תרגיל 1-

יהי $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הוכח כי f פונקציה קמורה אמ"ם $\phi(t) = f(x+td)$ קמורה לכל $x, d \in \mathbb{R}^n$.

הוכחה:

כיוון ⇐: נתון כי f קמורה, נוכיח כי $\phi(t)$ קמורה לכל $x, d \in \mathbb{R}^n$.
ראינו בהרצאה כי בהינתן טרנספורמציה אפינית $Ax+b$
ו- $f(x)$ קמורה, הפונקציה $f(Ax+b)$
נשארת קמורה. ולכן נבחר כי $A = I_{n \times n}$
ו- $b = td$ ולכן $f(x+td)$ קמורה
ולכן $\phi(t) = f(x+td)$ קמורה.

כיוון ⇒: נתון כי $\phi(t) = f(x+td)$ קמורה לכל $x, d \in \mathbb{R}^n$
נוכיח כי f קמורה.
יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ כלשהם ו- $\lambda \in [0,1]$ נוכיח כי

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

מכיוון ש- $\phi(t)$ קמורה לכל $x, d \in \mathbb{R}^n$ היא שמתקיים
שלכל $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\phi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \le \lambda \phi(t_1) + (1-\lambda) \phi(t_2)$$

בפרט עבור $t_1 = 0$. (נשים לב כי מדובר היטב כי $\phi(0) = f(x)$).
ו- $t_2 \neq 0$ כלשהו.

$$\Rightarrow \phi((1-\lambda)t_2) \le \lambda \phi(0) + (1-\lambda)\phi(t_2)$$

$$\Rightarrow f(x + (1-\lambda) t_2 d) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x + t_2 d)$$

וזה שוויון נכון לכל $x, d \in \mathbb{R}^n$ ולכן בפרט עבור $t_2 d = y - x$.

$$\Rightarrow d = \frac{y-x}{t_2}.$$

$$f(x + (1-\lambda)(y-x)) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x + y - x)$$

$$\Rightarrow f(x + (1-\lambda)y - x + \lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \blacksquare$$

2. $Q,R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q,R \succ 0$.

$$f(x,y)=\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)\left(\tfrac{1}{2}y^TRy\right)$$
$$g(x)=f(x,x)=\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)$$

1). $g(x)$ דיפרנציאבילית ברציפות (פולי' מסדר 4).

$$\nabla g(x)=\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)'\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)+\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)'$$
$$= Qx\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)+\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)\cdot Rx$$
$$\overset{Q,R \text{ סימטריות}}{=} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)}_{\text{סקלר}}\cdot Qx+\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)}_{\text{סקלר}}\cdot Rx$$

$$\nabla^2 g(x)=\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)'Qx+\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)(Qx)'$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)'Rx+\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)(Rx)'$$
$$\overset{Q,R \text{ סימטריות}}{=} (Rx)(x^TQ)+\left(\tfrac{1}{2}x^TRx\right)Q+(Qx)(x^TR)+\left(\tfrac{1}{2}x^TQx\right)R$$

2). אם g אינה קמורה, גם f בהכרח אינה קמורה. נוכיח:

אם g לא קמורה, קיימות 2 נק' $x,y\in\mathbb{R}^n$ כך ש-
$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$
$$\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x,x)+(1-\lambda)f(y,y)$$
כלומר 2 הנקודות $(x,x),(y,y)\in\mathbb{R}^{2n}$ לא מקיימות קמירות עבור $f(x,x)$ ולכן f לא קמורה.

3). נכ' :

$\left\{\begin{array}{l}R=\alpha Q\\ \alpha>0\end{array}\right. \Leftarrow$ $g(x)$ קמורה לכל $x\in\mathbb{R}^n$.

