

# 数Ⅱ

---

複素数と方程式

---

---

---



# 複素数

2乗したら-1になる数を文字*i*とする.  $\Rightarrow i^2 = -1$

(*i*を虚数単位という)

*a*と*b*は実数とする

$$\begin{array}{c} \underline{a} + \underline{b}i \\ \text{実部} \quad \text{虚部} \end{array}$$

・  $a \neq 0, b \neq 0$  のとき  $a+bi$  (虚数)

・  $a=0, b \neq 0$  のとき  $bi$  (純虚数)

・  $a \neq 0, b=0$  のとき  $a$  (実数)

練習

1

次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1)  $-3+5i$     (2)  $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(3) 1    (4)  $-i$

	(1)	(2)	(3)	(4)
実	-3	$-\frac{1}{2}$	1	0
虚	5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1

## 複素数の相当

2つの複素数が等しいのは実部、虚部が一致するとき

$a, b, c, d$  は実数とする

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{かつ} b = d$$

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{かつ} b = 0$$

練習

- 2 次の等式を満たす実数  $x, y$  の値を求めよ。  
(1)  $(x-2y)+(x+3)i = 2-i$     (2)  $(2x+y)+(x-y+3)i = 0$

$$\begin{cases} x-2y=2 & \cdots ① \\ x+3=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

②より  $x = -4$  なので

①より  $y = -3$

$$\underline{x = -4, y = -3}$$

$$\begin{cases} 2x+y=0 & \cdots ① \\ x-y+3=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①②を連立すると

$$\begin{array}{r} x = -1, y = 2 \\ \hline \end{array}$$

# 複素数の計算

加法・減法は複素数の実部同士・虚部同士で計算

乗法は分配律・乗法公式を利用。 $i^2 = -1$ も忘れずに

練習  
3

次の式を計算せよ。

(1)  $(2+3i)+(4+i)$   
(3)  $(6+4i)-(3+2i)$

(2)  $(-1+2i)+(3-4i)$   
(4)  $(2-3i)-(4-2i)$

(1)  $6+4i$

(2)  $2-2i$

(3)  $3+2i$

(4)  $-2-i$

練習  
4

次の式を計算せよ。

(1)  $(1+2i)(4+3i)$   
(3)  $(2+3i)^2$

(2)  $(2-i)(3+4i)$   
(4)  $(3+4i)(3-4i)$

(1)  $(1+2i)(4+3i) = 4+3i+8i+6i^2 = -2+11i$

(2)  $(2-i)(3+4i) = 6+8i-3i-4i^2 = 10+5i$

(3)  $(2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = -5+12i$

(4)  $(3+4i)(3-4i) = 9-16i^2 = 25$

## 共役な複素数

2つの複素数、 $a+bi$ と $a-bi$ のように虚部の符号だけがうつる複素数

実数 $a$ と共役な複素数は $a$  ( $a+0i, a-0i$ )

練習

5

次の複素数と共役な複素数をいえ。

(1)  $2+3i$     (2)  $1-i$     (3)  $\sqrt{3}i$     (4)  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$     (5)  $-4$

(1)  $2-3i$     (2)  $1+i$     (3)  $-\sqrt{3}i$     (4)  $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$     (5)  $-4$

# 複素数の計算

除法は分母と共役な複素数を分母と分子にかける。 $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$  を利用

練習  
6

次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{1+2i}{2+3i}$$

$$(2) \frac{1-i}{1+i}$$

$$(3) \frac{5i}{2-i}$$

$$(1) \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{4-9i^2} = \frac{8+i}{13}$$

$$(2) \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$(3) \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10i+5i^2}{4-i^2} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

# 負の数の平方根

$$a > 0 のとき \sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{i^2 \cdot a} = \sqrt{a} i$$

$$i < 1 = \sqrt{-1} = i$$

-a の平方根は  $\pm\sqrt{-a}$  . すなわち  $\pm\sqrt{a} i$

練習

7

次の数を  $i$  を用いて表せ。

(1)  $\sqrt{-5}$

(2)  $\sqrt{-9}$

(3) -18 の平方根

(1)  $\sqrt{-5} = \sqrt{5} i$

(2)  $\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$

(3)  $\pm\sqrt{-18} = \pm\sqrt{18} i = \pm 3\sqrt{2} i$

練習

8

次の式を計算せよ。

(1)  $\sqrt{-2}\sqrt{-6} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{6}i = \sqrt{12}i^2 = -2\sqrt{3}$

