

數 II

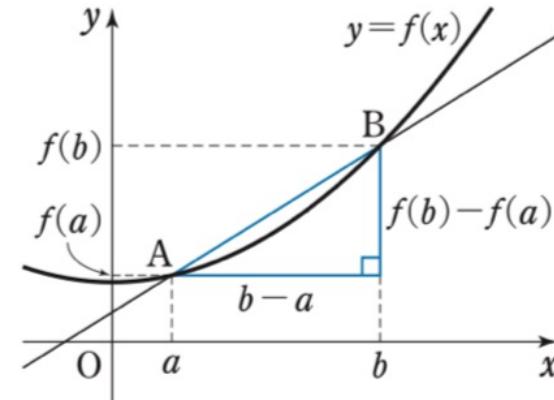
微分積分



平均変化率

$y = f(x)$ の値が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の変化の値

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



練習

1

次の平均変化率を求めよ。

- (1) 1次関数 $y = 2x$ の, $x = a$ から $x = b$ までの平均変化率
- (2) 2次関数 $y = -x^2$ の, $x = 2$ から $x = 2+h$ までの平均変化率

$$(1) \frac{2b - 2a}{b - a} : \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$$

$$(2) \frac{-(2+h)^2 - (-2^2)}{(2+h) - 2} : \frac{-h^2 - 4h}{h} = -h - 4$$

木極限値

関数 $f(x)$ において x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、 x を a に限りなく近づくときの木極限値という。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

練習
2

次の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h)$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2)$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} (12 - 6h + h^2) = 12 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 6$$

$f(x)$ の $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

練習
3

関数 $f(x) = 3x^2$ について、次の微分係数を求めよ。

(1) $f'(1)$

(2) $f'(-2)$

(3) $f'(a)$

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 6)$$

$$= 6$$

$$(2) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h)^2 - 3 \cdot (-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - 12h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 12)$$

$$= -12$$

$$(3) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 6a)$$

$$= 6a$$

接線の傾きと微分係数

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは
関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい

練習
4

関数 $y = x^2$ のグラフ上の次の点における接線の傾きを求めよ。

(1) 点 $(1, 1)$

(2) 点 $(-2, 4)$

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

接線の傾き 2

$$(2) f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4$$

接線の傾き -4

導関数 $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

練習 5 導関数の定義にしたがって、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x$

(2) $f(x) = -x^2$

$$(1) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3$$

$$= 3$$

$$(2) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h)^2 - (-x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2xh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2x)$$

$$= -2x$$

関数 x^n と 定数関数の導関数

関数 x^n の導関数は $(x^n)' = n x^{n-1}$

定数関数 c の導関数は $(c)' = 0$

練習 6 上の公式を用いて、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^4$

(2) $y = x^5$

$$(1) y' = 4x^3$$

$$(2) y' = 5x^4$$

関数の定数倍 および 和・差の導関数

k は定数とする。

$$\textcircled{1} \quad Y = k f(x) \rightarrow y' = k f'(x)$$

$$\textcircled{2} \quad y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

$$\textcircled{3} \quad y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

練習
7 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = 4x^2 + 3x - 4$$

$$(2) \quad y = -3x^2 + x - 2$$

$$(3) \quad y = 4x^3 - 2x^2 - 5x$$

$$(4) \quad y = -x^4 - x + 3$$

$$(5) \quad y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$(6) \quad y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$(1) \quad y' = 8x + 3 \quad (2) \quad y' = -6x + 1$$

$$(3) \quad y' = 12x^2 - 4x - 5$$

$$(4) \quad y' = -4x^3 - 1$$

$$(5) \quad y' = 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$(6) \quad y' = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

練習
8 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (x+2)(x+3)$$

$$(2) \quad y = x(x+2)(x-2)$$

$$(3) \quad y = -2x(x+1)(x-3)$$

$$(4) \quad y = 3(x^2 - 2)^2$$

$$(1) \quad y = x^2 + 5x + 6 \quad (2) \quad y = x^3 - 4x$$

$$y' = 2x + 5$$

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$(3) \quad y = -2x^3 + 4x^2 + 6x$$

$$y' = -6x^2 + 8x + 6$$

$$(4) \quad y = 3x^4 - 12x^2 + 12$$

$$y' = 12x^3 - 24x$$

練習

9

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ について、次の x の値における微分係数を求めるよ。

(1) $x = 2$

(2) $x = 0$

(3) $x = -2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\begin{aligned}(1) f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) \\&= 24\end{aligned}$$

練習

10

次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(0) = -3, \quad f'(1) = 1, \quad f(0) = 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ とする}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= -3 \text{ より} & f'(0) &= 2a \cdot 0 + b = -3 \\b &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(1) &= 1 \text{ より} & f'(1) &= 2a \cdot 1 + b = 1 \\2a + b &= 1\end{aligned}$$

$$b = -3 \text{ より } a = 2$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 2 \text{ より} & f(0) &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \\c &= 2\end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

練習 次の t の関数を微分せよ。ただし、 a 、 b は定数とする。

11

$$(1) \ s = 3t^2 - 4t + 2$$

$$(2) \ f(t) = at^3 + bt^2$$

$$(1) \ s' = 6t - 4$$

$$(2) \ f'(t) = 3at^2 + 2bt$$

練習 半径 r の球の体積を V 、表面積を S とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 、 $S = 4\pi r^2$

