数C

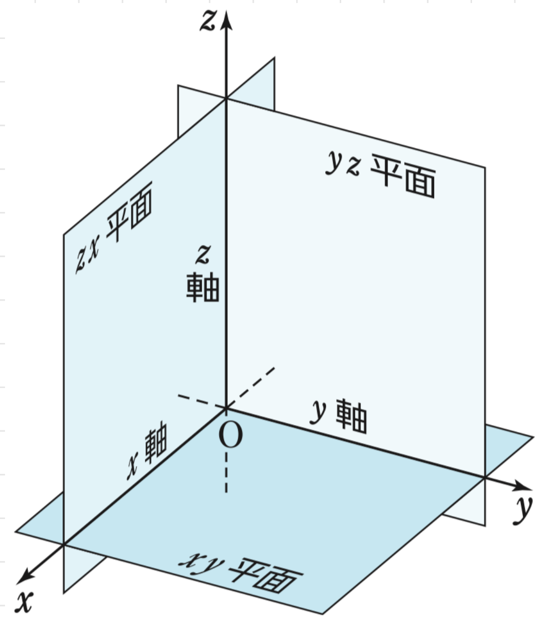
空間のベクトル

空間の点の座標

空間に点Oをとり，Oで互いに直交する3本の数直線を x 軸，y 軸，z 軸といい，

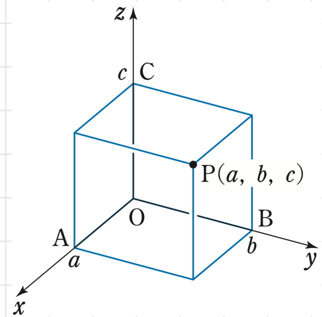
これらをまとめて座標軸という．点Oは原点．

x 軸と y 軸で定まる平面を xy 平面
y 軸と z 軸で定まる平面を yz 平面
z 軸と x 軸で定まる平面を zx 平面
まとめて座標平面という．



空間の点Pに対してPを通り、各座標軸に垂直な平面が

x軸, y軸, z軸と交わる点をA, B, Cとする.



A, B, Cの各座標軸上での座標がそれぞれ a, b, cのとき

(a, b, c)を点Pの座標という

また, O(0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)の座標で定められた空間を座標空間という.

P(a, b, c)について

xy平面と対称な座標は(a, b, −c)

yz平面と対称な座標は(−a, b, c)

zx平面と対称な座標は(a, −b, c)

x軸に関して対称な座標は(a, −b, −c)

y軸に関して対称な座標は(−a, b, −c)

z軸に関して対称な座標は(−a, −b, c)

練習 1 点P(1, 3, 2)に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) yz 平面に関して対称な点　(2) zx 平面に関して対称な点

(3) z 軸に関して対称な点　(4) 原点に関して対称な点

(1) (−1, 3, 2)　(2) (1, −3, 2)　(3) (−1, −3, 2)　(4) (−1, −3, −2)

原点Oと点P$(a,\ b,\ c)$の距離は　　$\mathbf{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

練習 2 原点Oと次の点の距離を求めよ。

(1)　P(2, 3, 6)　　(2)　Q(3, −4, 5)

(1) $OP=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$

(2) $OQ=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

空間における始点A, 終点Bとして ABが表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表す.

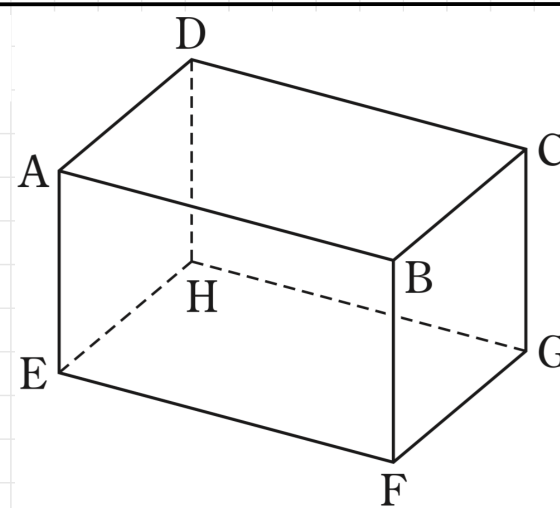
$\overrightarrow{AB}$ の大きさは $|\overrightarrow{AB}|$ と表す.