(2)  $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{3}i}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)  $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}} = 2i$

(4)  $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}i} = \frac{3}{i} = \frac{3i}{i \times i} = -3i$

## 2次方程式の解

複素数の範囲では負の数にも平方根が存在する。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解の公式は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

練習  
9

次の2次方程式を解け。

(1)  $x^2 = -1$

(2)  $x^2 = -8$

(1)  $x^2 = -1$

(2)  $x^2 = -8$

$$x = \pm \sqrt{-1}$$

$$x = \pm \sqrt{-8}$$

$$x = \pm i$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}i$$

練習  
10

次の2次方程式を解け。

(1)  $x^2 + 3x + 4 = 0$

(3)  $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$

(2)  $3x^2 - 4x + 2 = 0$

(4)  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

(1)  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$

(2)  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$

(3)  $x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \times 1} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2i}{2}$

(4)  $x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$

## 2次方程式の解の判別式

$ax^2 + bx + c = 0$  の判別式を D とすると

$$D = b^2 - 4ac$$

- ・  $D > 0$  のとき 異なる 2 つの実数解
- ・  $D = 0$  のとき 重解
- ・  $D < 0$  のとき 異なる 2 つの虚数解 (実数解なし)
- ・  $D \geq 0$  のとき 実数解をもつ

練習  
11 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)  $x^2 + 5x + 5 = 0$

(3)  $-4x^2 + x - 1 = 0$

(2)  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

(4)  $3x^2 - 4\sqrt{6}x + 8 = 0$

判別式をDとする

(1)  $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$   
 $= 25 - 20 = 5$

(2)  $D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$   
 $= 12 - 8 = 4$

$D > 0$  より

異なる2つの実数解

$D > 0$  より

異なる2つの実数解

練習  
12  $m$  は定数とする。次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

$$x^2 + (m+1)x + 1 = 0$$

判別式をDとすると

$$\begin{aligned} D &= (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = m^2 + 2m + 1 - 4 \\ &= m^2 + 2m - 3 \\ &= (m+3)(m-1) \end{aligned}$$

(5)  $D > 0$  つまり  $m < -3, 1 < m$  のとき

異なる2つの実数解

(3)  $D = 1^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)$   
 $= 1 - 16 = -15$

$D < 0$  より

異なる2つの虚数解

(4)  $D = (-4\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8$   
 $= 96 - 96 = 0$

重解

(6)  $D = 0$  つまり  $m = -3, 1$  のとき

重角解

(7)  $D < 0$  つまり  $-3 < m < 1$  のとき

異なる2つの虚数解

# 解と係数の関係

2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とするとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \beta = \frac{c}{a}$$

- 練習 13 次の 2 次方程式について、2つの解の和と積を求めよ。
- (1)  $x^2+4x+2=0$       (2)  $3x^2-6x-4=0$

(1)

$$\text{和 } -\frac{4}{1} = -4$$

$$\text{積 } \frac{2}{1} = 2$$

(2)

$$\text{和 } -\frac{(-6)}{3} = 2$$

$$\text{積 } -\frac{4}{3}$$

練習  
14

- 2 次方程式  $x^2+3x-1=0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\alpha^2+\beta^2$       (2)  $\alpha^3+\beta^3$       (3)  $(\alpha-\beta)^2$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{1} = -3, \quad \alpha \beta = -\frac{1}{1} = -1$$

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-3)^2 - 2(-1) = 11$$

$$(2) \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = -3 \{ 11 - (-1) \} = -36$$

$$(3) \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 11 - (-2) \cdot (-1) = 13$$

練習  
15 2次方程式  $x^2 + 5x + m = 0$  の2つの解が次の条件を満たすとき、定数  $m$  の値と2つの解を、それぞれ求めよ。

- (1) 1つの解が他の解の4倍である。 (2) 2つの解の差が1である。

(1) 2解を  $\alpha, \beta$  とすると 1つの解が他の解の4倍なので

$$\beta = 4\alpha$$

$x^2 + 5x + m = 0$  について解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = m$$

