数A

場合の数と確率

・集合 … 範囲がはっきりしたものの集まり

・要素 … 集合を構成するもの

(例) 1から10までの自然数の集まり

$$\overbrace{\{\underbrace{1}_{\text{要素}},\ \underbrace{2}_{\text{要素}},\ \underbrace{3}_{\text{要素}},\ \underbrace{4}_{\text{要素}},\ \underbrace{5}_{\text{要素}},\ \underbrace{6}_{\text{要素}},\ \underbrace{7}_{\text{要素}},\ \underbrace{8}_{\text{要素}},\ \underbrace{9}_{\text{要素}},\ \underbrace{10}_{\text{要素}}\}}^{\text{集合}}$$

x が集合Aに属するとき $x \in A$ と書く。

x が集合Aに属さないとき $x \notin A$ と書く。

練習 1 有理数全体の集合を Q とする。次の□に適する記号 $\in$ または $\notin$ を入れよ。

(1) $4 \square Q$ (2) $-\frac{2}{3} \square Q$

(3) $\sqrt{2} \square Q$

(1) $4 \in Q$ (2) $-\frac{2}{3} \in Q$ (3) $\sqrt{2} \notin Q$

集合には2通りの書き表し方がある

① 集合Aの要素を全て並べる. $\Rightarrow A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A　$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

② 集合Aの式と条件のみを書く. $\Rightarrow A=\{$式$\mid$条件$\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A　$A=\{x \mid x$は1から10までの自然数$\}$

練習 2 次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1) 20 の正の約数全体の集合 A

(2) $B=\{x \mid x$ は 10 以下の正の奇数$\}$

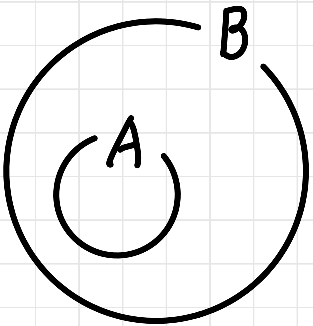
(3) $C=\{3n+1 \mid n=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

(1) $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2) $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(3) $C=\{1, 4, 7, 10, \cdots\cdots\}$

・部分集合…集合Aの要素の全てが集合Bに含まれているときの集合A



このとき，AはBに含まれる → $A \subset B$ と書く

BはAを含む → $B \supset A$ と書く．

また，AとBの要素が一致しているとき $A=B$．AとBは等しい．

(例) 集合Aを10以下の正の奇数，集合Bを1から10までの自然数とすると

$A \subset B$ が成立．

・空集合…要素が1つもない集合．記号$\emptyset$(ファイ)で表す．
空集合は全ての集合の部分集合である．

練習 3 次の 2 つの集合の関係を，⊂，＝を使って表せ。

(1) $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(2) $C=\{1, 2, 5, 10\}$, $D=\{x \mid x$ は 10 の正の約数$\}$

(3) $P=\{x \mid x$ は 12 以下の自然数$\}$, $Q=\{x \mid x$ は 12 の正の約数$\}$

練習 4 次の集合の部分集合をすべてあげよ。

(1) $\{1, 2\}$　　(2) $\{a, b, c\}$

(1) $A \subset B$

(2) $D=\{1, 2, 5, 10\}$ より

$C=D$

(3) $P=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$P \supset Q$

(1)

$\emptyset$

$\{1\}, \{2\}$

$\{1, 2\}$

(2)

$\emptyset$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

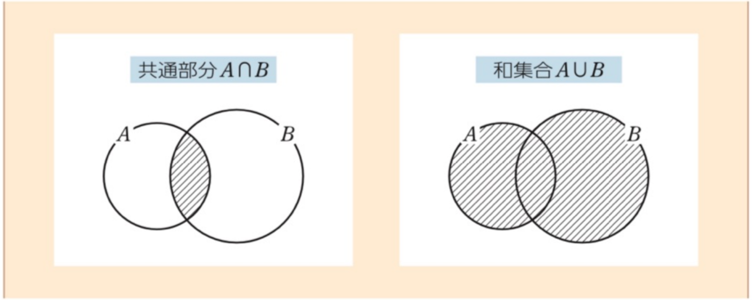
$\{a, b, c\}$

・共通部分…集合Aと集合Bの両方に属する要素の集合

$A \cap B$ と表す.（共通部分がない場合 $A \cap B$ の要素は $\emptyset$）

・和集合…集合A, 集合Bの少なくともどちらか一方に属する要素の集合

$A \cup B$ と表す.



練習 5　$A=\{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{1, 3\}$ について，次の集合を求めよ。

(1)　$A \cap B$　　(2)　$A \cup B$

(3)　$B \cap C$　　(4)　$B \cup C$

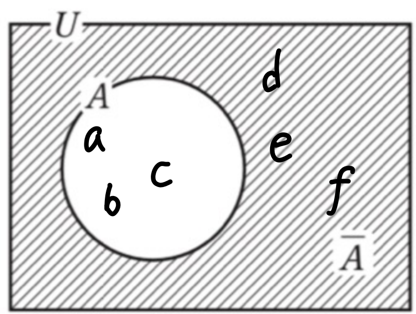
(1) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$　(3) $B \cap C = \emptyset$

(4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

・補集合 … 全体集合 U の部分集合 A に対して, U の要素であるが A に属さない要素の集合. 全体集合 U の部分集合 A の補集合は $\overline{A}$ と表す.

・全体集合 … 集合 A を部分集合にもつ集合. 全体集合は U で表す.



左図のように要素が入っているとき

$U=\{a, b, c, d, e, f\}$

$A=\{a, b, c\}$

$\overline{A}=\{d, e, f\}$

補集合の性質

U を全体集合とし, A, B をその部分集合とするとき

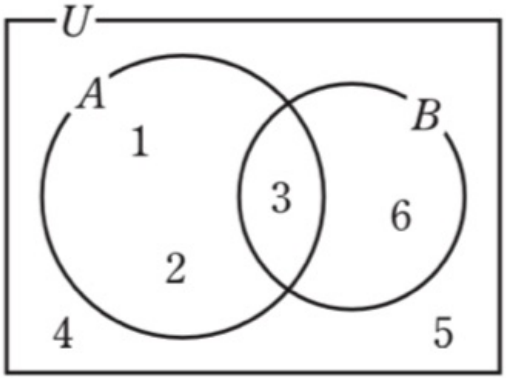
$A\cap\overline{A}=\varnothing$, $\quad A\cup\overline{A}=U$, $\quad \overline{\overline{A}}=A$

$A\subset B$ ならば $\overline{A}\supset\overline{B}$

練習 6 例 7 の集合 U と A，B について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{B}$　(2) $\overline{A \cap B}$　(3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$　(5) $\overline{A} \cap B$　(6) $A \cap \overline{B}$



$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{3, 6\}$

$\overline{A} = \{4, 5, 6\}$ ， $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

(1) $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$　(2) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$　(3) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$　(5) $\overline{A} \cap B = \{6\}$　(6) $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$

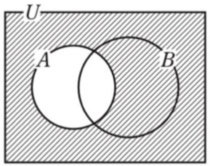
ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

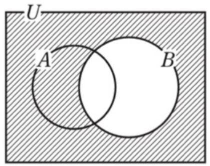
$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図[1]と図[2]の斜線部分であり，その共通部分 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，図[3]の斜線部分である。