12

である。 V と S を r の関数とみて、それぞれ r で微分せよ。

$$V' = 4\pi r^2$$

$$S' = 8\pi r$$

グラフ上の点における接線の方程式

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

練習
13

関数 $y = 2x^2 - 4x + 3$ のグラフ上に x 座標が 2 である点 A をとる。点

A における接線の方程式を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \text{ とする}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 3$$

よし A は $(2, 3)$

$$f'(x) = 4x - 4$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

接線の傾きは 4

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 5$$

練習

14

次の接線の方程式を求めよ。

(1) 関数 $y = x^2 + 1$ のグラフに点 C(-1, -7) から引いた接線

(2) 関数 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフに原点 O から引いた接線

(1) $f(x) = x^2 + 1$, 接点の x 座標を a とする。

$$\text{接点は } (a, f(a)) = (a, a^2 + 1)$$

$$f'(x) = 2x \text{ より}$$

$f'(a) = 2a$ なので 接線の傾きは $2a$

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

これが (-1, -7) を $x = -1$ ので

$$-7 - (a^2 + 1) = 2a(-1 - a)$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a-2)(a+4) = 0$$

$$a = 2, -4$$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 4x - 3$$

$$a = -4 \text{ のとき } y = -8x - 15$$

(2) $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 接点の x 座標を a とする

$$\text{接点は } (a, f(a)) = (a, a^2 - 2a + 4)$$

$$f'(x) = 2x - 2 \text{ より}$$

$f'(a) = 2a - 2$ なので 接線の傾きは $2a - 2$

$$y - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(x - a)$$

これが 原点を $x = 0$ ので

$$0 - (a^2 - 2a + 4) = (2a - 2)(0 - a)$$

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 2x$$

$$a = -2 \text{ のとき } y = -6x$$

)

関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号

ある区間で

常に $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で「増加」。

常に $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で「減少」。

常に $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ はその区間で「定数」。

練習
15 次の関数の増減を調べよ。

$$(1) f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$$

$$(2) f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 12x \\ = 3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 4$$

$$f'(x) > 0 \text{ を解くと } x < 0, 4 < x$$

$$f'(x) < 0 \text{ を解くと } 0 < x < 4$$

$f(x)$ の増減は

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	5	↓	-27	↑

$f(x)$ は

$x \leq 0, 4 \leq x$ で「増加」

$0 \leq x \leq 4$ で「減少」

$$(2) f'(x) = -6x^2 - 6x \\ = -6x(x+1)$$

$f(x)$ の増減は

x	...	0	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↑	0	↗	1	↑

$f(x)$ は

$x \leq -1, 0 \leq x$ で「減少」

$-1 \leq x \leq 0$ で「増加」

関数の極大・極小

$f(x)$ が $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき

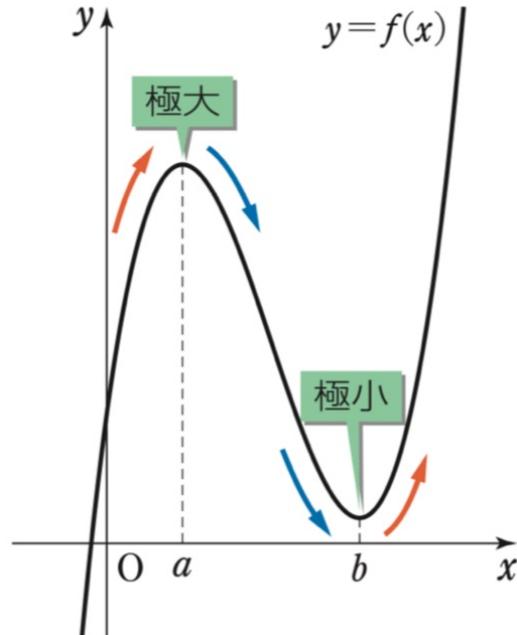
$f(x)$ は $x = a$ で「極大」であり、 $f(a)$ は極大値

$f(x)$ が $x = b$ を境目として減少から増加に移るとき

$f(x)$ は $x = b$ で「極小」であり、 $f(b)$ は極小値

極大値と極小値をまとめて極値という。

※ 極値が必ずしも最大値・最小値になるとは限らない



練習 16 次の関数の極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

16

$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$(2) \quad y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

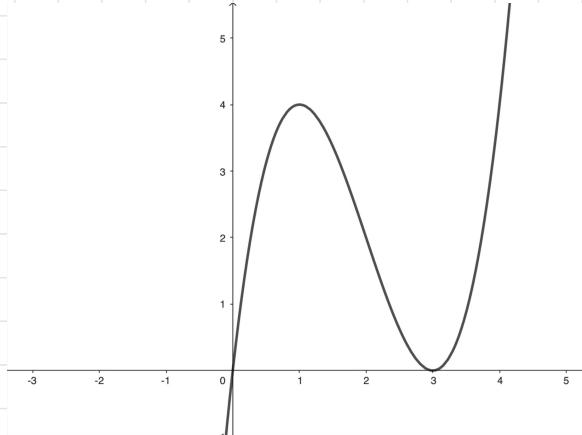
$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$x = 1, 3$$

グラフは下図



増減表は下図

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	4	↓	0	↑

$x = 1$ で極大値 4

$x = 3$ で極小値 0

$$(2) \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1 \quad \text{増減表は下図}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$= -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると}$$

