数A

図形の性質

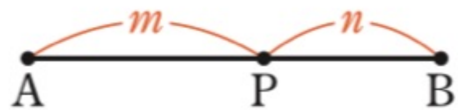
内分と外分

m，n を正の数とする。
線分 AB 上の点Pが

$$AP : PB = m : n$$

を満たすとき，点Pは線分 AB を $m : n$ に **内分する** という。

内分

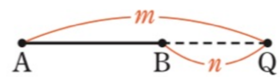


次に，m，n を異なる正の数とする。
線分 AB の延長上の点Qが

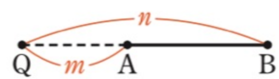
$$AQ : QB = m : n$$

を満たすとき，点Qは線分 AB を $m : n$ に **外分する** という。

外分 $m>n$ のとき



外分 $m<n$ のとき

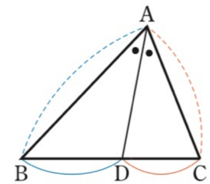


練習 1 下の図において，次の点を図にしるせ。
(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点P
(2) 線分 AB を $2:1$ に外分する点Q
(3) 線分 BA を $2:1$ に外分する点R

三角形の内角の二等分線と比

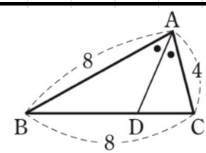
定理1　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点Dは，辺 BC を AB：AC に内分する。

すなわち　　BD：DC＝AB：AC



練習 2　AB＝8，BC＝8，AC＝4 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点をDとする。次のものを求めよ。

(1)　BD：DC　　　(2)　線分 BD の長さ



(1)

ADは ∠Aの二等分線なので

BD : DC = AB : AC

= 8 : 4 = 2 : 1

BD : DC = 2 : 1

(2)

BD : DC = 2 : 1 より

$BD = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}$

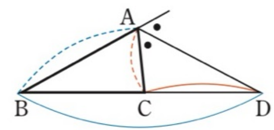
$BD = \frac{16}{3}$

三角形の外角の二等分線と比

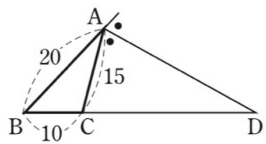
定理2　AB ≠ AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点Dは，辺 BC を AB : AC に外分する。

すなわち　BD : DC = AB : AC

AB > AC の場合



練習 3　AB = 20，BC = 10，AC = 15 である △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。



AB : AC = BD : DC … ①

BD = x とすると DC = $x - 10$ …(ア)

AB : AC = 20 : 15 = 4 : 3 …(イ)

(ア)(イ) を ① に代入すると

$4 : 3 = x : x - 10$

$3x = 4(x - 10)$

$3x = 4x - 40$

$3x - 4x = -40$

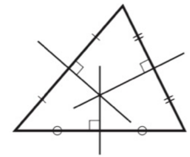
$-x = -40$

$x = 40$

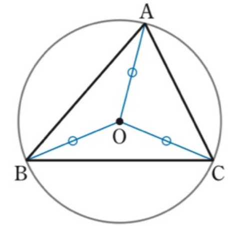
BD = 40

三角形の辺の垂直二等分線

定理3　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

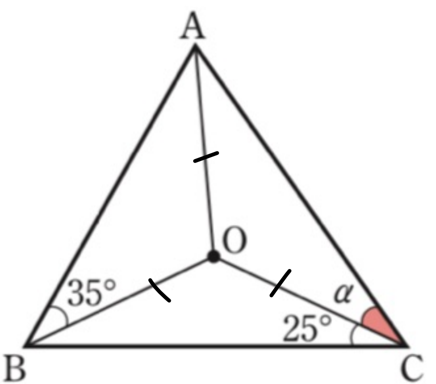


△ABC において，3 辺の垂直二等分線が交わる点を O とすると，前ページで示したように，点 O は △ABC の 3 つの頂点から等距離にある。よって，この点 O を中心とする半径 OA の円は，△ABC の 3 つの頂点を通る。



この円を，△ABC の **外接円** といい，外接円の中心 O を △ABC の **外心** という。

三角形の外心は，3 辺の垂直二等分線が交わる点である。



左図において

Oは△ABCの外心

△OABはOA=OBの二等辺三角形

∠OAB=∠OBA=35°

△OBCはOB=OCの二等辺三角形

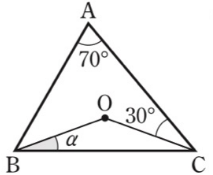
∠OBC=∠OCB=25°

△OACはOA=OCの二等辺三角形

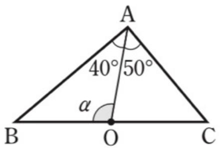
∠OAC=∠OCA=α

練習 4　下の図において，点Oは△ABC の外心である。α を求めよ。

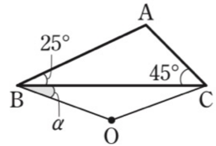
(1)



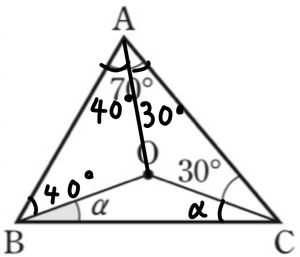
(2)



(3)



(1)



$2(\alpha+30+40)=180$

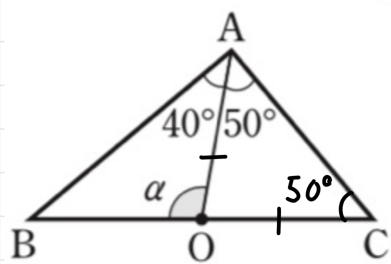
$\alpha+30+40=90$

$\alpha=90-30-40$

$\alpha=20$

$\underline{\alpha=20^\circ}$

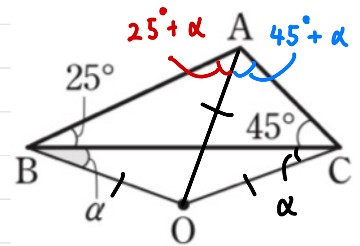
(2)



