



שיטת חישוביות באופטימיזציה

046197

סמסטר אביב תשפ"א 2021

מגישים:

300916285	הדר בירן
204397368	עידו יחזקאל

ל-פונקציונליות

רנ. פונקציונליות $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\cdot x, \delta \in \mathbb{R}^n$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$

הוכחה:

$x, \delta \in \mathbb{R}^n$ $\exists \delta' > 0$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$

$Ax + b$ כפונקציה טזינרית (linear function) $f(x) = Ax + b$

$x, \delta \in \mathbb{R}^n$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$

ט $\exists \delta' > 0$ $\forall \lambda \in [0, 1]$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $|f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)| < \epsilon$

ר. ק. נ. $x, \delta \in \mathbb{R}^n$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$

$$|f(x+\delta) - f(x)| \leq |f(x+\delta) - f(x+\lambda\delta)| + |\lambda\delta|$$

$f(x+\delta) - f(x+\lambda\delta) = \lambda(f(x+\delta) - f(x))$ $\lambda \in [0, 1]$

$$|f(x+\delta) - f(x+\lambda\delta)| \leq \lambda |f(x+\delta) - f(x)| < \lambda \epsilon$$

$$|\lambda\delta| = \lambda |\delta| \leq \lambda \delta' < \epsilon$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{\lambda}$$

$$|f(x+\delta) - f(x)| \leq |f(x+\delta) - f(x+\lambda\delta)| + |\lambda\delta| < \epsilon + \lambda \epsilon = \epsilon(1+\lambda)$$

$$|f(x+\delta) - f(x)| \leq \epsilon(1+\lambda) < 2\epsilon$$

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) \left(\frac{1}{2}y^T R y\right), \quad Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad . \quad (2)$$

$$g(x) = f(x, x) = \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) \left(\frac{1}{2}x^T R x\right)$$

. (4 איזון צ'יאר) מואץ ירדו ר' 1<3> מינימום g(x). (1)

$$\begin{aligned} \nabla g(x) &= \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right)' \left(\frac{1}{2}x^T R x\right) + \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) \left(\frac{1}{2}x^T R x\right)' \\ &= Qx \cdot \left(\frac{1}{2}x^T R x\right) + \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) \cdot Rx \\ \text{נ'גזר Q,R} &\stackrel{\approx}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^T R x\right) \cdot Qx}_{\text{נ'גזר}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) \cdot Rx}_{\text{נ'גזר}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 g(x) &= \left(\frac{1}{2}x^T R x\right)' Qx + \left(\frac{1}{2}x^T R x\right) (Qx)' \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right)' Rx + \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) (Rx)' \\ &= (Rx)(x^T Q) + \left(\frac{1}{2}x^T R x\right) Q + (Qx)(x^T R) + \left(\frac{1}{2}x^T Q x\right) R \end{aligned}$$

ה'ק מושג f רצ'ה נגזרות g מinc. (2)
: נס'ה נגזרות

$$\begin{aligned} -\text{ו} \quad \text{ל} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג}, \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad \text{ל} \quad g \text{ מinc} \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x, x) + (1-\lambda)f(y, y) \\ \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad \text{ל} \quad (y, y), (x, x) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \\ \cdot \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad \text{ל} \quad f \quad \text{ל} \quad f(x, x) \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \end{aligned}$$

: ב' .(3)

$$\cdot x \in \mathbb{R}^n \quad \text{ל} \quad \text{מ'ג'ג} \quad g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} R = 2Q \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ל} \quad R = 2Q \quad \therefore \nabla^2 g(x) \succ 0 \quad -\text{ו} \quad \text{מ'ג'ג}$$

$$\nabla^2 g(x) \triangleq 2\lambda(Qx)(x^T Q) + \lambda(x^T Qx)Q$$

$$\cdot y \in \mathbb{R}^n \quad \text{ל} \quad$$

$$\begin{aligned} y^T \nabla^2 g(x) y &= 2\lambda y^T (Qx)(x^T Q) y + \lambda \cdot y^T (x^T Qx) Q y \\ &= 2\lambda \|x^T Q y\|^2 + \lambda \cdot (x^T Qx) \cdot (y^T Q y) \stackrel{Q \succ 0}{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\cdot x \in \mathbb{R}^n \quad \text{if} \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 g(x) \succcurlyeq 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad .(4)$$

