שיטות חישוביות באופטימיזציה 046197
תרגיל בית מספר 2
תאריך הגשה 10/05/2021

תרגיל 1

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. הוכיחו כי f קמורה אם ורק אם $\phi(t)=f(\mathbf{x}+t\mathbf{d})$ קמורה לכל $\mathbf{x},\mathbf{d}\in\mathbb{R}^n$.

הדרכה: הטענה היא "אם ורק אם", ולכן יש להראות כאן שני כיוונים. הראו קמירות לפי ההגדרה. למשל, עבור הכיוון בו נתון כי $\phi(t)$ קמורה לכל $\mathbf{x},\mathbf{d}$ ויש להוכיח כי f קמורה: לכל $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ ו־$\lambda\in[0,1]$, עליכם למצוא בחירה מתאימה של $\mathbf{d}$ שתאפשר לכם לקבוע כי אכן $f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})\leq\lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})$.

תרגיל 2

יהיו $Q,R\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש־$Q,R\succ 0$. נתבונן בפונקציות

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^TQ\mathbf{x}\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{y}^TR\mathbf{y}\right)$$
$$g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^TQ\mathbf{x}\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^TR\mathbf{x}\right),$$

המוגדרות לכל $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

1. חשבו את הגרדיאנט וההסיאן של $g(\mathbf{x})$.
רמז: מסקנה של כלל השרשרת עבור הנגזרת היא כי אם $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ברציפות, מתקיים $\nabla(h(A\mathbf{x}))=A^T\left.\nabla h(\mathbf{y})\right|_{\mathbf{y}=A\mathbf{x}}$ וכן $\nabla^2(h(A\mathbf{x}))=A^T\left.\nabla^2 h(\mathbf{y})\right|_{\mathbf{y}=A\mathbf{x}}A$ לכל $A\in\mathbb{R}^{n\times m},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$.
2. נתון כי $g(\mathbf{x})$ איננה קמורה. האם בהכרח גם $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ אינה קמורה?
3. הוכיחו כי אם $R=\alpha Q$, $\alpha>0$ אזי $g(\mathbf{x})$ קמורה לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.
4. נגדיר כעת
$$Q=\begin{bmatrix}3&-2\\-2&3\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}$$
הראו כי $Q,R\succ 0$. האם $g(\mathbf{x})$ קמורה עבורה בחירה זו של Q,R?

תרגיל 3

נתונות 3 פונקציות:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$h(x)=-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)$$
$$g(x)=h\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right).$$

1. הוכיחו כי $f(x)$ קמורה עבור $0 \le x < 1$.
2. הראו כי $f(x) \ge 2x$ עבור $0 \le x < 1$.
3. הראו כי $h(x)$ קעורה עבור $0 < x < 1$.
4. הוכיחו כי $g(x)$ קמורה עבור $0 < x < 1$.
הדרכה: חשבו את הנגזרת השנייה של $g(x)$ והשתמשו בסעיפים הקודמים על מנת להראות כי היא תמיד אי־שלילית.

תרגיל 4
הוכיחו כי הפונקציה הבאה קמורה עבור $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} > \mathbf{0}$:

$$g(\mathbf{x}) = -\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}, \quad p_i \ge 0, \ \sum_i p_i = 1.$$

תרגיל 5
בשאלה זו, $f(\mathbf{x})$ היא פונקציה קמורה בתחום קמור $U \subseteq \mathbb{R}^n$. כידוע, פונקציה קמורה מקיימת

$$f\left(\sum_i p_i \mathbf{x}_i\right) \le \sum_i p_i f(\mathbf{x}_i)$$

כאשר $\mathbf{x}_i \in U$ לכל i והמשקלים p_i אי שליליים וסכומם 1. בשאלה זו נסיר את המגבלה שהמשקלים אי שליליים. יהיו $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, $p_1 > 0$ ו־$p_2 < 0$ המקיימים $p_1 + p_2 = 1$ וכן $p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2 \in U$. הוכיחו כי

$$f(p_1\mathbf{x}_1 + p_2\mathbf{x}_2) \ge p_1 f(\mathbf{x}_1) + p_2 f(\mathbf{x}_2).$$

תרגיל 6
תהי f פונקציה (לא בהכרח גזירה) המוגדרת בקטע $I \subset \mathbb{R}$ כלשהו. נסמן עבור $x \ne y$,

$$\Delta_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

ניתן לחשוב על ביטוי זה כמעין קירוב לנגזרת. אנו יודעים שעבור פונקציה קמורה וגזירה ברציפות פעמיים, הנגזרת היא פונקציה לא יורדת (הרי הנגזרת השניה אי־שלילית במקרה זה). בשאלה זו, נראה כי הקירוב לנגזרת $\Delta_f(x,y)$ הוא פונקציה לא יורדת כאשר הפונקציה f קמורה.

1. הוכיחו כי $\Delta_f(x,y) = \Delta_f(y,x)$.
2. הוכיחו כי f קמורה אם ורק אם לכל $x_1 < x_2 < x_3$, כאשר $x_i \in I$ לכל i מתקיים

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \ge 0.$$

רמז: הראו כי ניתן לבטא את x_2 על ידי צירוף קמור של x_1, x_3.

3. הסיקו כי אם f קמורה ו־ $x_1 < x_2 < x_3$ מתקיים

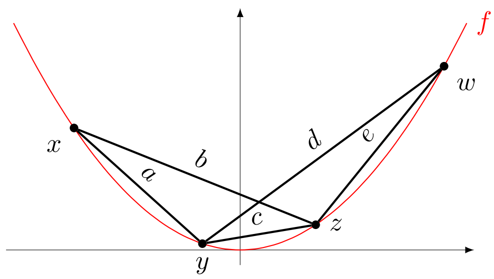
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

4. באיור להלן מודגמת פונקציה קמורה f ומסומנות 4 נקודות $x < y < z < w$. מסומנים גם חמישה קטעים. נסמן את שיפועיהם על ידי a, b, c, d, e כמודגם בציור. כלומר,

- a הוא השיפוע של הקטע המחבר את $(x, f(x))$ עם $(y, f(y))$
- b הוא השיפוע של הקטע המחבר את $(x, f(x))$ עם $(z, f(z))$
- c הוא השיפוע של הקטע המחבר את $(y, f(y))$ עם $(z, f(z))$
- d הוא השיפוע של הקטע המחבר את $(y, f(y))$ עם $(w, f(w))$
- e הוא השיפוע של הקטע המחבר את $(z, f(z))$ עם $(w, f(w))$

הוכיחו כי

$$a \le b \le c \le d \le e.$$



5. הוכיחו כי f קמורה אם ורק אם $g_y(x) = \Delta_f(x, y)$ לא יורדת ב־x לכל $x \ne y \in I$.
שימו לב: עבור הכיוון בו f קמורה ונדרש להראות כי $g_y(x)$ לא יורדת, יש לטפל בשלושה מקרים שונים: **(א)** $x_1 < x_2 < y$, **(ב)** $x_1 < y < x_2$, **(ג)** $y < x_1 < x_2$. בכל מקרה, עליכם להראות כי $g_y(x_2) \ge g_y(x_1)$.
