数C

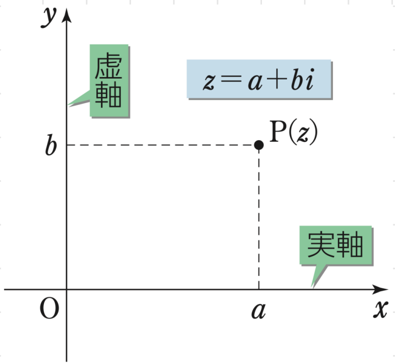
複素数平面

・ 複素数 … 2つの実数 a, b と虚数単位 i を用いて $a+bi$ と表す. a を実部, b を虚部という.

複素数 $a+bi$ について

$a=0$ のとき, bi となりこれは純虚数. $b=0$ のとき a となり実数となる.

・ 複素数平面 (複素平面) … 複素数 $a+bi$ に対して, 座標平面上の点 (a, b) を対応させることで複素数を表す座標平面



複素数平面上の1つの点は1つの複素数を表す.

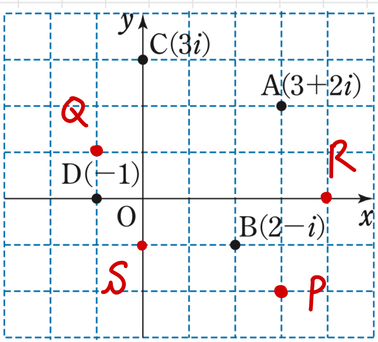
複素数平面において, x 軸は実軸, y 軸は虚軸として扱い

実軸上の点は実数, 原点O以外の虚軸上の点は純虚数である.

複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) とかく.

練習 1 次の点を右の図に示せ。

P($3-2i$), Q($-1+i$),
R(4), S($-i$)

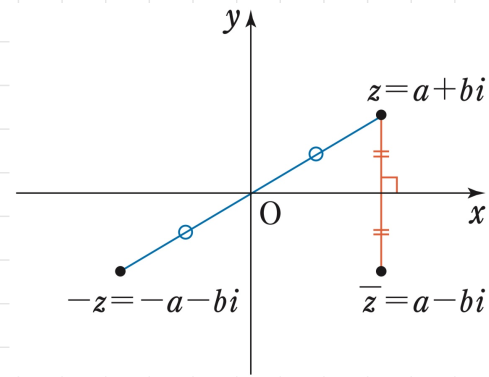


・共役複素数 … 複素数 $a+bi$ に対して $a-bi$ のこと.(虚部の符号のみ変える.)
複素数 z に対して $\overline{z}$ で表す.

複素数平面上で z, $\overline{z}$, $-z$ を図示すると以下がいえる

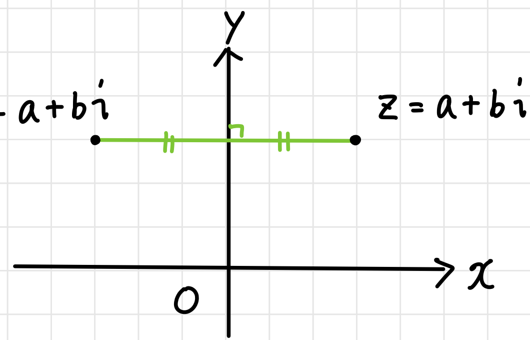
点 z と $\overline{z}$ は実軸に関して対称.

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称



練習 2　複素数平面上で，点 z と点 $-\overline{z}$ の位置関係を述べよ。

$z=a+bi$ のとき $-\overline{z}=-a+bi$



z と $-\overline{z}$ は虚軸に関して対称

複素数 z について次が成立

1　z が実数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$

2　z が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　　ただし，$z \neq 0$

練習 3　複素数 $z=a+bi$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a，b をそれぞれ z と $\overline{z}$ を用いて表せ。

(2)　(1)の結果を利用して，上の **1**，**2** が成り立つことを確かめよ。

$$\begin{cases} z=a+bi & \cdots ① \\ \overline{z}=a-bi & \cdots ② \end{cases}$$

(1)　① + ② より

$$\begin{array}{rl} & z = a+bi \\ +) & \overline{z} = a-bi \\ \hline & z+\overline{z} = 2a \end{array}$$

$$a=\frac{z+\overline{z}}{2}$$

① − ② より

$$\begin{array}{rl} & z = a+bi \\ -) & \overline{z} = a-bi \\ \hline & z-\overline{z} = 2bi \end{array}$$

$$b=\frac{z-\overline{z}}{2i}=-\frac{z-\overline{z}}{2}i$$

(2)　z が実数となるのは

$b=0$ のとき.

