

工数

---

図形と計量

---

---

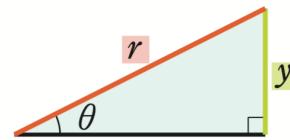
---



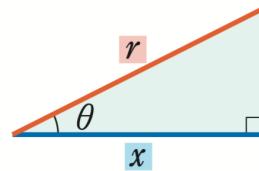
- ・ 三角比 … 三角形の大きさに関係なく、角度 $\theta$ の大きさだけで決まる辺の比  
 $\sin$ (正弦),  $\cos$ (余弦),  $\tan$ (正接)の3つがある。

## 三角比の定義

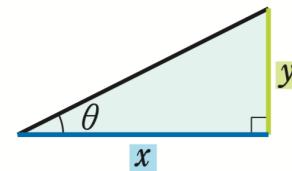
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$



$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$



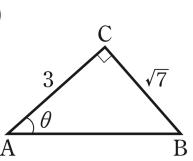
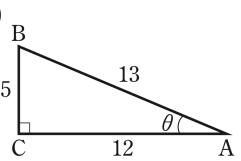
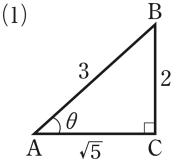
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



練習

1

下の図において、 $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$  の値を、それぞれ求めよ。



$$(1) \sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(2) \sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$$

(3) 三平方の定理より

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 16$$

$$AB = 4 \quad (AB > 0 \text{ なり)}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \cos\theta = \frac{3}{4}, \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

練習

2

右の表の空らんに適する数値を  
入れて、表を完成させよ。

$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

## 三角比の表

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

## 練習 3

次の値を三角比の表から求めよ。

(1)  $\sin 12^\circ$

(2)  $\cos 48^\circ$

(3)  $\tan 75^\circ$

(1) 0.2079

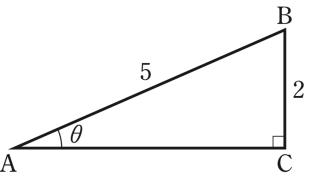
(2) 0.6691

(3) 3.7321

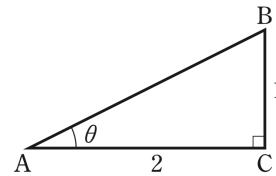
## 練習 4

下の図における  $\theta$  のおよその大きさを、三角比の表を用いて求めよ。

(1)



(2)



(1)  $\sin \theta = \frac{2}{5} = 0.4$

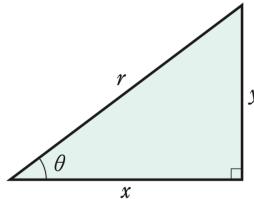
(2)  $\tan \theta = \frac{1}{2} = 0.5$

$\theta = 24^\circ$

$\theta = 27^\circ$

右の図の直角三角形において、

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$



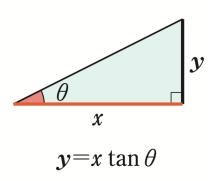
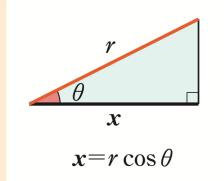
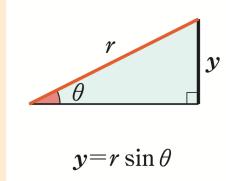
であるから、次が成り立つ。

$$y = r \sin \theta$$

同様にして、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  であるから、次が成り立つ。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = x \tan \theta$$



**例題 1** 傾斜角  $19^\circ$  の坂をまっすぐに  $100\text{ m}$  登るとき、鉛直方向には何m上がるところになるか。1m未満を四捨五入して求めよ。

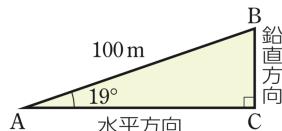
**練習 5**

例題 1において、水平方向には何m進むことになるか。1m未満を四捨五入して求めよ。

**解答** 右の図において

$$\begin{aligned} BC &= AB \sin 19^\circ \\ &= 100 \times 0.3256 \\ &= 32.56 \approx 33 \end{aligned}$$