$\beta = 4\alpha$  を  $\alpha + \beta = -5$  に代入すると

$$\alpha + 4\alpha = -5$$

$$5\alpha = -5$$

$$\alpha = -1$$

$$\alpha = -1 \text{ より } \alpha + \beta = -5 \text{ から } \beta = -4$$

$$m = \alpha\beta$$

$$m = (-1) \cdot (-4) = 4$$

$m$  の値は 4

2解は  $-1$  と  $-4$

(2) 2解を  $\alpha, \beta$  とすると 2解の差が 1 なので

$$\alpha - \beta = 1 \Rightarrow \beta = \alpha - 1$$

$x^2 + 5x + m = 0$  について解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = m$$

$\beta = \alpha - 1$  を  $\alpha + \beta = -5$  に代入すると

$$\alpha + (\alpha - 1) = -5$$

$$2\alpha = -4$$

$$\alpha = -2$$

$$\alpha = -2 \text{ より } \beta = \alpha - 1 \text{ から } \beta = -3$$

$$m = \alpha\beta \text{ なり } m = (-2) \cdot (-3) = 6$$

$m$  の値は 6

2つの解は  $-2$  と  $-3$

# 2次式の因数分解

## 2次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とするとき

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

複素数の範囲で因数分解

→ すべての因数を1次式にする。

練習

16

次の2次式を、複素数の範囲で因数分解せよ。

- (1)  $x^2 - 3x - 2$       (2)  $2x^2 - 2x - 3$       (3)  $x^2 + 4x + 6$

(1)  $x^2 - 3x - 2 = 0$  として

解の公式より

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left( x - \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right) \left( x - \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right)$$

(2)  $2x^2 - 2x - 3 = 0$  として

解の公式より

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2 \left( x - \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \left( x - \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$$

(3)  $x^2 + 4x + 6 = 0$  として

解の公式より

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = -2 \pm \sqrt{2} i$$

$$\left\{ x - (-2 + \sqrt{2} i) \right\} \left\{ x - (-2 - \sqrt{2} i) \right\}$$

2数  $\alpha, \beta$  を解とする2次方程式は

$$\alpha(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \quad (\alpha \neq 0)$$

とくに  $\alpha = 1$  のとき 2数  $\alpha, \beta$  を2解とする2次方程式の1つは

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

練習

17

次の2数を解とする2次方程式を1つ作れ。

- (1) 2, -1      (2)  $2+\sqrt{3}$ ,  $2-\sqrt{3}$       (3)  $1+2i$ ,  $1-2i$

$$(1) (x-2)(x+1) \quad (2) \left\{ x - (2+\sqrt{3}) \right\} \left\{ x - (2-\sqrt{3}) \right\} \quad (3) \left\{ x - (1+2i) \right\} \left\{ x - (1-2i) \right\}$$

$$= x^2 - x - 2$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

$$= x^2 - 2x + 5$$

$$\underline{x^2 - x - 2 = 0} +$$

$$\underline{x^2 - 4x + 1 = 0} +$$

$$\underline{x^2 - 2x + 5 = 0} +$$

和と積が次のようになる 2 数を求める。

(1) 和が  $-2$ , 積が  $6$

(2) 和と積がともに  $3$

2 数を  $\alpha, \beta$  とする

(1)  $\alpha + \beta = -2$

$\alpha \beta = 6$  より

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5} i$$

(2)  $\alpha + \beta = 3$

$\alpha \beta = 3$  より

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3} i}{2}$$

2 次方程式  $x^2 - 3x - 1 = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき、次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

(1)  $1 - \alpha, 1 - \beta$

(2)  $\alpha^2, \beta^2$

$x^2 - 3x - 1 = 0$  (について解と係数の関係より)

$$\alpha + \beta = 3, \alpha \beta = -1$$

(1)  $\{x - (1 - \alpha)\}\{x - (1 - \beta)\} = 0$

$$x^2 - \{-(\alpha + \beta) + 2\}x + \{1 - (\alpha + \beta) + \alpha \beta\} = 0$$

$$x^2 - (-3 + 2)x + (1 - 3 - 1) = 0$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

(2)  $(x - \alpha^2)(x - \beta^2) = 0$

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \beta\}x + (\alpha \beta)^2 = 0$$

$$x^2 - 11x + 1 = 0$$

## 2次方程式の実数解の符号

2つの実数  $\alpha, \beta$  について

①

$$(P) \alpha > 0 \text{かつ} \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(I) \alpha < 0 \text{かつ} \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(H) \begin{aligned} \alpha > 0 \text{かつ} \beta < 0 \\ \alpha < 0 \text{かつ} \beta > 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \alpha \beta < 0$$

