

数Ⅲ

極限



数列の極限

・**収束** … 数列 $\{a_n\}$ においてれを限りなく大きくしたとき a_n がある値 α に限りなく近づくこと
その α を $\{a_n\}$ の極限値という。

このことを以下のようにして表現する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha$$

練習
1

次の数列の極限値をいえ。

(1) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$

(2) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

(3) $\cos \pi, \cos 3\pi, \cos 5\pi, \dots, \cos(2n-1)\pi, \dots$

(1) $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ なので

(2) 極限値は 0

(3) 極限値は -1

極限値は 1

・発散… 数列 $\{a_n\}$ が収束しないこと

発散には主に3つの場合がある。

① 正の無限大に発散

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$(例) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

② 負の無限大に発散

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$(例) \lim_{n \rightarrow \infty} (-3n) = -\infty$$

③ 振動(正の無限大にも負の無限大にも発散しない) (例) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

* ∞ と $-\infty$ は極限ではあるが、極限値ではない。

数列の収束と発散についてのまとめは以下

数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$	……	極限は α
発散 (収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$	……	極限は ∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	……	極限は $-\infty$
	振動		……	極限は ない

練習

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $2n$

(2) $-\frac{1}{n}$

(3) $-n^2$

(4) $1 + (-1)^n$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$

(4) 極限はない

数列の極限の性質(1)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha$ ただし, k は定数

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

3 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$

4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし, $\beta \neq 0$

練習 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ のとき, 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 5}{2a_n - 1}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - (-2) = 3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n = 3 \times 1 + 2 \times (-2) = -1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 - 1 = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1 \times (-2) = -2$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 5) = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 1) = 1 \text{ すなはち } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 5}{2a_n - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -1 \text{ すなはち } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{3}{-1} = -3$$

練習

4

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 3n^2)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n^3)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-2}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n^2+3}$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n}{2n+1}$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 3\right) = -\infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1\right) = -\infty$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 0$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2+\frac{1}{n}} = \infty$

練習

5

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-n} - n)$

(1)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2 - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$$

(2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2-n} - n)(\sqrt{n^2-n} + n)}{\sqrt{n^2-n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2-n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の極限について、さらに次のことが成り立つ。

数列の極限の性質(2)

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

5 すべての n について $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

6 すべての n について $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

（注意）性質 6 を「はさみうちの原理」ということがある。

練習
6

θ を定数とするとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6}$$

$$-1 \leq \cos \frac{n\theta}{6} \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ なので..}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\theta}{6} = 0$$

・無限等比数列…項が無限に近く等比数列

数列 $\{r^n\}$ の極限についてまとめると、次のようになる。

数列 $\{r^n\}$ の極限

$$r > 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$$

$$|r| < 1 \text{ のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$r \leq -1 \text{ のとき} \quad \begin{array}{l} \text{振動する} \cdots \cdots \\ \text{極限はない} \end{array}$$

} 収束する

練習
/

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

- (1) $(\sqrt{3})^n$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$ (4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(3) 振動し極限はない

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0$$

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は、 $-1 < r \leq 1$ である。

練習
8

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x-1 \leq 1$$

$$-1 + 1 < x - 1 + 1 \leq 1 + 1$$

$$\underline{0 < x \leq 2}$$

また、そのときの極限値は

$$0 < x < 2 のとき 0$$

$$\underline{x = 2 のとき 1}$$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1} = \infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \times 2}{3^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0$

数列 $\left\{ \frac{1 - r^n}{1 + r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

(1) $r > 1$

(2) $r = 1$

(3) $|r| < 1$

(4) $r < -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1}$$

(1) $r > 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = -1$$

(2) $r = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = 0$$

(3) $|r| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = 1$$

(4) $r < -1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = -1$$

練習
11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めるよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}\alpha + 1$$

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(a_n - \frac{3}{4}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_n = a_n - \frac{3}{4} \text{ とすると } \textcircled{1} \text{ は}$$

$$b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$$

$$\text{また, } b_1 = a_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b_n は 初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列なのが..