$$-\frac{z-\overline{z}}{2}i=0$$

$$z-\overline{z}=0$$

$$z=\overline{z}$$

逆に $\overline{z}=z$ のとき(1)より $b=0$

よって $z=a+bi$ は実数

z が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z$

z が純虚数となるのは

$a=0$ のとき

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=0$$

$$z+\overline{z}=0$$

$$\overline{z}=-z$$

逆に $\overline{z}=-z$ で $z \neq 0$ のとき

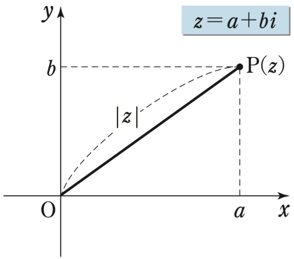
$a=0$，また $z \neq 0$ のとき $b \neq 0$

よって $z=a+bi$ は純虚数

z が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=-z$

ただし $z \neq 0$

・ 複素数 z の絶対値 … 複素数平面上における原点 O と点 P(z) のキョリ



複素数の絶対値

複素数 $a+bi$ の絶対値は　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

練習 4 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $3-2i$　(2) $-2+4i$　(3) -5　(4) $3i$

(1) $|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

(2) $|-2+4i|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(3) $|-5|=5$

(4) $|3i|=3$

練習 5 複素数 z について，$|-\overline{z}|=|z|$ であることを確かめよ。

$z=a+bi$ とする.

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$-\overline{z}$ は　$-\overline{z}=-a+bi$

$|-\overline{z}|=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

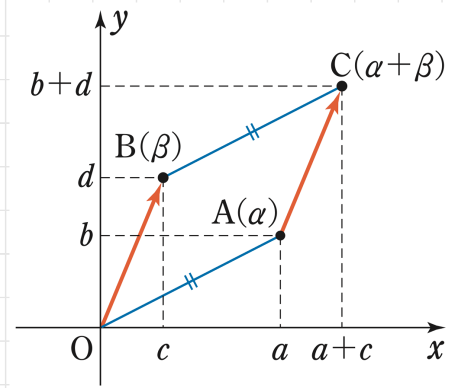
よって $|-\overline{z}|=|z|$

・複素数の和と差の図示

複素数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ とすると $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha+\beta)$ をとる.

右図からわかるように, $\alpha+\beta$ は α の先に β の根がつくように β を平行移動させることで図示が可能である.

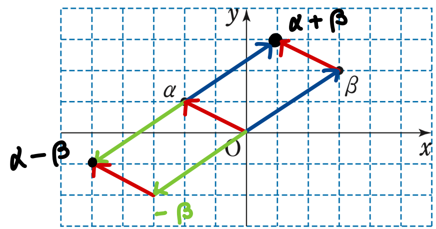


また, $\alpha-\beta$ を図示するときは $\alpha+(-\beta)$ として β の向きを逆にして平行移動すればよい.

練習 6 右の図の複素数平面上の点 α, β について，次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$



練習 7 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) A$(2+3i)$，B$(1+6i)$　　(2) C$(3-4i)$，D$(1-2i)$

(1) $AB=(1+6i)-(2+3i)=-1+3i$

$|AB|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

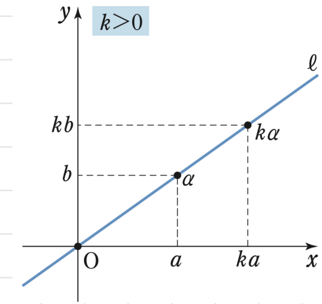
(2) $CD=(1-2i)-(3-4i)=-2+2i$

$|CD|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

・複素数の実数倍

複素数 α, β について $\alpha \neq 0$ のとき

3点 $0, \alpha, \beta$ が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在



練習 8 $\alpha = 3-6i$, $\beta = 1+yi$ とする。2 点 A(α), B(β) と原点Oが一直線上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき

$\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在する.

$$\beta = k\alpha$$

$$1+yi = k(3-6i)$$

$$1+yi = 3k - 6ki$$

$$\begin{cases} 3k = 1 & \cdots ① \\ y = -6k & \cdots ② \end{cases}$$

①より $k = \frac{1}{3}$

これを②に代入すると

$$y = -6 \times \frac{1}{3} = -2$$

$\underline{y = -2}$

共役複素数の性質

1 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　2 $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　4 $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

