

数C

空間のベクトル



空間の点の座標

空間に点Oをとり、Oで互いに直交する3本の数直線をX軸、Y軸、Z軸といい。

これらをまとめて座標軸という。点Oは原点。

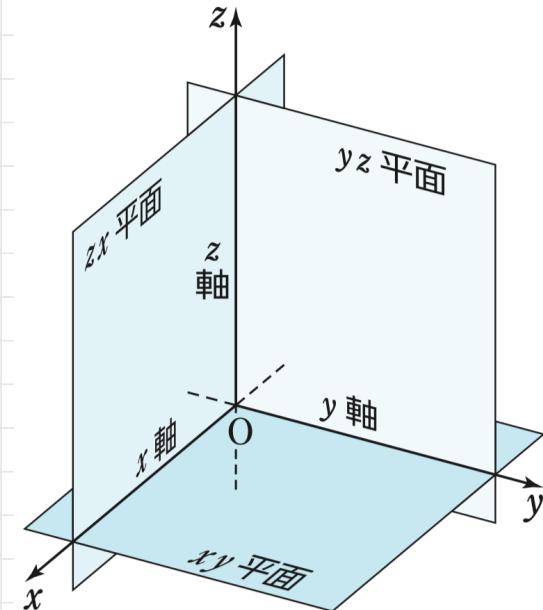
X軸とY軸で定まる平面をXY平面

Y軸とZ軸で定まる平面をYZ平面

Z軸とX軸で定まる平面をZX平面



まとめて座標平面という。



空間の点 P に対して P を通り、各座標軸に垂直な平面が

x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点を A, B, C とする。

A, B, C の各座標軸上での座標がそれぞれ a, b, c のとき
 (a, b, c) を点 P の座標といふ

また、 $O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ の座標で定められた空間を座標空間といふ。

$P(a, b, c)$ について

xy 平面と対称な座標は $(a, b, -c)$

x 軸に関して対称な座標は $(a, -b, -c)$

yz 平面と対称な座標は $(-a, b, c)$

y 軸に関して対称な座標は $(-a, b, -c)$

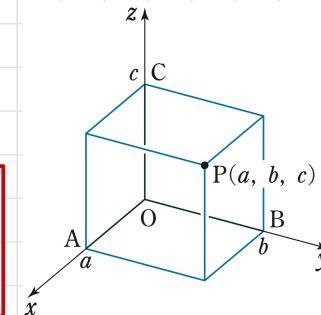
zx 平面と対称な座標は $(a, -b, c)$

z 軸に関して対称な座標は $(-a, -b, c)$

練習 1 点 $P(1, 3, 2)$ に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) yz 平面に関して対称な点 (2) zx 平面に関して対称な点
- (3) z 軸に関して対称な点 (4) 原点に関して対称な点

- (1) $(-1, 3, 2)$ (2) $(1, -3, 2)$ (3) $(-1, -3, 2)$ (4) $(-1, -3, -2)$



原点Oと点 $P(a, b, c)$ の距離は $OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

練習

2

原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1) $P(2, 3, 6)$

(2) $Q(3, -4, 5)$

(1) $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

(2) $OQ = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

空間における始点 A, 終点 B として \vec{AB} が表すベクトルを \vec{AB} と表す。

\vec{AB} の大きさは $|\vec{AB}|$ と表す。

\vec{AB} の逆ベクトル … 大きさが同じで向きが逆のベクトル。 \vec{AB} について \vec{BA} または $-\vec{AB}$ と表す。

零ベクトル … 大きさが 0 のベクトル。 $\vec{0}$ と表す。

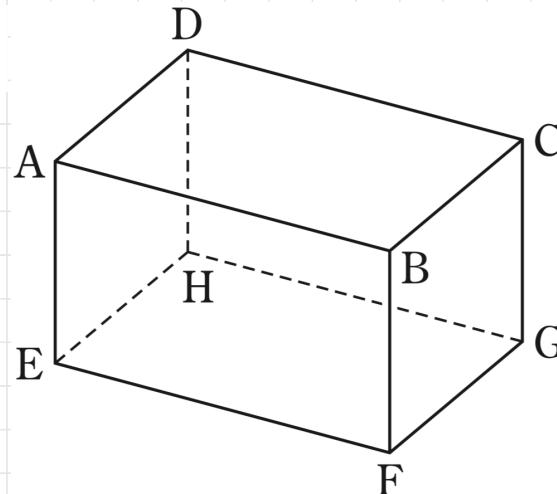
単位ベクトル … 大きさが 1 のベクトル

練習
3

例 2において、 \vec{AE} に等しいベクトルで \vec{AE} 以外のものをすべてあげよ。また、 \vec{AD} の逆ベクトルで \vec{DA} 以外のものをすべてあげよ。

