שיטות חישוביות באופטימיזציה 046197
תרגיל בית מספר 1
תאריך הגשה 22/04/2021

תרגיל 1
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם אתם מוכיחים, יש לעשות זאת לפי הגדרת המכפלה הפנימית.

1. הביטוי $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \mathbf{x}^T M \mathbf{y}$ הוא מכפלה פנימית אם $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כללית.
2. הביטוי $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_Q = \mathbf{x}^T Q \mathbf{y}$ הוא מכפלה פנימית אם $0 \prec Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

תרגיל 2
תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית.

1. הוכיחו כי אם $A \succ 0$ אזי היא הפיכה, וכי $A^{-1} \succ 0$.
2. הוכיחו כי אם $A \succeq 0$ והפיכה אזי $A \succ 0$.
3. נתון כי $A = B^T B$ עבור $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ כלשהי. הוכיחו כי $A \succeq 0$. מצאו דוגמה למטריצה $B \neq 0$ שעבורה $A \nsucc 0$ (כלומר, A אי־שלילית מוגדרת אך לא חיובית מוגדרת).
4. הוכיחו כי אם $A_{i,i} < 0$ עבור $1 \leq i \leq n$ כלשהו אזי $A \nsucceq 0$. כלומר, תנאי הכרחי לכך ש־A אי־שלילית מוגדרת הוא שאיברי האלכסון שלה אי־שליליים. האם זהו גם תנאי מספיק? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

תרגיל 3
תהי $f : U \mapsto \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות, כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$. כיוון $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ נקרא כיוון ירידה של הפונקציה בנקודה $\mathbf{x}$ אם קיים $T > 0$ כך שלכל $0 < t < T$,

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) < f(\mathbf{x}).$$

1. הוכיחו כי אם כיוון $\mathbf{d}$ מקיים $f'(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < 0$ עבור $\mathbf{x}$ כלשהו, אזי זהו כיוון ירידה של f ב־$\mathbf{x}$.
2. הוכיחו כי אם $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ אזי הכיוון $\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x})$ הוא כיוון ירידה של f ב־$\mathbf{x}$.
3. מצאו דוגמה לפונקציה $f(x_1, x_2)$ דיפרנציאבילית ברציפות, נקודה $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} \end{bmatrix}^T$ וכיוונים $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ כך שכיוון $\mathbf{d}_1$ הוא כיוון ירידה של f ב־$\mathbf{x}^{(0)}$ ואילו כיוון $\mathbf{d}_2$ איננו כיוון ירידה של f ב־$\mathbf{x}^{(0)}$.

תרגיל 4

יהי $C \subseteq \mathbb{R}^m$ תחום קמור ותהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. נסמן:

$$B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = A^T\mathbf{z},\ \ \mathbf{z} \in C\}$$
$$B_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} \in C\}$$

הוכיחו כי B_1, B_2 קמורות.

תרגיל 5

הגדרה 1 תהי $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה.

א. נקודה $\mathbf{a} \in S$ נקראת נקודת פנים של S אם **קיים** $\epsilon > 0$ שעבורו מתקיים $B(\mathbf{a}, \epsilon) \subseteq S$ (כלומר, אם כל הנקודות בכדור הפתוח $B(\mathbf{a}, \epsilon)$ מוכלות ב־S).

ב. נקודה $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (לאו דווקא ב־S) נקראת נקודת צבר של S אם **לכל** $\epsilon > 0$, הכדור הפתוח $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ מכיל לפחות נקודה אחת $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

הגדרה 2 תהי $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה.

א. הקבוצה S נקראת פתוחה אם כל נקודה ב־S היא נקודת פנים.

ב. הקבוצה S נקראת סגורה אם הקבוצה המשלימה שלה, S^c, היא קבוצה פתוחה.

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. תהי $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה כלשהי ו־$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ נקודת צבר של S. אזי לכל $\epsilon > 0$, הכדור הפתוח $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ מכיל אינסוף נקודות מ־S.
רמז: הניחו בשלילה כי קיים כדור פתוח שמכיל מספר סופי של נקודות והגיעו לסתירה.

2. קבוצה S היא סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הצבר שלה.
הדרכה: מדובר ב"אם ורק אם", ולכן יש להוכיח שני כיוונים. עבור הכיוון בו מניחים כי S סגורה, העזרו בשלילה.

3. הסיקו מהטענה הקודמת כי אם S קבוצה סגורה והסדרה $\mathbf{x}_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$ מתכנסת ל־$\mathbf{x}$, כלומר אם $\lim_{i\to\infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| = 0$, אזי $\mathbf{x} \in S$.

תרגיל 6

יהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום קמור וסגור (כלומר, מכיל גם את השפה שלו). יהי $\mathbf{x}_0 \notin C$. נתבונן בבעיית האופטימיזציה

$$\min_{\mathbf{y}\in C} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|,$$

כאשר $\|\cdot\|$ היא נורמה מושרית כלשהי. הניחו כי קיים פתרון $\mathbf{y}_0 \in C$ לבעיית האופטימיזציה. הוכיחו כי פתרון זה הוא יחיד.
הדרכה: הניחו כי קיימים $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in C$ כך ש־

$$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\|^2 = \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0\|^2 = (\min_{\mathbf{y}\in C} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|)^2 = \delta^2.$$

הראו כי $(\mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_0)/2 \in C$ והסיקו כי $\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0\rangle \geq \delta^2$. העזרו בעובדה זאת על מנת להראות כי $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|^2 \leq 0$ והסבירו מדוע לא ייתכן כי $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{z}_0$.