$$\therefore y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Lst}$$

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3y_1 - 2y_2 \\ -2y_1 + 3y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3y_1^2 - 2y_1y_2 - 2y_1y_2 + 3y_2^2 \\ &= 2(y_1 - y_2)^2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q \succ 0 \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
 (y_1 & y_2) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
 &= 4y_1^2 + 6y_1y_2 + 4y_2^2 \\
 &= 3(y_1 + y_2)^2 + y_1^2 + y_2^2 > 0
 \end{aligned}$$

if
 $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow R \succ O$$

$$\text{ה} \exists x \in \mathbb{R} \text{ such that } x^2 < 0$$

$$\nabla^2 g(x)_{1,1} = 36x_1^2 + 3x_1x_2$$

$$\nabla^2 g(x)_{2,2} = 36x_2^2 + 3x_1x_2$$

$$\nabla^2 g(x)_{1,2} = \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2$$

הנ' $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ נס' $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\nabla^2 g(x_0)| \approx -0.15 < 0$$

בנוסף ל- PSD ניתן לרשום:

\mathbb{R}^2 מושג באמצעות פונקציית גודל $g(x)$ המוגדרת, למשל, על ידי:

-3 סעיפים

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$0 \leq x < 1$ פונקציית גמורה $f(x)$ ב' . ו' .

הוכחה

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

שיוייניותה נסימן $f''(x) \geq 0$ $0 \leq x < 1$ פונקציית גמורה $f(x)$

: $0 \leq x < 1$ מוכיח $f(x) \geq 2x$ ב' . ו' .

$$\tilde{f}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x \quad \text{הנימוקים לפ'}$$

$$\tilde{f}(0) = \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) - 2 \cdot 0 = \ln(1) = 0 \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} 2x = \frac{2}{1-x^2} - 2$$

$$\frac{2}{1-x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

$\tilde{f}(x)$ פונקציית גמורה $0 \leq x < 1$ מוכיח

ה' . ו' . מוכיח פונקציית גמורה $0 \leq x < 1$ מוכיח

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x \geq 0 \quad 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \geq 2x \quad \forall \quad 0 \leq x < 1$$

$$0 < x < 1 \text{ גורף } h(x) = -x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) \quad \int_0^1 \quad (3)$$

גיאומטרית $-h(x)$ הוא כינור נגרום (היכן כי גובה הנקודות $x \ln(x)$)

$$-h(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$$

(3) גורף גיאומטריה של $x \ln(x)$

$$J(x) = (1-x) \ln(1-x) \quad \text{מ}'(x)$$

$$J'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \cdot \frac{-1}{1-x}$$

$$J'(x) = -\ln(1-x) - 1$$

$$J''(x) = -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$0 < x < 1$ מתקיים $J''(x) > 0$ ומכאן

לפנינו גורף נגרום יורד גורף $(1-x) \ln(1-x)$ $0 < x < 1$ מתקיים $-h(x) \leq h(x)$ $\leq J(x)$ $\leq g(x)$ $\leq \int_0^1 h(t) dt$ מוגדר.

$$0 < x < 1 \text{ גורף נגרום } g(x) = h\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \quad \int_0^1 \quad .4$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} g'(x) &= h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= h'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot \left(-\frac{x}{4\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= h'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

$$g''(x) = h''\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot$$

$$\bullet \frac{2\sqrt{1-x^2} - x \cdot 2 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{4(1-x^2)}$$

$$= h''\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \cdot \frac{1-x^2+x^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2(1-x^2)}}$$

$$= h''\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) + h'\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sqrt{1-x^2}\right) \frac{\ell}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$h'(x) = -\ln(x) - x \frac{1}{x} = \ln(1-x) + 1 = \ln(1-x) - \ln(x)$$

$$h''(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{\ell}{x}$$

$$g''(x) = \left(\frac{-\ell}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)} \right) \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\left(+ \ln\left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \right) \frac{\ell}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \left(-\frac{2}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) \left(\frac{x}{2(\sqrt{1-x^2})} \right)$$

