

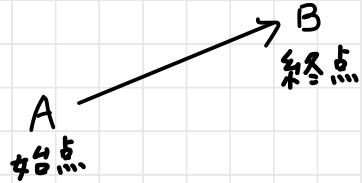
数C

平面上のベクトル



ベクトル … 始点から終点へ向きと大きさをもつ量

\vec{AB} … 始点Aから終点Bへ向かうベクトル



ABの長さが \vec{AB} の大きさ. \vec{AB} の大きさを $|\vec{AB}|$ と表記する.

ベクトルは \vec{a}, \vec{b} とも表す.

ベクトルにおいて向きと大きさが同じベクトルは等しい.

(例) \vec{AB} と \vec{CD} が等しいとは $\vec{AB} = \vec{CD}$ と表記する.

また、ベクトル \vec{a} と大きさが等しく向きが反対のベクトルを逆ベクトルといい.

\vec{a} の逆ベクトルは $-\vec{a}$ と表す.

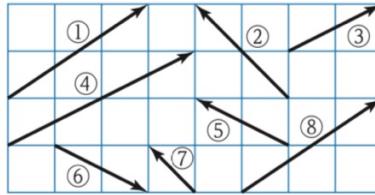
$$\vec{a} = \vec{AB} \text{ のとき}, -\vec{a} = -\vec{AB} = \vec{BA}$$

$$\text{また}, \vec{AB} = -\vec{BA}$$

練習
1

右の図に示されたベクトルについて、次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。

- (1) 大きさが等しいベクトル
- (2) 向きが同じベクトル
- (3) 等しいベクトル
- (4) 互いに逆ベクトル



(1) ①と⑧, ③と⑤と⑥

(2) ①と⑧, ②と⑦, ③と④

(3) ①と⑧

(4) ⑤と⑥

ベクトルの加法

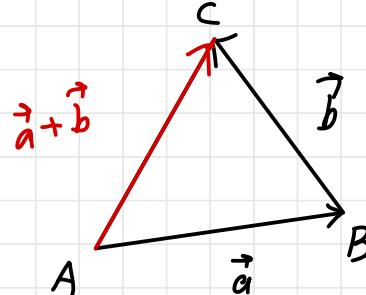
右図において $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$ とすると

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\text{つまり } \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

以下が成立

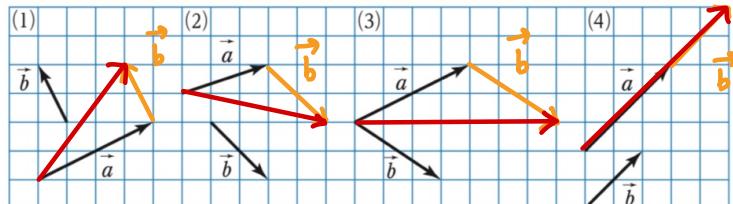
$$\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}}$$



ベクトルの加法の性質

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{交換法則})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{結合法則})$$

練習
2次のベクトル \vec{a} , \vec{b} について、 $\vec{a} + \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。

上図赤矢印が答え

$$\vec{a} + \vec{b} \text{ は}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \text{ となる } \vec{c} \text{ である。}$$

\vec{b} を平行移動させベクトルを合成
(\vec{a} の終点に \vec{b} の始点を合わせる)

練習
3

次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} \\
 &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \\
 &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\
 &= \overrightarrow{CD} = (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

(左辺) = (右辺) となるので

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$$

零ベクトル…大きさが0のベクトル。向きは考えない。始点と終点が同じベクトル

零ベクトルに対する以下が成立

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

練習
4

次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$(左辺) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{AC})$$

$$= \vec{0} = (右辺)$$

よって

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

ベクトルの減法

図において \vec{a} , \vec{b} を定める.

$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ をみたす \vec{c} を

\vec{a} と \vec{b} の差といい $\vec{a} - \vec{b}$ とかく.

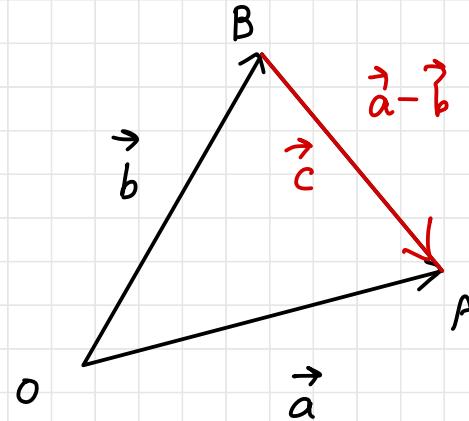
一般に $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ たゞので以下が成立