$$b_n = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{ここで } b_n = a_n - \frac{3}{4} \text{ ①}$$

$$a_n = b_n + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \text{ ①}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$

$\{a_n\}$ の極限は $\frac{3}{4}$

・無限級数 … 無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ の各項を「負に + て」結んだ式

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ のこと、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とも書ける。

・部分和 … $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ のこと。無限級数における初項から第 n 項までの和
部分和 S_n を第 n 項として新たに無限数列 $\{S_n\}$ をつくる。

$\{S_n\}$ は $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ であり

無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ と書くことができ

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ は S に収束する。

無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ の部分和 S_n から作られる

無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき、この無限級数の和は S である。

無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ も発散する

次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} + \cdots$$

(1)

第n項まで"の部分和を δ_n とすると

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

よってこの無限級数は収束し、その和は $\frac{1}{2}$

(2) 第n項まで"の部分和を δ_n とすると

$$\begin{aligned}\delta_n &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \cdots + \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2n+1}}{2} = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} = \infty\end{aligned}$$

よってこの無限級数は発散する

・無限等比級数 … 初項 a , 公比 r の等比数列から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束, 発散
は, 次のようになる。

$a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば収束し, その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geq 1$ ならば発散する。

$a = 0$ のとき 収束し, その和は 0 である。

練習
13 次のような無限等比級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和
を求める。

(1) 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$

(2) 初項 $\sqrt{2}$, 公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots$

(4) $(\sqrt{2} + 1) + 1 + (\sqrt{2} - 1) + \dots$

(1) 公比 $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ なので収束 (2) 公比 $-\sqrt{2} \geq 1$ なので発散

和は $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

(3) 初項 1, 公比 $-\frac{1}{3}$ である。

公比 $-\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ なので収束

和は $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$

(4) 初項 $\sqrt{2} + 1$, 公比 $\sqrt{2} - 1$ である。

公比 $|\sqrt{2} - 1| < 1$ なので収束

和は $\frac{\sqrt{2} + 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2 + \sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めるよ。

$$(1) \quad 1 + (2-x) + (2-x)^2 + \dots \quad (2) \quad x + x(2-x) + x(2-x)^2 + \dots$$

(1)

初項 1 , 公比 $2-x$ なので

この無限等比級数が収束するのは

$$|2-x| < 1 \text{ より}$$

$$-1 < 2-x < 1$$

$$-1-2 < 2-x-2 < 1-2$$

$$-3 < -x < -1$$

$$1 < x < 3$$

(2)

初項 x 公比 $2-x$ なので

この無限等比級数が収束するのは

$$x = 0 \text{ または } |2-x| < 1$$

$$|2-x| < 1 \text{ より}$$

$$-1 < 2-x < 1$$

$$-1-2 < 2-x-2 < 1-2$$

$$-3 < -x < -1$$

$$1 < x < 3$$

$$\therefore x = 0 \text{ または } 1 < x < 3$$

練習
15 数直線上で、点Pが原点Oから正の向きに1だけ進み、そこから負の

向きに $\frac{1}{2^2}$ 、そこから正の向きに $\frac{1}{2^4}$ 、そこから負の向きに $\frac{1}{2^6}$ と進む。

以下、このような運動を限りなく続けるとき、点Pが近づいていく点の座標を求めよ。

これは初項1、公比 $\left(-\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}$ の無限等比級数

公比 $\left|-\frac{1}{2^2}\right| < 1$ なので収束

和は
$$\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2^2}\right)} = \frac{4}{5}$$

点Pが近づいていく座標は $\frac{4}{5}$

練習
16 次の循環小数を分数で表せ。

(1) 0.6

(2) 0.234

(3) 0.4702

(1) $0.\dot{6} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots$

初項 0.6 公比 0.1 の無限等比級数

公比 $|0.1| < 1$ なので収束

$$0.\dot{6} = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{2}{3}$$

(2) $0.2\dot{3}4 = 0.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 + \dots$

