

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



Ivan Drecun

ALGORITMI ZA ISPITIVANJE IZOMORFIZMA
GRAFOVA

master rad

Beograd, 2021.

Mentor:

dr Filip MARIĆ, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miodrag ŽIVKOVIĆ, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vesna MARNIKOVIĆ, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: _____

Mami, tati i dedi

Naslov master rada: Algoritmi za ispitivanje izomorfizma grafova

Rezime: Apstrakt rada.

Ključne reči: ključne, reči

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Opšti algoritam	2
2.1	Osnovni pojmovi	2
2.2	Stablo pretrage	7
2.3	Invarijanta stabla	9
2.4	Odsecanje pretrage	13
3	Realizacija algoritma	15
3.1	Reprezentacija podataka	15
3.2	Funkcija odabira ciljne ćelije	17
3.3	Funkcija profinjavanja	17
3.4	Invarijanta stabla	23
3.5	Automorfizmi	27
3.6	Pretraga	28
3.7	Invarijanta grafa	31
4	Rezultati testiranja	33
5	Zaključak	34
	Bibliografija	35

Glava 1

Uvod

Glava 2

Opšti algoritam

U ovoj glavi predstavljeni su osnovni matematički pojmovi neophodni za dalje razumevanje konstrukcije opšteg algoritma za određivanje kanonske forme grafa. Uvedeni su pojmovi *bojenja* i *obojenog grafa*, nakon čega je prikazana konstrukcija stabla pretrage koja leži u osnovi algoritma. Nad stablom pogodno je definisana invarijanta koja omogućava određivanje grupe automorfizama grafa i kanonske forme. Na kraju su prikazani i mehanizmi odsecanja pretrage koji omogućavaju praktično izvršavanje algoritma u razumnom vremenu.

2.1 Osnovni pojmovi

Permutacija i particija

Permutacija konačnog skupa A je bilo koja bijekcija $g : A \rightarrow A$. Skup svih takvih permutacija označavamo sa S_A . Specijalno, ako je $A = \{1, 2, \dots, n\}$ za neki prirodan broj n , tada koristimo oznaku S_n . Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup S_n je grupa koju zovemo *simetrična grupa stepena n* . Identičnu permutaciju označavamo sa id , a inverz permutacije g sa g^{-1} . Permutaciju g možemo zapisati kao preslikavanje, npr. $g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ili kao kompoziciju ciklusa $(1\ 3)(2\ 4)$.

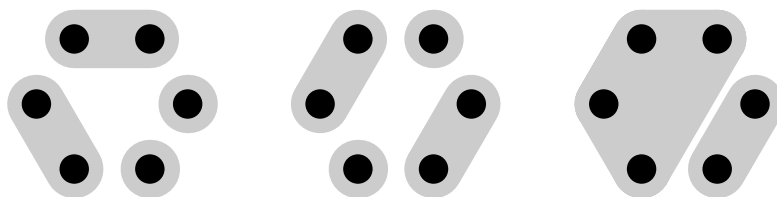
Particija konačnog skupa A je skup nepraznih podskupova od A takav da se svaki element skupa A nalazi u tačno jednom od tih podskupova. Te podskupove zovemo *klasama* ili *ćelijama* particije. Relacija \approx na skupu A je *relacija ekvivalencije* ukoliko je refleksivna, simetrična i tranzitivna. *Klasa ekvivalencije* elementa $a \in A$ je skup $C_a = \{b \in A \mid a \approx b\}$. Skup klasa ekvivalencije relacije \approx čini jednu

particiju $P = A/\approx$ skupa A . Slično, svaka particija P je skup klasa ekvivalencije jedne relacije ekvivalencije \approx_P . Zbog ovoga u daljem tekstu poistovećujemo pojmove particije skupa A i relacije ekvivalencije na skupu A .

Neka su α i β particije skupa A . Particija α je *finija* od particije β (u oznaci $\alpha \leq \beta$) ukoliko za sve $a, b \in A$ važi $a \approx_\alpha b \implies a \approx_\beta b$. Ovaj uslov je ekvivalentan tome da je svaka klasa particije α podskup neke klase particije β .

Neka su α i β particije skupa A . Particija $\alpha \vee \beta$ definisana kao tranzitivno zatvorenje relacije $a \approx b \iff a \approx_\alpha b \vee a \approx_\beta b$, odnosno $a \approx_{\alpha \vee \beta} b \iff x_1 \approx x_2 \approx \dots \approx x_k$ za neke $a = x_1, x_2, \dots, x_k = b$ naziva se *supremum particija α i β* . Primetimo da su particije α i β finije od $\alpha \vee \beta$.

Primer 1. Na slici 2.1 prikazane su dve particije skupa od šest elemenata, kao i njihov supremum. Sa slike se vidi i da su obe particije finije od supremuma.



Slika 2.1: Particije (levo) i supremum (desno).

Obojen graf

Bojenje skupa A je surjekcija $\pi : A \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ za neki prirodan broj $k > 0$. Označimo skup svih bojenja skupa sa n elemenata sa Π_n (nadalje Π). Broj k zovemo *brojem boja* i označavamo ga sa $|\pi|$. *Ćelija bojenja π* boje c je skup svih čvorova te boje, odnosno $\pi^{-1}(c)$ za $c \in \{1, 2, \dots, k\}$. Bojenje je *diskretno* ukoliko je $|\pi| = n$ i tada je π permutacija skupa A .

Označimo sa \sim_π binarnu relaciju na skupu A definisanu sa $a \sim_\pi b \iff \pi(a) = \pi(b)$. U pitanju je jedinstvena particija čije klase odgovaraju upravo ćelijama bojenja π . Nazivamo je *particija bojenja π* . Primetimo da nije moguće poistovetiti bojenje i particiju zato što za proizvoljnu particiju bojenje čije ćelije odgovaraju klasama particije nije jedinstveno - postoji ih onoliko koliko je različitih rasporeda klasa. Bojenje možemo poistovetiti sa *uređenom particijom*, odnosno particijom čije su klase uređene u niz.

Bojenje π_1 je *finije* od bojenja π_2 (u oznaci $\pi_1 \leq \pi_2$) ukoliko za sve $a, b \in A$ važi implikacija $\pi_2(a) < \pi_2(b) \implies \pi_1(a) < \pi_1(b)$. Primetimo da za bojenja π_1 i π_2 važi $\pi_1 \leq \pi_2 \implies \sim_{\pi_1} \leq \sim_{\pi_2}$, ali ne i obrnuto.

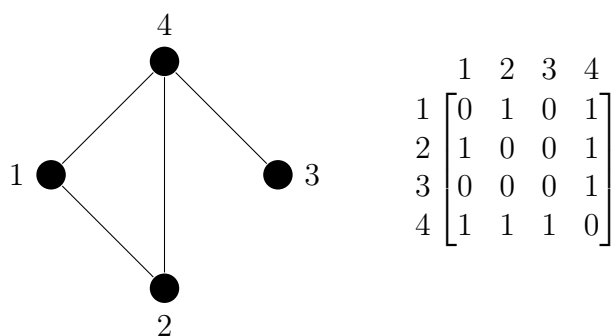
Primer 2. Neka je $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ jedno bojenje. Koristan je zapis po ćelijama bojenja $\pi = [2 \ 5 \mid 4 \ 3 \ 6 \mid 1]$, pri čemu redosled brojeva unutar ćelija nije bitan. Bojenje $\pi_1 = [5 \mid 2 \mid 4 \ 6 \mid 3 \mid 1]$ je finije od π . Bojenje $\pi_2 = [2 \mid 3 \mid 4 \ 6 \mid 5 \mid 1]$ nije finije od π iako važi da je svaka njegova ćelija podskup neke ćelije bojenja π . To je moguće videti iz toga što se bojenje π može dobiti spajanjem susednih ćelija bojenja π_1 , ali ne spajanjem susednih ćelija bojenja π_2 .

Graf $G = (V, E)$ je uređeni par konačnog skupa čvorova V i skupa grana $E \subseteq \binom{V}{2}$. U nastavku pretpostavljamo da je $V = \{1, 2, \dots, n\}$ za neki prirodan broj $n > 0$. Označimo skup svih grafova sa n čvorova sa \mathcal{G}_n (nadalje \mathcal{G}).

Matrica povezanosti grafa je preslikavanje $\psi : \mathcal{G} \times V \times V \rightarrow \{0, 1\}$ takvo da važi $\psi(G, u, v) = 1 \iff (u, v) \in E$. Binarna reprezentacija $\text{bin}(G)$ grafa G je binarni niz dobijen nadovezivanjem redova gornjeg trougla matrice povezanosti grafa G .

Obojen graf je uređeni par (G, π) gde je π jedno bojenje skupa čvorova V grafa G . Kažemo i da je π bojenje grafa G .

Primer 3. Na slici 2.2 je prikazan jedan graf G zajedno sa njegovom matricom povezanosti. Njegova binarna reprezentacija je $\text{bin}(G) = 101011$.



Slika 2.2: Graf i matrica povezanosti.

Dejstvo grupe

Neka je nad grupom G i skupom S definisano dejstvo. Dejstvo elementa grupe $g \in G$ na element skupa $s \in S$ označavamo sa gs ili s^g , pri čemu ako su $g_1, g_2 \in G$ tada je $(g_1g_2)s = g_1(g_2s)$ odnosno $s^{g_1g_2} = (s^{g_2})^{g_1}$. Orbita elementa s je skup $\Omega_s^G = \{s^g \mid g \in G\}$. Stabilizator elementa s je skup $\Sigma_s^G = \{g \in G \mid s^g = s\}$ koji čini jednu podgrupu od G .

Na skupu čvorova V definisano je dejstvo grupe S_n sa $v^g = g(v)$ za $v \in V$ i $g \in S_n$. Definiciju dejstva grupe permutacija možemo proširiti i na složenije strukture:

- $W^g = \{w^g \mid w \in W\}$ za skup $W \subseteq V$
- $w^g = (v_1^g, v_2^g, \dots, v_k^g)$ za uređenu k -torku w
- $G^g = (V, E')$ za graf G i $E' = \{e^g \mid e \in E\}$
- Ako je π bojenje, π^g je bojenje za koje važi $\pi^g(v^g) = \pi(v)$ odnosno $\pi^g = \pi g^{-1}$
- $(G, \pi)^g = (G^g, \pi^g)$ za obojen graf (G, π)

Primetimo da za ćeliju bojenja $\pi^{-1}(c)$ važi $\pi^{-1}(c)^g = (\pi^g)^{-1}(c)$. To je zato što $(\pi^g)^{-1}(c) = \{v \mid \pi^g(v) = c\} = \{w^g \mid \pi^g(w^g) = c\} = \{w^g \mid \pi(w) = c\} = \pi^{-1}(c)^g$.

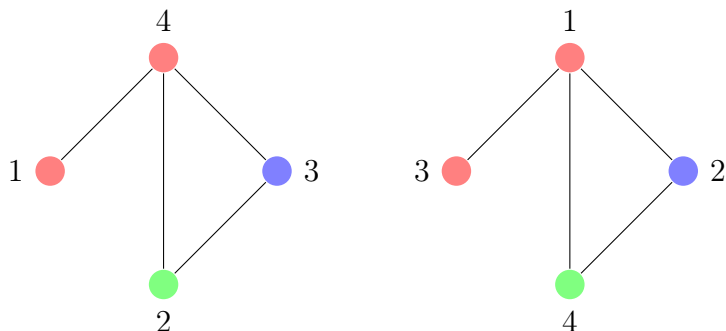
Izomorfizam

Obojeni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) su *izomorfni* (u oznaci $(G_1, \pi_1) \cong (G_2, \pi_2)$) ukoliko postoji $g \in S_n$ tako da je $(G_1, \pi_1) = (G_2, \pi_2)^g$. Takvo g zovemo *izomorfizam*.