$\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトル … 大きさが同じで向きが逆のベクトル. $\overrightarrow{AB}$ について $\overrightarrow{BA}$ または $-\overrightarrow{AB}$ と表す.

零ベクトル … 大きさが 0 のベクトル. $\vec{0}$ と表す.

単位ベクトル … 大きさが 1 のベクトル

練習 3 例 2 において，$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトルで $\overrightarrow{AE}$ 以外のものをすべてあげよ。また，$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトルで $\overrightarrow{DA}$ 以外のものをすべてあげよ。

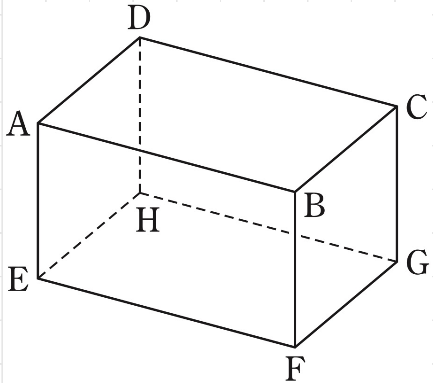


$\overrightarrow{AE}$ に等しいベクトル　$\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AD}$ の逆ベクトル　$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HE}$

練習 4 例 3 の直方体において，次の□に適する頂点の文字を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{A\square}$　　(2) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{\square D}$



(1) $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{BC}$ なので

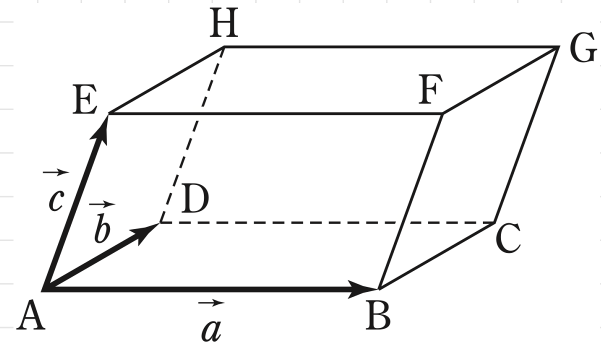
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ なので

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

練習 5 例題 1 において，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{EC}$　　(2) $\overrightarrow{BH}$　　(3) $\overrightarrow{DF}$　　(4) $\overrightarrow{HF}$



(1) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(4) $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}$

空間ベクトルの成分表示

Oを原点とする座標空間において

基本ベクトル … x軸, y軸, z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル. それぞれ $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ で表す.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ の Aの座標が (a_1, a_2, a_3) のとき $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ で表す.

a_1 を x成分, a_2 を y成分, a_3 を z成分といい, (a_1, a_2, a_3) を成分表示という.

基本ベクトルの成分表示は $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$ となる.

零ベクトルの成分表示は $\vec{0}=(0, 0, 0)$

練習 6 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が等しくなるように, x, y, z の値を定めよ。

$$\vec{a}=(2,\ -1,\ -3),\ \vec{b}=(x-4,\ y+2,\ -z+1)$$

$\vec{a}=\vec{b}$ より

$$\begin{cases} 2=x-4 & \cdots ① \\ -1=y+2 & \cdots ② \\ -3=-z+1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①②③を解くと $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

練習 7 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -2)$　　(2) $\vec{b}=(-5,\ 3,\ -4)$

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$　ただし，k は実数

練習 8 $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ -3,\ 0)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　　(3) $2\vec{a}+3\vec{b}$　　(4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})$

