UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

matf.png

Ivan Drecun

ALGORITMI ZA ISPITIVANJE IZOMORFIZMA GRAFOVA

master rad

Beograd, 2021.

Mentor:

dr Filip Marić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miodrag Živković, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vesna Marniković, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Mami, tati i dedi

Naslov master rada: Algoritmi za ispitivanje izomorfizma grafova

Rezime: Apstrakt rada.

Ključne reči: ključne, reči

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Glava 2

Opšti algoritam

U ovoj glavi predstavljeni su osnovni matematički pojmovi neophodni za dalje razumevanje konstrukcije opšteg algoritma za određivanje kanonske forme grafa. Uvedeni su pojmovi *bojenja* i *obojenog grafa*, nakon čega je prikazana konstrukcija stabla pretrage koja leži u osnovi algoritma. Nad stablom pogodno je definisana invarijanta koja omogućava određivanje grupe automorfizama grafa i kanonske forme. Na kraju su prikazani i mehanizmi odsecanja pretrage koji omogućavaju praktično izvršavanje algoritma u razumnom vremenu.

2.1 Osnovni pojmovi

Obojen graf

Graf $G = (V, E)$ je uređeni par konačnog *skupa čvorova* V i *skupa grana* $E \subseteq \binom{V}{2}$. U nastavku pretpostavljamo da je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki prirodan broj $n > 0$. Označimo skup svih grafova sa n čvorova sa $\mathcal{G}_n$ (nadalje $\mathcal{G}$).

Bojenje grafa G je surjekcija $\pi : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ za neki prirodan broj $k > 0$. Označimo skup svih bojenja grafa sa n čvorova sa Π_n (nadalje Π).

Broj k zovemo brojem boja i označavamo ga sa $|\pi|$. Ćelija bojenja π boje c je skup svih čvorova te boje, odnosno $\pi^{-1}(c)$ za $c \in \{1, 2, ..., k\}$. Bojenje je diskretno ukoliko je $|\pi| = n$ i tada je π permutacija skupa V.

Bojenje π_1 je finije od bojenja π_2 (u oznaci $\pi_1 \leq \pi_2$) ukoliko za sve $v, w \in V$ važi implikacija $\pi_2(v) < \pi_2(w) \implies \pi_1(v) < \pi_1(w)$.

Označimo sa $\sim_\pi$ binarnu relaciju na skupu čvorova definisanu sa $u \sim_\pi v \iff \pi(u) = \pi(v)$. U pitanju je relacija ekvivalencije (particija) čije klase odgovaraju upravo ćelijama bojenja π.

Particija α je finija od particije β (u oznaci $\alpha \leq \beta$) ukoliko za sve $v, w \in V$ važi implikacija $v\alpha w \implies v\beta w$. Primetimo da za bojenja π_1 i π_2 važi $\pi_1 \leq \pi_2 \implies \sim_{\pi_1} \leq \sim_{\pi_2}$, ali ne i obrnuto.

Obojen graf je uređeni par (G, π) gde je π jedno bojenje grafa G.

Dejstvo grupe

Neka je G grupa i S skup na kom je definisano dejstvo grupe G označeno sa s^g za $s \in S$ i $g \in G$. Orbita elementa s je skup $\Omega_s^G = \{s^g \mid g \in G\}$. Stabilizator elementa s je skup $\Sigma_s^G = \{g \in G \mid s^g = s\}$ koji čini jednu podgrupu od G.

Neka S_n označava simetričnu grupu stepena n. Na skupu čvorova V definisano je dejstvo grupe sa $v^g = g(v)$ za $v \in V$ i $g \in S_n$. Definiciju dejstva grupe permutacija možemo proširiti i na složenije strukture:

- $W^g = \{w^g \mid w \in W\}$ za skup $W \subseteq V$
- $w^g = (v_1^g, v_2^g, \ldots, v_k^g)$ za uređenu k-torku w
- $G^g = (V, E')$ za graf G i $E' = \{e^g \mid e \in E\}$
- Ako je π bojenje, π^g je bojenje za koje važi $\pi^g(v^g) = \pi(v)$ odnosno $\pi^g = \pi g^{-1}$
- $(G, \pi)^g = (G^g, \pi^g)$ za obojen graf (G, π)

Izomorfizam

Obojeni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) su *izomorfni* (u oznaci $(G_1, \pi_1) \cong (G_2, \pi_2)$) ukoliko postoji $g \in S_n$ tako da je $(G_1, \pi_1) = (G_2, \pi_2)^g$. Takvo g zovemo *izomorfizam*.

Automorfizam obojenog grafa (G, π) je izomorfizam tog grafa sa samim sobom, odnosno $g \in S_n$ za koje važi $(G, \pi) = (G, \pi)^g$. Skup automorfizama grafa (G, π) označavamo sa $Aut(G, \pi)$. Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup $Aut(G, \pi)$ čini *grupu automorfizama*.

Kanonska forma

Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \to S$ preslikavanje iz skupa svih obojenih grafova u proizvoljan skup S. Kažemo da je f *funkcija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)$.

Neformalno, to znači da vrednost funkcije f ne zavisi od konkretnog imenovanja čvorova grafa, već samo od njegove unutrašnje strukture.

Ako na skupu S postoji definisano dejstvo grupe S_n, kažemo da je f *transformacija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)^g$.

Definicija. *Kanonska forma* je preslikavanje $\mathcal{C} : \mathcal{G} \times \Pi \to \mathcal{G} \times \Pi$ koje ispunjava sledeće uslove:

($\mathcal{C}1$) Za svaki obojen graf (G, π) važi $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$

($\mathcal{C}2$) $\mathcal{C}$ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova

2.2 Stablo pretrage

Označimo sa V^* skup svih konačnih nizova elemenata skupa V. Ako je $\nu \in V^*$ sa $|\nu|$ označavamo dužinu niza ν. Ako je $\nu = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in V^*$ i $w \in V$, onda $\nu \| w$ označava niz $(v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$. Za $0 \leq s \leq k$ prefiks niza ν dužine s označavamo sa $[\nu]_s = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$. Uređenje $\leq$ na skupu V^* predstavlja leksikografski poredak.

