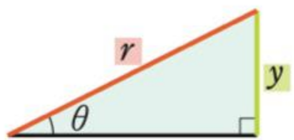
# 数Ⅰ

図形と計量

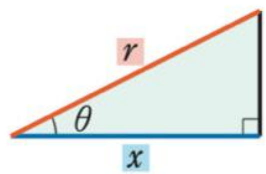
・三角比…三角形の大きさに関係なく、角度$\theta$の大きさだけで決まる辺の比
sin(正弦), cos(余弦), tan(正接)の3つがある.

## 三角比の定義

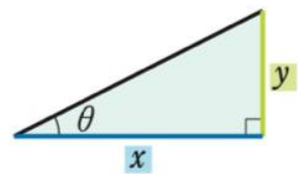
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$




$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

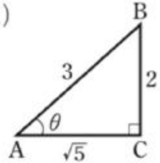



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

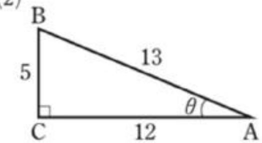


**練習 1** 下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

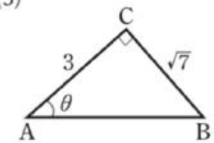
(1)




(2)




(3)




(1) $\sin\theta = \frac{2}{3}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

(3) 三平方の定理より

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$
$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = AB^2$$
$$AB^2 = 16$$
$$AB = 4 \quad (AB > 0 \text{ より})$$

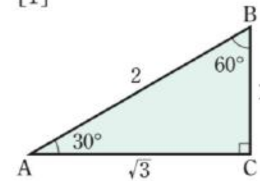
$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

## B　30°，45°，60° の三角比

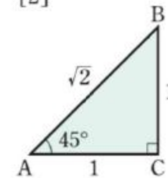
30°，45°，60° の三角比は，下の図 [1]，[2] から求められる。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

[1]




[2]




**練習 2** 右の表の空らんに適する数値を入れて，表を完成させよ。

| $\theta$ | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan\theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

# 三角比の表

| $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|
| 0° | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| 1° | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 |
| 2° | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 |
| 3° | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 |
| 4° | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 |
| 5° | 0.0872 | 0.9962 | 0.0875 |
| 6° | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 |
| 7° | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 |
| 8° | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 |
| 9° | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 |
| 10° | 0.1736 | 0.9848 | 0.1763 |
| 11° | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 |
| 12° | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 |
| 13° | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 |
| 14° | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 |
| 15° | 0.2588 | 0.9659 | 0.2679 |
| 16° | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 |
| 17° | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 |
| 18° | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 |
| 19° | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 |
| 20° | 0.3420 | 0.9397 | 0.3640 |
| 21° | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 |
| 22° | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 |
| 23° | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 |
| 24° | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 |
| 25° | 0.4226 | 0.9063 | 0.4663 |
| 26° | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 |
| 27° | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 |
| 28° | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 |
| 29° | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 |
| 30° | 0.5000 | 0.8660 | 0.5774 |
| 31° | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 |
| 32° | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 |
| 33° | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 |
| 34° | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 |
| 35° | 0.5736 | 0.8192 | 0.7002 |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 |
| 40° | 0.6428 | 0.7660 | 0.8391 |
| 41° | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 |
| 42° | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 |
| 43° | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 |
| 44° | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 |
| 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 |