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,3,-2)+(4,-3,0)=(5,0,-2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(1,3,-2)-(4,-3,0)=(-3,6,-2)$

(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=(2,6,-4)+(12,-9,0)=(14,-3,-4)$

(4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})=-3\{(1,3,-2)-(8,-6,0)\}=(21,-27,6)$

2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_1)^2+(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_2)^2+(\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_3)^2}$$

練習 9 次の 2 点 A，B について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ。

(1) A$(2,\ 1,\ 4)$，B$(3,\ -1,\ 5)$　(2) A$(3,\ 0,\ -2)$，B$(1,\ -4,\ 2)$

(1) $\overrightarrow{AB}=(3,-1,5)-(2,1,4)=(1,-2,1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(1,-4,2)-(3,0,-2)=(-2,-4,4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{36}=6$

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とする。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。このとき

1 $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

2 $\quad \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

練習 10 次の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$, $\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 4,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 1,\ 0)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+(-3)\times1+1\times2=-7$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$

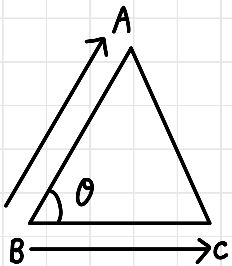
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=120^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-2)+4\times1+3\times0=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=90^\circ$

練習 11 3 点 A(6, 7, −8), B(5, 5, −6), C(6, 4, −2) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。



∠ABC $= \theta$ とする.
θ を求めるためには

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$$ を求める.

$$\overrightarrow{BA} = (6, 7, -8) - (5, 5, -6) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (6, 4, -2) - (5, 5, -6) = (1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\times1 + 2\times(-1) + (-2)\times4 = -9$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-9}{3\times3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$\theta = 135^\circ$

練習 12 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 0,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)$ の両方に垂直で, 大きさが $\sqrt{6}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

$\vec{p}=(x,y,z)$ とする.

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x-z=0$ …①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=x+3y-2z=0$ …②

$|\vec{p}|=\sqrt{6}$ より $|\vec{p}|^2=6$

$|\vec{p}|^2=x^2+y^2+z^2=6$ …③

① より $z=2x$ …①'

①'を②に代入 $x+3y-4x=0$ なので $y=x$ …②'

①'②'を③に代入 $x^2+x^2+(2x)^2=6$ なので $x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

$x=1$ のとき ①'②'より $y=1,\ z=2$

$x=-1$ のとき ①'②'より $y=-1,\ z=-2$

$\vec{p}=(1,1,2),\ (-1,-1,-2)$

1　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

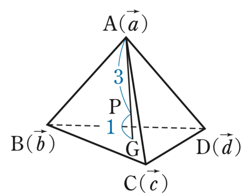
2　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，次のようになる。

内分 … $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　　外分 … $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

3　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

練習 13　4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体 ABCD において，△BCD の重心を G($\vec{g}$)，線分 AG を 3：1 に内分する点を P($\vec{p}$) とする。$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ なので

$\vec{p}-\vec{a}=\dfrac{3}{4}(\vec{g}-\vec{a})$ から

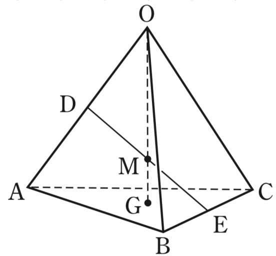
$$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{g} \quad \cdots ②$$

② に ① を代入すると

$$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

練習 14

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 BC の中点を E とする。線分 DE の中点を M，△ABC の重心を G とするとき，3 点 O，M，G は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{OM} = k\,\overrightarrow{OG}$ となる実数 k が存在する.

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OE} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ より,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

また, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ なので

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

よって 3点 O, M, G は同一直線上にある.