$\alpha=50+50=100$

$\underline{\alpha=100^\circ}$

(3)



△ABCについて

$25+(25+\alpha)+(45+\alpha)+45=180$

$140+2\alpha=180$

$2\alpha=180-140$

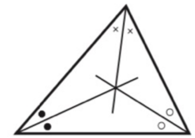
$2\alpha=40$

$\alpha=20$

$\underline{\alpha=20^\circ}$

三角形の内角の二等分線

定理4　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。



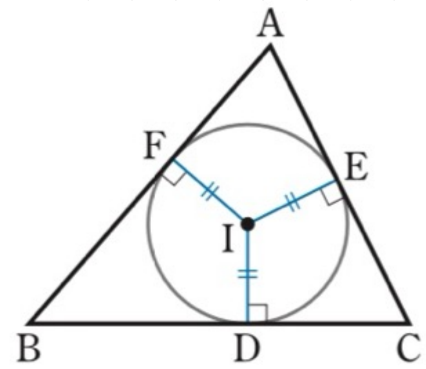
$$ID \perp BC,\ IE \perp CA,\ IF \perp AB$$

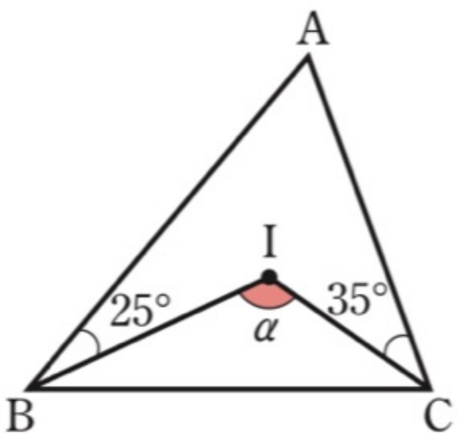
$$ID = IE = IF$$

よって，この点 I を中心とする半径 ID の円は，△ABC の 3 辺に接する。

この円を，△ABC の **内接円** といい，内接円の中心 I を △ABC の **内心** という。

三角形の内心は，3 つの内角の二等分線が交わる点である。





左図において

I は△ABCの内心

BI は∠ABCの二等分線 なので

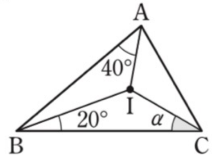
$$\angle ABI = \angle CBI = 25°$$

CI は∠ACBの二等分線 なので

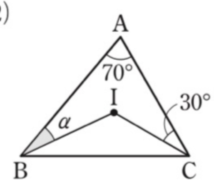
$$\angle ACI = \angle BCI = 35°$$

練習 5 下の図において，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

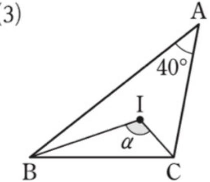
(1)



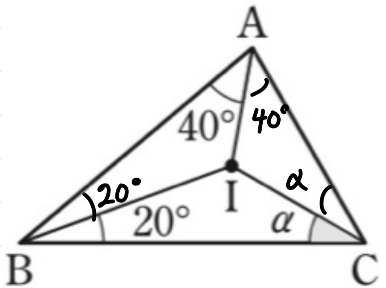
(2)



(3)



(1)



$2(\alpha+20+40)=180$

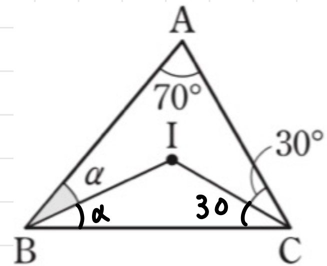
$\alpha+20+40=90$

$\alpha=90-20-40$

$\alpha=30$

$\underline{\alpha=30^\circ}$

(2)



$2(\alpha+30)+70=180$

$2(\alpha+30)=180-70$

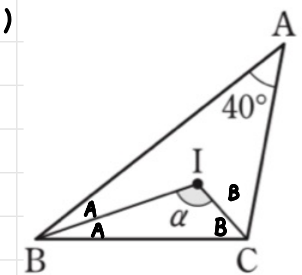
$2(\alpha+30)=110$

$\alpha+30=55$

$\alpha=25$

$\underline{\alpha=25^\circ}$

(3)



△IBC について

$A+B=\alpha$ …①

△ABC について

$2A+2B+40=180$

$2A+2B=140$

$A+B=70$ …②

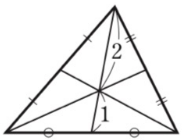
①②より

$\underline{\alpha=70^\circ}$

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を，三角形の **中線** という。三角形の中線には，次のような性質がある。

三角形の中線

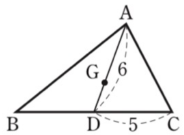
定理5　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2：1 に内分する。



三角形の 3 本の中線が交わる点を，三角形の **重心** という。

練習 6　右の図において，点 G は △ABC の重心である。次の線分の長さを求めよ。

(1)　BD　　　(2)　AG



(1)

点Gが△ABCの重心なので

ADは中線であるから

BD=DCより

BD= 5

(2)

AG : GD = 2 : 1

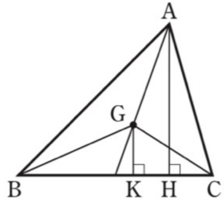
$AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

