UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

matf.png

Ivan Drecun

ALGORITMI ZA ISPITIVANJE IZOMORFIZMA GRAFOVA

master rad

Beograd, 2021.

Mentor:

dr Filip Marić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Miodrag Živković, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vesna Marniković, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Mami, tati i dedi

Naslov master rada: Algoritmi za ispitivanje izomorfizma grafova

Rezime: Apstrakt rada.

Ključne reči: ključne, reči

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Glava 2

Opšti algoritam

U ovoj glavi predstavljeni su osnovni matematički pojmovi neophodni za dalje razumevanje konstrukcije opšteg algoritma za određivanje kanonske forme grafa. Uvedeni su pojmovi *bojenja* i *obojenog grafa*, nakon čega je prikazana konstrukcija stabla pretrage koja leži u osnovi algoritma i na osnovu koje je precizno definisana kanonska forma. Prikazana je i uloga automorfizama u pretrazi, kao i mehanizmi za odsecanje pretrage.

2.1 Osnovni pojmovi

Obojen graf

Graf $G = (V, E)$ je uređeni par konačnog *skupa čvorova* V i *skupa grana* $E \subseteq \binom{V}{2}$. U nastavku pretpostavljamo da je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki prirodan broj $n > 0$. Označimo skup svih grafova sa $\mathcal{G}$ i skup svih grafova sa n čvorova sa $\mathcal{G}_n$.

Bojenje grafa G je surjekcija $\pi : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ za neki prirodan broj $k > 0$. Označimo skup svih bojenja sa Π i skup svih bojenja grafa sa n čvorova sa Π_n.

Broj k zovemo brojem boja i označavamo ga sa $|\pi|$. Ćelija bojenja π boje c je skup svih čvorova te boje, odnosno $\pi^{-1}(c)$ za $c \in \{1, 2, ..., k\}$. Bojenje je diskretno ukoliko je $|\pi| = n$ i tada je π permutacija skupa V.

Bojenje π_1 je finije od bojenja π_2 (u oznaci $\pi_1 \leq \pi_2$) ukoliko za sve $v, w \in V$ važi implikacija $\pi_2(v) < \pi_2(w) \implies \pi_1(v) < \pi_1(w)$.

Obojen graf je uređeni par (G, π) gde je π jedno bojenje grafa G.

Dejstvo grupe S_n

Neka S_n označava simetričnu grupu stepena n. Sliku čvora $v \in V$ pod permutacijom $g \in S_n$ označavamo sa v^g. Ovim je definisano jedno dejstvo grupe S_n na skup V. Orbita čvora v pod tim dejstvom je skup $\Omega_v = \{v^g \mid g \in S_n\}$. Stabilizator čvora v je skup $\Sigma_v = \{g \in S_n \mid v^g = v\}$ koji čini jednu podgrupu od S_n. Definiciju dejstva grupe permutacija možemo proširiti i na složenije strukture:

- $W^g = \{w^g \mid w \in W\}$ za skup $W \subseteq V$
- $w^g = (v_1^g, v_2^g, \ldots, v_k^g)$ za uređenu k-torku w
- $G^g = (V, E')$ za graf G i $E' = \{e^g \mid e \in E\}$
- Ako je π bojenje, π^g je bojenje za koje važi $\pi^g(v^g) = \pi(v)$ odnosno $\pi^g = \pi g^{-1}$
- $(G, \pi)^g = (G^g, \pi^g)$ za obojen graf (G, π)

Izomorfizam

Obojeni grafovi (G_1, π_1) i (G_2, π_2) su *izomorfni* (u oznaci $(G_1, \pi_1) \cong (G_2, \pi_2)$) ukoliko postoji $g \in S_n$ tako da je $(G_1, \pi_1) = (G_2, \pi_2)^g$. Takvo g zovemo *izomorfizam.*

