三角関数の合成

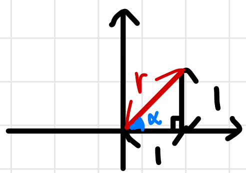
$a\sin\theta + b\cos\theta$ について

① 座標平面の横軸：縦軸に $a:b$ をとる.

② 原点から直線を引き，直角三角形を作る.

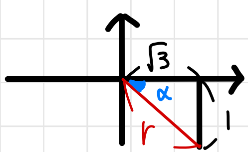
③ 直角三角形の斜辺の長さを r，斜辺と横軸の作る角度 α に注目し $r\sin(\theta+\alpha)$ とする.

例15(1) $\sin\theta + \cos\theta \cdots a:b = 1:1$



左図より $r=\sqrt{2}$，$\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

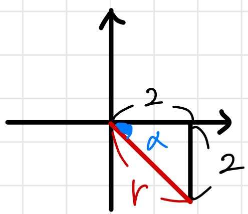
(2) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta \cdots a:b = \sqrt{3}:-1$



左図より $r=2$，$\alpha = -\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$y = 2\sin x - 2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$a : b = 2 : -2$



左図より $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$$y = 2\sin x - 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $0 - \frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \pi - \frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$$

$$-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$$

2でくくった

∵ $\sin\theta$の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ を使うため

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{1}{2}=\sin\frac{5}{6}\pi$$

$$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi\sin\theta+\sin\frac{5}{6}\pi\cos\theta\right)$$

$$=2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$$

$\boxed{3}$ $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y = \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ について，次の問いに答えなさい。

(2) より $Y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より

$0 + \dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{4}\pi$

$x + \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$
$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ は最大値 1

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって $Y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ の

最大値は $Y = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

最小値は $Y = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

【問題１】　次の各問いに答えよ。

(1)　$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ であり，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\beta=\frac{1}{4}$ のとき，

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}}-\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}\boxed{}}$，$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}\boxed{}}}{\boxed{}}$ である。

正弦・余弦の加法定理

1	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ より $\cos\alpha<0$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{6}{9}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ より $\sin\beta<0$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{4}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{45}}{12}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{6}}{12}$$

$$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\beta\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}+\sin\beta\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$=\sin\beta$$

$$=\frac{-\sqrt{15}}{4}$$

(2)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$y = \frac{1}{2}\cos 2x + 2\cos x + \frac{5}{2}$ について，

$\cos x = t$ とおくと，$y = t^2 + \boxed{}\,t + \boxed{}$ と表せる。

y の最大値は $\boxed{}$ であり，そのときの x は $x = \boxed{ア}$ である。

$\boxed{ア}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

2 倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

〈選択肢A〉

⓪ 0	① $\frac{\pi}{6}$	② $\frac{\pi}{2}$	③ $\frac{2}{3}\pi$	④ $\frac{3}{4}\pi$
⑤ $\frac{5}{6}\pi$	⑥ $\frac{7}{6}\pi$	⑦ $\frac{\pi}{12}$	⑧ $\frac{5}{12}\pi$	⑨ $\frac{7}{12}\pi$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より

$$y = \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x + \frac{5}{2}$$

$$= \cos^2 x - \frac{1}{2} + 2\cos x + \frac{5}{2}$$

$$= \cos^2 x + 2\cos x + 2$$

$\cos x = t$ とおくと

$$y = t^2 + 2t + 2$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$，$\cos x = t$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$$y = t^2 + 2t + 2 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

$$= (t+1)^2 + 1$$

$t = 1$ のとき，つまり $\cos x = 1$ のとき　$x = 0$ で最大値 5

⓪

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき，$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ について，

(i) $y=\boxed{}\sin\left(x+\frac{\pi}{\boxed{}}\right)$ と変形できる。

(ii) y の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。

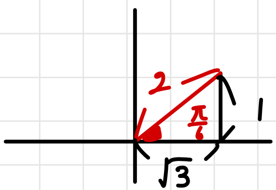
(iii) $y=\sqrt{2}$ であるとき，$x=\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ である。

$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

〈選択肢A〉

⓪	0	①	$\frac{\pi}{6}$	②	$\frac{\pi}{2}$	③	$\frac{2}{3}\pi$	④	$\frac{3}{4}\pi$
⑤	$\frac{5}{6}\pi$	⑥	$\frac{7}{6}\pi$	⑦	$\frac{\pi}{12}$	⑧	$\frac{5}{12}\pi$	⑨	$\frac{7}{12}\pi$

(i) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ より



$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

(ii) $0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ より $\frac{\pi}{6} \leqq x+\frac{\pi}{6} \leqq \pi$ なので

$0 \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ の

最大値は $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき，$y=2\times1=2$

最小値は $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ のとき，$y=2\times0=0$

(iii) $y=\sqrt{2}$ のとき $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+\frac{\pi}{6}=t$ とすると $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\frac{\pi}{6} \leqq t \leqq \pi\right)$

$t=\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ なので $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$　$x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}\pi$

$x=\frac{\pi}{12}$　$x=\frac{7}{12}\pi$

⑦　⑨

(4)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $2\sin x - 1 \geqq 0$ の解は $\boxed{エ} \leqq x \leqq \boxed{オ}$ である。

$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

〈選択肢A〉

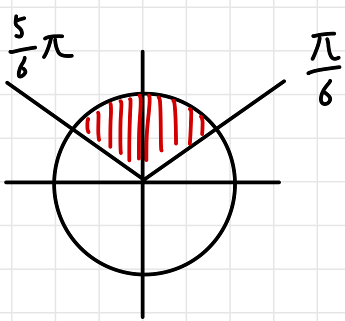
⓪ 0　① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{2}{3}\pi$　④ $\frac{3}{4}\pi$