答 33 m



左図において

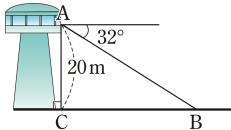
$$AC = AB \cos 19^\circ$$

$$= 100 \times 0.9455$$

$$= 94.55 \approx 95$$

95 m

地上からの高さ 20 m の地点 A で  
地上の場所 B を見下ろしたら、そ  
の角は右の図のように水平面に対  
して  $32^\circ$  であった。B は、A の真  
下の地点 C から何 m 離れているか。  
1 m 未満を四捨五入して求めよ。



$$\angle CAB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$BC = AC \tan 58^\circ$$

$$= 20 \times 1.6003$$

$$= 32,006 \text{ m} = 32$$

32 m

## 三角比の表

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	なし

## 三角比の相互関係

1  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

2  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

3  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

練習  
7

$\theta$ は鋭角とする。 $\cos \theta = \frac{1}{3}$  のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{∴}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \quad \text{∴}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \theta = 2\sqrt{2}$$


---

練習  
8

$\theta$ は鋭角とする。 $\tan \theta = \sqrt{2}$  のとき、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の値を求めよ。

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$3 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta > 0 \quad \text{∴}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{∴}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$


---

### 90°-θ の三角比

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

○+△=90°のとき

$$\sin \textcolor{orange}{O} = \cos \Delta$$

$$\cos \textcolor{orange}{O} = \sin \Delta$$

$$\tan \textcolor{orange}{O} = \frac{1}{\tan \Delta}$$

練習  
9

次の□に適する鋭角の角度を入れよ。

(1)  $\sin 62^\circ = \cos \square$  (2)  $\cos 78^\circ = \sin \square$  (3)  $\tan 23^\circ \tan \square = 1$

練習

10

次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1)  $\sin 64^\circ$  (2)  $\cos 58^\circ$  (3)  $\tan 83^\circ$

(1)  $\sin 62^\circ = \cos(90^\circ - 62^\circ) = \cos \underline{28^\circ}$

(1)  $\sin 64^\circ = \cos(90^\circ - 64^\circ) = \cos \underline{26^\circ}$

(2)  $\cos 78^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ) = \sin \underline{12^\circ}$

(2)  $\cos 58^\circ = \sin(90^\circ - 58^\circ) = \sin \underline{32^\circ}$

(3)  $\tan 23^\circ = \frac{1}{\tan(90^\circ - 23^\circ)}$

(3)  $\tan 83^\circ = \frac{1}{\tan(90^\circ - 83^\circ)} = \frac{1}{\tan \underline{7^\circ}}$

$\tan 23^\circ = \frac{1}{\tan 67^\circ}$

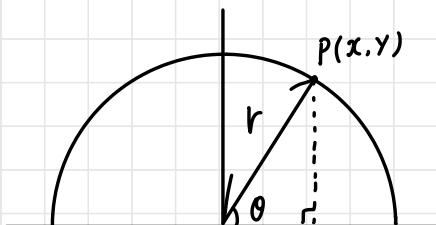
$\tan 23^\circ \tan \underline{67^\circ} = 1$

三角比の拡張 …  $\theta$  の範囲を  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  まで拡張する。

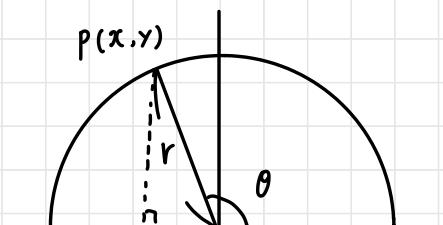
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

(三角比の定義は同じ)

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  (鋭角)