\vec{AE} に等しいベクトル $\vec{BF}, \vec{CG}, \vec{DH}$

\vec{AD} の逆ベクトル $\vec{CB}, \vec{GF}, \vec{HE}$

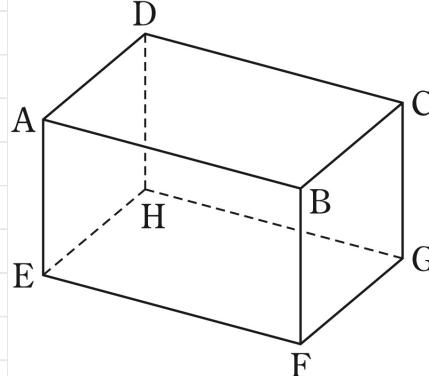


練習
4

例3の直方体において、次の□に適する頂点の文字を求める。

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A}$ □

(2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \square \overrightarrow{D}$



(1) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ なので

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(2) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ なので

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \underline{\overrightarrow{BD}}$$

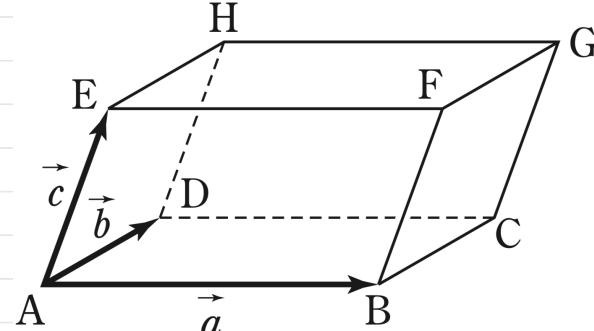
練習
5例題1において、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(1) \overrightarrow{EC}

(2) \overrightarrow{BH}

(3) \overrightarrow{DF}

(4) \overrightarrow{HF}



(1) $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(4) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{b}$

空間ベクトルの成分表示

0を原点とする座標空間において

基本ベクトル … X軸由、Y軸由、Z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル。それぞれ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ で表す。

$\vec{a} = \vec{OA}$ の A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ で表す。

a_1 を X 成分、 a_2 を Y 成分、 a_3 を Z 成分といい、 (a_1, a_2, a_3) を成分表示という。

基本ベクトルの成分表示は $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ となる。

零ベクトルの成分表示は $\vec{0} = (0, 0, 0)$

練習
6

次のベクトル \vec{a}, \vec{b} が等しくなるように、 x, y, z の値を定めよ。

$$\vec{a} = (2, -1, -3), \vec{b} = (x-4, y+2, -z+1)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ なり}$$

$$\begin{cases} 2 = x - 4 & \cdots ① \\ -1 = y + 2 & \cdots ② \\ -3 = -z + 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③を解くと

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

練習

7 次のベクトルの大きさを求めよ。
(1) $\vec{a} = (1, 2, -2)$

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

和, 差, 実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad \text{ただし, } k \text{ は実数}$$

練習

8 $\vec{a} = (1, 3, -2), \vec{b} = (4, -3, 0)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ。

$$(1) \vec{a} + \vec{b} \quad (2) \vec{a} - \vec{b} \quad (3) 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad (4) -3(\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (1, 3, -2) + (4, -3, 0) = (5, 0, -2)$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (1, 3, -2) - (4, -3, 0) = (-3, 6, -2)$$

$$(3) 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2, 6, -4) + (12, -9, 0) = (14, -3, -4)$$

$$(4) -3(\vec{a} - 2\vec{b}) = -3 \{(1, 3, -2) - (8, -6, 0)\} = (21, -27, 6)$$

2点 A, B とベクトル \vec{AB}

2点 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)について

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

練習
9

次の2点 A, Bについて、 \vec{AB} を成分表示し、 $|\vec{AB}|$ を求めよ。

- (1) A(2, 1, 4), B(3, -1, 5) (2) A(3, 0, -2), B(1, -4, 2)

$$(1) \quad \vec{AB} = (3, -1, 5) - (2, 1, 4) = (1, -2, 1)$$

$$(2) \quad \vec{AB} = (1, -4, 2) - (3, 0, -2) = (-2, -4, 4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の
なす角を θ とする。ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ である。このとき