| $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|
| 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 |
| 46° | 0.7193 | 0.6947 | 1.0355 |
| 47° | 0.7314 | 0.6820 | 1.0724 |
| 48° | 0.7431 | 0.6691 | 1.1106 |
| 49° | 0.7547 | 0.6561 | 1.1504 |
| 50° | 0.7660 | 0.6428 | 1.1918 |
| 51° | 0.7771 | 0.6293 | 1.2349 |
| 52° | 0.7880 | 0.6157 | 1.2799 |
| 53° | 0.7986 | 0.6018 | 1.3270 |
| 54° | 0.8090 | 0.5878 | 1.3764 |
| 55° | 0.8192 | 0.5736 | 1.4281 |
| 56° | 0.8290 | 0.5592 | 1.4826 |
| 57° | 0.8387 | 0.5446 | 1.5399 |
| 58° | 0.8480 | 0.5299 | 1.6003 |
| 59° | 0.8572 | 0.5150 | 1.6643 |
| 60° | 0.8660 | 0.5000 | 1.7321 |
| 61° | 0.8746 | 0.4848 | 1.8040 |
| 62° | 0.8829 | 0.4695 | 1.8807 |
| 63° | 0.8910 | 0.4540 | 1.9626 |
| 64° | 0.8988 | 0.4384 | 2.0503 |
| 65° | 0.9063 | 0.4226 | 2.1445 |
| 66° | 0.9135 | 0.4067 | 2.2460 |
| 67° | 0.9205 | 0.3907 | 2.3559 |
| 68° | 0.9272 | 0.3746 | 2.4751 |
| 69° | 0.9336 | 0.3584 | 2.6051 |
| 70° | 0.9397 | 0.3420 | 2.7475 |
| 71° | 0.9455 | 0.3256 | 2.9042 |
| 72° | 0.9511 | 0.3090 | 3.0777 |
| 73° | 0.9563 | 0.2924 | 3.2709 |
| 74° | 0.9613 | 0.2756 | 3.4874 |
| 75° | 0.9659 | 0.2588 | 3.7321 |
| 76° | 0.9703 | 0.2419 | 4.0108 |
| 77° | 0.9744 | 0.2250 | 4.3315 |
| 78° | 0.9781 | 0.2079 | 4.7046 |
| 79° | 0.9816 | 0.1908 | 5.1446 |
| 80° | 0.9848 | 0.1736 | 5.6713 |
| 81° | 0.9877 | 0.1564 | 6.3138 |
| 82° | 0.9903 | 0.1392 | 7.1154 |
| 83° | 0.9925 | 0.1219 | 8.1443 |
| 84° | 0.9945 | 0.1045 | 9.5144 |
| 85° | 0.9962 | 0.0872 | 11.4301 |
| 86° | 0.9976 | 0.0698 | 14.3007 |
| 87° | 0.9986 | 0.0523 | 19.0811 |
| 88° | 0.9994 | 0.0349 | 28.6363 |
| 89° | 0.9998 | 0.0175 | 57.2900 |
| 90° | 1.0000 | 0.0000 | なし |

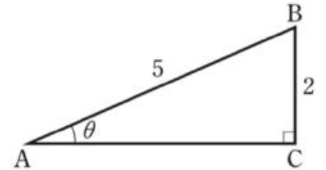
**練習 3** 次の値を三角比の表から求めよ。

(1) $\sin 12^\circ$　(2) $\cos 48^\circ$　(3) $\tan 75^\circ$

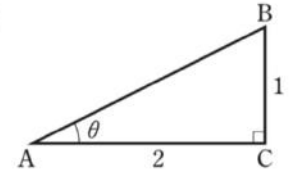
(1) 0.2079　(2) 0.6691　(3) 3,7321

**練習 4** 下の図における $\theta$ のおよその大きさを，三角比の表を用いて求めよ。

(1)




(2)




(1) $\sin\theta = \dfrac{2}{5} = 0.4$

$\theta = 24^\circ$

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2} = 0.5$

$\theta = 27^\circ$

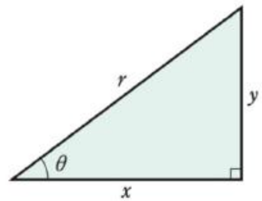
## D 三角比の応用

右の図の直角三角形において，

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

であるから，次が成り立つ。

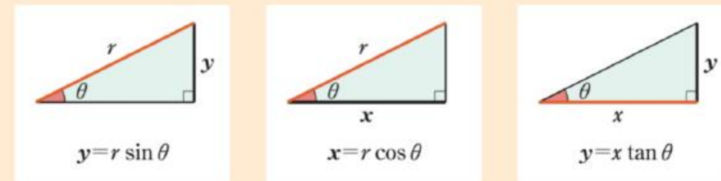
$$y=r\sin\theta$$




同様にして，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$ であるから，次が成り立つ。

$$x=r\cos\theta$$

$$y=x\tan\theta$$

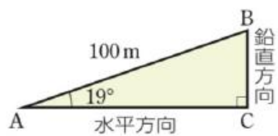



**例題 1** 傾斜角 19° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき，鉛直方向には何m上がることになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

**解答** 右の図において

$$BC=AB\sin 19^\circ$$
$$=100\times0.3256$$
$$=32.56\fallingdotseq33$$

答 33 m



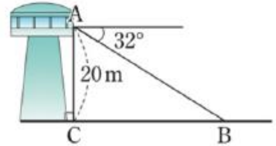

**練習 5** 例題 1 において，水平方向には何m進むことになるか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

左図において

$$AC=AB\cos 19^\circ$$
$$=100\times0.9455$$
$$=94.55\fallingdotseq95$$

95 m

**練習 6** 地上からの高さ 20 m の地点Aで地上の場所Bを見下ろしたら，その角は右の図のように水平面に対して 32° であった。Bは，Aの真下の地点Cから何m離れているか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。