Čvorovi stabla pretrage predstavljeni su nizovima elemenata skupa V, pri čemu korenu stabla odgovara prazan niz. U nastavku definišemo funkcije na osnovu kojih ćemo definisati pravila grananja u stablu.

Definicija. *Funkcija profinjavanja* je bilo koje preslikavanje $R : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \Pi$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(R1) $R(G, \pi, \nu) \leq \pi$

(R2) Ako je $v \in \nu$, onda je $\{v\}$ ćelija bojenja $R(G, \pi, \nu)$

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi^g, \nu^g) = R(G, \pi, \nu)^g$

Definicija. *Funkcija odabira ciljne ćelije* je bilo koje preslikavanje $T : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \mathcal{P}(V)$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(T1) Ako je $R(G, \pi, \nu)$ diskretno, onda je $T(G, \pi, \nu) = \emptyset$

(T2) Ako $R(G, \pi, \nu)$ nije diskretno, onda je $T(G, \pi, \nu)$ nejedinična ćelija od $R(G, \pi, \nu)$

(T3) Za svako $g \in S_n$ važi $T(G^g, \pi^g, \nu^g) = T(G, \pi, \nu)^g$

Kako je graf fiksan, ove funkcije možemo smatrati funkcijama čvorova stabla. Funkcija profinjavanja obezbeđuje postojanje bojenja pridruženog svakom čvoru stabla (koje postaje finije kako se spuštamo niz stablo). Funkcija odabira ciljne ćelije nam omogućava da odaberemo skup čvorova grafa koji nam služi za konstrukciju dece tog čvora u stablu. Treći uslov u obe definicije govori da su u pitanju transformacije invarijantne na imenovanje čvorova.

Definicija. *Stablo pretrage* $\mathcal{T}(G, \pi)$ određeno je sledećim uslovima:

($\mathcal{T}$1) Koren stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ je prazan niz ()

($\mathcal{T}$2) Ako je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$, njegova deca u stablu su $\{\nu \,\|w \mid w \in T(G, \pi, \nu)\}$

Dejstvo grupe S_n na stablo definiše se slično kao za bilo koju drugu strukturu. Naredna lema pokazuje da je ovako definisano stablo invarijantno na imenovanje čvorova grafa.

Lema 1. *Za svaki obojen graf* (G, π) *i svako* $g \in S_n$ *važi* $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) = \mathcal{T}(G, \pi)^g$.

Dokaz. Dokažimo da za svaki čvor ν stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ važi da je ν^g čvor stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla.

> **Baza indukcije** Prazan niz je koren stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$, pa tvrđenje trivijalno važi.
>
> **Induktivni korak** Pretpostavimo da tvrđenje važi za čvor ν. Neka je $\nu\|w$ dete čvora ν za neko $w \in T(G, \pi, \nu)$. Tada je $(\nu\|w)^g = \nu^g\|w^g$, ali kako važi $w^g \in T(G, \pi, \nu)^g =_{(T3)} T(G^g, \pi^g, \nu^g)$ to je $\nu^g\|w^g$ dete čvora ν^g u stablu $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$.

Time smo dokazali da je stablo $\mathcal{T}(G, \pi)^g$ podstablo od $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ ($\mathcal{T}(G, \pi)^g \subseteq \mathcal{T}(G^g, \pi^g)$). Prema prethodno dokazanom važi $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)^{g^{-1}} \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)$, pa primenom g na obe strane konačno dobijamo $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)^g$. □

Posledica 1. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i neka* $\mathcal{T}(G, \pi, \nu)$ *označava njegovo podstablo sa korenom u* ν. *Ako je* $g \in Aut(G, \pi)$, *onda je* ν^g *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i važi* $\mathcal{T}(G, \pi, \nu^g) = \mathcal{T}(G, \pi, \nu)^g$.

Lema 2. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i* $\pi_\nu = R(G, \pi, \nu)$. *Tada je* $Aut(G, \pi_\nu) = \Sigma_\nu^{Aut(G,\pi)}$.

Dokaz. Na osnovu uslova (R2) bilo koji automorfizam obojenog grafa (G, π_ν) stabilizuje ν. Sa druge strane, neka $g \in Aut(G, \pi)$ stabilizuje ν. Tada po (R3) važi $\pi_\nu^g = R(G, \pi, \nu)^g = R(G, \pi, \nu) = \pi_\nu$, pa je $g \in Aut(G, \pi_\nu)$. $\square$

2.3 Invarijanta stabla

Definicija. *Invarijanta stabla* je preslikavanje $\phi : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to F$ za neki potpuno uređen skup F koje za sve obojene grafove (G, π) i različite čvorove $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ ispunjava sledeće uslove:

(ϕ1) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \phi_0, \nu_2)$, onda za sve $\omega_1 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$ važi $\phi(G, \pi, \omega_1) < \phi(G, \pi, \omega_2)$

(ϕ2) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da su $\pi_1 = R(G, \pi, \nu_1)$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu_2)$ diskretna bojenja, onda je $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2) \implies G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$

(ϕ3) ϕ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova grafa

Listovi ν_1 i ν_2 su *ekvivalentni* ako i samo ako $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2)$.

U nastavku ćemo kroz dve teoreme prikazati značaj ovako definisane invarijante stabla. Označimo za proizvoljan čvor stabla ν njegovo bojenje dobijeno funkcijom profinjavanja sa $\pi_\nu = R(G, \pi, \nu)$.