1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

2 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

練習
10

次の 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について、内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$

(2) $\vec{a} = (2, 4, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + (-3) \times 1 + 1 \times 2 = -7$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + 4 \times 1 + 3 \times 0 = 0$

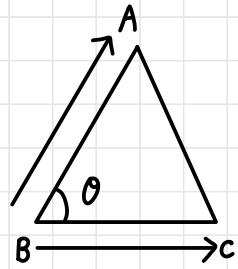
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \theta = 90^\circ$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \theta = 120^\circ$$

3点 A(6, 7, -8), B(5, 5, -6), C(6, 4, -2) を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle ABC$ の大きさを求めよ。

$$\angle ABC = \theta \text{ とする。}$$

θ を求めるためには

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} \text{ を求める。}$$

$$\vec{BA} = (6, 7, -8) - (5, 5, -6) = (1, 2, -2)$$

$$\vec{BC} = (6, 4, -2) - (5, 5, -6) = (1, -1, 4)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-2) \times 4 = -9$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-9}{3 \times 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より } \theta = 135^\circ$$

2つのベクトル $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$ の両方に垂直で,

大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル \vec{p} を求めよ。

$$\vec{p} = (x, y, z) \text{ とする。}$$

$$\vec{a} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 2x - z = 0 \cdots ①$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = x + 3y - 2z = 0 \cdots ②$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 = 6$$

$$|\vec{p}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 6 \cdots ③$$

$$① \text{ に } z = 2x \cdots ①'$$

$$①' \text{ と } ② \text{ に代入 } x + 3y - 4x = 0 \text{ なので } y = x \cdots ②'$$

$$①' \text{ と } ②' \text{ に代入 } x^2 + x^2 + (2x)^2 = 6 \text{ なので } x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \text{ のとき } ①' \text{ と } ②' \text{ に } y = 1, z = 2$$

$$x = -1 \text{ のとき } ①' \text{ と } ②' \text{ に } y = -1, z = -2$$

$$\vec{p} = (1, 1, 2), (-1, -1, -2)$$

1 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

2 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を $m:n$ に内分する点,
 $m:n$ に外分する点の位置ベクトルは, 次のようになる。

$$\text{内分 } \dots \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad \text{外分 } \dots \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

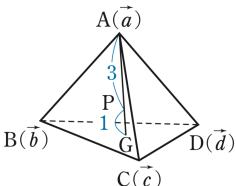
とくに, 線分 AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

3 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置

ベクトル \vec{g} は $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

練習
13

4点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ において, $\triangle BCD$ の重心を $G(\vec{g})$, 線分 AG を $3:1$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とする。 \vec{p} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} を用いて表せ。



$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG} \text{ なので}$$

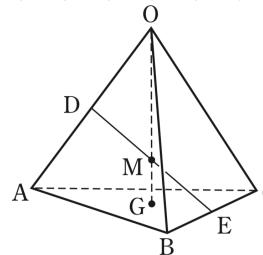
②に①を代入すると

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{3}{4} (\vec{g} - \vec{a}) \text{ なら}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{g} \dots \textcircled{2}$$

四面体OABCにおいて、辺OAの中点をD、辺BCの中点をEとする。
 線分DEの中点をM、△ABCの重心をGとするとき、3点O, M, Gは一直線上にあることを証明せよ。



$\vec{OM} = k \vec{OG}$ となる実数kが存在する。

$$\vec{OD} = \frac{1}{2} \vec{a}, \quad \vec{OE} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \text{ より。}$$

