

数C

空間のベクトル



空間の点の座標

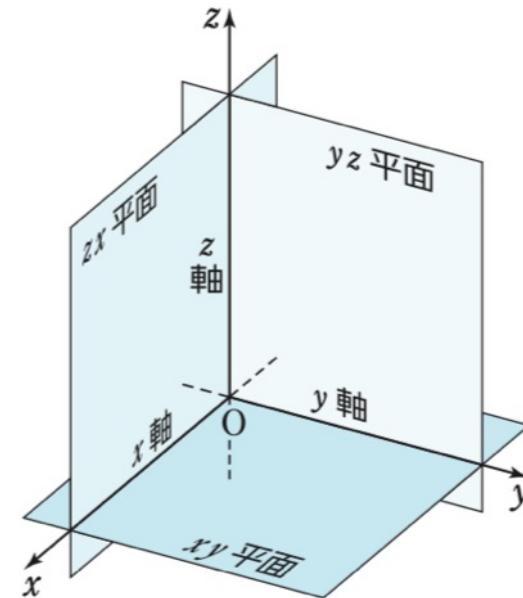
空間に点Oとり、Oで互いに直交する3本の数直線を、 x 軸、 y 軸、 z 軸といい、これらをまとめて座標軸という。点Oは原点。

x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面

y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面

z 軸と x 軸で定まる平面を xz 平面

} まとめて座標平面という。



空間の点 P に対して P を通り 各座標軸に垂直な平面が

x 軸, y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とする。

A, B, C の各座標軸上で^ての座標がそれぞれ a, b, c のとき
 (a, b, c) を点 P の座標といふ。

また, $O(0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$

の座標で定められた空間を座標空間といふ。

$P(a, b, c)$ について

xy 平面と対称な座標は $(a, b, -c)$

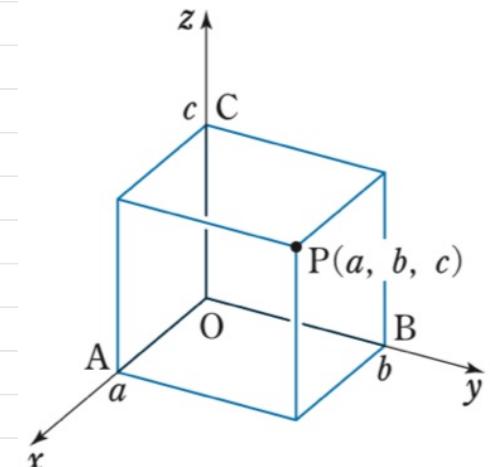
yz 平面と対称な座標は $(-a, b, c)$

zx 平面と対称な座標は $(a, -b, c)$

x 軸に関して対称な座標は $(a, -b, -c)$

y 軸に関して対称な座標は $(-a, b, -c)$

z 軸に関して対称な座標は $(-a, -b, c)$



練習
1

点 $P(1, 3, 2)$ に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) yz 平面に関して対称な点 (2) zx 平面に関して対称な点
(3) z 軸に関して対称な点 (4) 原点に関して対称な点

(1) $(-1, 3, 2)$ (2) $(1, -3, 2)$

(3) $(-1, -3, 2)$ (4) $(-1, -3, -2)$

座標空間において

原点Oと点P(a,b,c)との距離OPは

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

練習

2

原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1) P(2, 3, 6)

(2) Q(3, -4, 5)

$$(1) OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$OP = 7$$

$$(2) OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 25}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$OQ = 5\sqrt{2}$$

