שיטות חישוביות באופטימיזציה 046197
תרגיל בית מספר 4
תאריך הגשה 01/07/2021

תרגיל 1

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה קמורה וגזירה ברציפות. נתבונן בבעית האופטימיזציה

$$\min_x\{f(x) \mid x \geq 0\}.$$

הוכיחו בעזרת תנאי KKT את הטענות הבאות ותנו להן פירוש גאומטרי:

1. אם $f'(0) > 0$ אזי $x = 0$ הוא פתרון לבעית האופטימיזציה.
2. אם $f'(0) \leq 0$ אזי כל נקודה $x \geq 0$ המקיימת $f'(x) = 0$ היא פתרון לבעית האופטימיזציה.

תרגיל 2

נתונה בעית האופטימיזציה

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & \mathbf{x}^TQ\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}^TQ\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x} \geq 1 \\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

כאשר $0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, וכן $\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ וקטורים נתונים. הניחו כי הבעיה (P) פיזיבילית.

1. הראו כי בעית האופטימיזציה (P) אינה בהכרח קמורה.
   הדרכה: זכרו כי בעיה נקראת קמורה אם תחום האילוץ קמור ופונקצית המטרה קמורה בתחום האילוץ. על מנת להראות כי בעיה זו עשויה להיות לא קמורה, מספיק למצוא $Q \succ 0$, b, ו־c עבור n כלשהו (לבחירתכם) שעבורם הבעיה אינה קמורה.
2. מצאו בעיה דואלית.
3. נסמן $\beta = \mathbf{b}^TQ^{-1}\mathbf{b}$. הראו כי הערך האופטימלי של הבעיה חסום מלמטה על ידי
   $$\frac{2+\beta-\sqrt{\beta(\beta+4)}}{2}.$$
   רמז: הציבו אפס עבור אחד מכופלי הלגרנז'.
4. **סעיף בונוס** (רשות): הוכיחו כי בעית האופטימיזציה (P) בהכרח איננה קמורה.
   רמז: העזרו בהשלמה לריבוע.

תרגיל 3

תהי $0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, יהיו $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ וקטורים נתונים ויהי $0 < c \in \mathbb{R}$. נתבונן בבעית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{a}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{b} = c \\ & \mathbf{x}^T \mathbf{a} > 0. \end{aligned}$$

נתון כי הבעיה פיזיבילית ומקיימת את תנאי Slater. כמו כן, מתקיים $\alpha\beta > \gamma^2$, כאשר

$$\alpha = \mathbf{a}^T Q^{-1} \mathbf{a}$$
$$\beta = \mathbf{b}^T Q^{-1} \mathbf{b}$$
$$\gamma = \mathbf{a}^T Q^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T Q^{-1} \mathbf{a}$$

הראו כי הבעיה קמורה, ומצאו את הערך האופטימלי שלה באמצעות תנאי KKT.
הדרכה: הוסיפו משתנה עזר $y = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$ וקבלו בעית אופטימיזציה שקולה בשני משתנים, $\mathbf{x}$ ו־y.
הניחו כי y קבוע, ופתרו בעית אופטימיזציה ב־$\mathbf{x}$ עם אילוצי שוויון בלבד: הראו כי קיימים $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ כך שהערך האופטימלי שלה נתון על ידי

$$g(y) = \frac{\mathbf{x}^{*T} Q \mathbf{x}^*}{y} = \frac{1}{2}(\mu_1 c + \mu_2 y) = \frac{\beta y^2 - 2c\gamma y + c^2 \alpha}{y(\alpha\beta - \gamma^2)}.$$

לאחר מכן, פתרו את בעית האופטימיזציה $\min\{g(y) \mid y > 0\}$ לקבלת הערך האופטימלי של הבעיה המקורית.

תרגיל 4

נתבונן בבעית האופטימיזציה

$$\min_x \left\{ \frac{1}{3} x^3 - ax \right\}$$

כאשר $x > 0$ ו־$a > 0$ פרמטר נתון.

1. הראו כי פתרון הבעיה הוא $x^* = \sqrt{a}$.
2. מעוניינים לפתור את בעית האופטימיזציה ב**שיטת ניוטון**. מצאו ביטוי לאיטרציה ה־k לפתרון הבעיה כתלות באיטרציה ה־$k-1$ ופרמטר הבעיה, a. הניחו גודל צעד קבוע $t = 1$.
3. הוכיחו כי אם $x_{k-1} > \sqrt{a}$ אז $x_{k-1} > x_k > \sqrt{a}$.
4. נניח כי $x_k = (1 + \delta_k)\sqrt{a}$. כלומר, הגודל δ_k מסמן את השגיאה הכפלית בחישוב $\sqrt{a}$. הוכיחו כי

$$\delta_k = \frac{\delta_{k-1}^2}{2(1 + \delta_{k-1})}. \tag{1}$$

5. הוכיחו כי

$$\delta_k \leq \frac{\delta_{k-1}}{2} \tag{2}$$

והסיקו כי האלגוריתם מתכנס ל־$\sqrt{a}$.

6. הוכיחו כי

$$\delta_k \le \frac{\delta_{k-1}^2}{2}. \tag{3}$$

שימו לב: פיתחתם כאן, למעשה, אלגוריתם פשוט לחישוב שורש ריבועי. כפי שנראה בהמשך התרגיל, הוא מתכנס מהר מאד. היסטוריונים משערים כי האלגוריתם היה ידוע מאות שנים לפני הספירה, ובוודאות היה ידוע ליוונים בתקופת האימפריה הרומית. הם, כמובן, לא ידעו שבעצם אלגוריתם זה נובע משיטת ניוטון...

7. נניח כי $a = 2$ וכי הניחוש הראשוני הוא $x_0 = 2$. עבור כל אחד מהביטויים לשגיאה הכפלית, (1), (2), (3), חשבו כמה איטרציות ניוטון דרושות על מנת לקבל דיוק של 50 ספרות אחרי הנקודה (ניתן להיעזר בכלי נומרי). חוו דעתכם על הביטויים השונים.

תרגיל 5

נתונות שתי בעיות אופטימיזציה:

$$(P_1) \quad \min_{x,y}\{x^2 + y^2 + 5x - 10y \;\mid\; |x - y/2 - 2| \le 1\}$$

$$(P_2) \quad \min_{x,y}\{(x-3)^2 + y^2 + 3x - 2y \;\mid\; (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 9,\;\; x \ge 2, y \ge 0\}$$

1. הראו כי הבעיות קמורות.

עבור הסעיפים הבאים, העזרו בכלי נומרי כלשהו. אנא צרפו את הגרפים המתקבלים.

2. פתרו את הבעיה (P_1) באמצעות אלגוריתם barrier עם פונקצית מחסום לוגירתמית. יש לצייר contour plot של הבעיה בתחום האילוץ, וכן את המסלול המרכזי המתקבל.
3. פתרו את הבעיה (P_2) באמצעות אלגוריתם barrier עם פונקצית מחסום לוגירתמית. הקצו פונקצית מחסום לכל אחד מהאילוצים. יש לצייר contour plot של הבעיה בתחום האילוץ, וכן את המסלול המרכזי המתקבל.