Automorfizam obojenog grafa (G, π) je izomorfizam tog grafa sa samim sobom, odnosno $g \in S_n$ za koje važi $(G, \pi) = (G, \pi)^g$. Skup automorfizama grafa (G, π) označavamo sa $Aut(G, \pi)$. Zajedno sa operacijom kompozicije preslikavanja skup $Aut(G, \pi)$ čini *grupu automorfizama.*

Kanonska forma

Neka je $f : \mathcal{G} \times \Pi \to S$ preslikavanje iz skupa svih obojenih grafova u proizvoljan skup S. Kažemo da je f invarijantno na imenovanje čvorova ukoliko za svaki obojen graf (G, π) i svaku permutaciju $g \in S_n$ važi $f(G^g, \pi^g) = f(G, \pi)$. Neformalno, to znači da vrednost funkcije f ne zavisi od konkretnog imenovanja čvorova grafa, već samo od njegove unutrašnje strukture.

Kanonska forma je funkcija $\mathcal{C} : \mathcal{G} \times \Pi \to \mathcal{G} \times \Pi$ koja ispunjava sledeće uslove:

($\mathcal{C}1$) Za svaki obojen graf (G, π) važi $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$

($\mathcal{C}2$) $\mathcal{C}$ je invarijantno na imenovanje čvorova

2.2 Stablo pretrage

Označimo sa V^* skup svih konačnih nizova elemenata skupa V. Ako je $\nu \in V^*$ sa $|\nu|$ označavamo dužinu niza ν. Ako je $\nu = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in V^*$ i $w \in V$, onda $\nu \| w$ označava niz $(v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$. Za $0 \leq s \leq k$ prefiks niza ν dužine s označavamo sa $[\nu]_s = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$. Uređenje $\leq$ na skupu V^* predstavlja leksikografski poredak.

Čvorovi stabla pretrage predstavljeni su nizovima elemenata skupa V, pri čemu korenu stabla odgovara prazan niz. U nastavku definišemo funkcije na osnovu kojih ćemo definisati pravila grananja u stablu.

Definicija. *Funkcija profinjavanja* je bilo koja funkcija $R : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \Pi$ koja za svaki obojen graf (G, π_0) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(R1) $R(G, \pi_0, \nu) \leq \pi_0$

(R2) Ako je $v \in \nu$, onda je $\{v\}$ ćelija bojenja $R(G, \pi_0, \nu)$

(R3) Za svako $g \in S_n$ važi $R(G^g, \pi_0^g, \nu^g) = R(G, \pi_0, \nu)^g$

Definicija. *Funkcija odabira ciljne ćelije* je bilo koja funkcija $T : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to \mathcal{P}(V)$ koja za svaki obojen graf (G, π_0) i svako $\nu \in V^*$ zadovoljava sledeće uslove:

(T1) Ako je $R(G, \pi_0, \nu)$ diskretno, onda je $T(G, \pi_0, \nu) = \emptyset$

(T2) Ako $R(G, \pi_0, \nu)$ nije diskretno, onda je $T(G, \pi_0, \nu)$ nejedinična ćelija od $R(G, \pi_0, \nu)$

(T3) Za svako $g \in S_n$ važi $T(G^g, \pi_0^g, \nu^g) = T(G, \pi_0, \nu)^g$

Kako je graf fiksan, ove funkcije možemo smatrati funkcijama čvorova stabla. Funkcija profinjavanja obezbeđuje postojanje bojenja pridruženog svakom čvoru stabla (koje postaje finije kako se spuštamo niz stablo). Funkcija odabira ciljne ćelije nam omogućava da odaberemo skup čvorova grafa koji nam služi za konstrukciju dece tog čvora u stablu. Treći uslov u obe definicije je varijanta pomenute invarijantnosti na imenovanje čvorova. On govori da funkcije treba da zavise samo od unutrašnje strukture grafa i da transformacije koje one vrše ne zavise od imenovanja čvorova grafa.