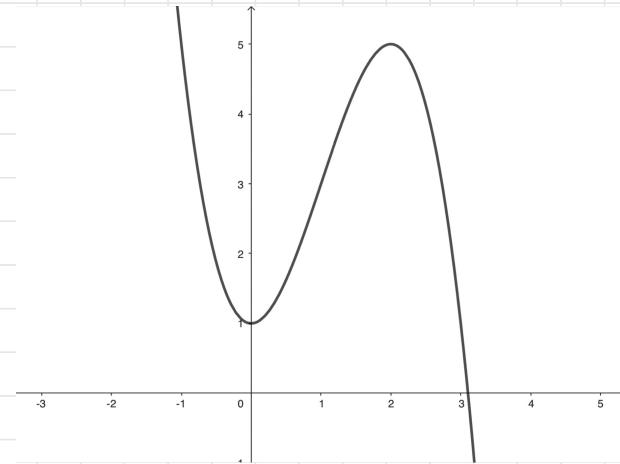
$$x = 0, 2$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↑	1	↑	5	↓

$x = 2$ で極大値 5

$x = 0$ で極小値 1

グラフは下図



次の関数の増減を調べ、極値をもたないことを確かめよ。

$$(1) f(x) = -x^3$$

$$(2) f(x) = x^3 + 2x$$

$$(1) f'(x) = -3x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると}$$

$$x = 0$$

増減表は下図

x	---	0	---
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	↓	0	↓

$f(x)$ は常に減少し

$f(x)$ は極値をもたない

$$(2) f'(x) = 3x^2 + 2 \text{ より}$$

$$3x^2 \geq 0 \text{ であるから常に } f'(x) > 0$$

$f(x)$ は常に増加し

$f(x)$ は極値をもたない

x の多項式で表される関数 $f(x)$ について

$f(x)$ が " $x = a$ で極値をとる" $\Rightarrow f'(a) = 0$

但し、 $f'(a) = 0$ であっても $f(x)$ は $x = a$ で極値をとるとは限らない。

練習
19

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ が $x = -1$ で極大値 8 をとるように、定数 a, b の値を定めよ。また、極小値を求めよ。

$f(x)$ が " $x = 1$ で極大値 8 をとる" で

$$f(-1) = 8, \quad f'(-1) = 0 \text{ かつ} \rightarrow$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + b$$

$$a + b + 8 = 8$$

$$a + b = 0 \cdots ①$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) - 9 = 0$$

$$-2a - 6 = 0 \cdots ②$$

① ② より $a = -3, b = 3$ なりで

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x + 3) = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 3$$

$f(-1)$ は極大値なので $f(3)$ が極小値

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 3 = -24$$

$$a = -3, b = 3, x = 3 \text{ で極小値 } -24$$

次の関数の最大値と最小値を求めるよ。

$$(1) \quad y = x^3 + 3x^2 \quad (-3 \leq x \leq 2) \quad (2) \quad y = -x^3 + x^2 + x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$(3) \quad y = x^4 - 2x^3 + 3 \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

$$(1) \quad f(x) = x^3 + 3x^2 \text{ とする。}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \rightarrow x = 0, -2$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 3x(x+2) > 0 \rightarrow x < -2, 0 < x$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 3x(x+2) < 0 \rightarrow -2 < x < 0$$

x	-3	...	-2	...	0	...	2
$f'(x)$	/	+	0	-	0	+	/
$f(x)$	0	/	4	↗	0	↗	20

$x = 2$ で $\boxed{\text{最大値} 20}$

$x = -3, 0$ で $\boxed{\text{最小値} 0}$

$$(2) \quad f(x) = -x^3 + x^2 + x \text{ とする。}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$= -(3x^2 - 2x - 1)$$

$$= -(3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -(3x+1)(x-1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}, 1$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow -(3x+1)(x-1) > 0 \rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow -(3x+1)(x-1) < 0 \rightarrow x < -\frac{1}{3}, 1 < x$$

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	/	+	0	-	/
$f(x)$	0	/	1	↘	-2

$x = 1$ で $\boxed{\text{最大値} 1}$

$x = 2$ で $\boxed{\text{最小値} -2}$

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$(1) \quad 2x^3 - 6x + 3 = 0$$

$$(2) \quad x^3 + 3x^2 + 2 = 0$$

$$(3) \quad -x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$\times \quad x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

$$(1) f(x) = 2x^3 - 6x + 3 \text{ とする}$$

グラフは下図

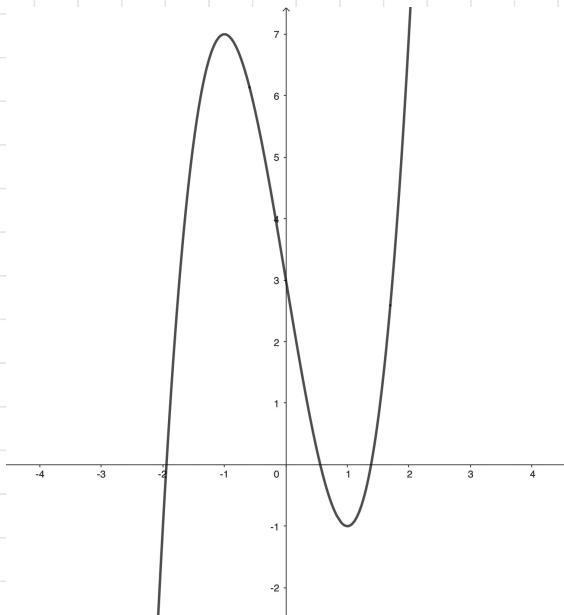
$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6(x+1)(x-1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 6(x+1)(x-1) > 0 \rightarrow x < -1, 1 < x$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 6(x+1)(x-1) < 0 \rightarrow -1 < x < 1$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	7	↓	-1	↑



