UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

matf.png

Ivan Drecun

ALGORITMI ZA ISPITIVANJE IZOMORFIZMA GRAFOVA

master rad

Beograd, 2021.

Mentor:

dr Filip Marić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miodrag Živković, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vesna Marniković, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Mami, tati i dedi

Naslov master rada: Algoritmi za ispitivanje izomorfizma grafova

Rezime: Apstrakt rada.

Ključne reči: ključne, reči

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Opšti algoritam **2**

2.1 Osnovni pojmovi 2

2.2 Stablo pretrage 5

2.3 Invarijanta stabla 7

2.4 Odsecanje pretrage 11

3 Realizacija algoritma **14**

3.1 Reprezentacija podataka 14

3.2 Funkcija profinjavanja 16

3.3 Funkcija odabira ciljne ćelije 21

3.4 Invarijanta stabla 21

3.5 Automorfizmi 24

3.6 Pretraga 25

3.7 Invarijanta grafa 28

4 Rezultati testiranja **30**

5 Zaključak **31**

Bibliografija **32**

Glava 1

Uvod

Glava 2

Opšti algoritam

U ovoj glavi predstavljeni su osnovni matematički pojmovi neophodni za dalje razumevanje konstrukcije opšteg algoritma za određivanje kanonske forme grafa. Uvedeni su pojmovi *bojenja* i *obojenog grafa*, nakon čega je prikazana konstrukcija stabla pretrage koja leži u osnovi algoritma. Nad stablom pogodno je definisana invarijanta koja omogućava određivanje grupe automorfizama grafa i kanonske forme. Na kraju su prikazani i mehanizmi odsecanja pretrage koji omogućavaju praktično izvršavanje algoritma u razumnom vremenu.

2.1 Osnovni pojmovi

Obojen graf

Graf $G = (V, E)$ je uređeni par konačnog *skupa čvorova* V i *skupa grana* $E \subseteq \binom{V}{2}$. U nastavku pretpostavljamo da je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki prirodan broj $n > 0$. Označimo skup svih grafova sa n čvorova sa $\mathcal{G}_n$ (nadalje $\mathcal{G}$).

Bojenje grafa G je surjekcija $\pi : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ za neki prirodan broj $k > 0$. Označimo skup svih bojenja grafa sa n čvorova sa Π_n (nadalje Π).

Broj k zovemo brojem boja i označavamo ga sa $|\pi|$. Ćelija bojenja π boje c je skup svih čvorova te boje, odnosno $\pi^{-1}(c)$ za $c \in \{1, 2, ..., k\}$. Bojenje je diskretno ukoliko je $|\pi| = n$ i tada je π permutacija skupa V.

Bojenje π_1 je finije od bojenja π_2 (u oznaci $\pi_1 \leq \pi_2$) ukoliko za sve $v, w \in V$ važi implikacija $\pi_2(v) < \pi_2(w) \implies \pi_1(v) < \pi_1(w)$.

Označimo sa $\sim_\pi$ binarnu relaciju na skupu čvorova definisanu sa $u \sim_\pi v \iff \pi(u) = \pi(v)$. U pitanju je relacija ekvivalencije (particija) čije klase odgovaraju upravo ćelijama bojenja π.

Particija α je finija od particije β (u oznaci $\alpha \leq \beta$) ukoliko za sve $v, w \in V$ važi implikacija $v\alpha w \implies v\beta w$. Primetimo da za bojenja π_1 i π_2 važi $\pi_1 \leq \pi_2 \implies \sim_{\pi_1} \leq \sim_{\pi_2}$, ali ne i obrnuto.

Obojen graf je uređeni par (G, π) gde je π jedno bojenje grafa G.

Primer 1. *Neka je* $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *jedno bojenje. Koristan je zapis po ćelijama bojenja* $\pi = [2\ 5 \mid 4\ 3\ 6 \mid 1]$. *Bojenje* $\pi_1 = [5 \mid 2 \mid 4\ 6 \mid 3 \mid 1]$ *je finije od* π. *Bojenje* $\pi_2 = [2 \mid 3 \mid 4\ 6 \mid 5 \mid 1]$ *nije finije od* π *iako važi da je svaka njegova ćelija podskup neke ćelije bojenja* π.

Dejstvo grupe

Neka je G grupa i S skup na kom je definisano dejstvo grupe G označeno sa s^g za $s \in S$ i $g \in G$. Orbita elementa s je skup $\Omega_s^G = \{s^g \mid g \in G\}$. Stabilizator elementa s je skup $\Sigma_s^G = \{g \in G \mid s^g = s\}$ koji čini jednu podgrupu od G.

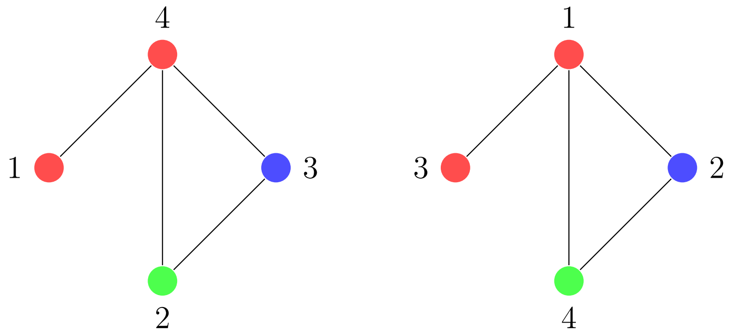
Neka S_n označava simetričnu grupu stepena n. Na skupu čvorova V definisano je dejstvo grupe sa $v^g = g(v)$ za $v \in V$ i $g \in S_n$. Definiciju dejstva grupe permutacija možemo proširiti i na složenije strukture:

- $W^g = \{w^g \mid w \in W\}$ za skup $W \subseteq V$
- $w^g = (v_1^g, v_2^g, \ldots, v_k^g)$ za uređenu k-torku w
- $G^g = (V, E')$ za graf G i $E' = \{e^g \mid e \in E\}$
- Ako je π bojenje, π^g je bojenje za koje važi $\pi^g(v^g) = \pi(v)$ odnosno $\pi^g = \pi g^{-1}$
- $(G, \pi)^g = (G^g, \pi^g)$ za obojen graf (G, π)

Izomorfizam

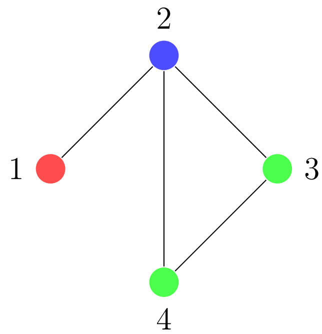
Obojeni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) su *izomorfni* (u oznaci $(G_1, \pi_1) \cong (G_2, \pi_2)$) ukoliko postoji $g \in S_n$ tako da je $(G_1, \pi_1) = (G_2, \pi_2)^g$. Takvo g zovemo *izomorfizam.*

Primer 2. *Neka su dati grafovi* (G_1, π_1) *i* (G_2, π_2) *kao na slici 2.1. Ako je redosled boja crvena, zelena, plava, tada je* $\pi_1 = [1\ 4 \mid 2 \mid 3]$ *i* $\pi_2 = [3\ 1 \mid 4 \mid 2]$. *Ovi grafovi su izomorfni za izomorfizam* $g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.



Slika 2.1: Izomorfni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2).

Automorfizam obojenog grafa (G, π) je izomorfizam tog grafa sa samim sobom, odnosno $g \in S_n$ za koje važi $(G, \pi) = (G, \pi)^g$. Skup automorfizama grafa (G, π) označavamo sa $Aut(G, \pi)$. Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup $Aut(G, \pi)$ čini *grupu automorfizama*.



Slika 2.2: Graf sa automorfizmom $g = (3\ 4)$.

Kanonska forma

Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \to S$ preslikavanje iz skupa svih obojenih grafova u proizvoljan skup S. Kažemo da je f *funkcija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)$. Neformalno, to znači da vrednost funkcije f ne zavisi od konkretnog imenovanja čvorova grafa, već samo od njegove unutrašnje strukture.

Ako na skupu S postoji definisano dejstvo grupe S_n, kažemo da je f *transformacija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)^g$.

Definicija. *Kanonska forma* je preslikavanje $\mathcal{C} : \mathcal{G} \times \Pi \to \mathcal{G} \times \Pi$ koje ispunjava sledeće uslove:

($\mathcal{C}$1) Za svaki obojen graf (G, π) važi $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$

($\mathcal{C}$2) $\mathcal{C}$ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova

Primer 3. *Neka je definisano jedno totalno uređenje na skupu obojenih grafova, recimo poređenjem njihovih binarnih reprezentacija* $bin(G, \pi)$. *Tada je preslikavanje definisano sa* $\mathcal{M}(G, \pi) = \max_{g \in S_n}(G^g, \pi^g)$ *kanonska forma.*

2.2 Stablo pretrage

Označimo sa V^* skup svih konačnih nizova elemenata skupa V. Ako je $\nu \in V^*$ sa $|\nu|$ označavamo dužinu niza ν. Ako je $\nu = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in V^*$ i $w \in V$, onda $\nu \| w$ označava niz $(v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$. Za $0 \leq s \leq k$ prefiks niza ν dužine s označavamo sa $[\nu]_s = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$. Uređenje $\leq$ na skupu V^* predstavlja leksikografski poredak.

Čvorovi stabla pretrage predstavljeni su nizovima elemenata skupa V, pri čemu korenu stabla odgovara prazan niz. U nastavku definišemo funkcije na osnovu kojih ćemo definisati pravila grananja u stablu.