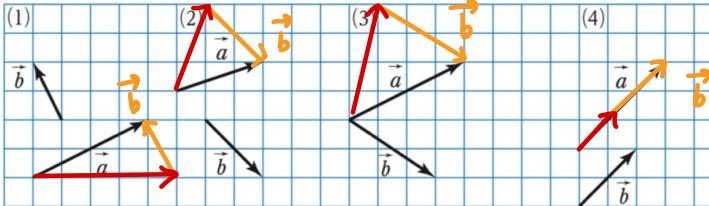
$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

ベクトルの減法の性質

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$



練習
5練習 2 のベクトル \vec{a} , \vec{b} について, $\vec{a} - \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。練習
2次のベクトル \vec{a} , \vec{b} について, $\vec{a} + \vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。

上図赤矢印が答え

$$\vec{a} - \vec{b}$$

 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ となる \vec{c} である。

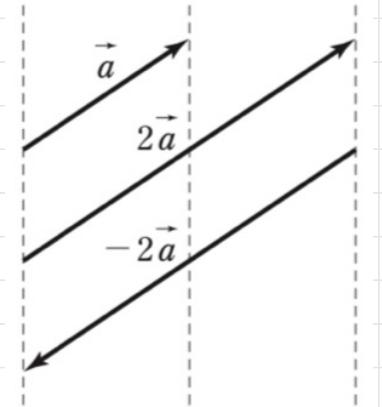
 \vec{b} を平行移動させベクトルを合成

 $(\vec{a}$ の終点に \vec{b} の終点を合わせる)

ベクトルの実数倍

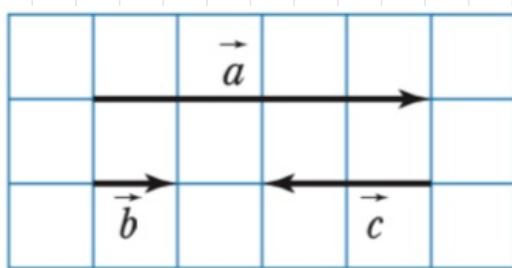
実数 k とベクトル \vec{a} に対し \vec{a} の k 倍のベクトル $k\vec{a}$ を次のように定める。

- ① $k > 0$ ならば “ \vec{a} と向きが同じ 大きさ k 倍のベクトル”
- ② $k < 0$ ならば “ \vec{a} と向きが反対 大きさ $|k|$ 倍のベクトル”
- ③ $k = 0$ ならば “ $\vec{a} = \vec{0}$ のときどんな k にすれば $\vec{a} = \vec{0}$ である。”



練習 例 3 のベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} について、次の()に適する実数を求めよ。

(1) $\vec{b} = (\)\vec{a}$ (2) $\vec{a} = (\)\vec{c}$ (3) $\vec{b} = (\)\vec{c}$



(1) $\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a}$

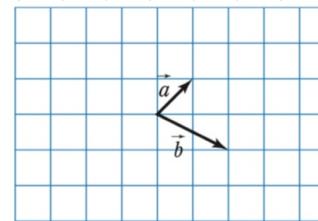
(2) $\vec{a} = -2\vec{c}$

(3) $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$

練習
7

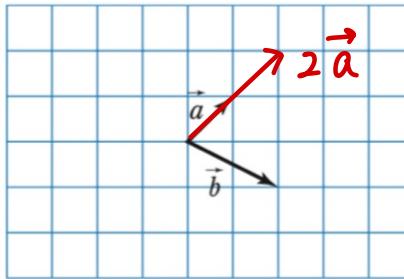
右の図のベクトル \vec{a} , \vec{b} について、次のベクトルを図示せよ。

- (1) $2\vec{a}$
- (2) $-2\vec{b}$
- (3) $2\vec{a} + \vec{b}$
- (4) $\vec{a} - 2\vec{b}$

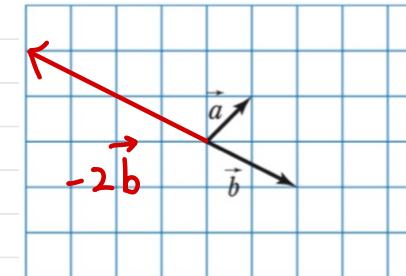


赤矢印が答え

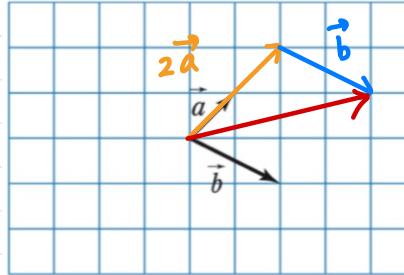
(1)



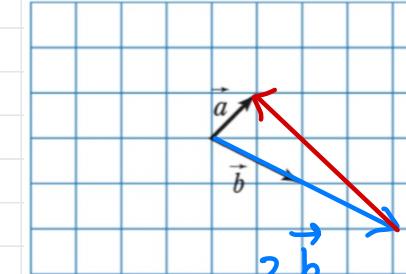
(2)



