

数Ⅱ

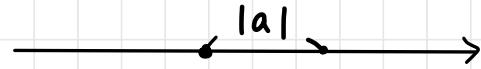
因形と方程式



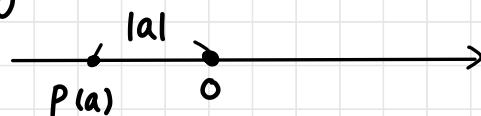
数直線上の2点間のキヨリ

① 原点Oとのキヨリ

$$a > 0$$

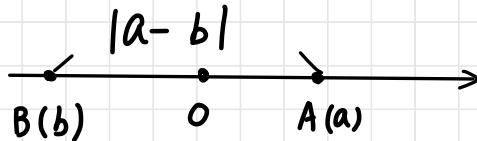


$$a < 0$$



- 数直線上の点Pの座標を a とする。
原点Oと点Pの2点間のキヨリOPは
 $OP = |a|$

② 数直線上の2点間のキヨリ



- 数直線上の点Aの座標を a 、点Bの座標を b とする。
点Aと点Bの2点間のキヨリABは
 $AB = |b - a|$

練習
1

次の2点間の距離を求めよ。

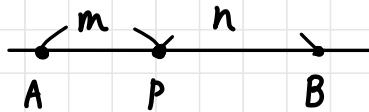
- (1) A(-1), B(6) (2) A(4), B(2) (3) O(0), A(-3)

$$(1) AB = |6 - (-1)| = 7 \quad (3) OA = |-3 - 0| = 3$$

$$(2) AB = |2 - 4| = 2$$

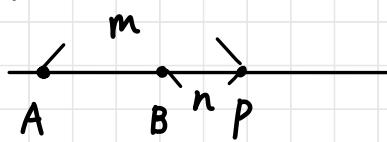
線分の内分点・外分点

・内分

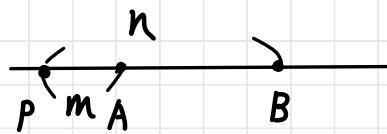


点PはABをm:nに内分する。点Pは内分点。

・外分



点PはABをm:nに外分する。点Pは外分点。

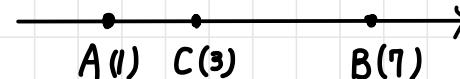


点PはABをm:nに外分する。点Pは外分点。

練習
2

数直線上の3点A(1), B(7), C(3)について、次の□に適する数または用語を入れよ。

- (1) 点Cは線分ABを□:□に□する。
- (2) 点Bは線分ACを□:□に□する。
- (3) 点Aは線分CBを□:□に□する。



(1) 1:2に内分 (2) 3:2に外分 (3) 1:3に外分

系線分の内分点・外分点 (数直線)

数直線上の2点 A(a), B(b) を結ぶ系線分 AB を

- ・ $m:n$ に内分する点 P は $\frac{na+mb}{m+n}$. $m:n$ に外分する点 Q は $\frac{-na+mb}{m-n}$
- ・ 線分 AB の中点 M は $\frac{a+b}{2}$

練習
3

2点 A(4), B(8) を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

- (1) 3:2 に内分する点 C (2) 3:1 に外分する点 D
(3) 2:3 に外分する点 E (4) 中点 M

$$(1) \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{3+2} : \frac{32}{5}$$

$$(2) \frac{-1 \cdot 4 + 3 \cdot 8}{3-1} : 10$$

$$(3) \frac{-3 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{2-3} = -4$$

$$(4) \frac{4+8}{2} = 6$$

$$C\left(\frac{32}{5}\right)$$

$$D(10)$$

$$E(-4)$$

$$M(6)$$

座標平面上の 2 点間のヨリ

2 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ の 2 点間のヨリは

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

原点 O と点 $A(x_1, y_1)$ の 2 点間のヨリは

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

練習

4

次の 2 点間の距離を求めよ。

- (1) $A(1, 2), B(4, 6)$ (2) $A(-3, 1), B(2, -4)$
(3) $A(5, -2), B(3, -2)$ (4) 原点 $O, A(2, -3)$

$$(1) AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$(2) AB = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$(3) AB = \sqrt{(3-5)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$(4) AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13}$$

点Pはy軸上にあり、2点A(-4, 2), B(1, -1)から等距離にある。

Pの座標を求めよ。

点Pのy座標をyとすると点Pはy軸上の点なので

$P(0, y)$ とかける。

よしPはA, Bと等キヨリにあるので

$AP = BP$ となればよい

$$AP = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{y^2 - 4y + 20}$$

$$BP = \sqrt{(0 - 1)^2 + (y - (-1))^2} = \sqrt{y^2 + 2y + 2}$$

$$AP = BP \text{ といふ} \quad AP^2 = BP^2$$

つまり

$$y^2 - 4y + 20 = y^2 + 2y + 2$$

$$6y = 18$$

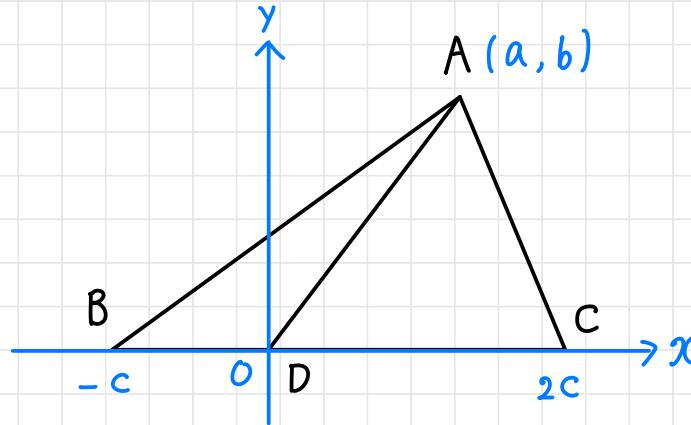
$$y = 3$$

よって

$$\underline{\underline{P(0, 3)}}$$

△ABCにおいて、辺BCを1:2に内分する点をDとするとき、等式

$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$ が成り立つ。このことを証明せよ。



左図のようにDを原点にとると

DはBCを1:2に内分する点なり。

A(a, b), B(-c, 0), C(2c, 0)とおける。

$$AB^2 = \{a - (-c)\}^2 + (b - 0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac$$

$$AC^2 = (a - 2c)^2 + (b - 0)^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac$$

$$AD^2 = (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = a^2 + b^2$$

$$BD^2 = \{0 - (-c)\}^2 + 0^2 = c^2$$

$$\begin{aligned} 2AB^2 + AC^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ac) + (a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac) \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$3(AD^2 + 2BD^2) = 3\{(a^2 + b^2) + 2 \cdot c^2\} = 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{ すなはち}$$