Lema 3. *Neka je $g \in Aut(G, \pi)$ i listovi ν_1 i ν_2 takvi da je $\nu_1^g = \nu_2$. Tada su ν_1 i ν_2 ekvivalentni i $g = \pi_{\nu_2}^{-1} \pi_{\nu_1}$.*

Dokaz. Na osnovu svojstva (ϕ3) invarijante stabla i činjenice da je g automorfizam sledi $\phi(G, \pi, \nu_1) =_{(\phi_3)} \phi(G^g, \pi^g, \nu_1^g) =_{g \in Aut(G,\pi)} \phi(G, \pi, \nu_1^g) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, odnosno ν_1 i ν_2 su ekvivalentni. Dalje, važi $\pi_{\nu_2}^{-1} \pi_{\nu_1} = \pi_{\nu_1^g}^{-1} \pi_{\nu_1} =_{(R3)} (\pi_{\nu_1}^g)^{-1} \pi_{\nu_1} = (\pi_{\nu_1} g^{-1})^{-1} \pi_{\nu_1} = g \pi_{\nu_1}^{-1} \pi_{\nu_1} = g$. $\square$

Lema 4. *Neka su α i β diskretna bojenja finija od bojenja π. Tada je $\pi^\alpha = \pi^\beta$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo nizom sitnih tvrđenja.

1. $id \leq \pi^\alpha$

   Neka su x i y proizvoljni. Važi $\pi^\alpha(x) < \pi^\alpha(y) \iff \pi(\alpha^{-1}(x)) < \pi(\alpha^{-1}(y))$, pa kako je $\alpha \leq \pi$ sledi $\alpha(\alpha^{-1}(x)) < \alpha(\alpha^{-1}(y))$ odnosno $x < y$. Kontrapozicijom dobijamo i $x \leq y \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y)$.

2. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = [n, m]$ za neko $n, m \in \mathbb{N}$ gde je $[n, m] = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\}$

   Za svako x, y, z važi $x \leq y \leq z \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y) \leq \pi^\alpha(z)$, pa ako je $\pi^\alpha(x) = \pi^\alpha(z) = c$, onda je i $\pi^\alpha(y) = c$.

3. $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n)$ ili $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n) + 1$

   Neka je $\pi^\alpha(n+1) \neq \pi^\alpha(n)$. Tada je $n + 1 \geq n \implies \pi^\alpha(n+1) \geq \pi^\alpha(n)$, pa je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n)$ jer su po pretpostavci različiti. Pretpostavimo da je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n) + 1$. Tada postoji m takvo da je $\pi^\alpha(m) = \pi^\alpha(n) + 1$, ali iz $\pi^\alpha(n) < \pi^\alpha(m) < \pi^\alpha(n+1) \implies n < m < n+1$ sledi kontradikcija.

4. $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)|$

   Važi da je $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = \{m \mid \pi^\alpha(m) = c\} = \{m^\alpha \mid \pi^\alpha(m^\alpha) = c\} = \{m^\alpha \mid \pi(m) = c\} = \pi^{-1}(c)^\alpha$. Odatle je $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)^\alpha| = |\pi^{-1}(c)|$.

5. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c)$

   Dokaz izvodimo indukcijom po c.

   Baza indukcije Kako je $1 \leq x$ za sve x, onda iz $id \leq \pi^\alpha$ sledi $\pi^\alpha(1) \leq \pi^\alpha(x)$ za sve x pa je $\pi^\alpha(1) = 1$. Dalje, kako je $|(\pi^\alpha)^{-1}(1)| = |\pi^{-1}(1)|$, mora važiti $(\pi^\alpha)^{-1}(1) = [1, |\pi^{-1}(1)|]$. Analogno se pokazuje i za β.

   Induktivni korak Neka je po induktivnoj pretpostavci $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c) = [n, m]$. Tada je $\pi^\alpha(m+1) \neq \pi^\alpha(m)$, pa je $\pi^\alpha(m+1) = \pi^\alpha(m)+1$ i $m+1$ je najmanje u $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1)$. Odatle važi $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1) = [m+1, m + |\pi^{-1}(c+1)|]$. Analogno se pokazuje i za β.

□

Teorema 1. *Za svaki list ν važi $Aut(G, \pi) = \{\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \mid \nu$ i ω su ekvivalentni$\}$.*

Dokaz. Neka je $g \in Aut(G, \pi)$. Tada je po posledici 1 ν^g list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Po prethodno dokazanoj lemi 3 su ν i ν^g ekvivalentni i $g = \pi_{\nu^g}^{-1}\pi_\nu$ što je element skupa sa desne strane jednakosti. Sa druge strane, ako su ν i ω ekvivalentni, onda je $G^{\pi_\nu} = G^{\pi_\omega}$, pa je $\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \in Aut(G, \pi)$. □

Prethodna teorema pokazuje da je otkrivanjem svih čvorova ekvivalentnih jednom čvoru moguće odrediti grupu automorfizama datog grafa. Naravno, ovakav način određivanja grupe automorfizama nije veoma efikasan pošto se grupa generiše član po član. Ovo se može poboljšati odsecanjem pretrage o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Definicija. Neka je ν^* list stabla $\mathcal{T}(G,\pi)$ u kom invarijanta $\phi(G,\pi,\nu)$ dostiže maksimum. *Kanonska forma* obojenog grafa (G,π) je funkcija $\mathcal{C}(G,\pi) = (G,\pi)^{\pi_{\nu^*}}$.

Primetimo da zbog uslova ($\phi 2$) definicija ne zavisi od izbora lista ν^*. Naredna teorema opravdava naziv i oznaku funkcije.

Teorema 2. *Funkcija $\mathcal{C}(G,\pi)$ je kanonska forma.*

Dokaz. Dokazujemo da ovako definisana funkcija ispunjava uslove kanonske forme za svaki obojen graf (G,π).

($\mathcal{C}1$) Kako je $\mathcal{C}(G,\pi) = (G,\pi)^{\pi_{\nu^*}}$ to je $\mathcal{C}(G,\pi) \cong (G,\pi)$ za izomorfizam π_{ν^*}.

($\mathcal{C}2$) Za svako $g \in S_n$ i svako $\nu \in \mathcal{T}(G,\pi)$ važi $\nu^g \in \mathcal{T}(G,\pi)^g = \mathcal{T}(G^g,\pi^g)$ kao i $\phi(G^g,\pi^g,\nu^g) = \phi(G,\pi,\nu)$, pa je ν^{*g} list u kom invarijanta stabla $\mathcal{T}(G^g,\pi^g)$ dostiže maksimalnu vrednost. Odatle sledi $\mathcal{C}(G^g,\pi^g) = (G^g,\pi^g)^{R(G^g,\pi^g,\nu^{*g})} = (G^g,\pi^g)^{\pi^g_{v^*}} = (G,\pi)^{\pi_{v^*}} = \mathcal{C}(G,\pi)$ pa je $\mathcal{C}$ funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.

