数B

数列

数列…数を1列に並べたもの

項…数列における各数（1番目の項を初項，n番目の項を第n項）

$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16 \cdots$

初項　第2項　第3項　第4項

数列を一般的に表すには

$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots$（$a_1$が初項，$a_n$が第n項）

また，第n項を数列の一般項という。

$\{a_n\}$と数列を略記することもある。

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\cdots \quad ①$$

練習 1 上の数列①の第 2 項と第 4 項をいえ。また，第 5 項を求めよ。

第2項　4

第4項　16

第5項　25

練習 2 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 4 項までを求めよ。

(1)　$a_n=2n-1$　　(2)　$a_n=n(n+1)$　　(3)　$a_n=2^n$

	a_1	a_2	a_3	a_4
(1)	1	3	5	7
(2)	2	6	12	20
(3)	2	4	8	16

例 2 (1) -1 と 1 が交互に並ぶ数列 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　$a_n=(-1)^n$

(2) 分子には自然数，分母には分子より 1 大きい数が順に現れる分数の数列 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots\cdots$ の一般項を a_n として n の式で表すと　$a_n=\dfrac{n}{n+1}$　終

練習 3 次のような数列の一般項 a_n を，n の式で表せ。

(1) 偶数 2，4，6，8，…… の数列で符号を交互に変えた数列

$$-2,\ 4,\ -6,\ 8,\ \cdots\cdots$$

(2) 分子には奇数，分母には 2 の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \cdots\cdots$$

(1) $\underbrace{-1\text{と}1\text{が交互に並ぶ数列}}_{(-1)^n}$ と $\underbrace{\text{偶数}}_{2n}$ の積

$$a_n=(-1)^n\cdot 2n$$

(2) $\underbrace{\text{分子は奇数}}_{2n-1}$，$\underbrace{\text{分母は2の累乗}}_{2^n}$

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n}$$

☆ 等差数列

偶数数列 2, 4, 6, 8, … や奇数数列 1, 3, 5, 7, … のように各項間の差が常に一定となっている数列

初項に一定の数 d を次々に足して得られる数列

その一定の数 d を公差という.

練習 4 次のような等差数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1，公差 5　　(2) 初項 10，公差 -4

(1) $a_1=1,\ a_2=6,\ a_3=11,\ a_4=16$

(2) $a_1=10,\ a_2=6,\ a_3=2,\ a_4=-2$

練習 5 次の等差数列の公差を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) 1，5，9，□，□，……　　(2) □，5，2，□，□，……

(1) 公差 4

1, 5, 9, 13, 17

(2) 公差 -3

8, 5, 2, -1, -4

等差数列の一般項

初項a, 公差dの等差数列の一般項$\{a_n\}$は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

練習 6 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。
(1) 初項 5，公差 4　(2) 初項 10，公差 −5

練習 7 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1) 第 4 項が 15，第 8 項が 27　(2) 第 5 項が 20，第 10 項が 0

(1) $a_n = 5 + (n-1)\cdot 4$

$a_n = 4n + 1$

$a_{10} = 4 \times 10 + 1 = 41$

(2) $a_n = 10 + (n-1)\cdot(-5)$

$a_n = -5n + 15$

$a_{10} = -5 \times 10 + 15 = -35$

(1) $a_4 = 15$, $a_8 = 27$ より

$a_4 = a_1 + 3d = 15$ …①

$a_8 = a_1 + 7d = 27$ …②

①②より $a_1 = 6$　$d = 3$

$\underline{a_n = 3n + 3}$

(2) $a_5 = 20$, $a_{10} = 0$ より

$a_5 = a_1 + 4d = 20$ …①

$a_{10} = a_1 + 9d = 0$ …②

①②より $a_1 = 36$　$d = -4$

$\underline{a_n = -4n + 40}$

等差数列の性質

等差数列は初項aに公差dを次々に足して得られる数列

となり合う2項間の差は常に一定

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d \iff a_{n+1} - a_n = d}$$

練習 8 一般項が $a_n = 2n+5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

等差数列であるためには

$$a_n = 2n+5$$

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n+7$$

$$a_{n+1} - a_n = (2n+7) - (2n+5) = 2$$

$a_n = 2n+5$ より

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

<u>初項7，公差2</u>

等差中項

数列 a, b, c が等差数列 $\Longleftrightarrow 2b = a + c$

練習 9　次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　3，x，11，……　　(2)　$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{6}$，……