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

内分点・外分点(座標)

2点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とする線分 AB を

・ $m : n$ に内分する点 P の座標 $P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$

・ $m : n$ に外分する点 Q の座標 $Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$

・ AB の中点の座標 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

練習
7

2点 $A(-3, 2), B(4, 5)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

- (1) 2:1 に内分する点C
(2) 2:1 に外分する点D
(3) 2:3 に外分する点E
(4) 中点M

(1)

$$C\left(\frac{-1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{2+1}, \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{2+1}\right)$$

(2)

$$D\left(\frac{-1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{2-1}, \frac{-1 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{2-1}\right)$$

(3)

$$E\left(\frac{-3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{2-3}, \frac{-3 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{2-3}\right)$$

(4)

$$M\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{5}{3}, 4\right)$$

$$D(11, 8)$$

$$E(-17, -4)$$

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

点 A(-3, 2) に関して、点 P(0, -4) と対称な点 Q の座標を求めよ。

点 Q の座標を Q(x, y) とする。

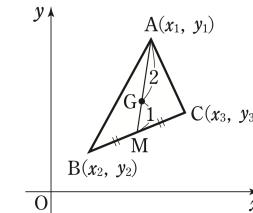
点 A は点 P, Q の中点となるので

$$\frac{x+0}{2} = -3 \quad \frac{y-4}{2} = 2$$

$$x = -6 \quad y - 4 = 4 \\ y = 8$$

$$Q(-6, 8)$$

3 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を頂点とする $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M, 線分 AM を 2:1 に内分する点を G とする。G の座標を求めよ。



例題 3 の $\triangle ABC$ において、辺 AB の中点を N, 線分 CN を 2:1 に内分する点を G' とする。G' の座標を求めよ。

$$N \text{ は } AB \text{ の中点なので } N\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

G' は CN を 2:1 に内分するので

$$G' \left(\frac{\frac{x_3+2 \cdot \frac{x_1+x_2}{2}}{2+1}, \frac{y_3+2 \cdot \frac{y_1+y_2}{2}}{2+1}}{2+1} \right)$$

$$G' \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

三角形の重心の座標

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)を頂点とする $\triangle ABC$ の

重心の座標は $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

練習
10

次の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を求めよ。

(1) A(1, 1), B(5, 2), C(3, 4)

(2) A(-2, 4), B(0, -3), C(2, 1)

$$(1) \left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+2+4}{3} \right)$$

$$\left(3, \frac{7}{3} \right)$$

$$(2) \left(\frac{-2+0+2}{3}, \frac{4-3+1}{3} \right)$$

$$\left(0, \frac{2}{3} \right)$$

直線の方程式

① $y = ax + b$ … 傾き a , 切片 b の直線

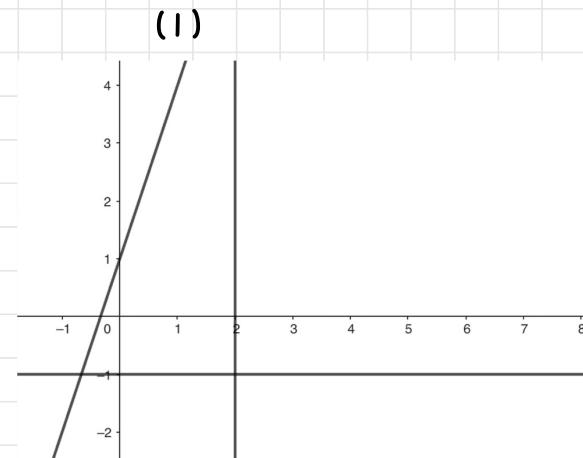
② $x - p = 0$ … x 軸に垂直な直線

③ $y - q = 0$ … y 軸に垂直な直線

練習
11

次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ。

- (1) $3x - y + 1 = 0$ (2) $y + 1 = 0$ (3) $x - 2 = 0$



(3)

直線の方程式(1)

点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

練習
12

次のような直線の方程式を求めよ。

- (1) 点 $(2, -4)$ を通り、傾きが3の直線
- (2) 点 $(-3, 1)$ を通り、傾きが-2の直線

(1)

$$y - (-4) = 3(x - 2)$$

$$y + 4 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 10$$

(2)

$$y - 1 = -2 \{x - (-3)\}$$

$$y - 1 = -2x - 6$$

$$y = -2x - 5$$

直線の方程式 (2)

異なる2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

・ $x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$

・ $x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$

・ $y_1 = y_2$ のとき $y = y_1$

練習 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

13

- (1) (3, 2), (5, 6) (2) (-1, 4), (2, -2)
(3) (2, -1), (1, -1) (4) (3, -1), (3, 4)

(1)

$$y - 2 = \frac{6 - 2}{5 - 3} (x - 3)$$

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

(2)

$$y - 4 = \frac{-2 - 4}{2 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$y - 4 = -2(x + 1)$$

$$y = 2x - 4$$

(3)

$$y = -1$$

(4)

$$x = 3$$

$$y = -2x + 2$$

$a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x 切片が a , y 切片が b である直線の方程式は、

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
 で表されることを示せ。

次の直線のうち、直線 $y = -2x$ と平行であるものはどれか。

- ① $y = 2x - 3$ ② $y = -2x + 4$ ③ $2x + y + 5 = 0$

$$\textcircled{3} \quad y = -2x - 5$$

x 切片が a , y 切片が b なので

この直線は $(a, 0), (0, b)$ を通る

直線の傾きは $\frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$

直線の方程式は

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

直線が平行 \rightarrow 直線の傾きが同じ

② と ③

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2直線の平行・垂直

$y = m_1x + n_1, y = m_2x + n_2$ について

2直線が平行 $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ (2直線の傾きが等しい)

2直線が垂直 $\Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$ (2直線の傾きの積が-1)

練習
16

次の2直線は、それぞれ平行、垂直のいずれであるか。

- (1) $y = 4x + 1, y = 4x - 3$ (2) $y = 3x - 1, x + 3y + 2 = 0$
(3) $2x + 3y = 3, 4x + 6y = 5$ (4) $3x + 4y = 2, 4x - 3y = 1$

(1) 平行 (2) 垂直

(3) 平行 (4) 垂直

練習
17

点 A(3, -1) を通り、直線 $3x + 2y + 1 = 0$ に垂直な直線、平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

$$3x + 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

垂直…傾きが $\frac{2}{3}$ で (3, -1) を通る

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 3) \quad y = \frac{2}{3}x - 3$$