$\angle CAB = 90° - 32° = 58°$

$BC = AC \tan 58°$

$= 20 \times 1.6003$

$= 32.006 \fallingdotseq 32$

<u>32 m</u>

## 三角比の表

| $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ | $\theta$ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 |
| 1° | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 | 46° | 0.7193 | 0.6947 | 1.0355 |
| 2° | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 | 47° | 0.7314 | 0.6820 | 1.0724 |
| 3° | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 | 48° | 0.7431 | 0.6691 | 1.1106 |
| 4° | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 | 49° | 0.7547 | 0.6561 | 1.1504 |
| 5° | 0.0872 | 0.9962 | 0.0875 | 50° | 0.7660 | 0.6428 | 1.1918 |
| 6° | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 | 51° | 0.7771 | 0.6293 | 1.2349 |
| 7° | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 | 52° | 0.7880 | 0.6157 | 1.2799 |
| 8° | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 | 53° | 0.7986 | 0.6018 | 1.3270 |
| 9° | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 | 54° | 0.8090 | 0.5878 | 1.3764 |
| 10° | 0.1736 | 0.9848 | 0.1763 | 55° | 0.8192 | 0.5736 | 1.4281 |
| 11° | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 | 56° | 0.8290 | 0.5592 | 1.4826 |
| 12° | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 | 57° | 0.8387 | 0.5446 | 1.5399 |
| 13° | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 | 58° | 0.8480 | 0.5299 | 1.6003 |
| 14° | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 | 59° | 0.8572 | 0.5150 | 1.6643 |
| 15° | 0.2588 | 0.9659 | 0.2679 | 60° | 0.8660 | 0.5000 | 1.7321 |
| 16° | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 | 61° | 0.8746 | 0.4848 | 1.8040 |
| 17° | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 | 62° | 0.8829 | 0.4695 | 1.8807 |
| 18° | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 | 63° | 0.8910 | 0.4540 | 1.9626 |
| 19° | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 | 64° | 0.8988 | 0.4384 | 2.0503 |
| 20° | 0.3420 | 0.9397 | 0.3640 | 65° | 0.9063 | 0.4226 | 2.1445 |
| 21° | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 | 66° | 0.9135 | 0.4067 | 2.2460 |
| 22° | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 | 67° | 0.9205 | 0.3907 | 2.3559 |
| 23° | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 | 68° | 0.9272 | 0.3746 | 2.4751 |
| 24° | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 | 69° | 0.9336 | 0.3584 | 2.6051 |
| 25° | 0.4226 | 0.9063 | 0.4663 | 70° | 0.9397 | 0.3420 | 2.7475 |
| 26° | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 | 71° | 0.9455 | 0.3256 | 2.9042 |
| 27° | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 | 72° | 0.9511 | 0.3090 | 3.0777 |
| 28° | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 | 73° | 0.9563 | 0.2924 | 3.2709 |
| 29° | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 | 74° | 0.9613 | 0.2756 | 3.4874 |
| 30° | 0.5000 | 0.8660 | 0.5774 | 75° | 0.9659 | 0.2588 | 3.7321 |
| 31° | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 | 76° | 0.9703 | 0.2419 | 4.0108 |
| 32° | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 | 77° | 0.9744 | 0.2250 | 4.3315 |
| 33° | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 | 78° | 0.9781 | 0.2079 | 4.7046 |
| 34° | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 | 79° | 0.9816 | 0.1908 | 5.1446 |
| 35° | 0.5736 | 0.8192 | 0.7002 | 80° | 0.9848 | 0.1736 | 5.6713 |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 | 81° | 0.9877 | 0.1564 | 6.3138 |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 | 82° | 0.9903 | 0.1392 | 7.1154 |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 | 83° | 0.9925 | 0.1219 | 8.1443 |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 | 84° | 0.9945 | 0.1045 | 9.5144 |
| 40° | 0.6428 | 0.7660 | 0.8391 | 85° | 0.9962 | 0.0872 | 11.4301 |
| 41° | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 | 86° | 0.9976 | 0.0698 | 14.3007 |
| 42° | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 | 87° | 0.9986 | 0.0523 | 19.0811 |
| 43° | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 | 88° | 0.9994 | 0.0349 | 28.6363 |
| 44° | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 | 89° | 0.9998 | 0.0175 | 57.2900 |
| 45° | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 | 90° | 1.0000 | 0.0000 | なし |

**三角比の相互関係**

1 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

---

**練習 7** $\theta$は鋭角とする。$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \div \dfrac{1}{3} = 2\sqrt{2}$

$\underline{\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan\theta = 2\sqrt{2}}$

**練習 8** $\theta$は鋭角とする。$\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + (\sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$3 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{3}$

