

数工

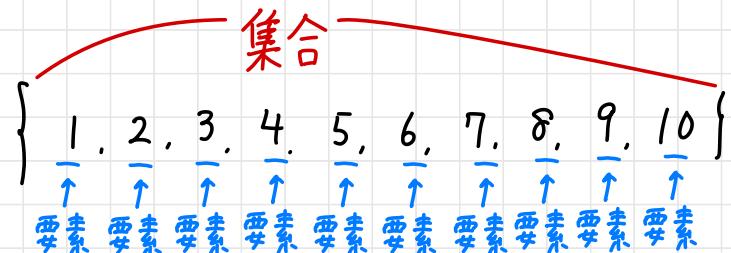
集合と命題



・ 集合 … 範囲がはっきりしたものの集まり

・ 要素 … 集合を構成するもの

(例) 1から10までの自然数の集まり



\int x が集合Aに属するとき $x \in A$ と書く。

x が集合Aに属さないとき $x \notin A$ と書く。

練習
1

有理数全体の集合を Q とする。次の□に
適する記号 \in または \notin を入れよ。

(1) $4 \square Q$

(2) $-\frac{2}{3} \square Q$

(3) $\sqrt{2} \square Q$

(1) $4 \in Q$ (2) $-\frac{2}{3} \in Q$ (3) $\sqrt{2} \notin Q$

集合には2通りの書き表し方がある

① 集合Aの要素を全て並べる. $\Rightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

② 集合Aの式と条件のみを書く. $\Rightarrow A = \{\text{式} | \text{条件}\}$

(例) 1から10までの自然数の集合A $A = \{x | x \text{は } 1 \text{から } 10 \text{までの自然数}\}$

練習 2 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 20の正の約数全体の集合A

$$(1) A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

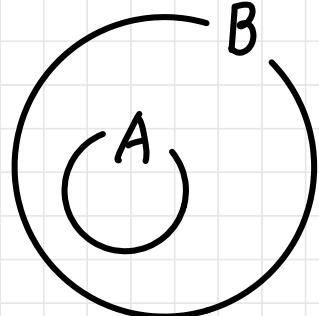
(2) $B = \{x | x \text{は } 10 \text{以下の正の奇数}\}$

$$(2) B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(3) $C = \{3n+1 | n=0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$(3) C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

- ・ 部分集合 … 集合Aの要素の全こが集合Bに含まれているときの集合A



このとき、AはBに含まれる $\rightarrow A \subset B$ と書く

BはAを含む $\rightarrow B \supset A$ と書く。

また、AとBの要素が一致しているとき $A = B$. AとBは等しい。

(例) 集合Aを10以下の正の奇数、集合Bを1から10までの自然数

とすると $A \subset B$ が成立。

- ・ 空集合 … 要素が1つもない集合。記号 \emptyset (フイ)で表す。
空集合は全ての集合の部分集合である。

練習

3

次の2つの集合の関係を、 \subset , $=$ を使って表せ。

- (1) $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (2) $C = \{1, 2, 5, 10\}$, $D = \{x \mid x \text{は} 10 \text{の正の約数}\}$
- (3) $P = \{x \mid x \text{は} 12 \text{以下の自然数}\}$, $Q = \{x \mid x \text{は} 12 \text{の正の約数}\}$

$$(1) A \subset B$$

$$(2) D = \{1, 2, 5, 10\} \text{ もり}$$

$$C = D$$

$$(3) P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$P \supset Q$$

練習

4

次の集合の部分集合をすべてあげよ。

- (1) $\{1, 2\}$
- (2) $\{a, b, c\}$

$$(1) \emptyset$$

$$\{1\}, \{2\}$$

$$\{1, 2\}$$

$$(2)$$

$$\emptyset$$

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

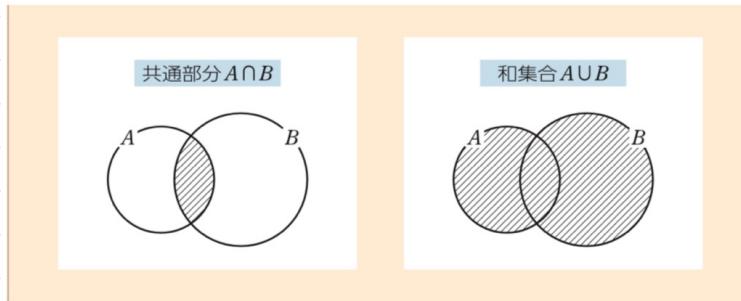
$$\{a, b, c\}$$

・ 共通部分 … 集合Aと集合Bの両方に属する要素の集合

$A \cap B$ と表す。 (共通部分がない場合、 $A \cap B$ の要素は \emptyset)