$90^\circ < \theta < 180^\circ$  (鈍角)



$$\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \\ \tan \theta > 0 \end{cases}$$

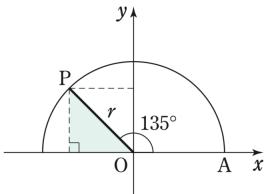
$$\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases}$$

練習  
11

(1)  $135^\circ$

$r = \boxed{\quad}$  にとると、

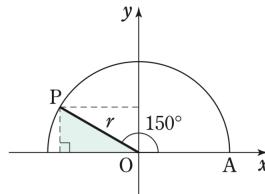
点Pの座標は  $\boxed{\quad}$



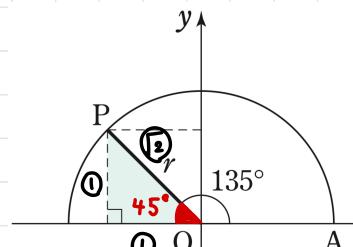
(2)  $150^\circ$

$r = \boxed{\quad}$  にとると、

点Pの座標は  $\boxed{\quad}$

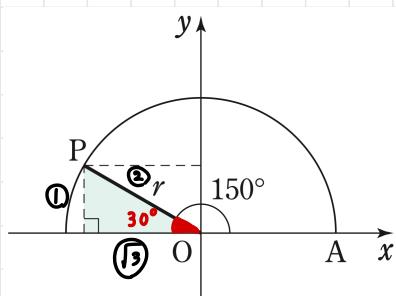


(1)



$$r = \sqrt{2} \quad P(-1, 1)$$

(2)



$$r = 2 \quad P(-\sqrt{3}, 1)$$

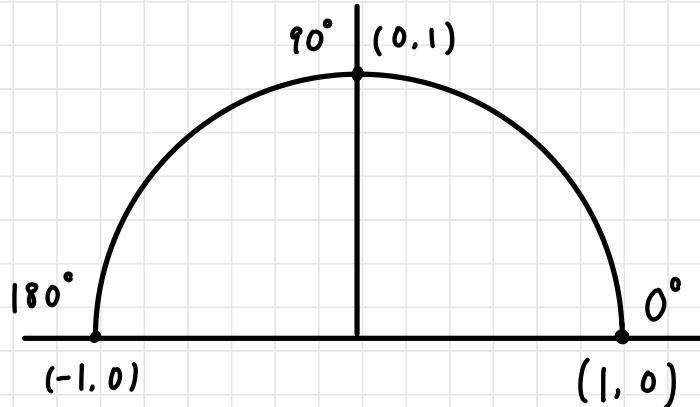
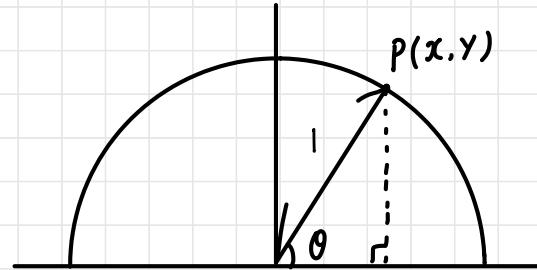
# $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の三角比

三角比は角度  $\theta$  のみで“決まる三角形の辺の比.  $r$  の値によらず” 三角比の値は変わらない.

- $r = 1$  とすると、三角比の定義より

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = y, \cos \theta = \frac{x}{r} = x \text{ なので}$$

$\sin \theta$  は  $y$  座標.  $\cos \theta$  は  $x$  座標に対応する.