Definicija. *Stablo pretrage* $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ određeno je sledećim uslovima:

($\mathcal{T}$1) Koren stabla $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ je prazan niz ()

($\mathcal{T}2$) Ako je ν čvor stabla $\mathcal{T}(G, \pi_0)$, njegova deca u stablu su $\{\nu \| w \mid w \in T(G, \pi_0, \nu)\}$

Dejstvo grupe S_n na stablo definiše se slično kao za bilo koju drugu strukturu. Naredna lema pokazuje da je ovako definisano stablo invarijantno na imenovanje čvorova grafa.

Lema 1. *Za svaki obojen graf* (G, π_0) *i svako* $g \in S_n$ *važi* $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g) = \mathcal{T}(G, \pi_0)^g$.

Dokaz. Dokažimo da za svaki čvor ν stabla $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ važi da je ν^g čvor stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$. Dokaz izvodimo indukcijom po strukturi stabla.

> **Baza indukcije** Prazan niz je koren stabla $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$, pa tvrđenje trivijalno važi.
>
> **Induktivni korak** Pretpostavimo da tvrđenje važi za čvor ν. Neka je $\nu \| w$ dete čvora ν za neko $w \in T(G, \pi_0, \nu)$. Tada je $(\nu \| w)^g = \nu^g \| w^g$, ali kako važi $w^g \in T(G, \pi_0, \nu)^g =_{(T3)} T(G^g, \pi_0^g, \nu^g)$ to je $\nu^g \| w^g$ dete čvora ν^g u stablu $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$.

Time smo dokazali da je stablo $\mathcal{T}(G, \pi_0)^g$ podstablo od $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$ ($\mathcal{T}(G, \pi_0)^g \subseteq \mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)$). Prema prethodno dokazanom važi $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g)^{g^{-1}} \subseteq \mathcal{T}(G, \pi_0)$, pa primenom g na obe strane konačno dobijamo $\mathcal{T}(G^g, \pi_0^g) \subseteq \mathcal{T}(G, \pi_0)^g$. □

Posledica 1. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ *i neka* $\mathcal{T}(G, \pi_0, \nu)$ *označava njegovo podstablo sa korenom u* ν. *Ako je* $g \in Aut(G, \pi_0)$, *onda je* ν^g *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi)$ *i važi* $\mathcal{T}(G, \pi_0, \nu^g) = \mathcal{T}(G, \pi_0, \nu)^g$.

Lema 2. *Neka je* ν *čvor stabla* $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ *i* $\pi = R(G, \pi_0, \nu)$. *Tada je* $Aut(G, \pi) = \Sigma_\nu$.

Dokaz. Na osnovu uslova (R2) bilo koji automorfizam obojenog grafa (G, π) stabilizuje ν. Sa druge strane, neka $g \in Aut(G, \pi_0)$ stabilizuje ν. Tada po (R3) važi $\pi^g = R(G, \pi_0, \nu)^g = R(G, \pi_0, \nu) = \pi$, pa je $g \in Aut(G, \pi)$. □

2.3 Invarijanta stabla

Definicija. *Invarijanta stabla* je funkcija $\phi : \mathcal{G} \times \Pi \times V^* \to F$ za neki potpuno uređen skup F koji za sve obojene grafove (G, π_0) i različite čvorove $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi_0)$ ispunjava sledeće uslove:

($\phi 1$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi_0)$ takvi da je $|\nu_1| = |\nu_2|$ i $\phi(G, \pi_0, \nu_1) < \phi(G, \phi_0, \nu_2)$, onda za sve $\omega_1 \in \mathcal{T}(G, \pi_0, \nu_1)$ i $\omega_2 \in \mathcal{T}(G, \pi_0, \nu_2)$ važi $\phi(G, \pi_0, \omega_1) < \phi(G, \pi_0, \omega_2)$

($\phi 2$) Ako su $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{T}(G, \pi_0)$ takvi da su $\pi_1 = R(G, \pi_0, \nu_1)$ i $\pi_2 = R(G, \pi_0, \nu_2)$ diskretna bojenja, onda je $\phi(G, \pi_0, \nu_1) = \phi(G, \pi_0, \nu_2) \iff G^{\pi_1} = G^{\pi_2}$

($\phi 3$) ϕ je invarijantno na imenovanje čvorova grafa

Listovi ν_1 i ν_2 su *ekvivalentni* ako i samo ako $\phi(G, \pi_0, \nu_1) = \phi(G, \pi_0, \nu_2)$.