平行…傾きが $-\frac{3}{2}$ で (3, -1) を通る

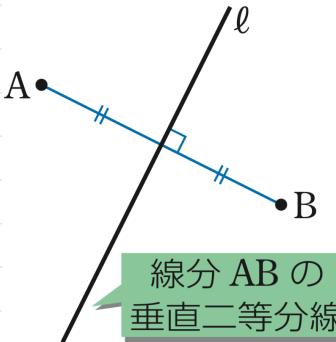
$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 3) \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

直線にに関して対称な点

2点 A, Bが直線 ℓ に関して対称

① 直線 ABは ℓ に垂直

② 線分 ABの中点は ℓ 上にある。



練習
18

直線 $2x - y + 2 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A(2, 1) と対称な点 B の座標を求めよ。

B(a, b) とする。

$$2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2 \cdots \ell \text{ の傾きは } 2$$

$$\text{直線ABの傾きは } \frac{b-1}{a-2}$$

ℓ と AB は垂直 \rightarrow 2つの直線の傾きは -1

$$2 \times \frac{b-1}{a-2} = -1 \Rightarrow a + 2b = 4 \cdots ①$$

また、ABの中点 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2} \right)$ は ℓ 上。

$$2 \times \frac{2+a}{2} - \frac{1+b}{2} + 2 = 0 \Rightarrow 2a - b = -7 \cdots ②$$

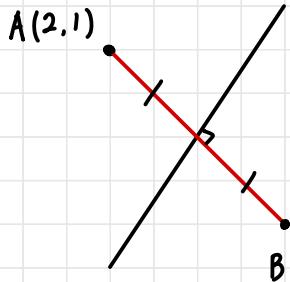
①②を連立させて解くと

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore B(-2, 3)$$

直線 $2x - y + 2 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A(2, 1) と対称な点 B の座標を求めよ。

(別)



$2x - y + 2 = 0$ と直線 AB は垂直に交わる → 傾きの積が -1

$$2x - y + 2 = 0 \rightarrow y = 2x + 2 \cdots \text{①} \text{ なので 傾きは } 2$$

直線 AB の傾きを m とすると $2 \times m = -1$
 $m = -\frac{1}{2}$

直線 AB の方程式は $y = -\frac{1}{2}x + b$ における

これが (2, 1) を通るので $1 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \rightarrow b = 2$

よって直線 AB の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \cdots \text{②}$$

①②を連立すると

$$2x + 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \text{ を } y = 2x + 2 \text{ に代入 } \rightarrow y = 2$$

①②の交点は (0, 2) これは 2 点 A, B の中点である。

ここで点 B を (p, q) とすると、2 点 A, B の中点は

$$\left(\frac{2+p}{2}, \frac{1+q}{2} \right) \text{ となりこれが } (0, 2) \text{ と等しいので}$$

$$\frac{2+p}{2} = 0 \rightarrow p = -2$$

$$\frac{1+q}{2} = 2 \rightarrow q = 3$$

よって $B(-2, 3)$

点と直線の距離

① 原点 O と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

② 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

練習 原点と次の直線の距離を求めよ。

19 (1) $2x - y + 5 = 0$

(2) $2x + 3y - 4 = 0$

$$(1) \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$(2) \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

練習 次の点と直線の距離を求めよ。

20 (1) 点 $(1, 2)$, 直線 $3x - 4y - 1 = 0$

(2) 点 $(2, -3)$, 直線 $2x + y - 3 = 0$

(3) 点 $(-1, 5)$, 直線 $y = 3x - 2$

$$(1) \frac{|3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

$$(2) \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(3) y = 3x - 2 \quad 3x - y - 2 = 0 \quad \frac{|3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

2直線の交点をトル直線

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \cdots ① \\ x-y-1=0 \cdots ② \end{cases}$$

は1点で交わり
その交点をAとする。

定数kを用いて

$$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0 \cdots ③ \text{ をとく。} \quad (x+2y-4)+k(x-y-1)=0 \text{ も可}$$

③は①②の交点Aを必ずトル。

2直線 $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ の交点と、点 $(-2, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

定数 k を用いて

$$k(2x - y + 1) + (x + y - 4) = 0 \cdots ①$$

これが $(-2, 1)$ を通る式

$$k \{2(-2) - 1 + 1\} + (-2 + 1 - 4) = 0$$

$$-4k - 5 = 0$$

$$k = -\frac{5}{4}$$

これを ① に代入する

$$-\frac{5}{4}(2x - y + 1) + (x + y - 4) = 0$$

両辺 4倍して

$$-5(2x - y + 1) + 4(x + y - 4) = 0$$

$$-10x + 5y - 5 + 4x + 4y - 16 = 0$$

$$-6x + 9y - 21 = 0$$

$$6x - 9y + 21 = 0$$

$$2x - 3y + 7 = 0$$

$$\underline{\quad 2x - 3y + 7 = 0 \quad}$$

円の方程式

・点 (a, b) を中心、半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

・原点を中心、半径 r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

練習 21 次のような円の方程式を求めよ。

- (1) 中心が原点、半径が 2
- (2) 中心が点 $(2, 3)$ 、半径が 4
- (3) 中心が点 $(-2, 1)$ 、半径が $\sqrt{10}$

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$(2) \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$(3) \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

練習
23

2 点 $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ を直径の両端とする円について、中心 C の座標と半径 r を求めよ。また、その方程式を求めよ。

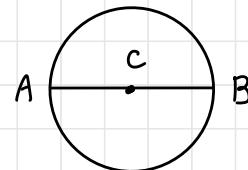
A, B が直径の両端なので

AB の中点が円の中心 C の座標になる。

$$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \rightarrow C(-1, 4)$$

右図より半径は AC

$$AC = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (2 - 4)^2} = 2\sqrt{2}$$



よって中心 $(-1, 4)$ 半径 $2\sqrt{2}$ なので

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 8$$

中心 $(3, -2)$

半径 $2\sqrt{2}$

練習
22

円 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ の中心の座標と半径を求めよ。

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$
 の表し方

中心 (a, b) , 半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{これを展開すると}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

∴ $\ell = -2a, m = -2b, n = a^2 + b^2 - r^2$ とすると

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

練習
24

次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$

$$(1) \quad x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + 6x + y^2 + 8y + 9 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + 9 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 16$$

中心 $(-2, 1)$ 半径 3 の円

中心 $(-3, -4)$ 半径 4 の円

次の3点A, B, Cを通る円の方程式を求めよ。

- (1) A(1, 1), B(2, 1), C(-1, 0)
- (2) A(1, 3), B(5, -5), C(4, 2)

