

# 数Ⅱ

---

分散分法と積分法

---

---

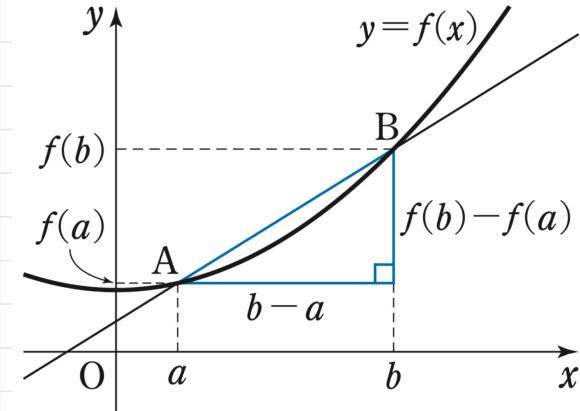
---



# 平均変化率

$y = f(x)$  の値が “ $a$ から $b$ まで” 変化するときの関数  $f(x)$  の変化の値

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



練習 次の平均変化率を求めよ。

1

- (1) 1次関数  $y = 2x$  の,  $x = a$  から  $x = b$  までの平均変化率
- (2) 2次関数  $y = -x^2$  の,  $x = 2$  から  $x = 2+h$  までの平均変化率

(1)

$$\frac{2b - 2a}{b - a} = \frac{2(b - a)}{b - a} = 2$$

(2)

$$\frac{-(2+h)^2 - \{-2^2\}}{(2+h) - 2} : \frac{-h^2 - 4h}{h} = -h - 4$$

## 木極限値

関数  $f(x)$  において  $x$  が  $\alpha$  と異なる値をとりながら  $\alpha$  に限りなく近づくとき  $f(x)$  の値が

一定の値  $\alpha$  に限りなく近づくならば、 $x$  を  $x \rightarrow \alpha$  に限りなく近づくときの木極限値という。

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \rightarrow \alpha \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

練習  
2

次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h)$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2)$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2) = 12 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 6$$

## 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

練習  
3

関数  $f(x) = 3x^2$  について、次の微分係数を求めよ。

(1)  $f'(1)$

(2)  $f'(-2)$

(3)  $f'(a)$

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 6)$$

$$= 6$$

$$(2) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h)^2 - 3(-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 12h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 12)$$

$$= -12$$

$$(3) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 6a)$$

$$= 6a$$

## 接線の傾きと微分係数

関数  $y = f(x)$  のグラフ上の点  $A(a, f(a))$  における接線の傾きは、関数  $f(x)$  の  $x = a$  における微分係数  $f'(a)$  に等しい。

練習  
4

関数  $y = x^2$  のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ。

(1) 点  $(1, 1)$

(2) 点  $(-2, 4)$

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

接線の傾き 2

$$(2) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4$$

接線の傾き -4

## 導関数 $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

練習  
5

導関数の定義にしたがって、次の関数の導関数を求めよ。

(1)  $f(x) = 3x$

(2)  $f(x) = -x^2$

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2x) \\ &= -2x \end{aligned}$$

## 関数 $x^n$ と定数関数の導関数

関数  $x^n$  の導関数は  $(x^n)' = nx^{n-1}$

定数関数  $c$  の導関数は  $(c)' = 0$

練習  
6

上の公式を用いて、次の関数の導関数を求めよ。

(1)  $y = x^4$

(2)  $y = x^5$

(1)  $y' = 4x^3$

(2)  $y' = 5x^4$

練習  
7

次の関数を微分せよ。

(1)  $y = 4x^2 + 3x - 4$

(2)  $y = -3x^2 + x - 2$

(3)  $y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$

(4)  $y = -x^4 - x + 3$

(5)  $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

(6)  $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

(1)  $y' = 8x + 3$

(2)  $y' = -6x + 1$

(3)  $y' = 12x^2 - 4x - 5$

(4)  $y' = -4x^3 - 1$

(5)  $y' = 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

(6)  $y' = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (x+2)(x+3)$$

$$(2) \quad y = x(x+2)(x-2)$$

$$(3) \quad y = -2x(x+1)(x-3)$$

$$(4) \quad y = 3(x^2-2)^2$$

(1)

$$y = x^2 + 5x + 6$$

$$y' = 2x + 5$$

(2)

$$y = x^3 - 4x$$

$$y' = 3x^2 - 4$$

(3)

$$y = -2x^3 + 4x^2 + 6x$$

$$y' = -6x^2 + 8x + 6$$

(4)

$$y = 3x^4 - 12x^2 + 12$$

$$y' = 12x^3 - 24x$$

関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  について、次の  $x$  の値における微分係数を求めよ。

$$(1) \quad x = 2$$

$$(2) \quad x = 0$$

$$(3) \quad x = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

(1)

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$$

(2)

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$$

(3)

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 24$$

次の条件をすべて満たす 2 次関数  $f(x)$  を求めよ。

$$f'(0) = -3, \quad f'(1) = 1, \quad f(0) = 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とする}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = -3 \text{ より}$$

$$f'(1) = 1 \text{ より}$$

$$f(0) = 2 \text{ より}$$

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = -3$$

$$f'(1) = 2a \cdot 1 + b = 1$$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$$

$$b = -3$$

$$2a + b = 1$$

$$c = 2$$

$$b = -3 \text{ より } a = 2$$

$$a = 2, b = -3, c = 2 \text{ より}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

練習  
11

次の  $t$  の関数を微分せよ。ただし、 $a$ 、 $b$  は定数とする。

(1)  $s = 3t^2 - 4t + 2$

(2)  $f(t) = at^3 + bt^2$

(1)  $s' = 6t - 4$

(2)  $f'(t) = 3at^2 + 2bt$

練習  
12

半径  $r$  の球の体積を  $V$ 、表面積を  $S$  とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 、 $S = 4\pi r^2$

である。 $V$  と  $S$  を  $r$  の関数とみて、それぞれ  $r$  で微分せよ。

$$V' = 4\pi r^2$$

$$S' = 8\pi r$$

## グラフ上の点における接線の方程式

関数  $y = f(x)$  のグラフ上の点  $(a, f(a))$  における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

練習  
13

関数  $y = 2x^2 - 4x + 3$  のグラフ上に  $x$  座標が 2 である点 A をとる。点 A における接線の方程式を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \text{ とする}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 3$$

点 A は  $(2, 3)$

$$f'(x) = 4x - 4$$

よって

$$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

接線の傾きは 4

$$y = 4x - 5$$

次の接線の方程式を求めよ。

- (1) 関数  $y = x^2 + 1$  のグラフに点 C(-1, -7) から引いた接線
- (2) 関数  $y = x^2 - 2x + 4$  のグラフに原点 O から引いた接線

(1)  $f(x) = x^2 + 1$ , 接点の  $x$  座標を  $a$  とする

接点は  $(a, f(a)) = (a, a^2 + 1)$

$f'(x) = 2x$  より

$f'(a) = 2a$  なので 接線の傾きは  $2a$

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

これが (-1, -7) を満たさない

$$-7 - (a^2 + 1) = 2a(-1 - a)$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a-2)(a+4) = 0$$

$$a = 2, -4$$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 4x - 3$$

$$a = -4 \text{ のとき } y = -8x - 15$$

(2)  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ , 接点の  $x$  座標を  $a$  とする

