2\,dt$

(1) $\int_0^2 (x^2+4x-5)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$

(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3)\,dx = \int_2^3 (x^2-5x+6)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3 = -\frac{1}{6}$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3+2t)\,dt = \left[-\frac{1}{4}t^4+t^2\right]_{-1}^2 = -\frac{3}{4}$

(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2\,dt = \int_{-2}^2 (t^3+4t^2+4t)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4+\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}$

練習 32 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^3 (x^3-3x+2)\,dx$$

$$\int_1^3 (x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\int_1^3 x^3dx-3\int_1^3 x\,dx+2\int_1^3 dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3-3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3+2\left[x\right]_1^3$$

$$=20-12+4$$

$$=12$$

練習 33 次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2dx-\int_{-1}^1 (x-2)^2dx$$

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2dx-\int_{-1}^1 (x-2)^2dx$$

$$=\int_{-1}^1 \left\{(x+2)^2-(x-2)^2\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^1 8x\,dx$$

$$=\left[4x^2\right]_{-1}^1$$

$$=0$$

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

2 $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

練習 35 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2(3x^2-4x)dx+\int_2^3(3x^2-4x)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^3(x^2+2x)\,dx-\int_1^3(x^2+2x)\,dx$

(1) $\displaystyle\int_1^2(3x^2-4x)\,dx+\int_2^3(3x^2-4x)\,dx=\int_1^3(3x^2-4x)\,dx=\Big[x^3-2x^2\Big]_1^3=10$

(2) $\displaystyle\int_0^3(x^2+2x)\,dx-\int_1^3(x^2+2x)\,dx=\int_0^3(x^2+2x)\,dx+\int_3^1(x^2+2x)\,dx=\int_0^1(x^2+2x)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1$

$\displaystyle=\frac{4}{3}$

練習 36

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=4x+2\int_0^2 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=3x^2+\int_{-1}^1 f(t)\,dt$

(1) $\int_0^2 f(t)\,dt = a \cdots ①$ とおく.

$f(x) = 4x + 2a \cdots ②$

②より　$f(t) = 4t + 2a$

$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (4t+2a)\,dt$

$= \left[2t^2 + 2at\right]_0^2$

$= 8 + 4a \cdots ③$

①③より　$8 + 4a = a$ なので

$a = -\frac{8}{3}$

$a = -\frac{8}{3}$ を ②に代入して

$f(x) = 4x - \frac{16}{3}$

(2) $\int_{-1}^1 f(t)\,dt = a$ とおく $\cdots ①$

$f(x) = 3x^2 + a \cdots ②$

②より　$f(t) = 3t^2 + a$

$\int_{-1}^1 f(t)\,dt = \left[t^3 + at\right]_{-1}^1 = 2 + 2a \cdots ③$

①③より　$2 + 2a = a$

$a = -2$

$a = -2$ を ②に代入して

$f(x) = 3x^2 - 2$

a を定数とするとき，x の関数 $\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数は $f(x)$ である。

すなわち $\quad \dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

練習 37 x の関数 $\int_0^x (3t^2-2t-1)\,dt$ の導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\int_0^3 (3t^2-2t-1) = 3x^2-2x-1$$

練習 38 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2-x-2$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = (x^2-x-2)'$$

$$f(x) = 2x-1$$

また，与えられた等式で $x=a$ とすると 左辺は 0 になるから

$$0 = a^2-a-2$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -1,\ 2$$

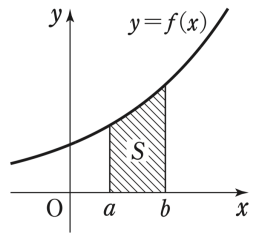
$$f(x) = 2x-1$$

$$\underline{a = -1,\ 2}$$

定積分と面積 (1)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

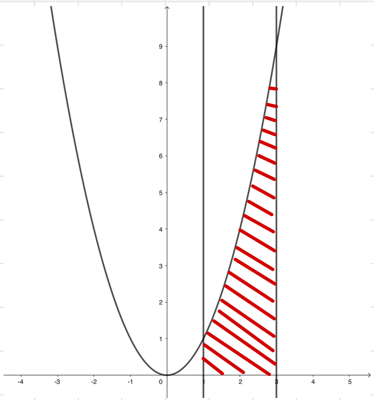


練習 39 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$，2 直線 $x=1$，$x=3$

(2) 放物線 $y=x^2+2$，2 直線 $x=-1$，$x=2$

(1)