(1) 円の方程式を定数l, m, nを用いて

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ とする。}$$

A(1, 1), B(2, 1), C(-1, 0) をトールの式

$$1^2 + 1^2 + l \cdot 1 + m \cdot 1 + n = 0 \Rightarrow l + m + n = -2 \cdots ①$$

$$2^2 + 1^2 + l \cdot 2 + m \cdot 1 + n = 0 \Rightarrow 2l + m + n = -5 \cdots ②$$

$$(-1)^2 + 0^2 + l \cdot (-1) + m \cdot 0 + n = 0 \Rightarrow -l + n = -1 \cdots ③$$

①②③を連立させて解くと

$$l = -3, m = 5, n = -4$$

∴ エ

$$\underline{x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0}$$

(2) 円の方程式を定数l, m, nを用いて

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \text{ とする。}$$

A(1, 3), B(5, -5), C(4, 2) をトーラの式

$$1^2 + 3^2 + l \cdot 1 + m \cdot 3 + n = 0 \Rightarrow l + 3m + n = -10 \cdots ①$$

$$5^2 + (-5)^2 + l \cdot 5 + m \cdot (-5) + n = 0 \Rightarrow 5l - 5m + n = -50 \cdots ②$$

$$4^2 + 2^2 + l \cdot 4 + m \cdot 2 + n = 0 \Rightarrow 4l + 2m + n = -20 \cdots ③$$

①②③を連立させて解くと

$$l = -2, m = 4, n = -20$$

∴ エ

$$\underline{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0}$$

次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 25, \quad y = x + 1$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 = 8, \quad x + y = 4$$

$$(1) \quad y = x + 1 \text{ を } x^2 + y^2 = 25 \text{ に代入}$$

$$x^2 + (x+1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = -4, 3$$

$$x = -4 \text{ のとき } y = -3$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 4$$

よって

$$\underline{\underline{(-4, -3), (3, 4)}},$$

$$(2) \quad x + y = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

$$y = -x + 4 \text{ を } x^2 + y^2 = 8 \text{ に代入}$$

$$x^2 + (-x+4)^2 = 8$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 = 8$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2 \text{ なので } y = 2$$

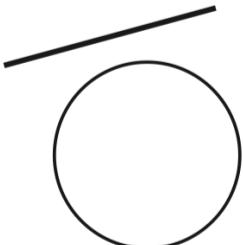
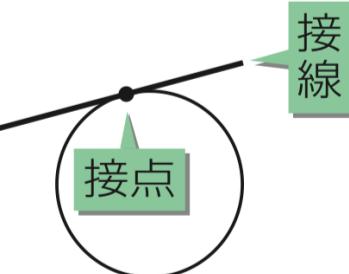
よって

$$\underline{\underline{(2, 2)}}$$

円の方程式と直線の方程式から y を消去すると2次方程式が得られる。

この2次方程式の判別式を D とすると、円と直線の位置関係について以下が成立

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	異なる 2つの実数解	重解 (ただ1つ)	実数解を もたない
円と直線の 位置関係	異なる 2点で交わる	接する	共有点を もたない
共有点の個数	2個	1個	0個



円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = 2x + m$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 円と直線が共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) 円と直線が接するとき、定数 m の値と接点の座標を求めよ。

$$y = 2x + m \text{ を } x^2 + y^2 = 5 \text{ に代入}$$

$$x^2 + (2x + m)^2 = 5$$

$$x^2 + 4x^2 + 4mx + m^2 = 5$$

$$5x^2 + 4mx + m^2 - 5 = 0 \cdots ①$$

①の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (4m)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (m^2 - 5) \\ &= 16m^2 - 20(m^2 - 5) \\ &= 16m^2 - 20m^2 + 100 \\ &= -4m^2 + 100 \end{aligned}$$

(1) 円と直線が共有点をもつ $\rightarrow D \geq 0$

$$-4m^2 + 100 \geq 0$$

$$4m^2 - 100 \leq 0$$

$$m^2 - 25 \leq 0$$

$$(m+5)(m-5) \leq 0$$

よって

$$\begin{array}{r} -5 \leq m \leq 5 \\ \hline \end{array}$$

(2) 円と直線が接する $\rightarrow D = 0$

$$-4m^2 + 100 = 0$$

$$-4m^2 = -100$$

$$m^2 = 25$$

$$m = \pm 5$$

$m = 5$ のとき

① $\therefore m = 5$ を代入

$$5x^2 + 20x + 20 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$y = 2x + m (=$$

$$m = 5, x = -2 \text{ を代入}$$

$$y = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$m = -5$ のとき

① $\therefore m = -5$ を代入

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = 2x + m (=$$

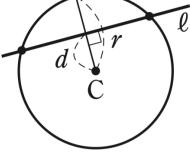
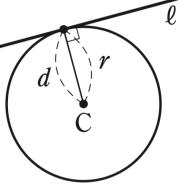
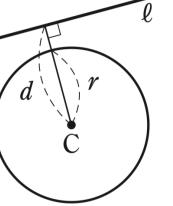
$$m = -5, x = 2 \text{ を代入}$$

$$y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

$$m = 5 \text{ のとき } (-2, 1)$$

$$m = -5 \text{ のとき } (2, -1)$$

円の半径を r , 円の中心 C と直線 ℓ とのキヨリを d とする。

d と r の大小	$d < r$	$d = r$	$d > r$
円と直線の位置関係	異なる2点で交わる 	接する 	共有点をもたない 

練習
28 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ が接するとき, r の値を求めよ。

$x^2 + y^2 = r^2$ は 原点 中心 半径 r の円

円と直線が接する

→ 円の中心から直線までのキヨリ = 半径の長さ

円の中心から直線までのキヨリを d とする

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$d = r$ となるので

$$r = \sqrt{5}$$

円の接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

練習
29

次の円上の点Pにおける接線の方程式を求めよ。

- (1) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, 1) (2) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, -3)
(3) $x^2 + y^2 = 16$, P(4, 0) (4) $x^2 + y^2 = 5$, P(0, $-\sqrt{5}$)

(1) $3x + y = 10$ (2) $2x - 3y = 13$

(3) $4x = 16$ (4) $-\sqrt{5}y = 5$
 $x = 4$ $y = -\frac{5}{\sqrt{5}}$

$$y = -\sqrt{5}$$

練習
30

点 A(2, 1) から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めるよ。

接点の座標を (a, b) とすると

接線の方程式は $ax + by = 1 \dots ①$

これは点Aから引いた接線なので $(2, 1)$ を入れる。

$$\text{①に}(2, 1) \text{を代入 } 2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a \dots ②$$