練習 9　複素数 α，β について，$\alpha+\beta+i=0$ のとき，$\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ を求めよ。

$\alpha+\beta+i=0$ より

$\alpha+\beta=-i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$ なので

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{-i}$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=i$

$\underline{\overline{\alpha}+\overline{\beta}=i}$

複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ について

1 $z+\overline{z}$ は実数である　　2 $z\overline{z}=|z|^2$

練習 10　複素数 α について，次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

$|\alpha|=1$ のとき $|\alpha|^2=1$ なので

$\alpha\cdot\overline{\alpha}=1 \Rightarrow \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

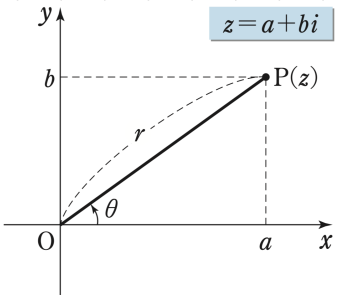
ここで

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=\alpha^2+\overline{\alpha^2}$

したがって $\alpha^2+\overline{\alpha^2}$ は実数であるから

$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ も実数である.

・ 極形式 … 複素数平面上で0でない複素数 $z=a+bi$ を表す点をP, 線分OPの長さを r とする.
半直線OPを実軸の正の部分を始線とした動径と考えて, 動径OPの表す角を θ とする.



$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\quad a=r\cos\theta\ ,\quad b=r\sin\theta$$

よって 0でない複素数 z は

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

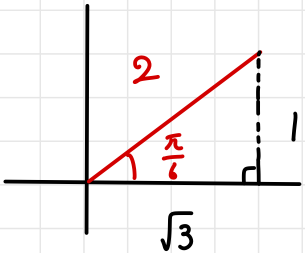
※ $r>0$, θ は弧度法で表された一般角.
$r=|z|$, $\theta=\arg z$

・ 偏角 … 複素数 z の極形式における角 θ. $\arg z$ と表す. (アーギュメントzと読む)
z の偏角の1つを θ_0 とすると $\arg z=\theta_0+2n\pi$ (n は整数) と表される.

練習 11 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)，(2)では $0 \leqq \theta < 2\pi$，(3)，(4)では $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

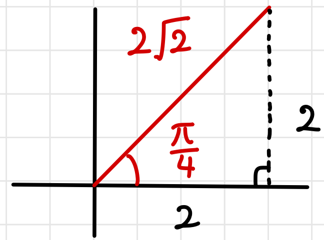
(1) $\sqrt{3}+i$　　(2) $2+2i$　　(3) $1-\sqrt{3}\,i$　　(4) $-i$

(1)



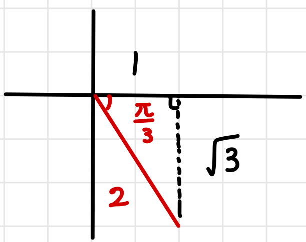
$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(2)



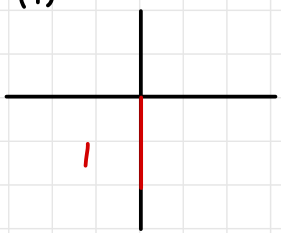
$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(3)



$$1-\sqrt{3}\,i = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

(4)



$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

zと$\bar{z}$の極形式について

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき $\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

練習 12

複素数 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。このとき，$-z$ の極形式について，次のことを示せ。

$$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$$

加法定理より

$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

$$r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\} = r(-\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= -r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ なので

$$r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\} = -z$$

極形式で表された複素数の積と商

$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$$\boldsymbol{\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$$

練習 13 次の複素数 α, β について，$\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

複素数の積と商の絶対値と偏角

1 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ $\qquad$ $\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$

2 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $\qquad$ $\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$

練習 14 複素数 α，β について，$|\alpha|=2$，$|\beta|=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $|\alpha\beta|$ (2) $|\alpha^3|$ (3) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$ (4) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|$

(1) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=6$

(2) $|\alpha^3|=|\alpha|^3=8$

(3) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{3}$

(4) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha^2|}=\dfrac{\beta}{|\alpha|^2}=\dfrac{3}{4}$

・ 複素数の積と図形

2つの複素数 α と z の積 αz について，その絶対値と偏角は次のようになる.