נראה ש- $\nabla^2 g(x)\succeq 0$:
$$\nabla^2 g(x)\overset{R=\alpha Q}{=}2\alpha(Qx)(x^TQ)+\alpha(x^TQx)Q$$
לכל $y\in\mathbb{R}^n$:
$$y^T\nabla^2 g(x)y=2\alpha\, y^T(Qx)(x^TQ)y+\alpha\cdot y^T(x^TQx)Qy$$
$$=2\alpha\|x^TQy\|^2+\alpha\cdot(x^TQx)\cdot(y^TQy)\underset{Q\succ 0}{\geq}0$$

$\Leftarrow \nabla^2 g(x) \succeq 0 \Leftarrow g(x)$ קמורה לכל $x\in\mathbb{R}^n$.

.4)

$$Q=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

לכל $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3y_1-2y_2 \\ -2y_1+3y_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=3y_1^2-2y_1y_2-2y_1y_2+3y_2^2$$

$$=2(y_1-y_2)^2+y_1^2+y_2^2>0$$

לכל $0\neq y\in\mathbb{R}^2$ ✓

✓

$\Rightarrow Q\succ 0$ ∎

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4y_1+3y_2 \\ 3y_1+4y_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$=4y_1^2+6y_1y_2+4y_2^2$$

✓

$$=3(y_1+y_2)^2+y_1^2+y_2^2>0$$

לכל $0\neq y\in\mathbb{R}^2$ ✓

$\Rightarrow R\succ 0$ ∎

ניתן לראות את R,Q ולחשב את ההסיאן בנקודה כללית $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\nabla^2 g(x)_{1,1}=36x_1^2+3x_1x_2$$

$$\nabla^2 g(x)_{2,2}=36x_2^2+3x_1x_2$$

$$\nabla^2 g(x)_{1,2}=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2$$

בנקודה $x_0=\begin{pmatrix} 0.1 \\ -1 \end{pmatrix}$ מקבלים דטרמיננטה שלילית:

$$|\nabla^2 g(x_0)|\cong -0.15<0$$

✓

ומכאן שקיים ע"ע שלילי אחד, לכן $\nabla^2 g(x_0)$ אינה PSD והפונ' בנקודה x_0 אינה קמורה, כלומר $g(x)$ אינה קמורה בכל $\mathbb{R}^2$.

תרגיל 3-

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. צ"ל $f(x)$ קמורה בתחום $0\le x<1$

הוכחה-

$f(x)$ גזירה בתחום זה ולכן:

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

ובתחום $0\le x<1$ $f''(x)\ge 0$ כלומר אי שלילית ולכן $f(x)$ קמורה בתחום זה.

2. הראו כי $f(x)\ge 2x$ עבור $0\le x<1$:

נסתכל על הפונקציה $\tilde{f}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1+x}\right)-2x$

$$\tilde{f}(0)=\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)-2\cdot 0=\ln(1)=0\ \ge 0$$

$$\tilde{f}'(x)=\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}2x=\frac{2}{1-x^2}-2$$

$$\frac{2}{1-x^2}-2\ge 0 \iff \frac{1}{1-x^2}\ge 1 \iff 0\le x<1$$

כלומר בתחום $0\le x<1$ ערך הנגזרת של $\tilde{f}(x)$ אי שלילי כלומר היא לא יורדת והערך הכי קטן הינו 0 ולכן בתחום $0\le x<1$ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\ge 0$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ge 2x \quad \forall\ 0\le x<1.$$

3) צ"ל $h(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ קעורה. $0<x<1$

<u>הוכחה:</u> נראה כי בתחום $0<x<1$ $-h(x)$ קמורה.

$$-h(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$$

$x\ln(x)$ פונקציה קמורה בתחום הנ"ל (מתרגיל 3).

נסתכל על $J(x) = (1-x)\ln(1-x)$

$$J'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\cdot\frac{-1}{(1-x)}$$

$$J'(x) = -\ln(1-x) - 1$$

$$J''(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

ונשים לב כי $J''(x) > 0$ בתחום $0<x<1$

ולכן בתחום $0<x<1$ $(1-x)\ln(1-x)$ קמורה.

$\Rightarrow$ $-h(x)$ קמורה כצירוף לינארי עם מקדמים אי שליליים של פונקציות לינאריות $\Rightarrow$ $h(x)$ קעורה.

---

4. צ"ל $g(x) = h\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)$ קמורה בתחום $0<x<1$.