$1 \leqq x \leqq 3$ で $y \geqq 0$ なので

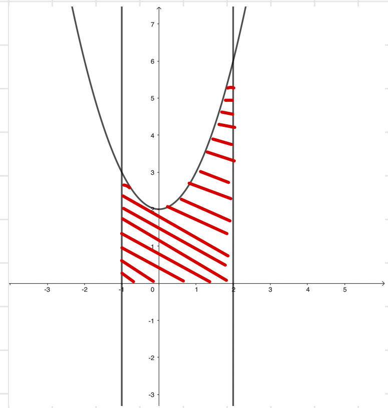
求める面積 S は

$$S=\int_1^3 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$=\frac{26}{3}$$

(2)



$-1 \leqq x \leqq 2$ では $y \geqq 0$

求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^2 (x^2+2)\,dx$$

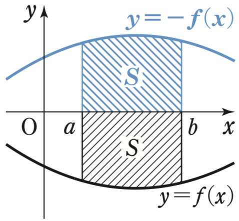
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^2$$

$$=\underline{9}$$

定積分と面積 (2)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

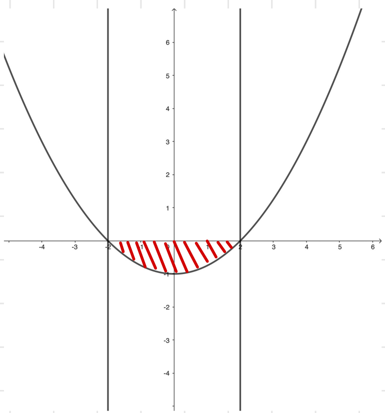
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$



練習 40 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\frac{1}{4}x^2-1$　　(2) $y=x^2-2x$

(1)



$\frac{1}{4}x^2-1=0$ を解いて

$x=\pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ で $y \leqq 0$

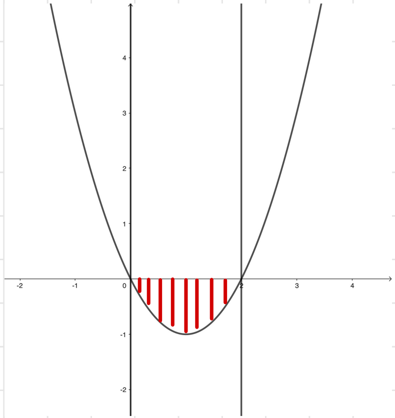
求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{2} -\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}$$

(2)



$x^2-2x=0$ を解いて

$x=0,\ 2$

$0 \leqq x \leqq 2$ で $y \leqq 0$

求める面積 S は

$$S=\int_0^2 -(x^2-2x)\,dx$$

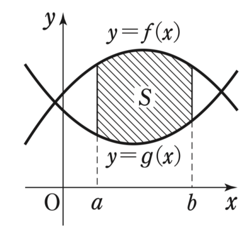
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

定積分と面積 (3)

区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

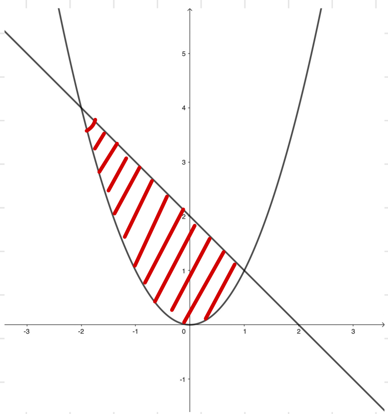


練習 41 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2$，$y=-x+2$　　~~(2) $y=-x^2+3$，$y=2x$~~

~~(3) $y=-x^2+3x$，$y=x^2-x-6$~~

(1)