Definicija. *Funkcija profinjavanja* je bilo koje preslikavanje $R : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \Pi$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(R1) $R(G, \pi, \nu) \leq \pi$

(R2) Ako je $v \in \nu$, onda je $\{v\}$ ćelija bojenja $R(G, \pi, \nu)$

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi^g, \nu^g) = R(G, \pi, \nu)^g$

Definicija. *Funkcija odabira ciljne ćelije* je bilo koje preslikavanje $T : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \mathcal{P}(V)$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(T1) Ako je $R(G, \pi, \nu)$ diskretno, onda je $T(G, \pi, \nu) = \emptyset$

(T2) Ako $R(G, \pi, \nu)$ nije diskretno, onda je $T(G, \pi, \nu)$ nejedinična ćelija od $R(G, \pi, \nu)$

(T3) Za svako $g \in S_n$ važi $T(G^g, \pi^g, \nu^g) = T(G, \pi, \nu)^g$

Kako je graf fiksan, ove funkcije možemo smatrati funkcijama čvorova stabla. Funkcija profinjavanja obezbeđuje postojanje bojenja pridruženog svakom čvoru stabla (koje postaje finije kako se spuštamo niz stablo). Funkcija odabira ciljne ćelije nam omogućava da odaberemo skup čvorova grafa koji nam služi za konstrukciju dece tog čvora u stablu. Treći uslov u obe definicije govori da su u pitanju transformacije invarijantne na imenovanje čvorova.

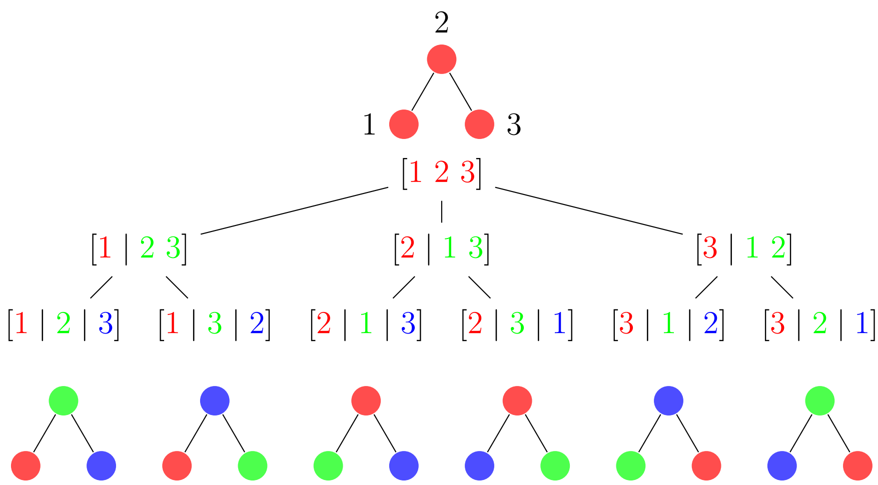
Definicija. *Stablo pretrage* $\mathcal{T}(G, \pi)$ određeno je sledećim uslovima:

($\mathcal{T}1$) Koren stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ je prazan niz ()

($\mathcal{T}2$) Ako je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$, njegova deca u stablu su $\{\nu \,\|w \mid w \in T(G, \pi, \nu)\}$

Iz definicije se vidi da je neki čvor list stabla ako i samo ako je njemu pridruženo bojenje diskretno. Primetimo da je ovako definisano stablo konačno zato što za svako ν koje je permutacija skupa V važi da je bojenje pridruženo nekom njegovom prefiksu diskretno ili je njemu pridruženo bojenje diskretno.

Primer 4. *Prikažimo jedno jednostavno stablo pretrage. Za funkciju odabira ciljne ćelije možemo uzeti funkciju koja bira prvu nejediničnu ćeliju bojenja. Za funkciju profinjavanja možemo uzeti funkciju koja dodeljuje boje čvorovima u skladu sa početnim bojenjem π, pri čemu čvorove niza ν izdvaja u zasebne ćelije. Na slici 2.3 je prikazano stablo pretrage jednog grafa.*



Slika 2.3: Stablo pretrage koje generiše sve permutacije skupa čvorova.

Dejstvo grupe S_n na stablo definiše se slično kao za bilo koju drugu strukturu. Naredna lema pokazuje da je ovako definisano stablo invarijantno na imenovanje čvorova grafa.

Lema 1. *Za svaki obojen graf* (G, π) *i svako* $g \in S_n$ *važi* $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) = \mathcal{T}(G, \pi)^g$.

Dokaz. Dokažimo da za svaki čvor ν stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ važi da je ν^g čvor stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla.

> **Baza indukcije** Prazan niz je koren stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$, pa tvrđenje trivijalno važi.
>
> **Induktivni korak** Pretpostavimo da tvrđenje važi za čvor ν. Neka je $\nu \| w$ dete čvora ν za neko $w \in T(G, \pi, \nu)$. Tada je $(\nu \| w)^g = \nu^g \| w^g$, ali kako važi $w^g \in T(G, \pi, \nu)^g =_{(T3)} T(G^g, \pi^g, \nu^g)$ to je $\nu^g \| w^g$ dete čvora ν^g u stablu $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$.

Time smo dokazali da je stablo $\mathcal{T}(G, \pi)^g$ podstablo od $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ ($\mathcal{T}(G, \pi)^g \subseteq \mathcal{T}(G^g, \pi^g)$). Prema prethodno dokazanom važi $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)^{g^{-1}} \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)$, pa primenom g na obe strane konačno dobijamo $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)^g$. $\square$

Posledica 1. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i neka* $\mathcal{T}(G, \pi, \nu)$ *označava njegovo podstablo sa korenom u* ν. *Ako je* $g \in Aut(G, \pi)$, *onda je* ν^g *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i važi* $\mathcal{T}(G, \pi, \nu^g) = \mathcal{T}(G, \pi, \nu)^g$.

Lema 2. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i* $\pi_\nu = R(G, \pi, \nu)$. *Tada je grupa automorfizama obojenog grafa* (G, π_ν) *jednaka stabilizatoru niza* ν *u grupi automorfizama grafa* (G, π), *odnosno* $Aut(G, \pi_\nu) = \Sigma_\nu^{Aut(G,\pi)}$.

Dokaz. Neka je $g \in Aut(G, \pi_\nu)$. Tada je $\pi_\nu^g = \pi_\nu$, pa za svako v važi $\pi_\nu^g(v) = \pi_\nu(v)$. Na osnovu uslova $(R2)$ za $v \in \nu$ važi $\{v\} = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu(v)) = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu^g(v)) = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu(g^{-1}v)) \ni g^{-1}v$ odakle sledi $v^g = v$, odnosno g stabilizuje svako $v \in \nu$.

Sa druge strane, neka $g \in Aut(G, \pi)$ stabilizuje ν. Tada po (R3) važi $\pi_\nu^g = R(G, \pi, \nu)^g = R(G^g, \pi^g, \nu^g) = R(G, \pi, \nu) = \pi_\nu$, pa je $g \in Aut(G, \pi_\nu)$. $\square$

2.3 Invarijanta stabla

Definicija. *Invarijanta stabla* je preslikavanje $\phi : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to F$ za neki potpuno uređen skup F koje za sve obojene grafove (G, π) i različite čvorove $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ ispunjava sledeće uslove:

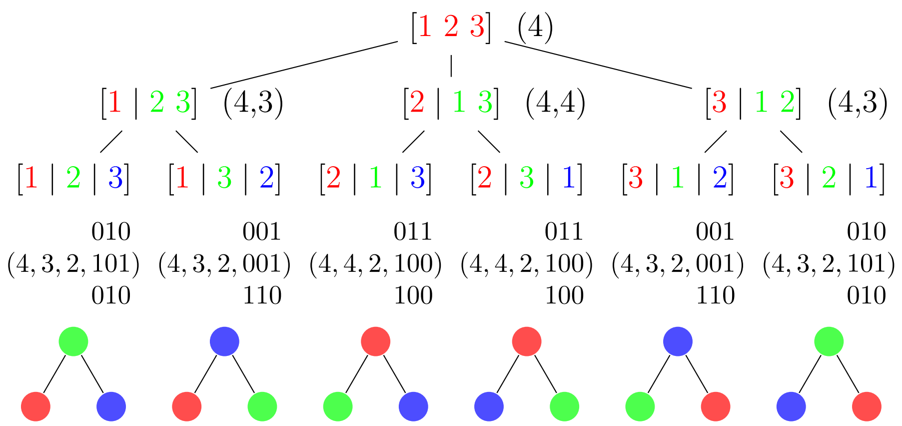
($\phi1$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G,\pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G,\pi,\nu_1) < \phi(G,\phi_0,\nu_2)$, onda za sve $\omega_1 \in \mathcal{T}(G,\pi,\nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G,\pi,\nu_2)$ važi $\phi(G,\pi,\omega_1) < \phi(G,\pi,\omega_2)$

($\phi2$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G,\pi)$ takvi da su $\pi_1 = R(G,\pi,\nu_1)$ i $\pi_2 = R(G,\pi,\nu_2)$ diskretna bojenja, onda je $\phi(G,\pi,\nu_1) = \phi(G,\pi,\nu_2) \implies G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$

($\phi3$) ϕ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova grafa

Listovi ν_1 i ν_2 su *ekvivalentni* ako i samo ako $\phi(G,\pi,\nu_1) = \phi(G,\pi,\nu_2)$.