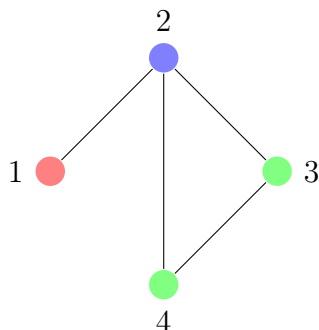
Primer 4. Neka su dati grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) kao na slici 2.3. Ako je redosled boja crvena, zelena, plava, tada je $\pi_1 = [1 \ 4 \mid 2 \mid 3]$ i $\pi_2 = [3 \ 1 \mid 4 \mid 2]$. Ovi grafovi su izomorfni za izomorfizam $g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Automorfizam obojenog grafa (G, π) je izomorfizam tog grafa sa samim sobom, odnosno $g \in S_n$ za koje važi $(G, \pi) = (G, \pi)^g$. Skup automorfizama grafa (G, π) označavamo sa $\text{Aut}(G, \pi)$. Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup $\text{Aut}(G, \pi)$ čini grupu automorfizama.

Primer 5. Na slici 2.4 prikazan je graf sa jednim automorfizmom.



Slika 2.3: Izomorfni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) .



Slika 2.4: Graf sa automorfizmom $g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Kanonska forma

Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \rightarrow S$ preslikavanje iz skupa svih obojenih grafova u proizvoljan skup S . Kažemo da je f *funkcija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)$. Neformalno, to znači da vrednost funkcije f ne zavisi od konkretnog imenovanja čvorova grafa, već samo od njegove unutrašnje strukture.

Ako na skupu S postoji definisano dejstvo grupe S_n , kažemo da je f *transformacija invarijantna na imenovanje čvorova* ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)^g$.

Definicija. *Kanonska forma* je preslikavanje $\mathcal{C} : \mathcal{G} \times \Pi \rightarrow \mathcal{G} \times \Pi$ koje ispunjava sledeće uslove:

(C1) Za svaki obojen graf (G, π) važi $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$

(C2) \mathcal{C} je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova

Primer 6. Neka je definisano uređenje na skupu obojenih grafova leksikografskim poređenjem odgovarajućih nizova $(\text{bin}(G), \pi(1), \dots, \pi(n))$. Tada je preslikavanje definisano sa $\mathcal{M}(G, \pi) = \max_{g \in S_n} (G^g, \pi^g)$ kanonska forma.

2.2 Stablo pretrage

Označimo sa V^* skup svih konačnih nizova elemenata skupa V . Ako je $\nu \in V^*$ sa $|\nu|$ označavamo dužinu niza ν . Ako je $\nu = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V^*$ i $w \in V$, onda $\nu \| w$ označava niz $(v_1, v_2, \dots, v_k, w)$. Za $0 \leq s \leq k$ prefiks niza ν dužine s označavamo sa $[\nu]_s = (v_1, v_2, \dots, v_s)$. Uređenje \leq na skupu V^* predstavlja leksikografski poredak.

Čvorovi stabla pretrage predstavljeni su nizovima elemenata skupa V , pri čemu korenu stabla odgovara prazan niz. U nastavku definišemo funkcije na osnovu kojih ćemo definisati pravila grananja u stablu.

Definicija. Funkcija profinjavanja je bilo koje preslikavanje $R : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow \Pi$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

$$(R1) \quad R(G, \pi, \nu) \leq \pi$$

$$(R2) \quad \text{Ako je } v \in \nu, \text{ onda je } \{v\} \text{ ćelija bojenja } R(G, \pi, \nu)$$

$$(R3) \quad \text{Za svako } g \in S_n \text{ važi } R(G^g, \pi^g, \nu^g) = R(G, \pi, \nu)^g$$

Definicija. Funkcija odabira ciljne ćelije je bilo koje preslikavanje $T : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow \mathcal{P}(V)$ koje za svaki obojen graf (G, π) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

$$(T1) \quad \text{Ako je } R(G, \pi, \nu) \text{ diskretno, onda je } T(G, \pi, \nu) = \emptyset$$

$$(T2) \quad \text{Ako } R(G, \pi, \nu) \text{ nije diskretno, onda je } T(G, \pi, \nu) \text{ nejedinična ćelija od } R(G, \pi, \nu)$$

$$(T3) \quad \text{Za svako } g \in S_n \text{ važi } T(G^g, \pi^g, \nu^g) = T(G, \pi, \nu)^g$$

Kako je graf fiksni, ove funkcije možemo smatrati funkcijama čvorova stabla. Funkcija profinjavanja obezbeđuje postojanje bojenja pridruženog svakom čvoru stabla (koje postaje finije kako se spuštamo niz stablo). Funkcija odabira ciljne ćelije nam omogućava da odaberemo skup čvorova grafa koji nam služi za konstrukciju dece tog čvora u stablu. Treći uslov u obe definicije govori da su u pitanju transformacije invarijantne na imenovanje čvorova.

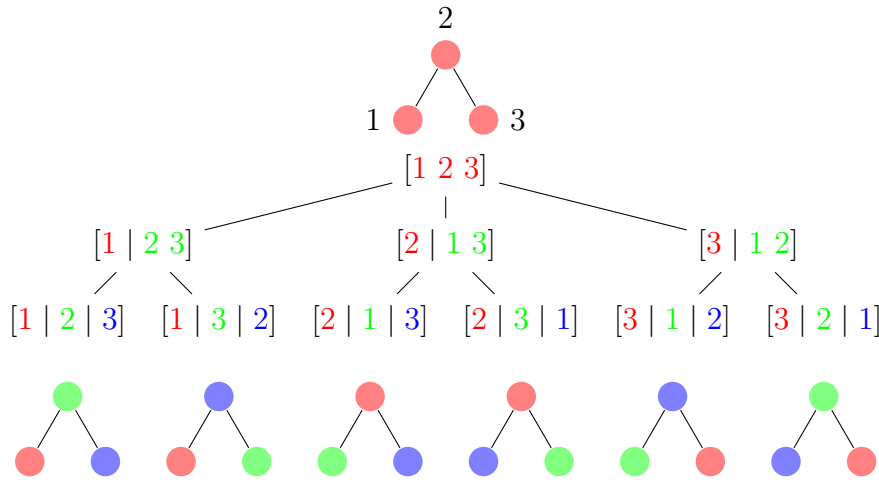
Definicija. *Stablo pretrage* $\mathcal{T}(G, \pi)$ određeno je sledećim uslovima:

(T1) Koren stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ je prazan niz $()$

(T2) Ako je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$, njegova deca u stablu su $\{\nu \parallel w \mid w \in T(G, \pi, \nu)\}$

Iz definicije se vidi da je neki čvor list stabla ako i samo ako je njemu pridruženo bojenje diskretno. Primetimo da je ovako definisano stablo konačno zato što za svako ν koje je permutacija skupa V važi da je bojenje pridruženo nekom njegovom prefiksu diskretno ili je njemu pridruženo bojenje diskretno.

Primer 7. *Prikažimo jedno jednostavno stablo pretrage. Za funkciju odabira ciljne ćelije možemo uzeti funkciju koja bira prvu nejediničnu ćeliju bojenja. Za funkciju profinjavanja možemo uzeti funkciju koja dodeljuje boje čvorovima u skladu sa početnim bojenjem π , pri čemu čvorove niza ν izdvaja u zasebne ćelije. Na slici 2.5 je prikazano stablo pretrage jednog grafa.*



Slika 2.5: Stablo pretrage koje generiše sve permutacije skupa čvorova.

Dejstvo grupe S_n na stablo definiše se slično kao za bilo koju drugu strukturu. Naredna lema pokazuje da je ovako definisano stablo invarijantno na imenovanje čvorova grafa.

Lema 1. *Za svaki obojen graf (G, π) i svako $g \in S_n$ važi $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) = \mathcal{T}(G, \pi)^g$.*

Dokaz. Dokažimo da za svaki čvor ν stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ važi da je ν^g čvor stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla.

Baza indukcije Prazan niz je koren stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$, pa tvrđenje trivijalno važi.

Induktivni korak Pretpostavimo da tvrđenje važi za čvor ν . Neka je $\nu \parallel w$ dete čvora ν za neko $w \in T(G, \pi, \nu)$. Tada je $(\nu \parallel w)^g = \nu^g \parallel w^g$, ali kako važi $w^g \in T(G, \pi, \nu)^g =_{(T3)} T(G^g, \pi^g, \nu^g)$ to je $\nu^g \parallel w^g$ dete čvora ν^g u stablu $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$.

Time smo dokazali da je stablo $\mathcal{T}(G, \pi)^g$ podstablo od $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ ($\mathcal{T}(G, \pi)^g \subseteq \mathcal{T}(G^g, \pi^g)$). Prema prethodno dokazanom važi $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)^{g^{-1}} \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)$, pa primenom g na obe strane konačno dobijamo $\mathcal{T}(G^g, \pi^g) \subseteq \mathcal{T}(G, \pi)^g$. \square

Posledica 1. Neka je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ i neka $\mathcal{T}(G, \pi, \nu)$ označava njegovo podstablo sa korenom u ν . Ako je $g \in \text{Aut}(G, \pi)$, onda je ν^g čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ i važi $\mathcal{T}(G, \pi, \nu^g) = \mathcal{T}(G, \pi, \nu)^g$.

Lema 2. Neka je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ i $\pi_\nu = R(G, \pi, \nu)$. Tada je grupa automorfizama obojenog grafa (G, π_ν) jednaka stabilizatoru niza ν u grupi automorfizama grafa (G, π) , odnosno $\text{Aut}(G, \pi_\nu) = \Sigma_\nu^{\text{Aut}(G, \pi)}$.

Dokaz. Neka je $g \in \text{Aut}(G, \pi_\nu)$. Tada je $\pi_\nu^g = \pi_\nu$, pa za svako v važi $\pi_\nu^g(v) = \pi_\nu(v)$. Na osnovu uslova (R2) za $v \in \nu$ važi $\{v\} = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu(v)) = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu^g(v)) = \pi_\nu^{-1}(\pi_\nu(g^{-1}v)) \ni g^{-1}v$ odakle sledi $v^g = v$, odnosno g stabilizuje svako $v \in \nu$.

Sa druge strane, neka $g \in \text{Aut}(G, \pi)$ stabilizuje ν . Tada po (R3) važi $\pi_\nu^g = R(G, \pi, \nu)^g = R(G^g, \pi^g, \nu^g) = R(G, \pi, \nu) = \pi_\nu$, pa je $g \in \text{Aut}(G, \pi_\nu)$. \square

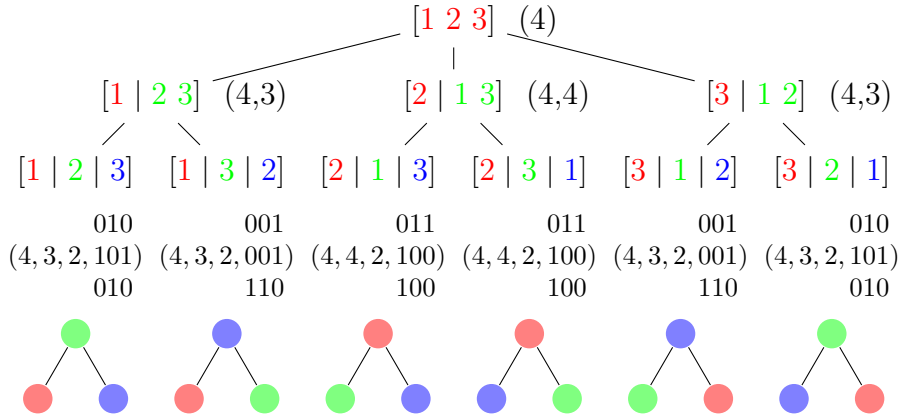
2.3 Invarijanta stabla

Definicija. Invarijanta stabla je preslikavanje $\phi : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow F$ za neki potpuno uređen skup F koje za sve obojene grafove (G, π) i različite čvorove $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ ispunjava sledeće uslove:

- ($\phi 1$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$, onda za sve $\omega_1 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$ važi $\phi(G, \pi, \omega_1) < \phi(G, \pi, \omega_2)$
- ($\phi 2$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da su $\pi_1 = R(G, \pi, \nu_1)$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu_2)$ diskretna bojenja, onda je $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2) \implies G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$
- ($\phi 3$) ϕ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova grafa

Listovi ν_1 i ν_2 su *ekvivalentni* ako i samo ako $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2)$.