$\cos\theta > 0$ より

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\underline{\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

**$90^\circ-\theta$ の三角比**

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

○+△=90° のとき

sin○=cos△

cos○=sin△

tan○=$\frac{1}{\tan△}$

**練習 9** 次の□に適する鋭角の角度を入れよ。

(1) $\sin 62^\circ=\cos\square$　(2) $\cos 78^\circ=\sin\square$　(3) $\tan 23^\circ\tan\square=1$

(1) $\sin 62^\circ=\cos(90^\circ-62^\circ)=\cos 28^\circ$

(2) $\cos 78^\circ=\sin(90^\circ-78^\circ)=\sin 12^\circ$

(3) $\tan 23^\circ=\dfrac{1}{\tan(90^\circ-23^\circ)}$

$\tan 23^\circ=\dfrac{1}{\tan 67^\circ}$

$\tan 23^\circ\tan 67^\circ=1$

**練習 10** 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 64^\circ$　(2) $\cos 58^\circ$　(3) $\tan 83^\circ$

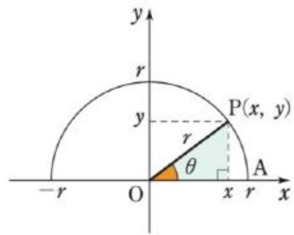
(1) $\sin 64^\circ=\cos(90^\circ-64^\circ)=\cos 26^\circ$

(2) $\cos 58^\circ=\sin(90^\circ-58^\circ)=\sin 32^\circ$

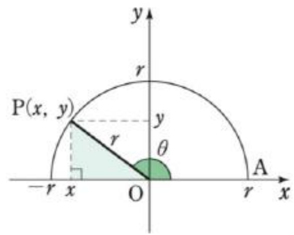
(3) $\tan 83^\circ=\dfrac{1}{\tan(90^\circ-83^\circ)}=\dfrac{1}{\tan 7^\circ}$

## A 座標を用いた三角比の定義

右の図のように，座標平面上で，原点Oを中心とする半径 $r$ の半円をかき，この半円と $x$ 軸の正の部分との交点をAとする。




$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲にある $\theta$ に対して，$\angle AOP=\theta$ となる点Pをこの半円上にとり，点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。



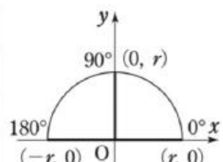

このとき，$\theta$ の三角比を次の式で定義する。

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

〈注意〉 $\theta=90°$ のときは $x=0$ であるから，$\tan\theta\left(=\frac{y}{x}\right)$ は定義されない。したがって，$\tan\theta$ と書いたときには $\theta \neq 90°$ であるものとする。

0°，90°，180° の三角比については，次のようになる。

| $\theta$ | 0° | 90° | 180° |
|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $\sin 0°=0$ | $\sin 90°=1$ | $\sin 180°=0$ |
| $\cos\theta$ | $\cos 0°=1$ | $\cos 90°=0$ | $\cos 180°=-1$ |
| $\tan\theta$ | $\tan 0°=0$ | | $\tan 180°=0$ |

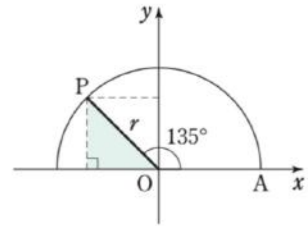



**練習 11** 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ。

(1) 135°

$r=\boxed{\phantom{0}}$ にとると，

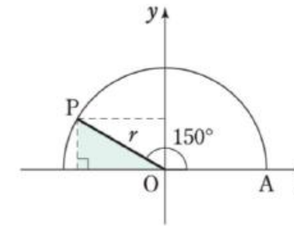
点Pの座標は $\boxed{\phantom{000}}$



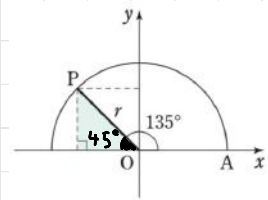

(2) 150°

$r=\boxed{\phantom{0}}$ にとると，

点Pの座標は $\boxed{\phantom{000}}$



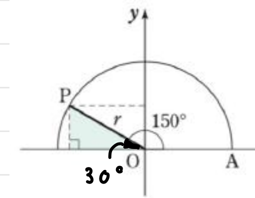

(1)




$r=\sqrt{2}$

$P(-1,\ 1)$

(2)

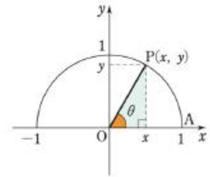



$r=2$

$P(-\sqrt{3},\ 1)$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある $\theta$ の三角比について，137 ページで定義した。三角比の値は $\theta$ だけで定まるから，ここからは $r=1$ として考えよう。