<u>הוכחה:</u>

$$g'(x) = h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= h'\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{4\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= h'\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$g''(x) = h''\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{2\sqrt{1-x^2} - x \cdot 2 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{4(1-x^2)}$$

$$= h''\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot \frac{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{2(1-x^2)}$$

$$= h''\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$h'(x) = -\ln(x) - x\frac{1}{x} + \ln(1-x) + 1 = \ln(1-x) - \ln(x)$$

$$h''(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

$$g''(x) = \left(-\frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} - \frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\left(+\ln\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right) \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \left(-\frac{2}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{x}{2(\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$+ \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= -\left(\frac{1+\cancel{\sqrt{1-x^2}}+1-\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-2x}{1-1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{3/2} - \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Scanned with CamScanner

$$g''(x) = h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{2\sqrt{1-x^2} - x\cdot 2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{4(1-x^2)}$$

$$= h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\cdot\frac{1-x^2+x^2}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$=$

נשים לב כי:

$$h'(x) = -\ln(x) - \frac{x}{x} + \ln(1-x) - \frac{-1}{1-x} = \ln(1-x) - \ln(x)$$

$$h''(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

בנוסף: עבור $0<x<1$ הפונקציה $\sqrt{1-x^2}$ מקיימת $0<\sqrt{1-x^2}<1$ ולכן לפי סעיף ו'

$$f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \underset{\uparrow}{\geq} 2\sqrt{1-x^2}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \geq 2x \quad \forall\ 0<x<1$$

נשוב להצבה:

$$= \left(\frac{-1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}\right)\cdot\frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + \left(\ln\left(1-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \left(\left(\frac{\cancel{-2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{\cancel{2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\frac{x^2}{2^{\cancel{2}}(1-x^2)} + \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}} = \left(\frac{-1+\cancel{\sqrt{1-x^2}}-1-\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\right)\cdot\frac{x^2}{2(1-x^2)} + \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\right)\frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}} - \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{2}(1-x^2)}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{x^2}}$$

$$\geq \cancel{2}\cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}(1-x^2)\cancel{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{1-x^2} = 0$$

סיכום: לפי סעיף ב הראנו כי $g''(x)\geq 0$ $\forall\ 0<x<1$
ולכן הפונקציה קמורה בתחום כי הנגזרת השנייה
שלה אי שלילית בתחום זה.

תרגיל 4 -

הוכיחו כי הפונקציה $\forall i \quad p_i \geq 0$

$$g(x) = -\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$x > 0;\ x \in \mathbb{R}^n$$

הוכחה -

נחשב את הגרדיאנט $\nabla g(x)$ לפי x_i :

$$\nabla g(x)_j = -\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{p_i}\right) \cdot x_j^{p_j - 1} \cdot p_j$$

$$= -p_j \cdot \frac{x_j^{p_j}}{x_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{p_i}$$

$$= -\left(\frac{p_j}{x_j}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} = +\left(\frac{p_j}{x_j}\right) g(x)$$

נחשב את ההסיאן -

$$\nabla^2 g(x)_{ii} = \frac{-p_i}{x_i^2} g(x) + \frac{p_i}{x_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} g(x)$$

$$= g(x) \cdot \frac{p_i}{x_i^2}\left(-1 + p_i\right) = \frac{p_i(p_i - 1)}{x_i^2} g(x)$$

$$\nabla^2 g(x)_{ij} \underset{j\neq i}{=} \frac{p_i}{x_i} \cdot \frac{p_j}{x_j} g(x)$$

$$\nabla^2 g(x)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p_i(p_i - 1)}{x_i^2} g(x) & i = j \\[2ex] \dfrac{p_i p_j}{x_i x_j} g(x) & i \neq j \end{cases}$$

כעת נבדוק האם $\nabla^2 g(x)$ הוא PSD:

יהי $y \in \mathbb{R}^n$ כלשהו:

$$y^T \nabla^2 g(x)\, y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \nabla^2 g(x)_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(p_i - 1)\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 g(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right)\left(\frac{y_j}{x_j}\right) g(x)$$

$$= -g(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 p_i(1-p_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right)\left(\frac{y_j}{x_j}\right)\right]$$