Primer 5. *Definišimo $\phi(G,\pi,\nu)$ koristeći pomoćnu funkciju f kao niz vrednosti $(f(G,\pi,[\nu]_0), f(G,\pi,[\nu]_1), \ldots, f(G,\pi,[\nu]_{|\nu|}))$, pri čemu u slučaju da je ν list možemo na taj niz nadovezati i binarnu reprezentaciju grafa permutovanog bojenjem $R(G,\pi,\nu)$. Ovako definisano ϕ ispunjava uslove (ϕ1-2). Ako za pomoćnu funkciju f odaberemo npr. proizvod zbirova stepena čvorova ćelija, dobijamo jednu jednostavnu invarijantu stabla. Vrednosti invarijante stabla iz primera 2.3 prikazane su na slici 2.4.*



Slika 2.4: Invarijanta stabla.

U nastavku ćemo kroz dve teoreme prikazati značaj ovako definisane invarijante stabla. Označimo za proizvoljan čvor stabla ν njegovo bojenje dobijeno funkcijom profinjavanja sa $\pi_\nu = R(G,\pi,\nu)$.

Lema 3. *Neka je $g \in Aut(G,\pi)$ i listovi ν_1 i ν_2 takvi da je $\nu_1^g = \nu_2$. Tada su ν_1 i ν_2 ekvivalentni i $g = \pi_{\nu_2}^{-1}\pi_{\nu_1}$.*

Dokaz. Na osnovu svojstva ($\phi3$) invarijante stabla i činjenice da je g automorfizam sledi $\phi(G,\pi,\nu_1) =_{(\phi_3)} \phi(G^g,\pi^g,\nu_1^g) =_{g\in Aut(G,\pi)} \phi(G,\pi,\nu_1^g) = \phi(G,\pi,\nu_2)$, odnosno ν_1

i ν_2 su ekvivalentni. Dalje, važi $\pi_{\nu_2}^{-1}\pi_{\nu_1} = \pi_{\nu_1^g}^{-1}\pi_{\nu_1} =_{(R3)} (\pi_{\nu_1}^g)^{-1}\pi_{\nu_1} = (\pi_{\nu_1}g^{-1})^{-1}\pi_{\nu_1} = g\pi_{\nu_1}^{-1}\pi_{\nu_1} = g$. □

Lema 4. *Neka su α i β diskretna bojenja finija od bojenja π. Tada je $\pi^\alpha = \pi^\beta$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo nizom sitnih tvrđenja.

1. $id \leq \pi^\alpha$

   Neka su x i y proizvoljni. Važi $\pi^\alpha(x) < \pi^\alpha(y) \iff \pi(\alpha^{-1}(x)) < \pi(\alpha^{-1}(y))$, pa kako je $\alpha \leq \pi$ sledi $\alpha(\alpha^{-1}(x)) < \alpha(\alpha^{-1}(y))$ odnosno $x < y$. Kontrapozicijom dobijamo i $x \leq y \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y)$.

2. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = [n, m]$ za neko $n, m \in \mathbb{N}$ gde je $[n, m] = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\}$

   Za svako x, y, z važi $x \leq y \leq z \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y) \leq \pi^\alpha(z)$, pa ako je $\pi^\alpha(x) = \pi^\alpha(z) = c$, onda je i $\pi^\alpha(y) = c$.

3. $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n)$ ili $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n) + 1$

   Neka je $\pi^\alpha(n+1) \neq \pi^\alpha(n)$. Tada je $n + 1 \geq n \implies \pi^\alpha(n+1) \geq \pi^\alpha(n)$, pa je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n)$ jer su po pretpostavci različiti. Pretpostavimo da je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n) + 1$. Tada postoji m takvo da je $\pi^\alpha(m) = \pi^\alpha(n) + 1$, ali iz $\pi^\alpha(n) < \pi^\alpha(m) < \pi^\alpha(n+1) \implies n < m < n + 1$ sledi kontradikcija.

4. $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)|$

   Važi da je $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = \{m \mid \pi^\alpha(m) = c\} = \{m^\alpha \mid \pi^\alpha(m^\alpha) = c\} = \{m^\alpha \mid \pi(m) = c\} = \pi^{-1}(c)^\alpha$. Odatle je $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)^\alpha| = |\pi^{-1}(c)|$.

5. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c)$

   Dokaz izvodimo indukcijom po c.

   > **Baza indukcije** Kako je $1 \leq x$ za sve x, onda iz $id \leq \pi^\alpha$ sledi $\pi^\alpha(1) \leq \pi^\alpha(x)$ za sve x pa je $\pi^\alpha(1) = 1$. Dalje, kako je $|(\pi^\alpha)^{-1}(1)| = |\pi^{-1}(1)|$, mora važiti $(\pi^\alpha)^{-1}(1) = [1, |\pi^{-1}(1)|]$. Analogno se pokazuje i za β.
   >
   > **Induktivni korak** Neka je po induktivnoj pretpostavci $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c) = [n, m]$. Tada je $\pi^\alpha(m+1) \neq \pi^\alpha(m)$, pa je $\pi^\alpha(m+1) = \pi^\alpha(m)+1$ i $m+1$ je najmanje u $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1)$. Odatle važi $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1) = [m+1, m+|\pi^{-1}(c+1)|]$. Analogno se pokazuje i za β.

□

Teorema 1. *Za svaki list ν važi $Aut(G, \pi) = \{\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \mid \nu$ i ω su ekvivalentni$\}$.*

Dokaz. Neka je $g \in Aut(G, \pi)$. Tada je po posledici 1 ν^g list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Po prethodno dokazanoj lemi 3 su ν i ν^g ekvivalentni i $g = \pi_{\nu^g}^{-1}\pi_\nu$ što je element skupa sa desne strane jednakosti. Sa druge strane, ako su ν i ω ekvivalentni, onda je $G^{\pi_\nu} = G^{\pi_\omega}$, pa je $\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \in Aut(G, \pi)$. □

Prethodna teorema pokazuje da je otkrivanjem svih čvorova ekvivalentnih jednom čvoru moguće odrediti grupu automorfizama datog grafa. Naravno, ovakav način određivanja grupe automorfizama nije veoma efikasan pošto se grupa generiše član po član. Ovo se može poboljšati odsecanjem pretrage o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Primer 6. *Posmatrajmo prvi list stabla sa slike 2.4. Na osnovu prethodne teoreme je moguće odrediti skup svih automorfizama grafa. Kako je taj list ekvivalentan samom sebi, $id \in Aut(G, \pi)$. Kako je ekvivalentan poslednjem listu stabla, $(1\ 3) \in Aut(G, \pi)$. Ne postoje drugi automorfizmi jer ne postoje drugi listovi ekvivalentni prvom listu stabla, pa je $Aut(G, \pi) = \{id, (1\ 3)\}$.*

Definicija. Neka je ν^* list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ u kom invarijanta $\phi(G, \pi, \nu)$ dostiže maksimum. *Kanonska forma* obojenog grafa (G, π) je funkcija $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$.

Primetimo da zbog uslova ($\phi 2$) definicija ne zavisi od izbora lista ν^*. Naredna teorema opravdava naziv i oznaku funkcije.

Teorema 2. *Funkcija $\mathcal{C}(G, \pi)$ je kanonska forma.*

Dokaz. Dokazujemo da ovako definisana funkcija ispunjava uslove kanonske forme za svaki obojen graf (G, π).

($\mathcal{C}1$) Kako je $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$ to je $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$ za izomorfizam π_{ν^*}.

($\mathcal{C}2$) Za svako $g \in S_n$ i svako $\nu \in \mathcal{T}(G, \pi)$ važi $\nu^g \in \mathcal{T}(G, \pi)^g = \mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ kao i $\phi(G^g, \pi^g, \nu^g) = \phi(G, \pi, \nu)$, pa je ν^{*g} list u kom invarijanta stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ dostiže maksimalnu vrednost. Odatle sledi $\mathcal{C}(G^g, \pi^g) = (G^g, \pi^g)^{R(G^g, \pi^g, \nu^{*g})} = (G^g, \pi^g)^{\pi^g_{v^*}} = (G, \pi)^{\pi_{v^*}} = \mathcal{C}(G, \pi)$ pa je $\mathcal{C}$ funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.

□

Primer 7. *Posmatrajmo stablo sa slike 2.4. Na osnovu prethodne teoreme je moguće odrediti kanonsku formu grafa. U pitanju je graf koji se dobija bilo kojom od permutacija* (2 1) *ili* (3 2 1) *jer su to permutacije sa najvećom invarijantnom u stablu.*

2.4 Odsecanje pretrage

Stablo pretrage može biti veoma veliko, pa pretraga kompletnog stabla nije poželjna. To možemo rešiti uvođenjem tri različite operacije odsecanja.

- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) > \phi(G, \pi, \nu_2)$. Operacija $P_A(\nu_1, \nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.
- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) \neq \phi(G, \pi, \nu_2)$. Operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.
- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $\nu_1 < \nu_2$ i $\nu_1^g = \nu_2$ za neko $g \in Aut(G, \pi)$. Operacija $P_C(\nu_1, g)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.

Operacije P_A i P_C su definisane tako da očuvavaju mogućnost određivanja kanonske forme u stablu. Slično, operacije P_B i P_C očuvavaju mogućnost određivanja grupe automorfizama na osnovu stabla. Naredna teorema opravdava uvođenje ovih operacija i pokazuje da one ne narušavaju rezultate teorema o određivanju grupe automorfizama i kanonske forme.

Teorema 3. *Neka je* (G, π) *obojen graf.*

1. *Neka je nad stablom* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *izvršen proizvoljan niz operacija* P_A *i* P_C*. Tada u dobijenom stablu postoji bar jedan list* ν *takav da je* $\phi(G, \pi, \nu) = \phi(G, \pi, \nu^*)$.
2. *Neka je* ν_0 *list stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i neka je nad stablom izvršen proizvoljan niz operacija* $P_B(\nu_1, \nu_2)$ *i* P_C *gde je* $\phi(G, \pi, \nu_2) \neq \phi(G, \pi, [\nu_0]_s)$ *za sve* $0 \leq s \leq |\nu_0|$ *i neka su* $g_1, \ldots, g_k$ *svi automorfizmi korišćeni u izvršenim operacijama* P_C*. Tada je grupa automorfizama* $Aut(G, \pi)$ *generisana skupom* $\{g_1, \ldots, g_k\} \cup \{g \in Aut(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen}\}$.