$|\alpha z| = |\alpha||z|$　　$\arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z$

練習 15　次の点は，点 z をどのように移動した点であるか。

(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)z$　　(2)　$(-1+i)z$　　(3)　$2iz$

(1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より

点 $(1+\sqrt{3}i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し原点からのキョリを2倍にした点である.

(2) $(-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ より

点 $(-1+i)z$ は点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し原点からのキョリを $\sqrt{2}$ 倍にした点である.

(3) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ より

点 $2iz$ は点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し原点からのキョリを2倍にした点である.

練習 16 $z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\dfrac{\pi}{6}$　　(2) $\dfrac{2}{3}\pi$　　(3) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(4) $-\dfrac{\pi}{3}$

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(4-2i)=(2\sqrt{3}+1)+(2-\sqrt{3})i$

(2) $\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)z=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i$

(3) $\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}z=-i(4-2i)=-2-4i$

(4) $\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}z=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)=(2-\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+1)i$

練習 17 $\alpha=2+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，β の値を求めよ。

点βは点αを原点を中心に$\frac{\pi}{3}$または$-\frac{\pi}{3}$だけ回転した点である.

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

または

$$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

よって　$\underline{\beta=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i \text{　または　} \beta=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}$

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

練習 18 次の式を計算せよ。

(1) $(1+\sqrt{3}\,i)^5$　　(2) $(1+i)^8$　　(3) $(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}$

(1) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ なので

$$(1+\sqrt{3}i)^5=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^5=2^5\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}i$$

(2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$(1+i)^8=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^8=(\sqrt{2})^8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16$$

(3) $1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ なので

$$(1-\sqrt{3}i)^{-6}=\left[2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right]^{-6}=2^{-6}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{1}{64}$$

1 の n 乗根

1 の n 乗根は，次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

練習 19　1 の 8 乗根を求めよ。

$$z_K = \cos\frac{2K}{8}\pi + i\sin\frac{2K}{8}\pi \quad (K=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

よって

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_3 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_5 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_6 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$

$$z_7 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

練習 20 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^2=i$ ~~(2) $z^4=-4$ (3) $z^2=1+\sqrt{3}i$~~

(1)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ なので

$z^2=i$

$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

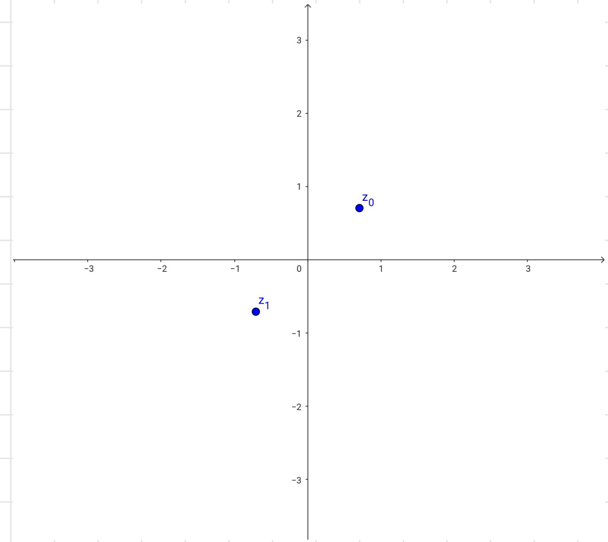
両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1$, $2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=1$ …②

$2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では $k=0, 1$ なので $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ …③



②③を①に代入すると

$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

練習 20 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

~~(1) $z^2=i$~~　(2) $z^4=-4$　~~(3) $z^2=1+\sqrt{3}i$~~

(2)

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

また, $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$ なので

$$z^4=-4$$

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

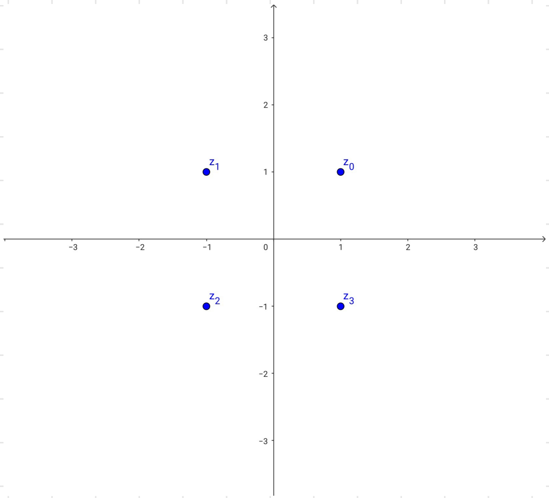
$r^4=4$, $4\theta=\pi+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ …②