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OD} + \vec{OE}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

$$\text{また, } \vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \text{ なので。}$$

$$\vec{OM} = \frac{3}{4} \vec{OG}$$

よって 3点 O, M, G は同一直線上にある。

点Pが平面ABC上にある

$$\Leftrightarrow \vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB} \text{ となる実数 } s, t \text{ がある}$$

練習
15

3点 A(-1, 2, -1), B(2, -2, 3), C(2, 4, -1) の定める平面ABC

上に点 P(x, 3, 1) があるとき、xの値を求めよ。

$$\vec{CP} = (x-2, -1, 2), \vec{CA} = (-3, -2, 0), \vec{CB} = (0, -6, 4) \text{ に対して}$$

$$\vec{CP} = s\vec{CA} + t\vec{CB} \text{ となる実数 } s, t \text{ が存在する。}$$

$$(x-2, -1, 2) = s(-3, -2, 0) + t(0, -6, 4)$$

$$(x-2, -1, 2) = (-3s, -2s-6t, 4t)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2 = -3s \cdots ① \\ -1 = -2s-6t \cdots ② \\ 2 = 4t \cdots ③ \end{array} \right\}$$

$$①②③ \text{ り) } s = -1, t = \frac{1}{2} \text{ なので } x = 5$$

四面体OABCにおいて、辺OAの中点をM、辺BCを1:2に内分する点をQ、線分MQの中点をRとし、直線ORと平面ABCの交点をPとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OA} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12}$$

PはOR上の点なので、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する。

$$\overrightarrow{OP} = k \cdot \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \dots \textcircled{①}$$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$, Pは平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{CP} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数s, tが存在する。

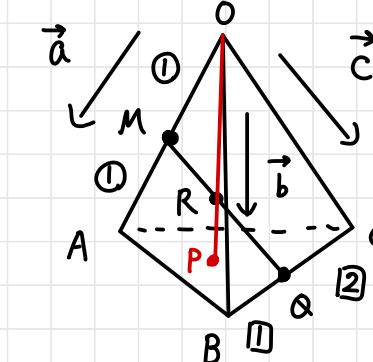
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \dots \textcircled{②}$$

①②より

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k = s \dots (P) \\ \frac{1}{3}k = t \dots (I) \\ \frac{1}{6}k = 1-s-t \dots (II) \end{cases}$$

$$(P)(I)(II)より \quad k = \frac{4}{3}. \quad \text{これを } \textcircled{①} \text{ に代入して}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$



練習
16 四面体OABCにおいて、辺OAの中点をM、辺BCを1:2に内分する点をQ、線分MQの中点をRとし、直線ORと平面ABCの交点をPとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

$(s+t+u=1\text{を})$
利用した解法

PはOR上の点なので

$\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する。

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12}$$

$$\overrightarrow{OP} = k \cdot \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{12} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \cdots \textcircled{1}$$

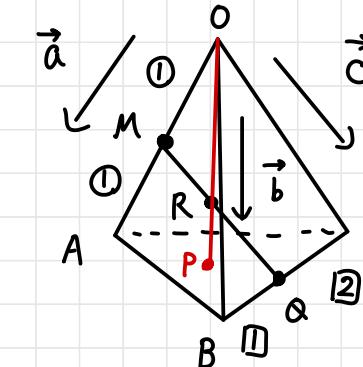
点Pが平面ABC上にあるので

$$\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$$k = \frac{4}{3} を \textcircled{1} に代入して$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$



正四面体 ABCD において、 $\triangle BCD$ の重心を G とすると、 $AG \perp BC$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

$\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$, $\vec{AG} = \vec{g}$ とすると

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{AG} \cdot \vec{BC} &= \vec{g} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{3} \left(-|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{d} \cdot \vec{b} \right)\end{aligned}$$

ここで「正四面体であるから $|\vec{b}| = |\vec{c}|$

それぞれのなす角が 60° で等しく長さも等しいので $\vec{d} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{b}$

よって $\vec{AG} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{AG} \neq \vec{0}$, $\vec{BC} \neq \vec{0}$ であるので, $\vec{AG} \perp \vec{BC}$

したがって $AG \perp BC$

2点 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)について

1 A, B 間の距離は

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

2 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n}, \frac{na_3 + mb_3}{m+n} \right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \frac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \frac{-na_3 + mb_3}{m-n} \right)$$