Dokaz. Dokažimo za početak nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Nijedna operacija P_A ne uklanja listove u kojima je vrednost invarijante maksimalna. Pretpostavimo suprotno. Neka je ν_1 list u kom invarijanta stabla dostiže maksimum i neka je ν_1' predak od ν_1. Operacija $P_A(\nu_2', \nu_1')$ uklanja ν_1' ako je $\phi(G, \pi, \nu_1') < \phi(G, \pi, \nu_2')$, pa po svojstvu ($\phi 1$) za proizvoljan list ν_2 u $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2')$ važi $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je vrednost invarijante maksimalna u ν_1.

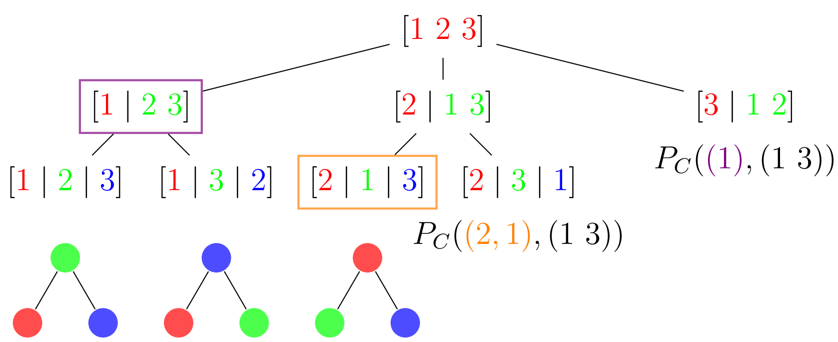
Nijedna operacija P_B ne uklanja nijedan list ν ekvivalentan listu ν_0 (iz drugog dela teoreme). Iz pretpostavke teoreme nijedna operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ ne uklanja čvor ν_2 takav da je $\phi(G, \pi, [\nu_0]_{|\nu_2|}) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, pa samim tim ne uklanja nijedan čvor $[\nu]_s$ za $0 \leq s \leq |\nu|$.

Nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji među ekvivalentnim listovima. Štaviše, nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji čvor iz $\Omega_\nu^{<g_1, \ldots, g_k>}$ za bilo koje ν. Neka je bez umanjenja opštosti ν leksikografski najmanji list u svojoj orbiti. Operacija $P_C(\omega, g)$ uklanja čvor ω^g ako je $\omega < \omega^g$, pa je $[\nu]_{|\omega|} \neq \omega^g$ pošto je ili $[\nu]_{|\omega|} < \omega$ ili su ω i $[\nu]_{|\omega|}$ iz različitih orbita.

1. Na osnovu dokazanih svojstava operacija P_A i P_C iz stabla se ne uklanja leksikografski najmanji list ν ekvivalentan listu ν^*.

2. Ako je $g \in Aut(G, \pi)$, onda na osnovu dokazanih svojstva operacija P_B i P_C važi da iz stabla nije uklonjen leksikografski najmanji list oblika ν_0^{hg} za neko $h \in <g_1, \ldots, g_k>$, izborom $\omega = \nu_0^g$. Odatle sledi da je $hg \in <\{g_1, \ldots, g_k\} \cup \{g \in Aut(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen}\}>$, pa je i g element generisane grupe.

$\square$



Slika 2.5: Odsecanje stabla na osnovu automorfizama.

Primer 8. *Prilikom obilaska stabla sa slike 2.4 moguće je izvršiti odsecanje nekih delova stabla na osnovu automorfizma* (1 3) *(ukoliko je on poznat unapred). Rezultujuće stablo je dato na slici 2.5.*

Glava 3

Realizacija algoritma

3.1 Reprezentacija podataka

Bojenje

Bojenje $\pi \in \Pi_n$ predstavljeno je permutacijom p i nizom $cells$. Permutacija p predstavlja niz koji se dobija nadovezivanjem ćelija $\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(k)$ redom, pri čemu su elementi jedne ćelije uređeni rastuće. Preciznije, p je permutacija takva da je $p(u) \in \pi^{-1}(c)$ ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{c-1} |\pi^{-1}(i)| \leq u < \sum_{i=1}^{c} |\pi^{-1}(i)|$ i da ako važi $\pi(u) = \pi(v)$ onda je $u < v \iff p^{-1}(u) < p^{-1}(v)$.

Niz $cells$ dužine n upotpunjava permutaciju p podacima o granicama ćelija bojenja π. Ako pozicija u predstavlja početak nove ćelije, tada je $cells_u$ takvo da ta ćelija obuhvata tačno pozicije $[u, cells_u)$ permutacije p. Formalno,

$$cells(u) = \begin{cases} u + |\pi^{-1}(\pi(p(u)))|, & \text{ako je } u = 1 \text{ ili } \pi(p(u)) \neq \pi(p(u-1)) \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primer 9. *Neka je* $\pi = [2\ 5 \mid 4\ 3\ 5 \mid 1]$ *jedno bojenje. Tada je ono predstavljeno permutacijom* $p : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *i nizom* $cells = (3, -1, 6, -1, -1, 7)$.

Primetimo da u slučaju diskretnog bojenja π permutacija p predstavlja inverz permutacije π.

Primer 10. *Bojenje* $\pi = [2 \mid 4 \mid 3 \mid 1]$ *koje je zapravo preslikavanje* $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *predstavljeno je permutacijom* $p : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Jedna od ključnih operacija nad bojenjem je profinjavanje jedne ćelije. Neka je $\pi^{-1}(c)$ jedna ćelija bojenja π i neka je svakom čvoru v te ćelije dodeljena vrednost t_v. Profinjavanje ćelije podrazumeva formiranje bojenja $\pi' \leq \pi$ takvog da za u i v iz $\pi^{-1}(c)$ važi $\pi'(u) < \pi'(v) \iff t_u < t_v$, dok za sve ostale parove u i v važi $\pi'(u) = \pi'(v) \iff \pi(u) = \pi(v)$.

Algoritam 1 Profinjavanje ćelije

procedure REFINE_CELL(G, π, c, t)
- $\pi' \leftarrow \pi$
- $k \leftarrow 1$
- **for** $t' \in \text{sorted}(\{t_v \mid v \in \pi^{-1}(c)\})$ **do**
  - $C_k \leftarrow \{v \in \pi^{-1}(c) \mid t_v = t'\}$
  - $\pi'(v) \leftarrow c + k - 1$ za sve $v \in C_k$
  - $k \leftarrow k + 1$
- $\pi'(v) \leftarrow \pi(v) + k - 1$ za sve v takve da $\pi(v) > c$
- $s \leftarrow$ indeks prvog najvećeg skupa među $C_{i,1 \leq i \leq k}$
- **return** $\pi', C_1, \ldots, C_k, s$

Opisana reprezentacija bojenja je korisna zato što omogućava da se ovaj algoritam implementira tako da mu složenost bude $O(|C| \log |C|)$ gde je $C = \pi^{-1}(c)$, pri čemu dominira složenost sortiranja čvorova na osnovu vrednosti t_v.

Graf

Pošto se graf ne menja tokom izvršavanja samog algoritma, moguće je čuvati više različitih reprezentacija grafa. Ovde ćemo istaći one delove reprezentacije koji su neophodni za dalju diskusiju.

Obojen graf je predstavljen bojenjem π i matricom povezanosti $\psi : \mathcal{G} \times V \times V \to \{0, 1\}$ gde je $\psi(G, u, v) = 1$ akko je $(u, v) \in E$. Zapazimo sledeća svojstva matrice povezantosti:

(ψ1) $\psi(G, u, v) = \psi(G, v, u)$

(ψ2) $\psi(G^g, u^g, v^g) = \psi(G, v, u)$ za proizvoljno $g \in S_n$

Prvo svojstvo je simetričnost matrice povezanosti koja proizilazi iz činjenice da je u neusmerenom grafu $(u, v) \in E$ akko $(v, u) \in E$. Drugo svojstvo govori da je matrica povezanosti funkcija invarijantna na imenovanje čvorova. Ovo svojstvo će biti značajno u definicijama i dokazima koji slede u ovom poglavlju. Invarijantnost važi zato što je (u, v) grana grafa G akko je $(u, v)^g = (u^g, v^g)$ grana grafa G^g.

3.2 Funkcija profinjavanja

Lema 5. *Neka je preslikavanje* $I : \Pi \times V \to \Pi$ *definisano sa*

$$I(\pi, v)(w) = \begin{cases} \pi(w), & \textit{ako je } \pi(w) < \pi(v) \textit{ ili } w = v \\ \pi(w) + 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

i neka je $F : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \Pi$ *transformacija invarijantna na imenovanje čvorova takva da je* $F(G, \pi, \nu) \leq \pi$. *Tada je preslikavanje definisano sa*

$$R(G, \pi, ()) = F(G, \pi, ())$$
$$R(G, \pi, \nu \| w) = F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), \nu \| w)$$

funkcija profinjavanja.

Dokaz. Pokažimo prvo nekoliko svojstava ovako definisanog preslikavanja I.

