

UNIVERZITET U BEOGRADU  
MATEMATIČKI FAKULTET



Ivan Drecun

ALGORITMI ZA ISPITIVANJE IZOMORFIZMA  
GRAFOVA

master rad

Beograd, 2021.

**Mentor:**

dr Filip MARIĆ, vanredni profesor  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

**Članovi komisije:**

dr Miodrag ŽIVKOVIĆ, redovan profesor  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vesna MARNIKOVIĆ, docent  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

**Datum odbrane:** \_\_\_\_\_

*Mami, tati i dedi*

**Naslov master rada:** Algoritmi za ispitivanje izomorfizma grafova

**Rezime:** Apstrakt rada.

**Ključne reči:** ključne, reči

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Opšti algoritam</b>	<b>2</b>
2.1	Osnovni pojmovi . . . . .	2
2.2	Stablo pretrage . . . . .	4
2.3	Invarijanta stabla i kanonska forma . . . . .	5
2.4	Uloga automorfizama . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Realizacija algoritma</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Rezultati testiranja</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>8</b>
	<b>Bibliografija</b>	<b>9</b>

# Glava 1

## Uvod

# Glava 2

## Opšti algoritam

U ovoj glavi predstavljeni su osnovni matematički pojmovi neophodni za dalje razumevanje konstrukcije opšteg algoritma za određivanje kanonske forme grafa. Uvedeni su pojmovi *bojenja* i *obojenog grafa*, nakon čega je prikazana konstrukcija stabla pretrage koja leži u osnovi algoritma i na osnovu koje je precizno definisana kanonska forma. Prikazana je i uloga automorfizama u pretrazi, kao i mehanizmi za odsecanje pretrage.

### 2.1 Osnovni pojmovi

#### Obojen graf

Graf  $G = (V, E)$  je uređeni par konačnog skupa čvorova  $V$  i skupa grana  $E \subseteq \binom{V}{2}$ . U nastavku pretpostavljamo da je  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  za neki prirodan broj  $n > 0$ . Označimo skup svih grafova sa  $\mathcal{G}$  i skup svih grafova sa  $n$  čvorova sa  $\mathcal{G}_n$ .

Bojenje grafa  $G$  je surjekcija  $\pi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  za neki prirodan broj  $k > 0$ . Označimo skup svih bojenja sa  $\Pi$  i skup svih bojenja grafa sa  $n$  čvorova sa  $\Pi_n$ .

Broj  $k$  zovemo brojem boja i označavamo ga sa  $|\pi|$ . Čelija bojenja  $\pi$  boje  $c$  je skup svih čvorova te boje, odnosno  $\pi^{-1}(c)$  za  $c \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Bojenje je diskretno ukoliko je  $|\pi| = n$  i tada je  $\pi$  permutacija skupa  $V$ .

Bojenje  $\pi_1$  je finije od bojenja  $\pi_2$  (u oznaci  $\pi_1 \leq \pi_2$ ) ukoliko za sve  $v, w \in V$  važi implikacija  $\pi_2(v) < \pi_2(w) \implies \pi_1(v) < \pi_1(w)$ .

Obojen graf je uređeni par  $(G, \pi)$  gde je  $\pi$  jedno bojenje grafa  $G$ .

## Dejstvo grupe $S_n$

Neka  $S_n$  označava simetričnu grupu stepena  $n$ . Sliku čvora  $v \in V$  pod permutacijom  $g \in S_n$  označavamo sa  $v^g$ . Ovim je definisano jedno dejstvo grupe  $S_n$  na skup  $V$ . Orbita čvora  $v$  pod tim dejstvom je skup  $\Omega_v = \{v^g \mid g \in S_n\}$ . Stabilizator čvora  $v$  je skup  $\Sigma_v = \{g \in S_n \mid v^g = v\}$  koji čini jednu podgrupu od  $S_n$ . Definiciju dejstva grupe permutacija možemo proširiti i na složenije strukture:

- $W^g = \{w^g \mid w \in W\}$  za skup  $W \subseteq V$
- $w^g = (v_1^g, v_2^g, \dots, v_k^g)$  za uređenu  $k$ -torku  $w$
- $G^g = (V, E')$  za graf  $G$  i  $E' = \{e^g \mid e \in E\}$
- Ako je  $\pi$  bojenje,  $\pi^g$  je bojenje za koje važi  $\pi^g(v^g) = \pi(v)$
- $(G, \pi)^g = (G^g, \pi^g)$  za obojen graf  $(G, \pi)$

## Izomorfizam

Obojeni grafovi  $(G_1, \pi_1)$  i  $(G_2, \pi_2)$  su *izomorfni* (u oznaci  $(G_1, \pi_1) \cong (G_2, \pi_2)$ ) ukoliko postoji  $g \in S_n$  tako da je  $(G_1, \pi_1) = (G_2, \pi_2)^g$ . Takvo  $g$  zovemo *izomorfizam*.

*Automorfizam* obojenog grafa  $(G, \pi)$  je izomorfizam tog grafa sa samim sobom, odnosno  $g \in S_n$  za koje važi  $(G, \pi) = (G, \pi)^g$ . Skup automorfizama grafa  $(G, \pi)$  označavamo sa  $\text{Aut}(G, \pi)$ . Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup  $\text{Aut}(G, \pi)$  čini *grupu automorfizama*.

## Kanonska forma

Neka je  $f : \mathcal{G} \times \Pi \rightarrow S$  preslikavanje iz skupa svih obojenih grafova u proizvoljan skup  $S$ . Kažemo da je  $f$  invarijantno na imenovanje čvorova ukoliko za svaki obojen graf  $(G, \pi)$  i svaku permutaciju  $g \in S_n$  važi  $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)$ . Neformalno, to znači da vrednost funkcije  $f$  ne zavisi od konkretnog imenovanja čvorova grafa, već samo od njegove unutrašnje strukture.

*Kanonska forma* je funkcija  $\mathcal{C} : \mathcal{G} \times \Pi \rightarrow \mathcal{G} \times \Pi$  koja ispunjava sledeće uslove:

(C1) Za svaki obojen graf  $(G, \pi)$  važi  $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$

(C2)  $\mathcal{C}$  je invarijantno na imenovanje čvorova



## 2.2 Stablo pretrage

Označimo sa  $V^*$  skup svih konačnih nizova elemenata skupa  $V$ . Ako je  $\nu \in V^*$  sa  $|\nu|$  označavamo dužinu niza  $\nu$ . Ako je  $\nu = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V^*$  i  $w \in V$ , onda  $\nu||w$  označava niz  $(v_1, v_2, \dots, v_k, w)$ . Za  $0 \leq s \leq k$  prefiks niza  $\nu$  dužine  $s$  označavamo sa  $[\nu]_s = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ . Uređenje  $\leq$  na skupu  $V^*$  predstavlja leksikografski poredak.

Čvorovi stabla pretrage predstavljeni su nizovima elemenata skupa  $V$ , pri čemu korenu stabla odgovara prazan niz. U nastavku definišemo funkcije na osnovu kojih ćemo definisati pravila grananja u stablu.

**Definicija.** *Funkcija profinjavanja* je bilo koja funkcija  $R : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow \Pi$  koja za svaki obojen graf  $(G, \pi_0)$  i svako  $\nu \in V^*$  zadovoljava sledeće uslove:

$$(R1) \quad R(G, \pi_0, \nu) \leq \pi_0$$

$$(R2) \quad \text{Ako je } v \in \nu, \text{ onda je } \{v\} \text{ ćelija bojenja } R(G, \pi_0, \nu)$$

$$(R3) \quad \text{Za svako } g \in S_n \text{ važi } R(G^g, \pi_0^g, \nu^g) = R(G, \pi_0, \nu)^g$$