Primer 8. Definišimo $\phi(G, \pi, \nu)$ koristeći pomoćnu funkciju f kao niz vrednosti $(f(G, \pi, [\nu]_0), f(G, \pi, [\nu]_1), \dots, f(G, \pi, [\nu]_{|\nu|}))$, pri čemu u slučaju da je ν list možemo na taj niz nadovezati i binarnu reprezentaciju grafa permutovanog bojenjem $R(G, \pi, \nu)$. Ovako definisano ϕ ispunjava uslove ($\phi 1-2$). Ako za pomoćnu funkciju f odaberemo npr. proizvod zbirova stepena čvorova ćelija, dobijamo jednu jednostavnu invarijantu stabla. Vrednosti invarijante stabla iz primera 2.5 prikazane su na slici 2.6.



Slika 2.6: Invarijanta stabla.

U nastavku ćemo kroz dve teoreme prikazati značaj ovako definisane invarijante stabla. Označimo za proizvoljan čvor stabla ν njegovo bojenje dobijeno funkcijom profinjavanja sa $\pi_\nu = R(G, \pi, \nu)$.

Lema 3. Neka je $g \in \text{Aut}(G, \pi)$ i listovi ν_1 i ν_2 takvi da je $\nu_1^g = \nu_2$. Tada su ν_1 i ν_2 ekvivalentni i $g = \pi_{\nu_2}^{-1} \pi_{\nu_1}$.

Dokaz. Na osnovu svojstva ($\phi 3$) invarijante stabla i činjenice da je g automorfizam sledi $\phi(G, \pi, \nu_1) =_{(\phi 3)} \phi(G^g, \pi^g, \nu_1^g) =_{g \in \text{Aut}(G, \pi)} \phi(G, \pi, \nu_1^g) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, odnosno ν_1 i ν_2 su ekvivalentni. Dalje, važi $\pi_{\nu_2}^{-1} \pi_{\nu_1} = \pi_{\nu_1^g}^{-1} \pi_{\nu_1} =_{(R3)} (\pi_{\nu_1}^g)^{-1} \pi_{\nu_1} = (\pi_{\nu_1} g^{-1})^{-1} \pi_{\nu_1} = g \pi_{\nu_1}^{-1} \pi_{\nu_1} = g$. \square

Lema 4. Neka su α i β diskretna bojenja finija od bojenja π . Tada je $\pi^\alpha = \pi^\beta$.

Dokaz. Dokaz izvodimo nizom sitnih tvrđenja.

1. $id \leq \pi^\alpha$

Neka su x i y proizvoljni. Važi $\pi^\alpha(x) < \pi^\alpha(y) \iff \pi(\alpha^{-1}(x)) < \pi(\alpha^{-1}(y))$, pa kako je $\alpha \leq \pi$ sledi $\alpha(\alpha^{-1}(x)) < \alpha(\alpha^{-1}(y))$ odnosno $x < y$. Kontrapozicijom dobijamo i $x \leq y \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y)$.

2. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = [n, m]$ za neko $n, m \in \mathbb{N}$ gde je $[n, m] = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq m\}$

Za svako x, y, z važi $x \leq y \leq z \implies \pi^\alpha(x) \leq \pi^\alpha(y) \leq \pi^\alpha(z)$, pa ako je $\pi^\alpha(x) = \pi^\alpha(z) = c$, onda je i $\pi^\alpha(y) = c$.

3. $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n)$ ili $\pi^\alpha(n+1) = \pi^\alpha(n) + 1$

Neka je $\pi^\alpha(n+1) \neq \pi^\alpha(n)$. Tada je $n+1 \geq n \implies \pi^\alpha(n+1) \geq \pi^\alpha(n)$, pa je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n)$ jer su po pretpostavci različiti. Pretpostavimo da je $\pi^\alpha(n+1) > \pi^\alpha(n) + 1$. Tada postoji m takvo da je $\pi^\alpha(m) = \pi^\alpha(n) + 1$, ali iz $\pi^\alpha(n) < \pi^\alpha(m) < \pi^\alpha(n+1) \implies n < m < n+1$ sledi kontradikcija.

4. $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)|$

Važi da je $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = \pi^{-1}(c)^\alpha$ odakle je $|(\pi^\alpha)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)^\alpha| = |\pi^{-1}(c)|$.

5. $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c)$

Dokaz izvodimo indukcijom po c .

Baza indukcije Kako je $1 \leq x$ za sve x , onda iz $id \leq \pi^\alpha$ sledi $\pi^\alpha(1) \leq \pi^\alpha(x)$ za sve x pa je $\pi^\alpha(1) = 1$. Dalje, kako je $|(\pi^\alpha)^{-1}(1)| = |\pi^{-1}(1)|$, mora važiti $(\pi^\alpha)^{-1}(1) = [1, |\pi^{-1}(1)|]$. Analogno se pokazuje i za β .

Induktivni korak Neka je po induktivnoj pretpostavci $(\pi^\alpha)^{-1}(c) = (\pi^\beta)^{-1}(c) = [n, m]$. Tada je $\pi^\alpha(m+1) \neq \pi^\alpha(m)$, pa je $\pi^\alpha(m+1) = \pi^\alpha(m) + 1$ i $m+1$ je najmanje u $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1)$. Odatle važi $(\pi^\alpha)^{-1}(c+1) = [m+1, m+|\pi^{-1}(c+1)|]$. Analogno se pokazuje i za β .

□

Teorema 1. Za svaki list ν važi $Aut(G, \pi) = \{\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \mid \nu \text{ i } \omega \text{ su ekvivalentni}\}$.

Dokaz. Neka je $g \in Aut(G, \pi)$. Tada je po posledici 1 ν^g list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Po prethodno dokazanoj lemi 3 su ν i ν^g ekvivalentni i $g = \pi_{\nu^g}^{-1}\pi_\nu$ što je element skupa sa desne strane jednakosti. Sa druge strane, ako su ν i ω ekvivalentni, onda je $G^{\pi_\nu} = G^{\pi_\omega}$, pa je $\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \in Aut(G, \pi)$. □

Prethodna teorema pokazuje da je otkrivanjem svih čvorova ekvivalentnih jednom čvoru moguće odrediti grupu automorfizama datog grafa. Naravno, ovakav način određivanja grupe automorfizama nije veoma efikasan pošto se grupa generiše član po član. Ovo se može poboljšati odsecanjem pretrage o čemu će biti reči u narednom odeljku.

Primer 9. Posmatrajmo prvi list stabla sa slike 2.6. Na osnovu prethodne teoreme je moguće odrediti skup svih automorfizama grafa. Kako je taj list ekvivalentan samom sebi, $id \in \text{Aut}(G, \pi)$. Kako je ekvivalentan poslednjem listu stabla, $(1\ 3) \in \text{Aut}(G, \pi)$. Ne postoje drugi automorfizmi jer ne postoje drugi listovi ekvivalentni prvom listu stabla, pa je $\text{Aut}(G, \pi) = \{id, (1\ 3)\}$.

Definicija. Neka je ν^* list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ u kom invarijanta $\phi(G, \pi, \nu)$ dostiže maksimum. Kanonska forma obojenog grafa (G, π) je funkcija $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$.

Primetimo da zbog uslova $(\phi 2)$ definicija ne zavisi od izbora lista ν^* . Naredna teorema opravdava naziv i oznaku funkcije.

Teorema 2. Funkcija $\mathcal{C}(G, \pi)$ je kanonska forma.

Dokaz. Dokazujemo da ovako definisana funkcija ispunjava uslove kanonske forme za svaki obojen graf (G, π) .

- (C1) Kako je $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$ to je $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$ za izomorfizam π_{ν^*} .
- (C2) Za svako $g \in S_n$ i svako $\nu \in \mathcal{T}(G, \pi)$ važi $\nu^g \in \mathcal{T}(G, \pi)^g = \mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ kao i $\phi(G^g, \pi^g, \nu^g) = \phi(G, \pi, \nu)$, pa je ν^{*g} list u kom invarijanta stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi^g)$ dostiže maksimalnu vrednost. Odatle sledi $\mathcal{C}(G^g, \pi^g) = (G^g, \pi^g)^{R(G^g, \pi^g, \nu^{*g})} = (G^g, \pi^g)^{\pi_{\nu^*}^g} = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}} = \mathcal{C}(G, \pi)$ pa je \mathcal{C} funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.

□

Primer 10. Posmatrajmo stablo sa slike 2.6. Na osnovu prethodne teoreme je moguće odrediti kanonsku formu grafa. U pitanju je graf koji se dobija bilo kojom od permutacija $(2\ 1)$ ili $(3\ 2\ 1)$ jer su to permutacije sa najvećom invarijantnom u stablu.

2.4 Odsecanje pretrage

Stablo pretrage može biti veoma veliko, pa pretraga kompletnog stabla nije poželjna. To možemo rešiti uvođenjem tri različite operacije odsecanja.

- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) > \phi(G, \pi, \nu_2)$. Operacija $P_A(\nu_1, \nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.
- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) \neq \phi(G, \pi, \nu_2)$. Operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.
- Neka su ν_1 i ν_2 različiti čvorovi stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ takvi da je $\nu_1 < \nu_2$ i $\nu_1^g = \nu_2$ za neko $g \in \text{Aut}(G, \pi)$. Operacija $P_C(\nu_1, g)$ podrazumeva odsecanje podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$.

Operacije P_A i P_C su definisane tako da očuvavaju mogućnost određivanja kanonske forme u stablu. Slično, operacije P_B i P_C očuvavaju mogućnost određivanja grupe automorfizama na osnovu stabla. Naredna teorema opravdava uvođenje ovih operacija i pokazuje da one ne narušavaju rezultate teorema o određivanju grupe automorfizama i kanonske forme.

