数Ⅲ

積分法とその応用

$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \qquad C\text{は積分定数}$$

x^{α} の不定積分

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \qquad \text{ただし，}\alpha\neq-1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

練習 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{dx}{x^3}$ (2) $\int x^{\frac{1}{3}}dx$ (3) $\int x\sqrt{x}\,dx$ (4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Cは積分定数とする.

(1) $\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=\underline{-\frac{1}{2x^2}+C}$

(2) $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\underline{\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C}$

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\underline{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C}$

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+C=\underline{2\sqrt{x}+C}$

関数の定数倍および和，差の不定積分

1 $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ 　　k は定数

2 $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

3 $\int\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

練習 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$ 　(2) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$ 　(4) $\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

Cは積分定数とする.

(1)

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \underline{\log|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}+C}$$

(2)

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C}$$

(3)

$$\int\frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy = \int\frac{y-2\sqrt{y}+1}{y}dy = \int\left(1-\frac{2\sqrt{y}}{y}+\frac{1}{y}\right)dy = \underline{y-4\sqrt{y}+\log y+C}$$

(4)

$$\int\left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt = \int\left(9t^4-6t+\frac{1}{t^2}\right)dt = \underline{\frac{9}{5}t^5-3t^2-\frac{1}{t}+C}$$

三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,\qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

練習 3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (\cos x - 2\sin x)\,dx$　(2) $\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\,dx$

(3) $\int \frac{dx}{\tan^2 x}$　(4) $\int 5^x\,dx$　(5) $\int (3^x - 2e^x)\,dx$

Cは積分定数とする.

(1) $\int (\cos x - 2\sin x)\,dx = \underline{\sin x + 2\cos x + C}$

(2) $\int \frac{2\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(2\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \underline{2\sin x - \tan x + C}$

(3) $\int \frac{dx}{\tan^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \underline{-\frac{1}{\tan x} - x + C}$

(4) $\int 5^x\,dx = \underline{\frac{5^x}{\log 5} + C}$

(5) $\int (3^x - 2e^x)\,dx = \underline{\frac{3^x}{\log 3} - 2e^x + C}$

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a \neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

練習 4

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3x+1)^4\,dx$　(2) $\int(4x-3)^{-3}\,dx$　(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

~~(4) $\int\frac{dx}{2x+1}$　(5) $\int\sin 2x\,dx$　(6) $\int e^{3x-1}\,dx$~~

Cは積分定数とする.

(1) $$\int(3x+1)^4\,dx=\frac{1}{5}\cdot(3x+1)^5\cdot\frac{1}{(3x+1)'}+C=\underline{\frac{1}{15}(3x+1)^5+C}$$

(2) $$\int(4x-3)^{-3}\,dx=-\frac{1}{2}(4x-3)^{-2}\cdot\frac{1}{(4x-3)'}+C=\underline{-\frac{1}{8}(4x-3)^{-2}+C}$$

(3) $$\int\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx=\int(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=2\cdot(1-2x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1-2x)'}+C=\underline{-\sqrt{1-2x}+C}$$

練習 4 次の不定積分を求めよ。

~~(1) $\int (3x+1)^4 dx$　(2) $\int (4x-3)^{-3} dx$　(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$~~

(4) $\int \frac{dx}{2x+1}$　(5) $\int \sin 2x\, dx$　(6) $\int e^{3x-1} dx$

Cは積分定数とする.

(4) $\int \frac{1}{2x+1} dx = \log|2x+1| \cdot \frac{1}{(2x+1)'} + C = \underline{\frac{1}{2}\log|2x+1| + C}$

(5) $\int \sin 2x\, dx = -\cos 2x \cdot \frac{1}{(2x)'} + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos 2x + C}$

(6) $\int e^{3x-1} dx = e^{3x-1} \cdot \frac{1}{(3x-1)'} + C = \underline{\frac{1}{3}e^{3x-1} + C}$

置換積分法 (1)

1 $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$ ただし，$x=g(t)$

練習 5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ ~~(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$~~

Cは積分定数とする.