$4\theta=\pi+2k\pi \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$k=0,1,2,3$, なので $\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi,\dfrac{7}{4}\pi$ …③



②③を①に代入すると

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=1+i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1+i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)=-1-i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)=1-i$

練習 20 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

~~(1) $z^2=i$~~　~~(2) $z^4=-4$~~　(3) $z^2=1+\sqrt{3}\,i$

(3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① とする.

$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また, $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ なので

$z^2=1+\sqrt{3}i$

$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

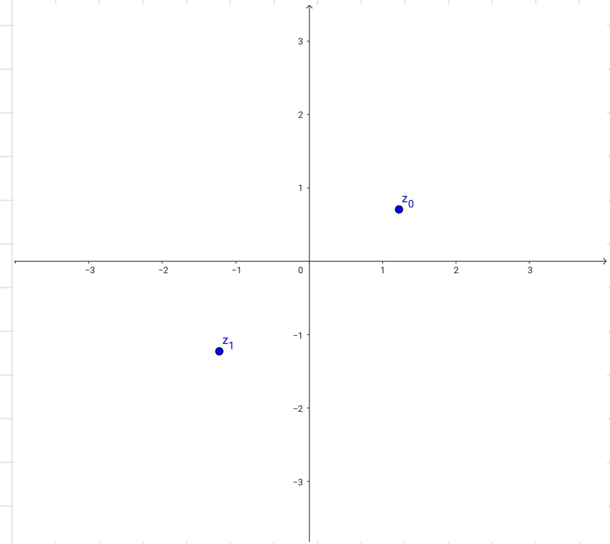
$r^2=2$, $2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ … ②

$2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$k=0,1$ なので $\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ … ③



②③を①に代入すると

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を C(γ)，$m:n$ に外分する点を D($\overset{\text{デルタ}}{\delta}$) とすると

内分点　$\gamma=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　　外分点　$\delta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点を表す複素数は　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

練習 21　A($1+5i$)，B($7-i$) とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1：2 に内分する点C　　(2)　線分 AB の中点M

(3)　線分 AB を 3：2 に外分する点D

(1)

$$C=\frac{2(1+5i)+(7-i)}{1+2}=\frac{9+9i}{3}=3+3i$$

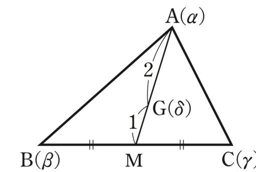
(2)

$$M=\frac{(1+5i)+(7-i)}{2}=\frac{8+4i}{2}=4+2i$$

(3)

$$D=\frac{-2(1+5i)+3(7-i)}{3-2}=19-13i$$

練習 22　3点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする△ABC について，その重心を G(δ) とするとき，$\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ であることを示せ。



点Mは点B，Cの中点なので　$\dfrac{\beta+\gamma}{2}$

点Gは点A，Mを 2：1 に内分する点なので

$$\delta=\frac{\alpha+2\cdot\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{2+1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

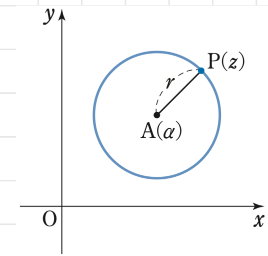
・方程式の表す図形

点A(α)を中心とする半径rの円上の点をP(z)とするとAP=rとなる.

$$|z-\alpha| = r \quad \cdots ①$$

したがって①を満たす点z全体の集合は点Aを中心とする半径rの円である.

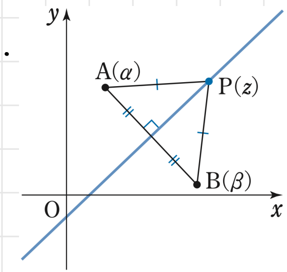
※原点中心半径rの円は $|z| = r$ と表される.



2点A(α), B(β)を結ぶ線分ABの垂直二等分線上の点をP(z)とするとAP=BPとなる.

$$|z-\alpha| = |z-\beta| \quad \cdots ②$$

したがって②を満たす点z全体の集合は線分ABの垂直二等分線である.