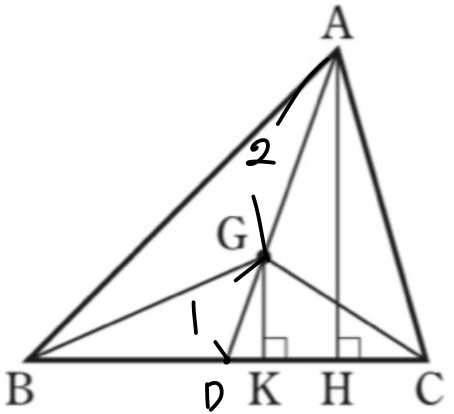
AG = 4

練習 7 △ABC の重心を G とし，点 G から直線 BC に下ろした垂線を GK，点 A から直線 BC に下ろした垂線を AH とする。

(1) GK : AH を求めよ。

(2) △GBC と △ABC の面積比を求めよ。





(1) AGの延長とBCとの交点をDとする。

点Gは△ABCの重心なので

AG : GD = 2 : 1

△GDKと△ADHは

∠GKD = ∠AHD = 90°

∠GDK = ∠ADH (共通)

2角が等しいので

△GDK ∽ △ADH

よって GK : AH = GD : AD

= 1 : 3

GK : AH = 1 : 3

(2) △GBCと△ABCは

底辺が共通の三角形なので

面積比は高さの比に依存する。

よって GK : AH が面積比

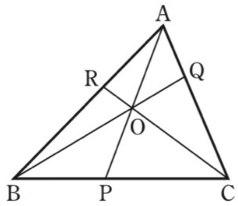
(1)より GK : AH = 1 : 3 なので

△GBC : △ABC = 1 : 3

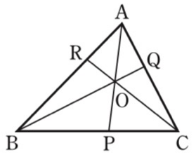
チェバの定理

定理6　△ABC の内部に点 O がある。頂点 A, B, C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



練習 8　右の図の △ABC において，AR：RB＝1：2，BP：PC＝4：3 である。CQ：QA を求めよ。



チェバの定理より

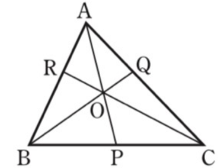
$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$$

$CQ:QA=3:2$

練習 9　右の図の △ABC において，AQ：QC＝2：3，BP＝PC である。AR：RB を求めよ。



BP = PC より　BP : PC = 1 : 1

チェバの定理より

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3}$$

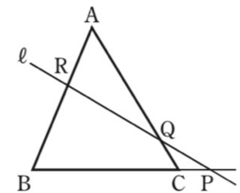
$AR:RB=2:3$

メネラウスの定理

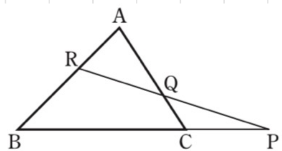
定理7　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

P が辺 BC の延長上にある場合



練習 10　右の図の △ABC において，
AR：RB＝2：3，BC：CP＝2：1
である。次の比を求めよ。
(1)　CQ：QA　　(2)　PQ：QR



(1) BC : CP = 2 : 1 より BP : CP = 3 : 1

メネラウスの定理より

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{2}$$

CQ : QA = 1 : 2

(2) AR : RB = 2 : 3 より AB : AR = 5 : 2

メネラウスの定理より

$$\frac{AB}{AR}\cdot\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{CP}{BC}=1$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{1}{2}=1$$

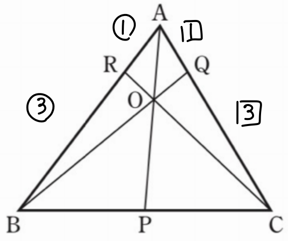
$$\frac{QR}{PQ}=\frac{4}{5}$$

PQ : QR = 5 : 4

練習 11　△ABC の辺 AB，AC を 1：3 に内分する点を，それぞれ R，Q とする。線分 BQ と CR の交点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

(1)　BP：PC を求めよ。

(2)　△OBC：△ABC を求めよ。



(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{1}=1$$

$$\frac{BP}{PC}=1$$

BP：PC＝1：1

(2) △ABC の面積を 1 とする．

△ARC：△BRC＝AR：BR＝1：3

よって $\triangle BRC=\frac{3}{4}\triangle ABC$ …①

△BOR：△BOC＝RO：OC

△CAR についてメネラウスの定理より

$$\frac{AB}{BR}\cdot\frac{RO}{OC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{RO}{OC}\cdot\frac{3}{1}=1$$

$$\frac{RO}{OC}=\frac{1}{4}$$

RO：OC＝1：4

△BOR：△BOC＝1：4 なので

$\triangle BOC=\frac{4}{5}\triangle BRC$ …②

①を②に代入すると

$$\triangle BOC=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\triangle ABC$$

$$\triangle BOC=\frac{3}{5}\triangle ABC$$

$$\frac{\triangle BOC}{\triangle ABC}=\frac{3}{5}$$

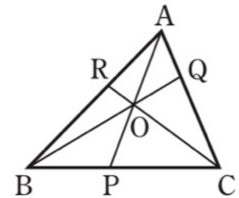
△BOC：△ABC＝3：5

チェバの定理

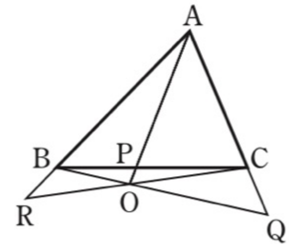
定理6′ △ABC の辺上にもその延長上にもない点Oがある。頂点 A，B，C とOを結ぶ直線 AO，BO，CO が，向かい合う辺 BC，CA，AB またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき，次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

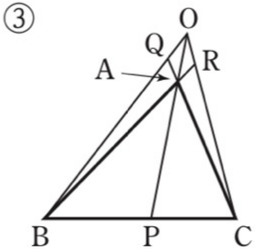
①



②



③

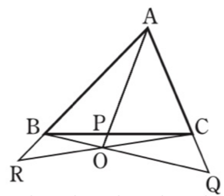


練習 1 右の図の △ABC において，

AR：RB＝4：1，BP：PC＝3：4

である。

CQ：QA を求めよ。



チェバの定理より

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

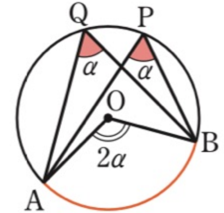
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{4}{1}=1$$