接点は  $(a, f(a)) = (a, a^2 - 2a + 4)$

$f'(x) = 2x - 2$  より

$f'(a) = 2a - 2$  なので 接線の傾きは  $2a - 2$

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a)$$

これが 原点を満たさない

$$0 - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(0 - a)$$

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 2x$$

$$a = -2 \text{ のとき } y = -6x$$

## 関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

常に  $f'(x) > 0$  ならば,  $f(x)$  はその区間で 増加 する。

常に  $f'(x) < 0$  ならば,  $f(x)$  はその区間で 減少 する。

常に  $f'(x) = 0$  ならば,  $f(x)$  はその区間で 定数 である。

練習  
15

次の関数の増減を調べよ。

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$$

$$(2) \quad f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 4$$

$$f'(x) > 0 \text{ を解くと } x < 0, 4 < x$$

$$f'(x) < 0 \text{ を解くと } 0 < x < 4$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |   |     |     |     |
|---------|-----|---|-----|-----|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... | 4   | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0 | -   | 0   | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 5 | ↘   | -27 | ↗   |

$f(x)$  は  $x \leq 0, 4 \leq x$  で 増加

$0 \leq x \leq 4$  で 減少

次の関数の増減を調べよ。

(1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

(2)  $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$

(2)

$$f'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすと } x = 0, -1$$

$$f'(x) > 0 \text{ を解くと } -1 < x < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ を解くと } x < -1, 0 < x$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |    |     |   |     |
|---------|-----|----|-----|---|-----|
| $x$     | ... | -1 | ... | 0 | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0  | +   | 0 | -   |
| $f(x)$  | ↓   | 0  | ↑   | 1 | ↓   |

$f(x)$  は  $x \leq -1, 0 \leq x$  で減少

$-1 \leq x \leq 0$  で増加

## 関数の極大・極小

$f(x)$  が  $x = a$  を境目として増加から減少に移るとき

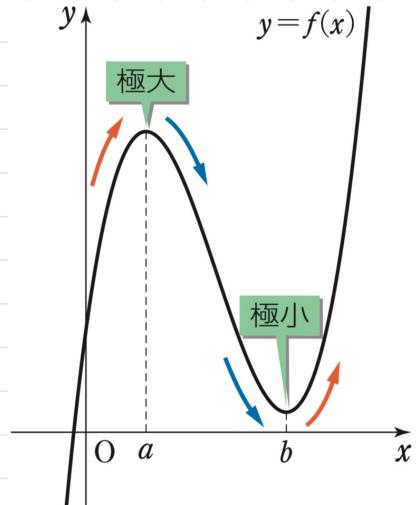
$f(x)$  は  $x = a$  で「極大」であり、 $f(a)$  は極大値

$f(x)$  が  $x = b$  を境目として減少から増加に移るとき

$f(x)$  は  $x = b$  で「極小」であり、 $f(b)$  は極小値

極大値と極小値をまとめて極値という。

※ 極値が必ずしも最大値・最小値になるとは限らない

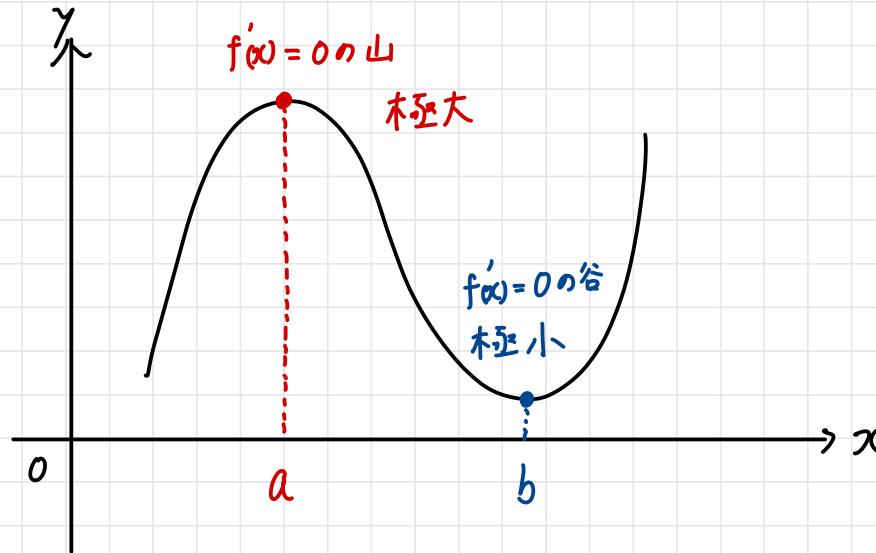


$f'(x)$  と  $f(x)$  の増減

$f'(x) > 0$  のとき → 接線の傾きが正 →  $f(x)$  は増加

$f'(x) < 0$  のとき → 接線の傾きが負 →  $f(x)$  は減少

$f'(x) = 0$  のとき → 接線の傾きが 0 →  $f(x)$  の増加減少の切り替わり点



$x = a$  のとき 极大値

$x = b$  のとき 极小値

極大値、極小値をまとめて極値  
※ 極値が最大値最小値になるとは限らない

次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$(2) \quad y = x^3 + 3x^2 + 1$$

(1)

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする}$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$3(x-1)(x-3) = 0$$

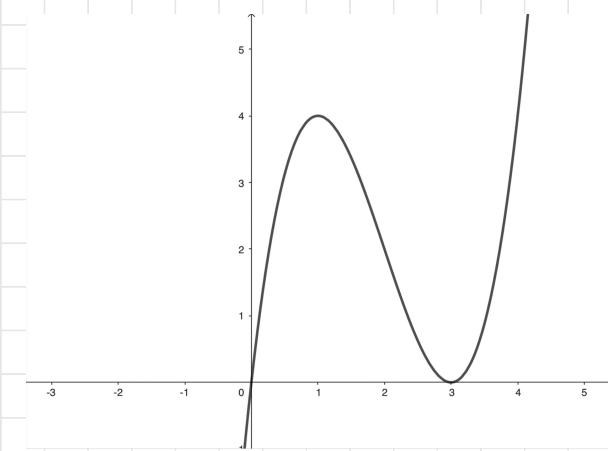
$$x = 1, 3$$

\textcircled{2}

|         |     |   |     |   |     |
|---------|-----|---|-----|---|-----|
| $x$     | ... | 1 | ... | 3 | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0 | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 0 | ↘   | 4 | ↗   |

$x = 1$  のとき極大値 4

$x = 3$  のとき極小値 0



次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$(2) \quad y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

(2)

$$\textcircled{1} \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \text{ とす}$$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

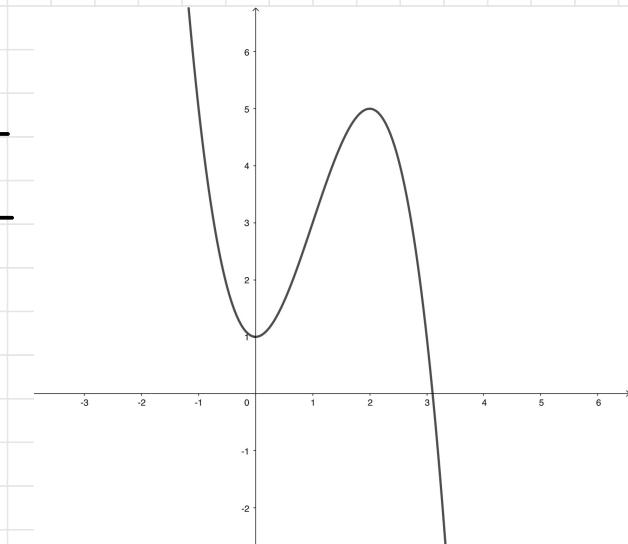
$$x = 0, 2$$

\textcircled{2}

|         |     |   |     |   |     |
|---------|-----|---|-----|---|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0 | +   | 0 | -   |
| $f(x)$  | ↘   | 1 | ↗   | 5 | ↘   |