・ 和集合 … 集合A、集合Bの少なくともどちらか一方に属する要素の集合

$A \cup B$ と表す。



練習
5

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3\}$ について、次の
集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $B \cap C$

(4) $B \cup C$

(1) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ (3) $B \cap C = \emptyset$

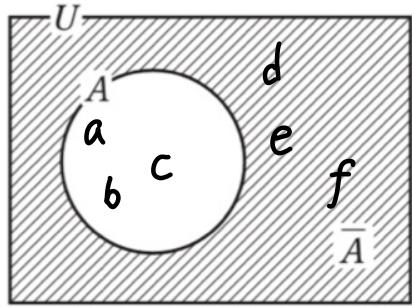
(4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

練習 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}, B = \{x \mid 0 < x < 4, x \text{ は実数}\}$ につ

いて、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

6

- ・ 补集合 … 全体集合 U の部分集合 A に対して, U の要素であるが A に属さない要素の集合. 全体集合 U の部分集合 A の补集合は \bar{A} と表す.
- ・ 全体集合 … 集合 A を部分集合にもつ集合. 全体集合は U で表す.



左図のように要素が入っているとき

$$U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\bar{A} = \{d, e, f\}$$

補集合の性質

U を全体集合とし, A, B をその部分集合とするとき

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = U, \quad \bar{\bar{A}} = A$$

$$A \subset B \text{ ならば } \bar{A} \supset \bar{B}$$

例 7 の集合 U と A , B について、次の集合を求めよ。

(1) \overline{B}

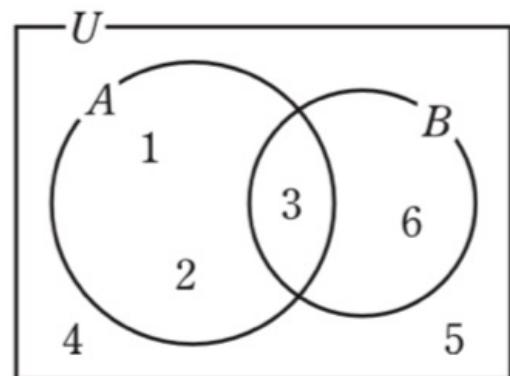
(2) $\overline{A \cap B}$

(3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(5) $\overline{A} \cap B$

(6) $A \cap \overline{B}$



$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 6\}$$

$$\overline{A} = \{4, 5, 6\}, \quad \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$(1) \overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$(3) \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 5\}$$

$$(4) \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$(5) \overline{A} \cap B = \{6\}$$

$$(6) A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$$

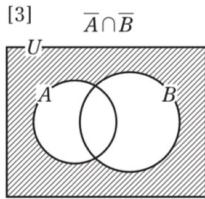
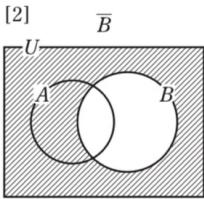
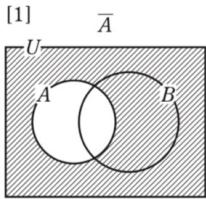
ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

\overline{A} と \overline{B} は、それぞれ図[1]と図[2]の斜線部分であり、その共通部分

5 $\overline{A} \cap \overline{B}$ は、図[3]の斜線部分である。

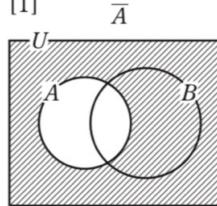
図[3]の斜線部分は $\overline{A \cup B}$ であるから、 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ が成り立つ。



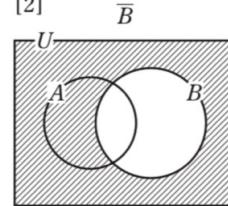
練習
8

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つことを、図を用いて確かめよ。

[1]