図[3]の斜線部分は $\overline{A\cup B}$ であるから，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ が成り立つ。

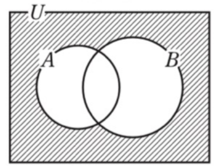
[1] $\overline{A}$



[2] $\overline{B}$

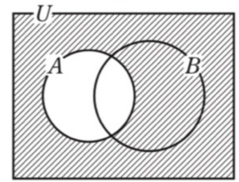


[3] $\overline{A}\cap\overline{B}$

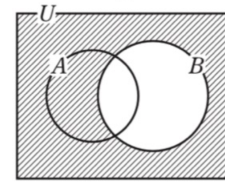


練習 7 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つことを，図を用いて確かめよ。

[1] $\overline{A}$



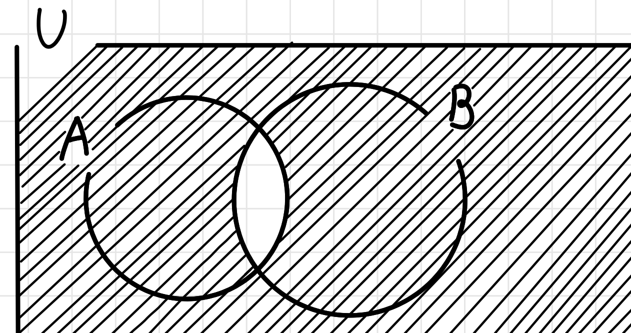
[2] $\overline{B}$



[1][2]より $\overline{A}\cup\overline{B}$ は $\overline{A\cap B}$ なので

$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$

$\overline{A\cap B}$



・3つの共通部分と和集合

3つの集合の共通部分… 3つの集合A, B, Cのすべてに属する要素全体の集合

$A \cap B \cap C$ と書く。

3つの集合の和集合…A, B, Cの少なくとも1つに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$ と書く。

練習 1 $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ について, $A\cap B\cap C$ と $A\cup B\cup C$ を求めよ。

$A\cap B\cap C=\{2, 6\}$

$A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

・集合の要素の個数… 集合Aの要素の個数は $n(A)$ で表す.

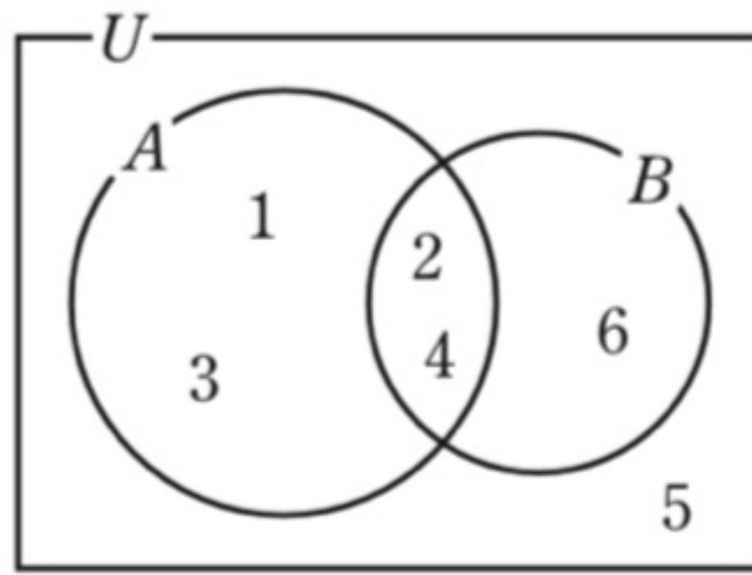
同様に $A \cap B$ の要素の個数は $n(A \cap B)$

$A \cup B$ の要素の個数は $n(A \cup B)$

集合Aの補集合 $\overline{A}$ の要素の個数は $n(\overline{A})$

練習 1 例1の集合 U, A, B について，次の個数を求めよ。

(1) $n(U)$　(2) $n(\overline{B})$　(3) $n(A \cap B)$　(4) $n(\overline{A \cup B})$



(1) $n(U) = \underline{6}$

(2) $n(\overline{B}) = \underline{3}$

(3) $n(A \cap B) = \underline{2}$

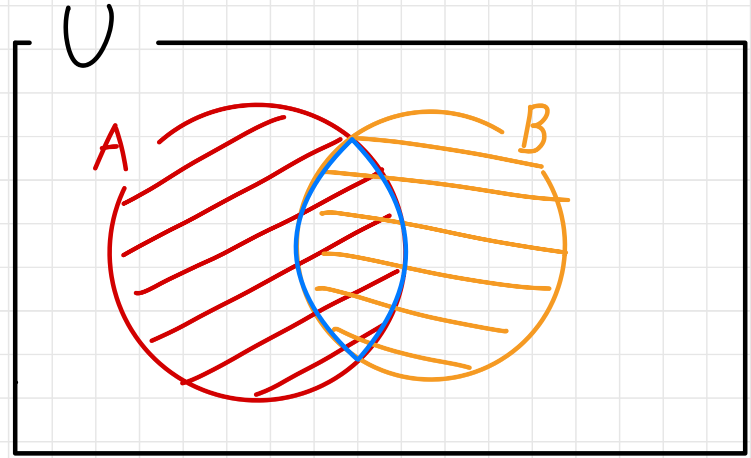
(4) $n(\overline{A \cup B}) = \underline{1}$

和集合，補集合の要素の個数

1　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cap B)$ は赤黄の斜線が混在

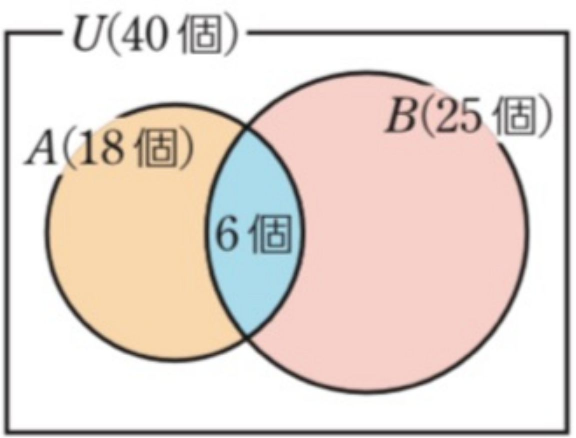
→ 青の範囲を2度数えている



2　$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$　　ただし，U は全体集合

練習 2　例2の集合 U，A，B について，次の個数を求めよ。

(1)　$n(\overline{B})$　　(2)　$n(\overline{A \cup B})$　　(3)　$n(\overline{A} \cap \overline{B})$



(1) $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 40 - 25 = \underline{15}$

(2) $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - (18 + 25 - 6) = \underline{3}$

(3) $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = \underline{3}$

練習 3 100 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1)　6 の倍数　　(2)　6 の倍数でない数

(3)　4 の倍数かつ 6 の倍数　　(4)　4 の倍数または 6 の倍数

6の倍数の数の集合の個数を$n(A)$
4の倍数の数の集合の個数を$n(B)$ とする.