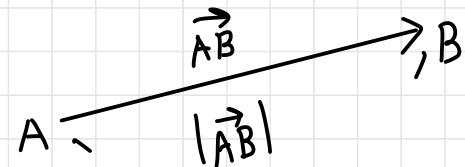
空間における始点A, 終点Bとする。ABが表すベクトルを \vec{AB} 。

\vec{AB} の大きさは $|\vec{AB}|$

\vec{AB} の逆ベクトル…大きさが同じで向きが逆なので \vec{BA} 。また、 $\vec{AB} = -\vec{BA}$

零ベクトル…大きさが零のベクトル。 $\vec{0}$ と表す。

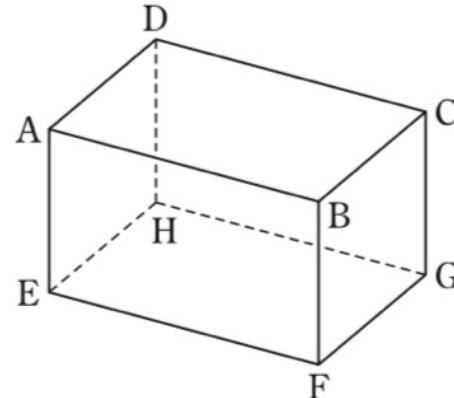
単位ベクトル…大きさが1のベクトル



練習
3 例2において、 \vec{AE} に等しいベクトルで \vec{AE} 以外のものをすべてあげよ。また、 \vec{AD} の逆ベクトルで \vec{DA} 以外のものをすべてあげよ。

\vec{AE} に等しいベクトル $\vec{BF}, \vec{CG}, \vec{DH}$

\vec{AD} の逆ベクトル $\vec{CB}, \vec{GF}, \vec{HE}$



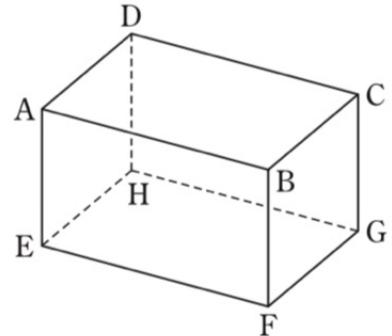
練習

4

例3の直方体において、次の□に適する頂点の文字を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A}$ □

(2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \square \overrightarrow{D}$



(1) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ ④

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(2) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ ④

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{BD}$$

練習

5

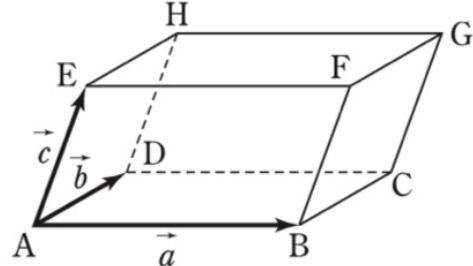
例題1において、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(1) \overrightarrow{EC}

(2) \overrightarrow{BH}

(3) \overrightarrow{DF}

(4) \overrightarrow{HF}



(1)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{HF} &= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

空間ベクトルの成分表示

○を原点とする座標空間

基本ベクトル… x 軸, y 軸, z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

それぞれ, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ と表す。

$\vec{a} = \vec{OA}$ の A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

a_1 を x 成分, a_2 を y 成分, a_3 を z 成分といい, (a_1, a_2, a_3) を成分表示という。

基本ベクトルの成分表示は $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ となる。

零ベクトルの成分表示は $\vec{0} = (0, 0, 0)$

練習
6

次のベクトル \vec{a}, \vec{b} が等しくなるように, x, y, z の値を定めよ。

$$\vec{a} = (2, -1, -3), \vec{b} = (x-4, y+2, -z+1)$$

①②③を解くと

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x-4 \dots ① \\ -1 = y+2 \dots ② \\ -3 = -z+1 \dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} x = 6, & y = -3, & z = 4 \\ \hline \end{array}$$

成分表示されたベクトルの大きさ。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ のとき}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

練習
7

次のベクトルの大きさを求めよ。

$$(1) \vec{a} = (1, 2, -2)$$

$$(2) \vec{b} = (-5, 3, -4)$$

$$\begin{aligned}(1) |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \\&= \sqrt{1+4+4} \\&= \sqrt{9} \\&= 3\end{aligned}\quad \begin{aligned}(2) |\vec{b}| &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} \\&= \sqrt{25+9+16} \\&= \sqrt{50} \\&= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