左図より

$\theta$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \theta$	0	1	0
$\cos \theta$	1	0	-1
$\tan \theta$	0	X	0

# 三角比の表

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

それぞれの三角比の値の範囲は

$$0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$\tan \theta$  は実数全体

### 180°-θ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

○+□=180°のとき

$$\sin \textcolor{red}{O} = \sin \textcolor{blue}{□}$$

$$\cos \textcolor{red}{O} = -\cos \textcolor{blue}{□}$$

$$\tan \textcolor{red}{O} = -\tan \textcolor{blue}{□}$$

練習  
12

次の値を、三角比の表を用いて求めよ。

- (1)  $\sin 140^\circ$       (2)  $\cos 156^\circ$       (3)  $\tan 100^\circ$

$$(1) \sin 140^\circ = \sin (180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

$$(2) \cos 156^\circ = -\cos (180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ$$

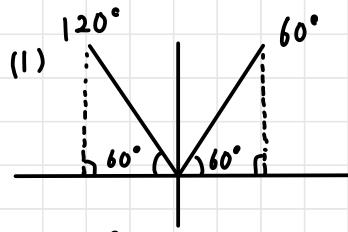
$$(3) \tan 100^\circ = -\tan (180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ$$

練習  
13  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

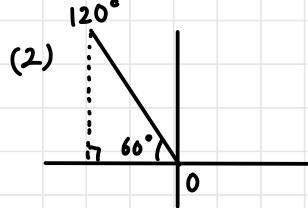
(1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

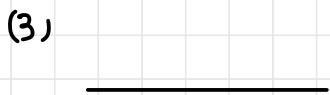
(3)  $\sin \theta = 0$



$$\theta = 60^\circ, 120^\circ$$



$$\theta = 120^\circ$$



$$\theta = 0^\circ, 180^\circ$$

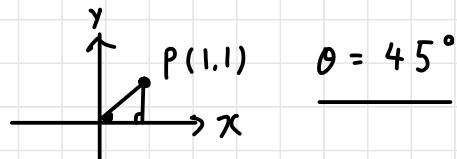
練習  
14

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

(1)  $\tan \theta = 1$

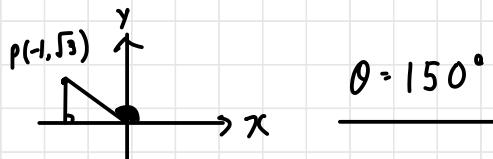
(2)  $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(1)  $x$  座標と  $y$  座標がともに 1 の点を P とすると



$$\theta = 45^\circ$$

(2)  $x$  座標が  $-\sqrt{3}$ ,  $y$  座標が 1 の点を P とすると



$$\theta = 150^\circ$$

### 三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

練習  
15

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta = \frac{4}{5}$  のとき、 $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ のとき}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち、1つが次の値をとるとき、他の2つの値を求めよ。

$$(1) \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \tan \theta = -2$$

(1)

$\cos \theta < 0$  なので  $\sin \theta > 0$ ,  $\tan \theta < 0$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = -2\sqrt{2}$$


---

(2)

$\tan \theta < 0$  なので  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\cos \theta < 0 \quad (2)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$


---

直線  $y = mx$  と  $x$  軸のなす角  $\theta$

$$\tan \theta = m$$

練習  
17

次の直線と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  を求めよ。

(1)  $y = x$       (2)  $y = -\sqrt{3}x$

(1)  $y = x$  の傾きは  $1$  なので" (2)  $y = -\sqrt{3}x$  の傾きは  $-\sqrt{3}$  なので"

$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 120^\circ$$

## 正弦定理

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると、次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

練習  
18 次のような  $\triangle ABC$  において、外接円の半径  $R$  を求めよ。

(1)  $a = 5, A = 45^\circ$

(2)  $b = \sqrt{3}, B = 120^\circ$

練習  
19  $c = 10$  である  $\triangle ABC$  において、外接円の半径が  $R = 10$  のとき、 $C$  を求めよ。

(1) 正弦定理より

$$2R = \frac{5}{\sin 45^\circ}$$

$$2R = 5 \div \sin 45^\circ$$

$$2R = 5 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2R = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2R = 5\sqrt{2}$$