(1)
$$2x = 3 + 11$$
$$2x = 14$$
$$\underline{x = 7}$$

(2)
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{x} = \frac{3}{12}$$
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{x}{2} = 4$$
$$\underline{x = 8}$$

等差数列の和

等差数列の初項から第n項までの和をS_nとする

① 初項 a, 項数 n, 末項(第n項) ℓ $\Rightarrow$ $S_n = \frac{1}{2}n(a+\ell)$

② 初項 a, 項数 n, 公差 d $\Rightarrow$ $S_n = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

練習 10 次の和 S を求めよ。

(1) 初項 2，末項 10，項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10，公差 -4 の等差数列の初項から第 15 項までの和

(1) $\frac{1}{2}\times 9\times(2+12)=54$

(2) $\frac{1}{2}\times 15\times\{2\times 10+(15-1)\times(-4)\}$

$= -270$

練習 11 初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\times 1+(n-1)\times 2\}$

$S_n = n^2$

練習 12 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1) 2, 6, 10, ……, 74　　(2) 102, 96, 90, ……, 6

(1) 一般項 a_n は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$$

$$a_n = 4n - 2$$

なので

$$4n - 2 = 74$$

$$n = 19$$

求める和は初項2, 公差4, 項数19の等差数列の和

$$S = \frac{1}{2} \times 19 \times \{2 \times 2 + (19-1) \times 4\}$$

$$= \underline{722}$$

(2) 一般項 a_n は

$$a_n = 102 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$a_n = -6n + 108$$

なので

$$-6n + 108 = 6$$

$$n = 17$$

求める和は初項102, 公差 −6, 項数17の等差数列の和

$$S = \frac{1}{2} \times 17 \times (102 + 6)$$

$$= \underline{918}$$

・自然数の和 → $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

・奇数の和 → $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

・偶数の和 → $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

練習 13 次の和を求めよ。

(1)　1 から 100 までのすべての自然数の和　$1+2+3+\cdots\cdots+100$

(2)　1 から 55 までのすべての奇数の和　$1+3+5+\cdots\cdots+55$

(1)

$\frac{1}{2}\times 100\times(100+1)$

$=\underline{5050}$

(2)

$a_n=2n-1$

$2n-1=55$

$n=28$

$(28)^2=\underline{784}$

練習 14 初項が 100，公差が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　第何項が初めて負の数になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

(1) 一般項は

$a_n=100+(n-1)\cdot(-7)$

$=-7n+107$

$-7n+107<0$

$-7n<-107$

$n>\frac{107}{7}=15.2\cdots$

第16項が初めて負の数になる

(2)

第15項までの和が最大

$\frac{1}{2}\times 15\times\{2\times 100+(15-1)\times(-7)\}$

$=\underline{765}$

等比数列

となり合う2項間の比が常に一定になっている数列

初項に一定の数を次々にかけて得られる数列

その一定の数 r を公比という

練習 15 次のような等比数列の初項から第4項までを書け。

(1) 初項1，公比5　(2) 初項 -3，公比 $-\frac{1}{3}$

(1) $1,\ 5,\ 25,\ 125$

(2) $-3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}$

練習 16 次の等比数列の公比を求めよ。また，□に適する数を求めよ。

(1) $1,\ -2,\ 4,\ \square,\ \cdots\cdots$　(2) $\square,\ 8,\ 4,\ \square,\ \cdots\cdots$

(1) 公比は -2，　$1,\ -2,\ 4,\ -8$

(2) 公比は $\frac{1}{2}$　$16,\ 8,\ 4,\ 2$

等比数列の一般項

初項a，公比rの等比数列の一般項a_nは

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

練習 17 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1) 初項 2，公比 3　　(2) 初項 1，公比 -3

(3) 初項 2，公比 2　　(4) 初項 -3，公比 $\frac{1}{2}$

(1) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$　$a_5 = 162$

(2) $a_n = (-3)^{n-1}$　$a_5 = 81$

(3) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$　$a_5 = 32$

(4) $a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$a_5 = -\frac{3}{16}$

練習 18 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots$　　(2) $\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{16},\ \cdots\cdots$

(3) $-5,\ 5,\ -5,\ 5,\ \cdots\cdots$　　(4) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots\cdots$

(1) 初項1，公比-2

$a_n = (-2)^{n-1}$

(2) 初項$\frac{3}{2}$，公比$\frac{1}{2}$

$a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) 初項-5，公比-1

$a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$

(4) 初項$\sqrt{2}$，公比$\sqrt{2}$

$a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

$= (\sqrt{2})^n$

練習 19 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 第 2 項が 6，第 4 項が 54　　(2) 第 5 項が -9，第 7 項が -27