U nastavku ćemo kroz dve teoreme prikazati značaj ovako definisane invarijante stabla. Označimo za proizvoljan čvor stabla ν njegovo bojenje dobijeno funkcijom profinjavanja sa $\pi_\nu = R(G, \pi_0, \nu)$.

Lema 3. *Neka je $g \in Aut(G, \pi_0)$ i listovi ν_1 i ν_2 takvi da je $\nu_1^g = \nu_2$. Tada su ν_1 i ν_2 ekvivalentni i $g = \pi_{\nu_2}^{-1}\pi_{\nu_1}$.*

Dokaz. Na osnovu svojstva ($\phi 3$) invarijante stabla i činjenice da je g automorfizam sledi $\phi(G, \pi_0, \nu_1) =_{(\phi_3)} \phi(G^g, \pi_0^g, \nu_1^g) =_{g \in Aut(G, \pi_0)} \phi(G, \pi_0, \nu_1^g) = \phi(G, \pi_0, \nu_2)$, odnosno ν_1 i ν_2 su ekvivalentni. Dalje, važi $\pi_{\nu_2}^{-1}\pi_{\nu_1} = \pi_{\nu_1^g}^{-1}\pi_{\nu_1} =_{(R3)} (\pi_{\nu_1}^g)^{-1}\pi_{\nu_1} = (\pi_{\nu_1} g^{-1})^{-1}\pi_{\nu_1} = g\pi_{\nu_1}^{-1}\pi_{\nu_1} = g$. □

Teorema 1. *Za svaki list ν važi $Aut(G, \pi_0) = \{\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \mid \nu \text{ i } \omega \text{ su ekvivalentni}\}$.*

Dokaz. Neka je $g \in Aut(G, \pi_0)$. Tada je po posledici 1 ν^g list stabla $\mathcal{T}(G, \pi_0)$. Po prethodno dokazanoj lemi 3 su ν i ν^g ekvivalentni i $g = \pi_{\nu^g}^{-1}\pi_\nu$ što je element desne strane. Sa druge strane, ako su ν i ω ekvivalentni, onda je $G^{\pi_\nu} = G^{\pi_\omega}$, pa je $\pi_\omega^{-1}\pi_\nu \in Aut(G, \pi_0)$. □

Definicija. Neka je ν^* list stabla $\mathcal{T}(G, \pi_0)$ u kom invarijanta $\phi(G, \pi_0, \nu)$ dostiže maksimum. *Kanonska forma* obojenog grafa (G, π_0) je funkcija $\mathcal{C}(G, \pi_0) = (G, \pi_0)^{\pi_{\nu^*}}$.

Primetimo da zbog uslova ($\phi 2$) definicija ne zavisi od izbora lista v^*. Naredna teorema opravdava naziv funkcije.

Teorema 2. *Funkcija $\mathcal{C}(G, \pi_0)$ je kanonska forma.*

Dokaz. Dokazujemo da ovako definisana funkcija ispunjava uslove kanonske forme.

($\mathcal{C}1$) Za svaki obojen graf (G, π) je $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$ pa je $\mathcal{C}(G, \pi) \cong (G, \pi)$.

($\mathcal{C}2$) Neka je $\mathcal{C}(G, \pi) = (G, \pi)^{\pi_{\nu^*}}$. ...

□

2.4 Odsecanje pretrage

Glava 3

Realizacija algoritma

Glava 4

Rezultati testiranja

Glava 5

Zaključak

Bibliografija

[1] Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM Journal on Computing*, 16:486–502, 1987.

[2] Petar Petrović and Mika Mikić. Naučni rad. In Miloje Milojević, editor, *Konferencija iz matematike i računarstva*, 2015.

Biografija autora

Biografija.