また接点 (a, b) は $x^2 + y^2 = 1$ 上の点なので

$$\begin{cases} \text{接線 } y = 1 \\ \text{接点 } (0, 1) \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{これに ②を代入すると}$$

$$a^2 + (1 - 2a)^2 = 1$$

$$a^2 + 4a^2 - 4a + 1 = 1$$

$$5a^2 - 4a = 0$$

$$a(5a - 4) = 0$$

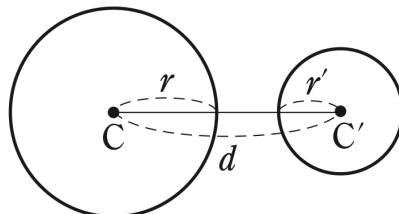
$$a = 0, \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} \text{接線 } \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = 1 \\ \text{接点 } (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \end{cases}$$

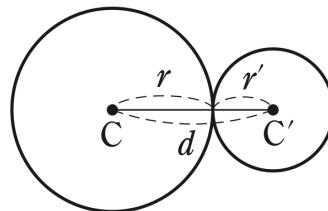
2つの円の位置関係

円Cの半径を r , C'の半径を r' , 2つの円の中心間距離を d とする.

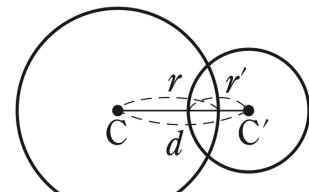
[1] 互いに外部にある



[2] 外接する(1点を共有する)



[3] 2点で交わる

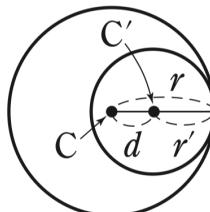


$$[1] \quad d > r + r'$$

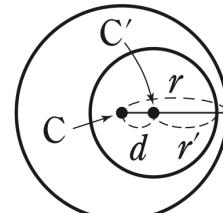
$$[2] \quad d = r + r'$$

$$[3] \quad r - r' < d < r + r'$$

[4] 内接する(1点を共有する)



[5] 一方が他方の内部にある



$$[4] \quad d = r - r'$$

$$[5] \quad d < r - r'$$

円 $x^2 + y^2 = 4$ と次の円について、その位置関係を調べよ。

$$(1) \quad (x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$(2) \quad (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$$

$x^2 + y^2 = 4$ は 原点中心 半径2の円

(1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$ は $(-3, 4)$ 中心 半径3の円

2つの円の中心間距離 d は

$$d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

ここで d は2つの円の和と等しいので

2つの円は外接している。

(2) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ は
 $(3, 3)$ 中心 半径 $2\sqrt{2}$ の円

2つの円の中心間距離 d は

$$d = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ここで 2つの円の半径の和は $2\sqrt{2} + 2$
差は $|2\sqrt{2} - 2|$

$$|2\sqrt{2} - 2| < d < 2\sqrt{2} + 2$$

よって 2つの円は異なる2点で交わる。

中心が点 $(-3, 4)$ である円 C と、円 $x^2 + y^2 = 1$ が内接するとき、円 C の方程式を求めよ。

$x^2 + y^2 = 1$ は原点中心半径1の円

2つの円の中心間距離 d は

$$d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

円 C の半径を r とすると2つの円が内接するのは

$$5 = r - 1 \text{ をみたすとき}$$

$r = 6$ のときである。

∴ 円 C は $(-3, 4)$ 中心半径6の円

$$\underline{(x+3)^2 + (y-4)^2 = 36}$$

次の2つの円の共有点の座標を求めよ。

$$x^2 + y^2 = 10, \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 5 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 2x - y - 5 = 0 \dots \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ により

$$2x + y + 5 = 10$$

$$y = 5 - 2x \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$x^2 + (5 - 2x)^2 = 10$$

$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 10$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

$x = 1$ のとき

$$y = 3$$

$x = 3$ のとき

$$y = -1$$

∴ 共有点は

$$(1, 3) (3, -1)$$

2つの円の交点を通る 図形

円 $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ と 円 $x^2 + y^2 + \ell x + my + n = 0$ の交点を通る円の方程式は

定数 k を用いて

$$k(x^2 + y^2 - r^2) + (x^2 + y^2 + \ell x + my + n) = 0$$

- 練習
1 2つの円 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$ の2つの交点と点
(1, 2) を通る円の方程式を求めよ。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots ① \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

k を定数として

$$k(x^2 + y^2 - 4) + (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6) = 0 \cdots ③$$

③は(1, 2)を通るので

$$k(1^2 + 2^2 - 4) + (1^2 + 2^2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 6) = 0$$

$$k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$|k = 1| \in ③$ に代入

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 4) + (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6) = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 10 = 0 \\ \hline x^2 + y^2 - 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

2点 A(-1, 0), B(1, 0) に対して, $AP^2 - BP^2 = 8$ を満たす点Pの軌

跡を求めよ。

点 P(x, y) とする。

$$AP^2 = \{x - (-1)\}^2 + (y - 0)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$$

$$BP^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$AP^2 - BP^2 = (x^2 + 2x + 1 + y^2) - (x^2 - 2x + 1 + y^2) = 4x$$

$$AP^2 - BP^2 = 8 \text{ と })$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

よって点Pは直線 $x = 2$ 上にある

逆にこの直線上のすべての点Pに対して $AP^2 - BP^2 = 8$ は成立

したがって点Pの軌跡は直線 $x = 2$ である。

2点 A(-3, 0), B(2, 0)からの距離の比が 3:2 である点Pの軌跡を
求めよ。

点 P(x, y) とする。

$$AP : BP = 3 : 2 \text{ より}$$

$$2AP = 3BP$$

$$4AP^2 = 9BP^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AP^2 = \{(x - (-3))^2 + (y - 0)^2\}$$

$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$BP^2 = (x - 2)^2 + (y - 0)^2$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②③を①に代入

$$4(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 9(x^2 - 4x + 4 + y^2)$$

$$4x^2 + 24x + 36 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$

$$5x^2 - 60x + 5y^2 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + y^2 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 36$$