(I1) Za proizvoljno bojenje π i čvor u važi da je $I(\pi, u) \leq \pi$. To važi zato što ako je $\pi(v) < \pi(w)$ onda nije istovremeno $I(\pi, u)(v) = \pi(v) + 1$ i $I(\pi, u)(w) = \pi(w)$ jer to povlači da je $\pi(v) \geq \pi(u)$ i $\pi(w) \leq \pi(u)$, odnosno da je $\pi(w) \leq \pi(v)$ što je kontradikcija. U svim ostalim slučajevima iz pretpostavke sledi $I(\pi, u)(v) < I(\pi, u)(w)$.

(I2) $\{v\}$ je ćelija bojenja $I(\pi, v)$. Ako je $\pi(w) = \pi(v)$ i $w \neq v$ onda je $I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)(v) + 1$, a kako je $I(\pi, v) \leq \pi$ onda je $\pi(v) \neq \pi(w) \iff I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ pa je $I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ za sve $w \neq v$.

(I3) I je transformacija invarijantna na imenovanje čvorova. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Tada je $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) \iff I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi^g(w^g) \iff \pi^g(w^g) < \pi^g(v^g) \vee w^g = v^g \iff \pi(w) < \pi(v) \vee w = v \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w)$. Slično je i $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) + 1 \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w) + 1$, odnosno $I(\pi^g, v^g)(w^g) = I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)^g(w^g)$.

Dokažimo sada indukcijom da ovako definisana funkcija R ispunjava uslove funkcije profinjavanja.

Baza indukcije

(R1) $R(G, \pi, ()) = F(G, \pi, ()) \leq \pi$

(R2) Tvrđenje trivijalno važi zato što je () prazan niz

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi^g, ()^g) = F(G^g, \pi^g, ()^g) = F(G, \pi, ())^g = R(G, \pi, ())^g$

Induktivni korak Pretpostavimo da tvrđenje važi za ν.

(R1) $R(G,\pi,\nu\|w) = F(G, I(R(G,\pi,\nu),w),\nu\|w) \leq I(R(G,\pi,\nu),w) \leq R(G,\pi,\nu) \leq \pi$

(R2) $R(G,\pi,\nu\|w) \leq I(R(G,\pi,\nu),w)$ pa je w ćelija bojenja $R(G,\pi,\nu\|w)$. Ako je $v \in \nu$, onda je v ćelija $R(G,\pi,\nu)$, pa je ćelija i bojenja $R(G,\pi,\nu\|w)$ jer je $R(G,\pi,\nu\|w) \leq R(G,\pi,\nu)$.

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g,\pi^g,(\nu\|w)^g) = F(G^g, I(R(G^g,\pi^g,\nu^g),w^g),(\nu\|w)^g) = F(G^g, I(R(G,\pi,\nu)^g,w^g),(\nu\|w)^g) = F(G^g, I(R(G,\pi,\nu),w)^g,(\nu\|w)^g) = F(G, I(R(G,\pi,\nu),w),(\nu\|w))^g = R(G,\pi,\nu\|w)^g$.

□

Funkcija I definisana u prethodnoj lemi naziva se funkcijom *individualizacije*. Primetimo da je za funkciju I moguće uzeti bilo koje preslikavanje koje ispunjava pokazana svojstva (I1-3).

Kako bismo definisali konkretnu funkciju profinjavanja, potrebno je još da odaberemo preslikavanje F. U tu svrhu uvodimo pojam *ekvitabilnog bojenja*.

Definicija. Označimo sa $\psi(G,u,W) = \sum_{w\in W}\psi(G,u,w)$ broj grana grafa G koje povezuju čvor u i skup čvorova W. Particija $\sim$ skupa čvorova V je *ekvitabilna* ako za svaki par čvorova u i v takvih da je $u \sim v$ i svaku klasu C particije $\sim$ važi $\psi(G,u,C) = \psi(G,v,C)$. Bojenje π je *ekvitabilno* ako je particija $\sim_\pi$ ekvitabilna.

Lema 6. *Za proizvoljno bojenje π grafa G postoji jedinstvena najgrublja particija $\sim_\gamma$ koja je ekvitabilna i finija od $\sim_\pi$.*

Dokaz. Očigledno postoji bar jedna ekvitabilna particija finija od $\sim_\pi$; diskretna particija ispunjava te uslove.

Neka su $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$ dve takve particije. Definišimo $\sim_\gamma$ kao tranzitivno zatvorenje unije particija $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$, odnosno $u \sim_\gamma v \iff x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \cdots \sim_\cup x_k$ za neke $u = x_1, x_2, \ldots, x_k = v$ pri čemu je $u \sim_\cup v \iff u \sim_\alpha v \vee u \sim_\beta v$.

Ovako definisano $\sim_\gamma$ je relacija ekvivalencije grublja od $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$. Pokažimo da je i ekvitabilna.

Neka je $u \sim_\alpha v$ i neka je C proizvoljna klasa iz $\sim_\gamma$. Kako je $\sim_\alpha$ finije od $\sim_\gamma$, to je $C = \bigcup_{i=1}^n A_i$ za neke klase $A_1,\ldots,A_n$ particije $\sim_\alpha$, pa je $\psi(G,u,C) = \sum_{i=1}^n \psi(G,u,A_i)$. Kako je α ekvitabilno, to je dalje jednako $\sum_{i=1}^n \psi(G,v,A_i) = \psi(G,v,C)$. Analogno se pokazuje i za $\sim_\beta$, pa važi $u \sim_\cup v \implies \psi(G,u,C) =$

$\psi(G, v, C)$. Konačno, ako je $u \sim_\gamma v$, onda je $u = x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \cdots \sim_\cup x_n = v$, pa je $\psi(G, u, C) = \psi(G, x_1, C) = \psi(G, x_2, C) = \cdots = \psi(G, x_n, C) = \psi(G, v, C)$. $\square$

Ovim smo pokazali da postoji najgrublje ekvitabilno bojenje finije od π određeno do na raspored ćelija. Definišimo onda funkciju $F(G, \pi, \nu)$ kao rezultat izvršavanja algoritma određivanja jednog takvog bojenja.

Algoritam 2 Profinjavanje bojenja

```
procedure Refine(G, π, ν)
    α ← ∅
    if ν = ν'‖w then
        push(α, {w})
    else
        push(α, C) za sve C ∈ π
    while α ≠ ∅ do
        W ← pop(α)
        for C ∈ π do
            π, C_1, ..., C_k, s ← Refine_cell(G, π, π(C), t_v = ψ(G, v, W))
            if C ∈ α then
                remove(α, C)
                push(α, C_i) za sve 1 ≤ i ≤ k
            else
                push(α, C_i) za sve 1 ≤ i ≤ k, i ≠ s
    return π
```

Potrebno je da procedure koje modifikuju strukturu α budu implementirane na način koji garantuje invarijantnost na imenovanje čvorova. Ovo se jednostavno postiže bilo kojom implementacijom koja ne zavisi od sadržaja elemenata unutar skupa α poput steka ili reda, ili opštije implementacijom koja zavisi jedino od svojstava elemenata invarijantnih na imenovanje čvorova.

Teorema 4. *Neka je γ bojenje dobijeno izvršavanjem algoritma profinjavanja bojenja za ulaz (G, π, ν) u obojenom grafu (G, π_0). Tada γ ispunjava uslove leme 6.*

Dokaz. Označimo sa ξ particiju koja ispunjava uslove leme 6. Dokažimo indukcijuom po i da je $\xi \leq \sim_{\pi_i}$ gde π_i predstavlja bojenje π nakon i izvršenih koraka spoljne petlje algoritma. Iz ovoga će slediti $\xi \leq \sim_\gamma$.

Baza indukcije Po definiciji ξ je $\xi \leq \sim_\pi$.

Induktivni korak Neka je $\xi \leq \sim_{\pi_j}$ za sve $j \leq i$. Tada je svaka ćelija C svakog bojenja π_j, $j \leq i$ unija nekih klasa particije ξ, pa to važi i za ćeliju W odabranu u liniji 8. Neka su x i y proizvoljni elementi iste klase particije ξ. Tada je $\psi(x, W) = \psi(y, W)$, pa oni ne mogu biti razdvojeni nakon izvršavanja koraka spoljne petlje. Prema tome je $\xi \leq \sim_{\pi_{i+1}}$.

Neka je C ćelija nekog bojenja i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ćelije dobijene netrivijalnim profinjavanjem C u odnosu na neku ćeliju W ili individualizacijom ćelije C. Možemo formirati šumu (skup stabala) čiji su čvorovi ćelije na sledeći način:

1. Koren svakog stabla šume je jedna ćelija bojenja π_0 ako je $\nu = ()$, odnosno $R(G, \pi_0, \nu')$ ako je $\nu = \nu' \| w$.

2. Deca čvora C su $\{C_1, \ldots, C_k\}$.

Pokažimo da je γ ekvitabilno. Dokaz izvodimo iz dva dela. Prvo, pokažimo da važi sledeće tvrđenje. Ako je ćelija C prilikom izvršavanja algoritma dodata u α u liniji 4, 6, 13 ili 15 (u oznaci $C \in \alpha$), tada se ona može predstaviti kao disjunktna unija nekih ćelija $W_1, \ldots, W_m \in \mathcal{W}$ gde W predstavlja skup svih ćelija uklonjenih iz α linijom 8 algoritma. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla, odozdo naviše.

Baza indukcije Ukoliko je $C \in \mathcal{W}$, tvrđenje važi trivijalno.

Induktivni korak Kako je po završetku izvršavanja algoritma α prazan skup, C je moralo biti uklonjeno. Kako C nije uklonjeno linijom 8, moralo je biti uklonjeno linijom 12. U tom slučaju je $C = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_k$ i $C_1, \ldots, C_k$ su dodate u α linijom 13. Po induktivnoj hipotezi se svaki od $C_1, \ldots, C_k$ može predstaviti kao disjunktna unija skupova iz $\mathcal{W}$, pa to važi i za C.