(3)



(4)



ベクトルの実数倍の性質

k, l は実数とする

$$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$$

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

練習

8

次の計算をせよ。

$$(1) \vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a}$$

$$(2) 2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$(1) 2\vec{a}$$

$$(2) 2\vec{a} - 6\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$= -7\vec{a}$$

ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} は向きが同じもしくは反対のとき平行であるといい

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ とかく}$$

ベクトルの実数倍の定義により以下が成立。

ベクトルの平行条件

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ が存在}$$

また、大きさが1のベクトルを単位ベクトルといい、以下が成立。

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ のとき } \vec{a} \text{ と平行な単位ベクトルは } \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ と } -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

次の問い合わせよ。

(1) 単位ベクトル \vec{e} と平行で、大きさが 4 のベクトルを \vec{e} を用いて

表せ。

(2) $|\vec{a}|=3$ のとき、 \vec{a} と同じ向きの単位ベクトルを \vec{a} を用いて表せ。

(1) 単位ベクトル \vec{e} と平行 \Rightarrow 単位ベクトル \vec{e} と向きが同じ or 逆
 大きさが 4 のベクトル \Rightarrow 単位ベクトルの 4 倍

$$\underline{\pm 4 \vec{e}}$$

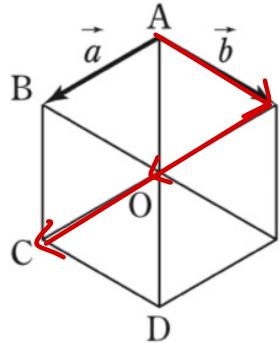
(2) \vec{a} と同じ向き $\Rightarrow k \vec{a} (k > 0)$ となる k が存在

単位ベクトル \Rightarrow 大きさ 1 のベクトル $\Rightarrow |\vec{a}|$ に対して $\frac{1}{3}$ 倍

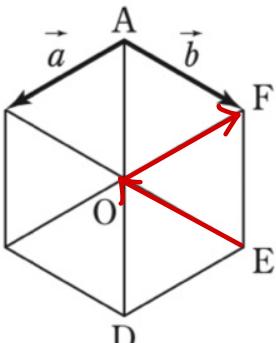
$$\underline{\frac{1}{3} \vec{a}}$$

練習
10例題1において、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

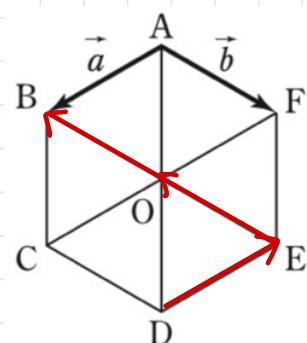
(1) \overrightarrow{AC}



(2) \overrightarrow{EF}



(3) \overrightarrow{DB}



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \\ &= 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} \\ &= -\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB} \\ &= -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} \\ &= -\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

ベクトルの成分

基本ベクトル

→ Oを原点とする座標平面上で、X軸、Y軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル
それぞれ \vec{e}_1, \vec{e}_2 で表す。

座標平面上のベクトル \vec{a} に対する

$\vec{a} = \vec{OA}$ となる点 A の座標が

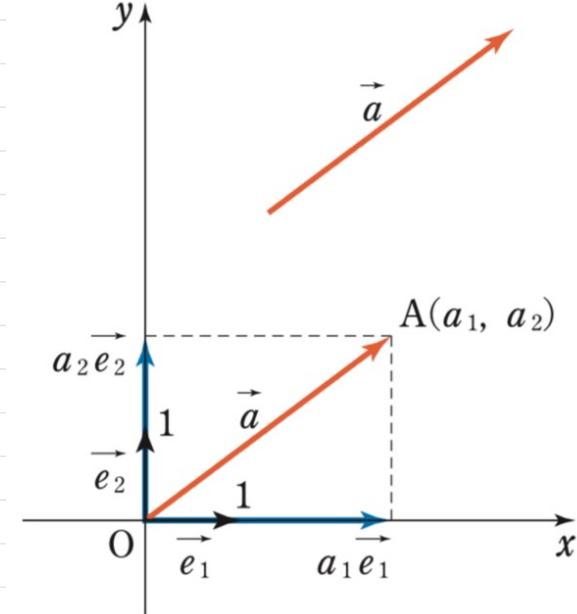
$A(a_1, a_2)$ のとき

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

また、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$

①における a_1 を \vec{a} の X 成分、 a_2 を Y 成分という。

これらをまとめて \vec{a} の成分といい ①を \vec{a} の成分表示という。



基本ベクトル \vec{e}_1, \vec{e}_2 と零ベクトルの成分表示は以下の通り

$$\vec{e}_1 = (1, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1) \quad \vec{0} = (0, 0)$$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ について以下が成立。