左図より

$y = 2x^3 - 6x + 3$ は
x 軸と 3 点で交わるので

異なる実数解 3 つ



(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ とする.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

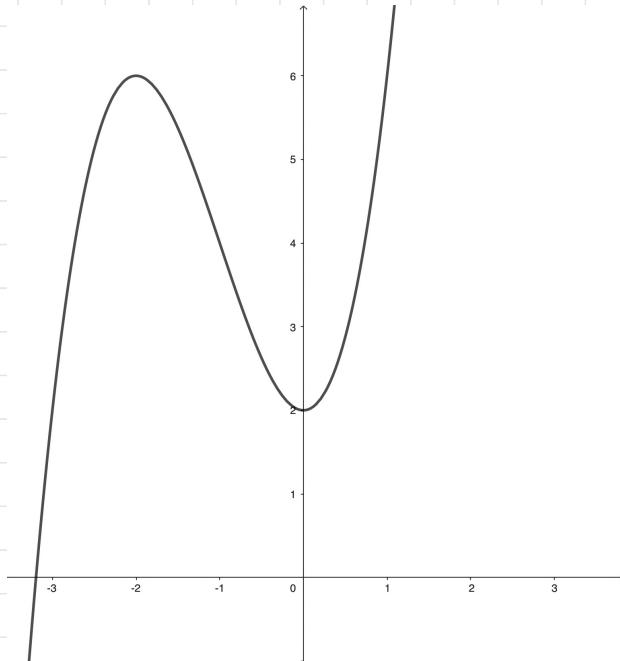
$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \rightarrow x=0, -2$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 3x(x+2) > 0 \rightarrow x < -2, 0 < x$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 3x(x+2) < 0 \rightarrow -2 < x < 0$$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	6	↓	2	↑

7. ラフは下図



左図より

$$y = x^3 + 3x^2 + 2$$

x 軸と 1 点で交わるので

異なる実数解 1 つ



$$(3) f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 \text{ とする}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x : -3x(x-2)$$

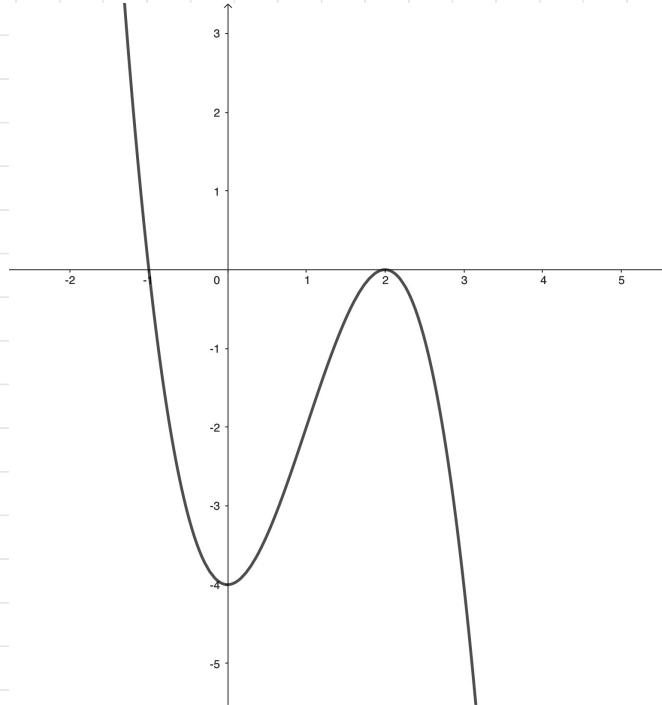
$$f'(x) = 0 \rightarrow -3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, 2$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow -3x(x-2) > 0 \rightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow -3x(x-2) < 0 \rightarrow x < 0, 2 < x$$

x	---	0	---	2	---
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\rightarrow	-4	\uparrow	0	\rightarrow