和, 差, 実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

$$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad k \text{は実数}$$

練習
8

$\vec{a} = (1, 3, -2)$, $\vec{b} = (4, -3, 0)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ。

$$(1) \vec{a} + \vec{b} \quad (2) \vec{a} - \vec{b} \quad (3) 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad (4) -3(\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -2) + (4, -3, 0) = \underline{\underline{(5, 0, -2)}}$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (1, 3, -2) - (4, -3, 0) = \underline{\underline{(-3, 6, -2)}}$$

$$(3) 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1, 3, -2) + 3(4, -3, 0) = \underline{\underline{(14, -3, -4)}}$$

$$(4) -3(\vec{a} - 2\vec{b}) = -3 \left\{ (1, 3, -2) - 2(4, -3, 0) \right\}$$

$$= -3(-7, 9, -2)$$

$$= \underline{\underline{(21, -27, 6)}}$$

2点 A, B とベクトル \vec{AB}

2点 A(a_1, a_2, a_3) B(b_1, b_2, b_3) について

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

練習 9 次の2点 A, B について、 \vec{AB} を成分表示し、 $|\vec{AB}|$ を求めよ。

- (1) A(2, 1, 4), B(3, -1, 5) (2) A(3, 0, -2), B(1, -4, 2)

(1)

$$\vec{AB} = (3, -1, 5) - (2, 1, 4) = \underline{\quad (1, -2, 1) \quad}$$

(2)

$$\vec{AB} = (1, -4, 2) - (3, 0, -2) = \underline{\quad (-2, -4, 4) \quad}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = \underline{\quad 6 \quad}$$

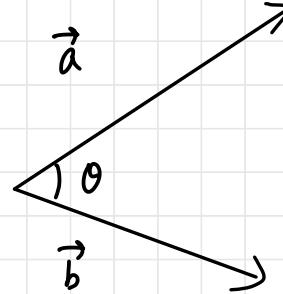
ベクトルの内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

また、 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



練習
10

次の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について、内積とそのなす角 θ を求めよ。

$$(1) \vec{a} = (2, -3, 1), \vec{b} = (-3, 1, 2)$$

$$(2) \vec{a} = (2, 4, 3), \vec{b} = (-2, 1, 0)$$

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = -7$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

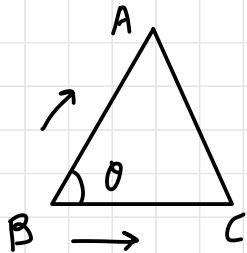
$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{14}$$

$$\theta = 120^\circ$$

練習
11 3点 A(6, 7, -8), B(5, 5, -6), C(6, 4, -2) を頂点とする $\triangle ABC$
において, $\angle ABC$ の大きさを求めよ。



$$\angle ABC = \theta \text{ とする。}$$

θ を求めるためには

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} \text{ を求めよ。}$$

$$\vec{BA} = (6, 7, -8) - (5, 5, -6) = (1, 2, -2)$$

$$\vec{BC} = (6, 4, -2) - (5, 5, -6) = (1, -1, 4)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = -9$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta: 135^\circ$$

2つのベクトル $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$ の両方に垂直で,

大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル \vec{p} を求めよ。

$$\vec{p} = (x, y, z) \text{ とする。}$$

$$\vec{a} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 2x - z = 0 \cdots ①$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = x + 3y - 2z = 0 \cdots ②$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{6} \text{ より}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{p}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 6 \cdots ③$$

$$① \text{ に } z = 2x \cdots ①'$$

$$①' \text{ に } ②' \text{ 代入}$$

$$x + 3y - 4x = 0$$

$$y = x \cdots ②'$$

$$①' ②' ③' \text{ に 代入}$$

$$x^2 + x^2 + (2x)^2 = 6$$

$$6x^2 = 6$$

$$x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ のとき}$$

$$x = -1 \text{ のとき}$$

$$①' ②' ③' \text{ に } y = 1, z = 1 \quad ①' ②' ③' \text{ に } y = -1, z = -2$$

$$\vec{p} = (1, 1, 2), (-1, -1, -2)$$

位置ベクトル

① 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

② 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して 線分を $m:n$ に

内分 ... $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$, 外分 ... $\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$