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

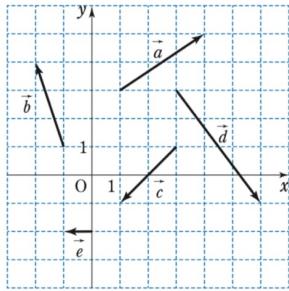
また、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ のとき $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

例 6 右の図のベクトル \vec{a} の成分表示は

$$\vec{a} = (3, 2)$$

大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
 終



練習 11 右の図のベクトル $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ を、それぞれ成分表示せよ。
また、各ベクトルの大きさを求めよ。

$$\vec{b} = (-1, 3) \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{c} = (-2, -2) \quad |\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{d} = (3, -4) \quad |\vec{d}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\vec{e} = (-1, 0) \quad |\vec{e}| = 1$$

和・差・実数倍の成分表示

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \quad (k \text{は実数})$$

練習
12

$\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (-4, 2)$ のとき, 次のベクトルを成分表示せよ。

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $4\vec{a}$ (3) $4\vec{a} - 3\vec{b}$ (4) $-2(\vec{a} - \vec{b})$

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (3, -1) + (-4, 2) = (-1, 1)$$

$$(2) 4\vec{a} = 4(3, -1) = (12, -4)$$

$$(3) 4\vec{a} - 3\vec{b} = 4(3, -1) - 3(-4, 2)$$

$$= (12, -4) - (-12, 6)$$

$$= (24, -10)$$

$$(4) -2(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= -2(3, -1) + 2(-4, 2)$$

$$= (-6, 2) + (-8, 4)$$

$$= (-14, 6)$$

$\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ とする。 $\vec{c} = (8, -3)$ を、適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ。

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{c}$$

$$s(2, 1) + t(-1, 3) = (8, -3)$$

$$(2s, s) + (-t, 3t) = (8, -3)$$

$$(2s-t, s+3t) = (8, -3)$$

$$\begin{cases} 2s-t = 8 & \cdots \textcircled{1} \\ s+3t = -3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①②を連立させて解くと

$$s = 3, t = -2$$

$$\begin{array}{r} 3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{c} \\ \hline + \end{array}$$

次の2つのベクトルが平行になるように、 x の値を定めよ。

$$(1) \vec{a} = (-2, 1), \vec{b} = (x, -3) \quad (2) \vec{a} = (2, x), \vec{b} = (3, 6)$$

(1) 実数 k を用いて

$$\vec{b} = k \vec{a}$$

$$(x, -3) = k(-2, 1)$$

$$(x, -3) = (-2k, k)$$

$$\begin{cases} x = -2k \cdots \textcircled{1} \\ -3 = k \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より $k = -3$ のこ

これを①に代入

$$x = -2 \times (-3)$$

$$\underline{x = 6}$$

(2) 実数 k を用いて

$$\vec{b} = k \vec{a}$$

$$(3, 6) = k(2, x)$$

$$(3, 6) = (2k, kx)$$

$$\begin{cases} 3 = 2k \cdots \textcircled{1} \\ 6 = kx \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{より } k = \frac{3}{2}$$

これを②に代入

$$6 = \frac{3}{2} \cdot x$$

$$\underline{x = 4}$$

座標平面上の点とベクトル

2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ について

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

- 練習 15** 次の2点 A, Bについて、 \vec{AB} を成分表示し、 $|\vec{AB}|$ を求めよ。
- (1) A(5, 2), B(1, 6) (2) A(-3, 4), B(2, 0)

(1)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (1-5, 6-2) \\ &= (-4, 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

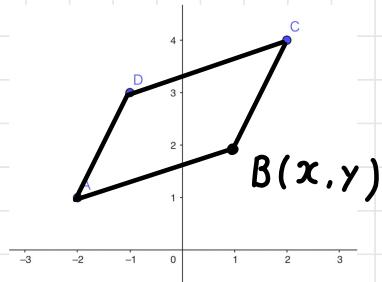
(2)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (2-(-3), 0-4) \\ &= (5, -4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{5^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

- 練習 16**

4点 A(-2, 1), B(x, y), C(2, 4), D(-1, 3)を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形になるように、 x, y の値を定めよ。



平行四辺形には
 $\vec{AD} = \vec{BC}$ のとき

$$\vec{AD} = (-1 - (-2), 3 - 1) = (1, 2)$$

$$\vec{BC} = (2 - x, 4 - y)$$

$$\begin{cases} 2 - x = 1 \\ 4 - y = 2 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 2$$

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とするとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

練習
17

\vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

- (1) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\theta = 45^\circ$ (2) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 6$, $\theta = 150^\circ$

$$\begin{aligned}(1) \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \times 3 \times \cos 45^\circ \\ &= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