右の図のように，原点Oを中心とする半径 1 の半円上に $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。




$$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x$$

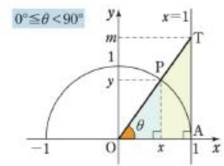
であり，点Pは半円上にあるから

$$0 \leqq y \leqq 1,\ -1 \leqq x \leqq 1$$

よって，次のことがいえる。

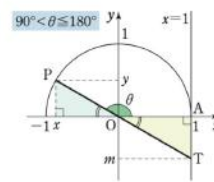
**$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$0 \leqq \sin\theta \leqq 1,\ -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$**

右の図のように，$\theta \neq 90^\circ$ のとき，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，$\tan\theta$ は次の式で表される。




$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\theta \neq 90^\circ$ のとき，$m$ のとる値の範囲は実数全体である。したがって，$\tan\theta$ のとる値の範囲は実数全体である。




三角比の符号とそのとる値の範囲について，次のようにまとめられる。

| $\theta$ | $0^\circ$ | 鋭角 | $90^\circ$ | 鈍角 | $180^\circ$ | とる値の範囲 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | ＋ | 1 | ＋ | 0 | $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ |
| $\cos\theta$ | 1 | ＋ | 0 | － | $-1$ | $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ |
| $\tan\theta$ | 0 | ＋ |  | － | 0 | 実数全体 |

〈注意〉 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲にある角 $\theta$ を鈍角という。

第4章　図形と計量

**$180^\circ - \theta$ の三角比**

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

○＋□＝180° のとき

sin○＝sin□

cos○＝−cos□

tan○＝−tan□

---

**練習 12** 次の値を，三角比の表を用いて求めよ。

(1) $\sin 140^\circ$　(2) $\cos 156^\circ$　(3) $\tan 100^\circ$

(1) $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

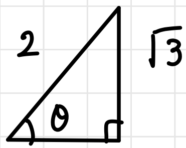
(2) $\cos 156^\circ = -\cos(180^\circ - 24^\circ) = -\cos 24^\circ$

(3) $\tan 100^\circ = -\tan(180^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ$

**練習 13** $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす $\theta$ を求めよ。

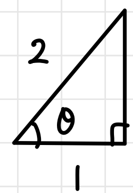
(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$　(3) $\sin\theta = 0$

(1)




$\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(2)




$\theta = 120^\circ$

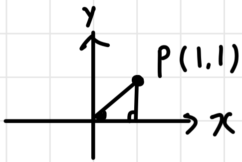
(3)

$\theta = 0^\circ, 180^\circ$

**練習 14** $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす $\theta$ を求めよ。

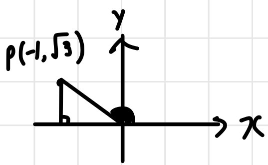
(1) $\tan\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(1) $x$座標 $y$座標がともに1の点をPとすると




$\underline{\theta = 45°}$

(2) $x$座標が $-\sqrt{3}$, $y$座標が1の点をPとすると




$\underline{\theta = 150°}$

**三角比の相互関係**

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
3. $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

---

**練習 15** $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

**練習 16** $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のうち，1つが次の値をとるとき，他の2つの値を求めよ。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ (2) $\tan\theta = -2$

(1)

$\cos\theta < 0$ なので $\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \dfrac{1}{9}$

$\sin^2\theta = \dfrac{8}{9}$

$\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\tan\theta = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

(2)

$\tan\theta < 0$ なので $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + (-2)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$

$\cos\theta < 0$ より

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$= -2 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

直線 $y=mx$ と $x$ 軸のなす角 $\theta$

$$\tan\theta = m$$

練習 17

次の直線と $x$ 軸の正の向きとのなす角 $\theta$ を求めよ。

(1) $y=x$　　(2) $y=-\sqrt{3}x$

(1) $y=x$ の傾きは $1$ なので

$$\tan\theta = 1$$

$$\underline{\theta = 45^\circ}$$

(2) $y=-\sqrt{3}x$ の傾きは $-\sqrt{3}$ なので

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\underline{\theta = 120^\circ}$$

**正弦定理**

△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

**練習 18** 次のような △ABC において，外接円の半径 $R$ を求めよ。

(1) $a=5$，$A=45^\circ$　　(2) $b=\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