Teorema 3. *Neka je (G, π) obojen graf.*

1. *Neka je nad stablom $\mathcal{T}(G, \pi)$ izvršen proizvoljan niz operacija P_A i P_C . Tada u dobijenom stablu postoji bar jedan list ν takav da je $\phi(G, \pi, \nu) = \phi(G, \pi, \nu^*)$.*
2. *Neka je ν_0 list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$ i neka je nad stablom izvršen proizvoljan niz operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ i P_C gde je $\phi(G, \pi, \nu_2) \neq \phi(G, \pi, [\nu_0]_s)$ za sve $0 \leq s \leq |\nu_0|$ i neka su g_1, \dots, g_k svi automorfizmi korišćeni u izvršenim operacijama P_C . Tada je grupa automorfizama $\text{Aut}(G, \pi)$ generisana skupom $\{g_1, \dots, g_k\} \cup \{g \in \text{Aut}(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen}\}$.*

Dokaz. Dokažimo za početak nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Nijedna operacija P_A ne uklanja listove u kojima je vrednost invarijante maksimalna. Pretpostavimo suprotno. Neka je ν_1 list u kom invarijanta stabla dostiže maksimum i neka je ν'_1 predak od ν_1 . Operacija $P_A(\nu'_2, \nu'_1)$ uklanja ν'_1 ako je $\phi(G, \pi, \nu'_1) < \phi(G, \pi, \nu'_2)$, pa po svojstvu $(\phi 1)$ za proizvoljan list ν_2 u $\mathcal{T}(G, \pi, \nu'_2)$

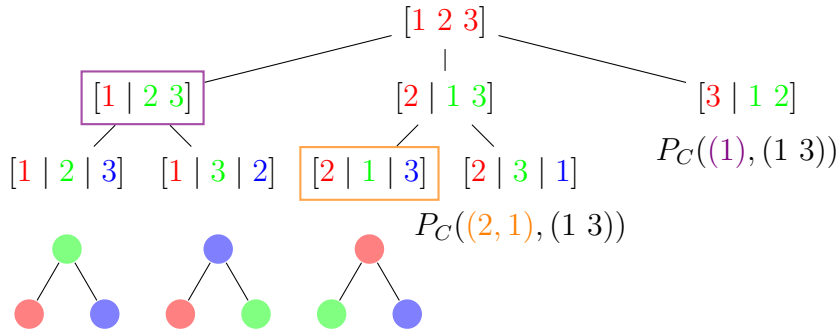
važi $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je vrednost invarijante maksimalna u ν_1 .

Nijedna operacija P_B ne uklanja nijedan list ν ekvivalentan listu ν_0 (iz drugog dela teoreme). Iz pretpostavke teoreme nijedna operacija $P_B(\nu_1, \nu_2)$ ne uklanja čvor ν_2 takav da je $\phi(G, \pi, [\nu_0]_{|\nu_2|}) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, pa samim tim ne uklanja nijedan čvor $[\nu]_s$ za $0 \leq s \leq |\nu|$.

Nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji među ekvivalentnim listovima. Štaviše, nijedna operacija P_C ne uklanja leksikografski najmanji čvor iz $\Omega_v^{<g_1, \dots, g_k>}$ za bilo koje ν . Neka je bez umanjenja opštosti ν leksikografski najmanji list u svojoj orbiti. Operacija $P_C(\omega, g)$ uklanja čvor ω^g ako je $\omega < \omega^g$, pa je $[\nu]_{|\omega|} \neq \omega^g$ pošto je ili $[\nu]_{|\omega|} < \omega$ ili su ω i $[\nu]_{|\omega|}$ iz različitih orbita.

1. Na osnovu dokazanih svojstava operacija P_A i P_C iz stabla se ne uklanja leksikografski najmanji list ν ekvivalentan listu ν^* .
2. Ako je $g \in \text{Aut}(G, \pi)$, onda na osnovu dokazanih svojstva operacija P_B i P_C važi da iz stabla nije uklonjen leksikografski najmanji list oblika ν_0^{hg} za neko $h \in \langle g_1, \dots, g_k \rangle$, izborom $\omega = \nu_0^g$. Odatle sledi da je $hg \in \langle \{g_1, \dots, g_k\} \cup \{g \in \text{Aut}(G, \pi) \mid \nu_0^g \text{ nije uklonjen} \} \rangle$, pa je i g element generisane grupe.

□



Slika 2.7: Odsecanje stabla na osnovu automorfizama.

Primer 11. Prilikom obilaska stabla sa slike 2.6 moguće je izvršiti odsecanje nekih delova stabla na osnovu automorfizma $(1\ 3)$ (ukoliko je on poznat unapred). Rezultujuće stablo je dato na slici 2.7.

Glava 3

Realizacija algoritma

3.1 Reprezentacija podataka

Bojenje

Bojenje $\pi \in \Pi_n$ predstavljeno je permutacijom p i nizom $cells$. Permutacija p predstavlja niz koji se dobija nadovezivanjem ćelija $\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(k)$ redom, pri čemu su elementi jedne ćelije uređeni rastuće. Preciznije, p je permutacija takva da je $p(u) \in \pi^{-1}(c)$ ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{c-1} |\pi^{-1}(i)| \leq u < \sum_{i=1}^c |\pi^{-1}(i)|$ i da ako važi $\pi(u) = \pi(v)$ onda je $u < v \iff p^{-1}(u) < p^{-1}(v)$.

Niz $cells$ dužine n upotpunjava permutaciju p podacima o granicama ćelija bojenja π . Ako pozicija u predstavlja početak nove ćelije, tada je $cells_u$ takvo da ta ćelija obuhvata tačno pozicije $[u, cells_u)$ permutacije p . Formalno,

$$cells(u) = \begin{cases} u + |\pi^{-1}(\pi(p(u)))|, & \text{ako je } u = 1 \text{ ili } \pi(p(u)) \neq \pi(p(u-1)) \\ -1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primer 12. Neka je $\pi = [2 \ 5 \mid 4 \ 3 \ 5 \mid 1]$ jedno bojenje. Tada je ono predstavljeno permutacijom $p : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ i nizom $cells = (3, -1, 6, -1, -1, 7)$.

Primetimo da u slučaju diskretnog bojenja π permutacija p predstavlja inverz permutacije π .

Primer 13. Bojenje $\pi = [2 \mid 4 \mid 3 \mid 1]$ koje je zapravo preslikavanje $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ predstavljeno je permutacijom $p : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Jedna od ključnih operacija nad bojenjem je profinjavanje jedne ćelije. Neka je $\pi^{-1}(c)$ jedna ćelija bojenja π i neka je svakom čvoru v te ćelije dodeljena vrednost t_v . Profinjavanje ćelije podrazumeva formiranje bojenja $\pi' \leq \pi$ takvog da za u i v iz $\pi^{-1}(c)$ važi $\pi'(u) < \pi'(v) \iff t_u < t_v$, dok za sve ostale parove u i v važi $\pi'(u) = \pi'(v) \iff \pi(u) = \pi(v)$.

Algoritam 1 Profinjavanje ćelije

```

procedure REFINE_CELL( $G, \pi, c, t$ )
     $\pi' \leftarrow \pi$ 
     $k \leftarrow 1$ 
    for  $t' \in \text{sorted}(\{t_v \mid v \in \pi^{-1}(c)\})$  do
         $C_k \leftarrow \{v \in \pi^{-1}(c) \mid t_v = t'\}$ 
         $\pi'(v) \leftarrow c + k - 1$  za sve  $v \in C_k$ 
         $k \leftarrow k + 1$ 
     $\pi'(v) \leftarrow \pi(v) + k - 1$  za sve  $v$  takve da  $\pi(v) > c$ 
     $s \leftarrow$  indeks prvog najvećeg skupa među  $C_{i,1 \leq i \leq k}$ 
    return  $\pi', C_1, \dots, C_k, s$ 

```

Opisana reprezentacija bojenja je korisna zato što omogućava da se ovaj algoritam implementira tako da mu složenost bude $O(|C| \log |C|)$ gde je $C = \pi^{-1}(c)$, pri čemu dominira složenost sortiranja čvorova na osnovu vrednosti t_v .

Graf

Pošto se graf ne menja tokom izvršavanja samog algoritma, moguće je čuvati više različitih reprezentacija grafa. Ovde ćemo istaći one delove reprezentacije koji su neophodni za dalju diskusiju.

Obojen graf je predstavljen bojenjem π i matricom povezanosti $\psi : \mathcal{G} \times V \times V \rightarrow \{0, 1\}$ gde je $\psi(G, u, v) = 1$ akko je $(u, v) \in E$. Zapazimo sledeća svojstva matrice povezanosti:

$$(\psi 1) \quad \psi(G, u, v) = \psi(G, v, u)$$

$$(\psi 2) \quad \psi(G^g, u^g, v^g) = \psi(G, v, u) \text{ za proizvoljno } g \in S_n$$

Prvo svojstvo je simetričnost matrice povezanosti koja proizilazi iz činjenice da je u neusmerenom grafu $(u, v) \in E$ akko $(v, u) \in E$. Drugo svojstvo govori da je matrica povezanosti funkcija invarijantna na imenovanje čvorova. Ovo svojstvo će biti značajno u definicijama i dokazima koji slede u ovom poglavlju. Invarijantnost važi zato što je (u, v) grana grafa G akko je $(u, v)^g = (u^g, v^g)$ grana grafa G^g .

3.2 Funkcija odabira ciljne ćelije

Postoji više strategija za realizaciju funkcije odabira ciljne ćelije. Ovde ćemo predstaviti dve takve strategije.

Jedna mogućnost je odabir neke (konkretno prve) nejedinične ćelije bojenja najmanje veličine. Obrazloženje za ovakav izbor je da manje ćelije imaju veću šansu da sadrže mali broj orbita (ili čak jednu) citeMcKay i da je samim tim očekivani faktor grananja manji.

Druga mogućnost, koja se ispostavila kao bolja u većini slučajeva citeMcKay je odabir prve nejedinične ćelije bez obzira na njenu veličinu. U daljem radu pretpostavljamo postojanje procedure `Target_cell(π)` koja implementira ovu strategiju.

3.3 Funkcija profinjavanja

Lema 5. *Neka je preslikavanje $I : \Pi \times V \rightarrow \Pi$ definisano sa*

$$I(\pi, v)(w) = \begin{cases} \pi(w), & \text{ako je } \pi(w) < \pi(v) \text{ ili } w = v \\ \pi(w) + 1, & \text{inače} \end{cases}$$

i neka je $F : \mathcal{G} \times \Pi \times V^ \rightarrow \Pi$ transformacija invarijantna na imenovanje čvorova takva da je $F(G, \pi, \nu) \leq \pi$. Tada je preslikavanje definisano sa*

$$\begin{aligned} R(G, \pi, ()) &= F(G, \pi, ()) \\ R(G, \pi, \nu \| w) &= F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), \nu \| w) \end{aligned}$$

funkcija profinjavanja.

Dokaz. Pokažimo prvo nekoliko svojstava ovako definisanog preslikavanja I .

(I1) Za proizvoljno bojenje π i čvor u važi da je $I(\pi, u) \leq \pi$. To važi zato što ako je $\pi(v) < \pi(w)$ onda nije istovremeno $I(\pi, u)(v) = \pi(v) + 1$ i $I(\pi, u)(w) = \pi(w)$ jer to povlači da je $\pi(v) \geq \pi(u)$ i $\pi(w) \leq \pi(u)$, odnosno da je $\pi(w) \leq \pi(v)$ što je kontradikcija. U svim ostalim slučajevima iz pretpostavke sledi $I(\pi, u)(v) < I(\pi, u)(w)$.

(I2) $\{v\}$ je ćelija bojenja $I(\pi, v)$. Ako je $\pi(w) = \pi(v)$ i $w \neq v$ onda je $I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)(v) + 1$, a kako je $I(\pi, v) \leq \pi$ onda je $\pi(v) \neq \pi(w) \iff I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ pa je $I(\pi, v)(v) \neq I(\pi, v)(w)$ za sve $w \neq v$.

(I3) I je transformacija invarijantna na imenovanje čvorova. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Tada je $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) \iff I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi^g(w^g) \iff$

$\pi^g(w^g) < \pi^g(v^g) \vee w^g = v^g \iff \pi(w) < \pi(v) \vee w = v \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w)$. Slično je i $I(\pi^g, v^g)(w^g) = \pi(w) + 1 \iff I(\pi, v)(w) = \pi(w) + 1$, odnosno $I(\pi^g, v^g)(w^g) = I(\pi, v)(w) = I(\pi, v)^g(w^g)$.