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{3}$$

CQ：QA＝1：3

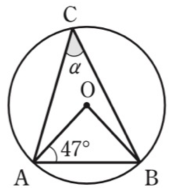
円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である。

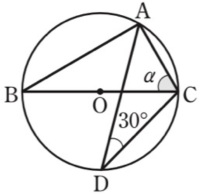


練習 12 右の図において，α を求めよ。ただし，Oは円の中心，(2) の線分 BC は円の直径である。

(1)



(2)



(1) OA，OBは円Oの半径なので OA = OB．

△OABは二等辺三角形で底角が等しいから

$\angle OAB = \angle OBA = 47°$．

よって $\angle AOB = 180 - 47 - 47 = 86$

$\angle AOB$ は $\overset{\frown}{AB}$ の中心角なので

$\alpha = \frac{86}{2} = 43$

$\underline{\alpha = 43°}$

(2) $\angle ABC$ と $\angle CDO$ は $\overset{\frown}{AC}$ の円周角なので

$\angle ABC = \angle CDO = 30°$

$\overset{\frown}{BC}$ の円周角より $\angle BAC = 90°$

$\alpha = 180 - 30 - 90 = 60$

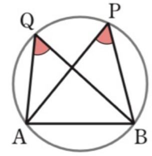
$\underline{\alpha = 60°}$

円周角の定理の逆

4点A，B，P，Qについて，点P，Qが直線ABに関して同じ側にあって

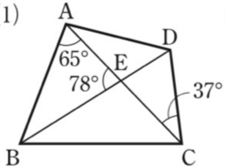
$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば，4点A，B，P，Qは1つの円周上にある。

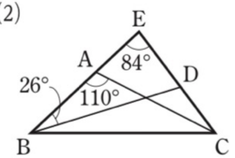


練習 13 右の図において，4点A，B，C，Dが1つの円周上にあることを示せ。

(1)



(2)



(1) 対頂角より $\angle AEB = \angle DEC = 78°$

$\triangle CDE$ の内角和より

$\angle EDC = 180 - 78 - 37 = 65$

$\angle BAC = \angle EDC = 65°$ より

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角が等しいので

4点A.B.C.Dは1つの円周上にある.

(2) $\triangle BED$ について

外角である $\angle CDB = \angle EBD + \angle BED = 26 + 84 = 110$

$\angle BAC = \angle CDB = 110°$ より

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角が等しいので

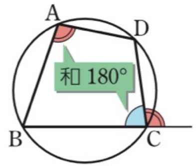
4点A.B.C.Dは1つの円上にある.

円に内接する四角形の性質

定理8 円に内接する四角形について，次の[1]，[2]が成り立つ。

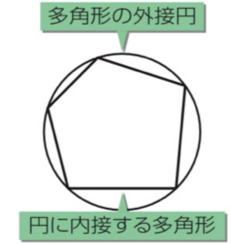
[1] 対角の和は 180° である。

[2] 内角は，その対角の外角に等しい。



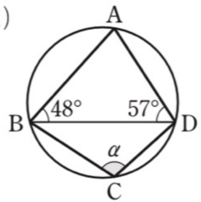
多角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき，この多角形は円に **内接する** という。また，この円をその多角形の **外接円** という。

三角形には必ず外接円が存在するが，三角形以外の多角形では外接円が存在するとは限らない。

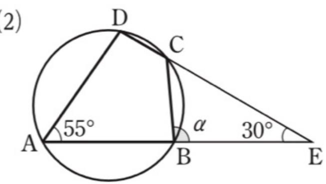


練習 14 下の図において，α を求めよ。

(1)



(2)



(1) $\alpha = 180 - \angle BAD$

$\angle BAD = 180 - 48 - 57$

$\angle BAD = 75°$

$\alpha = 180 - 75 = 105$

$\underline{\alpha = 105°}$

(2) $\angle DAB = \angle BCE = 55$

$\alpha = 180 - \angle BCE - \angle CEB = 180 - 55 - 30 = 95$

$\underline{\alpha = 95°}$

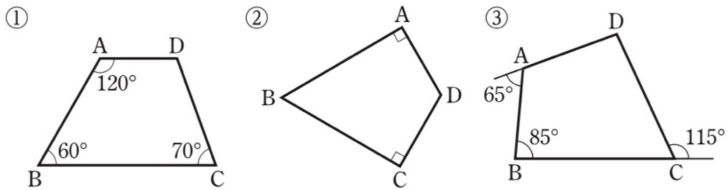
四角形が円に内接するための条件

定理9 次の[1]または[2]が成り立つ四角形は，円に内接する。

[1] 1組の対角の和が180°である。

[2] 内角が，その対角の外角に等しい。

練習 15 次の四角形ABCDのうち，円に内接するものはどれか。



①について

$\angle BAC + \angle BCD \neq 180°$

②について

$\angle BAD + \angle BCD = 180$

対角の和が180°より円に内接する

③について

$\angle A + \angle C = 180$

1組の対角の和が180°なので

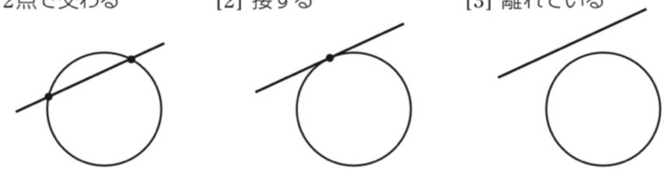
円に内接する.