נשים לב ש-

$$1 - p_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j$$

$$\Rightarrow -g(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 p_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right)\left(\frac{y_j}{x_j}\right)\right]$$

$$= -g(x)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_i p_j\left[\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 - \frac{y_i}{x_i}\cdot\frac{y_j}{x_j}\right]\right]$$

$$= -g(x)\cdot\left[\begin{matrix} p_1 p_2\left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}\right) & p_2 p_1\left(\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2 - \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}\right) & \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ p_1 p_n\left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1}\frac{y_n}{x_n}\right) & p_2 p_n\left(\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2 - \frac{y_2 y_n}{x_2 x_n}\right) & \end{matrix}\right.$$

Scanned with CamScanner

$$= -g(x)\cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left[\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 - 2\frac{y_i}{x_i}\frac{y_j}{x_j} + \left(\frac{y_j}{x_j}\right)^2\right]$$

$$= -g(x)\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j}\right)^2$$

ונשים לב כי: $p_i, p_j \geq 0$ ו- $\left(\frac{y_i}{x_i}-\frac{y_j}{x_j}\right)^2 \geq 0$ וגם בגלל

ש- $x>0$ הרי ש- $-g(x)>0$

מסקנה- $\nabla^2 g(x) \preceq 0$ ולכן $g(x)$ קעורה.

תרגיל 5-

והיו $x_1, x_2 \in U$ ו- $p_1>0$ ו- $p_2<0$ אשר
מקיימים $p_1+p_2=1$ וכן $p_1x_1+p_2x_2 \in U$
תחום קמור.

צ"ל עבור $f(x)$ קמורה

$$f(p_1x_1+p_2x_2) \geq p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)$$

הוכחה:

נסמן: $\lambda = \frac{p_1+p_2}{p_1} = \frac{1}{p_1}$ $(p_1>0)$ ו- $p_1+p_2>1$

$p_1 > 1-p_2 > 1$

$\Leftarrow$ $0<\lambda<1$

בנוסף: $1-\lambda = 1-\frac{p_1+p_2}{p_1} = \frac{-p_2}{p_1}$

$$f\left(\frac{1}{p_1}(p_1x_1+p_2x_2)-\frac{p_2}{p_1}x_2\right) \leq \frac{1}{p_1}f(p_1x_1+p_2x_2)-\frac{p_2}{p_1}f(x_2)$$

מהגדרה של קמירות וצירוף קמור של 2 נק' ב-U.

ושים לב כי:

$$x_1 = \frac{1}{p_1}(p_1x_1+p_2x_2)-\frac{p_2}{p_1}x_2 = x_1 + \cancel{\frac{p_2}{p_1}x_2} - \cancel{\frac{p_2}{p_1}x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) \leq \frac{1}{p_1}f(p_1x_1+p_2x_2)-\frac{p_2}{p_1}f(x_2) \quad / \cdot p_1>0$$

$$p_1 f(x_1) \leq f(p_1x_1+p_2x_2)-p_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2) \leq f(p_1x_1+p_2x_2)$$

■

תרגיל 6:

$$\Delta_f(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

1. צ"ל $\Delta_f(x,y)=\Delta_f(y,x)$

$$\Delta_f(x,y)\overset{\triangle}{=}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{(-1)(f(x)-f(y))}{(-1)(x-y)}=$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\overset{\triangle}{=}\Delta_f(y,x).$$

2. צ"ל f קמורה $\Leftrightarrow$ לכל $x_1<x_2<x_3$ כאשר $x_i\in I$ מתקיים

$$(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)\geq 0$$

הוכחה:

f קמורה - לכל $\lambda\in(0,1)$ ו- $x_1,x_3\in I$ מתקיים

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$

ניתן להגדיר $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$ עבור λ כלשהו

כי

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1<\lambda x_1+(1-\lambda)x_3\Leftrightarrow x_1<x_3$$

$$x_2<x_3\Leftrightarrow\lambda x_1+(1-\lambda)x_3<x_3\Leftrightarrow x_1<x_3$$

ולכן בהינתן x_2 קיים $\lambda\in(0,1)$ אשר מוגדר ע"י:

$$\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$$

$$f(x_2)\leq\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\left(1-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f(x_3)$$

$$(x_3-x_1)f(x_2)\leq(x_3-x_2)f(x_1)+(x_3-x_1-x_3+x_2)f(x_3)$$

$$\Rightarrow(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)\geq 0$$

מתקיים; לכל $x_1<x_2<x_3$

$$(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)\ge 0$$

נסמן: $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ ונשים לב כי $0<\lambda<1$