グラフは下図



左図より

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4$$

x 軸と 2 点で「交わるので」

異なる実数解 2 つ



方程式 $2x^3 - 3x^2 - a = 0$ がただ 1 個の実数解をもつように、定数 a

の値の範囲を定めよ。

$$2x^3 - 3x^2 = a$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ とする}$$

グラフは下図

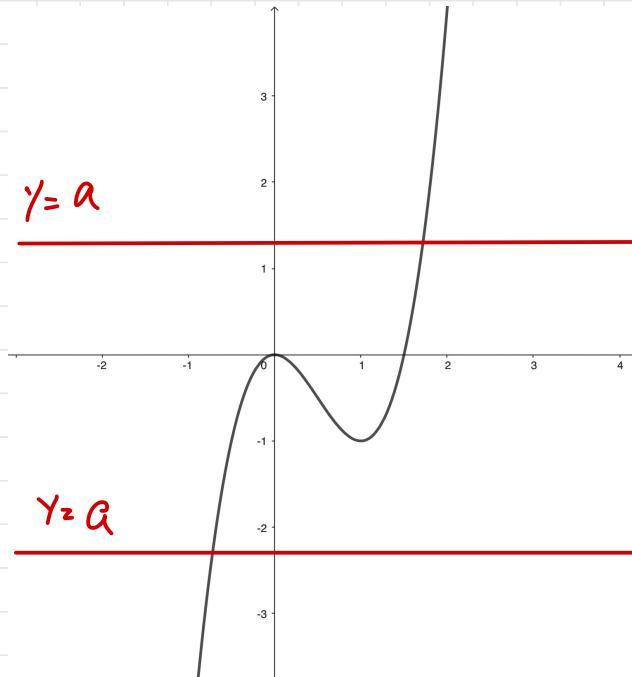
$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0, 1$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 6x(x-1) > 0 \rightarrow x < 0, 1 < x$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 6x(x-1) < 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

x	...	0	..	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	0	↓	-1	↑



左図より

$y = 2x^3 - 3x^2$ が
ただ 1 つの実数解を
もつのは

$$a > 0, a < -1$$

不定積分

x で微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数という。

一般に関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とすると、 $f(x)$ の任意の原始関数は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

といい、この表示を $f(x)$ の不定積分という。

$$\int f(x) dx \text{ と表し } \int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \text{ とかく}$$

関数 $f(x)$ の不定積分

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

関数 x^n の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

次のなかから、 $3x^2$ の原始関数であるものを選べ。

- ① $6x$ ② x^3 ③ x^3+2x ④ x^3-4

$3x^2$ の原始関数 → 微分したら $3x^2$ になる。

① $6x \xrightarrow{\text{微分}} 6$

② $x^3 \xrightarrow{\text{微分}} 3x^2$

③ $x^3+2x \xrightarrow{\text{微分}} 3x^2+2$

④ $x^3-4 \xrightarrow{\text{微分}} 3x^2$

② と ④



不定積分の性質

$F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ のとき

$$\textcircled{1} \int k f(x) dx = k F(x) + C \quad (C \text{は積分定数}) \quad k \text{は定数}$$

$$\textcircled{2} \int \{f(x) + g(x)\} dx = F(x) + G(x) + C \quad (C \text{は積分定数})$$

$$\textcircled{3} \int \{f(x) - g(x)\} dx = F(x) - G(x) + C \quad (C \text{は積分定数})$$

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int 5x^2 dx$$

$$(2) \int (x^2 + x - 1) dx$$

$$(3) \int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx$$

$$(4) \int (-2x^2 - x + 7) dx$$

$$(1) \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C \quad (c \text{は積分定数})$$

$$(2) \int (x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C \quad (c \text{は積分定数})$$

$$(3) \int (x^3 - 6x^2 - 2x + 5) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - x^2 + 5x + C \quad (c \text{は積分定数})$$

$$(4) \int (-2x^2 - x + 7) dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + C \quad (c \text{は積分定数})$$

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (t+2)(3t-1) dt$$

$$(2) \int 3(t-1)^2 dt$$

$$(1) \int (t+2)(3t-1) dt$$

$$= \int (3t^2 + 5t - 2) dt$$

$$= t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + C \quad (c \text{は積分定数})$$

$$(2) \int 3(t-1)^2 dt$$

$$= \int 3(t^2 - 2t + 1) dt$$

$$= \int (3t^2 - 6t + 3) dt$$

$$= t^3 - 3t^2 + 3t + C \quad (c \text{は積分定数})$$

次の2つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$[1] \quad F'(x) = 3x^2 - 4$$

$$[2] \quad F(-1) = 5$$

[1] より

$$F(x) = \int (3x^2 - 4) dx = x^3 - 4x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \cdots ①$$

① [2] より

$$F(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + C = 5$$

$$-1 + 4 + C = 5$$

$$C = 2$$

$$\therefore F(x) = x^3 - 4x + 2$$

1

定積分

$$F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

($f(x)$ を a から b まで積分する)

練習

30

$$(1) \int_1^3 x dx$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^2 dx$$

$$(3) \int_{-2}^1 x^3 dx$$

$$(4) \int_3^0 2 dx$$

$$(1) \int_1^3 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

$$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{9}{3} = \underline{\underline{3}}$$

$$(3) \int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^1$$

$$(4) \int_3^0 2 dx = [2x]_3^0$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$= 0 - 6 = \underline{\underline{-6}}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx$

(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3) dx$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3 + 2t) dt$

(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt$

(1) $\int_0^2 (x^2 + 4x - 5) dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x \right]_0^2 = \frac{2}{3}$

(2) $\int_2^3 (x-2)(x-3) dx = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3 = -\frac{1}{6}$



(4) $\int_{-2}^2 t(t+2)^2 dt$

$= \int_{-2}^2 (t^3 + 4t^2 + 4t) dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 \right]_{-2}^2$

$= \frac{64}{3}$

(3) $\int_{-1}^2 (-t^3 + 2t) dt$

$= \left[-\frac{1}{4}t^4 + t^2 \right]_{-1}^2$

$= -\frac{3}{4}$

関数の定数倍および和、差の定積分

$$① \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$② \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$③ \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

