

מבני נתונים 234218 חורף 2020/21



גיליון יבש מספר 1 – מעודכן לתאריך 03.11.2020

רנא שחות, ranas@cs.technion.ac.il

מתרגל ממונה על התרגיל:

24.11.2020 בשעה 23:55.

תאריך ושעת הגשה:

בזוגות .

אופן ההגשה:

הנחיות לפתרון:

- כתבו בכתב ברור או הדפיסו את פתרונותיכם.
- זוג שיגיש פתרון מודפס משני צידי הדף, יחד עם דף שער מתאים (דף שער לתרגיל יבש/טופס הגשה מאוחרת, הנמצאים באתר הקורס), יקבל בונוס של 5 נקודות עד לציון מקסימאלי של 100 נקודות.
- הקפידו לכתוב את פתרונותיכם באופן מסודר ומובנה. התחילו מפתח קצר המתאר את תשובתכם בקצרה (עד 3 שורות) ולאחריו כתבו פירוט מלא של הפתרון. אי עמידה בכלל זה תגרור הורדה של 10% מהציון.
- **הקפידו לצרף את כל השאלות והסעיפים לפי הסדר! אי עמידה בכלל זה תגרור הורדה של ציון.**
- אין צורך לפרט דברים שנלמדו בהרצאות או בתרגולים. מספיק לצטט או להפנות לחומר הלימוד. עם זאת, יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- בתרגיל זה, \log הוא לפי בסיס 2.
- בשאלות 1-3 יש להקפיד על הוכחה פורמאלית, כולל התייחסות לקבועים מהגדרות חסמי הסיבוכיות.
- בשאלות בהן נתונה נוסחה רקורסיבית $T(n)$, הניחו, אם לא צוין אחרת, כי $T(1) = 1$ ואילו הנוסחה הרקורסיבית עצמה מתייחסת למקרים בהם $n > 1$.
- הניחו $0 \notin \mathbb{N}$.
- תוכן ה-FAQ הינו מחייב, הקפידו להישאר מעודכנים .



שאלה 1 (20 נקודות)

ענו על הסעיפים הבאים.

תהיו $f_1, f_2, g_1, g_2: N \rightarrow R^+$
הוכחו או הפריכו את הסעיפים הבאים:

1. $f_1(n) = O(1) \Leftrightarrow f_1(n) = \theta(1)$

2. $\sqrt{f_1(n)} = \Omega(f_1(n)) \Leftrightarrow f_1(n) = O(1)$

3. אם $f_1(n) = O(g_1(n))$ וגם $f_2(n) = O(g_2(n))$ אז $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = O(\frac{g_1(n)}{g_2(n)})$

4. אם $f_1(n) = O(g_1(n))$ אז $|\log(\frac{f_1(n)}{g_1(n)})| = O(\log(g_1(n)))$

5. אם $f_1(n) = \theta(g_1(n))$ וגם $f_2(n) = \theta(g_2(n))$ אז $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \theta(\frac{g_1(n)}{g_2(n)})$

6. אם $|\log(\frac{f_1(n)}{g_1(n)})| = O(f_2(n))$ וגם $|\log(\frac{f_2(n)}{g_2(n)})| = O(f_2(n))$ אז

$$|\log(\frac{f_1(n)}{g_2(n)})| = O(f_2(n))$$



שאלה 2 (20 נקודות)

1. לכל זוג פונקציות $f(n), g(n)$ בטבלה למטה, תכתבו את הסימנים:

$$\Omega, \theta, O$$

בהתאם לפי היחס: $f(n) = O(g(n)), f(n) = \theta(g(n)), f(n) = \Omega(g(n))$

אם יש יותר מיחס מתאים, תבחרו את היחס הכי חזק בין $f(n)$ ל $g(n)$

הוכיחו את תשובתכם.

	n	$n \log n$	n^2
$n \log^2 n$			
$2^{\log^2 n}$			
$\log(n!)$			
$n^{\log 3}$			

2. הראו כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים $\log \log(n) = o(\log^\epsilon(n))$.

3. נתונה פונקציה $f(n)$ כך ש- $f(n) = \omega(\log(n))$. הראו כי $n = o(2^{f(n)})$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. נתונה משוואת הנסיגה הבאה: $T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T(a \cdot n) + n$. כאשר a הוא קבוע ו- $T(1)=1$

לכל $n < 10$. האם קיים a קבוע עבורו $T(n) = \omega(n)$? אם כן מהו ה- a המינימאלי עבורו זה

מתקיים ומה ערכה האסימפטוטי של $T(n)$ במקרה זה?