全体集合の個数を$n(U)$とすると$n(U)=100$

(1) 100以下の自然数のうち6の倍数は

6, 12, 18, 24, ……, 96

なので $n(A)=\underline{16}$

(2) 6の倍数でない集合の個数は$n(\overline{A})$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-16=\underline{84}$

(3) 4の倍数かつ6の倍数は4と6の最小公倍数である

12の倍数を考えればよい.

100以下の自然数のうち12の倍数は

12, 24, 36, 48, … 96

なので $n(A\cap B)=\underline{8}$

(4) 4の倍数かつ6の倍数の個数$n(A\cup B)$は

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=16+25-8$

$=\underline{33}$

練習 3 100 以下の自然数のうち，次のような数は何個あるか。

(1) 6 の倍数　(2) 6 の倍数でない数

(3) 4 の倍数かつ 6 の倍数　(4) 4 の倍数または 6 の倍数

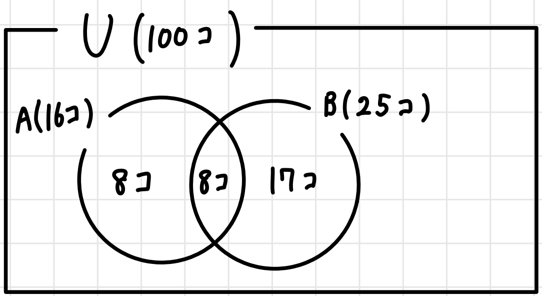
6の倍数の集合をA　$A=\{6, 12, 18, \cdots, 96\}$

4の倍数の集合をB　$B=\{4, 8, 12, \cdots 100\}$

$A \cap B$ は4と6の最小公倍数 12の倍数

$A \cap B=\{12, 24, 36, \cdots 96\}$　8コ

上記を図で表すと下図



(別解)

(1) 16コ

(2) $100-16=84$コ

(3) 8コ

(4) $8+8+17=33$コ

応用例題 1　100 人の人を対象に，2 つの提案 a，b への賛否を調べたところ，a に賛成した人は 77 人，b に賛成した人は 84 人，a にも b にも賛成した人は 66 人いた。a にも b にも賛成しなかった人は何人いるか。

練習 4　応用例題 1 について，右のような賛否の人数の表を作った。表の空らんをうめ，次の人数を求めよ。

(1)　a にだけ賛成した人

(2)　b にだけ賛成した人

	B	$\overline{B}$	合計
A	66	11	77
$\overline{A}$	18	5	23
合計	84	16	100

表より

(1)　$n(A \cap \overline{B}) = 11$ 人

(2)　$n(\overline{A} \cap B) = 18$ 人

練習 5 あるクラスの生徒 40 人について通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が 13 人，バスを利用する人が 16 人，自転車もバスも利用する人が 5 人いた。次の人は何人いるか。

(1) 自転車もバスも利用しない人

(2) 自転車は利用するが，バスは利用しない人

クラスの生徒40人の集合をU
自転車を利用する生徒の集合をA
バスを利用する生徒の集合をB　　とする.

$n(U)=40,\ n(A)=13,\ n(B)=16,\ n(A\cap B)=5$

(1) 自転車もバスも利用しない生徒の人数は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$

ここで $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=13+16-5=24$$

よって $n(\overline{A}\cap\overline{B})=40-24=\underline{16}$

(2)

	B	$\overline{B}$	計
A	5	8	13
$\overline{A}$	11	16	27
計	16	24	40

自転車は利用するがバスは利用しない
$\Rightarrow n(A\cap\overline{B})$が答え.

$\underline{8}$

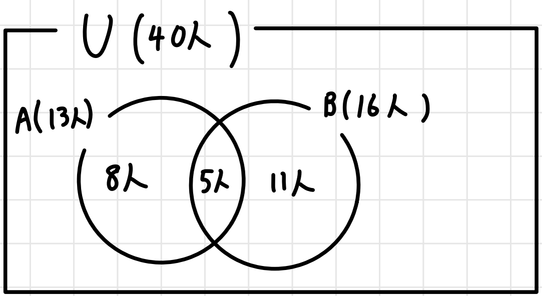
練習 5 あるクラスの生徒 40 人について通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が 13 人，バスを利用する人が 16 人，自転車もバスも利用する人が 5 人いた。次の人は何人いるか。

(1)　自転車もバスも利用しない人

(2)　自転車は利用するが，バスは利用しない人

自転車を利用する人の集合をA，13人
バスを利用する人の集合をB，16人
自転車もバスも利用する人は 5人

上記を図で表すと下図



(別解)

(1) 自転車もバスも利用しない人

(全体) − (自転車かバスどちらか一方でも利用する人)

AとBの和集合

$$40-(8+5+11)=40-24=16\text{人}$$

(2) 自転車は利用するがバスは利用しない人

→自転車のみ利用する人

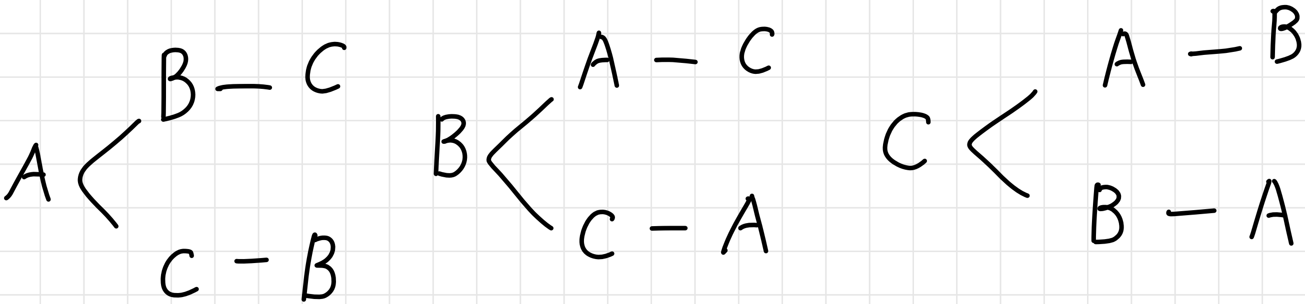
→ AからA∩Bの部分を引けばよい

8人

・樹形図 … 次々と枝分かれしていく図.

起こり得るすべての場合を重複なく数えあげることができる.

