数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

数学第三讲
高斯消元、快速傅里叶变换

丁尧尧

上海交通大学

August 18, 2017

1. 高斯消元
   - 解方程
   - 求矩阵的行列式
   - 矩阵求逆
   - Matrix-Tree 定理
2. 快速傅里叶变换
   - 快速傅里叶变换
   - 一些题目

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

求解下列方程组:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

求解下列方程组：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
&\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

怎么解？

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列, $\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质

- 行列式是什么?
  一种定义是:
  $$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$
  其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质
  - 某行乘一个数，那么行列式也乘那个数。

数学第三讲

丁尧尧

高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质
  - 某行乘一个数，那么行列式也乘那个数。
  - 某行加到另一行，行列式不变

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \ldots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质
  - 某行乘一个数，那么行列式也乘那个数。
  - 某行加到另一行，行列式不变
  - 交换两行，行列式取反相反数

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质
  - 某行乘一个数，那么行列式也乘那个数。
  - 某行加到另一行，行列式不变
  - 交换两行，行列式取反相反数
- 行列式的计算。

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 行列式是什么?
  一种定义是:

$$det(A) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$$

  其中 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是一个 1 到 n 的排列，$\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)$ 表示该排列的逆序对数。
- 行列式的几何意义。
- 行列式的性质
  - 某行乘一个数，那么行列式也乘那个数。
  - 某行加到另一行，行列式不变
  - 交换两行，行列式取反相反数
- 行列式的计算。
  高斯消元!

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

矩阵乘法大家都知道:

$$A_{n\times m}B_{m\times r} = C_{n\times r}$$

对于方阵而言，假如:

$$AB = BA = E$$

那么 A、B 互为逆矩阵。
有两个问题:

- 什么时候一个方阵存在逆矩阵？
- 如果存在，怎么求？

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

对于第一个问题：一个矩阵存在逆矩阵当且仅当其满秩（秩是行向量组或列向量组的最大线性无关组的大小）当且仅当矩阵行列式非 0.
我们怎么求一个方阵的逆矩阵呢？

1. 矩阵进行如下操作可以相当于用一个矩阵乘以它:
   - 将一行上的所有数乘以 k
   - 将一行加到另一行上
   - 交换两行
2. 求逆的过程
   如果要求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}, 先得到一个单位矩阵 B, 然后用上面 1 中的三种操作将 A 变成单位矩阵 (不能变成单位矩阵则说明该矩阵行列式为 0, 即该矩阵不存在逆)
   将对 A 的所有操作同样地应用于 B, 最终 B 就是 A^{-1}
3. 求逆的正确性　我们对 A 进行了一系列变换, 等同于用一个矩阵 C 乘以 A 使得 $CA = I$，即 C 是 A 的逆矩阵, 将同样的操作作用于 B, 得到的矩阵为 $CB = CI = C$，即最终 B 的结果就是我们要求的逆

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念:

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念:

- **度数矩阵**

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念：

- 度数矩阵
- 邻接矩阵

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念:

- 度数矩阵
- 邻接矩阵
- 基尔霍夫矩阵 = 度数矩阵 - 邻接矩阵

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念：

- 度数矩阵
- 邻接矩阵
- 基尔霍夫矩阵 = 度数矩阵 - 邻接矩阵

Matrix-Tree 定理：

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

一些概念：

- 度数矩阵
- 邻接矩阵
- 基尔霍夫矩阵 = 度数矩阵 - 邻接矩阵

Matrix-Tree 定理：

Theorem

一个 n 个点 m 条边的无向图的生成树总数为其对应的基尔霍夫矩阵的 $n-1$ 阶余子式。

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法

丁尧尧
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree定理
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法
- 常数更小的写法？

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法
- 常数更小的写法？非递归写法！

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法
- 常数更小的写法？非递归写法！
- 一定要在复数域？

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法
- 常数更小的写法？非递归写法！
- 一定要在复数域？对于一些特殊的模空间也可以做。

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目

- 多项式的两种表示方法：系数表示法和点值表示法
- 点值表示法的优点
- 复数域 n 次单位根
- 快速地将系数表示法转化成点值表示法
- 快速地将点值表示法转换成系数表示法
- 常数更小的写法？非递归写法！
- 一定要在复数域？对于一些特殊的模空间也可以做。
- 一般的模空间?

数学第三讲
丁尧尧
高斯消元
解方程
求矩阵的行列式
矩阵求逆
Matrix-Tree 定理
快速傅里叶变换
快速傅里叶变换
一些题目