

# 数Ⅱ

---

指数関数 対数関数

---

---

---



# 指数関数

## 整数の指数

$m, n$ を正の整数とする

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$a \neq 0$  で  $n$ は正の整数とする

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

練習

1

次の値を求めよ。

- (1)  $4^0$     (2)  $(-5)^0$     (3)  $3^{-1}$     (4)  $10^{-2}$     (5)  $(-2)^{-3}$

$$(1) 4^0 = 1 \quad (2) (-5)^0 = 1 \quad (3) 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad (4) 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad (5) (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$$

## 指数法則

$a \neq 0, b \neq 0$   $\geq m, n$  は整数とする。

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

練習  
2

次の式を計算せよ。

$$(1) a^5 a^{-2}$$

$$(2) \frac{a^{-3}}{a^2}$$

$$(3) (a^{-4})^{-1}$$

$$(4) (a^{-2}b)^3$$

$$(1) a^5 a^{-2} = a^3$$

$$(2) \frac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3} \div a^2 = a^{-5} \left( = \frac{1}{a^5} \right)$$

$$(3) (a^{-4})^{-1} = a^4$$

$$(4) (a^{-2}b)^3 = a^{-6} b^3 \left( = \frac{b^3}{a^6} \right)$$

累乗根 …  $a$  の 2 乗根, 3 乗根, 4 乗根 … をまとめたもの

$n$  を正の整数とするととき,  $n$  乗すると  $a$  になる数を  $a$  の  $n$  乗根という.

$x^n = a$  の解が  $a$  の  $n$  乗根.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad x^n = a \quad x \text{ は } a \text{ の } n \text{ 乗根} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \quad (n \text{ 乗根 } a) \\ (\text{例}) \quad 2^3 = 8 \quad 2 \text{ は } 8 \text{ の } 3 \text{ 乗根} \Rightarrow \sqrt[3]{8} \quad (3 \text{ 乗根 } 8) \end{array} \right.$$

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$$

練習  
3

次の値を求めよ。

$$(1) \sqrt[3]{1}$$

$$(2) \sqrt[3]{27}$$

$$(3) \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

$$(1) \sqrt[3]{1} = 1$$

$$(2) \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$(3) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

## 累乗根の性質

$a > 0, b > 0$  で、 $m, n, p$  は正の整数とする。

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

練習  
4

次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8}$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$(3) (\sqrt[4]{5})^3$$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt{27}}$$

$$(1) \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$(3) (\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt{3}$$

# 有理 数の指數

$a > 0$  で  $m, n$  は正の整数、 $r$  は正の有理数とする。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{とくに} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

練習

5

次の値を求めよ。

$$(1) \ 9^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) \ 16^{\frac{3}{4}}$$

$$(3) \ 125^{-\frac{2}{3}}$$

$$(1) \ 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$(2) \ 16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = (\sqrt[4]{2^4})^3 = 2^3 = 8$$

$$(3) \ 125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{125})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{5^3})^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

# 指数法則 (指数が有理数)

$a > 0, b > 0$ ,  $r, s$  は有理数とする。

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad (ab)^r = a^r b^r$$

練習  
6

次の式を計算せよ。

$$(1) 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$$

$$(2) 3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(3) \sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5}$$

$$(4) \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$$

$$(1) 2^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{6}} = 2^{\frac{7}{3}} = 4$$

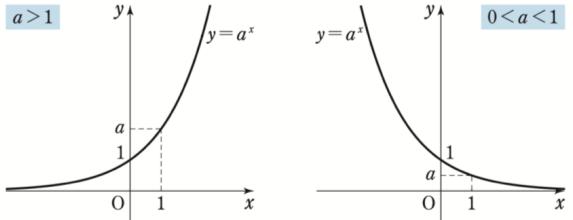
$$(2) 3^{\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = 3^0 = 1$$

$$(3) 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \div 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{5}$$

$$(4) 4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

# 指数関数 $y = a^x$ のグラフ



いずれの場合も、 $x$  軸を漸近線としてもち、点  $(0, 1)$ ,  $(1, a)$  を通る。  
 $a > 1$  のとき右上がりの曲線、 $0 < a < 1$  のとき右下がりの曲線である。