練習 6 アルファベットの A，B，C の 3 文字を，ACB のように 1 個ずつすべて並べるとき，その並べ方をすべて書き出せ。



ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

練習 7 大中小の 3 個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか。

(1) 目の和が 5 になる場合　　(2) 目の積が 6 になる場合

(1) 樹形図は下図

大 中 小

1 − 1 − 3
1 − 2 − 2
1 − 3 − 1

2 − 1 − 2
2 − 2 − 1

3 − 1 − 1

6通り

(2) 樹形図は下図

大 中 小

1 − 1 − 6
1 − 2 − 3
1 − 3 − 2
1 − 6 − 1

2 − 1 − 3
2 − 3 − 1

3 − 2 − 1
3 − 1 − 2

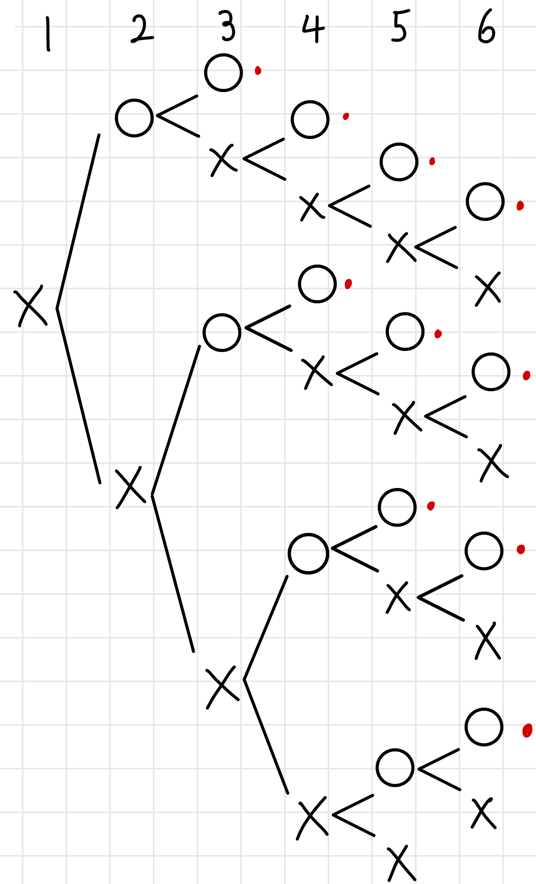
6 − 1 − 1

9通り

練習 8 1枚の硬貨を繰り返し投げ，表が2回出たら賞品がもらえるゲームをする。ただし，投げられる回数は6回までとし，2回目の表が出たらそれ以降は投げない。1回目に裏が出たとき，賞品がもらえるための表裏の出方の順は何通りあるか。

表…○ 裏…X

樹形図は右図



10通り

和の法則

2つの事柄A，Bは同時には起こらないとする。
Aの起こり方がa通りあり，Bの起こり方がb通りあれば，
AまたはBの起こる場合は，$\boldsymbol{a+b}$ 通りある。

和の法則は，3つ以上の事柄についても，同じように成り立つ。

練習 9 1個のさいころを2回投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 7または8　　(2) 4の倍数

(1)

7 (1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)

6通り

8 (2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)

5通り

6+5=11通り

(2) 4の倍数 ⇒ 和が4または8または12

4 (1,3)(2,2)(3,1)

3通り

8 (2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)

5通り

12 (6,6)

1通り

9通り

練習 9 1個のさいころを2回投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1)　7または8　　　(2)　4の倍数

(別解) 表を用いる方法

(1) 和が7.8になる所に印をつけ
その数を数える

	1	2	3	4	5	6
1						○
2					○	○
3				○	○	
4			○	○		
5		○	○			
6	○	○				

11通り

(2) 和が4.8.12になる所に印をつけ
その数を数える.

	1	2	3	4	5	6
1			○			
2		○				○
3	○				○	
4				○		
5			○			
6		○				○

9通り

積の法則

事柄Aの起こり方が a 通りあり，そのどの場合に対しても事柄Bの起こり方が b 通りあれば，Aが起こり，そしてBが起こる場合は，$\boldsymbol{a \times b}$ 通りある。

練習 10 大小2個のさいころを投げるとき，大きいさいころの目が3以上であり，小さいさいころの目が偶数である場合は何通りあるか。

大きいさいころの3以上の目の出方は4通り

小さいさいころの偶数の目の出方は3通り

よって $4 \times 3 = 12$(通り)

練習 11 次の問いに答えよ。

(1) 大中小3個のさいころを投げるとき，目の出方は何通りあるか。

(2) 積 $(a+b)(c+d)(x+y+z)$ を展開すると，項は何個できるか。

(1) 大中小3個のさいころの目の出方はそれぞれ6通り

なので $6 \times 6 \times 6 = 216$(通り)

(2) $\underbrace{(a+b)}_{2}\underbrace{(c+d)}_{2}\underbrace{(x+y+z)}_{3}$

$2 \times 2 \times 3 = 12$(個)

・正の約数の個数 … 約数の個数を求めたい数を素因数分解し、各素因数の指数+1の数の積をとる。

ある数Aが

$A = a^{\square}$ と素因数分解できるとき、Aの約数の個数は $(\square+1)$ 個

ある数Bが

$B = b^{\square} \cdot c^{\triangle}$ と素因数分解できるとき、Bの約数の個数は $(\square+1)\times(\triangle+1)$ 個

練習 12 次の数について，正の約数は何個あるか。

(1) 16　　(2) 144　　(3) 504

(1) $16 = 2^4$ なので 正の約数の個数は $4+1=5$(個)

(2) $144 = 2^4 \times 3^2$ なので正の約数の個数は $(4+1)\times(2+1)=15$(個)

(3) $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ なので正の約数の個数は $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$(個)

・順列 … いくつかのものを順に1列に並べるときの並びの1つ1つ

順列の総数 $_nP_r$

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

（nからr個カウントダウンして全部かけ算）

$_nP_r$ … n個のものからr個とって1列に並べる順列

練習 13 次の値を求めよ。

(1) $_5P_2$　(2) $_8P_4$　(3) $_3P_1$　(4) $_6P_6$

(1) $_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

(2) $_8P_4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

(3) $_3P_1 = 3$

(4) $_6P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

練習 14 次のものの総数を求めよ。

(1) 10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並び順

(2) 7 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちの異なる 4 個を並べて作る 4 桁の整数

(1) $_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$（通り）

(2) $_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$（個）

・階乗 … 異なるn個のものを全てを1列に並べる順列，$n!$ で表す.

また，$n! = {}_nP_n$ と同値である.

練習 15 次のような並べ方の総数を求めよ。

(1) 5 個の数字 1，2，3，4，5 のすべてを 1 列に並べる。

(2) 7 個の文字 A，B，C，D，E，F，G のすべてを 1 列に並べる。

(1) $5! = {}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (通り)

(2) $7! = {}_7P_7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ (通り)

練習 16 12 色の色鉛筆がある。右の図のような 3 つの文字を，すべて異なる色で塗り分けるとき，塗り方は何通りあるか。

異なる12個から3個を1列に並べる

${}_{12}P_3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

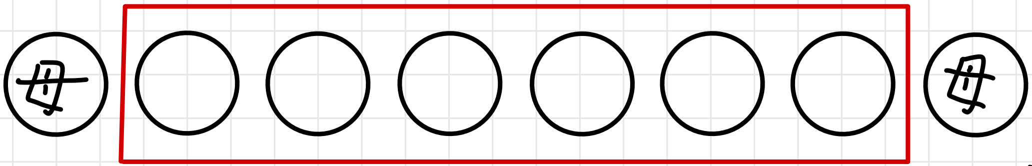
1320 通り

練習 17 母音 a，i，u，e，o と子音 k，s，t の 8 個を 1 列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか。

(1) 両端が母音である。　　(2) 母音 5 個が続いて並ぶ。

(1)

中の6つの並び方は自由

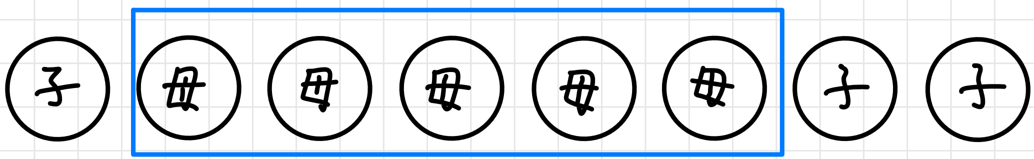


両端が母音…5つの母音から2つを選んで並べるので $_5P_2$

中の6つ…残った6つの文字を全て1列に並べるので $_6P_6$ (6!)

$$_5P_2 \times {}_6P_6 = 5\times4\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 14400\text{(通り)}$$

(2)



連続する5つの母音は1つのかたまりとして考える

連続する5つの母音の並び方は $_5P_5$ (5!)