$\square$

2.4 Odsecanje pretrage

Stablo pretrage može biti veoma veliko, pa pretraga kompletnog stabla nije poželjna. To možemo rešiti uvođenjem tri različite operacije odsecanja.

- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G,\pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G,\pi,\nu_1) > \phi(G,\pi,\nu_2)$. Operacija $P_A(\nu_1,\nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G,\pi,\nu_2)$.

- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G,\pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G,\pi,\nu_1) \neq \phi(G,\pi,\nu_2)$. Operacija $P_B(\nu_1,\nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G,\pi,\nu_2)$.

- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G,\pi)$ takvi da je $\nu_1 < \nu_2$ i $\nu_1^g = \nu_2$ za neko $g \in Aut(G,\pi)$. Operacija $P_C(\nu_1,g)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G,\pi,\nu_2)$.

Naredna teorema opravdava uvođenje ovih operacija odsecanja i pokazuje da one ne narušavaju rezultate teorema o određivanju grupe automorfizama i kanonske forme iz prethodnog odeljka.

Teorema 3. *Neka je* (G, π) *obojen graf.*

1. *Neka je nad stablom* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *izvršen proizvoljan niz operacija* P_A *i* P_C*. Tada u dobijenom stablu postoji bar jedan list* ν *takav da je* $\phi(G, \pi, \nu) = \phi(G, \pi, \nu^*)$.

2. *Neka je* ν_0 *list stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i neka je nad stablom izvršen proizvoljan niz operacija* $P_B(\nu_1, \nu_2)$ *i* P_C *gde je* $|\nu_2| > |\nu_0|$ *ili* $\phi(G, \pi, \nu_2) \neq \phi(G, \pi, [\nu_0]_{|\nu_2|})$ *i neka su* $g_1, \ldots, g_k$ *svi automorfizmi korišćeni u izvršenim operacijama* P_C*. Tada je grupa automorfizama* $Aut(G, \pi)$ *generisana skupom* $\{g_1, \ldots, g_k\} \cup \{g \in Aut(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen}\}$.

Dokaz. Dokažimo za početak nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Nijedna operacija P_A ne uklanja listove u kojima je vrednost invarijante maksimalna. Pretpostavimo suprotno. Neka je ν_1 list u kom invarijanta stabla dostiže maksimum i neka je ν_1' predak od ν_1. Operacija $P_A(\nu_2', \nu_1')$ uklanja ν_1' ako je $\phi(G, \pi, \nu_1') < \phi(G, \pi, \nu_2')$, pa po svojstvu $(\phi 1)$ za proizvoljan list ν_2 u $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2')$ važi $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je vrednost invarijante maksimalna u ν_1.

Nijedna operacija P_B ne uklanja nijedan list ν ekvivalentan listu ν_0 (iz drugog dela teoreme). Iz pretpostavke teoreme nijedna operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ ne uklanja čvor ν_2 takav da je $\phi(G, \pi, [\nu_0]_{|\nu_2|}) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, pa samim tim ne uklanja nijedan čvor $[\nu]_s$ za $0 \leq s \leq |\nu|$.

Nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji među ekvivalentnim listovima. Štaviše, nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji list iz $\Omega_\nu^{<g_1, \ldots, g_k>}$ za bilo koje ν. Neka je bez umanjenja opštosti ν leksikografski najmanji list u svojoj orbiti. Operacija $P_C(\omega, g)$ uklanja čvor ω^g ako je $\omega < \omega^g$, pa je $[\nu]_{|\omega|} \neq \omega^g$ pošto je ili $[\nu]_{|\omega|} < \omega$ ili su ω i $[\nu]_{|\omega|}$ iz različitih orbita.

1. Na osnovu dokazanih svojstava operacija P_A i P_C iz stabla se ne uklanja leksikografski najmanji list ν ekvivalentan listu ν^*.

2. Ako je $g \in Aut(G, \pi)$, onda na osnovu dokazanih svojstva operacija P_B i P_C važi da iz stabla nije uklonjen leksikografski najmanji list oblika ν_0^{hg} za neko $h \in < g_1, \ldots, g_k >$, izborom $\omega = \nu_0^g$. Odatle sledi da je $hg \in < \{g_1, \ldots, g_k\} \cup \{g \in Aut(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen}\} >$, pa je i g element generisane grupe.

□

Glava 3

Realizacija algoritma

3.1 Reprezentacija podataka

Permutacija

Permutacija $p \in S_n$ predstavljena je pomoću dva vektora. Vektor `pi` je definisan tako da je `pi[u] = v` onda kada je $p(u) = v$. Vektor `ip` definisan je analogno za inverznu permutaciju, odnosno `ip[u] = v` onda kada je $p^{-1}(u) = v$. Primer

Bojenje

Bojenje $\pi \in \Pi_n$ predstavljeno je permutacijom `pi` i vektorom `cells`. Permutacija `pi` predstavlja niz koji se dobija nadovezivanjem ćelija $\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(k)$ redom, pri čemu su elementi jedne ćelije uređeni rastuće. Preciznije, `pi` predstavlja permutaciju p takvu da je $p(u) \in \pi^{-1}(c)$ ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{c-1} |\pi^{-1}(i)| \leq u < \sum_{i=1}^{c} |\pi^{-1}(i)|$ i da ako važi $\pi(u) = \pi(v)$ onda je $u < v \iff p^{-1}(u) < p^{-1}(v)$.