(1)

$\sqrt{2x-1}=t$ とする.

$2x-1=t^2 \longrightarrow x=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$

$\frac{dx}{dt}=t \rightarrow dx=t\,dt$

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\int\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)\cdot t\cdot t\,dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{2}t^2\right)dt$$

$$=\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{6}t^3+C$$

$$=\frac{1}{30}t^3(3t^2+5)+C$$

$$=\frac{1}{30}(2x-1)\sqrt{2x-1}\{3(2x-1)+5\}+C$$

$$=\frac{1}{30}(2x-1)\sqrt{2x-1}(6x+2)+C$$

$$=\underline{\frac{1}{15}(2x-1)\sqrt{2x-1}(3x+1)+C}$$

練習 5 次の不定積分を求めよ。

~~(1) $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$~~ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Cは積分定数とする.

(2)

$\sqrt{x+1}=t$ とする

$x+1=t^2 \rightarrow x=t^2-1$

$\frac{dx}{dt}=2t \rightarrow dx=2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt$$

$$=\int (2t^2-2)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}t^3-2t+C$$

$$=\frac{2}{3}t(t^2-3)+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(x+1)-3\}+C$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2)+C}$$

置換積分法 (2)

2 $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$ ただし，$g(x)=u$

練習 6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

Cは積分定数とする.

(1) $x^3+2=u$とする.

$\dfrac{du}{dx}=3x^2 \rightarrow dx=\dfrac{du}{3x^2}$

$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$

$\displaystyle=\int x^2\sqrt{u}\cdot\frac{du}{3x^2}$

$\displaystyle=\int\frac{\sqrt{u}}{3}\,du$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot u\sqrt{u}+C$

$=\dfrac{2}{9}(x^3+2)\sqrt{x^3+2}+C$

(2) $\sin x=u$とする

$\dfrac{du}{dx}=\cos x \rightarrow dx=\dfrac{du}{\cos x}$

$\displaystyle\int\sin^3 x\cos x\,dx$

$\displaystyle=\int u^3\cdot\cos x\cdot\frac{du}{\cos x}$

$\displaystyle=\int u^3\,du$

$=\dfrac{1}{4}u^4+C$

$=\dfrac{1}{4}\sin^4 x+C$

(3) $\log x=u$とする.

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x} \rightarrow dx=x\,du$

$\displaystyle\int\frac{\log x}{x}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{u}{x}\cdot x\,du$

$\displaystyle=\int u\,du$

$=\dfrac{1}{2}u^2+C$

$=\dfrac{1}{2}(\log x)^2+C$

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分

3	$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log\lvert g(x)\rvert + C$

練習 7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

Cは積分定数とする.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1}\,dx$

$= \underline{\log\lvert x^2+x-1\rvert + C}$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$

$= \underline{\log(e^x+1) + C}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

$\displaystyle = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx$

$= \underline{\log\lvert \sin x\rvert + C}$

部分積分法

4 $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

練習 8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin x\,dx$　　(2) $\int xe^{-x}\,dx$

Cは積分定数とする.

(1) $\int x\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx = \underline{-x\cos x + \sin x + C}$

(2) $\int xe^{-x}\,dx = x\cdot(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = \underline{-(x+1)e^{-x} + C}$

練習 9　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log 2x\,dx$　(2) $\int \log x^2\,dx$　(3) $\int x\log x\,dx$

Cは積分定数とする。

(1) $\int \log 2x\,dx = \int (x)'\log 2x\,dx = x\log 2x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log 2x - \int dx = \underline{x\log 2x - x + C}$

(2) $\int \log x^2 dx = \int (x)'\log x^2 dx = x\log x^2 - \int x\cdot\frac{2}{x}dx = x\log x^2 - \int 2\,dx = \underline{x\log x^2 - 2x + C}$

(3) $\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx = \underline{\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C}$

