数据结构第一讲

关于序列的统计问题

丁尧尧

上海交通大学

February 2, 2018

目录

1. 关于序列的统计问题
2. 树状数组
   - 介绍
   - 实现
   - 正确性和复杂度分析
   - 应用、扩展、局限
3. 线段树
   - 简介
   - 能解决什么问题？
   - 总结一下
4. ST 表
   - 介绍
   - 例子
   - 一般化

关于序列的统计问题

在算法竞赛中，我们经常给出一个序列，然后在序列上进行一些操作，并在操作后询问一些关于序列的统计问题。如果按照修改和查询的范围分类，有以下几种：

1. 单点修改，区间查询
2. 区间修改，单点查询
3. 区间修改，区间查询

还可以按照修改和询问的内容分类：
比如修改可以是加一个值，设置成某一个值，将值进行一次反转等等。
关于询问，可以求：sum，max，min，gcd，种类数，中位数，众数等等。
我们现阶段先研究些简单的（关于种类数、中位数、众数之类的有些复杂）。

树状数组能做什么

我们知道，对于如下问题：

单点修改，区间求和

给定 n 个数，要求支持：

1. 单点修改 modify u x
2. 区间求和 query l r

我们一般有两种处理方式
一种是用 $a[i]$ 存储位置 i 的值，可以实现 $O(1)$ 修改，$O(n)$ 查询。
一种是用 $s[i]$ 存储前 i 个数的和，可以实现 $O(n)$ 修改，$O(1)$ 查询。
但树状数组可以实现在完全相同的空间消耗上，完成 $O(log(n))$ 的修改和查询。

我们先直接看看代码具体怎么实现的

```
void modify( int u, int x ) {
    for( int i = u; i <= n; i += lowbit(i) )
        a[i] += x;
}
void query( int r ) {
    int rt = 0;
    for( int i = r; i; i -= lowbit(i) )
        rt += a[i];
    return rt;
}
int query( int l, int r ) {
    return query(r) - query(l-1);
}
```

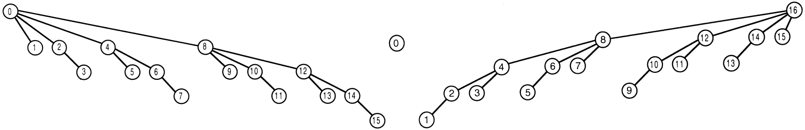
其中`lowbit(i)`返回 i 的最低位代表的数，可以通过`(i & -i)`计算得到（采用补码的机子上）。

正确性和复杂度分析

复杂度很显然都是 $O(log(n))$，下面我们来看看为什么这么做是对的。

Definition

对于一个在 $[1, n]$ 之间的整数 i，我们通过不断给它加它的 lowbit(直到它的值大于 n) 得到一个**递增序列**，不断给它减它的 lowbit(直到它的值变为 0) 得到一个**递减序列**。



[1]

[1]引用自 A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables by Fenwick

正确性和复杂度分析

然后我们可以证明如下性质：

Theorem

对于任意 $1 \leq a \leq b \leq n$，a 的递增序列与 b 的递减序列有且仅有一个元素相同。

Proof.

如果有，则唯一是显然的，为什么有呢，如果 a、b 相等，则两个序列的第一个元素相等，如果 a、b 不等，假设二进制表示下 a、b 的最高的 k 个 1 位置相同，则两个序列包含 b 的前 $i+1$ 个 1 或前 i 个 1 所代表的那个数。 □

正确性和复杂度分析

通过上面的结论，我们考虑：
若我们每次给位置 i 加 x 时，将位置 i 所对应的递增序列对应位置都加 x，查询时只需将 r 的递减序列对应位置的值加起来，就得到了我们想要的前缀和。
若我们想实现区间修改、单点查询，也是类似，假如我想将前 r 个数都加 x，只需将 r 的递减序列对应位置加 x，查询 i 时将 i 的递增序列加起来就是答案。

应用、扩展、局限

树状数组除了上面提到的两个应用还可以用于:

1. 套其他数据结构(因为其对空间的高效利用和简单,比线段树更适合作为最外层)
2. 用于二分
3. 很容易扩展到高维情况(算是第一种的特例吧)

可以通过多维护一些东西实现区间修改和区间查询(但我感觉并没有比线段树简单)。
应用树状数组,需要满足:

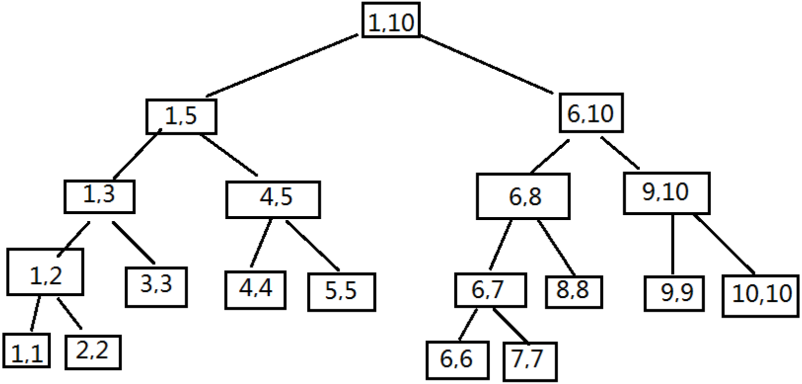
1. 下标范围从 1 开始(可调整使其满足)
2. 满足可减性: $[l, r]$ 的答案可以通过 $[1, l-1]$ 和 $[1, r]$ 得到,比如区间最大值就不满足。

什么是线段树？

首先，关于线段树，有以下几个要点：

- 它是一颗比较“匀称”的二叉树
- 树的每个节点代表了原数组的一个区间
- 树的叶子节点代表的区间只有一个元素
- 树的内部节点所代表的区间是它两个儿子按顺序拼接起来构成的
- 树节点数目等于 $2 \cdot n - 1$
- 原数组的任何一个区间都可以被 $log(n)$ 个线段树的节点表示

让我们看一下图



这种结构有什么用呢？

我们将这颗树建立起来，然后每个节点维护一下我们需要的关于其对应区间的信息。叶子节点的信息我们可以立即得到，内部节点的信息我们可以通过其子节点的信息合并得到。查询的时候我们只需要将查询区间对应的 log 个区间的信息合并，就得到了答案。假如我们只修改一个一个位置的值，那么只需要更新最多 log 个区间的信息。让我们来看一个最简单的例子：

单点修改，区间求最值

给你 n 个数：$a_1, a_2, \ldots, a_n$，再给出 m 个询问：$query\ l\ r$，每次询问区间 $[l, r]$ 的最小值和最大值，要求每个询问 $O(log(n))$ 回答。

如果我们需要修改区间怎么办？

“懒操作”！
让我们再来看一个例子。

区间修改，区间求和

给你 n 个数：$a_1, a_2, \ldots, a_n$，再给出 m 个操作，有两种操作：

1. *modify l r delta*：给 $[l, r]$ 中的每一个数加上 *delta*。
2. *query l r*：求出 $[l, r]$ 的和。

要求每个操作 $O(log(n))$ 完成。

总结

我们看看线段树能解决怎样的问题。

- 单点修改，区间查询：
  1. 对于长度为一的情况，能立即得到答案
  2. 信息可合并（and or max min sum gcd lcm）
- 区间修改，区间查询：
  1. 对于任意长度的区间，修改后的答案能立即得到。
  2. 信息可合并
  3. 懒标记 + 修改操作 = 懒标记
- 另外，如果我们在每个线段中再用一个平衡树维护一下该线段的元素，我们还可以做一些其他事情（比如找某个区间的中位数）。

ST 表

上面我们讨论的都是支持修改和查询的数据结构，我们还有一些数据结构，它们不支持修改，建立以后只支持查询操作。
ST 表就是其中一类，其在 OI 中最常用的地方是求树的 lca，还可以支持快速查询某区间信息的问题（比如 $O(1)$ 查询区间最大值）。
其也很容易扩展到高维情况，从而解决一些树套树很难或不能解决的问题。

例子

求树的 lca 有点特殊，我们先以以下问题为例：

区间最大值

给你 n 个数：$a_1, a_2, \ldots, a_n$，再给出 m 个询问：$querylr$，每次询问区间 $[l, r]$ 的最大值，要求每个询问 $O(1)$ 回答。

其它情形呢

只要我们要询问的信息满足：$[a, b]$ 的信息可以由 $[a, c], [d, b]$，$[a, b] = [a, c] U [d, b]$ 的信息得到，那么我们就可以用 ST 表实现 $O(1)$ 查询（gcd lcm and or min max）。并且很容易将线性推广到高维情形。