3つの子音と母音のかたまり1つの並び方は $_4P_4$ (4!)

$$5!\times4! = 5\times4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1 = 2880\text{(通り)}$$

練習 18 5 個の数字 0，1，2，3，4 のうちの異なる 4 個を並べて，4 桁の整数を作るとき，次のような整数は何個作れるか。

(1)　4 桁の整数　　(2)　4 桁の奇数　　(3)　4 桁の偶数

(1)

千	百	十	一
0以外	残り	残り	残り

$4 \times {}_4P_3$

96(個)

(2)

千	百	十	一
0以外			1 or 3

$2 \times 3 \times {}_3P_2$

36(個)

(3)

(4桁の偶数の総数)

$=$ (4桁の整数の総数) − (4桁の奇数の総数)

(1)　(2)

$= 96 - 36 = 60$ (個)

(3)（別解）

千	百	十	一
0以外			2 or 4

$$2 \times 3 \times {}_3P_2 = 36\text{（個）}$$

または

千	百	十	一
			0

$$1 \times {}_4P_3 = 24\text{（個）}$$

よって　$36 + 24 = 60$（個）

・円順列 … いくつかのものを円形に並べる順列
(回転して並びが同じものは考えない)

異なるn個の円順列の総数

$$\boxed{(n-1)!}$$

練習 19 色の異なる 6 個の玉を円形に並べて置くとき，並べ方の総数を求めよ。

$$(6-1)! = 5! = 5\times4\times3\times2\times1$$

$$= 120$$

120(通り)

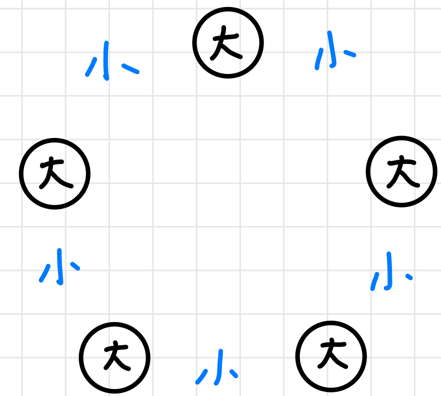
練習 20 大人 5 人と子ども 5 人が輪の形に並ぶとき，大人と子どもが交互に並ぶような並び方は何通りあるか。

大人を基準に並べると $(5-1)! = 4!$

続けて子どもの並び方は大人の間

大人の間の席数5つに5人の子どもを並べるので

$5!$



よって求める順列の総数は

$$4! \times 5! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 2880\text{(通り)}$$

練習 21 A，B，C，D，E，F の 6 人が，円形の 6 人席のテーブルに着席するとき，AとBが隣り合うような並び方は何通りあるか。

AとBは1つのかたまり

AB, C, D, E, F の円順列は

$(5-1)! = 4!$

また A, Bの並び方はABとBAの2通り

よって

$4! \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$

48通り

・重複順列 … 同じものを繰り返して使うことを許した順列

重複順列の総数

n 個から r 個取る重複順列の総数は　$\boldsymbol{n^r}$

練習 22　4 個の文字 a，b，c，d を，重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき，何通りの文字列が作れるか。

(1)　2 個　　(2)　3 個

(1) $4^2 = 4 \times 4 = 16$

16通り

(2) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

64通り

・組合せ … 異なるn個からr個選ぶ

組合せの総数 $_nC_r$

$$_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

また, $_nC_n=\frac{_nP_n}{n!}=\frac{n!}{n!}=1$, $_nC_0=1$, $_nC_1=n$ である.

練習 23 次の値を求めよ。

(1) $_7C_3$　(2) $_4C_2$　(3) $_8C_1$　(4) $_5C_5$

練習 24 次のような選び方の総数を求めよ。

(1) 8人から2人を選ぶ。　(2) 7色から4色を選ぶ。

(1) $\frac{_7P_3}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

(2) $\frac{_4P_2}{2!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(3) $\frac{_8P_1}{1!}=8$

(4) $\frac{_5P_5}{5!}=\frac{5!}{5!}=1$

(1) $_8C_2=\frac{_8P_2}{2!}=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

(2) $_7C_4=\frac{_7P_4}{4!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=35$

${}_nC_r$ の性質

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$${}_{\bigcirc}C_{\triangle} = {}_{\bigcirc}C_{\square}$$

$$\triangle + \square = \bigcirc$$

練習 25 次の値を求めよ。

(1) ${}_5C_4$　　(2) ${}_9C_6$　　(3) ${}_{20}C_{18}$

(1) ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(2) ${}_9C_6 = {}_9C_3 = \dfrac{{}_9P_3}{3!} = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$

(3) ${}_{20}C_{18} = {}_{20}C_2 = \dfrac{{}_{20}P_2}{2!} = \dfrac{20\cdot19}{2} = 190$

練習 26 正六角形について，次の数を求めよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

(3) 対角線の本数

(1) 6個の頂点から3つえらぶ

${}_6C_3 = \dfrac{{}_6P_3}{3!} = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$

(2) 6個の頂点から2つえらぶ

${}_6C_2 = \dfrac{{}_6P_2}{2!} = \dfrac{6\cdot5}{2} = 15$

(3) (2個の頂点を結ぶ線分の本数) − (正六角形の辺の数)

$15 - 6 = 9$

練習 27 大人 3 人，子ども 5 人の中から， 4 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(1) 大人 2 人と子ども 2 人を選ぶ。

(2) 大人が少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ。

(1) ${}_3C_2 \times {}_5C_2$

$= 3 \times 10 = 30$(通り)

(2)

大人が少なくとも1人

→(8人から4人選ぶ)−(子ども全員を選ぶ)

${}_8C_4 - {}_5C_4$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 5$

$= 65$(通り)

練習 28 8 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，C，D の 4 つの組に， 2 人ずつ分ける。

(2) 2 人ずつの 4 つの組に分ける。

(3) 3 人， 3 人， 2 人の 3 つの組に分ける。

(1) ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$

$= \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 1 = 2520$(通り)

(2) 4つの組の分け方には4!通りのかぶりがある.