練習 10 不定積分 $\int (x^2+1)\sin x\,dx$ を求めよ。

$$\int (x^2+1)\sin x\,dx = (x^2+1)\cdot(-\cos x) - \int 2x\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= -(x^2+1)\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$= (-x^2-1+2)\cos x + 2x\sin x + C$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C \quad (C\text{は積分定数})$$

練習 11 $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。また，不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ を求めよ。

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

これが $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ と等しくなるためには $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$ となればよいので $\underline{a=-1,\ b=2}$

Cを積分定数とする

$$\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx=-\log|x+1|+2\log|x+2|+C$$

$$=\log(x+2)^2-\log|x+1|+C$$

$$=\underline{\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C}$$

練習 12 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x^2-1}{x+2}dx$ (2) $\int \frac{4x^2}{2x-1}dx$ (3) $\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$

Cは積分定数とする.

(1) $\int \frac{x^2-1}{x+2}dx = \int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \underline{\frac{1}{2}x^2-2x+3\log|x+2|+C}$

(2) $\int \frac{4x^2}{2x-1}dx = \int\left(2x+1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = \underline{x^2+x+\frac{1}{2}\log|2x-1|+C}$

(3) $\int \frac{3}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3}{(x-1)(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$= \log|x-1|-\log|x+2|+C$

$= \underline{\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C}$

練習 13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x\,dx$　(2) $\int \sin^2 3x\,dx$　(3) $\int \sin x \cos x\,dx$

(4) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$　(5) $\int \sin x \sin 3x\,dx$

Cは積分定数とする.

(1) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \underline{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$

(2) $\int \sin^2 3x\,dx = \int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C}$

(3) $\int \sin x \cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \underline{-\frac{1}{4}\cos 2x + C}$

(4) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + C = \underline{\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C}$

(5) $\int \sin x \sin 3x\,dx = \int -\frac{1}{2}\{\cos 4x - \cos(-2x)\}\,dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 2x)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \underline{-\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C}$

定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，

a，b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

練習 14 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$ (3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$ (4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x\,dx$

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \underline{\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \underline{1}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_{-2}^{-1} = \log|-1| - \log|-2| = \underline{-\log 2}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{2\log 2} = \underline{\frac{3}{2\log 2}}$

練習 15 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx$　(2) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$　(3) $\int_{-1}^1 (e^t-e^{-t})\,dt$

(4) $\int_0^\pi \sin 2x\,dx$　(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta$

(1) $\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^2 = \underline{2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}}$

(2) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_0^1 = \frac{80}{8} = \underline{10}$

(3) $\int_{-1}^1 (e^t - e^{-t})dt = \left[e^t + e^{-t}\right]_{-1}^1 = \left(e+\frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e}+e\right) = \underline{0}$

(4) $\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi = \left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = \underline{0}$

(5) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \underline{\pi}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta \cos 2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin 6\theta + \sin 2\theta)\,d\theta = \left[-\frac{1}{12}\cos 6\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{2}{3}}$

練習 16 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |e^x-1|\,dx$

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$|\sqrt{x}-1| = -\sqrt{x}+1$

$1 \leqq x \leqq 4$ のとき

$|\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$

$$\int_0^1 (-\sqrt{x}+1)\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\right]_1^4$$

$$= \underline{2}$$

(2) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

$|e^x-1| = -e^x+1$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$|e^x-1| = e^x-1$

$$\int_{-1}^0 (-e^x+1)\,dx + \int_0^2 (e^x-1)\,dx$$

$$= \left[-e^x+x\right]_{-1}^0 + \left[e^x-x\right]_0^2$$

$$= \underline{e^2+\frac{1}{e}-3}$$

定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

練習 17 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(1-x)^5\,dx$　　(2) $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

(1)

$1-x=t$ とする.

$x=1-t$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$\frac{dx}{dt}=-1$ より

$dx=-dt$

$\int_0^1 x(1-x)^5 dx$

$=\int_1^0 -(1-t)\cdot t^5\,dt$

$=\int_1^0 (t^6-t^5)\,dt$

$=\left[\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{6}t^6\right]_1^0$

$=\underline{\frac{1}{42}}$

(2)

$\sqrt{x-1}=t$ とする.

