Solution

idy002

August 1, 2017

1 treasure

1.1 10%

用 $C(n,m)=C(n-1,m-1)+C(n-1,m)$ 递推即可.

复杂度 $O(n^2)$

1.2 30%

预处理 0 到 n 的阶乘及其在模 p 意义下的逆元, 用 $C(n,m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 计算即可.

复杂度 $O(n)$.

1.3 60%

用 lucas 定理把原问题转换为上面的问题.

复杂度 $O(p+log(n))$.

1.4 100%

对于每个 p, 先用上面的方法算出 $C(n,m)$ 其模 p 的值, 就得到了 k 个形如:

$$x_i \equiv a_i \quad (mod\, p_i)$$

的同余方程, 用中国剩余定理合并一下即可. 中间可能会用到快速乘.

复杂度 $O(k(p+log(n)))$

2 kand

2.1 10%

暴力 dfs 所有 k 组合即可.

复杂度 $O(C(n,k))$.

2.2 30%

考虑动态规划, 状态 $dp[i][j][S]$ 表示前 i 个数选了 j 个出来, 其按位与为 S 的方案数, 每次 $O(1)$ 转移.

复杂度 $O(n^2 2^k)$, 其中 k 为最大位数.

2.3 60%

考虑容斥原理.

我们用 $cnt1[S]$ 表示值为 S 的数的个数, 通过它可以计算出 $cnt2[S]$, 表示值"包含"S 的数的个数 (a 包含 b 当且仅当 $a\&b=b$).

这一步可以先枚举一个 s, 然后枚举 $U-s$ 的子集 ss, 将所有 $cnt1[s|ss]$ 加到 $cnt2[s]$ 中即可, 复杂度 (3^k),k 为最大位数.

然后通过 $cnt2[S]$ 可以计算出 $cnt3[S]$, 表示从原来的 n 个数中选择 k 个并取交后, 该值包含 S 的方案数. 显然有 $cnt3[s]=comb(cnt2[s],k)$.

然后计算 $cnt4[S]$, 表示取 k 个数取交后结果为 S 的方案数. 和第二步类似, 只是每次从加变成减 (从大到小枚举).

以上第一步和第三步复杂度为 $O(3^k)$, 第二步为 $O(2^k)$

总的复杂度为 $O(3^k+n)$

2.4 100%

总的思想和上面一致, 只是我们可以将第一步和第三步复杂度优化到 $O(k2^k)$.

枚举 i 从 0 到 $k-1$, 枚举到 i 时, 保证 $[0,i-1]$ 已经加完,$[i,k-1]$ 位还没有动, 然后枚举 $U^(1<<i)$ 的子集 s, 将 $s|(1<<i)$ 加到 s 上去.

这步需要自己想想合理性 (建议结合代码).

总的复杂度 $O(k2^k+n)$.

3 solar

3.1 10%

观察到，一个星球走至多 $lcm(nx, ny, nz)$ 就会回到原来所在的点，所以只需要暴力一秒一秒地走，如果走了那么多秒还没有撞就不可能撞了。

复杂度：$O(nx \times ny \times nz)$

3.2 30%

和上一题一样的思路，但要考虑多个星球的碰撞问题。

复杂度：$O(n \times nx \times ny \times nz)$

3.3 另外 40%

总的思路是，找出下一个会有星球发生碰撞的时刻，然后暴力模拟一次，每发生一次碰撞，星球数就会少一个，所以最多撞 $n-1$ 次就会结束。问题在于如何求出最近的一次发生的时间。

暴力枚举两个星球，然后考虑计算出它们最近一次碰撞的时间（如果会碰撞的话），然后对这些时间取一个最小值就是了。

如何求两个星球的碰撞时刻呢？实际上就是解下面这个同余方程（不妨用 (x, y, z) 来表示位置，(u, v, w) 来表示速度,(X, Y, Z) 来表示空间大小）：

$$\begin{aligned} x_1 + tu_1 &\equiv x_2 + tu_2 \pmod{X} \\ y_1 + tv_1 &\equiv y_2 + tv_2 \pmod{Y} \\ z_1 + tw_1 &\equiv z_2 + tw_2 \pmod{Z} \end{aligned}$$

对于

$$x_1 + tu_1 \equiv x_2 + tu_1 \quad (mod\ X)$$

我们可以解这个方程，将它变成：

$$t \equiv b \quad (mod\ \frac{X}{gcd(u1 - u2, X)})$$

的形式（或者得出其无解）。将三个方程都如此变换，然后用中国剩余定理合并即可。

3.4 100%

总的思路和上面完全一样，只是现在 X, Y, Z 不一定两两互质了。用合并的思想将它解出来即可。