Dokažimo sada indukcijom da ovako definisana funkcija R ispunjava uslove funkcije profinjavanja.

Baza indukcije

$$(R1) \ R(G, \pi, ()) = F(G, \pi, ()) \leq \pi$$

(R2) Tvđenje trivijalno važi zato što je $()$ prazan niz

$$(R3) \text{ Za svako } g \in S_n \text{ važi } R(G^g, \pi^g, ())^g = F(G^g, \pi^g, ())^g = F(G, \pi, ())^g = R(G, \pi, ())^g$$

Induktivni korak Pretpostavimo da tvrđenje važi za ν .

$$(R1) \ R(G, \pi, \nu \| w) = F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), \nu \| w) \leq I(R(G, \pi, \nu), w) \leq R(G, \pi, \nu) \leq \pi$$

(R2) $R(G, \pi, \nu \| w) \leq I(R(G, \pi, \nu), w)$ pa je w ćelija bojenja $R(G, \pi, \nu \| w)$. Ako je $v \in \nu$, onda je v ćelija $R(G, \pi, \nu)$, pa je ćelija i bojenja $R(G, \pi, \nu \| w)$ jer je $R(G, \pi, \nu \| w) \leq R(G, \pi, \nu)$.

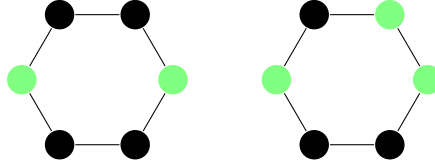
$$(R3) \text{ Za svako } g \in S_n \text{ važi } R(G^g, \pi^g, (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G^g, \pi^g, \nu^g), w^g), (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G, \pi, \nu)^g, w^g), (\nu \| w)^g) = F(G^g, I(R(G, \pi, \nu), w)^g, (\nu \| w)^g) = F(G, I(R(G, \pi, \nu), w), (\nu \| w))^g = R(G, \pi, \nu \| w)^g.$$

□

Funkcija I definisana u prethodnoj lemi naziva se funkcijom *individualizacije*. Primetimo da je za funkciju I moguće uzeti bilo koje preslikavanje koje ispunjava pokazana svojstva (I1-3).

Kako bismo definisali konkretnu funkciju profinjavanja, potrebno je još da odaberemo preslikavanje F . U tu svrhu uvodimo pojam *ekvitabilnog bojenja*.

Definicija. Označimo sa $\psi(G, u, W) = \sum_{w \in W} \psi(G, u, w)$ broj grana grafa G koje povezuju čvor u i skup čvorova W . Particija \sim skupa čvorova V je *ekvitabilna* ako za svaki par čvorova u i v takvih da je $u \sim v$ i svaku klasu C particije \sim važi $\psi(G, u, C) = \psi(G, v, C)$. Bojenje π je *ekvitabilno* ako je particija \sim_π ekvitabilna.



Slika 3.1: Levo bojenje je ekvitalno zato što je svaki zeleni čvor povezan sa tačno dva crna, a svaki crni čvor sa tačno jednim zelenim i tačno jednim crnim. Desno bojenje nije ekvitalno zato što postoje zeleni čvorovi sa različitim brojem zelenih suseda.

Lema 6. *Za proizvoljno bojenje π grafa G postoji jedinstvena najgrublja particija \sim_γ koja je ekvitalna i finija od \sim_π .*

Dokaz. Očigledno postoji bar jedna ekvitalna particija finija od \sim_π ; diskretna particija ispunjava te uslove.

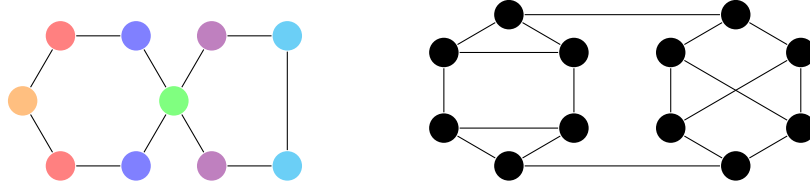
Neka su \sim_α i \sim_β dve takve particije. Definišimo \sim_γ kao tranzitivno zatvorenje unije particija \sim_α i \sim_β , odnosno $u \sim_\gamma v \iff x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \dots \sim_\cup x_k$ za neke $u = x_1, x_2, \dots, x_k = v$ pri čemu je $u \sim_\cup v \iff u \sim_\alpha v \vee u \sim_\beta v$.

Ovako definisano \sim_γ je relacija ekvivalencije grublja od \sim_α i \sim_β . Pokažimo da je i ekvitalna.

Neka je $u \sim_\alpha v$ i neka je C proizvoljna klasa iz \sim_γ . Kako je \sim_α finije od \sim_γ , to je $C = \bigcup_{i=1}^n A_i$ za neke klase A_1, \dots, A_n particije \sim_α , pa je $\psi(G, u, C) = \sum_{i=1}^n \psi(G, u, A_i)$. Kako je α ekvitalno, to je dalje jednako $\sum_{i=1}^n \psi(G, v, A_i) = \psi(G, v, C)$. Analogno se pokazuje i za \sim_β , pa važi $u \sim_\cup v \implies \psi(G, u, C) = \psi(G, v, C)$. Konačno, ako je $u \sim_\gamma v$, onda je $u = x_1 \sim_\cup x_2 \sim_\cup \dots \sim_\cup x_n = v$, pa je $\psi(G, u, C) = \psi(G, x_1, C) = \psi(G, x_2, C) = \dots = \psi(G, x_n, C) = \psi(G, v, C)$. \square

Primer 14. *Na slici 3.2 prikazana su dva grafa obojena svojim najgrubljim ekvitalnim bojenjem. Ekvitalno bojenje levog grafa razdvaja čvorove grafa tačno po orbitama u grupi automorfizama grafa. To naravno ne mora uvek biti slučaj, što se može videti iz primera desnog grafa čije je najgrublje ekvitalno bojenje jednobojno uprkos tome što postoji više orbita.*

Ovim smo pokazali da postoji najgrublje ekvitalno bojenje finije od π određeno do na raspored ćelija. Definišimo onda funkciju $F(G, \pi, \nu)$ kao rezultat izvršavanja algoritma određivanja jednog takvog bojenja.



Slika 3.2: Primer najgrubljeg ekvitalnog bojenja dva grafa.

Algoritam 2 Profinjavanje bojenja

```

1: procedure REFINE( $G, \pi, \nu$ )
2:    $\alpha \leftarrow \emptyset$ 
3:   if  $\nu = \nu' || w$  then
4:     push( $\alpha, \{w\}$ )
5:   else
6:     push( $\alpha, C$ ) za sve  $C \in \pi$ 
7:   while  $\alpha \neq \emptyset$  do
8:      $W \leftarrow \text{pop}(\alpha)$ 
9:     for  $C \in \pi$  do
10:       $\pi, C_1, \dots, C_k, s \leftarrow \text{Refine\_cell}(G, \pi, \pi(C), t_v = \psi(G, v, W))$ 
11:      if  $C \in \alpha$  then
12:        remove( $\alpha, C$ )
13:        push( $\alpha, C_i$ ) za sve  $1 \leq i \leq k$ 
14:      else
15:        push( $\alpha, C_i$ ) za sve  $1 \leq i \leq k, i \neq s$ 
16:   return  $\pi$ 

```

Potrebno je da procedure koje modifikuju strukturu α budu implementirane na način koji garantuje invarijantnost na imenovanje čvorova. Ovo se jednostavno postiže bilo kojom implementacijom koja ne zavisi od sadržaja elemenata unutar skupa α poput steka ili reda, ili opštije implementacijom koja zavisi jedino od svojstava elemenata invarijantnih na imenovanje čvorova.

Teorema 4. *Neka je γ bojenje dobijeno izvršavanjem algoritma profinjavanja bojenja za ulaz (G, π, ν) u obojenom grafu (G, π_0) . Tada γ ispunjava uslove leme 6.*

Dokaz. Označimo sa ξ particiju koja ispunjava uslove leme 6. Dokažimo indukcijom po i da je $\xi \leq \sim_{\pi_i}$ gde π_i predstavlja bojenje π nakon i izvršenih koraka spoljne petlje algoritma. Iz ovoga će slediti $\xi \leq \sim_{\gamma}$.

Baza indukcije Po definiciji ξ je $\xi \leq \sim_{\pi}$.

Induktivni korak Neka je $\xi \leq_{\sim \pi_j}$ za sve $j \leq i$. Tada je svaka ćelija C svakog bojenja π_j , $j \leq i$ unija nekih klasa particije ξ , pa to važi i za ćeliju W odabranu u liniji 8. Neka su x i y proizvoljni elementi iste klase particije ξ . Tada je $\psi(G, x, W) = \psi(G, y, W)$, pa oni ne mogu biti razdvojeni nakon izvršavanja koraka spoljne petlje. Prema tome je $\xi \leq_{\sim \pi_{i+1}}$.

Neka je C ćelija nekog bojenja i neka su C_1, C_2, \dots, C_k ćelije dobijene netrivialnim profinjavanjem C u odnosu na neku ćeliju W ili individualizacijom ćelije C . Možemo formirati šumu (skup stabala) čiji su čvorovi ćelije na sledeći način:

1. Koren svakog stabla šume je jedna ćelija bojenja π_0 ako je $\nu = ()$, odnosno $R(G, \pi_0, \nu')$ ako je $\nu = \nu' \| w$.
2. Deca čvora C su $\{C_1, \dots, C_k\}$.

Pokažimo da je γ ekvitalno. Dokaz izvodimo iz dva dela. Prvo, pokažimo da važi sledeće tvrđenje. Ako je ćelija C prilikom izvršavanja algoritma dodata u α u liniji 4, 6, 13 ili 15 (u oznaci $C \in \mathcal{A}$), tada se ona može predstaviti kao disjunktna unija nekih ćelija $W_1, \dots, W_m \in \mathcal{W}$ gde W predstavlja skup svih ćelija uklonjenih iz α linijom 8 algoritma. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla, odozdo naviše.

Baza indukcije Ukoliko je $C \in \mathcal{W}$, tvrđenje važi trivijalno.

Induktivni korak Kako je po završetku izvršavanja algoritma α prazan skup, C je moralo biti uklonjeno. Kako C nije uklonjeno linijom 8, moralo je biti uklonjeno linijom 12. U tom slučaju je $C = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$ i C_1, \dots, C_k su dodate u α linijom 13. Po induktivnoj hipotezi se svaki od C_1, \dots, C_k može predstaviti kao disjunktna unija skupova iz \mathcal{W} , pa to važi i za C .

Definišimo $\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{P}(V) \mid \forall x, y \ \gamma(x) = \gamma(y) \implies \psi(G, x, C) = \psi(G, y, C)\}$. Jasno je da je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$. Prema prethodno pokazanom je onda i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Pokažimo da za svaku ćeliju C u šumi važi da je $C \in \mathcal{B}$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla, odozgo naniže.

Baza indukcije Neka je C koren nekog stabla šume.

- 1° Ako je $\nu = ()$, važi $C \in \mathcal{B}$ jer je dodato u α u liniji 6 algoritma.

2° Ako je $\nu = \nu' || w$, bojenje $R(G, \pi_0, \nu')$ je ekvitalno, pa kako je $\gamma \leq R(G, \pi_0, \nu')$, sve njegove ćelije su u \mathcal{B} , a samim tim je i C .