$x-1=t^2$

$x=t^2+1$

x	$2 \to 5$
t	$1 \to 2$

$\frac{dx}{dt}=2t$ より

$dx=2t\,dt$

$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$=\int_1^2 (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt$

$=\int_1^2 (2t^4+2t^2)\,dt$

$=\left[\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3\right]_1^2$

$=\underline{\frac{256}{15}}$

練習 18 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ ~~(3)~~ $\cancel{\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}}$

(1)

$x=\sin\theta$ とする.

x	$-1 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ より

$dx=\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}}$$

(2)

$x=2\sin\theta$ とする

x	$-1 \to \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より

$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2+2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[2\theta+\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underline{\pi+\sqrt{3}}$$

練習 18 次の定積分を求めよ。

~~(1) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ (2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$~~ (3) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $x=2\sin\theta$

x	$1 \to \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より

$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{6}}$$

練習 19 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$

(1)

$x = \tan\theta$ とする.

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $x = 2\tan\theta$

x	$-2 \to 2$
θ	$-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2}{\cos^2\theta}$ より

$dx = \dfrac{2\,d\theta}{\cos^2\theta}$

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\tan^2\theta+4} \cdot \frac{2\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{2\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\,\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{4}}$$

練習 20 次の関数の中から，偶関数，奇関数を選べ。

① x^3　② x^4+3　③ $\tan x$　④ $x+\cos x$

① $f(x)=x^3$

$f(-x)=(-x)^3=-x^3$

$f(x)=-f(x)$ より 奇関数

② $f(x)=x^4+3$

$f(-x)=(-x)^4+3=x^4+3$

$f(x)=f(-x)$ より 偶関数

③ $f(x)=\tan x$

$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x$

$f(x)=-f(x)$ より 奇関数

④ $f(x)=x+\cos x$

$f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x$

$f(x)\neq f(-x)$, $f(x)\neq -f(x)$ なので

偶関数でも奇関数でもない。

偶関数 ②

奇関数 ① ③

偶関数，奇関数と定積分

1 偶関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2 奇関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

練習 21 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$ (2) $\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx$

(3) $\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

(1) $\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+4x+5)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2+5x\right]_{-2}^{2}$

$=\underline{36}$

(2) $f(x)=e^x-e^{-x}$ は奇関数なので

$\int_{-1}^{1}(e^x-e^{-x})\,dx=\underline{0}$

(3) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数なので

$\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=\underline{0}$

(4) $f(x)=\sin^2 x$ は偶関数なので

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\underline{\frac{\pi}{2}}$

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

練習 22 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ (2) $\int_0^1 xe^x\,dx$ (3) $\int_1^2 x\log x\,dx$

(1)

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$

$$=\underline{\pi}$$

(2)

$$\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=\underline{1}$$

(3)

$$\int_1^2 x\log x\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x^2\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}x^2\log x\Big]_1^2 - \Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^2$$

$$=\underline{2\log 2 - \frac{3}{4}}$$

練習 23 部分積分法によって，定積分 $\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$ を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\cdot(x-1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(x+1)^4dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x+1)^4(x-1)\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{1}{20}(x+1)^5\right]_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{8}{5}$$

練習 24 部分積分法を 2 回利用して，定積分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$ を求めよ。

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2x\cos x\,dx$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x\,dx$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left[2x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left[2x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\left[-2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi-2$$

定積分と導関数

a が定数のとき　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

練習 25　次の関数を x で微分せよ。ただし，(2)では $x>0$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt$

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt = \underline{\sin x}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x t\log t\,dt = \underline{x\log x}$