(1) 等比数列の初項を a, 公比を r とすると

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

第2項が6 → $a_2 = 6$ より

$a_2 = a \cdot r^{2-1} = ar = 6$ …①

第4項が54 → $a_4 = 54$ より

$a_4 = a \cdot r^{4-1} = ar^3 = 54$ …②

①を②に代入すると

$6r^2 = 54$

$r^2 = 9$

$r = \pm 3$

①より $r = 3$ のとき

$a = 2$

$r = -3$ のとき

$a = -2$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ または $a_n = (-2) \cdot (-3)^{n-1}$

(2) 等比数列の初項を a, 公比を r とすると

等比数列の一般項 a_n は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

第5項が -9 → $a_5 = -9$ より

$a_5 = a \cdot r^{5-1} = ar^4 = -9$ …①

第7項が -27 → $a_7 = -27$ より

$a_7 = a \cdot r^{7-1} = ar^6 = -27$ …②

①を②に代入すると

$-9r^2 = -27$

$r^2 = 3$

$r = \pm\sqrt{3}$

①より $r = \sqrt{3}$ のとき

$a = -1$

$r = -\sqrt{3}$ のとき

$a = -1$

$a_n = -(\sqrt{3})^{n-1}$ または $a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1}$

・等比数列の性質

等比数列は初項 a に公比 r を次々にかけて得られる数列

となり合う2項の比が一定.

$$\boxed{a_{n+1} = r a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = r}$$

・等比中項

a, b, c が 0 でないとき数列 a, b, c が等比数列 $\iff b^2 = ac$

練習 20 数列 3, x, 9, …… が等比数列であるとき, x の値を求めよ。

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$$

等比数列の和

初項a, 公比rの等比数列の初項から第n項までの和をS_nとする.

$r \neq 1$のとき $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(|r|<1)$ または $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(|r|>1)$

$r=1$のとき $S_n = na$

練習 21 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 1, 2, 2^2, 2^3, ……　　(2) 2, $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2}{3^2}$, $-\dfrac{2}{3^3}$, ……

(1) 初項1, 公比2

$$S_n = \frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$$

$$\underline{S_n = 2^n - 1}$$

(2) 初項2, 公比$-\dfrac{1}{3}$

$$S_n = \frac{2\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\underline{S_n = \frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

練習 22 初項から第 3 項までの和が 7，第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

等比数列の一般項は $a_n = a\cdot r^{n-1}$

$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = 7$ …①

$a_3 + a_4 + a_5 = ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28$ …②

②より $r^2(\underbrace{a+ar+ar^2}_{①}) = 28$

$7r^2 = 28$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

$r=2$のとき $a=1$

$r=-2$のとき $a=\dfrac{7}{3}$

練習 23 恒等式 $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$ を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$K=1$を代入　$1^4-(1-1)^4=4\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1-1$

$K=2$を代入　$2^4-(2-1)^4=4\cdot2^3-6\cdot2^2+4\cdot2-1$

$K=3$を代入　$3^4-(3-1)^4=4\cdot3^3-6\cdot3^2+4\cdot3-1$

$\vdots$　　$\vdots$

$K=n$を代入　$n^4-(n-1)^4=4\cdot n^3-6\cdot n^2+4\cdot n-1$

辺々加えると　$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-4(1+2+3+\cdots+n)+n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=n^4+2n^3+n^2$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\{n(n+1)\}^2$

$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

1〜nまでの自然数の2乗の和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1〜nまでの自然数の3乗の和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

練習 24 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2$ (2) $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+15^3$

(1) $\frac{1}{6}\times20\times(20+1)\times(2\times20+1)$

$=2870$

(2) $\left\{\frac{1}{2}\times15\times(15+1)\right\}^2$

$=14400$

和の記号 Σ（シグマ）

数列$\{a_n\}$について初項から第n項までの和を第k項a_kと和の記号Σを用いて

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表し　$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\sum_{k=\square}^{\bigcirc} a_k$ は第□項〜第○項までの和

練習 25　次の(1)〜(3)の式を例 10 のような和の形で書け。(4), (5)の式を和の記号Σを用いて書け。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$　(2) $\sum_{k=3}^{8}2^{k-1}$　(3) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(4) $2+3+4+5+6$　(5) $3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