## 指数関数 $y = a^x$ の特徴

① 定義 $\pm$ 或は実数全体

②  $a > 1$  のとき 増加関数

$$p < q \Rightarrow a^p < a^q$$

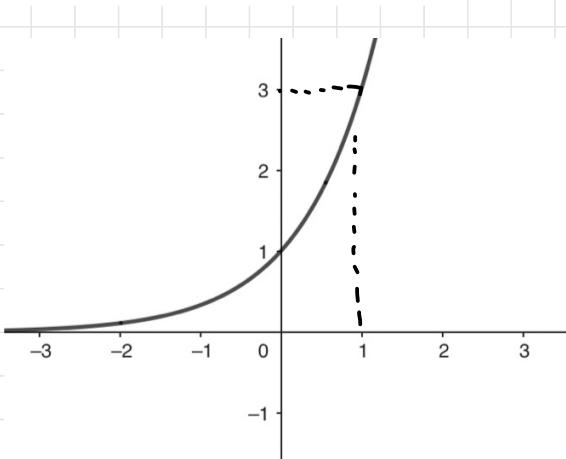
③  $0 < a < 1$  のとき 減少関数

$$p < q \Rightarrow a^p > a^q$$

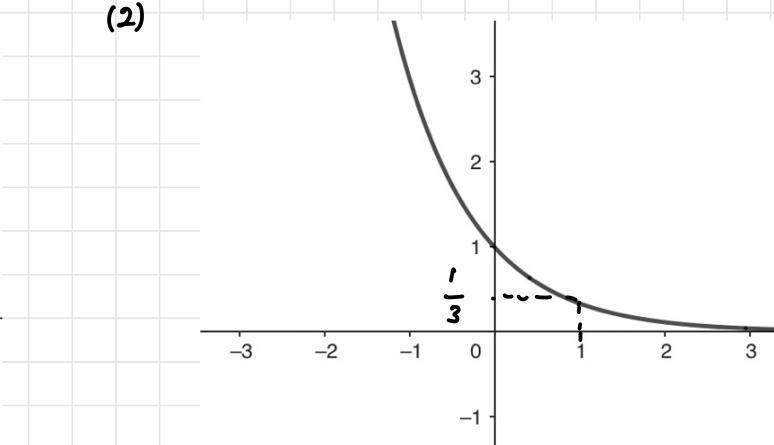
練習  
8

次の関数のグラフをかけ。

(1)  $y = 3^x$



(2)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{8}$$

$$(2) 1, 0.2^3, 0.2^{-1}$$

$$(1) \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{40}{60}}$$

$$(2) (0.2)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$$\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{45}{60}}$$

$$(0.2)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{36}{60}}$$

$$\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}$$


---

$$0.2^3 < 1 < 0.2^{-1}$$


---

# 指数関数を含む方程式・不等式

- ① 両辺の底を考える
- ② 両辺の指数部の方程式・不等式に書きかえる.

ここで“不等式の場合”  $\left\{ \begin{array}{l} \text{底 } a > 1 \text{ のとき不等号の向きはそのまま} \\ \text{底 } 0 < a < 1 \text{ のとき不等号の向きは変える} \end{array} \right.$

- ③ ②の方程式・不等式を解く.

次の方程式を解け。

(1)  $4^x = 8$

(2)  $8^x = \frac{1}{16}$

(3)  $27^x = 3^{2-x}$

(1)  $4^x = 8$

(2)  $8^x = \frac{1}{16}$

$2^{2x} = 2^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

(3)  $27^x = 3^{2-x}$

$3^{3x} = 3^{2-x}$

$3x = 2 - x$

$4x = 2$

$x = \frac{1}{2}$

次の不等式を解け。

(1)  $3^x < 81$

(2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32}$

(3)  $2^{3x-4} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$

(1)  $3^x < 81$

$3^x < 3^4$

$x < 4$

(2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$x \leq 5$

(3)  $2^{3x-4} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$2^{3x-4} > 2^{-2x}$

$3x - 4 > -2x$

$5x > 4$

$x > \frac{4}{5}$

次の方程式を解け。

(1)  $4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

(2)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

(1)  $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

$2^x = t$  とする。  $t > 0 \cdots ①$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$(t+3)(t-1) = 0$

$t = -3, 1$

①より  $t = 1$

$2^x = t$  より

$2^x = 1$

$x = 0$

(2)  $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$3^x = t$  とする  $t > 0 \cdots ①$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0$