練習 26 関数 $G(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ について，$G'(x)$ および $G''(x)$ を求めよ。

$$G(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

$$=x\int_0^x e^t\,dt-\int_0^x te^t\,dt$$

$$G'(x)=(x)'\int_0^x e^t\,dt+x\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x e^t\,dt-\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt$$

$$=\int_0^x e^t\,dt+xe^x-xe^x$$

$$=\int_0^x e^t\,dt=e^x-1$$

$$G''(x)=(e^x-1)'=e^x$$

$$\therefore\quad G'(x)=e^x-1$$

$$G''(x)=e^x$$

練習 27 関数 $\int_x^{3x} t\cos t\,dt$ を x で微分せよ。

$F'(t) = t\cos t$ とする。

$$\int_x^{3x} t\cos t\,dt = \left[F(t)\right]_x^{3x} = F(3x) - F(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{3x} t\cos t\,dt = F'(3x)\cdot(3x)' - F'(x)$$

$$= 3\cdot 3x\cos 3x - x\cos x$$

$$= 9x\cos 3x - x\cos x$$

練習 28 等式 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\int_0^1 f(t)e^t\,dt = a$ とする。

$f(x) = x + a$

$f(t) = t + a$ となるので

$$\int_0^1 f(t)e^t\,dt = \int_0^1 (t+a)e^t\,dt$$

$$= \left[(t+a)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt$$

$$= \left[(t+a)e^t\right]_0^1 - \left[e^t\right]_0^1$$

$$= (e-1)a + 1$$

$\int_0^1 f(t)e^t\,dt = a$ より

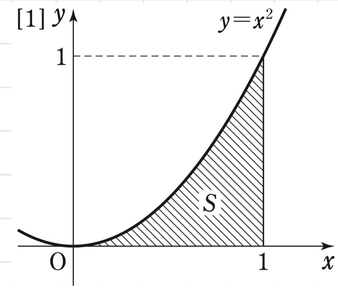
$(e-1)a + 1 = a \Rightarrow a = \dfrac{1}{2-e}$

$$\therefore f(x) = x + \frac{1}{2-e}$$

・定積分と和の極限

関数 $f(x)=x^2$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および直線 $x=1$ で囲まれた面積 S は

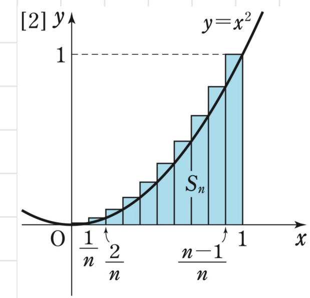
$$S=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]=\frac{1}{3}$$



区間[0,1]を n 等分して n 個の長方形をつくり，それらの面積の和を S_n とする。
$n\to\infty$ のとき，この長方形の集まりは図1の斜線の図形に限りなく近づくから $S_n\to S$ となることが考えられる。

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

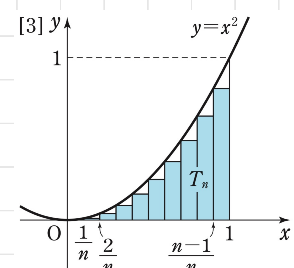
よって $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}$$



練習 29 上の S_n の代わりに，右の図[3]の長方形の面積の和 T_n を考えても，$\lim_{n\to\infty}T_n=S$ となることを示せ。

$$T_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

よって $$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)=\frac{1}{3}=S$$



区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

ただし，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

とくに，以下の形を用いる．

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}$$

練習 30　極限値 $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4)$ を求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$

ここで $f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{n}\right)^4$ なので $f(x)=x^4$ から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\underline{\frac{1}{5}}$$

定積分と不等式

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x) \geqq g(x) \quad \text{ならば} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$$

等号が成り立つのは，常に $f(x)=g(x)$ のときである。

練習 31 次のことを示せ。

(1) $x \geqq 0$ のとき $\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{x^2+x+1}$　　(2) $\log 2 > \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

(1) $x \geqq 0$ のとき

$$x+1 \leqq x^2+x+1$$

両辺は正であるから逆数をとって

$$\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x^2+x+1}$$

(2) (1) の不等式の等号は常には成り立たないので

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log(x+1)\Big]_0^1 = \log 2$

$$\log 2 > \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

練習 32 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1) \qquad \text{ただし，} n \text{は自然数}$$