練習
32

次の定積分を求めよ。

$$\int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$\begin{aligned} & \int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= \int_1^3 x^3 dx - 3 \int_1^3 x dx + \int_1^3 2 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 - 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 + [2x]_1^3 = | 2 \end{aligned}$$

練習
33

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x+2)^2 dx - \int_{-1}^1 (x-2)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \{(x+2)^2 - (x-2)^2\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \{x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 8x dx = [4x^2]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

定積分の性質

$$\textcircled{1} \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

練習
35

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^2 (3x^2 - 4x) dx + \int_2^3 (3x^2 - 4x) dx$$

$$= \int_1^3 (3x^2 - 4x) dx$$

$$= [x^3 - 2x^2]_1^3$$

$$= \underline{\underline{10}},$$

$$(2) \int_0^3 (x^2 + 2x) dx - \int_1^3 (x^2 + 2x) dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 2x) dx - \left(- \int_3^1 (x^2 + 2x) dx \right)$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 2x) dx + \int_3^1 (x^2 + 2x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

→

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = 4x + 2 \int_0^2 f(t) dt$$

$$(2) \quad f(x) = 3x^2 + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$(1) \quad \int_0^2 f(t) dt = a \cdots \text{①} \quad \text{とおくと}$$

$$f(x) = 4x + 2a \cdots \text{②}$$

$$\text{②より } f(t) = 4t + 2a$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (4t + 2a) dt \\ &= [2t^2 + 2at]_0^2 \\ &= 8 + 4a \cdots \text{③} \end{aligned}$$

$$\text{①③より } \int_0^2 f(t) dt = 8 + 4a = a$$

$$8 + 4a = a \Leftrightarrow \\ a = -\frac{8}{3}$$

$$a = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \text{②に代入すると}$$

$$\underline{\underline{f(x) = 4x - \frac{16}{3}}}$$

$$(2) \quad \int_{-1}^1 f(t) dt = a \cdots \text{①} \text{とおくと}$$

$$f(x) = 3x^2 + a \cdots \text{②}$$

$$\text{②より } f(t) = 3t^2 + a$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \int_{-1}^1 (3t^2 + a) dt \\ &= [t^3 + at]_{-1}^1 \\ &= 2 + 2a \cdots \text{③} \end{aligned}$$

$$\text{①③より } \int_{-1}^1 f(t) dt = 2 + 2a = a$$

$$2 + 2a = a \Leftrightarrow$$

$$a = -2$$

$$a = -2 \Leftrightarrow \text{②に代入すると}$$

$$\underline{\underline{f(x) = 3x^2 - 2}}$$

a を定数とするとき、 x の関数 $\int_a^x f(t) dt$ の導関数は $f(x)$.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

練習
37

x の関数 $\int_0^x (3t^2 - 2t - 1) dt$ の導関数を求めよ。

練習
38

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - x - 2$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_0^x (3t^2 - 2t - 1) \\ &= 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = (x^2 - x - 2)^{'}$$

$$f(x) = 2x - 1$$

また、与えられた等式で $x = a$ とすると左辺は 0 になるから

$$0 = a^2 - a - 2$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$a = -1, 2$$

$$\therefore f(x) = 2x - 1, \quad a = -1, 2$$

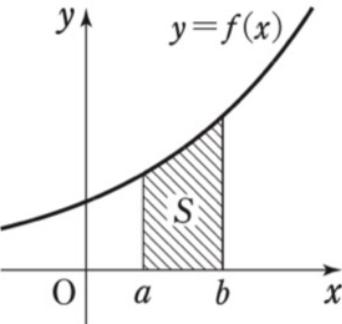
曲線とx軸の間の面積

定積分と面積(1)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のとき、

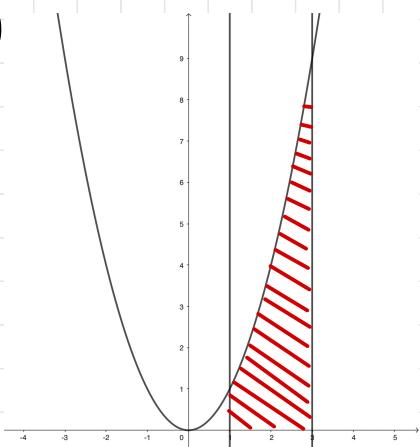
$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



練習 39 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$, 2 直線 $x = 1, x = 3$

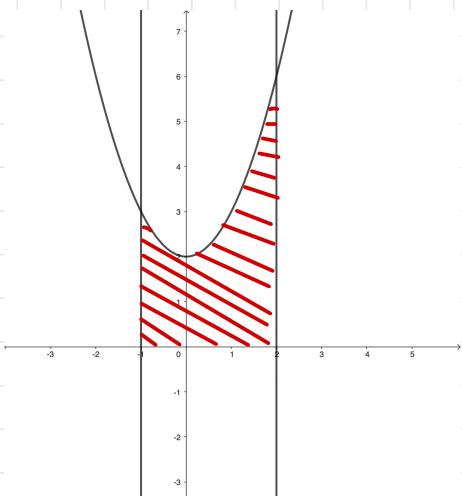


$1 \leq x \leq 3$ では $y > 0$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

(2)