②と③

・円と直線

円と直線の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

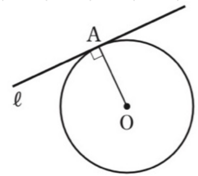
[1] 2点で交わる　　[2] 接する　　[3] 離れている



・円の接線

円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について，次が成り立つ。

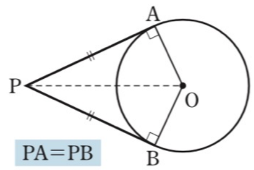
直線 ℓ が点 A で円 O に接する $\iff$ OA $\perp \ell$



直線 ℓ は点 A における円の接線

円に引いた 2 つの接線の長さについては，次のことがいえる。

円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい。



円の外部の1点から引ける
円の接線は 2本
PA，PBを接線の長さという。

練習 17 △ABC において，

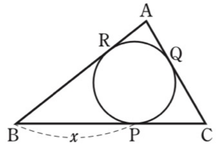
$AB = 7,\ BC = 8$

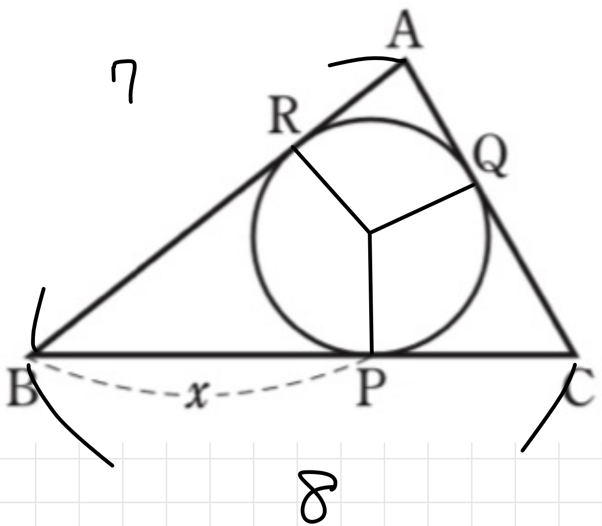
とする。

この三角形の内接円と辺 BC，CA，AB との接点を，それぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えよ。

(1) BP の長さを x とするとき，AQ と CQ の長さを，それぞれ x で表せ。

(2) CA = 5 であるとき，BP の長さを求めよ。





(1) P, Q, R が接点なので

$AR = AQ \cdots ①,\ BP = BR \cdots ②,\ CP = CQ \cdots ③$

$BP = x$ なので ② より $BR = x \cdots ④$

$AB = 7$, ④ より $AR = AB - BR = 7 - x$

① より $AQ = 7 - x$

$BC = 8,\ BP = x$ より $CP = BC - BP = 8 - x$

③ より $CQ = 8 - x$

$AQ = 7 - x$

$CQ = 8 - x$

(2) $AQ + CQ = CA$

(1) より $AQ = 7 - x,\ CQ = 8 - x$ なので

$(7 - x) + (8 - x) = 5$

$-2x + 15 = 5$

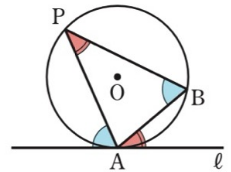
$x = 5$

$BP = x$ より

$BP = 5$

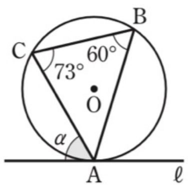
円の接線と弦の作る角

定理10 円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

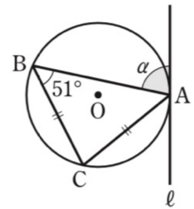


練習 19 右の図において，α を求めよ。ただし，直線 ℓ は円Oの接線で，Aは接点である。

(1)



(2)



(1) $\alpha = 60°$

(2) $CB = CA$ より $\angle CBA = \angle CAB = 51°$

$\angle BCA = 180 - \angle CBA - \angle CAB = 78°$

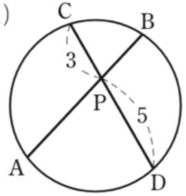
$\alpha = 78°$

方べきの定理 I

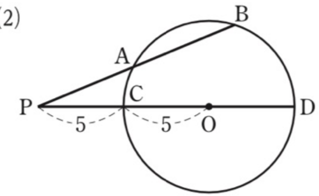
定理11 円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，**PA・PB＝PC・PD** が成り立つ。

練習 20 下の図において，PA・PB の値を求めよ。ただし，(2)の O は円の中心である。

(1)



(2)



(1) 方べきの定理より

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$PA \cdot PB = 3 \cdot 5 = 15$

$\underline{PA \cdot PB = 15}$

(2) OC, OD は円 O の半径なので

$OC = OD = 5$

方べきの定理より

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

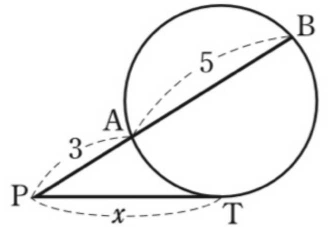
$PA \cdot PB = 5 \cdot 15 = 75$

$\underline{PA \cdot PB = 75}$

方べきの定理Ⅱ

定理12　円の外部の点Pから円に引いた接線の接点をTとする。Pを通ってこの円と2点A，Bで交わる直線を引くと，$\mathbf{PA \cdot PB = PT^2}$ が成り立つ。