第2項目以降は初項 0.034 公比 0.01 の無限等比級数

公比 $|0.01| < 1$ なので収束

$$0.2\dot{3}4 = 0.2 + \frac{0.034}{1 - 0.01} = \frac{232}{990} = \frac{116}{495}$$

(3) $0.4\dot{7}02 = 0.4 + 0.0702 + 0.0000702 + \dots$

第2項目以降は初項 0.0702 公比 0.001 の無限等比級数

公比 $|0.001| < 1$ なので収束

$$0.4\dot{7}02 = 0.4 + \frac{0.0702}{1 - 0.001} = \frac{4698}{9990} = \frac{87}{185}$$

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とする。

$$1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS \quad \text{ただし, } k \text{ は定数}$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$$

練習

17

次の無限級数の和を求めよ。

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right)$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ は初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

$$\text{公比 } \left| \frac{1}{4} \right| < 1 \text{ により収束し, その和は } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ は初項 $\frac{2}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

$$\text{公比 } \left| \frac{1}{3} \right| < 1 \text{ により収束し, その和は } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数

$$\text{公比 } \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ により収束し, その和は } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ は初項 $\frac{3}{4}$, 公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数

$$\text{公比 } \left| \frac{3}{4} \right| < 1 \text{ により収束し, その和は } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} = 1 - 3 = \underline{\underline{-2}}$$

1 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない \Rightarrow 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

練習
18

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$ は発散することを示せ。

第n項を a_n とすると

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき a_n は振動して極限はない。

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ なのでこの無限級数は発散する。

関数の木立限

・木立限値(木立限)…一般に関数 $f(x)$ において x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき

$f(x)$ が限りなく近づく一定の値 α

$x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ は収束する。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ または $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ とかく

関数の極限の性質(1)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

1 $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k\alpha$ ただし, k は定数

2 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

4 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ただし, $\beta \neq 0$

a が関数 $f(x)$ の定義域内の値であるとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{が成立。}$$

練習
19

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x}$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -2$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x-3)(x+2) = (-2-3)(-2+2) = 0$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{0+1}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}$$

練習
20次の極限を求めよ。ただし、(3)の a は 0 でない定数とする。

(1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right)$

(1)
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6$$

(2)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x-2} = -3$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{a+x}{a(a+x)} - \frac{a}{a(a+x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{a(a+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a(a+x)} = \frac{1}{a^2}$$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)$$

$$= \sqrt{4} + 2$$

$$= 4$$

次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} + b}{x} = 1$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 2} = -1 \cdots ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ なので } \\ \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x} + b) = 0 \text{ が成立}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x} + b) = 0$$

$$\sqrt{2}a + b = 0$$

$$b = -\sqrt{2}a \cdots ②$$

②を①に代入

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x} - \sqrt{2}a}{x - 2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x - 2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x - 2)(x + \sqrt{2})} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = -1$$

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = -1$$

$$a = -2\sqrt{2}$$

$a = -2\sqrt{2}$ を②に代入すると

$$b = -\sqrt{2}a = -\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = 4$$

$$a = -2\sqrt{2}, b = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} + b}{x} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ たゞので''}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a\sqrt{x+4} + b) = 0$$

$$2a + b = 0$$

$$b = -2a \quad \dots \textcircled{2}$$

② ① 1: 代入

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4} - 2a}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\sqrt{x+4} - 2)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{x+4} + 2} = 1$$

$$\frac{a}{4} = 1$$

$$a = 4$$

$$a = 4 \text{ ② 1: 代入}$$

$$b = -2 \times 4 = -8$$

$$a = 4 \quad b = -8$$

・正の無限大に発散 … 関数 $f(x)$ が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ の値が限りなく大きくなること。

$x \rightarrow a$ のときの木極限は ∞

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ または } x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \infty \text{ とかく}$$