$$+ \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \right) \cdot \frac{\ell}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= - \left(\frac{\ell + \cancel{\sqrt{1-x^2}} + \cancel{1 - \sqrt{1-x^2}}}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} \right) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{\ell}{2(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-2x}{1-1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{\ell}{2(1-x^2)^{3/2}} - \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned}
g''(x) &= h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{2\sqrt{1-x^2} - x \cdot 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{4(1-x^2)} \\
&= h''\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + h'\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \cdot \frac{1-x^2+x^2}{2(1-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

= ! כבש P.Q.

$$h'(x) = -\ln(x) - \frac{x}{x} + \ln(1-x) - \frac{-1}{1-x} = \ln(1-x) - \ln(x)$$

$$h''(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt{1-x^2} \quad \text{נובע מכך} \quad 0 < x < 1 \quad \text{נובע מכך} \quad : \text{R.O.} \\
'1 - \frac{1-x^2}{2} \geq 0 \quad \text{פירוש} \quad 0 < \sqrt{1-x^2} < 1 \quad \text{רנ"ג}
\end{array}$$

$$f(\sqrt{1-x^2}) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \geq 2\sqrt{1-x^2}$$

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \geq 2x \quad \forall \quad 0 < x < 1$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{-1}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)} - \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} \right) \cdot \frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + \left(\ln\left(1 - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \right) \cdot \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{-2}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{2}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right) \cdot \frac{x^2}{2^2(1-x^2)} + \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) \right) \\
&\cdot \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{1-x^2}}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} - 1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})} \right) \cdot \frac{x^2}{2(1-x^2)} + \left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \right) \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{1}{2(1-x^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{2}{x - x + x^2} \\
&\geq 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-x^2} = 0
\end{aligned}$$

ולכן הטענה יתו רה נכונה כי אם א' מינימום הערך של $f(x)$ אז $f(x) \geq a$ ו- a הוא מינימום הערך של $f(x)$.

-4 סימן

הו כיוון כ ההפוך

$$g(x) = - \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = l$$

$x > 0; x \in \mathbb{R}^n$

הוכחה

$\frac{x_i}{\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}} \nabla g(x)$ (הוכיחו ש- $\nabla g(x)$)

$$\nabla g(x)_j = - \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^{p_i} \right) \cdot x_j^{p_j-1} \cdot p_j$$

$$= -p_j \cdot \frac{x_i^{p_i}}{x_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^{p_i}$$

$$= - \left(\frac{p_j}{x_j} \right) \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = + \left(\frac{p_j}{x_j} \right) g(x)$$

$$\nabla^2 g(x)_{ii} = - \frac{p_i}{x_i^2} g(x) + \frac{p_i}{x_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} \frac{-1}{g(x)}$$

$$= g(x) \cdot \frac{p_i}{x_i^2} (-l + p_i) = \frac{p_i(p_i-1)}{x_i^2} g(x)$$

$$\nabla^2 g(x)_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{p_i}{x_i} \cdot \frac{p_j}{x_j} g(x)$$

$$\nabla^2 g(x)_{ij} = \begin{cases} \frac{p_i(p_i-1)}{x_i^2} g(x) & i=j \\ \frac{p_i p_j}{x_i x_j} g(x) & i \neq j \end{cases}$$

: PSD (ל.נ) $\nabla^2 g(x)$ דה ג'רן) מיל'ן
 מיל'ן $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 y^\top \nabla^2 g(x) y &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j \nabla^2 g(x)_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i (p_i - 1) \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 g(x) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \left(\frac{y_j}{x_j}\right) g(x) \\
 &= -g(x) \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 p_i (1-p_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \left(\frac{y_j}{x_j}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$1 - p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j \quad (-Q \text{ נס. } P, Q)$$

$$\Rightarrow -g(x) \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 p_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \left(\frac{y_j}{x_j}\right) \right]$$