Sada, definišimo $\beta = \{C \in \mathcal{P}(V) \mid \forall x, y\ \gamma(x) = \gamma(y) \implies \psi(x, C) = \psi(y, C)\}$. Jasno je da je $\mathcal{W} \subseteq \beta$. Prema prethodno pokazanom je onda i $\alpha \subseteq \beta$. Pokažimo da za svaku ćeliju C u šumi važi da je $C \in \beta$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla, odozgo naniže.

Baza indukcije Neka je C koren nekog stabla šume.

1° Ako je $\nu = ()$, važi $C \in \beta$ jer je dodato u α u liniji 6 algoritma.

2° Ako je $\nu = \nu' \| w$, bojenje $R(G, \pi_0, \nu')$ je ekvitabilno, pa kako je $\gamma \leq R(G, \pi_0, \nu')$, sve njegove ćelije su u β, a samim tim je i C.

Induktivni korak Neka je $C \in \beta$ i $C = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_k$.

1° Ako je $C \in \alpha$, onda su i $C_1, \ldots, C_k \in \alpha \subseteq \beta$.

2° Ako je $C \notin \alpha$, onda su $C_1, \ldots, C_{s-1}, C_{s+1}, \ldots, C_k \in \alpha \subseteq \beta$. Tada je $\psi(G, x, C_s) = \psi(G, x, C) - \sum_{1 \leq i \leq k, i \neq s} \psi(G, x, C_i)$, pa je i $C_s \in \beta$.

Kako su sve ćelije šume u β, to su i sve ćelije bojenja γ, pa je γ ekvitabilno. □

Teorema 5. *Neka je ν list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Tada je ukupna vremenska složenost određivanja svih $R(G, \pi, [\nu]_i)$ u klasi $O(n^2 \log n)$, pri čemu je n broj čvorova grafa.*

Dokaz. Pretpostavimo da su operacije `push`, `pop` i `remove` složenosti $O(1)$. Za fiksno W i C broj koraka jedne iteracije unutrašnje petlje je $|C||W| + |C| \log |C| + k \leq |C||W| + |C|(1 + \log |C|)$ za određivanje vrednosti t_v za svaki čvor ćelije C, izvršavanje profinjavanja ćelije C i dodavanje svih potrebnih C_i u α. Dakle, za fiksno W je broj koraka unutrašnje petlje manji ili jednak $\sum_{C \in \pi}(|C||W| + |C|(1 + \log |C|)) \leq \sum_{C \in \pi}(|C||W| + |C|(1 + \log n)) = n|W| + n(1 + \log n)$. Odatle je broj koraka za određivanje $R(G, \pi, [\nu]_i)$ najviše $\sum_{W \in \mathcal{W}_i}(n|W| + n(1 + \log n)) = n \sum_{W \in \mathcal{W}_i} |W| + |\mathcal{W}_i| n(1 + \log n)$ gde je $\mathcal{W}_i$ skup svih ćelija na osnovu kojih je vršeno profinjavanje prilikom određivanja $R(G, \pi, [\nu]_i)$, odnosno svih ćelija W iz linije 8 algoritma. Ukupna složenost svih profinjavanja je onda $\sum_{i=1}^{|\nu|}(n \sum_{W \in \mathcal{W}_i} |W| + |\mathcal{W}_i| n(1 + \log n)) = O(n \sum_{W \in \mathcal{W}} |W| + |\mathcal{W}| n \log n)$ pri čemu je $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\nu|} \mathcal{W}_i$.

Neka je C ćelija nekog bojenja i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ćelije dobijene netrivijalnim profinjavanjem C u odnosu na neku ćeliju W ili individualizacijom ćelije C. Možemo formirati šumu (skup stabala) čiji su čvorovi ćelije na sledeći način:

1. Koren svakog stabla šume je jedna ćelija bojenja $R(G, \pi, ())$.

2. Deca čvora C su $\{C_1, \ldots, C_k\}$.

Kako su ćelije u listovima šume sve različite jedinične ćelije (jer je bojenje $R(G, \pi, \nu)$ diskretno), ima ih tačno n. Kako svaka ćelija šume ima bar dva deteta, broj ćelija u šumi je manji od $2n$, a pošto ona mora sadržati i sve ćelije iz $\mathcal{W}$, to je $|\mathcal{W}| < 2n$.

Neka je v čvor grafa. Posmatrajmo niz ćelija $\{v\} = C_m \subseteq C_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq C_1$ koje čine put od lista $\{v\}$ do korena odgovarajućeg stabla. Neka je ćelija C_i jedna od ćelija dodatih u α u liniji 4, 6, ili 15 algoritma. Tada je $|C_i| \leq \frac{|C_{i-1}|}{2}$ ako je $i > 1$, odnosno nakon individualizacije ili profinjavanja. Označimo broj ovakvih ćelija sa k_v. Očigledno je $k_v \leq 1 + \log_2 |C_1| \leq 1 + \log_2 n$.

Primetimo da su u svakom koraku algoritma ćelije koje se nalaze u α međusobno disjunktne. Odavde sledi da se istovremeno u α ne mogu naći dve različite ćelije C_i i C_j. Primetimo, takođe, da jedino linije 4, 6, 8 i 15 algoritma mogu da promene tačnost rečenice $\exists i\ C_i \in \alpha$ (12 i 13 ne mogu ukoliko se posmatraju zajedno). Kako je na početku i na kraju izvršavanja algoritma $\alpha = \emptyset$, mora važiti da je broj k_v dodavanja ćelija C_i u α jednak broju uklanjanja ćelija C_i iz α, odnosno broju onih ćelija za koje važi $C_i \in \mathcal{W}$.

Konačno,

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{W \in \mathcal{W}} |W| &= \sum_{W \in \mathcal{W}} \sum_{v \in W} 1 \\
&= \sum_{W \in \mathcal{W}} \sum_{v \in V} \chi_W(v) \\
&= \sum_{v \in V} \sum_{W \in \mathcal{W}} \chi_W(v) \\
&= \sum_{v \in V} k_v \\
&\leq \sum_{v \in V} (1 + \log_2 n) \\
&= n(1 + \log_2 n)
\end{aligned}
$$

□

3.3 Funkcija odabira ciljne ćelije

napisi nesto lol

3.4 Invarijanta stabla

Lema 7. *Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to F$ funkcija invarijantna na imenovanje čvorova, pri čemu je F neki potpuno uređen skup i neka je $bin(G)$ binarna reprezentacija gornjeg trougla matrice povezanosti grafa G. Tada je funkcija definisana sa*

$$
\phi(G, \pi, \nu) = \begin{cases} (f(G, \pi, [\nu]_0), \ldots, f(G, \pi, [\nu]_{|\nu|})), & \textit{ako } \pi_\nu \textit{ nije diskretno} \\ (f(G, \pi, [\nu]_0), \ldots, f(G, \pi, [\nu]_{|\nu|}), bin(G^{\pi_\nu})), & \textit{inače} \end{cases}
$$

invarijanta stabla pri leksikografskom poretku.

Dokaz. Dokažimo da tako definisana funkcija ϕ ispunjava uslove invarijante stabla.

(ϕ1) Za svaki čvor ω podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu)$ važi da je $\phi(G, \pi, \nu) = [\phi(G, \pi, \omega)]_{|\nu|}$. Neka su ν_1 i ν_2 čvorovi stabla takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$. Tada za čvorove $\omega_1 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$ važi $[\phi(G, \pi, \omega_1)]_{|\nu_1|} < [\phi(G, \pi, \omega_2)]_{|\nu_2|}$ pa je po leksikografskom poretku i $\phi(G, \pi, \omega_1) < \phi(G, \pi, \omega_2)$.

(ϕ2) Ako za listove ν_1 i ν_2 važi $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, onda je $bin(G^{\pi_1}) = bin(G^{\pi_2})$, pa je $G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$.

(ϕ3) Neka je $g \in Aut(G, \pi)$ i ν čvor stabla. Tada je $f(G^g, \pi^g, [\nu^g]_i) = f(G^g, \pi^g, [\nu]_i^g) = f(G, \pi, [\nu]_i)$, kao i $bin((G^g)^{R(G^g, \pi^g, \nu^g)}) = bin((G^g)^{\pi_\nu^g}) = bin(G^{\pi_\nu})$, pa su nizovi $\phi(G^g, \pi^g, \nu^g)$ i $\phi(G, \pi, \nu)$ jednaki.

□

Još je potrebno odabrati konkretnu funkciju f. Uvedimo za početak pojam *količničkog grafa.*

Definicija. Neka je (G, π) obojen graf i π ekvitabilno. *Količnički graf* $Q(G, \pi) = (V_Q, d_Q, \psi_Q)$ je struktura takva da je V_Q skup od $|\pi|$ čvorova, $d_Q : V_Q \to \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da je $d_Q(c) = |\pi^{-1}(c)|$ i $\psi_Q : V_Q^2 \to \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da važi $\psi_Q(c_1, c_2) = \psi(G, v, \pi^{-1}(c_2))$ za bilo koje $v \in \pi^{-1}(c_1)$.

Primetimo da je definicija dobra zbog ekvitabilnosti bojenja π. Sledeća lema pokazuje značaj uvedenog pojma.