$x = 2$  のとき極大値 5

$x = 0$  のとき極小値 1



次の関数の増減を調べ、極値をもたないことを確かめよ。

$$(1) \quad f(x) = -x^3$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 + 2x$$

(1)

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0$$

増減表は下図

|         |     |   |     |
|---------|-----|---|-----|
| $x$     | --- | 0 | --- |
| $f'(x)$ | -   | 0 | -   |
| $f(x)$  | ↓   | 0 | ↓   |

$f(x)$ は常に減少し

$f(x)$ は極値をもたない

(2)

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \text{ より}$$

$$3x^2 \geq 0 \text{ であるから常に } f'(x) > 0$$

$f(x)$ は常に増加し

$f(x)$ は極値をもたない

次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) \quad y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$$

$$(2) \quad y = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$(3) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$(4) \quad y = x^4 - 4x^3 + 12$$

(1)

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x+2)(x-1)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, -2, 1$$

グラフは下図

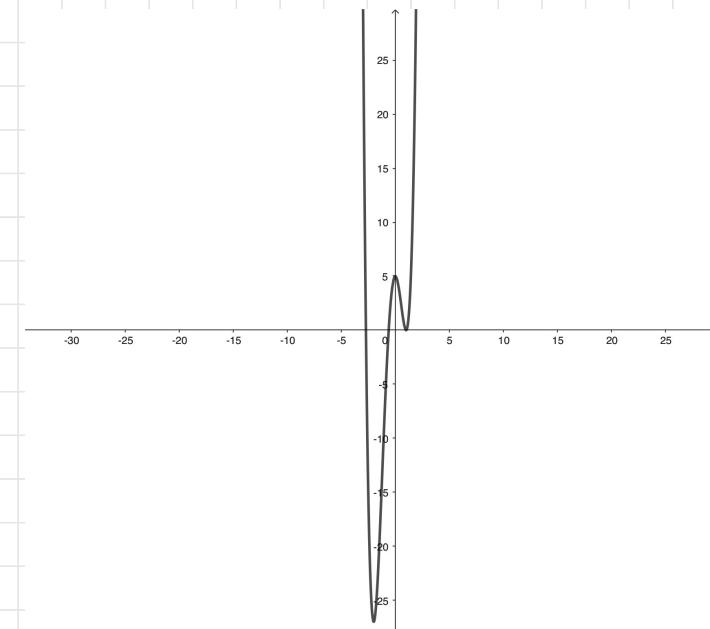
$y$  の増減表は

|      |     |     |     |   |     |   |     |
|------|-----|-----|-----|---|-----|---|-----|
| $x$  | ... | -2  | ... | 0 | ... | 1 | ... |
| $y'$ | -   | 0   | +   | 0 | -   | 0 | +   |
| $y$  | ↓   | -27 | ↑   | 5 | ↓   | 0 | ↑   |

$x = -2$  のとき極小値 -27

$x = 0$  のとき極大値 5

$x = 1$  のとき極小値 0



次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) \quad y = 3x^4 + 4x^2 - 12x^2 + 5$$

$$(2) \quad y = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$(3) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$(4) \quad y = x^4 - 4x^2 + 12$$

(2)

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, \pm 2$$

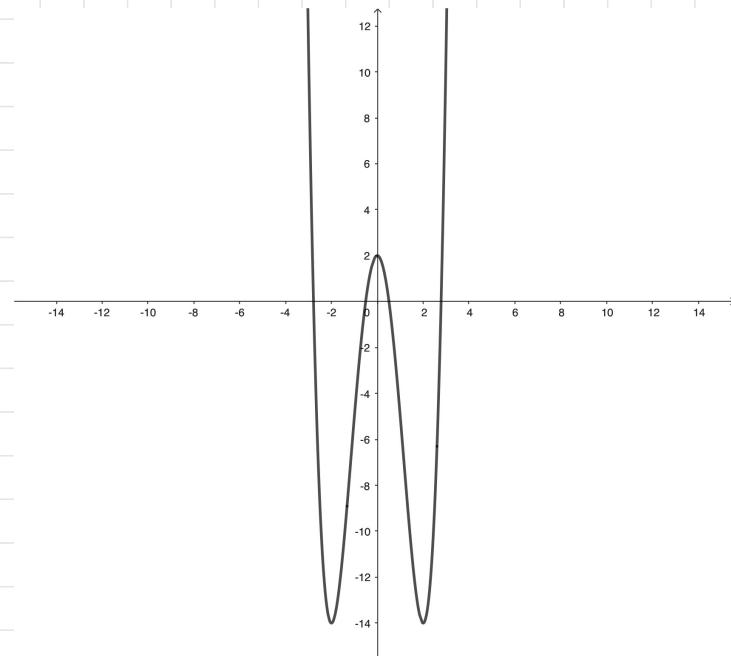
$y$  の増減表は

|      |     |     |     |   |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| $x$  | ... | -2  | ... | 0 | ... | 2   | ... |
| $y'$ | -   | 0   | +   | 0 | -   | 0   | +   |
| $y$  | ↘   | -14 | ↗   | 2 | ↘   | -14 | ↗   |

$x = 0$  のとき極大値 2

$x = \pm 2$  のとき極小値 -14

7 ラフは下図



次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$  (2)  $y = x^4 - 8x^2 + 2$

(3)  $y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$  (4)  $y = x^4 - 4x^2 + 12$

(3)

$$y' = -4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x^2 - 3x + 2) = -4x(x-1)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすと } x = 0, 1, 2$$

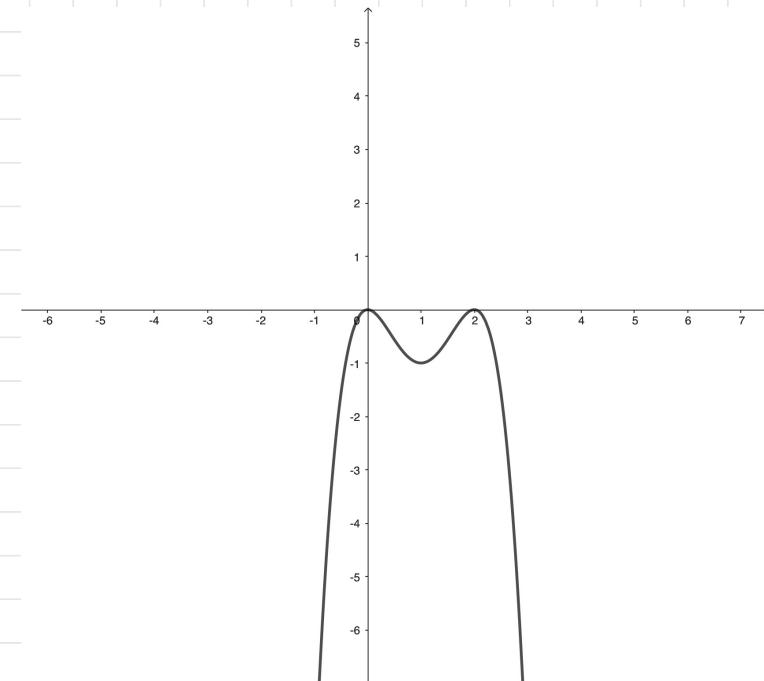
グラフは下図

$y$  の増減表は

|      |     |   |     |    |     |   |     |
|------|-----|---|-----|----|-----|---|-----|
| $x$  | ... | 0 | ... | 1  | ... | 2 | ... |
| $y'$ | +   | 0 | -   | 0  | +   | 0 | -   |
| $y$  | ↗   | 0 | ↘   | -1 | ↗   | 0 | ↘   |