$$= -g(x) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j \left[\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 - \frac{y_i}{x_i} \cdot \frac{y_j}{x_j} \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= -g(x) \cdot \begin{bmatrix} p_1 p_2 \left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \right) & p_2 p_1 \left(\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \right) \\ \vdots & \vdots \\ p_1 p_n \left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_n}{x_n} \right) & p_2 p_n \left(\left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2 - \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{y_n}{x_n} \right) \end{bmatrix} \dots
 \end{aligned}$$

$$= -g(x) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n p_i p_j \left[\left(\frac{y_i}{x_i} \right)^2 - 2 \frac{y_i}{x_i} \frac{y_j}{x_j} + \left(\frac{y_j}{x_j} \right)^2 \right]$$

$$= -g(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n p_i p_j \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} \right)^2$$

因为 $p_i, p_j \geq 0$ 且 $\left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} \right)^2 \geq 0$

$$-g(x) > 0 \quad \text{当 } x > 0 - l$$

所以 $g(x)$ 在 $x > 0 - l$ 时是增函数

-5 סעיפים

ולא $P_1 < 0 - 1 \quad P_1 > 0 \quad \rightarrow \quad x_1, x_2 \in U$ ולו
אך $P_1 + P_2 = 1$ ואנו נתקל
בקווים.

$P_1 x_1 + P_2 x_2 \in U$ \rightarrow $P_1 + P_2 = 1$ \rightarrow $P_1 x_1 + P_2 x_2 \in U$

$$f(P_1 x_1 + P_2 x_2) \geq P_1 f(x_1) + P_2 f(x_2)$$

$$P_1 + P_2 > 1 \quad \rightarrow \quad (P_1 > 0) \quad \lambda = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = \frac{1}{P_1} > 1$$

$$P_1 > 1 - P_2 > 1 \quad 0 < \lambda < 1 \quad \leq$$

$$1 - \lambda = 1 - \frac{P_1 + P_2}{P_1} = \frac{-P_2}{P_1} = -\frac{\lambda - 1}{P_1}$$

$$f\left(\frac{\lambda}{P_1}(P_1 x_1 + P_2 x_2) - \frac{P_2}{P_1} x_2\right) \leq \frac{\lambda}{P_1} f(P_1 x_1 + P_2 x_2) - \frac{P_2}{P_1} f(x_2)$$

$U \rightarrow$ יריעת f בקווים והגדרה

$$x_1 = \frac{\lambda}{P_1}(P_1 x_1 + P_2 x_2) - \frac{P_2}{P_1} x_2 = x_1 + \frac{P_2}{P_1} x_2 - \frac{P_2}{P_1} x_2$$

$$\Rightarrow f(x_1) \leq \frac{\lambda}{P_1} f(P_1 x_1 + P_2 x_2) - \frac{P_2}{P_1} f(x_2) / \cdot P_1 > 0$$

$$P_1 f(x_1) \leq f(P_1 x_1 + P_2 x_2) - P_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow P_1 f(x_1) - P_2 f(x_2) \leq f(P_1 x_1 + P_2 x_2)$$

$$\Delta_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

16. ח'נוך

$$\Delta_f(x, y) = \Delta_f(y, x) \quad \text{ל'ג. 1}$$

$$\Delta_f(x, y) \stackrel{\Delta}{=} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{(-1)(f(x) - f(y))}{(-1)(x - y)} =$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \Delta_f(y, x).$$

$x_1 \in I$ ו $x_1 < x_2 < x_3$ ס' \Leftrightarrow גראן f ל'ג. 2

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0$$

הוכחה:

ר'ג'ן $x_1, x_3 \in I$ ו $\lambda \in (0, 1)$ ס' -גראן f

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3)$$

ולס' x_2 מ' $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$ גראן ס'

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 \Leftrightarrow x_1 < x_3$$

$$x_2 < x_3 \Leftrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 < x_3 \Leftrightarrow x_1 < x_3$$