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2) 正弦定理より 正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$$

$$2R = \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2R = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2R = 2$$

$$R = 1$$

$$\frac{10}{\sin C} = 2 \times 10$$

$$\frac{1}{\sin C} = 2$$

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq C \leq 180^\circ \text{ 且み}$$

$$C = 30^\circ, 150^\circ,$$

次のような  $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

$$(1) \quad c = \sqrt{2}, \quad B = 30^\circ, \quad C = 45^\circ \text{ のとき } b$$

$$(2) \quad a = 2, \quad A = 45^\circ, \quad C = 120^\circ \text{ のとき } c$$

(1)

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b \div \sin 30^\circ = \sqrt{2} \div \sin 45^\circ$$

$$b \div \frac{1}{2} = \sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b \times \frac{2}{1} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2b = 2$$

$$\overrightarrow{b = 1}$$

(2) 正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$c \div \sin 120^\circ = 2 \div \sin 45^\circ$$

$$c \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

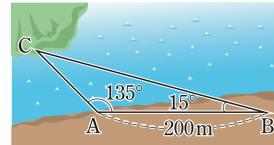
$$c = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{c = \sqrt{6}}$$

右の図のように、200 m 離れた海岸の2地点 A, B と、島にある地点 C について

$$\angle CAB = 135^\circ, \angle CBA = 15^\circ$$

であった。B, C 間の距離を求めよ。



三角形の内角の和より

$$\angle C = 180^\circ - 135^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C}$$

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{200}{\sin 30^\circ}$$

$$BC \div \sin 135^\circ = 200 \div \sin 30^\circ$$

$$BC \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \div \frac{1}{2}$$

$$BC \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 200 \times \frac{2}{1}$$

$$BC = \frac{200 \times 2}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$$

$$BC = 200\sqrt{2} \text{ m}$$

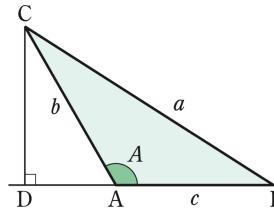
右の図のように、 $A$ が鈍角の場合にも

$$BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

$$CD^2 = (b \sin A)^2,$$

$$BD^2 = (c - b \cos A)^2$$

が成り立つことを確かめよ。



$\triangle BCD$ について三平方の定理より

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$

$\triangle ACD$ について

$$\frac{CD}{b} = \sin(180^\circ - A)$$

$$\frac{CD}{b} = \sin A$$

$$CD = b \sin A$$

$$CD^2 = (b \sin A)^2$$

$\triangle ACD$ について

$$\frac{AD}{b} = \cos(180^\circ - A)$$

$$\frac{AD}{b} = -\cos A$$

$$AD = -b \cos A$$

$$BD = AB + AD$$

$$BD = c - b \cos A$$

$$BD^2 = (c - b \cos A)^2$$

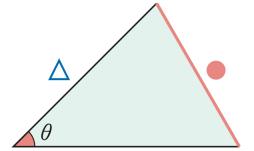
## 余弦定理

$\triangle ABC$ において、次が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



$$\text{Epsilon}^2 = \Delta^2 + \Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cos\theta$$

練習

23

次のような  $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

(1)  $a = 3, c = 2\sqrt{2}, B = 45^\circ$  のとき  $b$

(2)  $a = 3, b = 5, C = 120^\circ$  のとき  $c$

(1) 余弦定理より

$$b^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$b^2 = 9 + 8 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 = 9 + 8 - 12 = 5$$

$$b > 0 \text{ で } b =$$

$$b = \sqrt{5}$$

(2) 余弦定理より

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

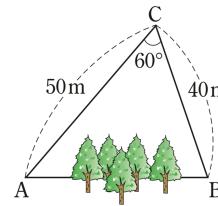
$$c^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times (-\frac{1}{2})$$

$$c^2 = 9 + 25 + 15 = 49$$

$$c > 0 \text{ で } c =$$

$$c = 7$$

右の図のように、林をはさんで 2 地点 A, B がある。地点 C から A と B を見て  $\angle ACB$  を測ると  $60^\circ$  で、また A, C 間の距離は 50 m, B, C 間の距離は 40 m であった。A, B 間の距離を求めよ。