Vektor `cells` predstavlja niz vrednosti $cells$ dužine n koji upotpunjava permutaciju p podacima o granicama ćelija bojenja π. Ako pozicija u predstavlja početak nove ćelije, tada je $cells_u$ takvo da ta ćelija obuhvata tačno pozicije $[u, cells_u)$ permutacije p. Formalno,

$$cells_u = \begin{cases} u + |\pi^{-1}(\pi(p(u)))|, & \text{ako je } u = 1 \text{ ili } \pi(p(u)) \neq \pi(p(u-1)) \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primer

Primetimo da je u slučaju diskretnog bojenja π permutacija p predstavljena sa `pi` inverz permutacije π. Primer

Jedna od ključnih operacija nad bojenjem je profinjavanje jedne ćelije. Neka je $\pi^{-1}(c)$ jedna ćelija bojenja π i neka je svakom čvoru v te ćelije dodeljena vrednost t_v. Profinjavanje ćelije podrazumeva formiranje bojenja $\pi' \leq \pi$ takvog da za u i v iz $\pi^{-1}(c)$ važi $\pi'(u) < \pi'(v) \iff t_u < t_v$, dok za sve ostale parove u i v važi $\pi'(u) = \pi'(v) \iff \pi(u) = \pi(v)$.

Algoritam 1 Profinjavanje ćelije

procedure REFINE_CELL(G, π, c, t)
  $\pi' \leftarrow \pi$
  $k \leftarrow 1$
  for $t' \in \text{sorted}(\{t_v \mid v \in \pi^{-1}(c)\})$ **do**
    $C_k \leftarrow \{v \in \pi^{-1}(c) \mid t_v = t'\}$
    $\pi'(v) \leftarrow c + k - 1$ za sve $v \in C_k$
    $k \leftarrow k + 1$
  $\pi'(v) \leftarrow \pi(v) + k - 1$ za sve v takve da $\pi(v) > c$
  $s \leftarrow$ indeks prvog najvećeg skupa među $C_{i, 1 \leq i \leq k}$
  return $\pi', C_1, \ldots, C_k, s$

Primetimo da je složenost ovog algoritma $O(|C| \log |C|)$ gde je $C = \pi^{-1}(c)$ zbog sortiranja čvorova na osnovu vrednosti t_v.

Graf

Dodati u implementaciji podršku za obojen graf, pa dati opis.

3.2 Funkcija profinjavanja

Lema 5. *Neka je preslikavanje $I : \Pi \times V \to \Pi$ definisano sa*

$$I(\pi, v)(w) = \begin{cases} \pi(w), & \textit{ako je } \pi(w) < \pi(v) \textit{ ili } w = v \\ \pi(w) + 1, & \textit{inače} \end{cases}$$

i neka je $F : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \Pi$ transformacija invarijantna na imenovanje čvorova takva da je $F(G, \pi, \nu) \leq \pi$. Tada je preslikavanje definisano sa

$$\begin{aligned} R(G, \pi, ()) &= F(G, \pi, ()) \\ R(G, \pi, \nu \| w) &= F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), \nu \| w) \end{aligned}$$

funkcija profinjavanja.

Dokaz. Pokažimo prvo nekoliko svojstava ovako definisanog preslikavanja I.

(I1) Za proizvoljno bojenje π i čvor u važi da je $I(\pi, u) \leq \pi$. To važi zato što ako je $\pi(v) < \pi(w)$ onda nije istovremeno $I(\pi, u)(v) = \pi(v) + 1$ i $I(\pi, u)(w) = \pi(w)$ jer to povlači da je $\pi(v) \geq \pi(u)$ i $\pi(w) \leq \pi(u)$, odnosno da je $\pi(w) \leq \pi(v)$ što je kontradikcija. U svim ostalim slučajevima iz pretpostavke sledi $I(\pi, u)(v) < I(\pi, u)(w)$.

(I2) $\{v\}$ je ćelija bojenja $I(\pi, v)$. Ako je $\pi(w) = \pi(v)$ i $w \neq v$ onda je $I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)(v) + 1$, a kako je $I(\pi, v) \leq \pi$ onda je $\pi(v) \neq \pi(w) \iff I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ pa je $I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ za sve $w \neq v$.

(I3) I je transformacija invarijantna na imenovanje čvorova. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Tada je $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) \iff I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi^g(w^g) \iff \pi^g(w^g) < \pi^g(v^g) \vee w^g = v^g \iff \pi(w) < \pi(v) \vee w = v \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w)$. Slično je i $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) + 1 \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w) + 1$, odnosno $I(\pi^g, v^g)(w^g) = I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)^g(w^g)$.

Dokažimo sada indukcijom da ovako definisana funkcija R ispunjava uslove funkcije profinjavanja.

Baza indukcije

(R1) $R(G, \pi, ()) = F(G, \pi, ()) \leq \pi$

(R2) Tvrđenje trivijalno važi zato što je () prazan niz

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi^g, ()^g) = F(G^g, \pi^g, ()^g) = F(G, \pi, ())^g = R(G, \pi, ())^g$

Induktivni korak Pretpostavimo da tvrđenje važi za ν.

(R1) $R(G, \pi, \nu \| w) = F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), \nu \| w) \leq I(R(G, \pi, \nu), w) \leq R(G, \pi, \nu) \leq \pi$

(R2) $R(G, \pi, \nu \| w) \leq I(R(G, \pi, \nu), w)$ pa je w ćelija bojenja $R(G, \pi, \nu \| w)$. Ako je $v \in \nu$, onda je v ćelija $R(G, \pi, \nu)$, pa je ćelija i bojenja $R(G, \pi, \nu \| w)$ jer je $R(G, \pi, \nu \| w) \leq R(G, \pi, \nu)$.

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi^g, (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G^g, \pi^g, \nu^g), w^g), (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G, \pi, \nu)^g, w^g), (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G, \pi, \nu), w)^g, (\nu \| w)^g) = F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), (\nu \| w))^g = R(G, \pi, \nu \| w)^g$.

$\square$

Funkcija I definisana u prethodnoj lemi naziva se funkcijom *individualizacije*. Primetimo da je za funkciju I moguće uzeti bilo koje preslikavanje koje ispunjava pokazana svojstva (I1-3).

Kako bismo definisali konkretnu funkciju profinjavanja, potrebno je još da odaberemo preslikavanje F. U tu svrhu uvodimo pojam *ekvitabilnog bojenja*.