$t = 1, 3$

②より  $t = 1, 3$

$3^x = t$  より

$3^x = 1, 3^x = 3$

$x = 0, x = 1$

$x = 0, 1$

---

次の不等式を解け。

(1)  $9^x + 3^x - 12 > 0$

(2)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0$

(1)  $(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$

$3^x = t$  とする  $t > 0 \cdots \textcircled{1}$

$t^2 + t - 12 > 0$

$(t+4)(t-3) > 0$

$t < -4, 3 < t \cdots \textcircled{2}$

①②より

$3 < t$

$3^x = t$  より

$3 < 3^x$

$1 < x$

(2)  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$  とする  $t > 0 \cdots \textcircled{1}$

$t^2 + 3t - 10 \leq 0$

$(t+5)(t-3) \leq 0$

$-5 \leq t \leq 3 \cdots \textcircled{2}$

①②より

$0 < t \leq 3$

$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x$  (= ついては  
すべての実数  $x$  において成立。)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2$  (= ついては

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x \geq -1$

$\therefore x \geq -1$

# 対数関数

対数…どんな正の数  $M$  に対して

$$M = a^P$$

となる実数  $P$  が“ただ”1つ定まる。

この  $M$  を  $\log_a M$  で表し  $a$  を底とする  $M$  の対数という。

また、 $\log_a M$  の正の数  $M$  を真数という。

$$\log_a M \quad (a \text{を底}, M \text{を真数}, M > 0)$$

## 指数と対数

$a > 0, a \neq 1$  で  $M > 0$  とするとき以下が成立

$$M = a^P \Leftrightarrow \log_a M = P$$

## 対数( $\log_a M$ )の補足説明

次の方程式を満たすxの値を求めよ.

$$\textcircled{1} \quad 2^x = 8$$

$$\textcircled{2} \quad 2^x = 3$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = \dots ?$$

↑ 整数値で“表すことができない”

$$x = 3$$

たゞか “ $2^x = 3$  を満たす  $x$  は存在するはず” ...

“=”

$\log_a M$  …  $a$ を何乗したら  $M$  になるかの意

の記号を用いて

$a^P = M$  を満たす  $P$  の値を書き表す.

(例)  $\log_2 8$  … 2を何乗したら 8 になるか  $\Rightarrow 3$

よって  $\log_2 8 = 3$  と書ける.

また、2を3乗したら 8 になるので “ $\log_2 8 = 3$ ” は  $2^3 = 8$  と書ける.

$a$ は底 ( $a > 0, a \neq 1$ )

$$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$$

$M$ は真数 ( $M > 0$ )

(例)  $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

練習

14

次の関係を  $\log_a M = p$  の形に書け。

(1)  $9 = 3^2$

(2)  $\frac{1}{25} = 5^{-2}$

(3)  $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

(1)  $\log_3 9 = 2$

(2)  $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

(3)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

練習

15

次の関係を  $M = a^p$  の形に書け。

(1)  $\log_4 16 = 2$

(2)  $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

(3)  $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

(1)  $16 = 4^2$

(2)  $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

(3)  $3 = 9^{\frac{1}{2}}$

$$\log_a a^P = P \quad \left( \begin{array}{l} \text{真数を底の} P \text{乗と書けるとき対数の値は} \\ \text{真数の指数の値に一致する。} \end{array} \right)$$

練習  
16

次の値を求めよ。

- (1)  $\log_2 2^5$
- (2)  $\log_5 25$
- (3)  $\log_3 \frac{1}{27}$
- (4)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
- (5)  $\log_{10} 0.1$
- (6)  $\log_{\frac{1}{3}} 3$
- (7)  $\log_2 \sqrt[3]{2}$
- (8)  $\log_{\sqrt{5}} 5$

$$(1) \log_2 2^5 = 5 \quad (2) \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \quad (3) \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \quad (5) \log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1$$

$$(6) \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1 \quad (7) \log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$(8) \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 = 2$$