・負の無限大に発散 … 関数 $f(x)$ が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ の値が負で限りなく大きくなること。

$x \rightarrow a$ のときの木極限は $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ または } x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow -\infty \text{ とかく}$$

※ 木極限が ∞ または $-\infty$ のときこれらを木極限値とはいわない。

練習 次の極限を求めよ。

23

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} \right\} = -\infty$$

・右側極限 ... $x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が限りなく近づく一定の値 α

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \text{ とかく.}$$

・左側極限 ... $x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が限りなく近づく一定の値 β

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta \text{ とかく.}$$

$a = 0$ のとき

$$\left. \begin{array}{l} \text{右側極限は } \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \alpha \\ \text{左側極限は } \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \beta \end{array} \right\} \text{とかく.}$$

また, 関数 $f(x)$ について以下が成立.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} -(x+1) = -2 \end{aligned}$$

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x)$

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right\} = \infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} \right) = \infty$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{4x+3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3x+2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2+4}{2x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{4}{x^2}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{5}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 1}{3 + \frac{2}{x}} = -\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x)$

(1)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1}$$

$$= 1$$

(2) $x = -t$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4 \cdot (-t)^2 + 2 \cdot (-t)} + 2 \cdot (-t) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t)(\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t)}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 - 2t - 4t^2}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{t \left(\sqrt{4 - \frac{2}{t}} + 2 \right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{4 - \frac{2}{t}} + 2} = -\frac{1}{2}$$

・指数関数の木立限

$a > 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

・対数関数の木立限

$a > 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

$0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$$

練習

29

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x$ (4) $\lim_{x \rightarrow +0} \log_{0.5} x$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_{0.5} x = \infty$$

練習

30

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-2x}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2}$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x} = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-2x} = \infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \log_2 4 = 2$$

三角関数の極限

- $\sin x$ と $\cos x$ は周期関数なので、 2π ごとに同じ値をくり返す。
 $x \rightarrow \infty$ のとき一定の値に近づくことがないため、 $x \rightarrow \infty$ のとき $\sin x$ と $\cos x$ の極限はない。
- $\tan x$ については次のことがいえる。

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty \quad \because x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$
 のとき $\tan x$ の極限はない。

練習
31

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = 0$$

関数の極限の性質(2)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

5 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

6 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

練習

32

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$$

(1)

$$0 \leq |\cos \frac{1}{x}| \leq 1 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq |x| |\cos \frac{1}{x}| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| |\cos \frac{1}{x}| \leq 0 \text{ なので} \quad (\text{F})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

(2)

$$0 \leq |\sin x| \leq 1 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 0 \text{ なので} \quad (\text{F})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

(3)

$$0 \leq |\cos x| \leq 1 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad (\text{F})$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|\cos x|}{|x|} \leq 0 \text{ なので} \quad (\text{F})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$\frac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

練習
33

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

練習
34

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot \{-(\cos x + 1)\} \right] = -2 \end{aligned}$$

応用例題 8において、弧 AB の長さを \widehat{AB} で表すとき、

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2}$$
 を求めよ。

$$CD = OC - OD$$

OC は円の半径なので $OC = 1$

$\triangle OBD$ について OB は円の半径なので $OB = 1$



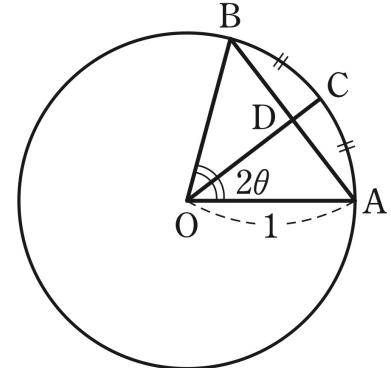
$$\text{左図より } \frac{OD}{OB} = \cos \theta$$

$$OD = OB \cos \theta = \cos \theta$$

$$\therefore CD = OC - OD = 1 - \cos \theta$$

$$\widehat{AB} = 2 \times (\text{半径}) \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{2\pi} = 2 \times 1 \times \pi \times \frac{2\theta}{2\pi} = 2\theta$$