$x = 0, 2$  のとき極大値 0

$x = 1$  とき極小値 -1



次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

$$(1) \quad y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$$

$$(2) \quad y = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$(3) \quad y = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$(4) \quad y = x^4 - 4x^3 + 12$$

(4)

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$y' = 0 \text{ とすと } x = 0, 3$$

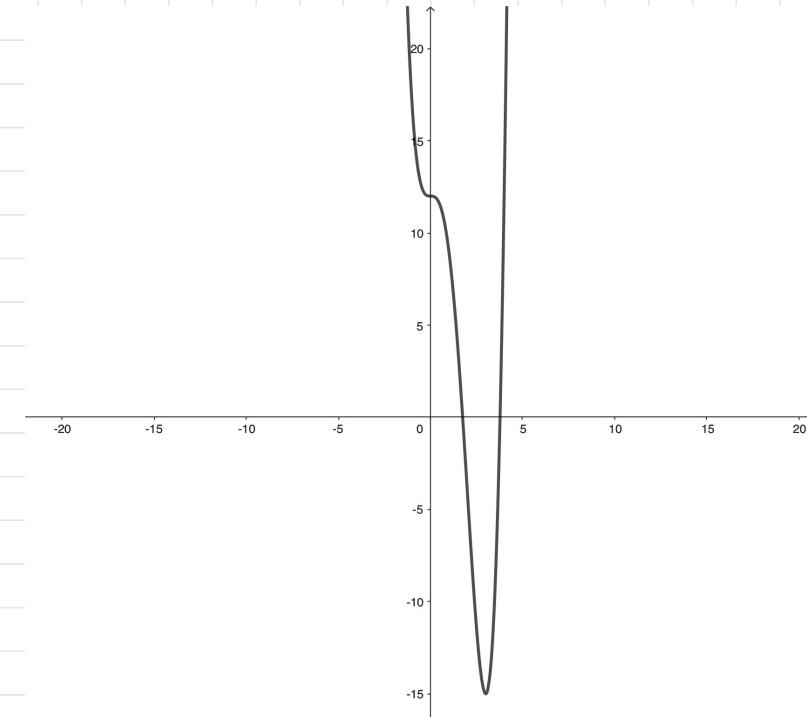
$y$  の増減表は

|      |     |    |     |     |     |
|------|-----|----|-----|-----|-----|
| $x$  | ... | 0  | ... | 3   | ... |
| $y'$ | -   | 0  | -   | 0   | +   |
| $y$  | ↘   | 12 | ↗   | -15 | ↑   |

$x = 3$  のとき木極小値 -15

極大値なし

グラフは下図



$x$  の多項式で表される関数  $f(x)$  について

$f(x)$  が  $x = a$  で 極値をとる。  $f'(a) = 0$

但し、 $f'(a) = 0$  であっても  $f(x)$  は  $x = a$  で 極値をとるとは限らない

練習  
19

関数  $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$  が  $x = -1$  で 極大値 8 をとるように、

定数  $a, b$  の値を定めよ。また、極小値を求めよ。

$f(x)$  が “ $x = 1$  で 極大値 8 をとること”

$$f(-1) = 8, \quad f'(-1) = 0 \text{ がいえる}$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + b$$

$$a + b + 8 = 8$$

$$a + b = 0 \cdots ①$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) - 9 = 0$$

$$-2a - 6 = 0 \cdots ②$$

① ② より  $a = -3, b = 3$  なので

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x + 3) = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 3$$

$f(-1)$  は 極大値なので  $f(3)$  が 極小値

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 3 = -24$$

$a = -3, b = 3, x = 3$  で 極小値  $-24$ ,

次の関数の最大値と最小値を求めるよ。

$$(1) \quad y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leq x \leq 2) \quad (2) \quad y = -x^3 + x^2 + x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$(3) \quad y = x^4 - 2x^3 + 3 \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

$$(1) \quad f(x) = x^3 + 3x^2 \text{ とする。}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, -2$$

$f(x)$  の増減表は

|         |    |     |    |     |   |     |    |
|---------|----|-----|----|-----|---|-----|----|
| $x$     | -3 | ... | -2 | ... | 0 | ... | 2  |
| $f'(x)$ |    | +   | 0  | -   | 0 | +   |    |
| $f(x)$  | 0  | ↗   | 4  | ↘   | 0 | ↗   | 20 |

$x = 2$  で  $\boxed{\text{最大値} 20}$

$x = -3, 0$  で  $\boxed{\text{最小値} 0}$

$$(2) \quad f(x) = -x^3 + x^2 + x \text{ とする。}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = -(3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 1$$

$f(x)$  の増減表は

|         |   |     |   |     |    |
|---------|---|-----|---|-----|----|
| $x$     | 0 | ... | 1 | ... | 2  |
| $f'(x)$ |   | +   | 0 | -   |    |
| $f(x)$  | 0 | ↗   | 1 | ↘   | -2 |

$x = 1$  で  $\boxed{\text{最大値} 1}$

$x = 2$  で  $\boxed{\text{最小値} -2}$

次の関数の最大値と最小値を求める。

- (1)  $y = x^3 + 3x^2$  ( $-3 \leq x \leq 2$ ) (2)  $y = -x^3 + x^2 + x$  ( $0 \leq x \leq 2$ )  
 (3)  $y = x^4 - 2x^3 + 3$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )

(3)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$  とする。

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{3}{2}$$

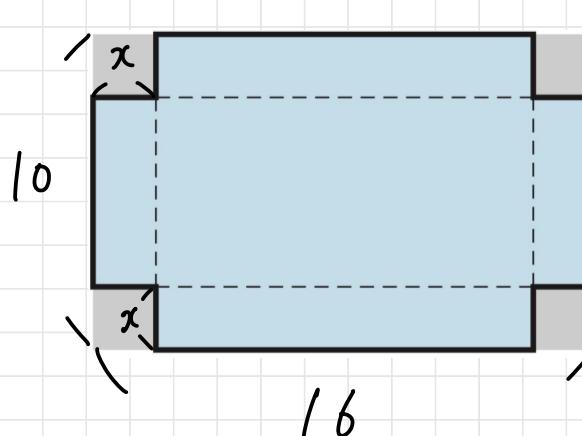
$f(x)$  の増減表は

|         |    |     |   |     |                 |     |   |
|---------|----|-----|---|-----|-----------------|-----|---|
| $x$     | -1 | ... | 0 | ... | $\frac{3}{2}$   | ... | 2 |
| $f'(x)$ |    | +   | 0 | -   | 0               | +   |   |
| $f(x)$  | 6  | ↗   | 3 | ↘   | $\frac{21}{16}$ | ↗   | 3 |

$x = -1$  のとき 最大値 6

$x = \frac{3}{2}$  のとき 最小値  $\frac{21}{16}$

縦 10 cm、横 16 cm の長方形の厚紙の四隅から、合同な正方形を切り取り、ふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。