Lema 8. *Neka je $Q : \mathcal{G}_{eq} \to \mathcal{Q}$ prethodno definisano preslikavanje iz skupa obojenih grafova sa ekvitabilnim bojenjem u skup količničkih grafova. Q je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Pokažimo da je $Q(G^g, \pi^g) = Q(G, \pi)$. Kako je $|\pi^g| = |\pi|$ to su skupovi čvorova količničkih grafova jednaki. Dalje, važi $d_{Q(G^g, \pi^g)}(c) =$

$|(\pi^g)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)| = d_{Q(G,\pi)}(c)$. Konačno, neka je $u' \in (\pi^g)^{-1}(c_1)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\psi_{Q(G^g,\pi^g)}(c_1, c_2) &= \psi(G^g, u', (\pi^g)^{-1}(c_2)) \\
&= \sum_{v' \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u', v') \\
&= \sum_{v^g \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && \text{smena } u' = u^g, v' = v^g \\
&= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && (\pi^g)^{-1}(c_2) = \pi^{-1}(c_2)^g \\
&= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G, u, v) && \psi \text{ je invarijantno} \\
&= \psi(G, u, \pi^{-1}(c_2)) \\
&= \psi_{Q(G,\pi)}(c_1, c_2) && (\pi^g)^{-1}(c_1) = \pi^{-1}(c_1)^g
\end{aligned}$$

Uvedi dekompoziciju za psi, pokaži da je psi invarijantno i dokaži pi na -1 na g je pi na g na -1 (svojstva za psi kod grafa, a ovo kod bojenja i dejstva na bojenje) $\square$

Posledica 2. *Preslikavanje $f_Q : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \mathcal{Q}$ dato sa $f_Q(G, \pi, \nu) = Q(G, R(G, \pi, \nu))$ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Jasno je da za preslikavanje f možemo uzeti upravo ceo količnički graf, pri čemu je uređenje količničkih grafova moguće realizovati uređivanjem njihovih binarnih reprezentacija. Ovakva definicija preslikavanja f u praksi nije korisna zbog velike složenosti neophodne za njeno izračunavanje - potrebno je realizovati ceo količnički graf. Ovo je moguće rešiti posmatranjem manjeg dela količničkog grafa i to bez gubitka korisnih informacija.

Lema 9. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu = \nu' \| w$ čvor stabla različit od korena. Uvedimo oznake $\pi_1 = R(G, \pi, \nu')$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu)$. Neka su $c_1, \ldots, c_k$ boje takve da za sve $1 \leq i \leq k$ važi da $\pi_2^{-1}(c_i)$ nije ćelija bojenja π_1. Označimo sa f_i niz vrednosti $(c_i, d_{Q(G,\pi_2)}(c_i), \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_i, c_1), \ldots, \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_i, c_k))$. Tada je preslikavanje $f(G, \pi, \nu)$ čija je vrednost prazan niz $()$ u slučaju korena ν, odnosno dobijena nadovezivanjem nizova $f_1, \ldots, f_k$ u suprotnom, funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Pretpostavimo da za neko $g \in S_n$ i neke boje c i d važi $\pi_2^{-1}(c) = \pi_1^{-1}(d)$, odnosno da je $\pi_2^{-1}(c)$ ćelija bojenja π_1. Tada je $R(G^g, \pi^g, \nu^g)^{-1}(c) = (\pi_2^g)^{-1}(c) =$

$\pi_2^{-1}(c)^g = \pi_1^{-1}(d)^g = (\pi_1^g)^{-1}(d) = R(G^g, \pi^g, \nu'^g)^{-1}(d)$. Analogno se pokazuje i obrnuta implikacija. Ovim smo pokazali da je niz boja $c_1, \ldots, c_k$ jednak za $f(G^g, \pi^g, \nu^g)$ i $f(G, \pi, \nu)$. Tvrđenje onda jednostavno važi pošto je količnički graf funkcija invarijantna na imenovanje čvorova. □

Lema 10. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu \| w_1$ i $\nu \| w_2$ različiti čvorovi stabla. Tada je $f(G, \pi, \nu \| w_1) = f(G, \pi, \nu \| w_2)$ ako i samo ako $f_Q(G, \pi, \nu \| w_1) = f_Q(G, \pi, \nu \| w_2)$.*

Dokaz. Dokaz implikacije ulevo je trivijalan. Za smer udesno dokazaćemo kontrapoziciju tvrđenja.

Označimo $\pi_1 = R(G, \pi, \nu \| w_1)$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu \| w_2)$. Pretpostavimo da je $Q(G, \pi_1) \neq Q(G, \pi_2)$. Ako je $V_{Q(G,\pi_1)} \neq V_{Q(G,\pi_2)}$ ili $d_{Q(G,\pi_1)} \neq d_{Q(G,\pi_2)}$ onda je skup ćelija bojenja π_1 i π_2 koje nisu ćelije u π_ν različit, pa je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$. Ako je $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ za neke c_1 i c_2 čije odgovarajuće ćelije iz π_1 i π_2 nisu ćelije bojenja π_ν, očigledno je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_2)$ ćelija bojenja π_ν. Tada zbog ekvitabilnosti bojenja π_ν za proizvoljno c_1 važi $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G,\pi_\nu)}(d_1, d_2)$ gde je d_1 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_1) \subseteq \pi_\nu^{-1}(d_1)$, a d_2 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_2) = \pi_\nu^{-1}(d_2)$. Odatle sledi da ne važi $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ jer je $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G,\pi_\nu)}(d_1, d_2) = \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$, a znamo da su u obe jednakosti isti d_1 i d_2 u pitanju jer su $\pi_1, \pi_2 \leq \pi_\nu$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_1)$ ćelija bojenja π_ν. Tada nije $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ zato što po prethodno pokazanom važi $|\pi_1^{-1}(c_1)| \psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = |\pi_1^{-1}(c_2)| \psi_{Q(G,\pi_1)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_2)| \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_1)| \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$.

Dokazati svojstvo $|C_1|\psi(c_1, c_2) = |C_2|\psi(c_2, c_1)$ □

Slozenost.

3.5 Automorfizmi

Prilikom pretrage otkrivaju se automorfizmi koji se dalje koriste za odsecanje. Ako je poznat skup automorfizama $\{g_1, \ldots, g_n\}$, u operaciji odsecanja P_C moguće je primeniti ne samo neki od tih automorfizama, već i proizvoljan automorfizam iz grupe generisane tim skupom.

Operacija odsecanja P_C se primenjuje što je ranije u stablu moguće. Konkretno, neka je $\nu = (v_1, \ldots, v_{|\nu|})$ i neka je k dužina najdužeg zajedničkog prefiksa nizova ν i ν^g za neki automorfizam g. Tada je moguće primeniti operaciju odsecanja

$P_C([\nu]_{k+1}, g)$. Primetimo da g stabilizuje niz $[\nu]_k$, odnosno $g \in \Sigma_{[\nu]_k}$ i da stoga v_{k+1} i v_{k+1}^g pripadaju istoj orbiti tog stabilizatora.

Zbog ovoga je korisno na efikasan način realizovati određivanje stabilizatora (ili nekog njegovog podskupa) i određivanje orbita nekog skupa automorfizama. Pored samog skupa automorfizama čuvaju se podaci koji ovo i omogućavaju.

Neka je $S = \{g_1, \ldots, g_n\}$ skup automorfizama. Definišimo $stab_S(v) = \{i \mid v^{g_i} = v\}$. Grupa automorfizama generisana skupom $S_\nu = \{g_i \mid i \in \bigcap_{1 \leq j \leq k} stab(v_j)\}$ je podgrupa stabilizatora niza $\nu = (v_1, \ldots, v_k)$, odnosno $<S_\nu> \leq \Sigma_\nu^{Aut(G,\pi)}$.

Definišimo $mcr_S(v) = \min \Omega_v^{<S>}$. Neka je ν čvor stabla. Kako je prema prethodno pokazanom P_C moguće primenjivati za bilo koja dva čvora iz iste orbite stabilizatora, možemo odseći pretragu u bilo kom čvoru $\nu \| v$ za koji važi $v \neq mcr_{S_\nu}(v)$.

Prilikom dodavanja novog automorfizma u skup neophodno je ažurirati vrednosti *stab* i *mcr*. Jasno je da je za ažuriranje *stab* dovoljno u odgovarajuće skupove dodati indeks novog automorfizma. Dovršiti

3.6 Pretraga

Generisanje i pretraga stabla realizovani su pretragom u dubinu. Osnovni algoritam generisanja stabla dat je u nastavku.

Algoritam 3 Generisanje stabla pretrage

procedure SEARCH(G, π_0, π, ν)
    $\pi \leftarrow$ Refine(G, π, ν)
    $cell \leftarrow$ Target_cell(π)
    for $v \in cell$ **do**
        Search($G, \pi_0, I(\pi, v), \nu \| v$)

Izračunavanjem invarijante stabla možemo iskoristiti prethodni algoritam za određivanje kanonske forme. Pored toga, poznavanje invarijante stabla omogućava odsecanje operacijom P_A. Tokom obilaska stabla pamti se list ρ čija je vrednost invarijante $\phi(G, \pi_0, \rho)$ najveća među svim do sada obrađenim listovima, odnosno () ukoliko do sada nije obrađen nijedan list. Nakon završenog obilaska stabla čvor ρ je upravo čvor ν^* neophodan za određivanje kanonske forme.

Algoritam 4 Određivanje kanonske forme

procedure SEARCH(G, π_0, π, ν)
    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$
    if $|\rho| \geq |\nu| \wedge \phi(G, \pi_0, \nu) < \phi(G, \pi_0, [\rho]_{|\nu|})$ **then**
        return
    $cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$
    for $v \in cell$ **do**
        $\text{Search}(G, \pi_0, I(\pi, v), \nu \| v)$
    if $cell = \emptyset$ **then**
        if $\rho = () \vee \phi(G, \pi_0, \nu) > \phi(G, \pi_0, \rho)$ **then**
            $\rho \leftarrow \nu$

Kako bi bilo moguće odrediti generatore grupe automorfizama i primeniti operaciju odsecanja P_C neophodno je tokom pretrage otkrivati i pamtiti otkrivene automorfizme. Održava se skup otkrivenih automorfizama S. Jedan od načina da se primeni operacija P_C je da se pretraga rekurzivno pokreće samo za one čvorove odabrane ćelije za koje važi $v = mcr_{S_\nu}(v)$.