## 対数の性質

$$|\log_a 1| = 0 \quad (aを0乗したら1になる) \quad |\log_a a| = 1 \quad (aを1乗したらaになる)$$

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$  のとき

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN \quad \cdots \text{対数の和は真数の積}$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \quad \cdots \text{対数の差は真数の商}$$

$$\log_a M^k = k \log_a M \quad (k \text{は実数}) \quad \cdots \text{真数の指数は対数の係数}$$

底がそろっていなければ成立しないので注意。

次の式を計算せよ。

$$(1) \log_4 2 + \log_4 8$$

$$(2) \log_5 2 - \log_5 50$$

$$(3) \log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$$

$$(4) \log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$$

$$(1) \log_4 2 + \log_4 8$$

$$\begin{aligned} &= \log_4 16 = \log_4 4^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$(2) \log_5 2 - \log_5 50$$

$$\begin{aligned} &= \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$(3) \log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$$

$$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$$

$$= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 8$$

$$= \log_3 \frac{4 \times 18}{8}$$

$$= \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2$$

$$= 2$$

$$(4) \log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$$

$$= \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 \sqrt[3]{2}$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \log_3 \sqrt[3]{3}$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

## 底の変換公式

$a, b, c$  は正の数で  $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$  とすると

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{とくに } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

練習  
19

次の式を簡単にせよ。

(1)  $\log_4 8$

(2)  $\log_9 3$

(3)  $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

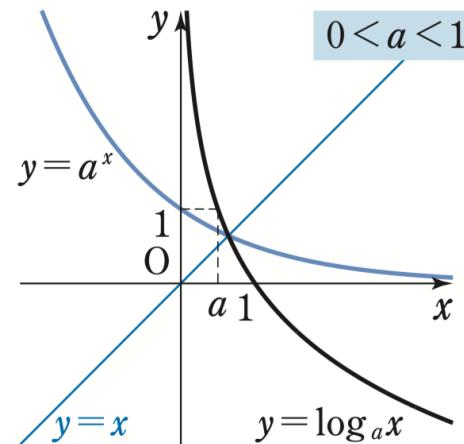
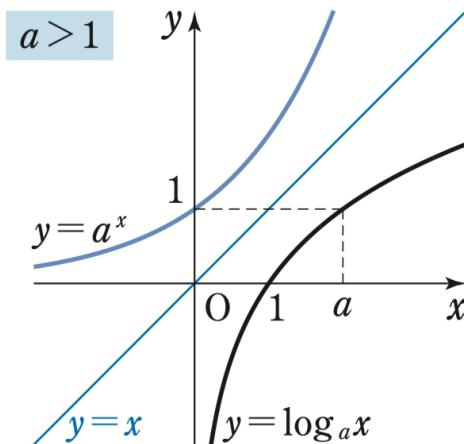
(1)  $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

(2)  $\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$

(3)  $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \frac{1}{\log_2 3} \cdot 3 \log_2 3 = 3$

## 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

(  $a$  を 1 と異なる正の数とするとき,  $y = \log_a x$  は  $x$  の関数を  $a$  を底とする対数関数という。対数関数のグラフ  $y = \log_a x$  は指数関数  $y = a^x$  と  $y = x$  に関して対称



いずれの場合も,  $y$  軸を漸近線としてもち, 点  $(1, 0)$ ,  $(a, 1)$  を通る。 $a > 1$  のとき右上がりの曲線,  $0 < a < 1$  のとき右下がりの曲線である。

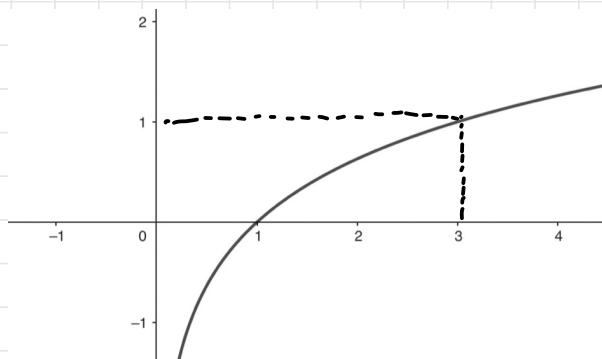
練習  
20

次の関数のグラフをかけ。

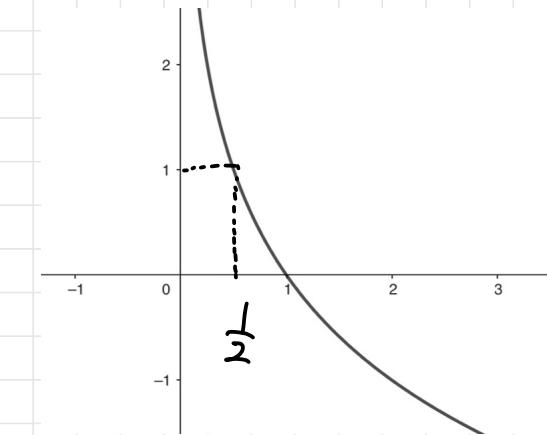
(1)  $y = \log_3 x$

(2)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

(1)