切り取る長さを  $x$  cm とする。 $(0 < x < 5)$

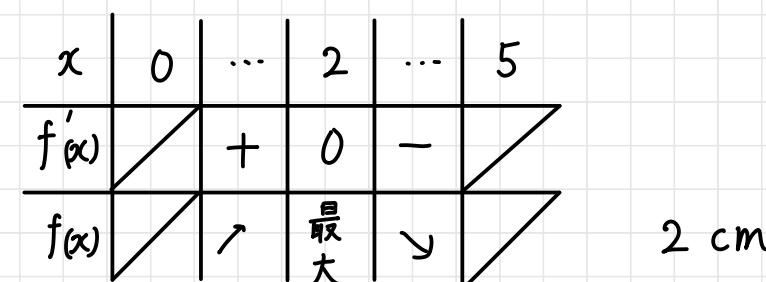
この直方体の体積を  $f(x)$  とすると

$$f(x) = (10 - 2x) \cdot (16 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(3x-20)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{20}{3}, 2$$

$f(x)$  の増減表は



次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) \quad 2x^3 - 6x + 3 = 0$$

$$(2) \quad x^3 + 3x^2 + 2 = 0$$

~~$$(3) \quad x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$~~

~~$$(4) \quad x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$~~

$$(1) \quad f(x) = 2x^3 - 6x + 3$$

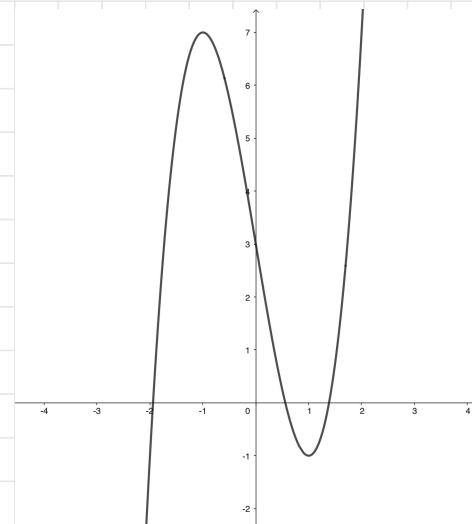
$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \pm 1$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |    |     |    |     |
|---------|-----|----|-----|----|-----|
| $x$     | ... | -1 | ... | 1  | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0  | -   | 0  | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 7  | ↘   | -1 | ↗   |

7" ラフは下図



左図より

$y = 2x^3 - 6x + 3$  は  
 $x$  軸と 3 点で交わるので

異なる実数解 3 つ

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)  $2x^3 - 6x + 3 = 0$

(2)  $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$

(3)  ~~$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$~~

(4)  ~~$x^4 - 8x^2 + 1 = 0$~~

(2)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$  とする。

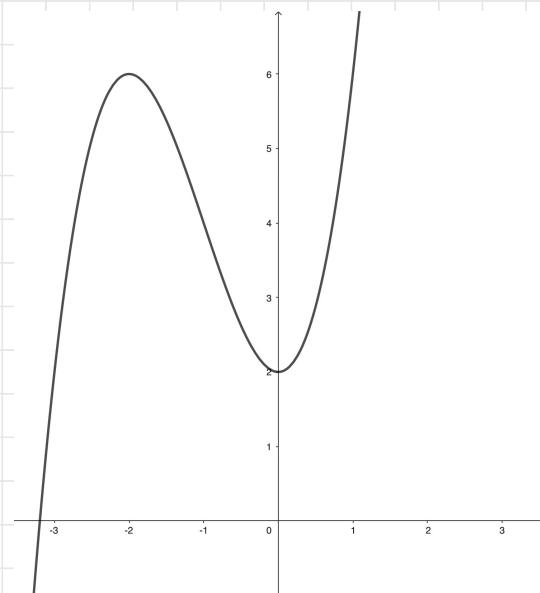
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, -2$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |    |     |   |     |
|---------|-----|----|-----|---|-----|
| $x$     | ... | -2 | ... | 0 | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0  | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 6  | ↘   | 2 | ↗   |

グラフは下図



左図より

$y = x^3 + 3x^2 + 2$  は  
x 軸と 1 点で交わるので  
異なる実数解 1 つ

練習 22 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)  $2x^3 - 6x + 3 = 0$

(2)  $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$

(3)  $-x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(4)  $x^4 - 8x^2 + 1 = 0$

(3)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$  とする。

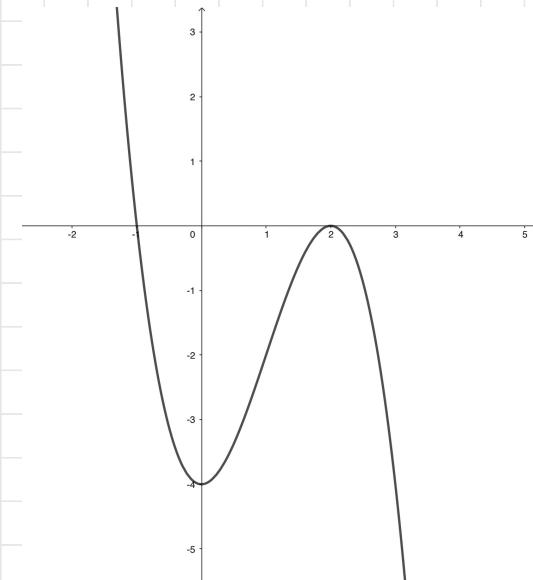
$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 2$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |    |     |   |     |
|---------|-----|----|-----|---|-----|
| $x$     | ... | 0  | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0  | +   | 0 | -   |
| $f(x)$  | y   | -4 | ↗   | 0 | ↘   |

グラフは下図



左図より

$y = -x^3 + 3x^2 - 4$  は  
x 軸と 2 点で交わるので  
異なる実数解 2 つ

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) 2x^3 - 6x + 3 = 0$$

$$(2) x^3 + 3x^2 + 2 = 0$$

$$(3) x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(4) x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

(4)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$  とする

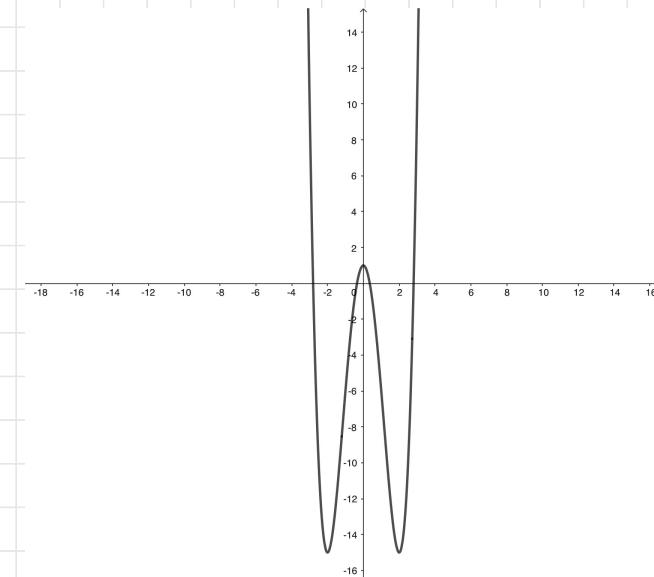
$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$$

$f'(x) = 0$  とすると  $x = 0, \pm 2$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |     |     |   |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| $x$     | ... | -2  | ... | 0 | ... | 2   | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0   | +   | 0 | -   | 0   | +   |
| $f(x)$  | ↘   | -15 | ↗   | 1 | ↘   | -15 | ↗   |

