1 equation

1.1 30% 数据

暴力，这时答案本身很小，所以只需要写一个 dfs。

1.2 70% 数据

这个问题等价于"将 m 个相同的球放进 n 个不同的盒子中"的方案数，所以：

$$ans = \binom{n+m-1}{m}$$

（记得课上讲的夹棍法吗?）

后者可以用递推公式算：

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

也可以暴力乘+逆元。

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

复杂度后者好点（因为模数不同，前者每次都要推一遍）

1.3 余下 30% 数据

用公式推应该会超时，只能用后面那个，求逆元可以用扩展欧几里得，也可以欧拉定理（注意题目中 $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$）。当然也可以在在模 p 和模 q 时答案求出来，再用中国剩余定理合并。

2 power

2.1 10% 数据

暴力循环

2.2 30% 数据

普通二进制快速幂

2.3 70% 数据

高精度 + 二进制快速幂

2.4 100% 数据

十进制快速幂，类比二进制，从低到高维护好 3^{10^i}。

3 comb

3.1 30% 数据

暴力算出组合数，用递推公式

3.2 100% 数据

题目就是求：

$$p \mid \binom{n}{i}$$

即：

$$\binom{n}{i} \equiv 0 \; (mod \; p)$$

的 i 的个数。想到可能和 Lucas 有关，我们先把问题转化成求：

$$p \nmid \binom{n}{i}$$

的 i 的个数。由 Lucas 定理：

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\cdots\binom{n_s}{m_s} \; (mod \; p)$$

其中 $n_1 n_2 \ldots n_s$ 和 $m_1 m_2 \ldots m_s$ 是 n 和 m 的 p 进制分解。容易发现：只要右边每一项模意义下都非 0，那么右边乘起来都非零，这样的数 m 有：

$$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_s+1)$$

个，这就是不满足条件的数的个数，那么答案就是：

$$(n+1)-(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_s+1)$$

4 derange

4.1 30% 数据

用`next_permutation` 枚举排列，然后暴力 check。

4.2 70% 数据

我们用 $D[n]$ 表示 n 个元素的错排数量，那么我们可以通过枚举不合法的排列重合的个数来算出 $D[n]$：

$$D[n] = n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} D[n-i]$$

初始值是：

$$D[0] = 1$$

我们可以先处理出组合数，再跑这个递推，就行了。

4.3 100% 数据

$D[n]$ 中，我们先选择 n 号元素的位置，有 $n-1$ 种选择 $([1, n-1])$ ，假设 n 放在了 i 号位置，我们再考虑 i 号元素放哪，此时分两种情况：

- i 放在 n 号位置，此时有 $D[n-2]$ 种放法。
- i 号元素不放在 n 号位置，问题就转化成了：我要将 $[1, n-1]$ 这 $n-1$ 个元素放进 $[1, i-1], [i+1, n]$ 这些位置，并且每个元素都有且仅有一个位置不能放（1 不能放在 1，2 不能放在 2，…i 不能放在 n …）。这不就是 $n-1$ 个元素的错排吗？（将 n 号位置看成 i 号元素本来的位置）。此时有 $D[n-1]$ 种放法。

5 mulfunc

我们先证明一下题目中给出的结论吧：

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

假设 n 有质因分解：$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$。从而：

$$g(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s})=\sum_{d|p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}f(d)=\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{\alpha_s}f(p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_s^{i_s})$$

因为 $f(n)$ 是积性函数，我们可以继续：

$$=\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{\alpha_s}f(p_1^{i_1})f(p_2^{i_2})\dots f(p_s^{i_s})$$

由求和的性质，又有：

$$=\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}f(p_1^{i_1})\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}f(p_2^{i_2})\cdots\sum_{i_s=0}^{\alpha_s}f(p_s^{i_s})=(\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}f(p_1^{i_1}))(\sum_{i_1=0}^{\alpha_1}f(p_2^{i_2}))\cdots(\sum_{i_s=0}^{\alpha_s}f(p_s^{i_s}))$$

$$=g(p_1^{\alpha_1})g(p_2^{\alpha_2})\dots\ g(p_s^{\alpha_s})$$

从而有：

$$g(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s})=g(p_1^{\alpha_1})g(p_2^{\alpha_2})\dots\ g(p_s^{\alpha_s})$$

就证明了 $g(n)$ 的积性。

所以，关于 $\tau(n)$ 和 $\sigma(n)$ 又有下面的定义：

$$\begin{array}{rcl}\tau(n) & = & \sum_{d|n}1\\ \sigma(n) & = & \sum_{d|n}d\end{array}$$

显然 $f(n)=1$ 和 $g(n)=n$ 都是积性函数，所以 $\tau(n)$ 和 $\sigma(n)$ 是积性函数。

由上面的结论，我们想要求一个积性函数的值，只需要弄清楚 $f(p^\alpha)$ 的值就行了。

$$\begin{array}{rcl}\tau(p^\alpha) & = & \alpha+1\\ \sigma(p^\alpha) & = & 1+p+p^2+\cdots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{(p-1)}\\ \mu(p) & = & -1\\ \mu(p^\alpha) & = & 0\quad(\alpha\geq 2)\\ \phi(p^\alpha) & = & p^\alpha-p^{\alpha-1}\end{array}$$

因为我们线性筛的时候会找到每个数的最小素因子，所以可以在线性筛是算出所有数的函数值，具体参见代码。