②

$a\chi^2 + b\chi + c = 0$  の2解  $\alpha, \beta$  と判別式  $D$  について

$$(P) \alpha, \beta \text{ は異なる2つの正の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で} \alpha + \beta > 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(I) \alpha, \beta \text{ は異なる2つの負の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で} \alpha + \beta < 0 \text{かつ} \alpha \beta > 0$$

$$(H) \alpha, \beta \text{ は異符号の解} \Leftrightarrow \alpha \beta < 0$$

練習  
20 2次方程式  $x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0$  が、次のような解をもつとき、  
定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる2つの正の解      (2) 異なる2つの負の解  
(3) 正の解と負の解

$$x^2 + 2(m-3)x + 4m = 0 \text{ について}$$

判別式を  $D$  とすると

$$D = \{2(m-3)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4m = 4(m-1)(m-9)$$

(1)  $D > 0$  かつ  $\alpha + \beta > 0$  かつ  $\alpha\beta > 0$

$$D > 0 \text{ は } 4(m-1)(m-9) > 0$$

$$m < 1, 9 < m \cdots ①$$

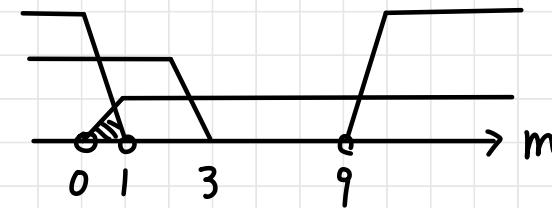
$$\alpha + \beta > 0 \text{ は } -2(m-3) > 0$$

$$m < 3 \cdots ②$$

$$\alpha\beta > 0 \text{ は } 4m > 0$$

$$m > 0 \cdots ③$$

① ② ③ より



$$0 < m < 1$$

$$(2) D > 0 \text{ で } \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha \beta > 0 \quad (3) \alpha \beta < 0 \text{ で }$$

$$D > 0 \text{ で } 4(m-1)(m-9) > 0$$

$$m < 1, 9 < m \dots \textcircled{1}$$

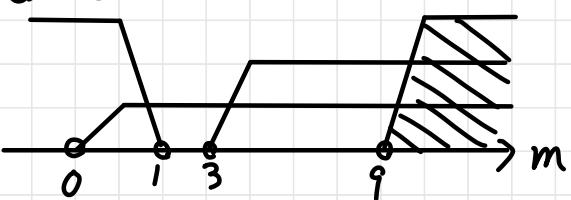
$$4m < 0$$

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta < 0 \\ -2(m-3) < 0 \\ m > 3 \end{array} \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \beta > 0 \\ 4m > 0 \\ m > 0 \end{array} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\alpha \beta > 0 \text{ で}}{m > 0}$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{ で}$



$$\frac{q < m}{\rightarrow}$$

多項式  $P(x)$  を 1 次式  $(x - k)$  で割った商を  $Q(x)$ 、余りを  $R$  とすると

$$P(x) = (x - k) Q(x) + R$$

(割られる数) = (割る数) × 商 + 余り (余りは割る数よりも高くても次数が 1 つさい式)

### 剰余の定理

多項式  $P(x)$  を 1 次式  $x - k$  で割った余りは  $P(k)$  となる

練習 21  $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$  を次の 1 次式で割った余りを求めよ。

(1)  $x - 1$

(2)  $x + 1$

(3)  $x + 2$

練習 22 次のことを見せ。

多項式  $P(x)$  を 1 次式  $ax + b$  で割った余りは、 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$  に等しい。

(1)  $P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = -3$

商を  $Q(x)$ 、余りを  $C$  とすると

$$P(x) = (ax + b) Q(x) + C$$

(2)  $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = 1$

(3)  $P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 2 = 0$

多項式  $P(x) = 2x^3 + 5ax^2 + ax + 1$  を  $x+1$  で割った余りが  $-5$  であるとき、定数  $a$  の値を求めよ。

$$x+1 \text{ で割った余りが } -5 \rightarrow P(-1) = -5$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 5a \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + 1 = -5$$

$$-2 + 5a - a + 1 = -5$$

$$4a = -4$$

$$\underline{a = -1}$$

多項式  $P(x)$  を  $x-3$  で割った余りが  $1$ 、 $x+1$  で割った余りが  $5$  である。 $P(x)$  を  $(x-3)(x+1)$  で割った余りを求めよ。