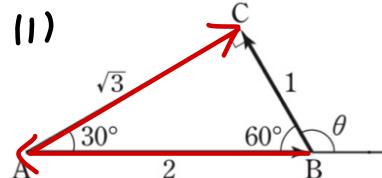
$$\begin{aligned}(2) \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 \times 6 \times \cos 150^\circ \\ &= 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -18\sqrt{3}\end{aligned}$$

練習
18

例 10 の直角三角形 ABC において、次の内積を求めよ。

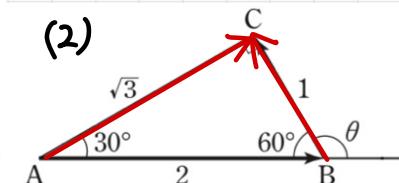
(1) $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$

(1)



(2) $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$

(2)



$$\begin{aligned}(1) \vec{BA} \cdot \vec{AC} &= |\vec{BA}| |\vec{AC}| \cos 150^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\end{aligned}$$

$$(2) \vec{AC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}| |\vec{BC}| \cos 90^\circ$$

$$= 0$$

ベクトルの垂直・平行と内積

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ または } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

内積と成分

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

練習
19

次のベクトル \vec{a}, \vec{b} について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a} = (2, 5), \vec{b} = (3, -2)$

(2) $\vec{a} = (1, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = 6 - 10 = -4$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot (-1) = 0$

ベクトルのなす角の余弦($\cos\theta$)

内積の定義より

\vec{a} とない2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のなす角を θ とする。
ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ベクトルの垂直条件

\vec{a} とない2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

次の2つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

- (1) $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ (2) $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$
 (3) $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (2, 6)$ (4) $\vec{a} = (-4, 2)$, $\vec{b} = (2, -1)$

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + 1 \times 1 = -5$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{より } \underline{\theta = 135^\circ}$$

$$(3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ より } \underline{\theta = 90^\circ}$$

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, |\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{より } \underline{\theta = 30^\circ}$$

$$(4) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{より } \underline{\theta = 180^\circ}$$

次の2つのベクトルが垂直になるように、 x の値を定めよ。

- (1) $\vec{a} = (3, 6)$, $\vec{b} = (x, 4)$ (2) $\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{b} = (x, x+2)$

2つのベクトルが垂直 \rightarrow 内積 0

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot x + 6 \cdot 4 = 0$$

$$3x + 24 = 0$$

$$3x = -24$$

$$x = -8$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot x + (-1) \cdot (x+2) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2, -1$$

次の問に答えよ。

- (1) $\vec{a} = (2, 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル \vec{b} を求めよ。
- (2) $\vec{a} = (4, 3)$ に垂直な単位ベクトル \vec{e} を求めよ。

(1) 実数 x, y を用いて $\vec{b} = (x, y)$ とする

$$\vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ は垂直} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot x + 1 \cdot y = 2x + y = 0$$

$$y = -2x \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \text{ の大きさ} \text{ は} \sqrt{10} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}|^2 = x^2 + y^2 = 10 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \oplus \textcircled{2}$: 代入

$$x^2 + (-2x)^2 = 10$$

$$5x^2 = 10$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

①より $x = \sqrt{2}$ のとき $y = -2\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ のとき $y = 2\sqrt{2}$

$$\underline{\underline{\vec{b} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})}}$$

(2) 実数 x, y を用いて $\vec{e} = (x, y)$ とする。

\vec{a} と \vec{e} は垂直 $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{e} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 4x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \dots \textcircled{1}$$

$$\text{単位ベクトル } \vec{e} \text{ の大きさ} \text{ は} |\vec{e}| \Rightarrow |\vec{e}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$|\vec{e}|^2 = x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \oplus \textcircled{2} \text{: 代入} \quad x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1$$

$$9x^2 + 16x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{25}$$

$$x = \pm \frac{3}{5}$$

①より $x = \frac{3}{5}$ のとき $y = -\frac{4}{5}$

$x = -\frac{3}{5}$ のとき $y = \frac{4}{5}$

$$\underline{\underline{\vec{e} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$$

次の問い合わせよ。

- (1) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} = (a_2, -a_1)$ は垂直であることを示せ。
- (2) (1)を用いて、 $\vec{a} = (1, 2)$ に垂直な単位ベクトル \vec{e} を求めよ。

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + a_2 (-a_1) = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ より \vec{a} と \vec{b} は垂直。

(2) $\vec{a} = (1, 2)$ に垂直なベクトルを \vec{b} とすると

$$\vec{b} = (2, -1), (-2, 1)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