כי $x_3-x_2<x_3-x_1$ ולכן $1-\lambda=\frac{x_3-x_1-x_3+x_2}{x_3-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

ונחלק את אי-השוויון ב- x_3-x_1:

$$\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f(x_1)-f(x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)\ge 0$$

$$f(x_2)\le\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f(x_1)+\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)f(x_3)$$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$

$\Rightarrow$ f קמורה. מ.ש.ל.

---

3 אם f קמורה ו- $x_1<x_2<x_3$ מתקיים:

$$\underbrace{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$(x_3-x_1)f(x_2)-x_3f(x_1)+\cancel{x_1f(x_1)}\le(x_2-x_1)f(x_3)-x_2f(x_1)+\cancel{x_1f(x_1)}$$

$$(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)\ge 0$$

וזה נכון בגלל סעיף קודם.

$$\cancel{x_3f(x_3)}-x_2f(x_3)-(x_3-x_2)f(x_1)\le\cancel{x_3f(x_3)}-x_1f(x_3)-(x_3-x_1)f(x_2)$$

$\Rightarrow$

$$(x_3-x_2)f(x_1)+(x_1-x_3)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)\ge 0$$

וזה שוב נכון בגלל סעיף קודם.

Scanned with CamScanner

4. f קמורה ו- 4 נקודות $x<y<z<\omega$

נשים לב כי a לדוגמא שהוא השיפוע של הקו המחבר בין $(x,f(x))$ עם $(x,f(y))$

שווה ל- $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ לפי הגדרה של שיפוע.

ולפי מסעיף קודם עבור x,y,z מתקיים:

$$\underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{a} \le \underbrace{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}}_{b} \le \underbrace{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}_{c}$$

ועבור y,z,ω מתקיים:

$$\underbrace{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}}_{c} \le \underbrace{\frac{f(\omega)-f(y)}{\omega-y}}_{d} \le \underbrace{\frac{f(\omega)-f(z)}{z-\omega}}_{e}$$

$$a \le b \le c \le d \le e$$

5. f קמורה אמ"מ $g_y(x)=\Delta_f(x,y)$ לא יורדת.

$\Rightarrow$: נתון f קמורה.

מקרה 1: $y<x_2<x_1$ הרי ש-:

מא' שוויון המשולש:

$$\frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \le \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$$

$$\Rightarrow g_y(x_2) \le g_y(x_1)$$

מקרה 2: $x_2<y<x_1$:

$$\underbrace{\frac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2}}_{\Delta f(x,y)\quad \text{מסעיף 1}} \le \frac{f(x_1)-f(y)}{y-x_1}$$

$$\Rightarrow g_y(x_2) \le g_y(x_1)$$

מקרה 3-

$x_2 < x_1 < y$:

$$\frac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2} \le \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}$$

$$\frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \le \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$$

$$g_y(x_2) \le g_y(x_1) \quad \blacksquare$$

כיוון ⇐: $g_y(x)$ לא יורדת ב-ם לכל $x \neq y \in I$

צ"ל f קמורה.

ניקח 3 נקודות x_1, x_2, x_3 כך ש- $x_1 < x_2 < x_3$

עבור $y = x_3$ נקבל ש $\Delta f(x_1, x_3) \le \Delta f(x_2, x_3)$

ועבור $y = x_1$ נקבל ש- $\Delta f(x_2, x_1) \le \Delta f(x_3, x_1)$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(x_2, x_1) \le \Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$$

מ- 2+3 הרי ש- f קמורה