$-1 \leq x \leq 2$ では $y > 0$

求める面積 S は

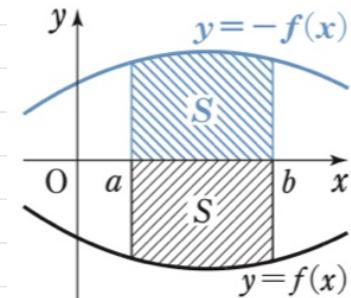
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

定積分と面積(2)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ のとき、

$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx$$



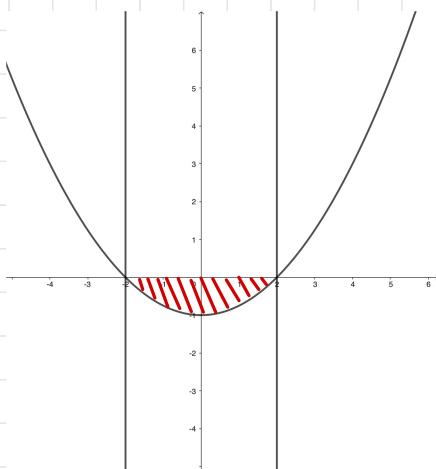
練習

40

次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

(1)



$$(2) \quad y = x^2 - 2x$$

(2)

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 \text{ を解いて}$$

$$x = \pm 2$$

$-2 \leq x \leq 2$ における

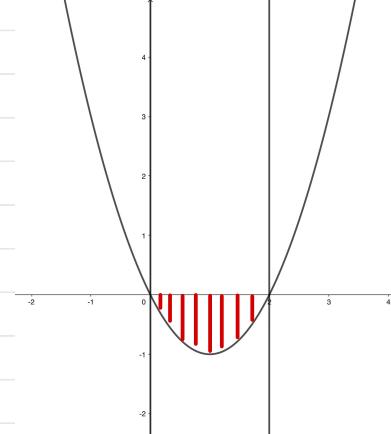
$y \leq 0$ の部分

求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^2 -\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{12}x^3 + x\right]_{-2}^2$$

$$= \frac{8}{3}$$



$$x^2 - 2x = 0 \text{ を解いて}$$

$$x = 0, 2$$

$0 \leq x \leq 2$ における

$y \leq 0$ の部分

求める面積 S は

$$S = \int_0^2 -(x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{6} \text{ 公式}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

練習
1

放物線 $y = -x^2 + 6x - 7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$-x^2 + 6x - 7 = 0 \text{ を解くと}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{2}$$

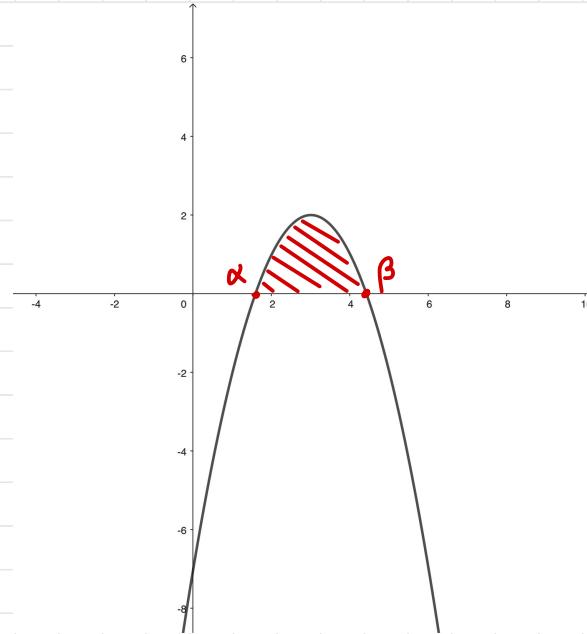
$$\alpha = 3 - \sqrt{2}, \beta = 3 + \sqrt{2} \text{ とすると}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + 6x - 7) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - 6x + 7) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$$= -\frac{(-1)}{6} \left\{ (3+\sqrt{2}) - (3-\sqrt{2}) \right\}^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

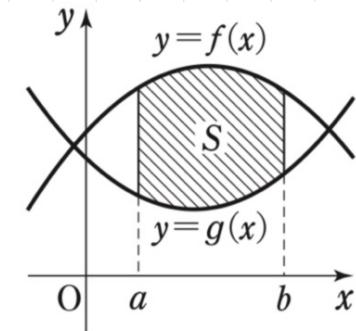


定積分と面積(3)

区間 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq g(x)$ のとき、 $Y = f(x)$ と $Y = g(x)$ のグラフ

および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



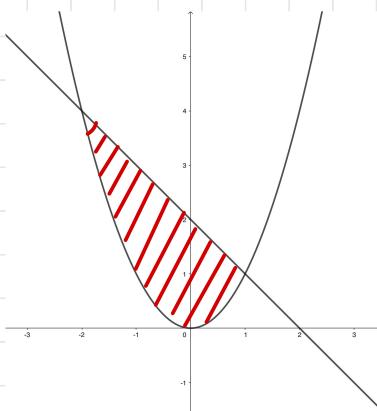
練習
41

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y = x^2, y = -x + 2$

(2) $y = -x^2 + 3, y = 2x$

(1)