自然数 k について $k \leqq x \leqq k+1$ とすると $\dfrac{1}{k} \geqq \dfrac{1}{x}$

等号は常に成り立たないので $\dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx$

これより $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

左辺は $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 右辺は $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$

したがって $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} > \log(n+1)$

曲線 $y=f(x)$ と面積

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

練習 33 次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$　　(2) $y=\sqrt{x+1}$，$x=0$，$x=3$

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log x\Big]_1^e=\underline{1}$

(2) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^3=\underline{\frac{14}{3}}$

練習 34 曲線 $y=e^x-e$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$y\leqq 0$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$y\geqq 0$

$$\int_0^1 -(e^x-e)\,dx+\int_1^2 (e^x-e)\,dx$$

$$=\Big[-e^x+ex\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$

$$=\underline{e^2-2e+1}$$

2つの曲線の間の面積

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，
2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線
$x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

練習 35 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$　　(2) $x+4y=5$，$xy=1$

(1)

$x^2=\sqrt{x}$

$x^4=x$

$x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=0,\ 1$

求める面積は

$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=\underline{\frac{1}{3}}$

(2) $x+4y=5$ より $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

$xy=1$ より　$y=\frac{1}{x}$

$-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}=\frac{1}{x}$

$x^2-5x=-4$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1,\ 4$

求める面積は

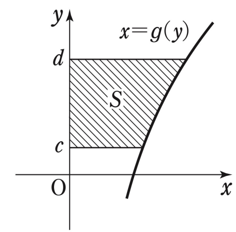
$\int_1^4\left\{\left(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\left[-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x-\log x\right]_1^4$

$=\underline{\frac{15}{8}-2\log 2}$

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d g(y)\,dy$$



練習 36 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2+1$, x 軸, y 軸, $y=2$ (2) $x=y^2-1$, $x=y+5$

(1)

$$\int_0^2 (y^2+1)\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3+y\right]_0^2$$

$$=\underline{\frac{14}{3}}$$

(2)

$$y^2-1=y+5$$

$$y^2-y-6=0$$

$$(y-3)(y+2)=0$$

$$y=-2,\ 3$$

$$\int_{-2}^{3}\{(y+5)-(y^2-1)\}\,dy$$

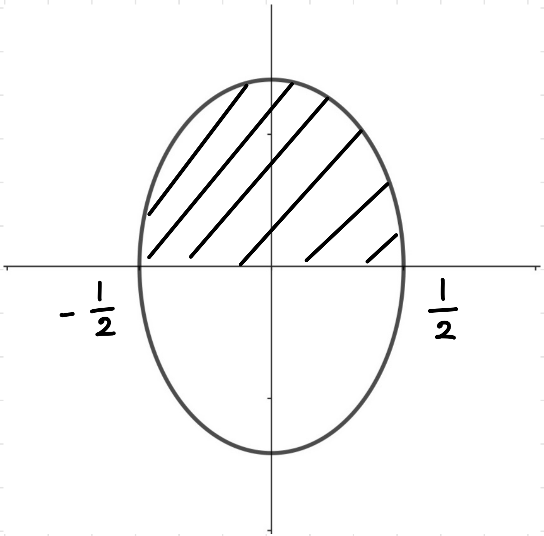
$$=\int_{-2}^{3}(-y^2+y+6)\,dy$$

$$=-\int_{-2}^{3}(y+2)(y-3)\,dy$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\{3-(-2)\}^3$$

$$=\underline{\frac{125}{6}}$$

練習 37 曲線 $4x^2+2y^2=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



求める面積 S は左図の斜線部を2倍したものに等しい

$y \geqq 0$ の範囲で $4x^2+2y^2=1$ を y について解く

$$4x^2+2y^2=1$$

$$y^2=\frac{1}{2}(1-4x^2)$$

$$y^2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=2\left(\frac{1}{4}-x^2\right)$$

$$y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$$

$$S=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{2}\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx}_{\text{半径}\frac{1}{2}\text{の半円の面積}}$$

$$=2\sqrt{2}\times\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

練習 38 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$x=3\cos\theta,\ \ y=2\sin\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$$S=\int_{3}^{-3}2\sin\theta\,dx=-\int_{-3}^{3}2\sin\theta\,dx$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta \quad \text{より}$$

$$dx=-3\sin\theta\,d\theta$$

$$S=-\int_{0}^{\pi}2\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}6\sin^2\theta\,d\theta$$