(2) $4+8+16+32+64+128$

(3) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

(4) $\sum_{k=2}^{6} k$　(5) $\sum_{k=2}^{7}(2k-1)^2$

練習 26　次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$　(2) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$

(1) $\frac{5^n-1}{5-1} = \frac{5^n-1}{4}$

(2) $\frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^n-3}{2}$

自然数に関する和の公式

① $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ （cは定数）

② $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

和の記号Σの性質

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$

練習 27 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2$ (2) $\sum_{k=1}^{50} k$ (3) $\sum_{k=1}^{12} k^2$ (4) $\sum_{k=1}^{7} k^3$

(1) $\sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \times 2 = \underline{30}$

(2) $\sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \times 50 \times (50+1) = \underline{1275}$

(3) $\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \times 12 \times (12+1) \times (2 \times 12+1) = \underline{650}$

(4) $\sum_{k=1}^{7} k^3 = \left\{\frac{1}{2} \times 7 \times (7+1)\right\}^2 = \underline{784}$

練習 28 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-5)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4)$ (3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)$ (4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-5) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 5 = 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 5n = \underline{2n^2 - 3n}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-7k+4) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 7\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4$

$= 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 7 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 4n$

$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) - \frac{7}{2}n(n+1) + \frac{8}{2}n$

$= \frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8\}$

$= \frac{1}{2}n(2n^2-4n+2) = n(n^2-2n+1) = \underline{n(n-1)^2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3+k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$

$= \underline{\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2\sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \underline{n(n-1)}$

練習 29　次の和を求めよ。

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + \frac{2}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\left\{n(n+1)+2(2n+1)+4\right\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列

$a_{n+1} - a_n = b_n$ のように数列 $\{a_n\}$ のとなり合う2項間の差を項とする数列 $\{b_n\}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列という.

※

a_n	1	3	7	13	21	$\cdots$
b_n	2	4	6	8	$\cdots$	

左表より階差数列 $\{b_n\}$ は

初項2公差2の等差数列 $b_n = 2n$

練習 30 階差数列を考えて，次の数列の第 6 項，第 7 項を求めよ。

1，2，5，10，17，……

a_n	1	2	5	10	17	26	37
b_n	1	3	5	7	9	11	

第6項は 26

第7項は 37

(階差数列は $2n-1$)

階差数列から一般項を求める

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると

$n \geqq 2$のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$n=1$のときについてもa_nが成立するか確認

練習 31 階差数列を利用して，次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) 1，2，4，7，11，…… (2) 2，3，5，9，17，……

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする.

(1)

a_n	1		2		4		7		11 …
b_n		1		2		3		4	…

表より $b_n = n$

$n \geqq 2$のとき $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$

$= \frac{n^2 - n + 2}{2}$

$n=1$のとき $\frac{1^2 - 1 + 2}{2} = 1$ で成立

よって $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

(2)

a_n	2		3		5		9		17 …
b_n		1		2		4		8	…

表より $b_n = 2^{n-1}$

$n \geqq 2$のとき $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{(2^{n-1} - 1)}{2-1}$

$= 2^{n-1} + 1$

$n=1$のとき $2^{1-1} + 1 = 2$ で成立

よって $a_n = 2^{n-1} + 1$

数列の和と一般項

数列$\{a_n\}$の初項a_1から第n項a_nまでの和をS_nとすると

初項 $a_1 = S_1$

$n \geqq 2$のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

練習 32 初項から第n項までの和S_nが，$S_n = n^2 - n$ で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= (n^2 - n) - (n^2 - 3n + 2)$

$= 2n - 2$

$n = 1$のとき

$2 \cdot 1 - 2 = 0$

よって $\underline{a_n = 2n - 2}$

練習 33 恒等式 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ を利用して，和

$S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ を求めよ。

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{2n}{2n+1}=\underline{\frac{n}{2n+1}}$$

練習 34 次の和 S を求めよ。

$S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n-1}$

$$S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}$$

$$-)\ 3S=\qquad 1\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\,3^{n-1}+n\cdot 3^n$$

$$-2S=1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 3^2+\cdots+1\cdot 3^{n-1}-n\cdot 3^n$$

$$-2S=\frac{(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^n$$

$$-2S=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{2n\cdot 3^n}{2}$$

$$-2S=\frac{(1-2n)\cdot 3^n-1}{2}$$

$$S=\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}$$

練習 35 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2) 第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