余弦定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$AB^2 = (50)^2 + (40)^2 - 2 \times 50 \times 40 \times \cos 60^\circ$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2 \times 50 \times 40 \times \frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2000$$

$$AB^2 = 2100$$

$$AB > 0 \text{ で } \quad /$$

$$\underline{\underline{AB = 10\sqrt{21}}}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$b^2 + c^2 > a^2$	$b^2 + c^2 = a^2$	$b^2 + c^2 < a^2$
$\cos A > 0$	$\cos A = 0$	$\cos A < 0$
$A$ は鋭角	$A$ は直角	$A$ は鈍角

練習  
25

次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。

- (1)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  のとき  $A$   
 (2)  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{5}$ ,  $c = \sqrt{2}$  のとき  $B$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{1}{1} + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1 + 12 - 7}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq A \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$A = 30^\circ$$

練習  
26

$\triangle ABC$  の 3 辺の長さが次のようなとき、 $A$  は鋭角、直角、鈍角のいずれであるかを調べよ。

- (1)  $a = 9$ ,  $b = 3\sqrt{2}$ ,  $c = 7$  (2)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  $c = 2$

(2) 余弦定理より

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7} = \frac{18 + 49 - 81}{42\sqrt{2}} = \frac{-2}{42\sqrt{2}} = -\frac{1}{21\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{2 + 1 - 5}{2\sqrt{2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq B \leq 180^\circ \text{ より}$$

$$B = 135^\circ$$

(1)

$$b^2 + c^2 = (3\sqrt{2})^2 + 7^2 = 67$$

$$a^2 = 9^2 = 81$$

$$b^2 + c^2 < a^2 \text{ より}$$

$A$  は钝角

(2)

$$b^2 + c^2 = (\sqrt{6})^2 + 2^2 = 10$$

$$a^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$b^2 + c^2 > a^2 \text{ より}$$

$A$  は锐角

△ABCにおいて、 $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{3} + 1$ ,  $B = 45^\circ$  のとき、残りの辺の

長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理より

$$b^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cos 45^\circ$$

$$b^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2(\sqrt{3}+1)$$

$$b^2 = 6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$$

$$b^2 = 4$$

$$b > 0 \text{ つまり } b = 2$$

$$b = 2$$

余弦定理より

$$\cos A = \frac{2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)}$$

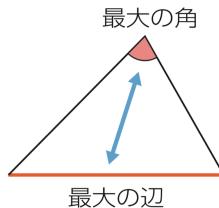
$$\cos A : \frac{6 + 2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)} : \frac{3 + \sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} : \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 30^\circ$$

$$C = 180 - 30 - 45 = 105^\circ$$

$$\underline{b = 2, A = 30^\circ, C = 105^\circ}$$

三角形の 2 辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。



よって、三角形の最大の辺に向かい合う角が、その三角形の最大の角である。

練習  
28  $\triangle ABC$ において次の等式が成り立つとき、この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

正弦定理より  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$a : b : c = 8 : 7 : 13$$

正の数  $k$  を用いて

$$a = 8k, b = 7k, c = 13k \text{ となるので}$$

$C$  が“最大の角”である。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

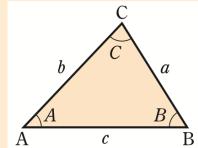
$$\underline{\underline{C = 120^\circ}}$$

### 三角形の面積

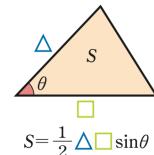
$\triangle ABC$  の面積  $S$  は、次の式で表される。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca \sin B,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$