(2)



## 対数関数の特徴

定義域は正の数全体 値域は実数全体

$a > 1$  のとき 増加関数

すなわち  $0 < p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$  のとき 減少関数

すなわち  $0 < p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$

練習

21

次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) 3\log_4 3, 2\log_4 5 \quad (2) \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8, \log_{\frac{1}{4}} 3 \quad (3) \log_2 3, 2$$

$$(1) 3\log_4 3 = \log_4 3^3 = \log_4 27$$

$$(2) \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8}$$

$$2\log_4 5 = \log_4 5^2 = \log_4 25$$

$$\underline{3\log_4 3 > 2\log_4 5}$$

底は  $0 < \frac{1}{4} < 1$  より

$$\underline{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8 > \log_{\frac{1}{4}} 3}$$

$$(3) 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$$

$$\underline{\log_2 3 < 4}$$

## 対数関数を含む方程式・不等式

- ① 真数条件の確認。真数 $>0$ をまず述べる。
- ② 方程式・不等式を解く  
ニニで“不等式”的場合  $\left\{ \begin{array}{l} \text{底 } a > 1 \text{ のとき不等号の向きはそのまま} \\ \text{底 } 0 < a < 1 \text{ のとき不等号の向きは変える} \end{array} \right.$
- ③ ②で求めた解が①の条件を満たしているか確認

次の方程式、不等式を解け。

(1)  $\log_2 x = 4$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$

(3)  $\log_2 x \leq 4$

(4)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

(5)  $\log_3 x > 2$

(6)  $\log_{0.5} x \geq 2$

(1) 対数の定義より

$x = 2^4 = 16$

$x = 16$

→

(2) 対数の定義より

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{4}$

→

(4) 真数条件より

$x > 0 \dots ①$

$\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x > \frac{1}{4} \dots ②$

(1)(2) より  $x > \frac{1}{4}$

(3) 真数条件より

$x > 0 \dots ①$

$\log_2 x \leq 4$

$\log_2 x \leq \log_2 2^4$

$x \leq 2^4$

$x \leq 16 \dots ②$

(1)(2) より  $0 < x \leq 16$

→

(5) 真数条件より

$x > 0 \dots ①$

$\log_3 x > 2$

$\log_3 x > \log_3 3^2$

$x > 3^2$

$x > 9 \dots ②$

(1)(2) より  $x > 9$

→

(6) 真数条件より

$x > 0 \dots ①$

$\log_{0.5} x \geq \log(0.5)^2$

$x \leq (0.5)^2$

$x \leq 0.25 \dots ②$

(1)(2) より  $0 < x \leq 0.25$

→

次の方程式を解け。

$$(1) \log_4 x + \log_4(x-6) = 2$$

$$(2) \log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$$

(1) 真数条件から

$$x > 0 \text{かつ} x-6 > 0 \text{なので} \\ x > 6 \cdots ①$$

$$\log_4 x + \log_4(x-6) = 2$$

$$\log_4 x + \log_4(x-6) = \log_4 16$$

$$\log_4 x(x-6) = \log_4 16$$

$$x(x-6) = 16$$

$$x^2 - 6x = 16$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0$$

$$x = 8, -2$$

①より

$$\underline{x = 8}$$

(2) 真数条件から

$$x+5 > 0 \text{かつ} x-2 > 0 \text{なので} \\ x > 2 \cdots ②$$

$$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$$

$$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = \log_2 8$$

$$\log_2(x+5)(x-2) = \log_2 8$$

$$(x+5)(x-2) = 8$$

$$x^2 + 3x - 10 = 8$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x+6)(x-3) = 0$$

$$x = -6, 3$$

②より

$$\underline{x = 3}$$

次の不等式を解け。

$$(1) \log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}x$$

$$(2) 2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$$

(1) 真数条件から

$$3-2x > 0 \text{かつ} x > 0 \text{なので} \\ 3-2x > 0 \text{かつ} x > 0$$

$$0 < x < \frac{3}{2} \cdots ①$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}x$$

$$3-2x \geq x$$

$$3x \leq 3$$

$$x \leq 1 \cdots ②$$

①②より

$$\underline{\hspace{1cm}} \rightarrow$$

(2) 真数条件から

$$2-x > 0 \text{かつ} x+4 > 0 \text{なので} \\ -4 < x < 2$$

$$-4 < x < 2 \cdots ①$$

$$2\log_3(2-x) < \log_3(x+4)$$

$$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$$

$$(2-x)^2 < x+4$$

$$x^2 - 4x + 4 < x + 4$$

$$x^2 - 5x < 0$$

$$x(x-5) < 0$$

$$0 < x < 5 \cdots ②$$

①②より

$$0 < x < 2$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \rightarrow$$

$1 \leq x \leq 16$  のとき、関数  $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2$  の最大値と最小値を