Definicija. Označimo sa $\psi(G,u,W) = \sum_{w\in W}\psi(G,u,w)$ broj grana grafa G koje povezuju čvor u i skup čvorova W. Particija $\sim$ skupa čvorova V je *ekvitabilna* ako za svaki par čvorova u i v takvih da je $u \sim v$ i svaku klasu C particije $\sim$ važi $\psi(G,u,C) = \psi(G,v,C)$. Bojenje π je *ekvitabilno* ako je particija $\sim_\pi$ ekvitabilna.

Lema 6. *Za proizvoljno bojenje π grafa G postoji jedinstvena najgrublja particija $\sim_\gamma$ koja je ekvitabilna i finija od $\sim_\pi$.*

Dokaz. Očigledno postoji bar jedna ekvitabilna particija finija od $\sim_\pi$; diskretna particija ispunjava te uslove.

Neka su $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$ dve takve particije. Definišimo $\sim_\gamma$ kao tranzitivno zatvorenje unije particija $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$, odnosno $u \sim_\gamma v \iff x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \cdots \sim_\cup x_k$ za neke $u = x_1, x_2, \ldots, x_k = v$ pri čemu je $u \sim_\cup v \iff u \sim_\alpha v \vee u \sim_\beta v$.

Ovako definisano $\sim_\gamma$ je relacija ekvivalencije grublja od $\sim_\alpha$ i $\sim_\beta$. Pokažimo da je i ekvitabilna.

Neka je $u \sim_\alpha v$ i neka je C proizvoljna klasa iz $\sim_\gamma$. Kako je $\sim_\alpha$ finije od $\sim_\gamma$, to je $C = \bigcup_{i=1}^n A_i$ za neke klase $A_1, \ldots, A_n$ particije $\sim_\alpha$, pa je $\psi(G,u,C) = \sum_{i=1}^n \psi(G,u,A_i)$. Kako je α ekvitabilno, to je dalje jednako $\sum_{i=1}^n \psi(G,v,A_i) = \psi(G,v,C)$. Analogno se pokazuje i za $\sim_\beta$, pa važi $u \sim_\cup v \implies \psi(G,u,C) = \psi(G,v,C)$. Konačno, ako je $u \sim_\gamma v$, onda je $u = x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \cdots \sim_\cup x_n = v$, pa je $\psi(G,u,C) = \psi(G,x_1,C) = \psi(G,x_2,C) = \cdots = \psi(G,x_n,C) = \psi(G,v,C)$. □

Ovim smo pokazali da postoji najgrublje ekvitabilno bojenje finije od π određeno do na raspored ćelija. Definišimo onda funkciju $F(G,\pi,\nu)$ kao rezultat izvršavanja algoritma određivanja jednog takvog bojenja.

Algoritam 2 Profinjavanje bojenja

procedure REFINE(G, π, ν)
  $\alpha \leftarrow \emptyset$
  if $\nu = \nu' \| w$ **then**
    push(α, $\{w\}$)
  else
    push(α, C) za sve $C \in \pi$
  while $\alpha \neq \emptyset$ **do**
    $W \leftarrow$ pop(α)
    for $C \in \pi$ **do**
      $\pi, C_1, \ldots, C_k, s \leftarrow$ Refine_cell($G, \pi, \pi(C), t_v = \psi(G, v, W)$)
      if $C \in \alpha$ **then**
        remove(α, C)
        push(α, C_i) za sve $1 \leq i \leq k$
      else
        push(α, C_i) za sve $1 \leq i \leq k, i \neq s$
  return π

Potrebno je da procedure koje modifikuju strukturu α budu implementirane na način koji garantuje invarijantnost na imenovanje čvorova. Ovo se jednostavno postiže bilo kojom implementacijom koja ne zavisi od sadržaja elemenata unutar skupa α poput steka ili reda, ili opštije implementacijom koja zavisi jedino od svojstava elemenata invarijantnih na imenovanje čvorova.

Teorema 4. *Neka je $\gamma = F(G, \pi, \nu)$ rezultujuće bojenje izvršavanja algoritma profinjavanja za ulaz (G, π, ν). Tada γ ispunjava uslove leme 6 i F je transformacija invarijantna na imenovanje čvorova, odnosno $F(G^g, \pi^g, \nu^g) = F(G, \pi, \nu)^g$ za proizvoljno $g \in S_n$.*

Dokaz. □

Dokaz...

Teorema 5. *Neka je ν list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Tada je ukupna vremenska složenost određivanja svih $R(G, \pi, [\nu]_i)$ u klasi $O(n^2 \log n)$, pri čemu je n broj čvorova grafa.*

Dokaz. Pretpostavimo da su operacije `push`, `pop` i `remove` složenosti $O(1)$. Za fiksno W i C broj koraka jedne iteracije unutrašnje petlje je $|C||W| + |C| \log |C| + k \leq |C||W| + |C|(1 + \log |C|)$ za određivanje vrednosti t_v za svaki čvor ćelije C, izvršavanje profinjavanja ćelije C i dodavanje svih potrebnih C_i u α. Dakle, za fiksno W je broj koraka unutrašnje petlje manji ili jednak $\sum_{C \in \pi}(|C||W| + |C|(1 + \log |C|)) \leq$

$\sum_{C\in\pi}(|C||W| + |C|(1 + \log n)) = n|W| + n(1 + \log n)$. Odatle je broj koraka za određivanje $R(G, \pi, [\nu]_i)$ najviše $\sum_{W\in\mathcal{W}_i}(n|W| + n(1 + \log n)) = n\sum_{W\in\mathcal{W}_i}|W| + |\mathcal{W}_i|n(1 + \log n)$ gde je $\mathcal{W}_i$ skup svih ćelija na osnovu kojih je vršeno profinjavanje prilikom određivanja $R(G, \pi, [\nu]_i)$. Ukupna složenost svih profinjavanja je onda $\sum_{i=1}^{|\nu|}(n\sum_{W\in\mathcal{W}_i}|W| + |\mathcal{W}_i|n(1 + \log n)) = O(n\sum_{W\in\mathcal{W}}|W| + |\mathcal{W}|n\log n)$ pri čemu je $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\nu|}\mathcal{W}_i$.