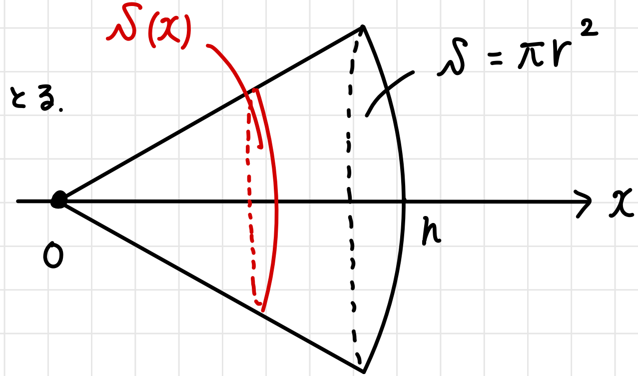
$$=\int_{0}^{\pi}6\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}(3-3\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[3\theta-\frac{3}{2}\sin2\theta\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\underline{3\pi}$$

練習 39 底面の半径が r，高さが h の円錐の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ で与えられることを示せ。



この円錐の頂点から底面に垂線を下ろしこれを x 軸として頂点を原点にとる.

座標が x である点を通り,

x 軸に垂直な平面で円錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする.

この断面は底面と相似で相似比は $x:h$ であるので

面積比は $S(x):S=x^2:h^2$ なので

$$S(x):\pi r^2=x^2:h^2$$

$$S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$$

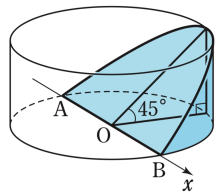
よって $V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{3h^2}\cdot\pi r^2 x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

断面積 $S(x)$ と立体の体積 V

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad ただし，a<b$$

練習 40

底面の半径が a で高さも a である直円柱がある。この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。



$(底辺)=\sqrt{a^2-x^2}$　　$(高さ)=\sqrt{a^2-x^2}$

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a^3=\underline{\frac{2}{3}a^3}$$

x 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

練習 41 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$　　(2) $y=\sin x \quad (0\leqq x\leqq\pi)$

(1)

$x^2-2x=0$ のとき

$x(x-2)=0$

$x=0,\ 2$

$$V=\pi\int_0^2(x^2-2x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{15}\pi$$

(2)

$\sin x=0$ のとき

$x=0,\ \pi$

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx$$
$$=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos2x}{2}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi^2}{2}$$

練習 42 $a>0$, $b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を $y \geqq 0$ の範囲で y について解く

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}$$

$$=\underline{\frac{4}{3}\pi ab^2}$$

y 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy \qquad \text{ただし，} c<d$$

練習 43 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=4-x^2$，$y=1$　　(2) $y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸

(1)

$$y=4-x^2$$

$$x^2=4-y$$

$$V=\pi\int_1^4 (4-y)\,dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_1^4$$

$$=\frac{9}{2}\pi$$

(2)

$$V=\pi\int_0^1 \left\{(y-1)^2\right\}^2 dy$$

$$=\pi\int_0^1 (y-1)^4\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}(y-1)^5\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{5}$$

練習 44 放物線 $y=4x-x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$4x-x^2=x$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0,\ 3$$