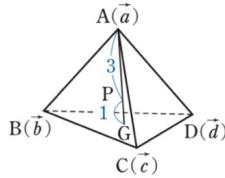
AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

③ 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル, \vec{g} は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

練習
13

4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ において, $\triangle BCD$ の重心を $G(\vec{g})$, 線分 AG を $3:1$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。 \vec{p} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を用いて表せ。



$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

$$\vec{AP} = \frac{3}{4} \vec{AG}$$

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{3}{4} (\vec{g} - \vec{a})$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{g} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \end{aligned}$$

同じ平面上にある点

点Pが平面ABC上にある $\Leftrightarrow \vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$ となる実数s, tが存在する。

練習
15 3点 A(-1, 2, -1), B(2, -2, 3), C(2, 4, -1) の定める平面ABC
上に点 P(x, 3, 1) があるとき, xの値を求めよ。

$$\vec{CP} = (x-2, -1, 2), \vec{CA} = (-3, -2, 0), \vec{CB} = (0, -6, 4) \text{ に対して}$$

$\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$ となる実数s, tが存在する。 \rightarrow ③ ①) $t = \frac{1}{2}$, これを②に代入

$$(x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$$

$$(x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$$

$$\begin{cases} x-2 = -3s \dots ① \\ -1 = -2s-6t \dots ② \\ 2 = 4t \dots ③ \end{cases}$$

$$s = -1$$

これを①に代入すると

$$\underline{x = 5}$$

練習 16 四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC を 1:2 に内分する点を Q、線分 MQ の中点を R とし、直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}}{2} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12}$$

P は OR 上の点なので、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k が存在する。

$$\overrightarrow{OP} = k \cdot \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12} : \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \cdots ①$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

P は平面 ABC 上にあるので

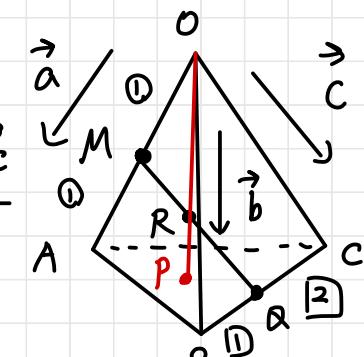
$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) : s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \cdots ②$$

①②より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} : s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}$$

(応用例題の解答方法)



$$\frac{1}{4}k = s \dots (P)$$

$$\frac{1}{3}k = t \dots (1)$$

$$\frac{1}{6}k = 1 - s - t \dots (1')$$

(P) (1) を (1') に代入

$$\frac{1}{6}k = 1 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{3}k$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$$k = \frac{4}{3} \notin \textcircled{1} \text{ に代入}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

✓

四面体 OABC において、辺 OA の中点を M、辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q、線分 MQ の中点を R とし、直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

$$(s+t+u=1)$$

解説方法

PはOR上の点なので

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する。

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}}{2} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12}$$

$$\overrightarrow{OP} = k \cdot \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \dots \textcircled{1}$$

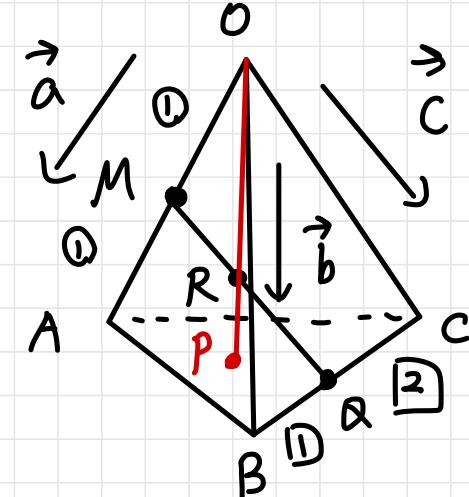
∴ Pが平面ABC上にあるので

$$k = \frac{4}{3} \text{ で } \textcircled{1} \text{ は成り立つ}$$

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$



2点間のキリ、内分点・外分点の座標

2点 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)について

① A, B 間のキリは

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

② ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

③ ABを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

2点 A(1, 3, -2), B(4, -3, 1)について、次のものを求めよ。

- (1) 2点 A, B 間の距離
- (2) 線分 AB の中点の座標
- (3) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標
- (4) 線分 AB を 2:1 に外分する点の座標