点Pが平面 ABC 上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となる実数 s, t がある

練習 15

3 点 A$(-1,\ 2,\ -1)$, B$(2,\ -2,\ 3)$, C$(2,\ 4,\ -1)$ の定める平面 ABC 上に点 P$(x,\ 3,\ 1)$ があるとき, x の値を求めよ。

$\overrightarrow{CP}=(x-2,-1,2)$, $\overrightarrow{CA}=(-3,-2,0)$, $\overrightarrow{CB}=(0,-6,4)$ に対して

$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$(x-2,-1,2)=s(-3,-2,0)+t(0,-6,4)$

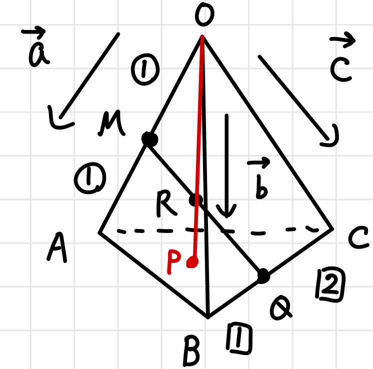
$(x-2,-1,2)=(-3s,-2s-6t,4t)$

$$\begin{cases} x-2=-3s \cdots ① \\ -1=-2s-6t \cdots ② \\ 2=4t \cdots ③ \end{cases}$$

①②③より $s=-1,\ t=\frac{1}{2}$ なので $x=5$

練習 16 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をM，辺BCを1：2に内分する点をQ，線分MQの中点をRとし，直線ORと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(応用例題の解法)



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$

PはOR上の点なので，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数kが存在する.

$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\ \cdots$ ①

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$，Pは平面ABC上にあるので

$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t が存在する.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\ \cdots$ ②

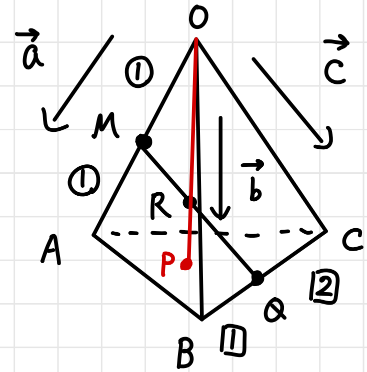
①②より
$$\begin{cases}\frac{1}{4}k=s & \cdots(ア)\\ \frac{1}{3}k=t & \cdots(イ)\\ \frac{1}{6}k=1-s-t & \cdots(ウ)\end{cases}$$

(ア)(イ)(ウ)より $k=\frac{4}{3}$. これを①に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

練習 16 四面体 OABC において，辺 OA の中点を M，辺 BC を 1：2 に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（s+t+u=1を利用した解法）



P は OR 上の点なので

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$ となる実数 k が存在する.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}$$

$$\overrightarrow{OP}=k\cdot\frac{3\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}}{12}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{6}k\vec{c}\cdots①$$

点 P が平面 ABC 上にあるので

$$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$$

$$k=\frac{4}{3}$$

$k=\frac{4}{3}$ を①に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

練習 17 正四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とすると，AG⊥BC である。このことを，ベクトルを用いて証明せよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{g}$ とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}&=\vec{g}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{3}\left(-|b|^2+|\vec{c}|^2+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}\right)\end{aligned}$$

ここで正四面体であるから $|\vec{b}|=|\vec{c}|$

それぞれのなす角が 60° で等しく長さも等しいので $\vec{d}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{b}$

よって $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{AG}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であるので，$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$

したがって $AG\perp BC$

2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について

1 A，B 間の距離は

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

2 線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

練習 18 2点 A(1, 3, −2), B(4, −3, 1) について，次のものを求めよ。

(1) 2点 A，B 間の距離　(2) 線分 AB の中点の座標

(3) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点の座標

(4) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点の座標

(1) $AB=\sqrt{(4-1)^2+(-3-3)^2+\{1-(-2)\}^2}=3\sqrt{6}$

(2) $\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{3-3}{2},\ \frac{-2+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1},\ \frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{2+1},\ \frac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{2+1}\right)=(3,-1,0)$