よって点Pは円 $(x - 6)^2 + y^2 = 36$ 上にある

逆にこの円上のすべての点P(x, y)は条件を満たす。

したがって求める軌跡は中心(6, 0), 半径6の円

点Qが直線 $y = x + 2$ 上を動くとき、点A(1, 6)と点Qを結ぶ線分

AQを2:1に内分する点Pの軌跡を求めよ。

点P(x, y), 点Q(s, t)とする。

点Qは $y = x + 2$ 上の点なので $t = s + 2 \cdots ①$

点PはAQを2:1に内分するので

$$P\left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot s}{2+1}, \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot t}{2+1}\right) = \left(\frac{1+2s}{3}, \frac{6+2t}{3}\right) \text{ たり}$$

$$x = \frac{1+2s}{3} \rightarrow s = \frac{3x-1}{2}$$

$$y = \frac{6+2t}{3} \rightarrow t = \frac{3y-6}{2} \cdots ②$$

②を①に代入

$$\frac{3y-6}{2} = \frac{3x-1}{2} + 2$$

$$3y-6 = 3x-1+4$$

$$3x-3y+9=0$$

$$x-y+3=0$$

よって点Pは直線 $x-y+3=0$ 上にある。

逆にこの直線上のすべての点P(x, y)は条件をみたす。

したがって求める軌跡は直線 $x-y+3=0$

領域 Ω 或いは座標平面上で x, y の不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合

境界線を含む含まないの言ひ述が必要

直線と領域

直線 $y = mx + n$ を ℓ とする。

① 不等式 $y > mx + n$ が表す領域 Ω 或いは直線 ℓ より上側。

② 不等式 $y < mx + n$ が表す領域 Ω 或いは直線 ℓ より下側。

次の不等式の表す領域を図示せよ。

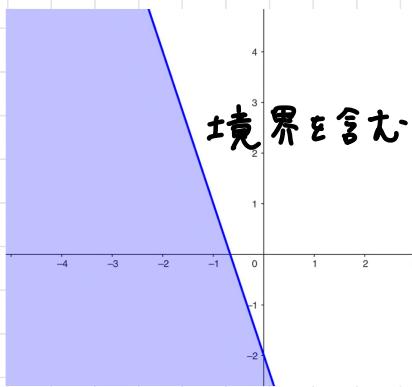
(1) $3x + y + 2 \leq 0$

(2) $2x - 3y + 6 \leq 0$

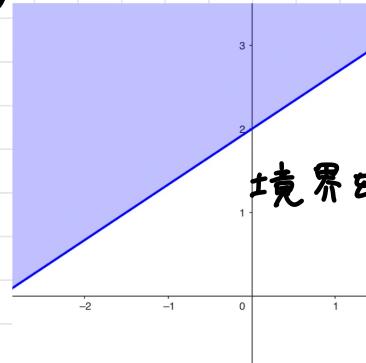
(3) $y > 2$

(4) $x \leq -1$

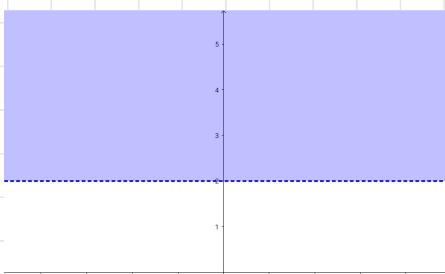
(1)



(2)

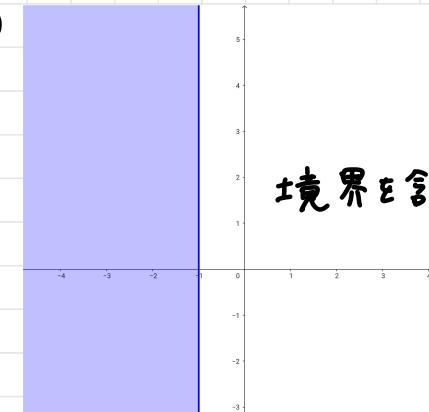


(3)



境界を含まない

(4)

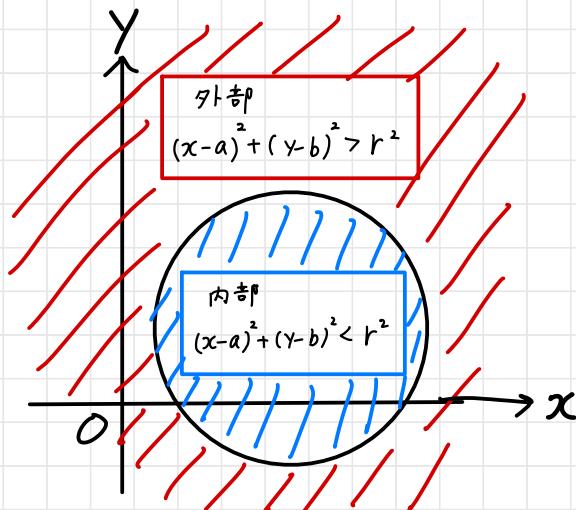


円と領域

円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ を円 C とする.

① 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ の表す領域または円 C の内部.

② 不等式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ の表す領域または円 C の外部.



次の不等式の表す領域を図示せよ。

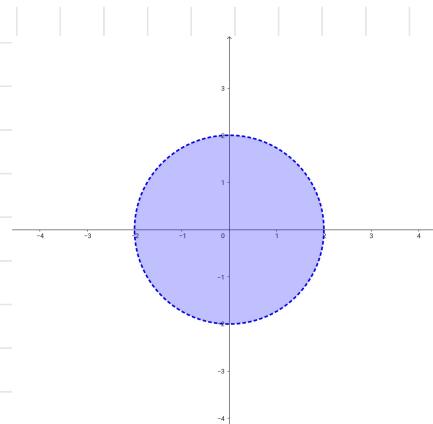
(1) $x^2 + y^2 < 4$

(2) $x^2 + y^2 \geq 6$

(3) $(x+2)^2 + y^2 \leq 4$

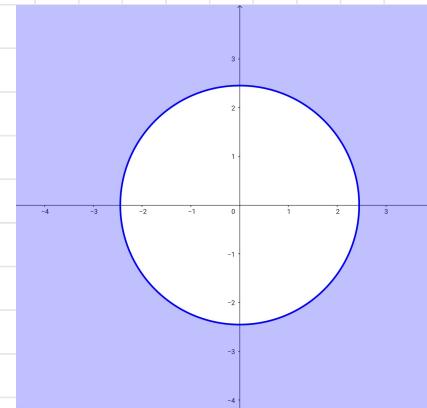
(4) $(x-1)^2 + (y+3)^2 > 9$

(1)



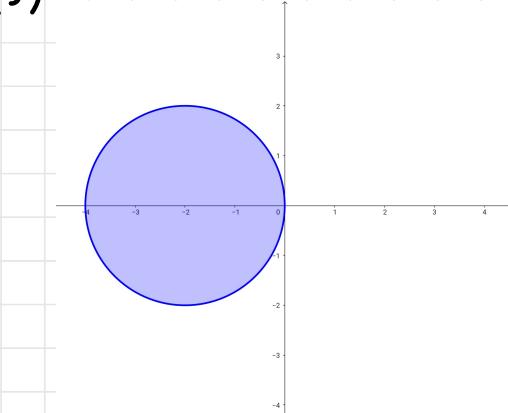
境界を含まない

(2)