三角形の面積  $S$  は、2辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる。



$$S = \frac{1}{2} \triangle \square \sin \theta$$

練習

29

次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) \quad b = 10, \quad c = 8, \quad A = 45^\circ \quad (2) \quad a = 6, \quad c = 5, \quad B = 150^\circ$$

$$(3) \quad 1 \text{ 辺の長さが } a \text{ の正三角形 } ABC$$

$$(1) \quad S = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

3辺の長さが次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) \quad a = 8, \quad b = 5, \quad c = 7$$

$$(2) \quad a = 13, \quad b = 14, \quad c = 15$$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} : \frac{1}{7}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

$$\underline{10\sqrt{3}}$$

(2) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{(14)^2 + (15)^2 - (13)^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} : \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 14 \times 15 \times \frac{4}{5} = 84$$

$$\underline{84}$$

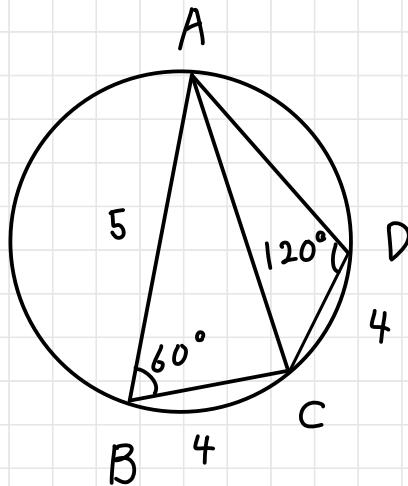
円に内接する四角形 ABCD において、AB = 5, BC = 4, CD = 4,

$\angle B = 60^\circ$  のとき、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は  $180^\circ$  なので

$$\angle B = 60^\circ \text{ と } \angle D = 120^\circ$$

また、四角形 ABCD の対角線を引くと下図になる。



$\triangle ABC$ について余弦定理から

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 21$$

$$AC > 0 \text{ と } AC = \sqrt{21}$$

$\triangle ACD$ について余弦定理

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$(\sqrt{21})^2 = AD^2 + 4^2 - 2 \times AD \times 4 \times (-\frac{1}{2})$$

$$AD^2 + 4AD - 5 = 0$$

$$(AD+5)(AD-1) = 0$$

$$AD > 0 \text{ と } AD = 1$$

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

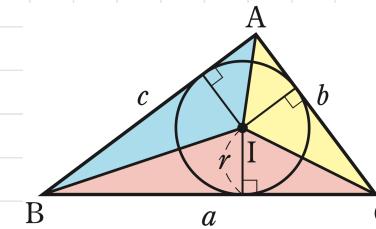
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{S = 6\sqrt{3}}}$$

# 三角形の内接円と面積

$\triangle ABC$  の内接円の半径を  $r$ , 中心を  $I$ ,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする.

$$S = \frac{1}{2} r(a+b+c)$$



練習  
32

$\triangle ABC$ において,  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$  のとき, この三角形の内接円の半径  $r$  を求めよ。

余弦定理より

$$\cos A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{また, } S = \frac{1}{2} r(a+b+c) \text{ より}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \cdot r(4+3+2)$$

$$\frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$r = \frac{3\sqrt{15}}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

ヘロンの公式

$\triangle ABC$ の面積 $S$ は

$$2S = a + b + c \text{ とする} \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

練習  
1

3辺の長さが 7, 8, 13 である三角形の面積 $S$ を求めよ。

$$2S = 7 + 8 + 13 \text{ から}$$

$$S = 14$$

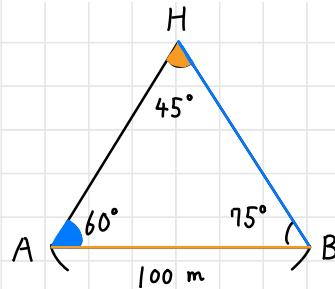
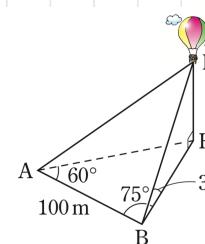
$$S = \sqrt{14 \cdot (14-7)(14-8)(14-13)} = 14\sqrt{3}$$

