הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל | הפקולטה למדעי המחשב

מבוא למערכות לומדות

236756

סמסטר אביב תשע"ט

תרגיל מספר: 1

תאריך הגשה: 23/03/19 | תא להחזרה: 68

מגישים:

שם מלא	מספר ת.ז.	דואר אלקטרוני ב- t2
עידו יחזקאל	204397368	idoye

Exercise 1 – Probability & Python

שאלה 1 Forged Coin:

נסמן את המאורעות הבאים:

- **A** מתוך 1,000 מטבעות נבחר המטבע המוטעה היחיד.

$$P(A)=\frac{1}{1,000}$$
$$P(\bar{A})=\frac{999}{1,000}$$

- **B** בהינתן מטבע כלשהו, 7 מתוך 10 הטלות יוצא עץ.

לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B)=P(B\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid \bar{A})\cdot P(\bar{A})$$
$$\Rightarrow \binom{10}{7}(0.8)^7\cdot(0.2)^3\cdot(0.001)+\binom{10}{7}(0.5)^7\cdot(0.5)^3\cdot(0.999)$$

מחפשים:

$$P(A\mid B)=?$$

$$\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=\frac{\binom{10}{7}(0.8)^7\cdot(0.2)^3}{\binom{10}{7}(0.8)^7\cdot(0.2)^3\cdot(0.001)+\binom{10}{7}(0.5)^7\cdot(0.5)^3\cdot(0.999)}=$$
$$\frac{(0.8)^7\cdot(0.2)^3\cdot(0.001)}{(0.8)^7\cdot(0.2)^3\cdot(0.001)+(0.5)^{10}\cdot(0.999)}=0.001716$$
$$\Rightarrow 0.1716\%$$

שאלה 2 Strange Culture Families:

נשים לב כי מספר הילדים במשפחה מתפלג גאומטרית, נסמן X, מספר הילדים במשפחה.

$$P(X=k)=0.5^{k-1}\cdot 0.5=0.5^k \mid k\in\{1,2,3...\}$$

כאשר בן נחשב להצלחה ובת נחשב לכישלון בסדרת ניסויי ברנולי.
ולכן מספר הילדים הממוצע במשפחה הינו:

$$\mathrm{E}[X]=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.5}=2\Rightarrow E[\#\text{girls in family}]=\frac{1-p}{p}=\frac{1-0.5}{0.5}=1$$

ולכן בממוצע בכל משפחה יש בת אחת בלבד ובן אחד. נוכל לסמן את מספר הבנות במשפחה ה- i במשתנה מקרי X_i ומכיוון שאין תלות בין המשפחות וההתפלגות זהה בין המשפחות הרי שסדרת משתנים אלו הם $i.i.d$

ולכן לפי חוק המספרים הגדולים, ככל שהאוכלוסייה גדלה משפחה ממוצעות מורכת מבת ובן בלבד ולכן מספר הבנות צפוי להיות להתקרב יותר ויותר למספר הבנים.

שאלה MLE 3:

a. לפי הגדרה $\ln\left(P(D|\Theta)\right)$ $:\hat{\Theta}_{MLE}=\arg\max_{\Theta\in\Re^p} P(D|\Theta)=\arg\max_{\Theta\in\Re^p}\ln\left(P(D|\Theta)\right)$

$$l(p)=\ln\left(L(p)\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}p^{x_i}\cdot(1-p)^{n-x_i}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\binom{n}{x_i}p^{x_i}\cdot(1-p)^{n-x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{n}{x_i}+x_i\ln(p)+(n-x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial l(p)}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial l(p)}{\partial p}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{p}-(n-x_i)\frac{1}{1-p}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot(1-p)-(n-x_i)\cdot p=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-x_ip-np+x_ip=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i-np=0\Rightarrow$$

$$p=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n^2}$$

b.

$$l(\mu,\sigma^2)=\ln\left(L(\mu,\sigma^2)\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)=-\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\Rightarrow\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_i)^2$$

$$\Theta=(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_i)^2\right)$$

.c

$$l(\lambda)=\ln(L(\lambda))=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln(x_i!)-\lambda$$

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{1}{\lambda}-1\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$$

$$\Theta=\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

שאלה 4 :2D Normal Dist.

a. בה"כ נחשב את הסתברות השולית $f(x_1)$.

$$f(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}dx_2$$

$$let\ z_2=\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\Rightarrow x_2=z_2\sigma_2\Rightarrow dx_2=\sigma_2 dz_2$$

$$f(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)z_2+z_2^{\ 2}\right]\right\}\sigma_2 dz_2=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left[\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}z_2^{\ 2}-\frac{\rho}{\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)z_2+\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}dz_2=$$

$$a=\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)},b=-\frac{\rho}{\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right),c=\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}}}\exp\left[\frac{\frac{\rho^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}{\frac{4}{2\left(1-\rho^2\right)}}-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}\cdot\exp\left[\frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}}}\exp\left[\frac{\rho^2-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}}}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}}$$

$$\Rightarrow X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$$

b. הסתברות מותנית:

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^{\ 2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-\left(1-\rho^2\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\rho^2\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right]\right\}=$$

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left\{-\frac{\left(x_1-\left(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1\left(x_2-\mu_2\right)}{\sigma_2}\right)\right)^2}{2\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)}\right\}$$

$$X_1\,|\,X_2\sim N\left(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1\left(x_2-\mu_2\right)}{\sigma_2},\sigma_1^{\ 2}\left(1-\rho^2\right)\right)$$

שאלה 5 Pearson's Correlation Coefficient :

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}\left[\left(X-\mu_x\right)\left(Y-\mu_y\right)\right]}{\sqrt{\mathrm{E}\left[\left(X-\mu_x\right)^2\right]\mathrm{E}\left[\left(Y-\mu_y\right)^2\right]}}$$

$$\text{Cauchy} - \text{Schwarz inequality is: } \left|\langle v,u\rangle\right|^2 \le \|x\|\cdot\|y\|$$

$$v = X - \mu_x$$

$$u = Y - \mu_y$$

מכיוון שניתן להגדיר תוחלת במרחב מכפלה פנימית:

$$\langle v,u\rangle \triangleq \mathrm{E}\left[\left(X-\mu_x\right)\left(Y-\mu_y\right)\right]$$

$$\rho^2 = \frac{E[\left(X-\mu_x\right)\left(Y-\mu_y\right)]^2}{E[\left(X-\mu_x\right)]\cdot E[\left(Y-\mu_y\right)]} = \frac{\left|\langle v,u\rangle\right|^2}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1$$

$$\Rightarrow -1 \le \rho \le 1$$