Induktivni korak Neka je $C \in \mathcal{B}$ i $C = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$.

1° Ako je $C \in \mathcal{A}$, onda su i $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

2° Ako je $C \notin \mathcal{A}$, onda su $C_1, \dots, C_{s-1}, C_{s+1}, \dots, C_k \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Tada je $\psi(G, x, C_s) = \psi(G, x, C) - \sum_{1 \leq i \leq k, i \neq s} \psi(G, x, C_i)$, pa je i $C_s \in \mathcal{B}$.

Kako su sve ćelije šume u \mathcal{B} , to su i sve ćelije bojenja γ , pa je γ ekvitalno. \square

Teorema 5. Neka je ν list stabla $\mathcal{T}(G, \pi)$. Tada je ukupna vremenska složenost određivanja svih $R(G, \pi, [\nu]_i)$ u klasi $O(n^2 \log n)$, pri čemu je n broj čvorova grafa.

Dokaz. Pretpostavimo da su operacije **push**, **pop** i **remove** složenosti $O(1)$. Za fiksno W i C broj koraka jedne iteracije unutrašnje petlje je $|C||W| + |C| \log |C| + k \leq |C||W| + |C|(1 + \log |C|)$ za određivanje vrednosti t_v za svaki čvor ćelije C , izvršavanje profinjavanja ćelije C i dodavanje svih potrebnih C_i u α . Dakle, za fiksno W je broj koraka unutrašnje petlje manji ili jednak $\sum_{C \in \pi} (|C||W| + |C|(1 + \log |C|)) \leq \sum_{C \in \pi} (|C||W| + |C|(1 + \log n)) = n|W| + n(1 + \log n)$. Odatle je broj koraka za određivanje $R(G, \pi, [\nu]_i)$ najviše $\sum_{W \in \mathcal{W}_i} (n|W| + n(1 + \log n)) = n \sum_{W \in \mathcal{W}_i} |W| + |\mathcal{W}_i|n(1 + \log n)$ gde je \mathcal{W}_i skup svih ćelija na osnovu kojih je vršeno profinjavanje prilikom određivanja $R(G, \pi, [\nu]_i)$, odnosno svih ćelija W iz linije 8 algoritma. Ukupna složenost svih profinjavanja je onda $\sum_{i=1}^{|\nu|} (n \sum_{W \in \mathcal{W}_i} |W| + |\mathcal{W}_i|n(1 + \log n)) = O(n \sum_{W \in \mathcal{W}} |W| + |\mathcal{W}|n \log n)$ pri čemu je $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\nu|} \mathcal{W}_i$.

Neka je C ćelija nekog bojenja i neka su C_1, C_2, \dots, C_k ćelije dobijene netrivialnim profinjavanjem C u odnosu na neku ćeliju W ili individualizacijom ćelije C . Možemo formirati šumu (skup stabala) čiji su čvorovi ćelije na sledeći način:

1. Koren svakog stabla šume je jedna ćelija bojenja $R(G, \pi, ())$.
2. Deca čvora C su $\{C_1, \dots, C_k\}$.

Kako su ćelije u listovima šume sve različite jedinične ćelije (jer je bojenje $R(G, \pi, \nu)$ diskretno), ima ih tačno n . Kako svaka ćelija šume ima bar dva deteta, broj ćelija u šumi je manji od $2n$, a pošto ona mora sadržati i sve ćelije iz \mathcal{W} , to je $|\mathcal{W}| < 2n$.

Neka je v čvor grafa. Posmatrajmo niz ćelija $\{v\} = C_m \subseteq C_{m-1} \subseteq \dots \subseteq C_1$ koje čine put od lista $\{v\}$ do korena odgovarajućeg stabla. Neka je ćelija C_i jedna od

ćelija dodatih u α u liniji 4, 6, ili 15 algoritma. Tada je $|C_i| \leq \frac{|C_{i-1}|}{2}$ ako je $i > 1$, odnosno nakon individualizacije ili profinjavanja. Označimo broj ovakvih ćelija sa k_v . Očigledno je $k_v \leq 1 + \log_2 |C_1| \leq 1 + \log_2 n$.

Primetimo da su u svakom koraku algoritma ćelije koje se nalaze u α međusobno disjunktne. Odavde sledi da se istovremeno u α ne mogu naći dve različite ćelije C_i i C_j . Prinetimo, takođe, da jedino linije 4, 6, 8 i 15 algoritma mogu da promene tačnost rečenice $\exists i C_i \in \alpha$ (12 i 13 ne mogu ukoliko se posmatraju zajedno). Kako je na početku i na kraju izvršavanja algoritma $\alpha = \emptyset$, mora važiti da je broj k_v dodavanja ćelija C_i u α jednak broju uklanjanja ćelija C_i iz α , odnosno broju onih ćelija za koje važi $C_i \in \mathcal{W}$.

Konačno,

$$\begin{aligned} \sum_{W \in \mathcal{W}} |W| &= \sum_{W \in \mathcal{W}} \sum_{v \in W} 1 \\ &= \sum_{W \in \mathcal{W}} \sum_{v \in V} \chi_W(v) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{W \in \mathcal{W}} \chi_W(v) \\ &= \sum_{v \in V} k_v \\ &\leq \sum_{v \in V} (1 + \log_2 n) \\ &= n(1 + \log_2 n) \end{aligned}$$

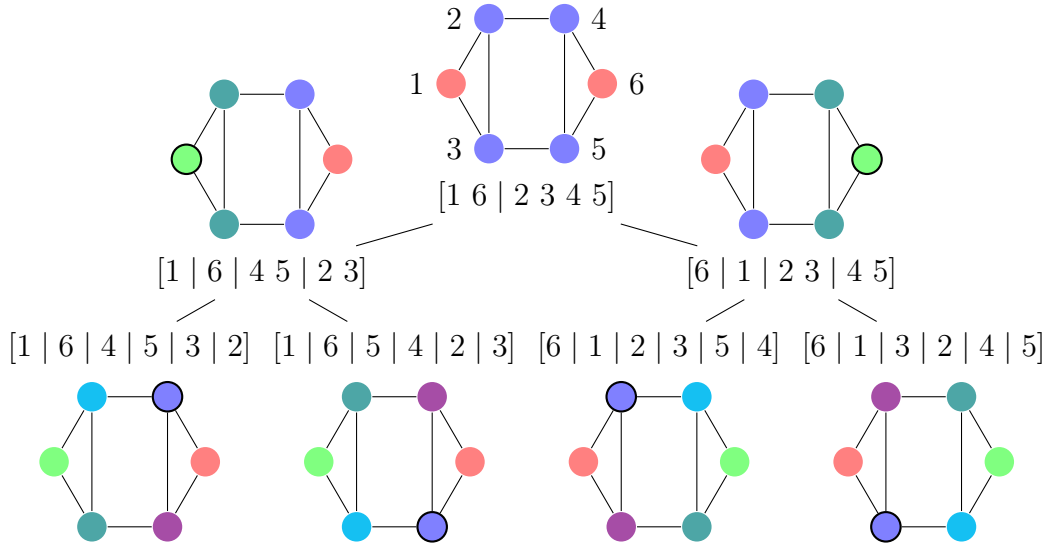
gde je $\chi_W : V \rightarrow \{0, 1\}$ karakteristična funkcija skupa W . □

Primer 15. Na slici 3.3 prikazano je stablo pretrage jednobojnog grafa koje koristi definisanu funkciju profinjavanja. Prikazan je obojen graf nakon svakog profinjavanja i zaokruženi su čvorovi korišćeni prilikom individualizacije.

3.4 Invarijanta stabla

Lema 7. Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow F$ funkcija invarijantna na imenovanje čvorova, pri čemu je F neki potpuno ureden skup i neka je $\text{bin}(G)$ binarna reprezentacija gornjeg trougla matrice povezanosti grafa G . Tada je funkcija definisana sa

$$\phi(G, \pi, \nu) = \begin{cases} (f(G, \pi, [\nu]_0), \dots, f(G, \pi, [\nu]_{|\nu|})), & \text{ako } \pi_\nu \text{ nije diskretno} \\ (f(G, \pi, [\nu]_0), \dots, f(G, \pi, [\nu]_{|\nu|}), \text{bin}(G^{\pi_\nu})), & \text{inače} \end{cases}$$



Slika 3.3: Stablo pretrage generisano definisanom funkcijom profinjavanja.

invarijanta stabla pri leksikografskom poretku.

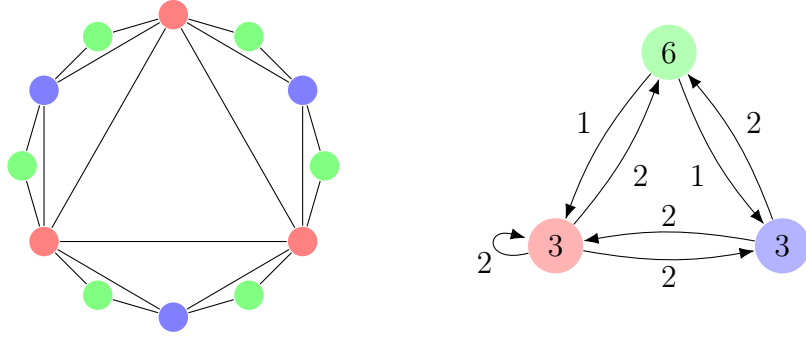
Dokaz. Dokažimo da tako definisana funkcija ϕ ispunjava uslove invarijante stabla.

- ($\phi 1$) Za svaki čvor ω podstabla $\mathcal{T}(G, \pi, \nu)$ važi da je $\phi(G, \pi, \nu) = [\phi(G, \pi, \omega)]_{|\nu|}$. Neka su ν_1 i ν_2 čvorovi stabla takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi, \nu_1) < \phi(G, \pi, \nu_2)$. Tada za čvorove $\omega_1 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G, \pi, \nu_2)$ važi $[\phi(G, \pi, \omega_1)]_{|\nu_1|} < [\phi(G, \pi, \omega_2)]_{|\nu_2|}$ pa je po leksikografskom poretku i $\phi(G, \pi, \omega_1) < \phi(G, \pi, \omega_2)$.
- ($\phi 2$) Ako za listove ν_1 i ν_2 važi $\phi(G, \pi, \nu_1) = \phi(G, \pi, \nu_2)$, onda je $\text{bin}(G^{\pi_1}) = \text{bin}(G^{\pi_2})$, pa je $G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$.
- ($\phi 3$) Neka je $g \in \text{Aut}(G, \pi)$ i ν čvor stabla. Tada je $f(G^g, \pi^g, [\nu^g]_i) = f(G^g, \pi^g, [\nu]_i^g) = f(G, \pi, [\nu]_i)$, kao i $\text{bin}((G^g)^{R(G^g, \pi^g, \nu^g)}) = \text{bin}((G^g)^{\pi^g}) = \text{bin}(G^{\pi^g})$, pa su nizovi $\phi(G^g, \pi^g, \nu^g)$ i $\phi(G, \pi, \nu)$ jednaki.

□

Još je potrebno odabrati konkretnu funkciju f . Uvedimo za početak pojam *količničkog grafa*.

Definicija. Neka je (G, π) obojen graf i π ekvitabilno. *Količnički graf* $Q(G, \pi) = (V_Q, d_Q, \psi_Q)$ je struktura takva da je V_Q skup od $|\pi|$ čvorova, $d_Q : V_Q \rightarrow \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da je $d_Q(c) = |\pi^{-1}(c)|$ i $\psi_Q : V_Q^2 \rightarrow \mathbb{N}$ preslikavanje takvo da važi $\psi_Q(c_1, c_2) = \psi(G, v, \pi^{-1}(c_2))$ za bilo koje $v \in \pi^{-1}(c_1)$.