⑤ $\frac{5}{6}\pi$　⑥ $\frac{7}{6}\pi$　⑦ $\frac{\pi}{12}$　⑧ $\frac{5}{12}\pi$　⑨ $\frac{7}{12}\pi$

$$2\sin x - 1 \geqq 0$$

$$2\sin x \geqq 1$$

$$\sin x \geqq \frac{1}{2}$$



①　⑤

$$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$$

【問題２】　次の各問いに答えよ。

(1)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり，$\sin\theta=\frac{12}{13}$ のとき，

(i)　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\square}{\square\square}$ である。

(ii)　$\tan\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\square}{\square\square}$ である。

正弦・余弦の加法定理

1	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

正接の加法定理

5	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
6	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$

(i) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\cos\theta+\sin\theta=-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{7}{13}$

(ii) $\tan\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{3}{4}\pi}{1-\tan\theta\tan\frac{3}{4}\pi}=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{\frac{12}{5}-1}{1+\frac{12}{5}}=\frac{7}{17}$

(2)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$y = -\cos 2x + 3\sin x - 1$ について，

$\sin x = t$ とおくと，$y = \boxed{}\,t^2 + \boxed{}\,t - \boxed{}$ と表せる。

(i)　$y = 0$ のとき，$x = \boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ である。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

(ii)　y の最小値は $\dfrac{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}}$ である。

〈選択肢A〉

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{6}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{\pi}{2}$	④ $\dfrac{5}{6}\pi$
⑤ π	⑥ $\dfrac{4}{3}\pi$	⑦ $\dfrac{5}{4}\pi$	⑧ $\dfrac{5}{12}\pi$	⑨ $\dfrac{7}{12}\pi$

2倍角の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$y = -(1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - 1$

$= 2\sin^2 x + 3\sin x - 2$

$\sin x = t$ とすると

$y = 2t^2 + 3t - 2$

また $0 \leqq x < 2\pi$ より $-1 \leqq \sin x \leqq 1$

$-1 \leqq t \leqq 1$

(i) $y = 0$ のとき

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$(2t-1)(t+2) = 0$

$t = \dfrac{1}{2}, -2$

$-1 \leqq t \leqq 1$ より

$t = \dfrac{1}{2}$ なので $\sin x = \dfrac{1}{2}$　$0 \leqq x < 2\pi$ より $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

① ④

(ii) $y = 2t^2 + 3t - 2\ (-1 \leqq t \leqq 1)$

$y = 2\left(t + \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}$

$t = -\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{-25}{8}$

(3) $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$y=2\sin x+2\cos x$ について，

(i) $y=\square\sqrt{\square}\sin\left(x+\frac{\pi}{\square}\right)$ と変形できる。

(ii) y の最大値は $\square\sqrt{\square}$，最小値は $-\square$ である。

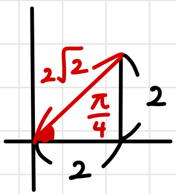
(iii) $y=\sqrt{6}$ のとき，$x=\boxed{ウ}$ である。

$\boxed{ウ}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

〈選択肢A〉

⓪ 0	① $\frac{\pi}{6}$	② $\frac{\pi}{3}$	③ $\frac{\pi}{2}$	④ $\frac{5}{6}\pi$
⑤ π	⑥ $\frac{4}{3}\pi$	⑦ $\frac{5}{4}\pi$	⑧ $\frac{5}{12}\pi$	⑨ $\frac{7}{12}\pi$

(i) $y=2\sin x+2\cos x$ より



$y=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

(ii)

$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ より $\frac{\pi}{2} \leqq x+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

y の最大値は $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ のとき $y=2\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$

y の最小値は $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y=2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2$

(iii) $y=\sqrt{6}$ のとき $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leqq x+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi\right)$

$x+\frac{\pi}{4}=t$ とすると $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{5}{4}\pi\right)$

$t=\frac{2}{3}\pi$ なので $x+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$

$x=\frac{5}{12}\pi$ ⑧

(4) $0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき，不等式 $2\cos x - 1 \leqq 0$ の解は $\boxed{エ} \leqq x \leqq \boxed{オ}$ である。

$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ に入る適切なものを下の選択肢Aから選べ。

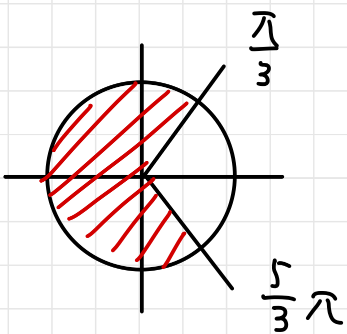
〈選択肢A〉

⓪ 0	① $\frac{\pi}{6}$	② $\frac{\pi}{3}$	③ $\frac{\pi}{2}$	④ $\frac{5}{6}\pi$
⑤ π	⑥ $\frac{4}{3}\pi$	⑦ $\frac{5}{4}\pi$	⑧ $\frac{5}{12}\pi$	⑨ $\frac{7}{12}\pi$

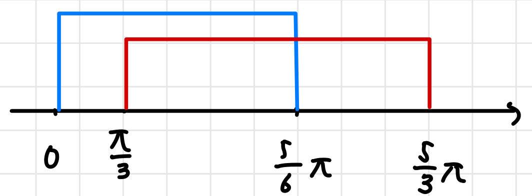
$2\cos x - 1 \leqq 0$

$2\cos x \leqq 1$

$\cos x \leqq \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{5}{3}\pi$ と $0 \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ の共通範囲を求めて



② ④

$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$