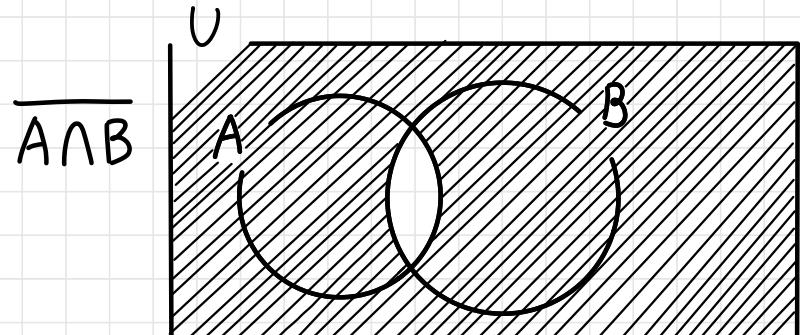


[2]



[1] [2] より $\overline{A \cup B}$ は $\overline{A \cap B}$ である

$$\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$$



・3つの共通部分と和集合

3つの集合の共通部分 … 3つの集合 A, B, C のすべてに属する要素全体の集合

$$A \cap B \cap C \text{ と書く。}$$

3つの集合の和集合 … A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合

$$A \cup B \cup C \text{ と書く。}$$

練習 $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ に

1 ついて、 $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ を求めよ。

$$A \cap B \cap C = \{2, 6\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$$

・命題 …一般に正しいか正しくないかが定まる文や式

命題が正しいときその命題は真である。

命題が正しくないときその命題は偽である。

・条件 …文字 x を含む文や式で x に値を代入することで真偽が定まるもの

全体集合 … 条件を考えるときの条件に含まれる文字を要素とする集合

練習

9

次の命題の真偽を述べよ。

- (1) 円周率 π は有理数である。
- (2) 実数 -1 について $(-1)^2 \geq 0$ である。

(1) π は無理数なので偽

(2) 真

命題 $p \Rightarrow q$

- 命題 $p \Rightarrow q$ は、「 p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。
- 条件 p を満たすものの全体の集合を P , 条件 q を満たすものの全体の集合を Q とするとき, 「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」と「 $P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

P : 仮定

q : 結論

練習
10

次の条件 p, q について, 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を, 集合を用いて調べよ。

(1) 実数 x に関する 2 つの条件 $p : x \leq 2, q : x \leq 4$

(2) 自然数 m に関する 2 つの条件

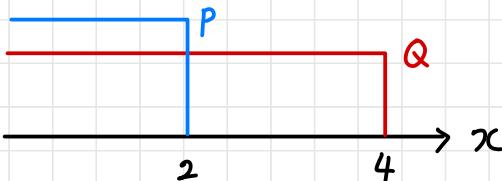
$p : m$ は 12 の正の約数, $q : m$ は 24 の正の約数

(3) 実数 x に関する 2 つの条件 $p : -1 < x < 1, q : x > 0$

(1) 2 つの集合 P, Q を

$$P = \{x \mid x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid x \leq 4\}$$
 とする。



(2)

2 つの集合 P, Q を

$$P = \{m \mid m \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

$$Q = \{m \mid m \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$$
 とする。

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

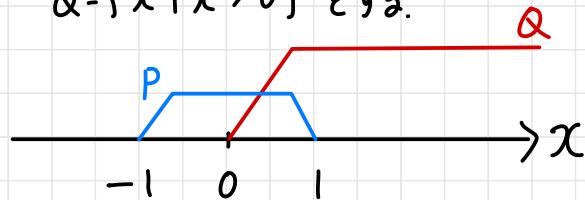
$P \subset Q$ でないのが 偽

上図より $P \subset Q$ なので 真

(3) 2 つの集合 P, Q を

$$P = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

$$Q = \{x \mid x > 0\}$$
 とする。



$P \subset Q$ でないのが 假

・反例…命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示す例

練習
11

n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

n が素数ならば、 n は奇数である。

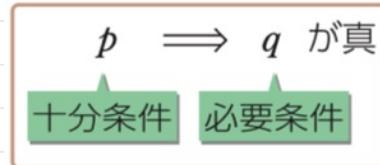
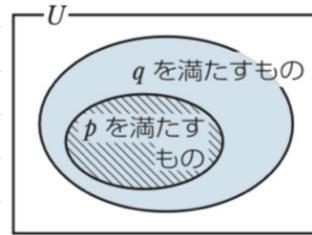
$n=2$ は素数たゞが偶数なのでこの命題は偽である。