放物線と直線の交点のx座標は

$$x^2=-x+2$$
$$x^2+x-2=0$$
$$(x+2)(x-1)=0$$
$$x=-2,\ 1$$

よって求める面積Sは

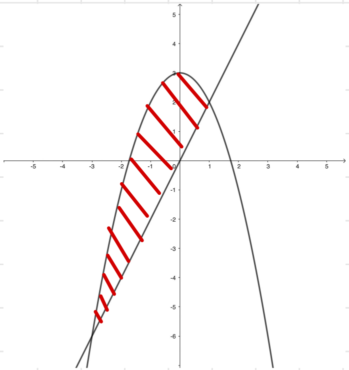
$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x+2)-x^2\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\frac{9}{2}$$

練習 41　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

~~(1)　$y=x^2$，$y=-x+2$~~　　(2)　$y=-x^2+3$，$y=2x$

(3)　$y=-x^2+3x$，$y=x^2-x-6$

(2)



放物線と直線の交点のx座標は

$$-x^2+3=2x$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3,\ 1$$

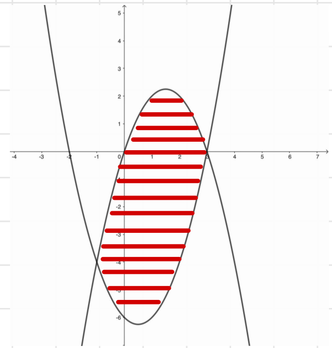
よって求める面積Sは

$$S=\int_{-3}^{1}\{(-x^2+3)-2x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{32}{3}$$

(3)



2つの放物線の交点のx座標は

$$-x^2+3x=x^2-x-6$$

$$2x^2-4x-6=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ 3$$

よって求める面積Sは

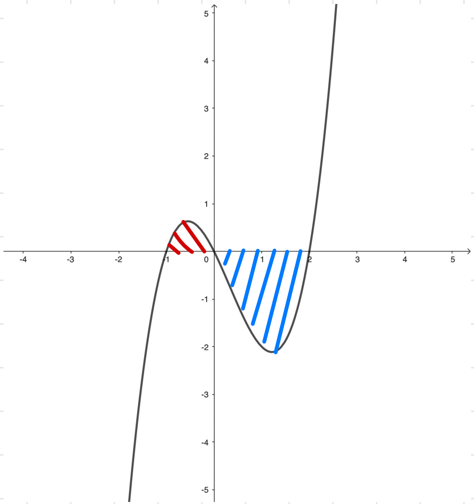
$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x)-(x^2-x-6)\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{64}{3}$$

練習 42 次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$y = x^3 - x^2 - 2x$$



$y = x^3 - x^2 - 2x$ と x 軸との交点の x 座標は

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = -1,\ 0,\ 2$$

グラフは左図　$-1 \leqq x \leqq 0$ で $y \geqq 0$, $0 \leqq x \leqq 2$ で $y \leqq 0$

よって求める面積 S は

$$S = \underline{\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx} + \underline{\int_{0}^{2} -(x^3 - x^2 - 2x)\,dx}$$

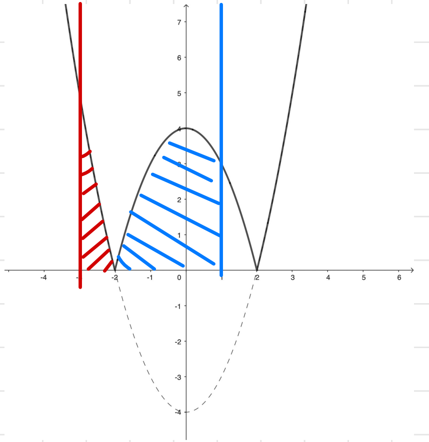
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{37}{12}$$

練習 43 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^{1}|x^2-4|dx$　　(2) $\int_{-1}^{5}|x(x-3)|dx$

(1)