**練習 19** $c=10$ である △ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき，$C$ を求めよ。

(1) 正弦定理より

$$2R=\frac{5}{\sin 45^\circ}$$

$$2R=5\div\sin 45^\circ$$

$$2R=5\div\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2R=5\times\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2R=5\sqrt{2}$$

$$R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(2) 正弦定理より

$$2R=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$$

$$2R=\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2R=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2R=2$$

$$R=1$$

正弦定理より

$$\frac{10}{\sin C}=2\times 10$$

$$\frac{1}{\sin C}=2$$

$$\sin C=\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq C \leqq 180^\circ$ より

$$C=30^\circ$$

練習 20 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $c=\sqrt{2}$，$B=30^\circ$，$C=45^\circ$ のとき $b$

(2) $a=2$，$A=45^\circ$，$C=120^\circ$ のとき $c$

(1)

正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$b \div \sin 30^\circ = \sqrt{2} \div \sin 45^\circ$$

$$b \div \frac{1}{2} = \sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b \times \frac{2}{1} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$2b = 2$$

$$\underline{b = 1}$$

(2)

正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$c \div \sin 120^\circ = 2 \div \sin 45^\circ$$

$$c \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

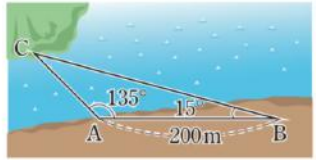
$$c = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{c = \sqrt{6}}$$

**練習 21** 右の図のように，200 m 離れた海岸の 2 地点 A，B と，島にある地点 C について

$\angle CAB = 135°$，$\angle CBA = 15°$

であった。B，C 間の距離を求めよ。




三角形の内角の和より

$\angle C = 180° - 135° - 15° = 30°$

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C}$$

$$\frac{BC}{\sin 135°} = \frac{200}{\sin 30°}$$

$$BC \div \sin 135° = 200 \div \sin 30°$$

$$BC \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \div \frac{1}{2}$$

$$BC \times \frac{\sqrt{2}}{1} = 200 \times \frac{2}{1}$$

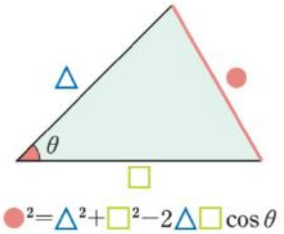
$$BC = \frac{200 \times 2}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$$

$\underline{BC = 200\sqrt{2}\ m}$

**余弦定理**

△ABC において，次が成り立つ。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$




---

**練習 23** 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=3$, $c=2\sqrt{2}$, $B=45^\circ$ のとき $b$

(2) $a=3$, $b=5$, $C=120^\circ$ のとき $c$

(1) 余弦定理より

$$b^2=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\times3\times2\sqrt{2}\times\cos45^\circ$$

$$b^2=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2=9+8-12=5$$

$b>0$ より

$$\underline{b=\sqrt{5}}$$

(2) 余弦定理より

$$c^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$$

$$c^2=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

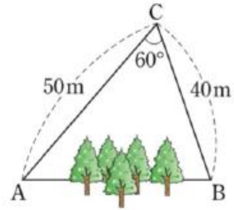
$$c^2=9+25+15=49$$

$c>0$ より

$$\underline{c=7}$$

練習 24

右の図のように，林をはさんで 2 地点 A，B がある。地点 C から A と B を見て ∠ACB を測ると 60° で，また A，C 間の距離は 50 m，B，C 間の距離は 40 m であった。A，B 間の距離を求めよ。




余弦定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$AB^2 = (50)^2 + (40)^2 - 2 \times 50 \times 40 \times \cos 60^\circ$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2 \times 50 \times 40 \times \frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 2500 + 1600 - 2000$$

$$AB^2 = 2100$$

$AB > 0$ より

$$\underline{AB = 10\sqrt{21}}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

△ABC において，$\cos A$ の符号は $b^2+c^2-a^2$ の符号と同じになるので，$b^2+c^2$ と $a^2$ の大小によって，次のことがいえる。

| $b^2+c^2$ と $a^2$ の大小 | $b^2+c^2>a^2$ | $b^2+c^2=a^2$ | $b^2+c^2<a^2$ |
|---|---|---|---|
| $\cos A$ | $\cos A>0$ | $\cos A=0$ | $\cos A<0$ |
| $A$ の種類 | $A$ は鋭角 | $A$ は直角 | $A$ は鈍角 |

**練習 25** 次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

(1) $a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2\sqrt{3}$ のとき $A$

(2) $a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき $B$

**練習 26** △ABC の 3 辺の長さが次のようなとき，$A$ は鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べよ。

(1) $a=9$，$b=3\sqrt{2}$，$c=7$　　(2) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2$

(1) 余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos A=\frac{1^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2\sqrt{3}}$$

$$\cos A=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°\leqq A\leqq180°$ より