ב'ז'ג'ן ר'ג'ן $\lambda \in (0, 1)$ ר'ג'ן x_2 גראן פ'ג'

$$\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_3)$$

$$(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_3 - x_1 - x_3 + x_2)f(x_3)$$

$$\Rightarrow (x_3 - x_2)f(x_1) = (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0$$

$$x_1 < x_2 < x_3 \quad \text{for } f(x) \text{ is increasing}$$

$$(x_3 - x_2) f(x_1) + (x_1 - x_3) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_3) \geq 0$$

$$0 < \lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{if } p.l. \quad \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \quad : \text{for } 0 < \lambda < 1$$

$$\lambda - \lambda = \frac{x_3 - x_1 + x_3 + x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad x_3 - x_2 < x_3 - x_1 \quad \Rightarrow$$

$$: x_3 - x_1 > 0 \Rightarrow \text{if } l < 1 \quad \text{then } \lambda < 1$$

$$+ \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_1) - f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \geq 0$$

$$f(x_2) \leq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) f(x_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_3)$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$$

.Q.3 .גנ.ו.ג f <=

$$: \text{for } f \text{ is increasing}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$(x_3 - x_1) f(x_2) - x_3 f(x_1) + x_1 f(x_1) \leq (x_2 - x_1) f(x_3) - x_2 f(x_1) + x_1 f(x_1)$$

$$(x_3 - x_2) f(x_1) + (x_1 - x_3) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_3) \geq 0$$

.Q.3 .גנ.ו.ג f <=

$$\Rightarrow x_3 f(x_3) - x_2 f(x_3) - (x_3 - x_2) f(x_1) \leq x_3 f(x_3) - (x_3 - x_1) f(x_2)$$

$$(x_3 - x_2) f(x_1) + (x_1 - x_3) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_3) \geq 0$$

.Q.3 .גנ.ו.ג f <=

$x < y < z < \omega$ ו-1 מינימום f .4

הנורמה הינה $\|f\|_p$ ו- f מוגדרת כ- p -פ.ל.)
 $(x, f(y))$ ו- $(x, f(z))$ מושגים

הנורם של השוני של $f(y) - f(x)$ $\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|}$ $\|f\|_p$

: פ.ן x, y, z מוגדרות ב- \mathbb{R}^n פ.ן

$$\underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|}}_a \leq \underbrace{\frac{f(z) - f(x)}{|z-x|}}_b \leq \underbrace{\frac{f(z) - f(y)}{|z-y|}}_c$$

: פ.ן y, z, ω מוגדרות

$$\underbrace{\frac{f(z) - f(y)}{|z-y|}}_c \leq \underbrace{\frac{f(\omega) - f(y)}{|\omega-y|}}_d \leq \underbrace{\frac{f(\omega) - f(z)}{|\omega-z|}}_e$$

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

רעיון אם $g_y(x) = \Delta f(x, y)$ מינימום של f .5
בז' פ.ן

לפ.ן $y < x_2 < x_1$:

$$\frac{f(x_2) - f(y)}{|x_2 - y|} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{|x_1 - y|}$$

: פ.ן $y < x_2 < x_1$:

$$\Rightarrow g_y(x_2) \leq g_y(x_1)$$

: $x_2 < y < x_1$:

$$\frac{f(y) - f(x_2)}{|y - x_2|} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{|y - x_1|}$$

$$\Delta f(x, y) \Rightarrow g_y(x_2) \leq g_y(x_1)$$

-גנגרן

$$\frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} \leq \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \quad \because x_2 < x_1 < y$$

$$\frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y}$$

$$g_y(x_2) \leq g_y(x_1) \quad \blacksquare$$

I $\ni y \neq x$ Si x -הויה ל f $g_y(x)$ \Rightarrow ככל
הויה f ב 3 נס

$x_1 < x_2 < x_3$ -ל $\forall x_1, x_2, x_3$ נשווים 3 נס

$$\Delta f(x_1, x_3) \leq \Delta f(x_2, x_3) \quad (\text{בנ}) \quad y = x_3 \quad \text{ונב}$$

$$\Delta f(x_2, x_1) \leq \Delta f(x_3, x_1) \quad -\text{l} \quad (\text{בנ}) \quad y = x_1 \quad \text{ונב}$$

$$\Rightarrow \Delta f(x_2, x_1) \leq \Delta f(x_1, x_3) \leq \Delta f(x_2, x_3)$$

מונט f -l נס 2+3 -N