$\frac{2520}{4!} = \frac{2520}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 105$(通り)

(3) まず2人の分け方を決める. → ${}_8C_2$

残りの6人を3人ずつ分ける → $\frac{{}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!}$

${}_8C_2 \times \frac{{}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!} = 280$(通り)

同じものを含む順列の総数

a が p 個，b が q 個，c が r 個あるとき，それら全部を 1 列に並べる順列の総数は

$$ {}_nC_p \times {}_{n-p}C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \qquad \text{ただし}\quad p+q+r=n $$

〈注意〉 $r=0$ のときは，${}_{n-p}C_q=1$ であり，順列の総数は ${}_nC_p=\dfrac{n!}{p!q!}$ である。

練習 29 BANANA の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列が作れるか。

B…1コ　A…3コ　N…2コ

$$\frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}$$

$= 60$ (通り)

(別解)

B…1コ　A…3コ　N…2コ　計6コの文字

○○○○○○

6コのうちBが入る1コを選ぶ
のこり5コのうちAが入る3コを選ぶ
のこり2コのうちNが入る2コを選ぶ

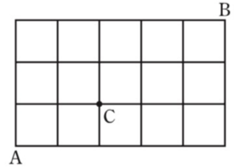
$${}_6C_1 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 6 \times \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} \times \frac{2\times1}{2\times1} = 60\text{(通り)}$$

練習 30 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか。

(1) AからBまで行く。

(2) AからCを通ってBまで行く。

(3) AからCを通らずにBまで行く。



(1) → … 5コ ↑ … 3コ

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$= 56$(通り)

(2) AからCは → … 2コ
↑ … 1コ

CからBは → … 3コ
↑ … 2コ

$$\frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1} \times \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}$$

$= 30$(通り)

(3) (AからBまで行く道のり) − (AからCを通ってBまで行く道のり)

$56 - 30 = 26$(通り)

・重複を許して作る組合せ

練習 1

(1) 4個の文字 a, b, c, d から重複を許して 7 個取る組合せの総数を求めよ。

(2) $(a+b+c)^6$ の展開式の異なる項の数を求めよ。

(1)

a　　b　　c　　d

○○|○○|○○|○

○…7コ　|…3コ　計10コ

$$ {}_{10}C_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120 $$

(2)

a　　b　　c

○|○○○|○○

○…6コ　|…2コ　計8コ

$$ {}_{8}C_2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28 $$

練習 2 等式 $x+y+z=10$ を満たす負でない整数 x, y, z の組は，全部で何個あるか。

3個の文字 x, y, z から重複を許して

10個とる総数と同じ

x y z

○○|○○○○|○○○○

○ … 10コ　| … 2コ　計 12コ

$$ {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{ (個)} $$

- 確率…ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値
- 試行…同じ条件のもと繰り返すことができ，その結果が偶然に決まる実験や観測

  (例) さいころを投げる，くじを引く
- 事象…試行の結果起こる事柄
- 根元事象…ただ1つの要素からなる集合で表される事象

例 11 **10 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げる試行**

10 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，10 円硬貨は表が出て，100 円硬貨は裏が出ることを，(表，裏) で表すことにする。

10円＼100円	表	裏
表	(表,表)	(表,裏)
裏	(裏,表)	(裏,裏)

全事象 U は　$U=\{$(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)$\}$

根元事象は，次の 4 個である。

$\{$(表，表)$\}$，$\{$(表，裏)$\}$，$\{$(裏，表)$\}$，$\{$(裏，裏)$\}$　終

練習 31 例 11 の試行において，次の事象を U の部分集合で表せ。

事象 A「裏が 1 枚も出ない」　　事象 B「表が 1 枚だけ出る」

$A=\{$(表，表)$\}$

$B=\{$(表，裏)，(裏，表)$\}$

事象 A の起こる確率

$$P(A)=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}=\frac{a}{N}$$

1つの試行においてある事象の起こる確率を $P(A)$ で表す.

同様に確からしい…ある試行においてどの根元事象が起こるとも同程度に起こることが期待できるときの根元事象

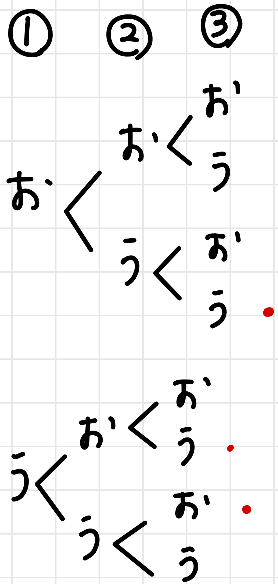
練習 32 1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 奇数の目が出る。 (2) 3以上の目が出る。

(1) $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

練習 33 3枚の硬貨を同時に投げるとき，そのうち1枚だけ表が出る確率を求めよ。

表…お，裏…う



$\frac{3}{8}$

練習 34 2個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 目の和が7になる。　(2) 2個とも偶数の目が出る。

(1)

	1	2	3	4	5	6
1						o
2					o	
3				o		
4			o			
5		o				
6	o					

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2)

	1	2	3	4	5	6
1						
2		o		o		o
3						
4		o		o		o
5						
6		o		o		o

$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

練習 35 A，Bの2人を含む4人が，くじ引きで順番を決めて横1列に並ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) Aが左端に並ぶ。 (2) Bが左端，Aが右端に並ぶ。

(1)

全員が1列に並ぶのは4!

Aが左端→残り3人を並べる→3!

よって $\dfrac{3!}{4!} = \dfrac{3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{1}{4}$

(2)

全員が1列に並ぶのは4!

Bが左端,Aが右端→残った2人を並べる→2!

よって $\dfrac{2!}{4!} = \dfrac{2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{1}{12}$

練習 36 大人6人，子ども4人の合計10人の中から抽選で4人を選ぶとき，次のように選ばれる確率を求めよ。

(1) 大人が2人，子どもが2人 (2) 全員が子ども

10人の中から4人が選ばれるのは ${}_{10}C_4$ 通り

(1) 大人2人，子ども2人が選ばれるのは

${}_6C_2 \times {}_4C_2$ 通りなので

$\dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_4} = \dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}$

(2) 選ばれるのが子ども全員なのは

${}_4C_4$ 通りなので

$\dfrac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4} = \dfrac{1}{210}$

・積事象と和事象

用 語	意 味	記 号
A, B の **積事象**	A と B がともに起こる事象	$A \cap B$
A, B の **和事象**	A または B が起こる事象	$A \cup B$

…試行は"同時"

…試行は"別"

練習 37 1から10までの番号札10枚から1枚引くとき,「奇数の番号を引く」という事象を A,「7以上の番号を引く」という事象を B とする。積事象 $A \cap B$, 和事象 $A \cup B$ を集合で表せ。

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

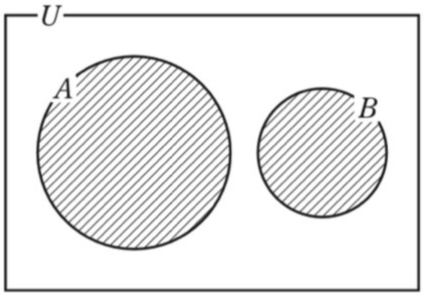
$$B = \{7, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{7, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

- 排反事象(排反)… 2つの事象A, Bが決して同時に起こらないこと

$A \cap B = \emptyset$ と同じ.



- 空事象… 空集合$\emptyset$で表される事象

練習 38 1個のさいころを投げるとき,「偶数の目が出る」という事象をA,「2以下の目が出る」という事象をB,「3の倍数の目が出る」という事象をCとする。どの事象とどの事象が互いに排反であるか。

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2\}$

$C = \{3, 6\}$

$B \cap C = \emptyset$ より BとCが排反である.

確率の基本性質

1 どんな事象 A についても　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

とくに，空事象 $\varnothing$ について　$P(\varnothing)=0$

全事象 U について　$P(U)=1$

2 事象 A，B が互いに排反であるとき

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

※ 事象A.B.Cが互いに排反であるとき（$P(A \cap B \cap C)=\varnothing$ のとき）

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$　も成立.