$$(1) AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-3)^2 + (1-(-2))^2} = 3\sqrt{6}$$

$$(2) \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{-2+1}{2} \right), \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2+1}, \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{2+1}, \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{2+1} \right)$$

$$= \left(3, -1, 0 \right)$$

$$(4) \left(\frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2-1}, \frac{-1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{2-1}, \frac{(-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{2-1} \right)$$

$$= \left(7, -9, 4 \right)$$

3点 A(2, -1, 4), B(1, 3, 0), C(3, 1, 2)を頂点とする△ABC の重心の座標を、原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

$$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3} \right)$$

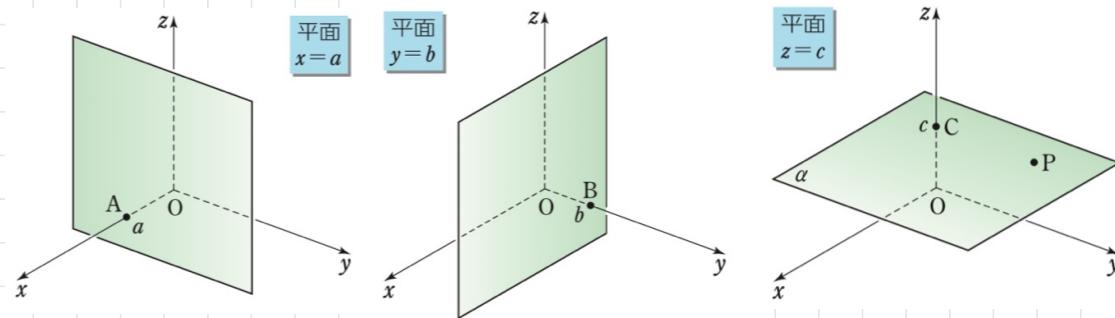
$$= \left(2, 1, 2 \right)$$

座標平面に平行な平面の方程式

点 $A(a, 0, 0)$ を通り、 yz 平面に平行な平面の方程式は $x=a$ (x 軸に垂直)

点 $B(0, b, 0)$ を通り、 zx 平面に平行な平面の方程式は $y=b$ (y 軸に垂直)

点 $C(0, 0, c)$ を通り、 xy 平面に平行な平面の方程式は $z=c$ (z 軸に垂直)



練習
20

点 $(1, 2, 3)$ を通り、次のような平面の方程式を求めよ。

- (1) xy 平面に平行 (2) yz 平面に平行 (3) y 軸に垂直

(1) $z=3$ (2) $x=1$ (3) $y=2$

球面の方程式

点 (a, b, c) を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

とくに、原点を中心 半径 r の球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 原点を中心とする半径 3 の球面
- (2) 点(1, 2, -3)を中心とする半径 4 の球面
- (3) 点 A(0, 4, 1)を中心とし、点 B(2, 4, 5)を通る球面
- (4) 2 点 A(2, 0, -3), B(-2, 6, 1)を直径の両端とする球面

$$(1) \frac{x^2 + y^2 + z^2 = 9}{}$$

$$(2) \frac{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16}{}$$

$$(3) AB = \sqrt{(2-0)^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$\frac{\text{半径}}{1}$

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\frac{x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20}{}$$

$$(4) AB の中点は \left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) = (0, 3, -1)$$

ABが直徑 → 中心と点Aの長さが半径

$$\sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\therefore \frac{x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17}{}$$

練習
22 應用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。その円の中心
の座標と半径を求めよ。

玉球面と yz 平面が交わるのは $x=0$ のとき

玉球面の方程式は $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ なので

$x=0$ のとき

$$(0-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

$$(y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

この方程式は yz 平面上では円

中心は $(0, -2, 3)$ 半径は 3