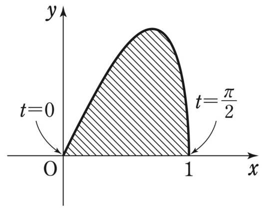
$$V_1=\pi\int_0^3(4x-x^2)^2dx$$
$$=\pi\int_0^3(x^4-8x^3+16x^2)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-2x^4+\frac{16}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=\frac{153}{5}\pi$$

$$V_2=3\times3\times\pi\times3\times\frac{1}{3}=9\pi$$

$$V=V_1-V_2=\frac{153}{5}\pi-9\pi=\underline{\frac{108}{5}\pi}$$

練習 45 次の曲線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$x=\sin t,\quad y=\sin 2t \quad \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



t	$0 \to \frac{\pi}{2}$
x	$0 \to 1$

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ より

$dx=\cos t\,dt$

$$V=\pi\int_0^1 y^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cos^3 t\,dt$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos^3 t\,dt$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t-\cos^5 t)\,dt$$

$$=4\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\,dt\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt=\frac{2}{3}\quad\cdots①$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\,dt=\frac{8}{15}\quad\cdots②$$

なので

$$4\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\,dt\right)$$

$$=4\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{15}\right)$$

$$=\underline{\frac{8}{15}\pi}$$

①②の計算 →

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\cos t\,dt = \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^2 \cos t\,dt$

$u = \sin t$ とする

t	$0 \to \frac{\pi}{2}$
u	$0 \to 1$

$\frac{du}{dt} = \cos t$ より

$dt = \frac{du}{\cos t}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^2 \cos t\,dt$

$= \int_0^1 (1-u^2)^2 \cdot \cos t \cdot \frac{du}{\cos t}$

$= \int_0^1 (1-u^2)^2\,du$

$= \int_0^1 (u^4 - 2u^2 + 1)\,du$

$= \left[\frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + u\right]_0^1 = \frac{8}{15}$

$f(t_1)$ は $t=t_1$ のときのPの座標(Pの初期位置)

$t=t_2$ におけるPの座標 x

$$x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

数直線上を運動する点と道のり

数直線上を運動する点Pの時刻 t における速度を v とすると,

時刻 t_1 から t_2 までにPが通過する道のり s は　$s=\int_{t_1}^{t_2}|v|\,dt$

練習 46 数直線上を運動する点Pの速度が,時刻 t の関数として $v=4-2t$ で与えられている。$t=0$ におけるPの座標が2であるとき,$t=3$ のときのPの座標を求めよ。

$t=3$ におけるPの座標を x とする.

$$x=2+\int_0^3 (4-2t)\,dt$$

$$=2+\left[4t-t^2\right]_0^3$$

$$=2+3$$

$$=\underline{5}$$

練習 47 数直線上を運動する点Pがあり,時刻 t におけるPの速度は $v=\sin 2t$ であるとする。$t=0$ から $t=\pi$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

$$s=\int_0^{\pi}|\sin 2t|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2t\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\underline{2}$$

座標平面上を運動する点と道のり

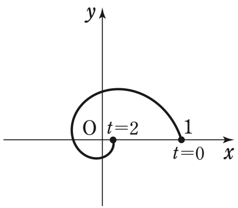
座標平面上を運動する点 P(x, y) の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数で表されるとき，時刻 t_1 から t_2 までにPが通過する道のりは

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{v}|\,dt$$

練習 48 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 (x, y) が

$x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$

で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにPが通過する道のり s を求めよ。



$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos\pi t-\pi e^{-t}\sin\pi t$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin\pi t+\pi e^{-t}\cos\pi t$$

$$S=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{(-e^{-t}\cos\pi t-\pi e^{-t}\sin\pi t)^2+(-e^{-t}\sin\pi t+\pi e^{-t}\cos\pi t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+\pi^2}\,e^{-t}\,dt=\left[-\sqrt{1+\pi^2}\,e^{-t}\right]_0^2=\underline{\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$$

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

練習 49 次のアステロイドの長さ L を求めよ。

$x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}=3\sin t\cos t=\frac{3}{2}\sin 2t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\left|\frac{3}{2}\sin 2t\right|dt$$

$$=\frac{3}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2t\,dt+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin 2t\,dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}-2\sin 2t\,dt\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}+\left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right)$$

$$=\underline{6}$$

曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

練習 50 曲線 $y=x\sqrt{x}$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ の長さ L を求めよ。

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L=\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right]_0^5$$

$$=\frac{335}{27}$$