練習 18 2点 A(1, 3, -2), B(4, -3, 1)について、次のものを求めよ。

- (1) 2点 A, B 間の距離 (2) 線分 AB の中点の座標
(3) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標
(4) 線分 AB を 2:1 に外分する点の座標

$$(1) AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-3)^2 + (1-(-2))^2} = 3\sqrt{6}$$

$$(2) \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3-3}{2}, \frac{-2+1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2+1}, \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{2+1}, \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{2+1} \right) = (3, -1, 0)$$

$$(4) \left(\frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2-1}, \frac{-1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{2-1}, \frac{-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{2-1} \right) = (7, -9, 4)$$

練習 19 3点 A(2, -1, 4), B(1, 3, 0), C(3, 1, 2)を頂点とする $\triangle ABC$ の

重心の座標を、原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

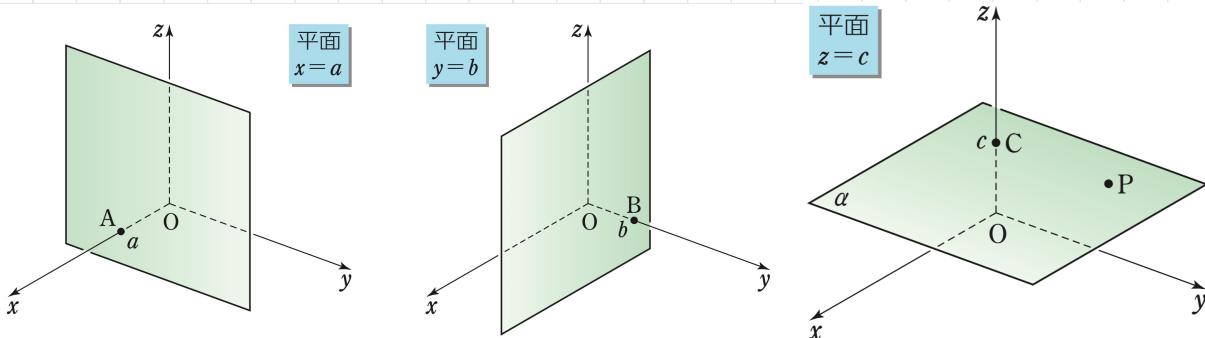
$$\left(\frac{2+1+3}{3}, \frac{-1+3+1}{3}, \frac{4+0+2}{3} \right) = (2, 1, 2)$$

座標平面に平行な平面の方程式

点 A($a, 0, 0$) を通り, yz 平面に平行な平面の方程式は $x = a$

点 B($0, b, 0$) を通り, zx 平面に平行な平面の方程式は $y = b$

点 C($0, 0, c$) を通り, xy 平面に平行な平面の方程式は $z = c$



練習

20

点 (1, 2, 3) を通り, 次のような平面の方程式を求めよ。

- (1) xy 平面に平行 (2) yz 平面に平行 (3) y 軸に垂直

(1) $z = 3$

(2) $x = 1$

(3) $y = 2$

球面の方程式

点 (a, b, c) を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

とくに、原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

練習
21

次のような球面の方程式を求めよ。

- (1) 原点を中心とする半径 3 の球面
- (2) 点 $(1, 2, -3)$ を中心とする半径 4 の球面
- (3) 点 $A(0, 4, 1)$ を中心とし、点 $B(2, 4, 5)$ を通る球面
- (4) 2 点 $A(2, 0, -3)$, $B(-2, 6, 1)$ を直径の両端とする球面

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$(2) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$$

(3) この玉の半径は AB なので

$$AB^2 = (2-0)^2 + (4-4)^2 + (5-1)^2 = 20$$

よって玉の方程式は

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 20$$

(4) 玉の中心は AB の中点。中点を M とする。

$$M \left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) = (0, 3, -1)$$

玉の半径は中心と点 A の半径 AM なので

$$AM^2 = (0-2)^2 + (3-0)^2 + (-1-(-3))^2 = 17$$

よって玉の方程式は $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$

応用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

球面 $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

球面と yz 平面が交わるのは $x=0$ のとき

球面の方程式は $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ なので

$x=0$ のとき

$$(0-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$$

$$(y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

この方程式は yz 平面上では円

その中心は $(-2, 3)$, 半径 3 である。