グラフは下図



上図より  $y = x^4 - 8x^2 + 1$  は  
x 軸と 4 点で交わるので  
異なる実数解 4 つ

方程式  $2x^3 - 3x^2 - a = 0$  がただ 1 個の実数解をもつように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

$$2x^3 - 3x^2 = a$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ とする}$$

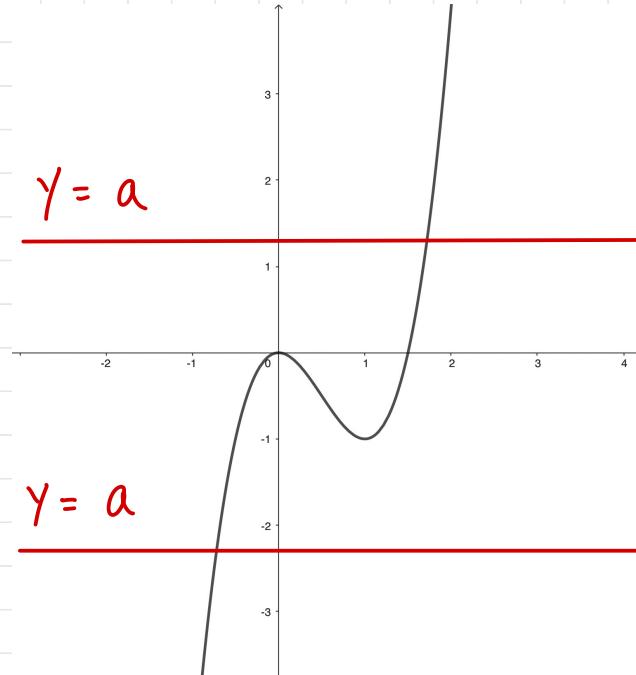
グラフは下図

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 1$$

$f(x)$  の増減表は

|         |     |   |     |    |     |
|---------|-----|---|-----|----|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... | 1  | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0 | -   | 0  | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 0 | ↘   | -1 | ↗   |



左図より  
 $2x^3 - 3x^2 - a = 0$  が  
 ただ 1 個の実数解をもつのは  
 $a < -1, a > 0$

練習  
24  $x \geq 0$  のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \geq 0 \text{ がいえればよい}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \text{ とする。}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ と } \exists \text{ と } x = -3, 1$$

$f(x)$  の  $x \geq 0$  の増減表は

| $x$     | 0 | ... | 1 | ... |
|---------|---|-----|---|-----|
| $f'(x)$ |   | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | 5 | ↗   | 0 | ↗   |

$f(x)$  の最小値が 0 なので  $f(x) \geq 0$

したがって  $x \geq 0$  のとき

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \geq 0 \text{ なので}$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } x^3 + 3x^2 + 5 \geq 9x$$

$x=1$  のとき極小値 0

# 不定積分

$x$ で微分すると  $f(x)$  になる関数を  $f(x)$  の原始関数という。

一般に関数  $f(x)$  の原始関数の 1つを  $F(x)$  とすると、 $f(x)$  の任意の原始関数は

$F(x) + C$  ( $C$  は積分定数) と表される。これを  $f(x)$  の不定積分という。

$\int f(x) dx$  で表し、 $\int f(x) dx = F(x) + C$  ( $C$  は積分定数) とかく。

関数  $f(x)$  の不定積分

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ ( $C$  は積分定数)}$$

関数  $x^n$  の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ ( $C$  は積分定数)}$$

練習  
25

次の中から、 $3x^2$  の原始関数であるものを選べ。

- ①  $6x$       ②  $x^3$       ③  $x^3 + 2x$       ④  $x^3 - 4$

$3x^2$  の原始関数 → 微分したら  $3x^2$  になる

②      ④

次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int 5x^2 dx$

(2)  $\int (x^2 + x - 1) dx$

(3)  $\int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx$

(4)  $\int (-2x^2 - x + 7) dx$

Cは積分定数とする。

(1)  $\int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C$

(2)  $\int (x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(3)  $\int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C$

(4)  $\int (-2x^2 - x + 7) dx = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$

次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int (t+2)(3t-1) dt$

(2)  $\int 3(t-1)^2 dt$

Cは積分定数とする。

(1)  $\int (t+2)(3t-1) dt$

$= \int (3t^2 + 5t - 2) dt$

$= t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + C$

(2)  $\int 3(t-1)^2 dt$

$= \int (3t^2 - 6t + 3) dt$

$= t^3 - 3t^2 + 3t + C$

次の 2 つの条件をともに満たす関数  $F(x)$  を求めよ。

$$[1] \quad F'(x) = 3x^2 - 4$$

$$[2] \quad F(-1) = 5$$

[1] もり

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int (3x^2 - 4) dx = x^3 - 4x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \cdots ①$$

① [2] もり

$$F(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + C = 5$$

$$-1 + 4 + C = 5$$

$$C = 2$$

$$\underline{F(x) = x^3 - 4x + 2}$$

## 定積分

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

( $f(x)$  を  $a$  から  $b$  まで積分する)

練習

30

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 x dx$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^2 dx$$

$$(3) \int_{-2}^1 x^3 dx$$

$$(4) \int_3^0 2 dx$$

$$(1) \int_1^3 x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{8}{2} = 4$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{9}{3} = 3$$

$$(3) \int_{-2}^1 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 = -\frac{15}{4}$$

$$(4) \int_3^0 2 dx = [2x]_3^0 = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$$

次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx$

(2)  $\int_2^3 (x-2)(x-3) dx$

(3)  $\int_{-1}^2 (-t^3 + 2t) dt$

(4)  $\int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt$

$$(1) \int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

$$(2) \int_2^3 (x-2)(x-3) dx = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3 = -\frac{1}{6}$$

$$(3) \int_{-1}^2 (-t^3 + 2t) dt = \left[ -\frac{1}{4}t^4 + t^2 \right]_{-1}^2 = -\frac{3}{4}$$

$$(4) \int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt = \int_{-2}^2 (t^3 + 4t^2 + 4t) dt = \left[ \frac{1}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 \right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$

次の定積分を求めよ。

$$\int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$\int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$= \int_1^3 x^3 dx - 3 \int_1^3 x dx + 2 \int_1^3 dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 - 3 \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 + 2 [x]_1^3$$

$$= 20 - 12 + 4$$

$$= 12$$

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx$$

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ (x+2)^2 - (x-2)^2 \right\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 8x dx$$

$$= [4x^2]_{-1}^1$$

$$= 0$$

## 定積分の性質

$$1 \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2 \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$3 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

練習  
35

次の定積分を求めよ。

$$(1) \quad \int_1^2 (3x^2 - 4x) dx + \int_2^3 (3x^2 - 4x) dx$$

$$(2) \quad \int_0^3 (x^2 + 2x) dx - \int_1^3 (x^2 + 2x) dx$$

$$(1) \quad \int_1^2 (3x^2 - 4x) dx + \int_2^3 (3x^2 - 4x) dx = \int_1^3 (3x^2 - 4x) dx = [x^3 - 2x^2]_1^3 = 10$$

$$(2) \quad \int_0^3 (x^2 + 2x) dx - \int_1^3 (x^2 + 2x) dx = \int_0^3 (x^2 + 2x) dx + \int_3^1 (x^2 + 2x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

(1)  $f(x) = 4x + 2 \int_0^2 f(t) dt$       (2)  $f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^1 f(t) dt$