Neka je C ćelija nekog bojenja i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ćelije dobijene netrivijalnim profinjavanjem C u odnosu na neku ćeliju W ili individualizacijom ćelije C. Možemo formirati šumu (skup stabala) čiji su čvorovi ćelije na sledeći način:

1. Koren svakog stabla šume je jedna ćelija bojenja $R(G, \pi, ())$.

2. Deca čvora C su $\{C_1, \ldots, C_k\}$.

Kako su ćelije u listovima šume sve različite jedinične ćelije (jer je bojenje $R(G, \pi, \nu)$ diskretno), ima ih tačno n. Kako svaka ćelija šume ima bar dva deteta, broj ćelija u šumi je manji od $2n$, a pošto ona mora sadržati i sve ćelije iz $\mathcal{W}$, to je $|\mathcal{W}| < 2n$.

Neka je v čvor grafa. Posmatrajmo niz ćelija $\{v\} = C_m \subseteq C_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq C_1$ koje čine put od lista $\{v\}$ do korena odgovarajućeg stabla. Neka je ćelija C_i jedna od ćelija dodatih u α u `else` grani poslednjeg grananja ili prilikom individualizacije. Tada je $|C_i| \leq \frac{|C_{i-1}|}{2}$ kad je $i > 1$. Označimo sa $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ sve takve ćelije. Tada za svako j postoji tačno jedan indeks $i_j \leq l < i_{j+1}$ takav da je $C_l \in \mathcal{W}$. To je zato što ćelija koja sadrži v mora biti izvađena iz α i zato što ćelija koja sadrži v ne može biti izvađena iz α pre nego što je neka takva ćelija dodata u α. Očigledno je $k \leq 1 + \log_2|C_1| \leq 1 + \log_2 n$. Odavde sledi $\sum_{W\in\mathcal{W}}|W| = \sum_{W\in\mathcal{W}}\sum_{v\in W} 1 = \sum_{W\in\mathcal{W}}\sum_{v\in V}\chi_W(v) = \sum_{v\in V}\sum_{W\in\mathcal{W}}\chi_W(v) \leq \sum_{v\in V}(1 + \log_2 n) = n(1 + \log_2 n)$.

□

3.3 Funkcija odabira ciljne ćelije

3.4 Invarijanta stabla

Lema 7. *Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to F$ funkcija invarijantna na imenovanje čvorova, pri čemu je F neki potpuno uređen skup i neka je $bin(G)$ binarna reprezentacija* *gornjeg trougla matrice povezanosti grafa G. Tada je funkcija definisana sa*

$$\phi(G,\pi,\nu) = \begin{cases} (f(G,\pi,[\nu]_0),\ldots,f(G,\pi,[\nu]_{|\nu|})), & \textit{ako } \pi_\nu \textit{ nije diskretno} \\ (f(G,\pi,[\nu]_0),\ldots,f(G,\pi,[\nu]_{|\nu|}), bin(G^{\pi_\nu})), & \textit{inače} \end{cases}$$

invarijanta stabla pri leksikografskom poretku.

Dokaz. Dokažimo da tako definisana funkcija ϕ ispunjava uslove invarijante stabla.

(ϕ1) Za svaki čvor ω podstabla $\mathcal{T}(G,\pi,\nu)$ važi da je $\phi(G,\pi,\nu) = [\phi(G,\pi,\omega)]_{|\nu|}$. Neka su ν_1 i ν_2 čvorovi stabla takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G,\pi,\nu_1) < \phi(G,\pi,\nu_2)$. Tada za čvorove $\omega_1 \in \mathcal{T}(G,\pi,\nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G,\pi,\nu_2)$ važi $[\phi(G,\pi,\omega_1)]_{|\nu_1|} < [\phi(G,\pi,\omega_2)]_{|\nu_2|}$ pa je po leksikografskom poretku i $\phi(G,\pi,\omega_1) < \phi(G,\pi,\omega_2)$.

(ϕ2) Ako za listove ν_1 i ν_2 važi $\phi(G,\pi,\nu_1) = \phi(G,\pi,\nu_2)$, onda je $bin(G^{\pi_1}) = bin(G^{\pi_2})$, pa je $G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$.

(ϕ3) Neka je $g \in Aut(G,\pi)$ i ν čvor stabla. Tada je $f(G^g,\pi^g,[\nu^g]_i) = f(G^g,\pi^g,[\nu]_i^g) = f(G,\pi,[\nu]_i)$, kao i $bin((G^g)^{R(G^g,\pi^g,\nu^g)}) = bin((G^g)^{\pi_\nu^g}) = bin(G^{\pi_\nu})$, pa su nizovi $\phi(G^g,\pi^g,\nu^g)$ i $\phi(G,\pi,\nu)$ jednaki.

□

Još je potrebno odabrati konkretnu funkciju f. Uvedimo za početak pojam *količničkog grafa*.

Definicija. Neka je (G,π) obojen graf i π ekvitabilno. *Količnički graf* $Q(G,\pi) = (V_Q, d_Q, \psi_Q)$ je struktura takva da je V_Q skup od $|\pi|$ čvorova, $d_Q : V_Q \to \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da je $d_Q(c) = |\pi^{-1}(c)|$ i $\psi_Q : V_Q^2 \to \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da važi $\psi_Q(c_1,c_2) = \psi(G,v,\pi^{-1}(c_2))$ za bilo koje $v \in \pi^{-1}(c_1)$.

Primetimo da je definicija dobra zbog ekvitabilnosti bojenja π. Sledeća lema pokazuje značaj uvedenog pojma.