Slika 3.4: Graf sa ekvitalnim bojenjem (levo) i odgovarajući količnički graf (desno).

Primetimo da je definicija dobra zbog ekvitalnosti bojenja π . Sledeća lema pokazuje značaj uvedenog pojma.

Lema 8. *Neka je $Q : \mathcal{G}_{eq} \rightarrow \mathcal{Q}$ prethodno definisano preslikavanje iz skupa obojenih grafova sa ekvitalnim bojenjem u skup količničkih grafova. Q je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Neka je $g \in S_n$ proizvoljno. Pokažimo da je $Q(G^g, \pi^g) = Q(G, \pi)$. Kako je $|\pi^g| = |\pi|$ to su skupovi čvorova količničkih grafova jednaki. Dalje, važi $d_{Q(G^g, \pi^g)}(c) = |(\pi^g)^{-1}(c)| = |\pi^{-1}(c)| = d_{Q(G, \pi)}(c)$. Konačno, neka je $u' \in (\pi^g)^{-1}(c_1)$. Tada važi

$$\begin{aligned}
 \psi_{Q(G^g, \pi^g)}(c_1, c_2) &= \psi(G^g, u', (\pi^g)^{-1}(c_2)) \\
 &= \sum_{v' \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u', v') \\
 &= \sum_{v^g \in (\pi^g)^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && \text{smena } u' = u^g, v' = v^g \\
 &= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G^g, u^g, v^g) && (\pi^g)^{-1}(c_2) = \pi^{-1}(c_2)^g \\
 &= \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G, u, v) && (\psi 2) \\
 &= \psi(G, u, \pi^{-1}(c_2)) \\
 &= \psi_{Q(G, \pi)}(c_1, c_2) && (\pi^g)^{-1}(c_1) = \pi^{-1}(c_1)^g
 \end{aligned}$$

□

Posledica 2. *Preslikavanje $f_Q : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \rightarrow \mathcal{Q}$ dato sa $f_Q(G, \pi, \nu) = Q(G, R(G, \pi, \nu))$ je funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Jasno je da za preslikavanje f možemo uzeti upravo ceo količnički graf, pri čemu je uređenje količničkih grafova moguće realizovati uređivanjem njihovih binarnih reprezentacija. Ovakva definicija preslikavanja f u praksi nije korisna zbog velike složenosti neophodne za njeno izračunavanje - potrebno je realizovati ceo količnički graf. Ovo je moguće rešiti posmatranjem manjeg dela količničkog grafa i to bez gubitka korisnih informacija.

Lema 9. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu = \nu' \| w$ čvor stabla različit od korena. Uvedimo oznake $\pi_1 = R(G, \pi, \nu')$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu)$. Neka su c_1, \dots, c_k boje takve da za sve $1 \leq i \leq k$ važi da $\pi_2^{-1}(c_i)$ nije ćelija bojenja π_1 . Označimo sa f_i niz vrednosti $(c_i, d_{Q(G, \pi_2)}(c_i), \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_i, c_1), \dots, \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_i, c_k))$. Tada je preslikavanje $f(G, \pi, \nu)$ čija je vrednost prazan niz $()$ u slučaju korena ν , odnosno dobijena nadovezivanjem nizova f_1, \dots, f_k u suprotnom, funkcija invarijantna na imenovanje čvorova.*

Dokaz. Pretpostavimo da za neko $g \in S_n$ i neke boje c i d važi $\pi_2^{-1}(c) = \pi_1^{-1}(d)$, odnosno da je $\pi_2^{-1}(c)$ ćelija bojenja π_1 . Tada je $R(G^g, \pi^g, \nu^g)^{-1}(c) = (\pi_2^g)^{-1}(c) = \pi_2^{-1}(c)^g = \pi_1^{-1}(d)^g = (\pi_1^g)^{-1}(d) = R(G^g, \pi^g, \nu^g)^{-1}(d)$. Analogno se pokazuje i obrnuta implikacija. Ovim smo pokazali da je niz boja c_1, \dots, c_k jednak za $f(G^g, \pi^g, \nu^g)$ i $f(G, \pi, \nu)$. Tvđenje onda jednostavno važi pošto je količnički graf funkcija invarijantna na imenovanje čvorova. \square

Lema 10. *Neka je (G, π) obojen graf i $\nu \| w_1$ i $\nu \| w_2$ različiti čvorovi stabla. Tada je $f(G, \pi, \nu \| w_1) = f(G, \pi, \nu \| w_2)$ ako i samo ako $f_Q(G, \pi, \nu \| w_1) = f_Q(G, \pi, \nu \| w_2)$.*

Dokaz. Dokaz implikacije ulevo je trivijalan. Za smer udesno dokazaćemo kontrapoziciju tvđenja.

Označimo $\pi_1 = R(G, \pi, \nu \| w_1)$ i $\pi_2 = R(G, \pi, \nu \| w_2)$. Pretpostavimo da je $Q(G, \pi_1) \neq Q(G, \pi_2)$. Ako je $V_{Q(G, \pi_1)} \neq V_{Q(G, \pi_2)}$ ili $d_{Q(G, \pi_1)} \neq d_{Q(G, \pi_2)}$ onda je skup ćelija bojenja π_1 i π_2 koje nisu ćelije u π_ν različit, pa je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$. Ako je $\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_1, c_2)$ za neke c_1 i c_2 čije odgovarajuće ćelije iz π_1 i π_2 nisu ćelije bojenja π_ν , očigledno je $f(G, \pi, \nu \| w_1) \neq f(G, \pi, \nu \| w_2)$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_2)$ ćelija bojenja π_ν . Tada zbog ekvitabilnosti bojenja π_ν za proizvoljno c_1 važi $\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G, \pi_\nu)}(d_1, d_2)$ gde je d_1 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_1) \subseteq \pi_\nu^{-1}(d_1)$, a d_2 takvo da je $\pi_1^{-1}(c_2) = \pi_\nu^{-1}(d_2)$. Odatle sledi da ne važi $\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_1, c_2)$ jer je $\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) = \psi_{Q(G, \pi_\nu)}(d_1, d_2) = \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_1, c_2)$, a znamo da su u obe jednakosti isti d_1 i d_2 u pitanju jer su $\pi_1, \pi_2 \leq \pi_\nu$.

Pretpostavimo da je $\pi_1^{-1}(c_1)$ ćelija bojenja π_ν . Tada nije $\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) \neq \psi_{Q(G, \pi_2)}(c_1, c_2)$ zato što po prethodno pokazanom važi $|\pi_1^{-1}(c_1)|\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_1, c_2) = |\pi_1^{-1}(c_2)|\psi_{Q(G, \pi_1)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_2)|\psi_{Q(G, \pi_2)}(c_2, c_1) = |\pi_2^{-1}(c_1)|\psi_{Q(G, \pi_2)}(c_1, c_2)$.

Dokažimo još korišćeno svojstvo $|\pi^{-1}(c_1)|\psi(c_1, c_2) = |\pi^{-1}(c_2)|\psi(c_2, c_1)$. Ono važi zato što za sve $u \in \pi^{-1}(c_1)$ važi $|\pi^{-1}(c_1)|\psi(c_1, c_2) = |\pi^{-1}(c_1)|\psi(G, u, \pi^{-1}(c_2)) = \sum_{u \in \pi^{-1}(c_1)} \psi(G, u, \pi^{-1}(c_2)) = \sum_{u \in \pi^{-1}(c_1)} \sum_{v \in \pi^{-1}(c_2)} \psi(G, u, v)$. Iz simetričnosti (ψ) i mogućnosti zamene mesta suma sledi tražena jednakost. \square

Primetimo da je vremenska složenost određivanja invarijante u čvoru $\nu \| w$ u klasi $O((|\pi_2| - |\pi_1|)n)$ gde je $\pi_2 = R(G, \pi, \nu \| w)$, $\pi_1 = R(G, \pi, \nu)$ i n broj čvorova grafa. Ovo se jednostavno vidi iz toga što broj ćelija π_2 koje nisu ćelije π_1 upravo $|\pi_2| - |\pi_1|$ i iz toga što je za određivanje svakog niza f_i dovoljno $O(n)$ koraka. To znači da ukupna složenost određivanja svih invarijanti od korena do jednog od listova stabla pripada klasi $O(n^2)$.

3.5 Automorfizmi

Prilikom pretrage otkrivaju se automorfizmi koji se dalje koriste za odsecanje. Ako je poznat skup automorfizama $\{g_1, \dots, g_n\}$, u operaciji odsecanja P_C moguće je primeniti ne samo neki od tih automorfizama, već i proizvoljan automorfizam iz grupe generisane tim skupom.

Operacija odsecanja P_C se primenjuje što je ranije u stablu moguće. Konkretno, neka je $\nu = (v_1, \dots, v_{|\nu|})$ i neka je k dužina najdužeg zajedničkog prefiksa nizova ν i ν^g za neki automorfizam g . Tada je moguće primeniti operaciju odsecanja $P_C([\nu]_{k+1}, g)$. Primetimo da g stabilizuje niz $[\nu]_k$, odnosno $g \in \Sigma_{[\nu]_k}$ i da stoga v_{k+1} i v_{k+1}^g pripadaju istoj orbiti tog stabilizatora.

Zbog ovoga je korisno na efikasan način realizovati određivanje stabilizatora (ili nekog njegovog podskupa) i određivanje orbita nekog skupa automorfizama. Pored samog skupa automorfizama čuvaju se podaci koji ovo i omogućavaju.

Neka je $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ skup automorfizama. Definišimo $stab_S(v) = \{g \in S \mid v^g = v\}$. Grupa automorfizama generisana skupom $S_\nu = \bigcap_{1 \leq j \leq k} stab_S(v_j)$ je podgrupa stabilizatora niza $\nu = (v_1, \dots, v_k)$, odnosno $\langle S_\nu \rangle \leq \Sigma_\nu^{Aut(G, \pi)}$.

Definišimo $mcr_S(v) = \min \Omega_v^{<S>}$. Neka je ν čvor stabla. Kako je prema prethodno pokazanom P_C moguće primenjivati za bilo koja dva čvora iz iste orbite stabilizatora, možemo odseći pretragu u bilo kom čvoru $\nu \| v$ za koji važi $v \neq mcr_{S_\nu}(v)$.

Prilikom dodavanja novog automorfizma g u skup potrebno je ažurirati ove podatke. Skupovi $stab_S(v)$ se jednostavno ažuriraju dodavanjem g tamo gde je potrebno. Kako bi se ažuriranje predstavnika orbita moglo efikasno izvršiti, pamti se pomoćna particija Ω čvorova po orbitama. Prilikom dodavanja se nova particija određuje kao tranzitivno zatvorenje unije particije Ω i particije ciklusa (orbita) automorfizma g . Ovo je moguće realizovati pretragom u širinu sa složenošću $O(n)$ ako je n broj čvorova grafa.

3.6 Pretraga

Generisanje i pretraga stabla realizovani su pretragom u dubinu. Osnovni algoritam generisanja stabla dat je u nastavku.

Algoritam 3 Generisanje stabla pretrage

```

1: procedure SEARCH( $G, \pi_0, \pi, \nu$ )
2:    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$ 
3:    $cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$ 
4:   for  $v \in cell$  do
5:     Search( $G, \pi_0, I(\pi, v), \nu || v$ )

```

Izračunavanjem invarijante stabla možemo iskoristiti prethodni algoritam za određivanje kanonske forme. Pored toga, poznavanje invarijante stabla omogućava odsecanje operacijom P_A . Tokom obilaska stabla pamti se list ρ čija je vrednost invarijante $\phi(G, \pi_0, \rho)$ najveća među svim do sada obrađenim listovima, odnosno () ukoliko do sada nije obrađen nijedan list. Nakon završenog obilaska stabla čvor ρ je upravo čvor ν^* neophodan za određivanje kanonske forme.