$$x-3 \text{ で割った余りが } 1 \Rightarrow P(3) = 1$$

$$x+1 \text{ で割った余りが } 5 \Rightarrow P(-1) = 5$$

$P(x)$  を  $(x-3)(x+1)$  で割ったときの

商を  $Q(x)$ 、余りを  $ax+b$  とすると

$$P(x) = (x-3)(x+1)Q(x) + ax+b$$

$$P(3) = 1 \text{ より}$$

$$P(3) = 3a + b = 1 \cdots ①$$

$$P(-1) = 5 \text{ より}$$

$$P(-1) = -a + b = 5 \cdots ②$$

①②を連立させて解くと

$$a = -1, b = 4$$

よって  $P(x)$  を  $(x-3)(x+1)$  で割った余りは  $-x+4$

# 因数定理

多項式  $P(x)$  が 1 次式  $x - k$  を因数にもつ  $\Leftrightarrow P(k) = 0$

練習  
25

次の 1 次式のうち、多項式  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  の因数であるものはどれか。

- ①  $x - 1$     ②  $x + 1$     ③  $x - 2$     ④  $x + 2$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \text{ とする。}$$

因数は  $P(a) = 0$  となる  $x - a$

①  $P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -8$

$P(1) \neq 0$  より  $x - 1$  は因数ではない

②  $P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$

$P(-1) = 0$  より  $x + 1$  は因数

③  $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$

$P(2) = 0$  より  $x - 2$  は因数

④  $P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6 = 4$

$P(-2) \neq 0$  より  $x + 2$  は因数でない

② ③

練習  
26

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$     (2)  $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

(3)  $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

(1)  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  とする

$P(1) = 0$  より  $P(x)$  は  $x - 1$  を因数にもつので

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8) = (x-1)(x-4)(x+2)$$

(2)  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$  とする。

$P(-1) = 0$  より  $P(x)$  は  $x + 1$  を因数にもつので

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 9) = (x+1)(x-3)^2$$

(3)  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$  とする。

$P(2) = 0$  より  $P(x)$  は  $x - 2$  を因数にもつので

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 7x + 3) = (x-1)(2x+1)(x+3)$$

# 組立除法

$x^3 - 4x^2 + x + 6$  を  $x+1$  で割った商と余り

$x^3 \quad x^2 \quad x \quad \text{定}$  ↗(割る式)=0となるxの値

$$\begin{array}{r}
 (\text{係数}) \quad 1 \quad -4 \quad 1 \quad 6 \quad | -1 \\
 \underline{-1} \quad 5 \quad -6 \\
 \hline
 1 \quad -5 \quad 6 \quad 0 \\
 \end{array}$$

$x(-1) \rightarrow$   $x(-1) \rightarrow$   $x(-1) \rightarrow$

$x^2 \quad x \quad \text{定} \quad \text{余}$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6) + 0$$

よって  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  を  $x+1$  で割ったときの  
商  $x^2 - 5x + 6$  余り 0

練習  
1

$x^3 - 4x^2 + 3$  を  $x-1$  で割った商と余りを求めよ。

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad x^2 \quad x \quad \text{定} \quad | \quad \text{商 } x^2 - 3x - 3 \\
 \text{係数} \quad 1 \quad -4 \quad 0 \quad 3 \\
 \underline{1} \quad -3 \quad -3 \\
 \hline
 1 \quad -3 \quad -3 \quad 0 \\
 \end{array}$$

余り 0

# 高次方程式

(左辺) = 0 の左辺を因数分解し、各因数 = 0 とおいたときにでる文字の値が解。

練習

27

次の 3 次方程式を解け。

$$(1) \quad x^3 - 8 = 0$$

$$(2) \quad x^3 + 1 = 0$$

$$(1) \quad (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x-2 = 0 \quad \text{より} \quad x = 2$$

$$x^2+2x+4 = 0 \quad \text{より} \quad \text{解の公式から}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} : \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

よって  $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

$$(2) \quad (x+1)(x^2-x+1) = 0$$

$$x+1 = 0 \quad \text{より} \quad x = -1$$

$$x^2-x+1 = 0 \quad \text{より} \quad \text{解の公式から}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} : \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

よって  $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

次の4次方程式を解け。

$$(1) \quad x^4 + x^2 - 20 = 0$$

$$(2) \quad x^4 - 1 = 0$$

(1)

$$(x^2 + 5)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ または } x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{5}, \pm 2$$