$A=30°$

(2) 余弦定理より

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+1^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot1}$$

$$\cos B=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq B\leqq180°$ より

$B=135°$

(1)

$b^2+c^2=(3\sqrt{2})^2+7^2=67$

$a^2=9^2=81$

$b^2+c^2<a^2$ より

A は鈍角

(2)

$b^2+c^2=(\sqrt{6})^2+2^2=10$

$a^2=(\sqrt{7})^2=7$

$b^2+c^2>a^2$ より

A は鋭角

練習 27

$\triangle ABC$ において，$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理より

$$b^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cos 45^\circ$$

$$b^2=2+3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2=2+3+2\sqrt{3}+1-2(\sqrt{3}+1)$$

$$b^2=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2$$

$$b^2=4$$

$b>0$ より

$$b=2$$

余弦定理より

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)}$$

$$\cos A=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

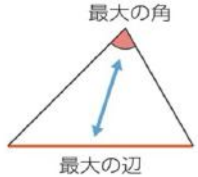
$$A=30^\circ$$

$$C=180-30-45=105^\circ$$

$$\underline{b=2,\ A=30^\circ,\ C=105^\circ}$$

**三角形の 2 辺の大小関係は，その向かい合う角の大小関係と一致する。**

よって，三角形の最大の辺に向かい合う角が，その三角形の最大の角である。




---

練習 28 △ABC において次の等式が成り立つとき，この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

正弦定理より　$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$a : b : c = 8 : 7 : 13$

正の数 k を用いて

$a = 8k,\ b = 7k,\ c = 13k$ となるので

C が最大の角である.

余弦定理より

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} = -\frac{1}{2}$$

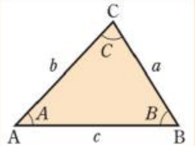
$\underline{C = 120^\circ}$

## 三角形の面積

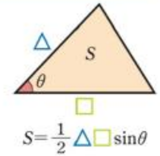
△ABC の面積 $S$ は，次の式で表される。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$




三角形の面積 $S$ は，２辺の長さとその間の角の大きさから求めることができる。




---

**練習 29** 次のような △ABC の面積 $S$ を求めよ。

(1) $b=10$，$c=8$，$A=45°$ (2) $a=6$，$c=5$，$B=150°$

(3) 1 辺の長さが $a$ の正三角形 ABC

(1) $S=\frac{1}{2}\times 10\times 8\times \sin 45° = \frac{1}{2}\times 10\times 8\times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times \sin 150° = \frac{1}{2}\times 6\times 5\times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

(3) $S=\frac{1}{2}\times a\times a\times \sin 60° = \frac{1}{2}\times a\times a\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

練習 30

3 辺の長さが次のような △ABC の面積 $S$ を求めよ。

(1) $a=8$, $b=5$, $c=7$ (2) $a=13$, $b=14$, $c=15$

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{7}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1-\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$S = \frac{1}{2}\times 5\times 7\times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

$\underline{10\sqrt{3}}$

(2) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{(14)^2+(15)^2-(13)^2}{2\cdot 14\cdot 15} = \frac{3}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$\sin^2 A = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\sin A > 0$ より

$$\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}\times 14\times 15\times \frac{4}{5} = 84$$

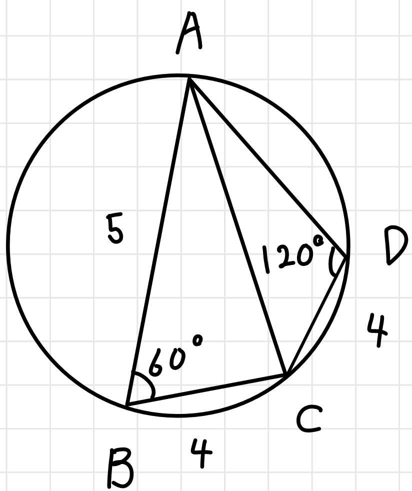
$\underline{84}$

**練習 31** 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝4，CD＝4，$\angle B = 60^\circ$ のとき，四角形 ABCD の面積 $S$ を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は $180^\circ$ なので

$\angle B = 60^\circ$ より $\angle D = 120^\circ$

また，四角形ABCDの対角線を引くと下図になる．




$\triangle ABC$ について余弦定理から

$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 60^\circ = 21$

$AC > 0$ より $AC = \sqrt{21}$

$\triangle ACD$ について余弦定理より

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos 120^\circ$

$(\sqrt{21})^2 = AD^2 + 4^2 - 2 \times AD \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$AD^2 + 4AD - 5 = 0$