例15 **確率の加法定理の利用**

1 等から 4 等の当たる確率が，右のようなくじ引きがある。

このくじ引きを 1 回行うとき，各等が当たる事象は互いに排反である。

	1等	2等	3等	4等
確率	$\frac{2}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$

練習39 例 15 のくじ引きを 1 回行うとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　3 等または 4 等が当たる。

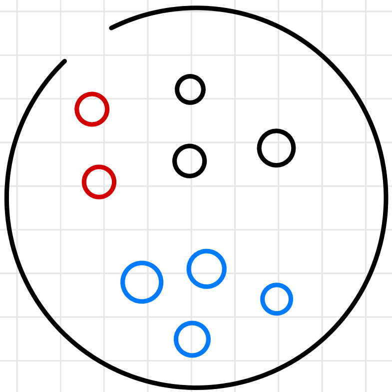
(2)　2 等から 4 等までのいずれかが当たる。

(1) $\frac{10}{100}+\frac{20}{100}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$

(2) $\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{20}{100}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

練習 40

赤玉 2 個，白玉 3 個，青玉 4 個の入った袋から，3 個の玉を同時に取り出すとき，3 個とも同じ色である確率を求めよ。



3個の玉を同時に取り出す

白が3個の事象をA, 青が3個の事象をBとする.

AとBは互いに排反なので

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

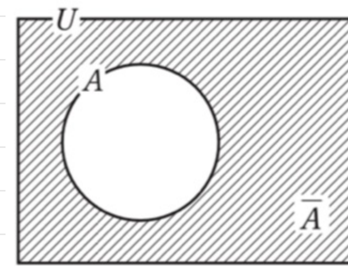
$$= \frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84}$$

・余事象…全事象をUとしたとき、事象Aに対して「Aが起こらない」事象

$\overline{A}$で表し、Aと$\overline{A}$は互いに排反である。

余事象と確率

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \quad \text{すなわち} \quad P(\overline{A})=1-P(A)$$



練習41 1から200までの200枚の番号札から1枚引くとき、3の倍数でない番号を引く確率を求めよ。

3の倍数を引く事象をAとすると

$A=\{3, 6, 9, 12, \cdots, 198\}$

よって3の倍数を引かない確率$P(\overline{A})$は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{66}{200}=\frac{67}{100}$$

練習42 2個のさいころを同時に投げるとき、次の場合の確率を求めよ。

(1) 少なくとも1個は2の目が出る。

(2) 異なる目が出る。→ 1−(同じ目が出る確率)

(1)

	1	2	3	4	5	6
1		o				
2	o	o	o	o	o	o
3		o				
4		o				
5		o				
6		o				

$$\frac{11}{36}$$

(2) 同じ目が出るのは

	1	2	3	4	5	6
1	o					
2		o				
3			o			
4				o		
5					o	
6						o

$$\frac{6}{36}$$

$$1-\frac{6}{36}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

全事象をUとし，2つの事象A，Bが互いに排反でない（$A \cap B \neq \emptyset$）とき

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ と同様の考え方を用いる．

練習 43 1から50までの50枚の番号札から1枚引くとき，その番号が次のような数である確率を求めよ。

(1) 3の倍数または4の倍数

(2) 3の倍数でも4の倍数でもない数

3の倍数の事象をA，4の倍数の事象をB

$A = \{3, 6, 9, \cdots, 48\}$　　$B = \{4, 8, 12, \cdots 48\}$

$P(A) = \dfrac{16}{50}$　　$P(B) = \dfrac{12}{50}$

ここで $A \cap B$ は12の倍数なので

$A \cap B = \{12, 24, 36, 48\}$

$P(A \cap B) = \dfrac{4}{50}$

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{16}{50} + \dfrac{12}{50} - \dfrac{4}{50}$

$= \dfrac{24}{50} = \dfrac{12}{25}$

(2) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \dfrac{12}{25} = \dfrac{13}{25}$

・独立…いくつかの試行においてどの試行の結果も他の試行に無影響なこと

独立な試行の確率

2つの試行SとTが独立であるとき，Sで事象Aが起こり，かつTで事象Bが起こる確率pは，$P(A)$と$P(B)$の積に等しい。

すなわち　　$p=P(A)\times P(B)$

練習 44　2枚の硬貨と1個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　硬貨は2枚とも表が出て，さいころは偶数の目が出る。

(2)　硬貨は1枚だけ表が出て，さいころは2以下の目が出る。

(1) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{8}$

(2) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

練習 45　1枚の硬貨を3回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3回とも表が出る確率　　(2)　少なくとも1回は裏が出る確率

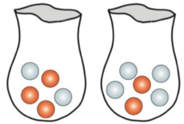
(1) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2) 少なくとも1回は裏 → 1−(3回とも表の確率)

$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

例題 11

Aの袋には赤玉 3 個と白玉 2 個，Bの袋には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている。A，B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。



練習 46

例題 11 において，次の確率を求めよ。

(1)　Aから赤玉，Bから白玉を取り出す確率

(2)　A，B から取り出す玉の色が異なる確率

(1) $\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$

(2) A赤B白＋A白B赤

$\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}$

$=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

・ 反復試行…同じ条件のもとでの試行の繰り返し

反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。
この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

練習 47 1個のさいころを4回投げるとき，1の目がちょうど3回出る確率を求めよ。

$${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6} = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{324}$$

練習 48 赤玉6個，白玉4個の入った袋から玉を1個取り出し，色を見てからもとにもどす。この試行を5回行うとき，次の確率を求めよ。

(1) 赤玉が4回以上出る確率　(2) 5回目に2度目の赤玉が出る確率

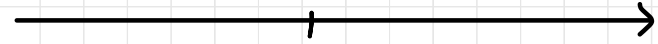
(1) 4回以上 → 4回 または 5回

$${}_5C_4\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{6}{10}\right)^5 = \frac{1053}{3125}$$

(2) 5回目に2度目の赤 → 4回目までに1回赤

$${}_4C_1\cdot\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)^3\times\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{288}{3125}$$

練習 49 数直線上を動く点Pが原点の位置にある。1枚の硬貨を投げて，表が出たときはPを正の向きに2だけ進め，裏が出たときはPを負の向きに3だけ進める。硬貨を5回投げ終わったとき，Pが原点にもどっている確率を求めよ。



表の出る回数をx回とすると

裏の出る回数は$(5-x)$回

表x回裏$(5-x)$回出たときに原点にPがもどるので

$$2x+(-3)\cdot(5-x)=0$$

上を解けば表と裏が何回ずつ出ればよいか分かる。

$$2x+(-3)(5-x)=0$$

$$2x-15+3x=0$$

$$5x=15$$

$$x=3$$

表3回裏2回出ればよい。

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

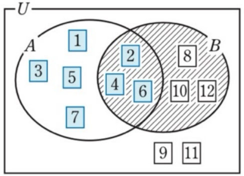
$$=\frac{5}{16}$$

・条件つき確率… 一般に1つの試行における2つの事象A, Bについて
事象Aが起こったとき事象Bが起こる確率 $P_A(B)$ で表す。

例 21 箱の中に，1 から 7 までの青色の番号札 7 枚と，8 から 12 までの白色の番号札 5 枚が入っている。この箱から番号札を 1 枚引くとき，それが