**Definicija.** *Funkcija odabira ciljne ćelije* je bilo koja funkcija  $T : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow \mathcal{P}(V)$  koja za svaki obojen graf  $(G, \pi_0)$  i svako  $\nu \in V^*$  zadovoljava sledeće uslove:

$$(T1) \quad \text{Ako je } R(G, \pi_0, \nu) \text{ diskretno, onda je } T(G, \pi_0, \nu) = \emptyset$$

$$(T2) \quad \text{Ako } R(G, \pi_0, \nu) \text{ nije diskretno, onda je } T(G, \pi_0, \nu) \text{ nejedinična ćelija od } R(G, \pi_0, \nu)$$

$$(T3) \quad \text{Za svako } g \in S_n \text{ važi } T(G^g, \pi_0^g, \nu^g) = T(G, \pi_0, \nu)^g$$

Kako je graf fiksiran, ove funkcije možemo smatrati funkcijama čvorova stabla. Funkcija profinjavanja obezbeđuje postojanje bojenja pridruženog svakom čvoru stabla (koje postaje finije kako se spuštamo niz stablo). Funkcija odabira ciljne ćelije nam omogućava da odaberemo skup čvorova grafa koji nam služi za konstrukciju dece tog čvora u stablu. Treći uslov u obe definicije je varijanta pomenute invarijantnosti na imenovanje čvorova. On govori da funkcije treba da zavise samo od unutrašnje strukture grafa i da transformacije koje one vrše ne zavise od imenovanja čvorova grafa.

**Definicija.** *Stablo pretrage*  $\mathcal{T}(G, \pi_0)$  određeno je sledećim uslovima:

$$(\mathcal{T}1) \quad \text{Koren stabla } \mathcal{T}(G, \pi_0) \text{ je prazan niz } ()$$

(T2) Ako je  $\nu$  čvor stabla  $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ , njegova deca u stablu su  $\{\nu \parallel w \mid w \in T(G, \pi_0, \nu)\}$

Iz definicije je jasno da je čvor stabla  $\nu$  list ako i samo ako je bojenje  $R(G, \pi_0, \nu)$  diskretno.

Naredna lema pokazuje da je ovako definisano stablo invarijantno na imenovanje čvorova grafa.

**Lema 1.** *Za svaki obojen graf  $(G, \pi_0)$  i svako  $g \in S_n$  važi  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g) = \mathcal{T}(G, \pi_0)^g$ .*

*Dokaz.* Dokažimo da za svaki čvor  $\nu$  stabla  $\mathcal{T}(G, \pi_0)$  važi da je  $\nu^g$  čvor stabla  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$ . Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla.

**Baza indukcije** Prazan niz je koren stabla  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$ , pa tvrđenje trivijalno važi.

**Induktivni korak** Pretpostavimo da tvrđenje važi za čvor  $\nu$ . Neka je  $\nu \parallel w$  dete čvora  $\nu$  za neko  $w \in T(G, \pi_0, \nu)$ . Tada je  $(\nu \parallel w)^g = \nu^g \parallel w^g$ , ali kako važi  $w^g \in T(G, \pi_0, \nu)^g =_{(T3)} T(G^g, \pi_0^g, \nu^g)$  to je  $\nu^g \parallel w^g$  dete čvora  $\nu^g$  u stablu  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$ .

Time smo dokazali da je stablo  $\mathcal{T}(G, \pi_0)^g$  podstablo od  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$  ( $\mathcal{T}(G, \pi_0)^g \subseteq \mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$ ). Prema prethodno dokazanom važi  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)^{g^{-1}} \subseteq \mathcal{T}(G, \pi_0)$ , pa primenom  $g$  na obe strane konačno dobijamo  $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g) \subseteq \mathcal{T}(G, \pi_0)^g$ .  $\square$

## 2.3 Invarijanta stabla i kanonska forma

## 2.4 Uloga automorfizama

## Glava 3

### Realizacija algoritma

## Glava 4

### Rezultati testiranja

Glava 5

Zaključak

# Bibliografija

- [1] Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM Journal on Computing*, 16:486–502, 1987.
- [2] Petar Petrović and Mika Mikić. Naučni rad. In Miloje Milojević, editor, *Konferencija iz matematike i računarstva*, 2015.

# Biografija autora

Biografija.