求めよ。

$$\log_2 x = t \text{ とする}$$

$$1 \leq x \leq 16 \text{ より}$$

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16$$

$$0 \leq t \leq 4 \cdots ①$$

$$y = t^2 - 2t \quad (0 \leq t \leq 4)$$

$$y = (t-1)^2 - 1$$

$$t = 1 \text{ のとき 最小値 } -1$$

$$t = 4 \text{ のとき 最大値 } 8$$

$$\log_2 x = t \text{ より}$$

$$t = 1 \text{ のとき}$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

$$t = 4 \text{ のとき}$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 16$$

$$x = 2 \text{ のとき 最小値 } -1$$

$$x = 16 \text{ のとき 最大値 } 8$$


---

# 常用対数 … 底が10の対数

練習

26

常用対数表を用いて、次の値を小数第4位まで求めよ。

- (1)  $\log_{10} 3450$       (2)  $\log_{10} 92000$       (3)  $\log_{10} 0.000618$

$$(1) \log_{10} 3450$$

$$= \log_{10} (3.45 \times 10^3)$$

$$= \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^3$$

$$= 0.5378 + 3$$

$$= 3.5378$$

$$(2) \log_{10} 92000$$

$$= \log_{10} (9.2 \times 10^4)$$

$$= \log_{10} 9.2 + \log_{10} 10^4$$

$$= 0.9638 + 4$$

$$= 4.9638$$

$$(3) \log_{10} 0.000618$$

$$= \log_{10} (6.18 \times 10^{-4})$$

$$= \log_{10} 6.18 + \log_{10} 10^{-4}$$

$$= 0.7910 - 4$$

$$= -3.2090$$

## 常用対数の応用

正の数  $N$  の整数部分の木行数と常用対数  $\log_{10} N$  の値の関係を調べる

(1例)

正の数  $N$  の整数部分が 3 木行である.  $\Rightarrow 100 \leq N < 1000$

つまり,  $10^2 \leq N < 10^3$  を満たす.

常用対数をとると  $\log_{10} 10^2 \leq \log_{10} N < \log_{10} 10^3 \Rightarrow 2 \leq N < 3$

$2^{100}$  は何桁の数か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

$2^{100}$  に常用対数をとると

$$\begin{aligned}& \log_{10} 2^{100} \\&= 100 \log_{10} 2 \\&= 100 \times 0.3010 \\&= 30.10\end{aligned}$$

$30 < 30.10 < 31$  なので

$$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$$

$$\log_{10} 10^{30} < \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

$2^{100}$  は 31 桁

$3^n$  が 8 桁の数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。

$3^n$  が 8 桁の数になるのは

$$10^7 \leq 3^n < 10^8 \text{ のとき}$$

$$\log_{10} 10^7 \leq \log_{10} 3^n < \log_{10} 10^8$$

$$7 \leq n \log_{10} 3 < 8$$

$$7 \leq n \times 0.4771 < 8$$

$$\frac{7}{0.4771} \leq n < \frac{8}{0.4771}$$

$$14.67\cdots \leq n < 16.76\cdots$$

$n = 15, 16$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$  を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$  は常用対数とする。

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} &= 20 \times \log_{10}\frac{1}{2} \\ &= 20 \times \log_{10}2^{-1} \\ &= -20 \times \log_{10}2 \\ &= -20 \times 0.3010 \\ &= -6.020\end{aligned}$$

$-7 < -6.020 < -6$  なので

$$-7 < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < -6$$

$$\log_{10}10^{-7} < \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} < \log_{10}10^{-6}$$

$$10^{-7} < \left(\frac{1}{2}\right)^{20} < 10^{-6}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$  を小数で表したとき

はじめて 0 でない数字が表れるのは

小数第 7 位