青色の札であるという事象を A，
偶数の札であるという事象を B

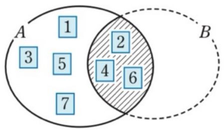
とする。



(1) 事象 B の起こる確率は

$$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

(2) 引いた番号札が青色であることがわかっているとき，その番号が偶数である確率 p を考える。
青色の札は 7 枚あり，その中で番号が偶数である札は 3 枚あるから $p=\dfrac{3}{7}$ 終



練習 50 例 21 において，条件付き確率 $P_B(A)$ を求めよ。

$P_B(A)$ → Bが起こったときAが起こる確率

引いた番号が偶数であるときそれが青である確率

$$\frac{\boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{6}}{\text{偶数6枚}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

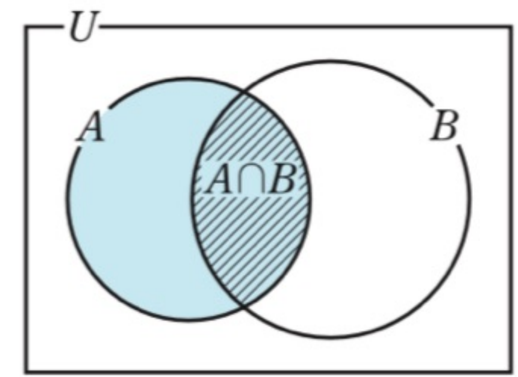
全事象をU, 2つの事象をA, Bとするとき条件つき確率$P_A(B)$は

Aを全事象としたときBが起こる確率であり

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)} \quad \cdots ①$$

右辺を $n(U)$ で割ると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cdots ②$$



練習 51 大人と子どもの人数の比が 3：2 であるグループに，ある提案をしたところ，子どもで賛成した人数は全体の 15％ であった。このグループの子どもの中から 1 人を選び出すとき，その人が提案に賛成である確率を求めよ。

$$\frac{\text{賛成した子どもが選ばれる}}{\text{子どもが選ばれる}}=\frac{\frac{15}{100}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{8}$$

乗法定理

2 つの事象 A，B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ の両辺に $P(A)$ をかける.

例 22 当たりくじ 4 本を含む 10 本のくじを，A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし，引いたくじはもとにもどさない。

この試行において，A，B の 2 人とも当たる確率を求める。

A が当たるという事象を A，

B が当たるという事象を B

とすると，求める確率 $P(A\cap B)$ は，乗法定理により

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

A が当たったときに，残りのくじは 9 本で当たりくじ 3 本を含むから，条件付き確率 $P_A(B)$ は　$P_A(B)=\dfrac{3}{9}$

よって　$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{2}{15}$　終

練習 52 例 22 において，次の確率を求めよ。

(1)　A が当たり，B がはずれる確率

(2)　A がはずれ，B が当たる確率

(3)　2 人ともはずれる確率

(1) $\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{9}=\dfrac{4}{15}$

(2) $\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$

(3) $\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{3}$

練習 53 赤玉 3 個，白玉 10 個の入った袋から，玉を 1 個ずつ 3 個取り出す。ただし，取り出した玉はもとにもどさない。このとき，取り出した玉がすべて赤玉である確率を求めよ。

$$\frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{286}$$

練習 54 当たりくじ 5 本を含む 12 本のくじを，A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし，引いたくじはもとにもどさない。このとき，B が当たる確率を求めよ。

Bが当たる → Aが当たりBが当たる or Aがはずれ Bが当たる.

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{11}$$

$$= \frac{20}{132} + \frac{35}{132}$$

$$= \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$$

練習 1 ある集団は2つのグループA，Bから成り，Aの占める割合は20％である。また，事象Eが発生する割合が，Aでは2％，Bでは3％である。この集団から選び出した1個について，事象Eが発生する確率を求めよ。また，事象Eが発生したときに，選び出された1個がAのグループに属している確率を求めよ。

$$P(A)=\frac{20}{100},\ P(B)=\frac{80}{100}$$

$$P_A(E)=\frac{2}{100},\ P_B(E)=\frac{3}{100}$$

$$P(E)=\frac{20}{100}\times\frac{2}{100}+\frac{80}{100}\times\frac{3}{100}=\frac{280}{10000}=\frac{7}{250}$$

$$P_E(A)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P_A(E)\times P(A)}{P(E)}$$

$$=\frac{\frac{2}{100}\times\frac{20}{100}}{\frac{280}{10000}}$$

$$=\frac{40}{280}=\frac{1}{7}$$

・期待値…ある試行の結果に応じて，$x_1, x_2, \cdots x_n$ のどれか1つの値をとる数量 X があり，各値をとる確率が $p_1, p_2, \cdots p_n$ ただし $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$ のとき $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$ のこと．

期待値

Xのとる値と確率が右の表のようなとき，Xの期待値は，次の式で与えられる。

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots\cdots + x_np_n$$

練習 55　2個のさいころを投げて出る目の和を考える。下の表を完成させて，出る目の和の期待値を求めよ。

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \frac{3}{36} \times 4 + \frac{4}{36} \times 5 + \frac{5}{36} \times 6 + \frac{6}{36} \times 7 + \frac{5}{36} \times 8 + \frac{4}{36} \times 9 + \frac{3}{36} \times 10 + \frac{2}{36} \times 11 + \frac{1}{36} \times 12$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

練習 56

5 枚の硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨の枚数が 5，4，3 の場合に，それぞれ得点 40，16，4 を得るが，それ以外の場合には得点は得られないとする。得点の期待値を求めよ。

表の出た石更貨の枚数が

5枚 $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

4枚 ${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}$

3枚 ${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$

X	40	16	4
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$

$$\frac{1}{32}\times 40 + \frac{5}{32}\times 16 + \frac{10}{32}\times 4$$

$$= \frac{160}{32} = 5$$

練習 57 次の[1]～[3]の 3 つの場合の中で，得られる金額の期待値が最も大きいのはどれか。

[1]　確実に 600 円得られる場合

[2]　硬貨を 1 枚投げて，表が出たら 1000 円，裏が出たら 500 円得られる場合

[3]　さいころを 1 回投げて，200 円に出た目を掛けた金額が得られる場合

[2]

X	1000	500
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\times 1000+\frac{1}{2}\times 500$$

$$=500+250$$

$$=\underline{750}$$

[3]

X	200	400	600	800	1000	1200
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6}\times 200+\frac{1}{6}\times 400+\frac{1}{6}\times 600+\frac{1}{6}\times 800+\frac{1}{6}\times 1000+\frac{1}{6}\times 1200$$

$$=\frac{4200}{6}=\underline{700}$$

[2]

練習 58

50 円硬貨 3 枚を同時に投げて，表が出た硬貨を全部もらえるゲームがある。1 回のゲームで，受け取る金額の期待値を求めよ。
また，このゲームの参加料が 1 回 80 円のとき，このゲームに参加することは得といえるか。

表が出る硬貨の枚数が

1枚 $_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

2枚 $_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

3枚 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

X	50	100	150
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\frac{3}{8}\times50+\frac{3}{8}\times100+\frac{1}{8}\times150$$

$$=\frac{600}{8}=75$$

ゲームの参加料が80円で期待値が75円なので このゲームに参加することは得といえない.