単位ベクトルは大きさが 1 のベクトル

\vec{b} を $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 倍したものが \vec{a} に垂直な単位ベクトル

$$\underline{\vec{e} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}$$

内積の性質

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad k \text{ は実数}$$

練習

24

次の等式を証明せよ。

$$(1) |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$\begin{aligned}(1) (\text{左辺}) &= |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\&= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\&= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = (\text{右辺})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) (\text{左辺}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\&= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\text{右辺})\end{aligned}$$

練習
25 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ のとき, 次の値を求めよ。

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$(2) |\vec{a} - 2\vec{b}|$$

$$\begin{aligned} (1) |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 + 2 \cdot (-3) + 2^2 = 7 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ たり } |\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\sqrt{7}}$$

$$\begin{aligned} (2) |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 - 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 2^2 \\ &= 37 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| \geq 0 \text{ たり } |\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{\sqrt{37}}$$

練習
26 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$ で, $3\vec{a} - 2\vec{b}$ と $\vec{a} + 4\vec{b}$ が垂直であるとする。このとき, \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$3 \cdot 2^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \cdot 2^2 = 0$$

$$12 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 32 = 0$$

$$10\vec{a} \cdot \vec{b} - 20 = 0$$

$$10\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

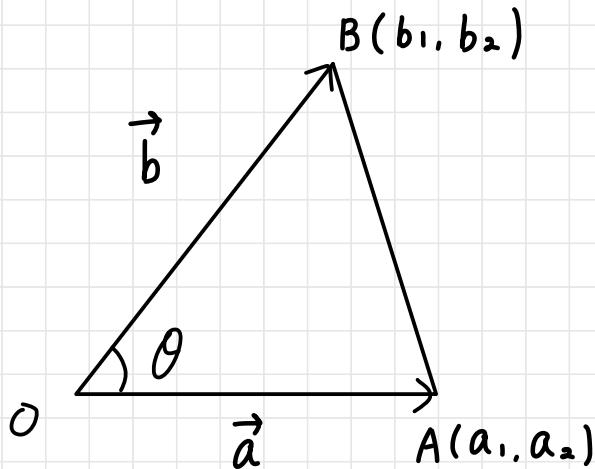
$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} : \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ たり } \theta = 60^\circ$$

三角形の面積

$\triangle OAB$ において $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とする. $\triangle OAB$ の面積を Δ とする.

$$\Delta = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$



練習

1

次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

$$O(0, 0), A(4, 1), B(2, -1)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} |4 \cdot (-1) - 1 \cdot 2|$$

$$= \frac{1}{2} |-6|$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

位置ベクトル

平面上で点Oを定めどんな点Pの位置もベクトル $\vec{OP} = \vec{OP}$ で定まるベクトル。

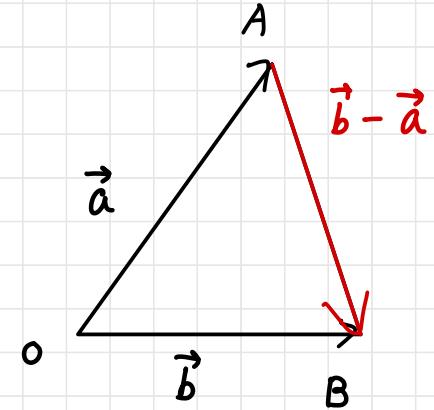
位置ベクトルが p である点Pを $P(p)$ で表す。

2点A,Bに対して

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

が成立するので以下のことかいいえる。

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$



練習 27 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ に対して、次のベクトルを \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} のいずれかを用いて表せ。

(1) \vec{BC}

(2) \vec{CA}

(3) \vec{BA}

(1) $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$

(2) $\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c}$

(3) $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して 線分 AB を $m:n$ に 内分, 外分する点は以下の

$$\text{内分} \dots \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad \text{外分} \dots \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

線分 AB の中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

練習
28 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB に対して、次のような点の位置ベクトルを求めよ。

- (1) 2:3に内分する点 (2) 3:1に内分する点
(3) 4:1に外分する点 (4) 1:2に外分する点

$$(1) \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \quad (2) \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{3+1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$$

$$(3) \frac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{4-1}, \frac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{3} \quad (4) \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{1-2} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

三角形の重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の位置ベクトル \vec{g} は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において、辺 BC , CA ,

AB を2:1に内分する点を、それぞれ P , Q , R とする。また、

$\triangle ABC$ の重心を G , $\triangle PQR$ の重心を G' とする。

(1) 点 G' の位置ベクトル \vec{g}' を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(2) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。