Algoritam 4 Određivanje kanonske forme

```

1: procedure SEARCH( $G, \pi_0, \pi, \nu$ )
2:    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$ 
3:   if  $|\rho| \geq |\nu| \wedge \phi(G, \pi_0, \nu) < \phi(G, \pi_0, [\rho]_{|\nu|})$  then
4:     return
5:    $cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$ 
6:   for  $v \in cell$  do
7:     Search( $G, \pi_0, I(\pi, v), \nu || v$ )
8:   if  $cell = \emptyset$  then
9:     if  $\rho = () \vee \phi(G, \pi_0, \nu) > \phi(G, \pi_0, \rho)$  then
10:       $\rho \leftarrow \nu$ 

```

Kako bi bilo moguće odrediti generatore grupe automorfizama i primeniti operaciju odsecanja P_C neophodno je tokom pretrage otkrivati i pamtit i otkrivene automorfizme. Održava se skup otkrivenih automorfizama S . Jedan od načina da se primeni operacija P_C je da se pretraga rekurzivno pokreće samo za one čvorove odabrane ćelije za koje važi $v = mcr_{S_\nu}(v)$.

Otkrivanje novih automorfizama omogućeno je pamćenjem jednog lista ζ , konkretno prvog otkrivenog lista. Kada se prilikom pretrage otkrije list ν , u slučaju da su ζ i ν ekvivalentni listovi $g = \pi_\zeta^{-1}\pi_\nu$ je otkriven automorfizam i on se dodaje u skup S . Kako se novi automorfizmi otkrivaju samo u listovima ekvivalentnim listu ζ , moguće je u velikoj meri primenjivati operaciju odsecanja P_B . Ovde dolazimo i do drugog načina za primenu operacije P_C . Kako je $\nu^g = \zeta$, g je automorfizam koji stabilizuje $lca(\nu, \zeta)$ (najduži zajednički prefiks za ν i ζ). Ako je njegova dužina $k = |lca(\nu, \zeta)|$, tada je $[\nu]_{k+1}^g = [\zeta]_{k+1}$ i moguće je primeniti operaciju odsecanja $P_C([\nu]_{k+1}, g)$. Ovo je moguće realizovati skokom unazad - povratna vrednost određuje do kog nivoa u pretrazi je potrebno vratiti se. Nakon završenog obilaska stabla skup S predstavlja skup generatora grupe $Aut(G, \pi_0)$.

Algoritam 5 Određivanje generatora grupe automorfizama

```

1: procedure SEARCH( $G, \pi_0, \pi, \nu$ )
2:    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$ 
3:   if  $\zeta \neq () \wedge (|\zeta| < |\nu| \vee \phi(G, \pi_0, \nu) \neq \phi(G, \pi_0, [\zeta]_{|\nu|}))$  then
4:     return  $|\nu|$ 
5:    $cell \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$ 
6:    $mcr \leftarrow cell$ 
7:   for  $v \in cell$  do
8:     if  $v \in mcr$  then
9:        $b \leftarrow \text{Search}(G, \pi_0, I(\pi, v), \nu || v)$ 
10:      if  $|\nu| > b$  then
11:        return  $b$ 
12:       $mcr \leftarrow mcr \cap \{v \in V \mid v = mcr_{S_\nu}(v)\}$ 
13:   if  $cell = \emptyset$  then
14:     if  $\zeta = ()$  then
15:        $\zeta \leftarrow \nu$ 
16:        $g = \pi_\zeta^{-1}\pi_\nu$ 
17:       if  $G^g = G$  then
18:          $\text{insert}(S, g)$ 
19:       return  $|lca(\nu, \zeta)|$ 
20:   return  $|\nu|$ 

```

Konačno, kako bismo iskoristili automorfizme u odsecanju prilikom određivanja kanonske forme, potrebno je da istovremeno vršimo prethodna dva algoritma. Primitimo da je otkrivanje automorfizama sada moguće vršiti i u odnosu na list ρ .

Algoritam 6 Određivanje kanonske forme i grupe automorfizama

```

1: procedure SEARCH( $G, \pi_0, \pi, \nu$ )
2:    $\pi \leftarrow \text{Refine}(G, \pi, \nu)$ 
3:    $\text{max\_path} \leftarrow |\rho| < |\nu| \vee \phi(G, \pi_0, \nu) \geq \phi(G, \pi_0, [\rho]_{|\nu|})$ 
4:    $\text{aut\_path} \leftarrow |\zeta| \geq |\nu| \wedge \phi(G, \pi_0, \nu) = \phi(G, \pi_0, [\zeta]_{|\nu|})$ 
5:   if  $\neg \text{max\_path} \wedge \neg \text{aut\_path}$  then
6:     return  $|\nu|$ 
7:    $\text{cell} \leftarrow \text{Target\_cell}(\pi)$ 
8:    $\text{mcr} \leftarrow \text{cell}$ 
9:   for  $v \in \text{cell}$  do
10:    if  $v \in \text{mcr}$  then
11:       $b \leftarrow \text{Search}(G, \pi_0, I(\pi, v), \nu \| v)$ 
12:      if  $|\nu| > b$  then
13:        return  $b$ 
14:       $\text{mcr} \leftarrow \text{mcr} \cap \{v \in V \mid v = \text{mcr}_{S_\nu}(v)\}$ 
15:   if  $\text{cell} = \emptyset$  then
16:     if  $\rho = () \vee \phi(G, \pi_0, \nu) > \phi(G, \pi_0, \rho)$  then
17:        $\rho \leftarrow \nu$ 
18:     if  $\zeta = ()$  then
19:        $\zeta \leftarrow \nu$ 
20:      $g = \pi_\zeta^{-1} \pi_\nu$ 
21:     if  $G^g \neq G$  then
22:        $g = \pi_\rho^{-1} \pi_\nu$ 
23:     if  $G^g = G$  then
24:        $\text{insert}(S, g)$ 
25:       if  $\text{mcr}_{S_{lca(\nu, \zeta)}}(v) \neq v$  where  $\nu = \nu' \| v$  then
26:         return  $|lca(\nu, \zeta)|$ 
27:       return  $|lca(\nu, \rho)|$ 
28:   return  $|\nu|$ 

```

Za otkrivanje automorfizama moguće je čuvati i više od pomenuta dva lista ρ i ζ . U tom slučaju je moguće ranije u pretrazi otkriti veći deo grupe automorfizama, ali u tom slučaju sama provera ekvivalentnosti listova prilikom otkrivanja automorfizma postaje sporija.

Moguće su i drugačije strategije obilaska stabla. Program `Traces citeMcKay` vrši pretragu stabla u širinu što omogućava odsecanje svih čvorova stabla nekog nivoa

čija invarijanta nije maksimalna. Pošto ovakvim obilaskom nije moguće direktno otkrivati automorfizme kao u slučaju pretrage u dubinu, puštaju se pomoćni slučajni putevi do listova stabla prilikom pretrage sa svrhom otkrivanja automorfizama na način sličan prethodno opisanom.

3.7 Invarijanta grafa

U definiciji ekvitalnog bojenja korišćena je funkcija $\psi(G, u, W) = \sum_{v \in W} \psi(G, u, v)$ koja predstavlja broj grana koje povezuju čvor u sa čvorovima iz skupa W . Možemo primetiti da se stavovi i dokazi koji koriste koncept ekvitalnosti ne pozivaju na konkretno značenje funkcije ψ , već samo na određena svojstva te funkcije koja nam omogućavaju da uopštimo značenje ekvitalnog bojenja.

Definicija. Preslikavanje $\psi : \mathcal{G} \times V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ je *invarijanta grafa* ukoliko za svaki graf G i par čvorova u i v zadovoljava sledeće uslove:

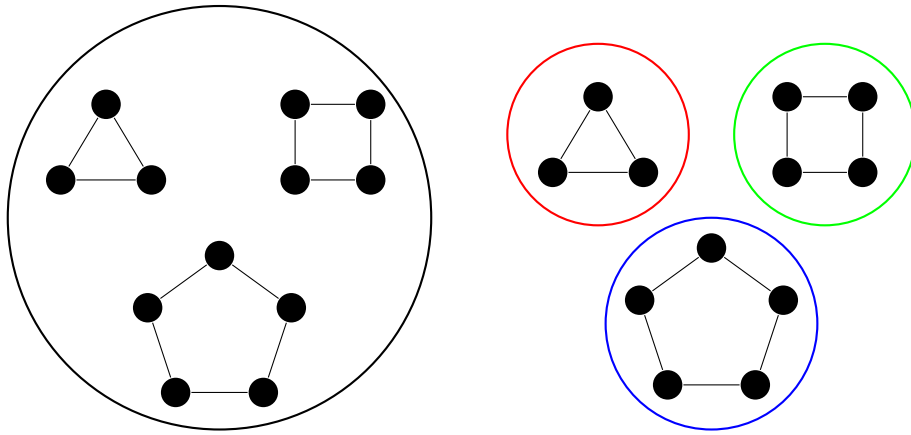
$$(\psi 1) \quad \psi(G, u, v) = \psi(G, v, u)$$

$$(\psi 2) \quad \psi(G^g, u^g, v^g) = \psi(G, v, u) \text{ za } g \in S_n$$

Onda možemo definisati $\psi(G, u, W) = \sum_{v \in W} \{\psi(G, u, v)\}$ pri čemu sada sumu interpretiramo kao sabiranje multiskupova.

Značaj uvedenog pojma dolazi iz činjenice da je dovoljno jednom, pre izvršavanja algoritma, za uneti graf izračunati odabranu invarijantu. To znači da je jedino povećanje u ukupnoj složenosti celog postupka cena tog pretprocesiranja. Nakon toga, ukoliko je odabrana pogodna invarijanta, moguća je velika ušteda usled moćnije procedure profinjavanja i manjeg stepena grananja stabla pretrage.

Primer 16. *Posmatrajmo (nepovezan) graf sa slike 3.5. Standardna procedura profinjavanja koja koristi matricu povezanosti će kao rezultat vratiti bojenje jednako početnom. Procedura profinjavanja koja koristi invarijantu grafa $d(G, u, v)$ koja predstavlja dužinu najkraćeg puta između čvorova u i v (ili ∞ ako put ne postoji) će odrediti bojenje čije su ćelije tačno orbite čvorova u grupi automorfizama.*



Slika 3.5: Levo je prikazana particija usled standardne procedure profinjavanja. Količnički graf sadrži jedan čvor c i važi $\psi(c, c) = 2$. Desno je prikazana particija usled profinjavanja sa invarijantom najkraćeg puta. Količnički graf sadrži tri čvora a , b i c i važi $\psi(a, a) = \{0, 1, 1\}$, $\psi(b, b) = \{0, 1, 1, 2\}$ i $\psi(c, c) = \{0, 1, 1, 2, 2\}$, dok su $\psi(x, y)$ za različite x i y multiskupovi sa različitim brojem beskonačnosti.

Glava 4

Rezultati testiranja

Glava 5

Zaključak

Bibliografija

- [1] Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM Journal on Computing*, 16:486–502, 1987.
- [2] Petar Petrović and Mika Mikić. Naučni rad. In Miloje Milojević, editor, *Konferencija iz matematike i računarstva*, 2015.

Biografija autora

Biografija.