練習 23 次の方程式を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か。

(1) $|z|=2$　　(2) $|z-(1+i)|=1$　　(3) $|z-2|=|z-4i|$

(1) 原点中心半径2の円

(2) 点 $1+i$ 中心 半径1の円

(3) 2点A(2), B(4i)を結ぶ線分ABの垂直二等分線

練習 24 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体の集合は，どのような図形か。

方程式の両辺を2乗すると

$$4|z-3|^2=|z|^2$$

$$4(z-3)(\overline{z-3})=z\cdot\overline{z}$$

$$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\cdot\overline{z}$$

$$4(z\cdot\overline{z}-3z-3\overline{z}+9)=z\cdot\overline{z}$$

$$4z\cdot\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=z\cdot\overline{z}$$

$$3z\cdot\overline{z}-12z-12\overline{z}+36=0$$

$$z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$$

$$z\cdot\overline{z}-4z-4\overline{z}+16-4=0$$

$$(z-4)(\overline{z}-4)=4$$

$$(z-4)(\overline{z-4})=4$$

$$|z-4|^2=4$$

$$|z-4|=2$$

点4中心 半径2の円

練習 25 $w=i(z-2)$ とする。点 z が原点Oを中心とする半径1の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか。

点 z は $|z|=1$ を満たす.

$w=i(z-2)$ より $z=\dfrac{w+2i}{i}$

$$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$$

$|z|=1$ より

$$|w+2i|=1$$

よって

点 w は 点 $-2i$ 中心 半径1の円を描く

点αを中心とする回転

点βを，点αを中心としてθだけ回転した点を表す複素数をγとすると　$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

練習 26 $\alpha=1+i$，$\beta=5+3i$ とする。点βを，点αを中心として$\frac{\pi}{6}$だけ回転した点を表す複素数γを求めよ。

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

$$\gamma-(1+i)=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(5+3i)-(1+i)\}$$

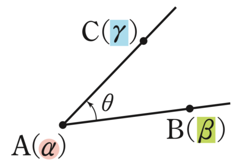
$$\gamma=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4+2i)+1+i$$

$$=2\sqrt{3}+(\sqrt{3}+3)i$$

半直線のなす角

異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は

$$\theta = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



$$\theta = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

極形式の計算において

なす角の差は商をとる

練習 27 3 点 $A(1-i)$, $B(2+i)$, $C(2i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\alpha=1-i$, $\beta=2+i$, $\gamma=2i$ とする.

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{2i-(1-i)}{(2+i)-(1-i)}=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ なので

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{4}$$

3 点 A，B，C が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

練習 28 3 点 A$(-1+i)$，B$(3-i)$，C$(x+3i)$ について，次の問いに答えよ。ただし，x は実数とする。

(1) 2 直線 AB，AC が垂直に交わるように，x の値を定めよ。

(2) 3 点 A，B，C が一直線上にあるように，x の値を定めよ。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x+3i)-(-1+i)}{(3-i)-(-1+i)}=\frac{(x+1)+2i}{4-2i}=\frac{\{(x+1)+2i\}(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{2x+(x+5)i}{10}$$

(1) 2直線AB, ACが垂直に交わるとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となるので　$\underline{x=0}$

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるとき $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数となるので　$x+5=0$ より　$\underline{x=-5}$

練習 29

3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ を頂点とする △ABC について，等式 $\gamma=(1-i)\alpha+i\beta$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値　　(2) △ABC の 3 つの角の大きさ

(1)

$$\gamma=\alpha-i\alpha+i\beta$$

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)i$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=i$$

(2)

(1) より $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ なので

$|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$ となるから

$AC:AB=1:1$

$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{2}$ なので

△ABC は $AB=AC$, $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle C=\dfrac{\pi}{4}$

練習 1 3 点 A$(-1+i)$，B$(1-i)$，C$(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i)$ を頂点とする △ABC はどのような三角形か。

$\alpha=-1+i$, $\beta=1-i$, $\gamma=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$ とする

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)-(-1+i)}{(1-i)-(-1+i)}=\frac{(1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})i}{2(1-i)}$$

$a=1-\sqrt{3}$, $b=-1-\sqrt{3}$ とおく.

$$\frac{(1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})i}{2(1-i)}=\frac{a+bi}{2(1-i)}=\frac{(a+bi)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{(a-b)+(a+b)i}{2\cdot2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\cdot2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$ より $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$$ より $AB:AC=1:1$

よって △ABC は正三角形