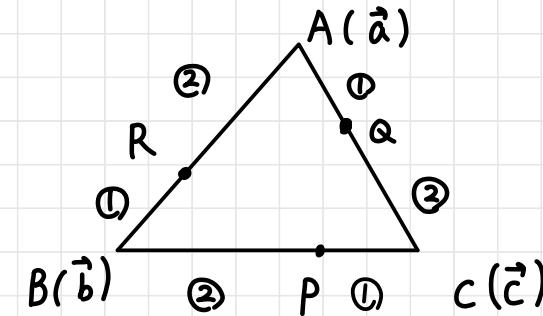
(1) 点 P , Q , R の位置ベクトルを \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} とする。

$$\vec{g}' = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3} \cdots ①$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{2+1} = \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \cdots ②$$

②を①に代入

$$\vec{g}' = \frac{\frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} + \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}}{3} = \frac{\vec{3a} + \vec{3b} + \vec{3c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



$$(2) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$(\text{左辺}) = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (\vec{a} - \vec{q}) + (\vec{b} - \vec{q}) + (\vec{c} - \vec{q}) \\ = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 3\vec{q}$$

$$\vec{q} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{左辺}$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - 3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} = (\text{右辺})$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

一直線上にある点

2点A, Bが異なるとき

点Cが直線AB上にある $\Leftrightarrow \vec{AC} = k\vec{AB}$ となる実数kが存在する。

練習
30

△ABCにおいて、辺ABを1:2に内分する点をD、辺BCを3:1

に内分する点をEとし、線分CDの中点をFとする。このとき、3点

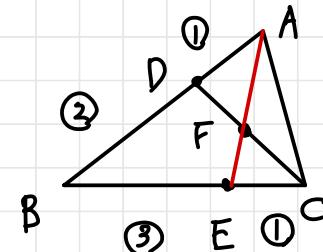
A, F, Eは一直線上にあることを証明せよ。 $\vec{AF} = k\vec{AE}$ となるkの値を求めよ。

$$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c} \text{ とする。}$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{AE} = \frac{\vec{AB} + 3\vec{AC}}{3+1} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4} \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AD} + \vec{AC}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{6} \dots \textcircled{2}$$



$$\vec{AF} = k\vec{AE} \text{ エ'')$$

$$k = \frac{\vec{AF}}{\vec{AE}}$$

①② エ'')

$$\frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{6}$$

$$k = \frac{\frac{6}{6+3\vec{c}}}{\frac{4}{6+3\vec{c}}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

$$\left(\vec{AF} = \frac{2}{3} \vec{AE} \right)$$

$\triangle OAB$ において、辺 OA を $3:2$ に内分する点を C 、辺 OB を $1:2$

に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

実数 s, t を用いて

$$AP:PD = s : 1-s, CP:PB = t : 1-t$$

$$\text{また } \overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} = \frac{3}{5}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(1-s)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OA}}{s+(1-s)} = \frac{1}{3}(1-s)\vec{b} + s\vec{a} = s\vec{a} + \frac{1}{3}(1-s)\vec{b} \cdots ①$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{(1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OB}}{t+(1-t)} = \frac{3}{5}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \cdots ②$$

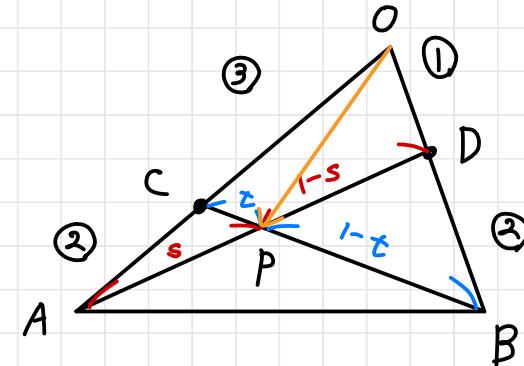
$$① = ② \text{ より } s\vec{a} + \frac{1}{3}(1-s)\vec{b} = \frac{3}{5}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \text{ なので}$$

③④を連立させて解くと

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{3}{5}(1-t) \cdots ③ \\ \frac{1}{3}(1-s) = t \cdots ④ \end{array} \right.$$

$$s = \frac{1}{2}, t = \frac{5}{6}$$

$$\overline{\overrightarrow{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$



△OABにおいて、辺OAを3:2に内分する点をC、辺OBを1:2に内分する点をDとし、線分ADと線分BCの交点をPとする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

(別解)

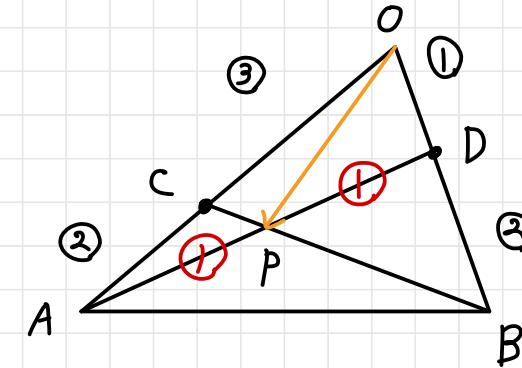
×ネラウスの定理より

$$\frac{OB}{BD} \cdot \frac{PD}{AP} \cdot \frac{AC}{CO} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{PD}{AP} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{PD}{AP} = 1$$

$$\underline{AP:PD = 1:1}$$



$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{1+1} = \frac{\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}{2} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{6} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

$$\left(\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{b} \right)$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