$(AD+5)(AD-1) = 0$

$AD > 0$ より $AD = 1$

$S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$

$S = 6\sqrt{3}$

## C 三角形の内接円と面積

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

**練習 32** △ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，この三角形の内接円の半径 $r$ を求めよ。

余弦定理より

$$\cos A=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\times 3\times 2}=-\frac{1}{4}$$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

$\sin A>0$ より

$$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

また，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\cdot r(4+3+2)$$

$$\frac{9}{2}r=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$r=\frac{3\sqrt{15}}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$r=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

## 発展 ヘロンの公式

△ABC の面積 $S$ は

$2s=a+b+c$ とすると　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

練習 1　3 辺の長さが 7，8，13 である三角形の面積 $S$ を求めよ。

$2s=7+8+13$ から

$s=14$

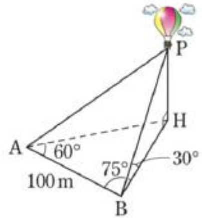
$S=\sqrt{14\cdot(14-7)(14-8)(14-13)}=14\sqrt{3}$

$S=14\sqrt{3}$

**練習 33** 100 m 離れた 2 地点 A と B から，気球 P の真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき，

$\angle HAB = 60^\circ$，$\angle HBA = 75^\circ$

であった。また，B から P を見上げた角度は 30° であった。図において，気球 P の高さ PH を求めよ。




$\angle AHB = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$

△HAB について正弦定理より

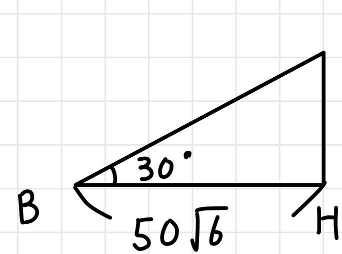
$$\frac{BH}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$$

$$BH = \frac{100}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ$$

$$BH = 100 \div \sin 45^\circ \times \sin 60^\circ$$

$$BH = 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{6}$$

△PBH について




$$\frac{PH}{BH} = \tan 30^\circ$$

$$PH = BH \times \tan 30^\circ$$

$$PH = 50\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$$

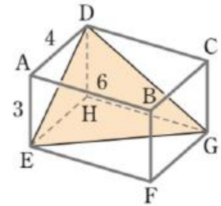
$$PH = 50\sqrt{2}$$

**練習 34** 右の図のように，

$AB=6,\ AD=4,\ AE=3$

である直方体 ABCD-EFGH がある。

△DEG の面積 $S$ を求めよ。




直方体の性質から

$AB=DC=EF=6$

$AD=FG=4$

$AE=CG=3$

三平方の定理より

$DE^2=AD^2+AE^2=4^2+3^2=25$

$DE>0$ より

$DE=5$

$DG^2=CG^2+DC^2=3^2+6^2=45$

$DG>0$ より

$DG=3\sqrt{5}$

$EG^2=EF^2+FG^2=6^2+4^2=52$

$EG>0$ より

$EG=2\sqrt{13}$

余弦定理より

$$\cos\angle DGE=\frac{(3\sqrt{5})^2+(2\sqrt{13})^2-5^2}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{65}}$$

$\sin^2\angle DGE+\cos^2\angle DGE=1$

$$\sin^2\angle DGE=1-\cos^2\angle DGE=\frac{59}{65}$$

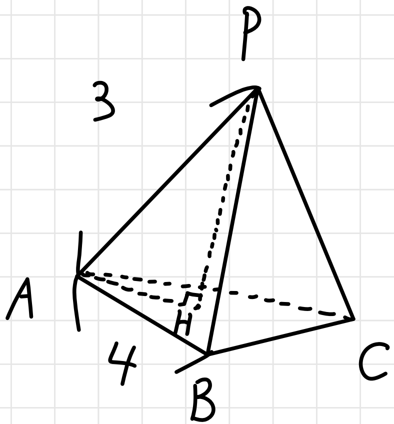
$\sin\angle DGE>0$ より

$$\sin\angle DGE=\sqrt{\frac{59}{65}}$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{65}}=3\sqrt{59}$$

$S=3\sqrt{59}$

**練習 1** PA＝PB＝PC＝3，AB＝BC＝CA＝4 である三角錐 PABC の体積 $V$ を求めよ。




△ABCについて正弦定理より

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH$$

$$AH = \frac{2}{\sin 60^\circ} = 2 \div \sin 60^\circ = 2 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

△PAHについて三平方の定理より

$$AH^2 + PH^2 = PA^2$$

$$PH^2 = PA^2 - AH^2 = 3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{33}{9}$$

$PH > 0$より $PH = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$

$$V = S \times PH \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{33}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$

$$V = \frac{4\sqrt{11}}{3}$$