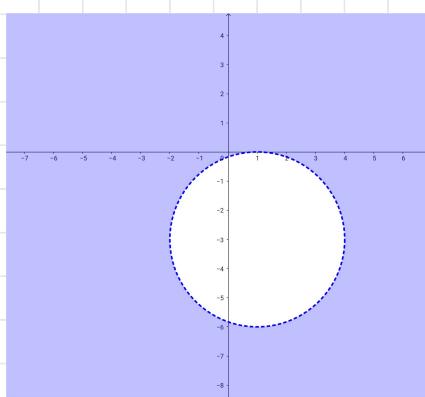
境界を含む

(3)



境界を含む

(4)



境界を含まない

次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

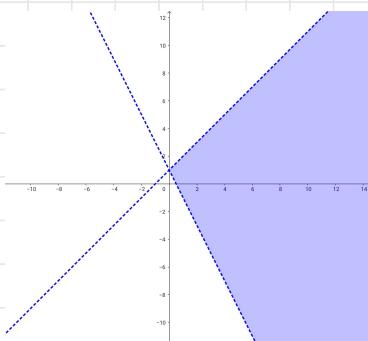
$$(1) \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ 4x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

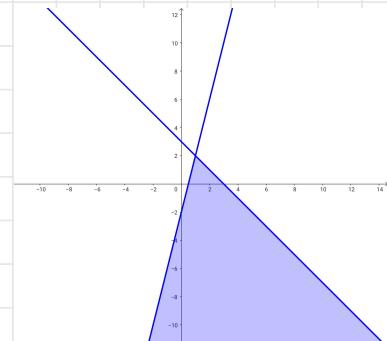
$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ 3x - y + 3 < 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \\ x + 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

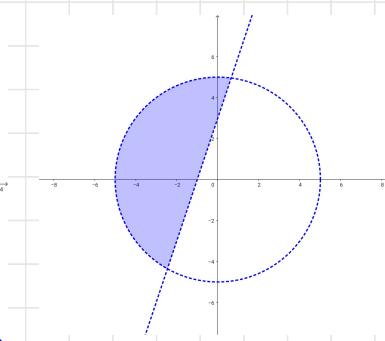
(1)



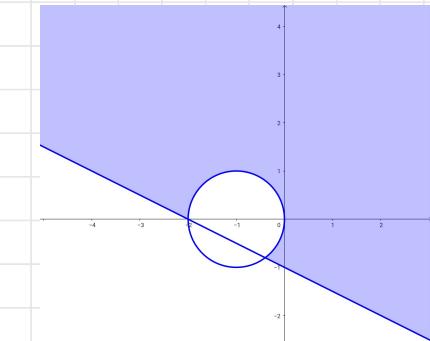
(2)



(3)



(4)



境界は含まない

境界は含む

境界は含まない

境界は含む

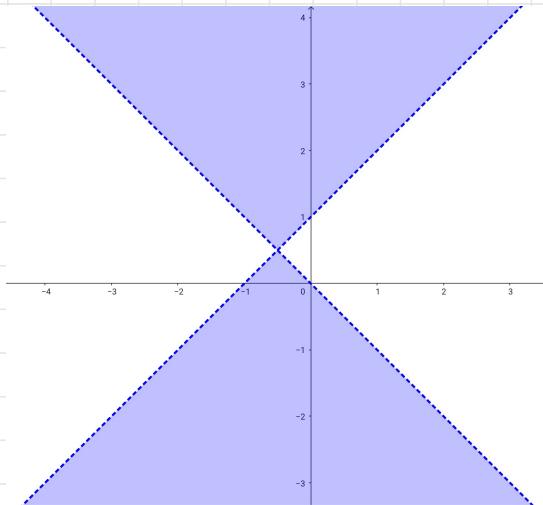
次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(1) \quad (x+y)(x-y+1) < 0$$