Lema 8. *Neka je $Q : \mathcal{G}_{eq} \to \mathcal{Q}$ prethodno definisano preslikavanje iz skupa obojenih grafova sa ekvitabilnim bojenjem u skup količničkih grafova. Q je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Pokažimo da je $Q(G^g,\pi^g) = Q(G,\pi)$. Kako je $|\pi^g| = |\pi|$ to su skupovi čvorova količničkih grafova jednaki. Dalje, važi $d_{Q(G^g,\pi^g)}(c) =$

$|(\pi^g)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)| = d_{Q(G,\pi)}(c)$. Konačno, neka je $u' \in (\pi^g)^{-1}(c_1)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\psi_{Q(G^g,\pi^g)}(c_1, c_2) &= \psi(G^g, u', (\pi^g)^{-1}(c_2)) \\
&= \sum_{v' \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u', v') \\
&= \sum_{v^g \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && \text{smena } u' = u^g, v' = v^g \\
&= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && (\pi^g)^{-1}(c_2) = \pi^{-1}(c_2)^g \\
&= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G, u, v) && \psi \text{ je invarijantno} \\
&= \psi(G, u, \pi^{-1}(c_2)) \\
&= \psi_{Q(G,\pi)}(c_1, c_2) && (\pi^g)^{-1}(c_1) = \pi^{-1}(c_1)^g
\end{aligned}$$

Uvedi dekompoziciju za psi, pokaži da je psi invarijantno i dokaži pi na -1 na g je pi na g na -1 (svojstva za psi kod grafa, a ovo kod bojenja i dejstva na bojenje) $\square$

Posledica 2. *Preslikavanje $f_Q : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \mathcal{Q}$ dato sa $f_Q(G, \pi, \nu) = Q(G, R(G, \pi, \nu))$ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Jasno je da za preslikavanje f možemo uzeti upravo ceo količnički graf, pri čemu je uređenje količničkih grafova moguće realizovati uređivanjem njihovih binarnih reprezentacija. Ovakva definicija preslikavanja f u praksi nije korisna zbog velike složenosti neophodne za njeno izračunavanje - potrebno je realizovati ceo količnički graf. Ovo je moguće rešiti posmatranjem manjeg dela količničkog grafa i to bez gubitka korisnih informacija.

Lema 9. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu = \nu' \| w$ čvor stabla različit od korena. Uvedimo oznake $\pi_1 = R(G, \pi, \nu')$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu)$. Neka su $c_1, \ldots, c_k$ boje takve da za sve $1 \le i \le k$ važi da $\pi_2^{-1}(c_i)$ nije ćelija bojenja π_1. Označimo sa f_i niz vrednosti $(c_i, d_{Q(G,\pi_2)}(c_i), \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_i, c_1), \ldots, \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_i, c_k))$. Tada je preslikavanje $f(G, \pi, \nu)$ čija je vrednost prazan niz $()$ u slučaju korena ν, odnosno dobijena nadovezivanjem nizova $f_1, \ldots, f_k$ u suprotnom, funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Pretpostavimo da za neko $g \in S_n$ i neke boje c i d važi $\pi_2^{-1}(c) = \pi_1^{-1}(d)$, odnosno da je $\pi_2^{-1}(c)$ ćelija bojenja π_1. Tada je $R(G^g, \pi^g, \nu^g)^{-1}(c) = (\pi_2^g)^{-1}(c) =$

$\pi_2^{-1}(c)^g = \pi_1^{-1}(d)^g = (\pi_1^g)^{-1}(d) = R(G^g, \pi^g, \nu'^g)^{-1}(d)$. Analogno se pokazuje i obrnuta implikacija. Ovim smo pokazali da je niz boja $c_1, \ldots, c_k$ jednak za $f(G^g, \pi^g, \nu^g)$ i $f(G, \pi, \nu)$. Tvrđenje onda jednostavno važi pošto je količnički graf funkcija invarijantna na imenovanje čvorova. □

Lema 10. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu \| w_1$ i $\nu \| w_2$ različiti čvorovi stabla. Tada je $f(G, \pi, \nu \| w_1) = f(G, \pi, \nu \| w_2)$ ako i samo ako $f_Q(G, \pi, \nu \| w_1) = f_Q(G, \pi, \nu \| w_2)$.*

Dokaz. Dokaz implikacije ulevo je trivijalan. Za smer udesno dokazaćemo kontrapoziciju tvrđenja.

Označimo $\pi_i = R(G, \pi, \nu \| w_i)$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu \| w_2)$. Pretpostavimo da je $Q(G, \pi_1) \neq Q(G, \pi_2)$. Ako je $V_{Q(G,\pi_1)} \neq V_{Q(G,\pi_2)}$ ili $d_{Q(G,\pi_1)} \neq d_{Q(G,\pi_2)}$ onda je skup ćelija bojenja π_1 i π_2 koje nisu ćelije u π_ν različit, pa je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$. Ako je $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ za neke c_1 i c_2 čije odgovarajuće ćelije iz π_1 i π_2 nisu ćelije bojenja π_ν, očigledno je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_2)$ ćelija bojenja π_ν. Tada zbog ekvitabilnosti bojenja π_ν za proizvoljno c_1 važi $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G,\pi_\nu)}(d_1, d_2)$ gde je d_1 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_1) \subseteq \pi_\nu^{-1}(d_1)$, a d_2 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_2) = \pi_\nu^{-1}(d_2)$. Odatle sledi da ne važi $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ jer je $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G,\pi_\nu)}(d_1, d_2) = \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$, a znamo da su u obe jednakosti isti d_1 i d_2 u pitanju jer su $\pi_1, \pi_2 \leq \pi_\nu$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_1)$ ćelija bojenja π_ν. Tada nije $\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$ zato što po prethodno pokazanom važi $|\pi_1^{-1}(c_1)|\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_1, c_2) = |\pi_1^{-1}(c_2)|\psi_{Q(G,\pi_1)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_2)|\psi_{Q(G,\pi_2)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_1)|\psi_{Q(G,\pi_2)}(c_1, c_2)$.

Dokazati svojstvo $|C_1|\psi(c_1, c_2) = |C_2|\psi(c_2, c_1)$ □

3.5 Automorfizmi

3.6 Pretraga

3.7 Invarijanta grafa

Glava 4

Rezultati testiranja

Glava 5

Zaključak

Bibliografija

[1] Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM Journal on Computing*, 16:486–502, 1987.

[2] Petar Petrović and Mika Mikić. Naučni rad. In Miloje Milojević, editor, *Konferencija iz matematike i računarstva*, 2015.

Biografija autora

Biografija.