(1)  $\int_0^2 f(t) dt = a \cdots ①$  とおく。

$f(x) = 4x + 2a \cdots ②$

(2)  $\int_{-1}^1 f(t) dt = a$  とおく  $\cdots ①$

$f(x) = 3x^2 + a \cdots ②$

②より  $f(t) = 4t + 2a$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (4t + 2a) dt \\ &= \left[ 2t^2 + 2at \right]_0^2 \\ &= 8 + 4a \cdots ③\end{aligned}$$

①③より  $8 + 4a = a$  ので

$a = -\frac{8}{3}$

$a = -\frac{8}{3}$  ②に代入して

$f(x) = 4x - \frac{16}{3}$

②より  $f(t) = 3t^2 + a$

$\int_{-1}^1 f(t) dt = [t^3 + at]_{-1}^1 = 2 + 2a \cdots ③$

①③より  $2 + 2a = a$

$a = -2$

a = -2 を ②に代入して

$f(x) = 3x^2 - 2$

$a$  を定数とするとき、 $x$  の関数  $\int_a^x f(t) dt$  の導関数は  $f(x)$  である。

すなわち  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

練習  
37

$x$  の関数  $\int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt$  の導関数を求めよ。

練習  
38

次の等式を満たす関数  $f(x)$  と定数  $a$  の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - x - 2$$

両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = (x^2 - x - 2)'$$

$$f(x) = 2x - 1$$

また、与えられた等式で  $x = a$  とすると 左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -1, 2$$

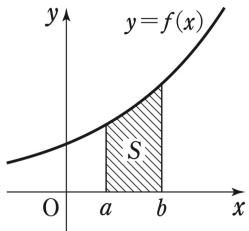
$$f(x) = 2x - 1$$

$$\underline{a = -1, 2}$$

## 定積分と面積 (1)

区間  $a \leq x \leq b$  で  $f(x) \geq 0$  のとき,  
 $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および 2 直線  
 $x = a, x = b$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

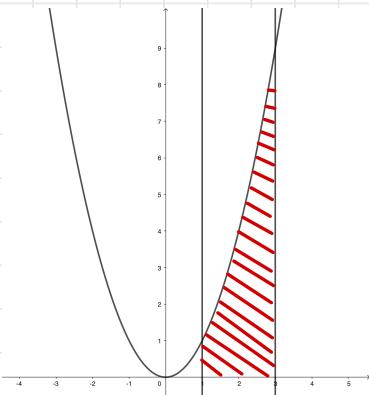


練習  
39

次の放物線と 2 直線および  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

- (1) 放物線  $y = x^2$ , 2 直線  $x = 1, x = 3$
- (2) 放物線  $y = x^2 + 2$ , 2 直線  $x = -1, x = 2$

(1)



$1 \leq x \leq 3$  で  $y \geq 0$  なので

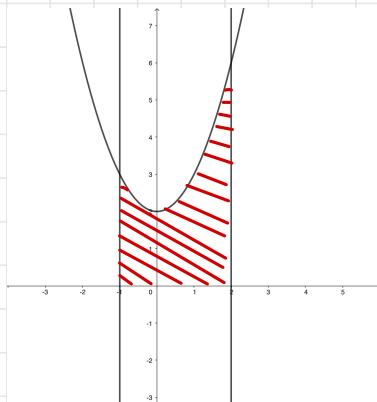
求める面積  $S$  は

$$S = \int_1^3 x^2 dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3$$

$$= \frac{26}{3}$$

(2)



$-1 \leq x \leq 2$  では  $y \geq 0$

求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx$$

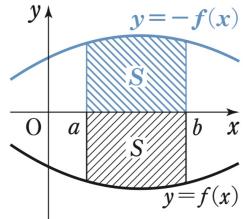
$$= \left[ \frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_{-1}^2$$

$$= 9$$

## 定積分と面積(2)

区間  $a \leq x \leq b$  で  $f(x) \leq 0$  のとき,  
 $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および 2 直線  
 $x = a, x = b$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx$$



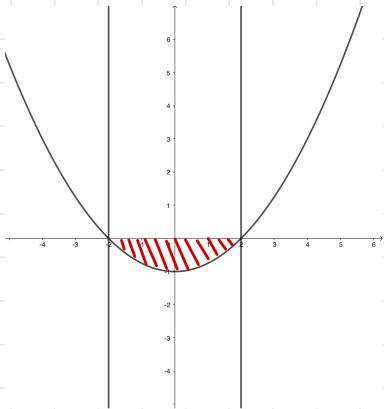
練習  
40

次の放物線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$(2) \quad y = x^2 - 2x$$

(1)



$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて}$$

$$x = \pm 2$$

$$-2 \leq x \leq 2 \text{ で } y \leq 0$$

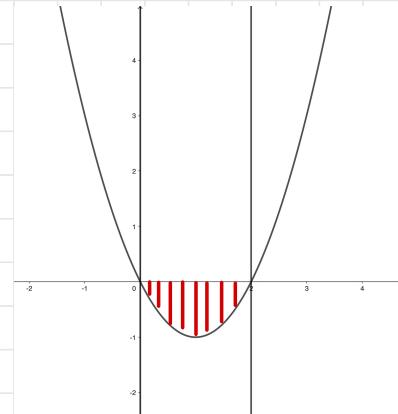
求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-2}^2 -\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{12}x^3 + x \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{8}{3}$$

(2)



$$x^2 - 2x = 0 \text{ を解いて}$$

$$x = 0, 2$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ で } y \leq 0$$

求める面積  $S$  は

$$S = \int_0^2 -(x^2 - 2x) dx$$

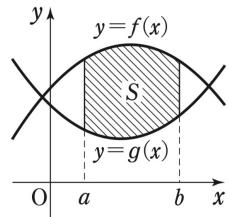
$$= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

### 定積分と面積 (3)

区間  $a \leq x \leq b$  で  $f(x) \geq g(x)$  のとき,  
 $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフおよび 2 直線  
 $x = a, x = b$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



練習

41

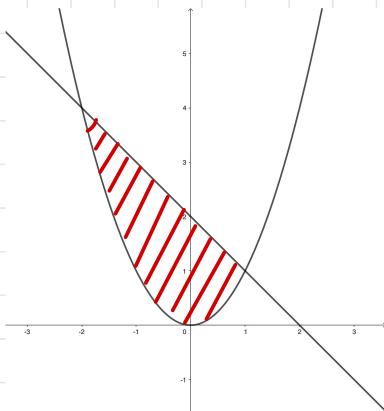
次の曲線や直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

(1)  $y = x^2, y = -x + 2$

(2)  ~~$y = -x^2 + 3, y = 2x$~~

(3)  $y = x^2 + 3x, y = x^2 - x - 6$

(1)



放物線と直線の交点の  $x$  座標は

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

よって求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(-x+2) - x^2\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

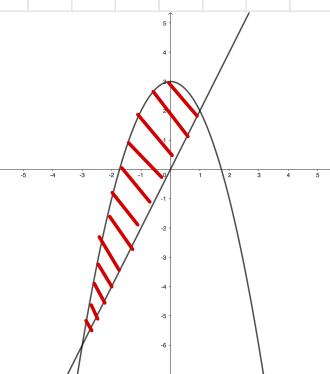
次の曲線や直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) \quad y = x^2, \quad y = -x + 2$$

$$(2) \quad y = -x^2 + 3, \quad y = 2x$$

$$(3) \quad y = -x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x - 6$$

(2)