2つの条件 P, Q について

- 命題 $P \Rightarrow Q$ が「真」であるとき

P は Q であるための十分条件

Q は P であるための必要条件



- 命題 $P \Rightarrow Q$ が成り立つかつ $Q \Rightarrow P$ が成り立つとき

P は Q であるための必要十分条件である。

Q は P であるための必要十分条件である。

(このとき P と Q は同値($P=Q$)である。)

条件 P, Q を満たすものの全体の集合を P, Q とすると, $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つことと $P = Q$ は同じ。

練習
12 x, y は実数とする。次の に、「必要」、「十分」のうち、適する言葉を入れよ。

- (1) $x = -2$ は $x^2 = 4$ であるための 条件である。
- (2) $x > 0$ は $x > 1$ であるための 条件である。
- (3) $x = y$ は $(x-y)x = 0$ であるための 条件である。

練習
13

x, y, z は実数とする。次の中で、 $x = y$ と同値な条件をすべて選べ。

- ① $x+z = y+z$ ② $x^2 = y^2$ ③ $(x-y)^2 = 0$

① は両辺から z を引くと $x = y$

② は $x = \pm y$

③ は $x-y = \pm 0 \Rightarrow x = y$

よって ① と ③

練習
14

x, y は実数とする。次の に、

「必要条件であるが十分条件ではない」、

「十分条件であるが必要条件ではない」、

「必要十分条件である」

のうち、適する言葉を入れよ。

- (1) $\triangle ABC$ が正三角形であることは、 $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるための 。
- (2) $x < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための 。
- (3) $|x| = |y|$ は $x^2 = y^2$ であるための 。

(1) 十分条件であるか 必要条件でない

(2) 必要条件であるか 十分条件でない

(3) 必要十分条件である。

・条件の否定 … 条件 P に対して存在する「 P でない」条件. P に対して \bar{P} で表す.

練習
15

n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) n は偶数である

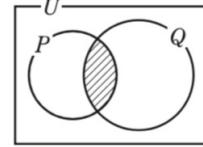
(2) n は 5 より小さい

(1) n は奇数である. (2) n は 5 以上である.

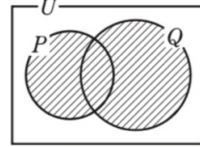
全体集合を U とし、 U の要素の中で、条件 p , q を満たすものの全体の集合を、それぞれ P , Q で表す。

条件「 p かつ q 」、「 p または q 」、 \bar{p} と集合の関係は、次のようになる。

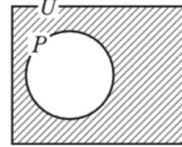
条件 p かつ q
集合 $P \cap Q$



条件 p または q
集合 $P \cup Q$



条件 \bar{p}
集合 \bar{P}



「かつ」の否定、「または」の否定

$$\begin{aligned}\overline{p \text{かつ} q} &\Leftrightarrow \overline{p} \text{または} \overline{q} \\ \overline{p \text{または} q} &\Leftrightarrow \overline{p} \text{かつ} \overline{q}\end{aligned}$$

「ともに」の否定は「少なくとも一方」、
「少なくとも一方」の否定は「ともに」

練習

16

x, y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ (2) $x = 0$ または $y = 0$
 (3) x, y はともに有理数

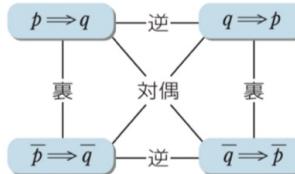
(1) $x < 0$ または $y < 0$ (2) $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$

(3) x, y の少なくとも一方は無理数

命題 $p \Rightarrow q$ に対して

- | | |
|---|----|
| $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の | 逆 |
| $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の | 対偶 |
| $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の | 裏 |

という。命題 $p \Rightarrow q$ とその逆、対偶、裏は、互いに右の図のような関係にある。



もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

※ 文才偶の真偽は一致する。

練習
17

x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、その逆、対偶、裏を述べ、それらの真偽を調べよ。

(1) $x > y \Rightarrow x - y > 0$ (2) $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

(1) 真

(2) 偽

逆 $x - y > 0 \Rightarrow x > y$ 真

逆 $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 真

裏 $x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$ 真

裏 $x = 0 \Rightarrow xy = 0$ 真

対偶 $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$ 真

対偶 $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ 偽