練習 22　右の図において，x の値を求めよ。ただし，直線PTは円の接線で，Tは接点である。



$PT^2 = PA \cdot PB$

$x^2 = 3 \cdot 8 = 24$

$x > 0$ より

$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\underline{x = 2\sqrt{6}}$

A　2つの円の位置関係

半径が異なる2つの円の位置関係には，右の[1]～[5]の場合がある。

右の図では，円Oの半径を r，円O′の半径を r' とし，2つの円の中心間の距離を d とする。ただし，$r>r'$ であるとする。

■[1]～[5]の各場合の r，r'，d の関係について，□に等号＝，不等号＞，＜のうち，適する記号を入れよ。

[1]　$d\boxed{>}r+r'$

[2]　$d\boxed{=}r+r'$

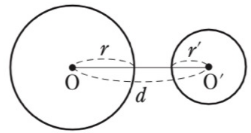
[3]　$r-r'\boxed{<}d\boxed{<}r+r'$

[4]　$d\boxed{=}r-r'$

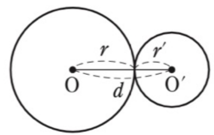
[5]　$d\boxed{<}r-r'$

[2]，[4]のように，2つの円がただ1つの共有点をもつとき，2つの円は **接する** といい，この共有点を **接点** という。[2]のように接する場合，2つの円は **外接する** という。[4]のように接する場合，2つの円は **内接する** という。

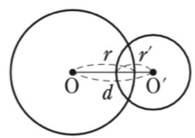
[1]　**互いに外部にある**



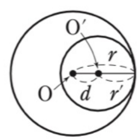
[2]　**外接する（1点を共有する）**



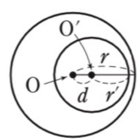
[3]　**2点で交わる**



[4]　**内接する（1点を共有する）**



[5]　**一方が他方の内部にある**



2つの円が接するとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

練習 23　半径5と半径3の円がある。中心間の距離 d の値が次のとき，2つの円の位置関係を前ページの[1]～[5]の中から選べ。

(1)　$d=8$　　(2)　$d=10$　　(3)　$d=2$

(4)　$d=4$　　(5)　$d=1$

$r_1=5$，$r_2=3$ とする。

(1) $d=8$ より $r_1+r_2=d$ なので [2]

(2) $d=10$ より $r_1+r_2<d$ なので [1]

(3) $d=2$ より $r_1-r_2=d$ なので [4]

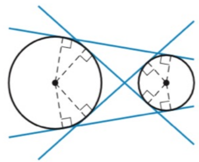
(4) $d=4$ より $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ なので [3]

(5) $d=1$ より $d<r_1-r_2$ なので [5]

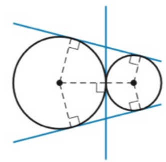
2 つの円の両方に接する直線を，2 つの円の **共通接線** という。

2 つの円の共通接線には，次のような場合がある。

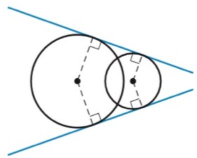
[1] 共通接線 4 本



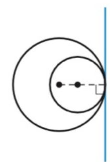
[2] 共通接線 3 本



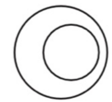
[3] 共通接線 2 本



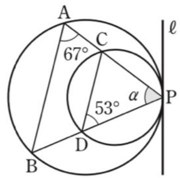
[4] 共通接線 1 本

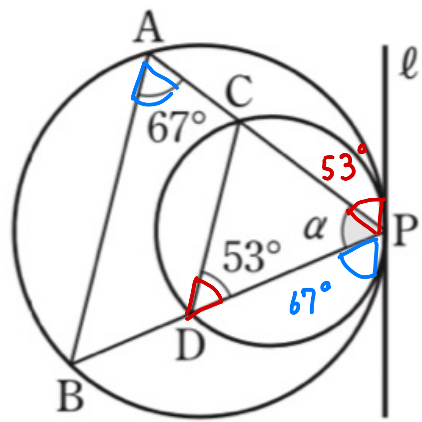


[5] 共通接線はない



練習 24 右の図で，α を求めよ。ただし，直線 ℓ は 2 つの円の共通接線で，点 P は接点である。

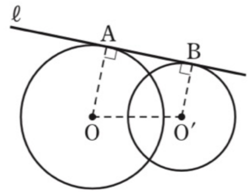


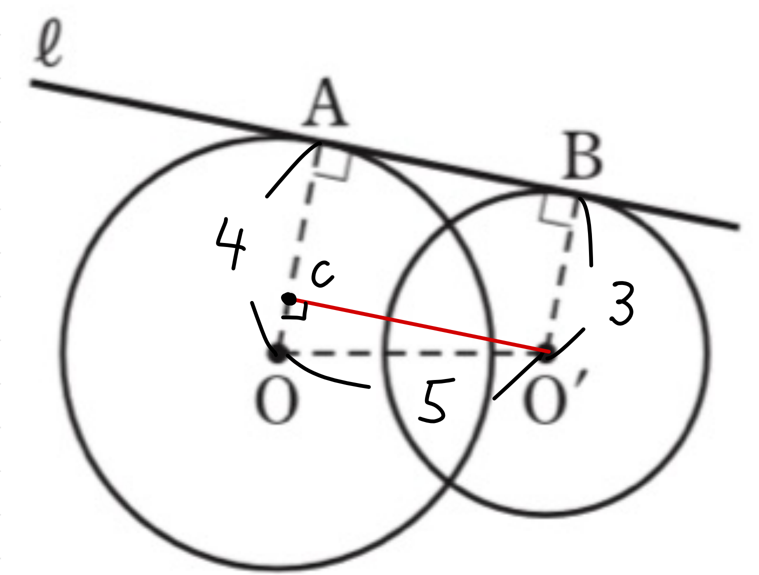


$67^\circ + \alpha + 53^\circ = 180^\circ$

$\alpha = 60^\circ$

練習 25 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。円 O，O′ の半径を，それぞれ 4，3 とし，O，O′ 間の距離を 5 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。