放物線と直線の
交点の x 座標は

$$x = -2, 1$$

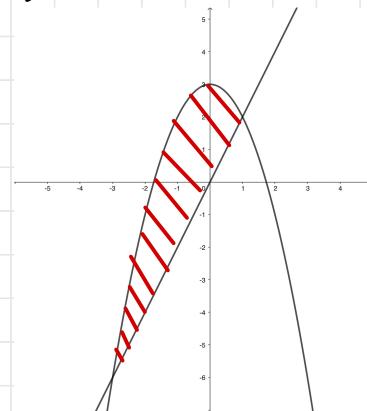
求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^1 \{(-x+2) - x^2\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{9}{2}$$

(2)



放物線と直線の
交点の x 座標は

$$x = -3, 1$$

求める面積 S は

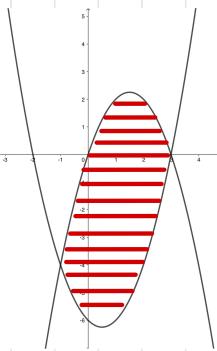
$$S = \int_{-3}^1 \{(-x^2 + 3) - 2x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1$$

$$= \frac{32}{3}$$

$$(3) \quad y = -x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x - 6$$

(3)



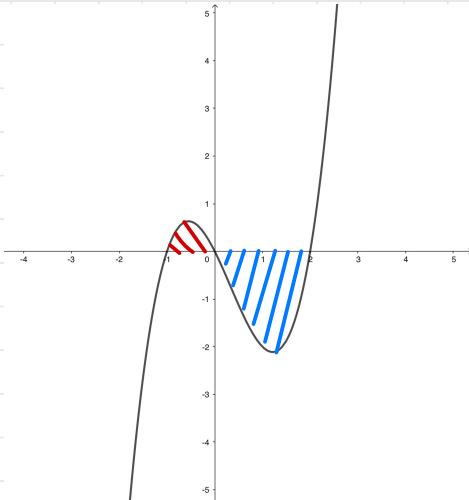
2つの放物線の
交点のx座標は
 $x = -1, 3$
よって求めた面積は1

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{-1}^3 \{(-x^2+3x) - (x^2-x-6)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (-2x^2+4x+6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{64}{3}}} \end{aligned}$$

練習
42

次の曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$$y = x^3 - x^2 - 2x$$



$y = x^3 - x^2 - 2x$ と x 軸との
交点の x 座標は

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2)(x+1)=0$$

$$\chi = -1, 0, 2$$

アラフは左図より

$$-1 \leq x \leq 0 \quad z \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 0$$

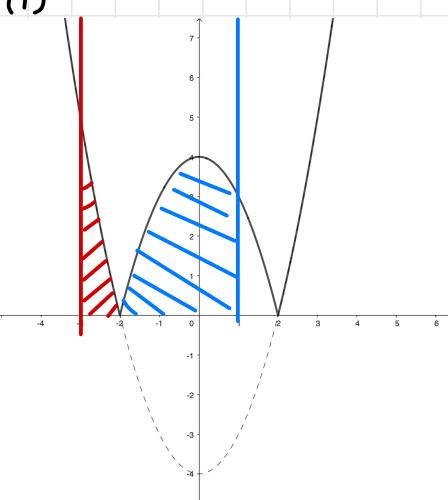
よって求める面積 ν は

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 -(x^3 - x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{37}{12}
 \end{aligned}$$

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^1 |x^2 - 4| dx$

(1)

 $y = |x^2 - 4|$ は $x \leq -2, x \geq 2$ のとき

$y = x^2 - 4$

 $-2 \leq x \leq 2$ のとき

$y = -x^2 + 4$

$$\int_{-3}^1 |x^2 - 4| = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^1 -(x^2 - 4) dx$$

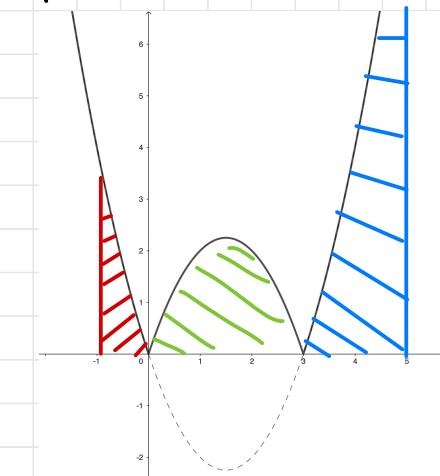
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{7}{3} + 9$$

$$= \frac{34}{3}$$

(2) $\int_{-1}^5 |x(x-3)| dx$

(2)

 $y = |x(x-3)|$ は $x \leq 0, x \geq 3$ のとき

$y = x(x-3)$

 $0 \leq x \leq 3$ のとき

$y = -x(x-3)$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 |x(x-3)| dx \\ &= \int_{-1}^0 x(x-3) dx + \int_0^3 -x(x-3) dx + \int_3^5 x(x-3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

練習
1 曲線 $y = x^3 + x^2 - 2x$ と、その曲線上の点(1, 0)における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x \text{ とする。}$$

接線の傾きは $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ たり $f'(1) = 3$

接線の方程式は $y - 0 = 3(x - 1)$

$$y = 3x - 3$$

$f(x)$ と接線の交点の x 座標は

$$x^3 + x^2 - 2x = 3x - 3$$

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x+3)^2 = 0$$

$$x = 1, -3$$

ここで求める面積は

$$S = \int_{-3}^1 [(x^3 + x^2 - 2x) - (3x - 3)] dx$$

$$= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{64}{3}$$