$$(2) \quad (x+y+2)(x+y-1) \geq 0$$

$$(1) \quad x+y < 0 \text{かつ} x-y+1 > 0$$

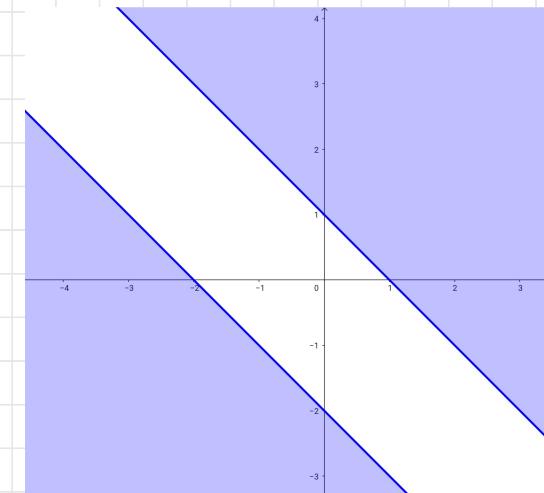
$$x+y > 0 \text{かつ} x-y+1 < 0$$



境界は含まない

$$(2) \quad x+y+2 \geq 0 \text{かつ} x+y-1 \geq 0$$

$$x+y+2 \leq 0 \text{かつ} x+y-1 \leq 0$$

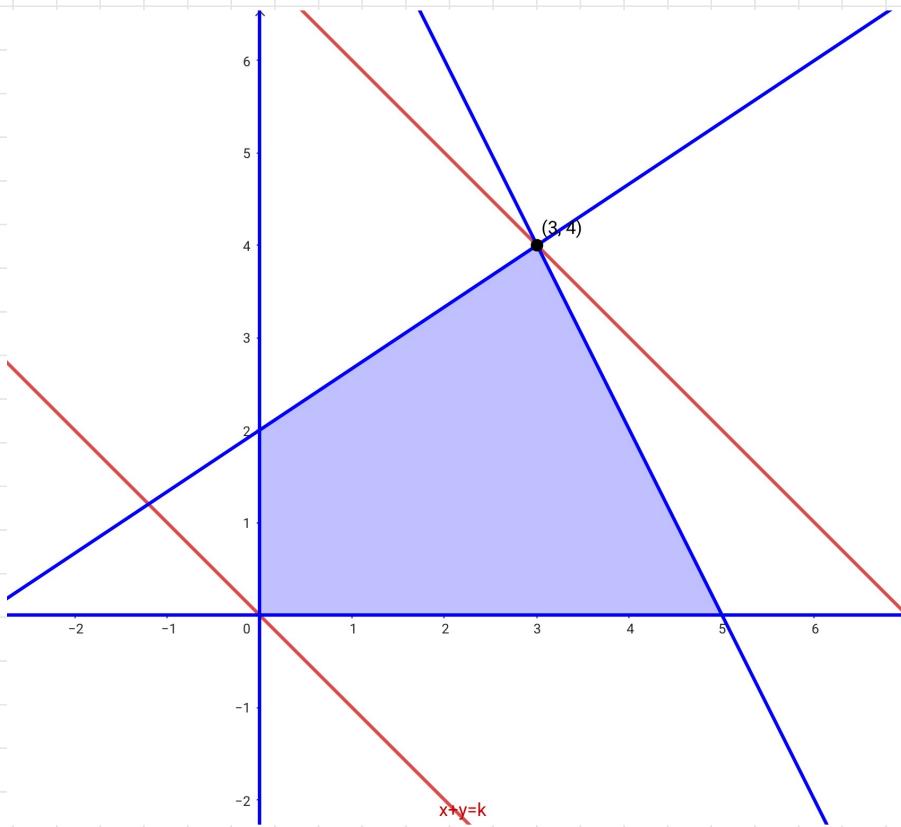


境界は含む

x, y が 4 つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 10, 2x-3y \geq -6$ を同

時に満たすとき, $x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。

4 つの不等式の共通範囲は下図



$$x+y=k \text{ とする。}$$

図より

$$\left. \begin{array}{l} x=3, y=4 \text{ のとき最大値 } 7 \\ x=0, y=0 \text{ のとき最小値 } 0 \end{array} \right\}$$

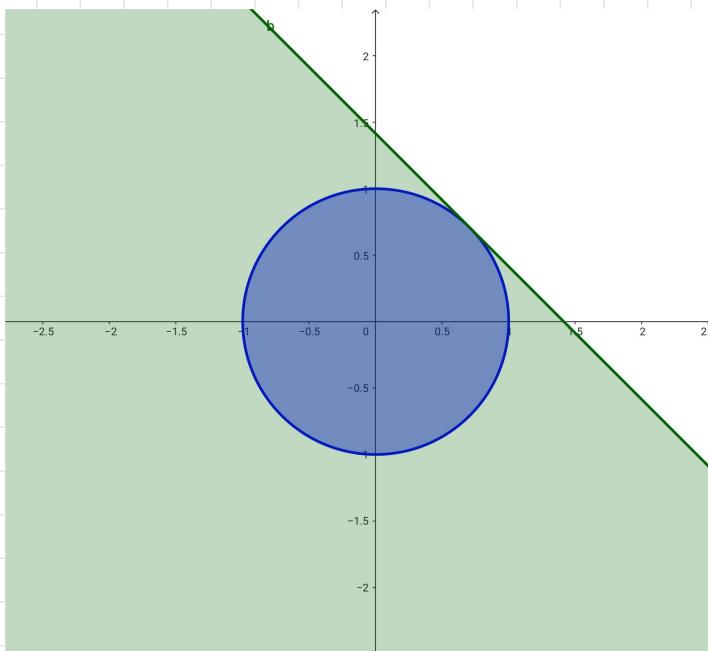
x, y は実数とする。次のことを証明せよ。

$$x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ならば } x + y \leq \sqrt{2}$$

不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を P

不等式 $x + y \leq \sqrt{2}$ の表す領域を Q とする。

これらの領域を図示すると次のようになる。



左図より $P \subset Q$ が成立するので

$x^2 + y^2 \leq 1$ ならば $x + y \leq \sqrt{2}$ である。

練習

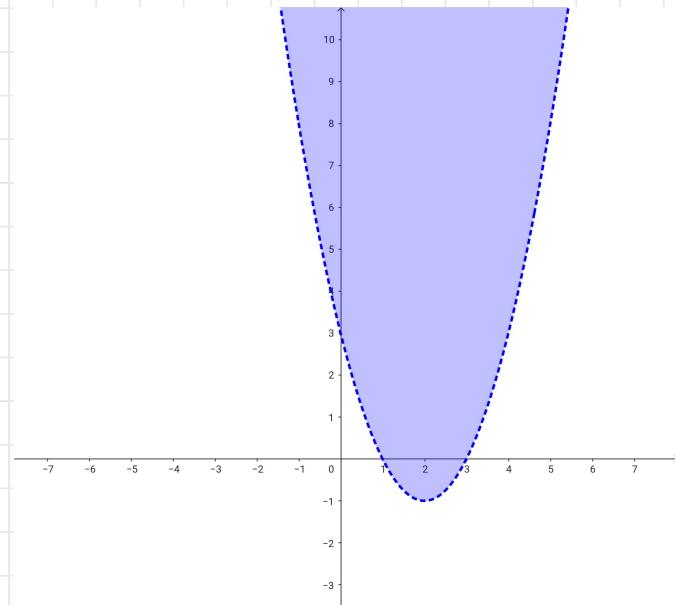
1

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > x^2 - 4x + 3$

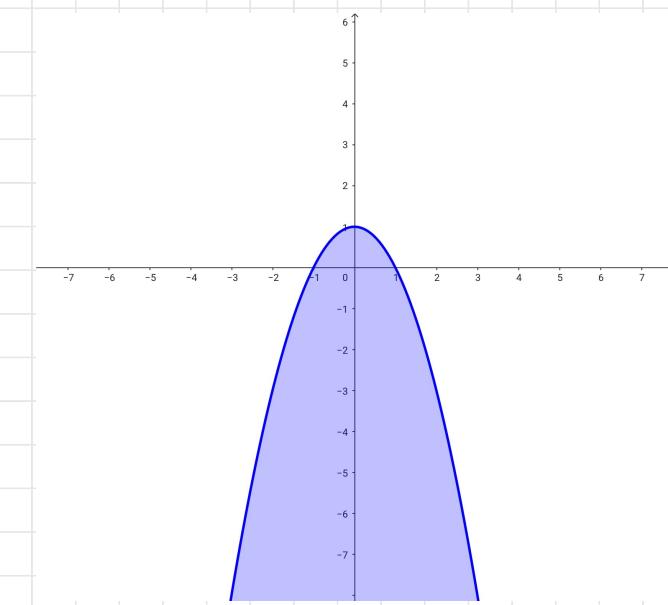
(2) $y \leq 1 - x^2$

(1)



境界線を含まない

(2)



境界線を含む