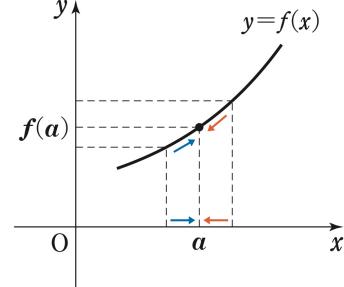
$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{4\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{4(1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$



関数の連続性

x の多項式で表された関数 $f(x)$ について 定義域内の値 a に対して以下が成立

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



連続壳である… 関数 $f(x)$ について 定義域内の値 $x=a$ に対して

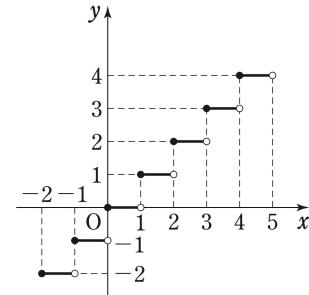
極限値 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき

$y = f(x)$ のグラフは $x=a$ でつながっている。 $(x=a$ でつながっていない → 不連続)

カウス記号 … x をこえない最大の整数を表す。 $[x]$ と表記する。

(例) $[1.5] = 1$, $[-1.5] = -2$

$f(x) = [x]$ としたときのグラフは右図



練習 次の関数 $f(x)$ が、 $x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

36

- (1) $f(x) = x[x]$ (2) $f(x) = (x+1)[x]$ (3) $f(x) = \sqrt{x}$

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x \geq 0$

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

ここで $x \rightarrow 0$ のとき

極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

したがって

$f(x) = \sqrt{x}$ は $x=0$ で連続

ここで $x \rightarrow 0$ のとき

極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

したがって

$f(x) = x[x]$ は $x=0$ で連続

ここで $x \rightarrow 0$ のとき極限はない
したがって

$f(x) = (x+1)[x]$ は $x=0$ で不連続

区間における連続

- 区間…不等式 $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x$, $x < b$ などをみたす実数 x 全体の集合

$$a < x < b \rightarrow (\underline{a}, \underline{b}), \quad a \leq x \leq b \rightarrow [\underline{a}, \underline{b}], \quad a \leq x \rightarrow [a, \infty), \quad x < b \rightarrow (-\infty, b)$$

開区間

閉区間

- 区間で連続…関数 $f(x)$ がある区間のすべての x で連続

- 連続関数…定義域内のすべての x の値で連続な関数

練習
37

次の関数が連続である区間を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{1-x}$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

- (1) 定義域は $x \leq 1$ ので

$$(-\infty, 1]$$

(2)

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

実数全体のうち $x=1, x=2$ を除いた 3 つの区間

$(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$ のそれぞれで連続

連続関数の性質

閉区間で連続な関数には、次のような性質がある。

閉区間で連続な関数は、その区間で最大値および最小値をもつ。

練習

38

次の区間における関数 $f(x) = \cos x$ の最大値、最小値について調べよ。

(1) $[0, \pi]$

(2) $[-\pi, \pi]$

$$(1) f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$(2) f(x) = \cos x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$x = \pi$ のとき 最小値 -1

$x = 0$ のとき 最大値 1

$x = \pm \pi$ のとき 最小値 -1

$x = 0$ のとき 最大値 1

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して

$$f(c) = k, \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つある。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば、方程式 $f(x)=0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

練習

39

方程式 $2^x - 3x = 0$ は、 $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

$f(x) = 2^x - 3x$ とすると $f(x)$ は閉区間 $[3, 4]$ で連続

$$f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1 < 0$$

$$f(4) = 2^4 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4 > 0$$

よって方程式 $f(x) = 0$ 、つまり $2^x - 3x = 0$ は

$3 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