放物線と直線の交点の  $x$  座標は

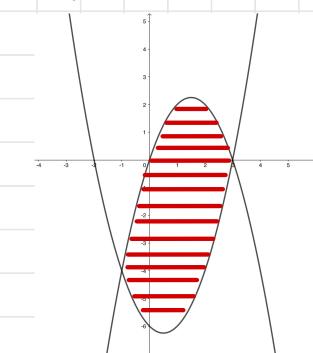
$$-x^2 + 3 = 2x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3, 1$$

(3)



2つの放物線の交点の  $x$  座標は

$$-x^2 + 3x = x^2 - x - 6$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = -1, 3$$

よって求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-3}^1 \{(-x^2 + 3) - (x^2 - x - 6)\} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1$$

$$= \frac{32}{3}$$

よって求める面積  $S$  は

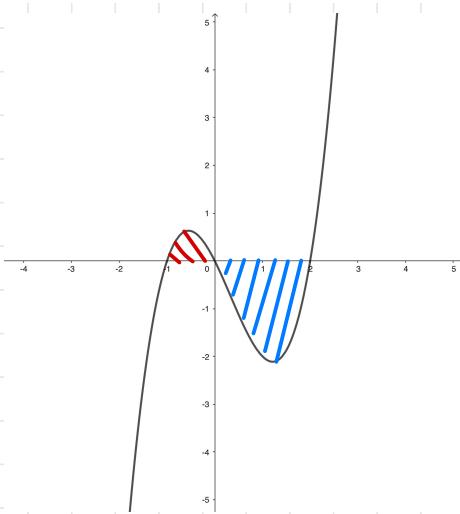
$$S = \int_{-1}^3 \{(-x^2 + 3x) - (x^2 - x - 6)\} dx$$

$$= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{64}{3}$$

次の曲線と  $x$  軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和  $S$  を求めよ。

$$y = x^3 - x^2 - 2x$$



$y = x^3 - x^2 - 2x$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標は

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1, 0, 2$$

グラフは左図  $-1 \leq x \leq 0$  で  $y \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq 2$  で  $y \leq 0$

よって求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 -(x^3 - x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

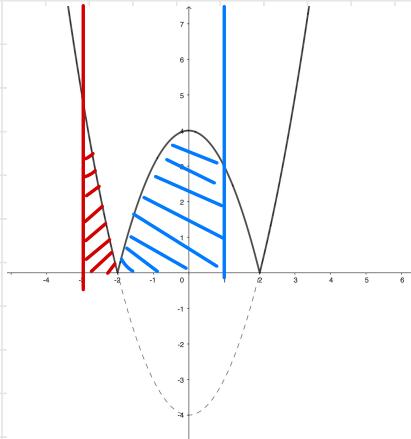
$$= \frac{37}{12}$$

次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_{-3}^1 |x^2 - 4| dx$

(2)  $\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx$

(1)



$y = |x^2 - 4|$  は

 $x \leq -2, 2 \leq x$  のとき

$y = x^2 - 4$

 $-2 \leq x \leq 2$  のとき

$y = -x^2 + 4$

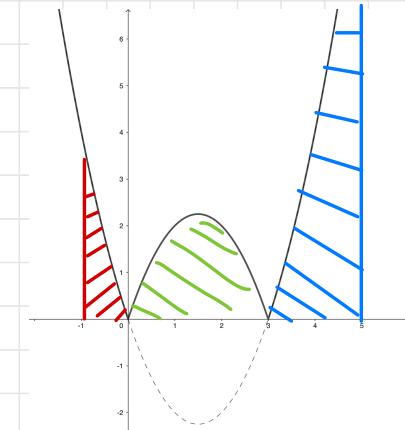
$$\int_{-3}^1 |x^2 - 4| dx$$

$$= \underline{\int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx} + \underline{\int_{-2}^1 (-x^2 + 4) dx}$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{34}{3}$$

(2)



$y = |x(x-3)|$ ,

$y = |x^2 - 3x|$  は

 $x \leq 0, 3 \leq x$  のとき

$y = x^2 - 3x$

 $0 \leq x \leq 3$  のとき

$y = -x^2 + 3x$

$$\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx$$

$$= \underline{\int_{-1}^0 x(x-3) dx} + \underline{\int_0^3 -x(x-3) dx} + \underline{\int_3^5 x(x-3) dx}$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^5$$

$$= 15$$

曲線  $y = x^3 + x^2 - 2x$  と、その曲線上の点  $(1, 0)$  における接線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

$$\text{接線の傾きは } f'(1), f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \text{ で } f'(1) = 3$$

接線の方程式は  $y = 3x - 3$

$f(x)$  と接線の交点の  $x$  座標は

$$x^3 + x^2 - 2x = 3x - 3$$

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(x-1)^2(x+3) = 0$$

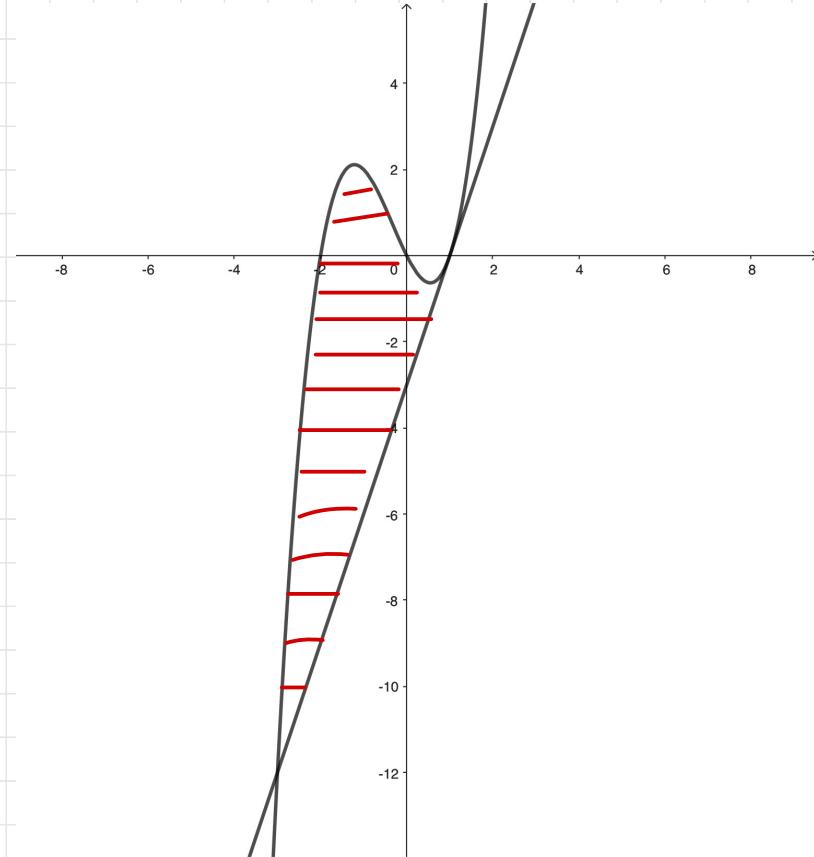
$$x = 1, -3$$

よって求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-3}^1 \left\{ (x^3 + x^2 - 2x) - (3x - 3) \right\} dx$$

$$= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{64}{3}$$



6分の1公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

練習  
1

放物線  $y = -x^2 + 6x - 7$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$y = -x^2 + 6x - 7$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は

$$-x^2 + 6x - 7 = 0 \text{ から } x = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\alpha = 3 - \sqrt{2}, \beta = 3 + \sqrt{2}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + 6x - 7) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - 6x + 7) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$$= -\frac{(-1)}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