ב. מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים פשוטים (כלומר, ללא שימוש בסכימה, סימן עצרת וכו') עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו והוכיחו תשובתכם.

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 + n \log^2 n$$

$$T(n) = \log((n^2)!)$$

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n^2$$

$$T(n) = 16n^4 T(\sqrt{n}) + 2n^8 \log^4 n$$



שאלה 4 (20 נקודות)

בעקבות הקורונה, מדינות רבות בעולם המיוצגות ע"י האינדקסים 1 עד N רוצים לאמץ שיטת האקורדיון עם השינוי הבא: בשיטת האקורדיון המשק יפתח וייסגר בהתאם לקצב התחלואה במדינה, אבל, במטרה לצמצם את אי הודאות, במיוחד בתקופה זו, כל מדינה החליטה שהיא נכנסת לסגר כל מספר קבוע של ימים, כלומר במדינה i נכנסים לסגר כל D_i ימים אלא אם מקדימים את הסגר בעקבות מצב חירום (ע"י פעולת $Precede_lockdown$). בתחילת כל יום, אנו מבצעים הדפסה של כל המדינות שיש בהן סגר (ע"י פעולת $lock_down_now()$ בדיוק פעם אחת ליום, כלומר פעולה זו מסמנת את סוף היום הקודם)

$$D = \max_i \{D_i\} \text{ נסמן}$$

הציעו מבנה נתונים למימוש הפעולות הבאות:

- $Init(N, D)$ - אתחול מבנה הנתונים עם הפרמטרים N ו- D .
- **סיבוכיות זמן: $O(1)$.**
- $Insert(i, D_i, days)$ – הוספת המדינה i למבנה שהיא עוד לא במבנה, עם קבוע סגר D_i כך שנותרו $days$ ימים לסגר הבא מיום ביצוע פעולה זו.
- **סיבוכיות זמן: $O(1)$.**
- $Precede_lockdown(i, days)$ – הקדמת הסגר במדינה i ב- $days$ ימים בעקבות מצב חירום.
- **סיבוכיות זמן: $O(1)$.**
- $lock_down_now()$ – הדפסת האינדקסים של כל המדינות שבהן יש סגר ביום הפעלת הפונקציה.
- **סיבוכיות זמן: $O(k)$ כאשר k זהו מספר המדינות המודפסות.**

סיבוכיות המקום הנדרשת עבור המבנה הינה $O(N + D)$. הערה: D ו- N אינם קבועים לצורכי ניתוח סיבוכיות.



שאלה 5 (20 נקודות)

לקראת פתיחת השמיים וסוף סוף נוכל לטייל בעולם, חברת CoroFly החליטה לנהל סקרים על מנת להתארגן ולהסדיר טיסות עתידיות.

לחברת CoroFly יש הסכם עם N מדינות המיוצגות ע"י האינדקסים 1 עד N

ממשו מבנה הנתונים אשר תומך בפעולות הבאות:

$Init(N)$	מאתחלת את המבנה עם N מדינות. <u>סיבוכיות זמן:</u> $O(1)$.
$Fly(j, i)$	מוסיפה לתוצאות הסקר כי אדם מסוים ממדינה j רוצה לטוס למדינה i . <u>סיבוכיות זמן:</u> $O(1)$.
$Arrivals(i)$	מחזירה את מספר האנשים שאמרו שרוצים לטוס למדינה i - i . <u>סיבוכיות זמן:</u> $O(1)$.
$Departures(j)$	מחזירה את מספר האנשים שאמרו שרוצים לטוס מהמדינה j - j . <u>סיבוכיות זמן:</u> $O(1)$.
$Favored(k)$	מדפיסה את k המדינות המועדפות (בסדר יורד) שאנשים רוצים לטוס אליהן ברגע הקריאה לפעולה.
	במקרה שישנם כמה פלטים אפשריים העומדים בתנאי הפונקציה, די בהדפסת אחד מהם.
	<u>סיבוכיות זמן:</u> $O(k)$.
$Avoided()$	מדפיסה את כל המדינות שאף אחד לא רוצה לטוס אליהן. <u>סיבוכיות זמן:</u> $O(r)$, כאשר r הוא מספר המדינות שיש להדפיס.

סיבוכיות המקום הנדרשת עבור המבנה הינה $O(N)$.

הערות:

שימו לב שאסור לאדם להצביע שהוא רוצה לטוס למדינה שלו.

בהצלחה!