(4) $\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1},\ \frac{-1\cdot3+2\cdot(-3)}{2-1},\ \frac{-1\cdot(-2)+2\cdot1}{2-1})=(7,-9,4)$

練習 19 3点 A(2, −1, 4), B(1, 3, 0), C(3, 1, 2) を頂点とする △ABC の重心の座標を，原点 O に関する位置ベクトルを利用して求めよ。

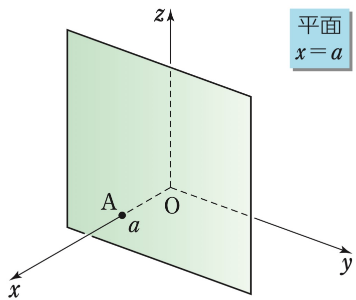
$\left(\frac{2+1+3}{3},\ \frac{-1+3+1}{3},\ \frac{4+0+2}{3}\right)=(2,1,2)$

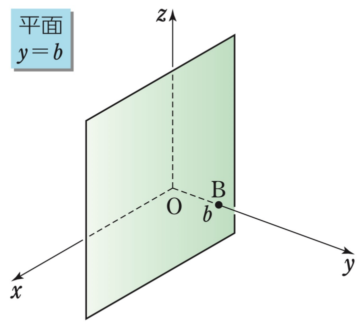
座標平面に平行な平面の方程式

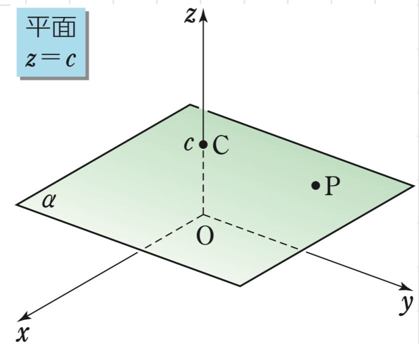
点 A$(a,\ 0,\ 0)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{x=a}$

点 B$(0,\ b,\ 0)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{y=b}$

点 C$(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$\boldsymbol{z=c}$







練習 20　点 $(1,\ 2,\ 3)$ を通り，次のような平面の方程式を求めよ。

(1)　xy 平面に平行　　(2)　yz 平面に平行　　(3)　y 軸に垂直

(1)　$z=3$　　(2)　$x=1$　　(3)　$y=2$

球面の方程式

点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

練習 21 次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 原点を中心とする半径 3 の球面

(2) 点 $(1,\ 2,\ -3)$ を中心とする半径 4 の球面

(3) 点 $\mathrm{A}(0,\ 4,\ 1)$ を中心とし，点 $\mathrm{B}(2,\ 4,\ 5)$ を通る球面

(4) 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ -3)$，$\mathrm{B}(-2,\ 6,\ 1)$ を直径の両端とする球面

(1) $x^2+y^2+z^2=9$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$

(3) この球の半径は AB なので

$AB^2=(2-0)^2+(4-4)^2+(5-1)^2=20$

よって球の方程式は

$x^2+(y-4)^2+(z-1)^2=20$

(4) 球の中心は AB の中点．中点を M とする．

$M\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)=(0,3,-1)$

球の半径は中心と点 A のキョリ AM なので

$AM^2=(0-2)^2+(3-0)^2+\{-1-(-3)\}^2=17$

よって球の方程式は　$x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$

練習 22 応用例題 4 の球面と yz 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

応用例題 4 球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心の座標と半径を求めよ。

球面と yz 平面が交わるのは $x=0$ のとき

球面の方程式は $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ なので

$x=0$ のとき

$$(0-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$$

$$(y+2)^2+(z-3)^2=3^2$$

この方程式は yz 平面上では円

その中心は $(-2, 3)$, 半径 3 である.