---

(2)

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ または } x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1, \pm i$$

---

次の3次方程式を解け。

(1)  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

(3)  ~~$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$~~

(2)  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

(4)  ~~$2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$~~

(1)

$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$  とする

$P(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$  より

 $P(x)$  は  $x-1$  を因数にもつ

$P(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6) = 0$

$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$

$\underline{\underline{x = 1, -2, -3}}$

(2)

$P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$  とする

$P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2 = 0$  より

 $P(x)$  は  $x+1$  を因数にもつ

$P(x) = (x+1)(x^2 + 3x + 2) = 0$

$(x+1)(x+1)(x+2) = 0$

$(x+1)^2(x+2) = 0$

$\underline{\underline{x = -1, -2}}$

次の3次方程式を解け。

(1)  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

(2)  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$

(3)  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

(4)  $2x^3 - 3x^2 - 4 = 0$

(3)

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  とする

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$  より

$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$x-1=0$  より  $x=1$

 $x^2 - 2x - 2 = 0$  より 解の公式から

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$\underline{\underline{x = 1, 1 \pm \sqrt{3}}}$

(4)

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$  とする

$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0$  より

$P(x) = (x-2)(2x^2 + x + 2) = 0$

$x-2=0$  より  $x=2$

 $2x^2 + x + 2 = 0$  より 解の公式から

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$

$\underline{\underline{x = 2, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}}}$

### 3次方程式の解と係数の関係

$a\chi^3 + b\chi^2 + c\chi + d = 0$  の 3 解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とする

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

練習  
1

3 次方程式  $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$  の 3 つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次  
の式の値を求めよ。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2)  $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ について解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad \alpha\beta\gamma = -2$$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$$

$$\underline{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 7}$$

$$(2) (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1$$
$$= -2 + 1 + 3 + 1 = 3$$

$$\underline{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 3}$$

$a, b$  は実数とする。3次方程式  $x^3 + x^2 + ax + b = 0$  が  $1+i$  を解にもつとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

$1+i$  が解なので  $1-i$  も解となる。

$x = 1+i$  を 3 次方程式に代入

$$(1+i)^3 + (1+i)^2 + a(1+i) + b = 0$$

$$(1+3i+3i^2+i^3) + (1+2i+i^2) + a+ai+b = 0$$

$$(1+3i-3-i) + (1+2i-1) + a+ai+b = 0$$

$$-2+2i+2i+a+ai+b = 0$$

$$a+b-2+a i+4 i=0$$

$$(a+b-2)+(a+4)i=0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b-2=0 \cdots ① \\ a+4=0 \cdots ② \end{array} \right. \quad \text{①②より}$$

$$a=-4, b=6$$

## (教科書解法)

3次方程式は

$$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$$

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$  とすると

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 6 = 0 \text{ つまり}$$

$P(x)$  は  $x+3$  を因数にもつので

$$P(x) = (x+3)(x^2-2x+2) = 0 \text{ つまり}$$

$x = -3$  も解である。

$$a = -4, b = 6$$

他の解は  $1-i, 3$

$a, b$  は実数とする。3次方程式  $x^3 + x^2 + ax + b = 0$  が  $1+i$  を解に  
もつとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

## (解と係数の関係を利用)

$1+i$  が解なので  $1-i$  も解となる。

この3次方程式の他の解を  $\alpha$  とすると

3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha + (1+i) + (1-i) = -1 \cdots ①$$

$$\alpha(1+i) + (1+i)(1-i) + (1-i)\alpha = a \cdots ②$$

$$\alpha(1+i)(1-i) = -b \cdots ③$$

$$① \text{を解くと } \alpha = -3$$

$$\alpha = -3 \text{ を } ③ \text{ に代入}$$

$$-3(1+i) + (1+i)(1-i) + (1-i)(-3) = a$$

$$-3 - 3i + 1 - i^2 - 3 + 3i = a$$

$$-3 - 3i + 1 + 1 - 3 + 3i = a$$

$$a = -4$$

$$\alpha = -3 \text{ を } ③ \text{ に代入}$$

$$-3(1+i)(1-i) = -b$$

$$-3(-i^2) = -b$$

$$-b = -6$$

$$b = 6$$

$$\alpha = -4, b = 6, \text{他の解は } 1-i, -3$$


---