$$\underline{S = 14\sqrt{3}}$$

100 m 離れた 2 地点 A と B から、気球 P の  
真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき、

$$\angle HAB = 60^\circ, \angle HBA = 75^\circ$$

であった。また、B から P を見上げた角度  
は  $30^\circ$  であった。図において、気球 P の高  
さ PH を求めよ。



$\triangle HAB$ について正弦定理より

$$\frac{BH}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

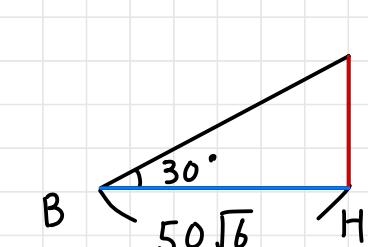
$$BH = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$BH = AB \div \sin 45^\circ \times \sin 60^\circ$$

$$BH = 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = 100 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{BH = 50\sqrt{6}}$$



$$\frac{PH}{BH} = \tan 30^\circ$$

$$PH = BH \times \tan 30^\circ$$

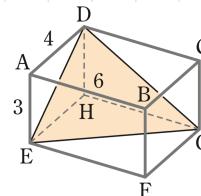
$$PH = \underline{50\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 50\sqrt{2}$$

$$\underline{PH = 50\sqrt{2}}$$

右の図のように、

$$AB = 6, AD = 4, AE = 3$$

である直方体 ABCD-EFGH がある。

 $\triangle DEG$  の面積  $S$  を求めよ。

直方体の性質から 三平方の定理より

$$AB = DC = EF = 6 \quad DE^2 = AD^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$AD = FG = 4$$

$$AE = CG = 3$$

$$DE > 0 \text{ より}$$

$$DE = 5$$

$$DG^2 = CG^2 + DC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$DG > 0 \text{ より}$$

$$DG = 3\sqrt{5}$$

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$EG > 0 \text{ より}$$

$$EG = 2\sqrt{13}$$

余弦定理より

$$\cos \angle DGE = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{13})^2 - 5^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13}} : \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\sin^2 \angle DGE + \cos^2 \angle DGE = 1$$

$$\sin^2 \angle DGE = 1 - \cos^2 \angle DGE = \frac{59}{65}$$

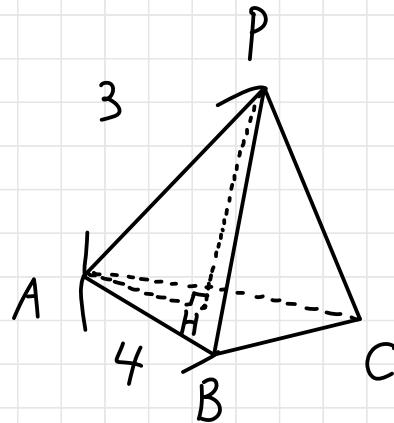
$$\sin \angle DGE > 0 \text{ より}$$

$$\sin \angle DGE = \sqrt{\frac{59}{65}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{13} \times \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{65}} = 3\sqrt{59}$$

$$\underline{\underline{S = 3\sqrt{59}}}$$

PA = PB = PC = 3, AB = BC = CA = 4 である三角錐 PABC の体  
積 V を求めよ。



$\triangle ABC$  について正弦定理より

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH$$

$$AH = \frac{2}{\sin 60^\circ} : 2 \div \sin 60^\circ : 2 \div \frac{\sqrt{3}}{2} : 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle PAH$  について三平方の定理より

$$AH^2 + PH^2 = PA^2$$

$$PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{33}{9}$$

$$PH > 0 \text{ より } PH = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$V = S \times PH \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{33}}{3} \times \frac{1}{3} : \frac{4\sqrt{11}}{3}$$

$$V = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$