点O′を通りABに平行な直線を引く。

その直線とOAとの交点をCとする。

四角形O′ABCは長方形なので

$AB = O'C$

$AC = BO' = 3$ より $OC = 1$

ここで三角形OO′Cは直角三角形なので三平方の定理から

$$OC^2 + O'C^2 = OO'^2$$

$$O'C^2 = OO'^2 - OC^2 = 5^2 - 1^2 = 24$$

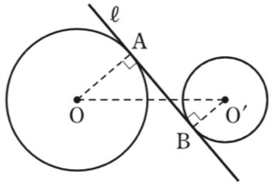
$O'C > 0$ より

$$O'C = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$AB = O'C$ より

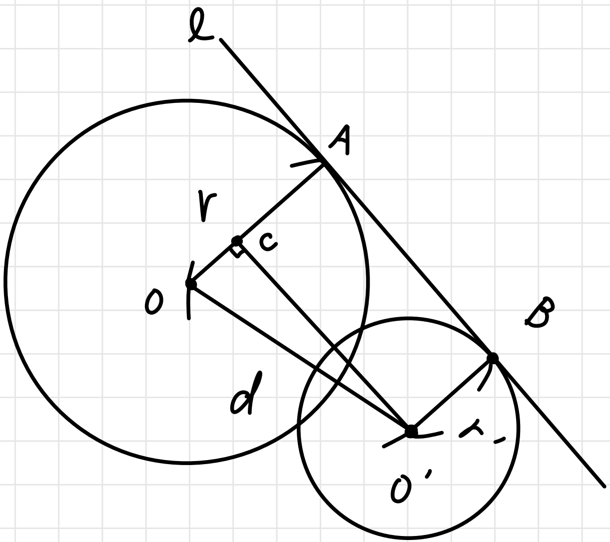
$AB = 2\sqrt{6}$

練習 26 右の図において，直線 ℓ は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，A，B は接点である。円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とし，O，O′ 間の距離を d とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



円O′をℓについて対称移動し

O′からOAに垂直な線を引き，交点をCとする。



左図より四角形OO′ABは長方形なので

$AB = CO'$，$O'B = CA = r'$

三角形OO′Cは直角三角形なので三平方の定理から

$OC^2 + O'C^2 = OO'^2$

$CA = O'B = r'$ より $OC = r - r'$，$OO' = d$ なので

$(r-r')^2 + O'C^2 = d^2$

$O'C^2 = d^2 - (r-r')^2$

$O'C > 0$ より

$O'C = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$

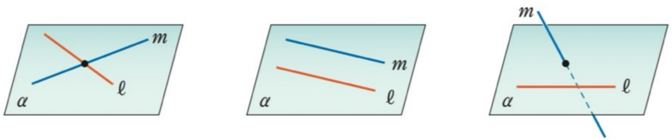
$AB = O'C$ より

$AB = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$

A　2 直線の位置関係

異なる 2 直線 ℓ，m の位置関係には，次の 3 つの場合がある。[1]，[2] の場合，2 直線 ℓ，m は 1 つの平面上にある。

[1] 1点で交わる　　[2] 平行である　　[3] ねじれの位置にある



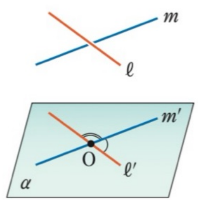
2 直線 ℓ，m が平行であるとき，$\boldsymbol{\ell /\!/ m}$ と書く。

〈注意〉 2 直線 ℓ，m が一致する場合も，$\ell /\!/ m$ であると考えることにする。

3 直線 ℓ，m，n について，次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{\ell /\!/ m}$，$\boldsymbol{m /\!/ n}$　ならば　$\boldsymbol{\ell /\!/ n}$

2 直線 ℓ，m が平行でないとき，1 点O を通り，ℓ，m に平行な直線を，それぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ' と m' は 1 つの平面上にある。このとき，ℓ' と m' のなす 2 つの角は，点O をどこにとっても，一定である。

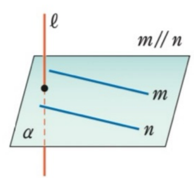


この角を **2 直線 ℓ，m のなす角** という。

2 直線 ℓ，m のなす角が直角のとき，ℓ と m は **垂直** であるといい，$\boldsymbol{\ell \perp m}$ と書く。垂直な 2 直線 ℓ と m が交わるとき，ℓ と m は **直交** するという。

また，次のことが成り立つ。

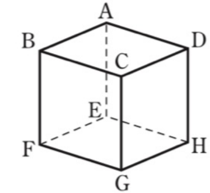
平行な 2 直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である。



練習 32　右の図の立方体 ABCD−EFGH について，次の 2 直線のなす角 θ（シータ）を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(1)　AB，DH　　(2)　AB，EG

(3)　AC，FH



(1) 図は立方体なので AB と DH のなす角は AB と AE のなす角と同値である.

$\theta = 90°$

(2) 図は立方体なので AB と EG のなす角は AB と AC のなす角と同値である.

$\theta = 45°$

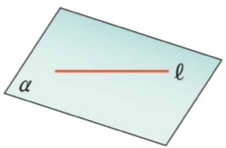
(3) 図は立方体なので AC と FH のなす角は AC と BD のなす角と同値である.

$\theta = 90°$

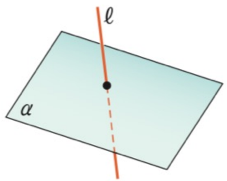
B 直線と平面の位置関係

直線 ℓ と平面 α の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

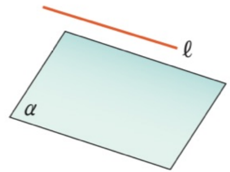
[1] ℓ は α に含まれる
（ℓ は α 上にある）



[2] 1点で交わる

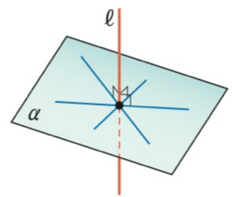


[3] 平行である



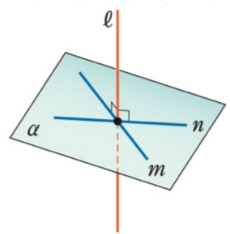
直線 ℓ と平面 α が平行であるとき，$\ell \mathbin{/\!/} \alpha$ と書く。