ベクトル \vec{d} に平行な直線

右図において $\vec{AP} \parallel \vec{d}$ なので

$$\vec{AP} = t \vec{d} \quad (t \text{は実数}) \text{が成立。}$$

ここで $\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A}$ とかけるので

$$\vec{P} - \vec{A} = t \vec{d}$$

$$\vec{P} = \vec{A} + t \vec{d} \cdots \textcircled{1}$$

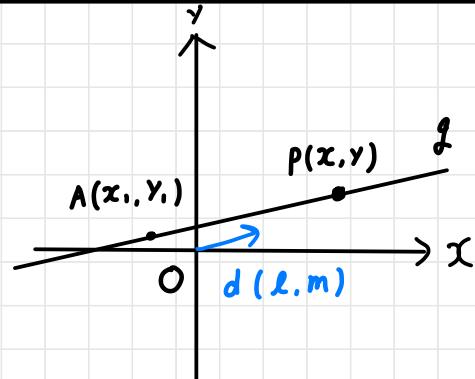
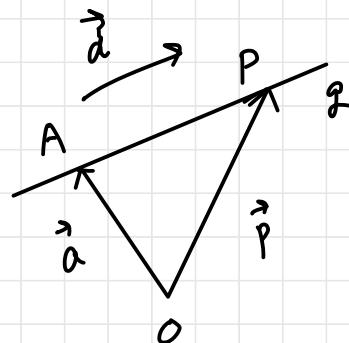
(①を \vec{d} のベクトル方程式といいたを 参数方程(パラメータ)という)

OE原点とする座標平面上で、 $A(x_1, y_1)$ を通り、 $\vec{d} = (l, m)$ に平行な直線 \vec{g} 上の点を $P(x, y)$ とする。

$$\textcircled{1} \text{F)} \quad (x, y) = (x_1, y_1) + t(l, m)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + tl \\ y = y_1 + tm \end{cases} \cdots \textcircled{2}$$

③を直線 \vec{g} の参数方程表示という。



点 A(2, -1) を通り, $\vec{d} = (-4, 3)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ。

また, 媒介変数を消去した式で表せ。

媒介変数を t とすると

$$(x, y) = (2, -1) + t(-4, 3)$$

$$= (2 - 4t, -1 + 3t)$$

$$\begin{cases} x = 2 - 4t & \cdots \textcircled{1} \\ y = -1 + 3t & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①×3+②×4より t を消去すると

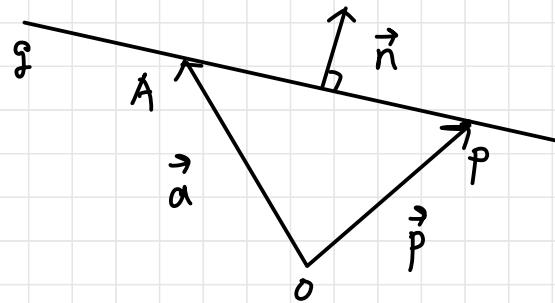
$$3x = 6 - 12t$$

$$+) 4y = -4 + 12t$$

$$\hline 3x + 4y = 2$$

$$\hline 3x + 4y - 2 = 0$$

ベクトル \vec{n} に垂直な直線
右図において $\vec{AP} \perp \vec{n}$ なり



$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{\alpha}$ とかけるので

$$(\vec{p} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{n} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

(①は点 A を通り \vec{n} に垂直な直線 g のベクトル方程式
直線 g に垂直なベクトル \vec{n} を直線 g の法線ベクトルという)

① 点 A (x_1, y_1) を通り $\vec{n} = (a, b)$ に垂直な直線 g の方程式は

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

② ベクトル $\vec{n} = (a, b)$ は 直線 $ax + by + c = 0$ に垂直

次の点Aを通り、ベクトル \vec{n} に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1) A(3, 4), $\vec{n} = (1, 2)$

(2) A(-1, 2), $\vec{n} = (3, -4)$

$$(1) 1 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y-4) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 8 = 0$$

$$\underline{\underline{x + 2y - 11 = 0}}$$

$$(2) 3 \{ x - (-1) \} + (-4)(y-2) = 0$$

$$3(x+1) - 4(y-2) = 0$$

$$3x + 3 - 4y + 8 = 0$$

$$\underline{\underline{3x - 4y + 11 = 0}}$$