Otkrivanje novih automorfizama omogućeno je pamćenjem jednog lista ζ, konkretno prvog otkrivenog lista. Kada se prilikom pretrage otkrije list ν, u slučaju da su ζ i ν ekvivalentni listovi $g = \pi_\zeta^{-1}\pi_\nu$ je otkriven automorfizam i on se dodaje u skup S. Kako se novi automorfizmi otkrivaju samo u listovima ekvivalentnim listu ζ, moguće je u velikoj meri primenjivati operaciju odsecanja P_B. Ovde dolazimo i do drugog načina za primenu operacije P_C. Kako je $\nu^g = \zeta$, g je automorfizam koji stabilizuje $lca(\nu, \zeta)$ (najduži zajednički prefiks za ν i ζ). Ako je njegova dužina $k = |lca(\nu, \zeta)|$, tada je $[\nu]_{k+1}^g = [\zeta]_{k+1}$ i moguće je primeniti operaciju odsecanja $P_C([\nu]_{k+1}, g)$. Ovo je moguće realizovati skokom unazad - povratna vrednost određuje do kog nivoa u pretrazi je potrebno vratiti se.

Na osnovu teoreme 1 nakon završenog obilaska stabla skup S predstavlja skup generatora grupe $Aut(G, \pi_0)$.

Algoritam 5 Određivanje generatora grupe automorfizama

procedure SEARCH(G, π_0, π, ν)
    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$
    if $\zeta \neq () \wedge (|\zeta| < |\nu| \vee \phi(G, \pi_0, \nu) \neq \phi(G, \pi_0, [\zeta]_{|\nu|}))$ **then**
        return $|\nu|$
    $cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$
    $mcr \leftarrow cell$
    for $v \in cell$ **do**
        if $v \in mcr$ **then**
            $b \leftarrow \text{Search}(G, \pi_0, I(\pi, v), \nu \| v)$
            if $|\nu| > b$ **then**
                return b
            $mcr \leftarrow mcr \cap \{v \in V \mid v = mcr_{S_\nu}(v)\}$
    if $cell = \emptyset$ **then**
        if $\zeta = ()$ **then**
            $\zeta \leftarrow \nu$
        $g = \pi_\zeta^{-1} \pi_\nu$
        if $G^g = G$ **then**
            $\text{insert}(S, g)$
            return $|lca(\nu, \zeta)|$
    return $|\nu|$

Konačno, kako bismo iskoristili automorfizme u odsecanju prilikom određivanja kanonske forme, potrebno je da istovremeno vršimo prethodna dva algoritma. Primetimo da je otkrivanje automorfizama sada moguće vršiti i u odnosu na list ρ.

Algoritam 6 Određivanje kanonske forme i grupe automorfizama

procedure SEARCH(G, π_0, π, ν)
$\quad \pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$
$\quad max\_path \leftarrow |\rho| < |\nu| \lor \phi(G, \pi_0, \nu) \geq \phi(G, \pi_0, [\rho]_{|\nu|})$
$\quad aut\_path \leftarrow |\zeta| \geq |\nu| \land \phi(G, \pi_0, \nu) = \phi(G, \pi_0, [\zeta]_{|\nu|})$
$\quad$ **if** $\neg\, max\_path \land \neg\, aut\_path$ **then**
$\quad\quad$ **return** $|\nu|$
$\quad cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$
$\quad mcr \leftarrow cell$
$\quad$ **for** $v \in cell$ **do**
$\quad\quad$ **if** $v \in mcr$ **then**
$\quad\quad\quad b \leftarrow \text{Search}(G, \pi_0, I(\pi, v), \nu \| v)$
$\quad\quad\quad$ **if** $|\nu| > b$ **then**
$\quad\quad\quad\quad$ **return** b
$\quad\quad\quad mcr \leftarrow mcr \cap \{v \in V \mid v = mcr_{S_\nu}(v)\}$
$\quad$ **if** $cell = \emptyset$ **then**
$\quad\quad$ **if** $\rho = () \lor \phi(G, \pi_0, \nu) > \phi(G, \pi_0, \rho)$ **then**
$\quad\quad\quad \rho \leftarrow \nu$
$\quad\quad$ **if** $\zeta = ()$ **then**
$\quad\quad\quad \zeta \leftarrow \nu$
$\quad\quad g = \pi_\zeta^{-1} \pi_\nu$
$\quad\quad$ **if** $G^g \neq G$ **then**
$\quad\quad\quad g = \pi_\rho^{-1} \pi_\nu$
$\quad\quad$ **if** $G^g = G$ **then**
$\quad\quad\quad \text{insert}(S, g)$
$\quad\quad\quad$ **if** $mcr_{S_{lca(\nu,\zeta)}}(v) \neq v$ where $\nu = \nu' \| v$ **then**
$\quad\quad\quad\quad$ **return** $|lca(\nu, \zeta)|$
$\quad\quad\quad$ **return** $|lca(\nu, \rho)|$
$\quad$ **return** $|\nu|$

Mogući su i drugi načini obilaska, pomenuti bfs i traces. Moguće je čuvati više od jednog ζ.

3.7 Invarijanta grafa

U definiciji ekvitabilnog bojenja korišćena je funkcija $\psi(G, u, W) = \sum_{v \in W} \psi(G, u, v)$ koja predstavlja broj grana koje povezuju čvor u sa čvorovima iz skupa W. Možemo primetiti da se stavovi i dokazi koji koriste koncept ekvitabilnosti ne pozivaju na konkretno značenje funkcije ψ, već samo na određena svojstva te funkcije koja nam omogućavaju da uopštimo značenje ekvitabilnog bojenja.

Definicija. Preslikavanje $\psi : \mathcal{G} \times V \times V \to \mathbb{N}$ je *invarijanta grafa* ukoliko za svaki graf G i par čvorova u i v zadovoljava sledeće uslove:

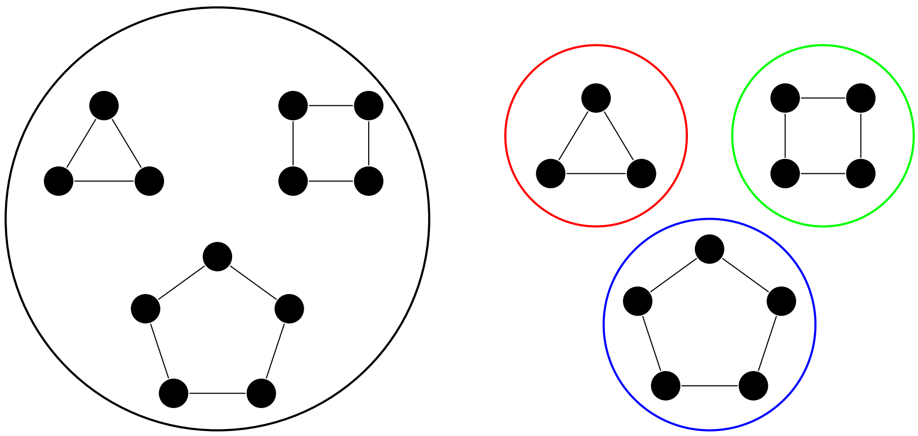
(ψ1) $\psi(G, u, v) = \psi(G, v, u)$

(ψ2) $\psi(G^g, u^g, v^g) = \psi(G, v, u)$ za $g \in S_n$

Onda možemo definisati $\psi(G, u, W) = \sum_{v \in W}\{\psi(G, u, v)\}$ pri čemu sada sumu interpretiramo kao sabiranje multiskupova.

Značaj uvedenog pojma dolazi iz činjenice da je dovoljno jednom, pre izvršavanja algoritma, za uneti graf izračunati odabranu invarijantu. To znači da je jedino povećanje u ukupnoj složenosti celog postupka cena tog pretprocesiranja. Nakon toga, ukoliko je odabrana pogodna invarijanta, moguća je velika ušteda usled moćnije procedure profinjavanja i manjeg stepena grananja stabla pretrage.

Primer 11. *Posmatrajmo (nepovezan) graf sa slike 3.1. Standardna procedura profinjavanja koja koristi matricu povezanosti će kao rezultat vratiti bojenje jednako početnom. Procedura profinjavanja koja koristi invarijantu grafa $d(G, u, v)$ koja predstavlja dužinu najkraćeg puta između čvorova u i v (ili ∞ ako put ne postoji) će odrediti bojenje čije su ćelije tačno orbite čvorova u grupi automorfizama.*



Slika 3.1: Levo je prikazana particija usled standardne procedure profinjavanja. Količnički graf sadrži jedan čvor c i važi $\psi(c, c) = 2$. Desno je prikazana particija usled profinjavanja sa invarijantom najkraćeg puta. Količnički graf sadrži tri čvora a, b i c i važi $\psi(a, a) = \{0, 1, 1\}$, $\psi(b, b) = \{0, 1, 1, 2\}$ i $\psi(c, c) = \{0, 1, 1, 2, 2\}$, dok su $\psi(x, y)$ za različite x i y multiskupovi sa različitim brojem beskonačnosti.

Glava 4

Rezultati testiranja

Glava 5

Zaključak

Bibliografija

[1] Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM Journal on Computing*, 16:486–502, 1987.

[2] Petar Petrović and Mika Mikić. Naučni rad. In Miloje Milojević, editor, *Konferencija iz matematike i računarstva*, 2015.

Biografija autora

Biografija.