直線 ℓ が，平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，ℓ は α に **垂直** である，または ℓ は α に **直交** するといい，$\ell \perp \alpha$ と書く。このとき，ℓ を平面 α の **垂線** という。

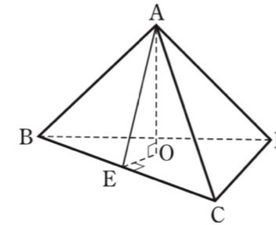


直線と平面の垂直について，次が成り立つことが知られている。

直線 ℓ が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。



練習 33 四面体 ABCD において，点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AO とする。また，点 O から直線 BC に下ろした垂線を OE とする。このとき，AE ⊥ BC であることを証明せよ。



(証)

仮定より AO⊥平面BCD なので

BC⊥AO …①

また， OE⊥BC …②

①②より BC⊥平面AEO … ③

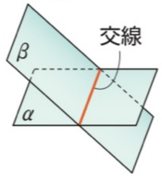
ここで AE は平面AEO の辺なので

③より BC⊥AE であることも言える. 証

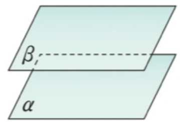
C　2 平面の位置関係

異なる 2 平面 α，β の位置関係には，次の 2 つの場合がある。

[1] 交わる



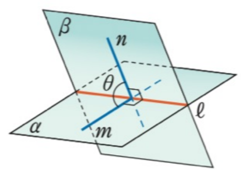
[2] 平行である



2 平面が交わるとき，その交わりは直線になり，その直線を **交線** という。2 平面 α，β が平行であるとき，$\boldsymbol{\alpha /\!/ \beta}$ と書く。

〈注意〉 2 平面 α，β が一致する場合も，$\alpha /\!/ \beta$ であると考えることにする。

交わる 2 平面の交線上の点から，各平面上で，交線に垂直に引いた 2 直線のなす角を **2 平面のなす角** という。

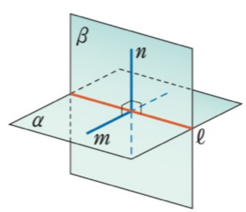


2 平面 α，β のなす角が直角のとき，α と β は **垂直** である，または **直交** するといい，$\boldsymbol{\alpha \perp \beta}$ と書く。

178ページ
直線・平面の垂直と直交

2 平面の垂直について，次のことが成り立つ。

平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。



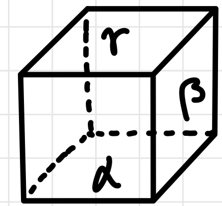
練習 34 空間内の直線 ℓ と平面 α，β，γ（ガンマ）について，次の記述は正しいか。正しくない場合，その理由も述べよ。

(1)　$\alpha \perp \beta$，$\beta \perp \gamma$ ならば，$\alpha /\!/ \gamma$ である。

(2)　$\alpha \perp \beta$，$\beta /\!/ \gamma$ ならば，$\alpha \perp \gamma$ である。

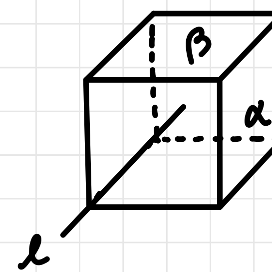
(3)　$\ell /\!/ \alpha$，$\ell /\!/ \beta$ ならば，$\alpha /\!/ \beta$ である。

(1) 右図のとき $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$ だが $\alpha \perp \gamma$.
よって正しくない.



(2) 正しい

(3) 右図のとき $\ell /\!/ \alpha$. $\ell /\!/ \beta$ だが $\alpha \perp \beta$
よって正しくない.



・多面体

三角錐，四角柱のように，多角形の面で囲まれた立体を多面体という。

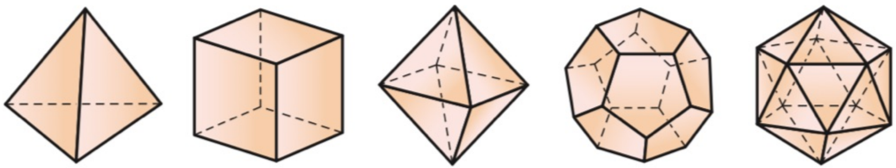
へこみのない多面体を凸多面体という。

次の[1]，[2]を満たす凸多面体を **正多面体** という。

[1]　各面はすべて合同な正多角形である。

[2]　各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体は，次の 5 種類しかないことが知られている。



正四面体　正六面体(立方体)　正八面体　正十二面体　正二十面体

練習 35　前ページの 5 種類の正多面体について，次の表を完成させよ。

正多面体	面の数	面の形	頂点の数	辺の数
正四面体	4	正三角形	4	6
正六面体	6	正方形	8	12
正八面体	8	正三角形	6	12
正十二面体	12	正五角形	20	30
正二十面体	20	正三角形	12	30

オイラーの多面体定理

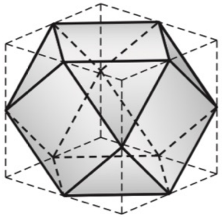
一般に，凸多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

$$v-e+f=2 \quad \cdots\cdots ①$$

練習 37 右の図のように，正六面体の各辺の中点を通る平面で 8 つのかどを切り取った多面体について，次の問いに答えよ。

(1) 面の数，頂点の数，辺の数を，それぞれ求めよ。

(2) この多面体についても，上の等式 ① が成り立つことを確かめよ。



(1)

面	14
頂点	12
辺	24

(2)

オイラーの多面体定理は

(頂点の数)−(辺の数)+(面の数) = 2 となればよい.

(1)より

$12-24+14=2$

よってこの多面体についても ① は成立.