数列は正の奇数の数列なので一般項は $2n-1$

各群の中にある項の個数の数列は n

(1) 第 n 群の最初の項ははじめから数えて第 $n-1$ 群までの項の次の項

第 $n-1$ 群までの項数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$

よって第 n 群の最初の項は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項目なので $2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1 = n^2-n+1$

(2) 数列は初項 1，公差 2 の等差数列．第 15 群には 15 個の項が入っている．

第 15 群に入るすべての数の和 S は $S = \frac{1}{2} \times 15 \times \{(\text{第15群の初項}) + (\text{第15群の末項})\}$ で求められる．

第 15 群の初項は (1) より $15^2 - 15 + 1 = 211$

第 15 群の末項は 239

よって $S = \frac{1}{2} \times 15 (211 + 239) = 3375$

漸化式

数列において，前の項との関係を表す式.

※ $a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdots ①$

①において a_1 がわかれば a_2 がわかる. a_2 がわかれば a_3 がわかる

$n = 1, 2, 3, \cdots$ において①は成立

練習 36 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1) $a_1 = 100$，$a_{n+1} = a_n - 5$ (2) $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$

(1) $a_2 = a_1 - 5 = 95$

$a_3 = a_2 - 5 = 90$

$a_4 = a_3 - 5 = 85$

$a_5 = a_4 - 5 = 80$

(2)

$a_2 = 3a_1 + 2 = 8$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 26$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 80$

$a_5 = 3a_4 + 2 = 242$

漸化式で定められる数列の一般項

等差数列$\{a_n\}$の漸化式は $a_{n+1}=a_n+d$ （等差型）

等比数列$\{a_n\}$の漸化式は $a_{n+1}=ra_n$ （等比型）

練習 37 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n$

(1) $a_{n+1}-a_n=3$

$\{a_n\}$は初項2, 公差3の等差数列

$a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$\underline{a_n=3n-1}$

(2) $\{a_n\}$は初項1, 公比2の等比数列

$\underline{a_n=2^{n-1}}$

練習 38 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$ (2) $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

(1)

$a_{n+1}-a_n=3^n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$=\frac{2+3^n-3}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

$n=1$ のとき $\frac{3-1}{2}=1$

$\underline{a_n=\frac{3^n-1}{2}}$,

(2) $a_{n+1}-a_n=2n+1$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)$

$=n^2-1$

$n=1$ のとき $1^2-1=0$

$\underline{a_n=n^2-1}$,

$a_{n+1}=pa_n+q$ の漸化式

$a_{n+1}=pa_n+q$ の一般項 a_n を求める.

手順

① a_{n+1}, a_n を α とおき, α の値を求める.

② ①より $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形にする.

③ $b_n=a_n-\alpha$ とおく. すると $b_{n+1}=pb_n$ の形ができる.

$b_1=a_1-\alpha$ より b_1 が求まり, b_n は公比 p の等比数列である.

④ b_n の一般項を求める.

⑤ $b_n=a_n-\alpha$ より $a_n=b_n+\alpha$. ⑤より a_n が定まる.

練習 39 次の□に適する数を求めよ。

(1) $a_{n+1}=4a_n-6$ を変形すると　$a_{n+1}-\square=4(a_n-\square)$

(2) $a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると　$a_{n+1}+\square=2(a_n+\square)$

(3) $a_{n+1}=-2a_n+3$ を変形すると　$a_{n+1}-\square=-2(a_n-\square)$

(1) $\alpha=4\alpha-6$

$-3\alpha=-6$

$\alpha=2$

$a_{n+1}-\underline{2}=4(a_n-\underline{2})$

(2) $\alpha=2\alpha+1$

$\alpha=-1$

$a_{n+1}-(-1)=2\{a_n-(-1)\}$

$a_{n+1}+\underline{1}=2(a_n+\underline{1})$

(3) $\alpha=-2\alpha+3$

$\alpha=1$

$a_{n+1}-\underline{1}=-2(a_n-\underline{1})$

練習 40 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=4a_n-6$　　(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

(1) $\alpha=4\alpha-6$

$\alpha=2$

$a_{n+1}-2=4(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とする

$b_{n+1}=4b_n$

また，$b_1=a_1-2=3$

なので b_n は初項3，公比4の等比数列

$b_n=3\cdot4^{n-1}$

$a_n-2=b_n$ より

$a_n-2=3\cdot4^{n-1}$

$\underline{a_n=3\cdot4^{n-1}+2}$

(2) $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$

$\alpha=2$

$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とする

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

$b_1=a_1-2=1$

b_n は初項1 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n-2=b_n$ より

$a_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\underline{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2}$