$y=|x^2-4|$ は

$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$ のとき

$y=x^2-4$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき

$y=-x^2+4$

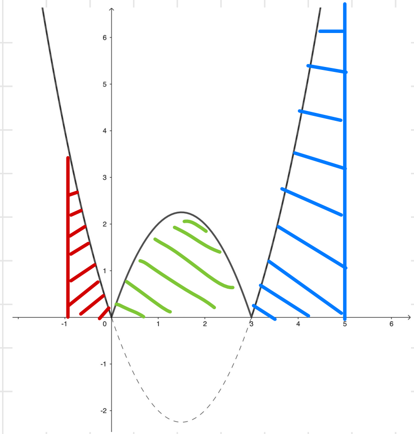
$$\int_{-3}^{1}|x^2-4|\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(x^2-4)\,dx+\int_{-2}^{1}(-x^2+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{34}{3}$$

(2)



$y=|x(x-3)|$,

$y=|x^2-3x|$ は

$x \leqq 0,\ 3 \leqq x$ で

$y=x^2-3x$

$0 \leqq x \leqq 3$ で

$y=-x^2+3x$

$$\int_{-1}^{5}|x(x-3)|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x(x-3)\,dx+\int_{0}^{3}-x(x-3)\,dx+\int_{3}^{5}x(x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{5}$$

$$=15$$

練習 1 曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と，その曲線上の点 $(1,\ 0)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$f(x)=x^3+x^2-2x$

接線の傾きは $f'(1)$，$f'(x)=3x^2+2x-2$ より $f'(1)=3$

接線の方程式は　$y=3x-3$

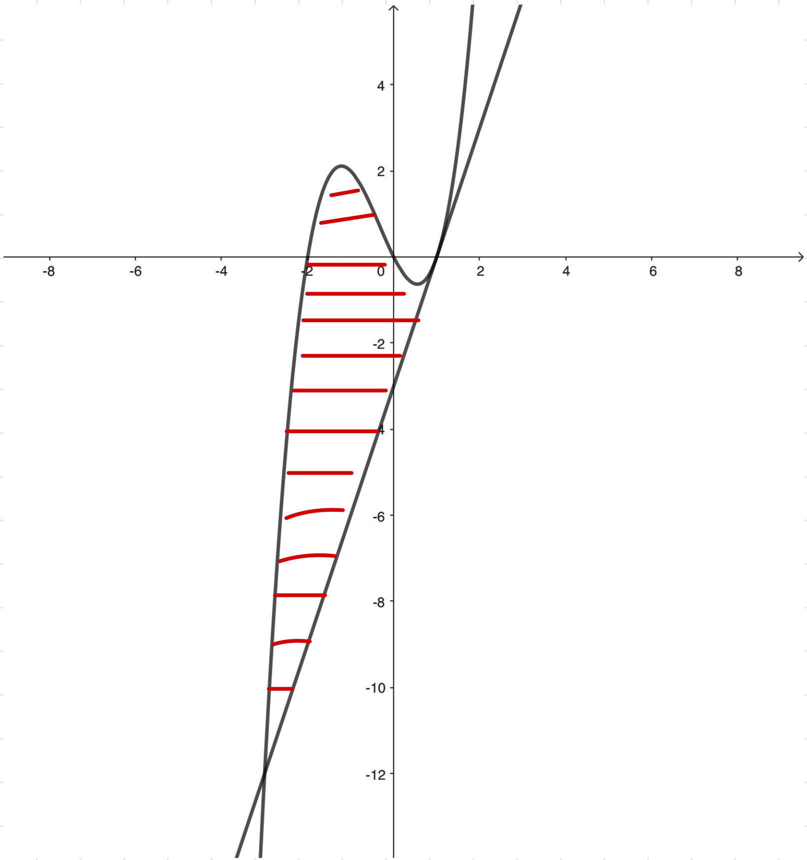
$f(x)$ と接線の交点の x 座標は

$$x^3+x^2-2x=3x-3$$
$$x^3+x^2-5x+3=0$$
$$(x-1)^2(x+3)=0$$

$$x=1,\ -3$$

よって求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2-2x)-(3x-3)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$$



6分の1公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

練習 1 放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$y=-x^2+6x-7$ と x 軸の交点の x 座標は

$-x^2+6x-7=0$ から $x=3\pm\sqrt{2}$

$\alpha=3-\sqrt{2},\ \beta=3+\sqrt{2}$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+6x-7)\,dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-6x+7)\,dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{(-1)}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$