题目选讲

丁尧尧

August 20, 2018

百度之星 2018 复赛 T1

Problem

没有兄弟的舞会 给你一棵 n 个点有根树，每个点有个权值，如果两个点有相同的父亲，则他们是兄弟。你现在需要找一个点集，其中最多有一对点是兄弟关系，问这个点集的权值和是多少？
$1 \leq n \leq 10^5$.

百度之星 2018 复赛 T1

Problem

没有兄弟的舞会 给你一棵 n 个点有根树，每个点有个权值，如果两个点有相同的父亲，则他们是兄弟。你现在需要找一个点集，其中最多有一对点是兄弟关系，问这个点集的权值和是多少？

$1 \leq n \leq 10^5$.

Solution

贪心或树型 DP

百度之星 2018 复赛 T2

Problem (序列期望)

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是整数随机变量，其中 X_i 是从 $[l_i, r_i]$ 中随机选择的一个整数，令

$$h = max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{1}$$

$$Y = \prod_{i=1}^{n}(h + 1 - X_i) \tag{2}$$

问模 $10^9 + 7$ 意义下 $\mathbb{E}[Y]$.

$1 \leq n \leq 100, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^4$.

百度之星 2018 复赛 T2

Problem (序列期望)

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是整数随机变量，其中 X_i 是从 $[l_i, r_i]$ 中随机选择的一个整数，令

$$h = max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{1}$$

$$Y = \prod_{i=1}^{n}(h + 1 - X_i) \tag{2}$$

问模 $10^9 + 7$ 意义下 $\mathbb{E}[Y]$.

$1 \leq n \leq 100, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^4$.

Solution

枚举 h

百度之星 2018 复赛 T3

Problem (带劲的 and 和)

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，每个点有一个非负权值，点 i 的权值用 v_i 表示，令

$$f(i,j)=\mathbb{1}_{i\text{ 和 }j\text{ 连通}}$$

求：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} f(i,j)\times\max(v_i,v_j)\times(v_i\&v_j)$$

$1\le n\le 10^5$

百度之星 2018 复赛 T3

Problem (带劲的 and 和)

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，每个点有一个非负权值，点 i 的权值用 v_i 表示，令

$$f(i,j) = \mathbb{1}_{i \text{ 和 } j \text{ 连通}}$$

求：

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} f(i,j) \times \max(v_i, v_j) \times (v_i \& v_j)$$

$1 \le n \le 10^5$

Solution

先求连通块，对于同一个连通块的所有权值从小到达排序，然后从前往后算，其中 $v_i \& v_j$ 需要记录每一位出现多少次。

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Character Encoding)

求

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = k \quad (0 \le x_i < n)$$

的方案数 $(模\ 10^9 + 7)$。
$1 \le m, k, n \le 10^5$.

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Character Encoding)

求

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = k \quad (0 \le x_i < n)$$

的方案数 (模 10^9+7)。
$1 \le m, k, n \le 10^5$.

Solution

容斥

Problem (Card Game)

给定 n 张卡片，每张卡片正反面各有一个数。问至少要翻转多少张卡片，才能使正面向上的数互不相同，并求方案数。

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Card Game)

给定 n 张卡片，每张卡片正反面各有一个数。问至少要翻转多少张卡片，才能使正面向上的数互不相同，并求方案数。

Solution

首先建图：每个数字为一个节点，每张卡片反面数字向正面数字连一条有向边。问题转化为：至少要反转多少条边的方向，才能使得每个点的入度不会超过 1。我们对每个弱连通分量分别处理。易知，当底图是树或基环树时，才可能有解。对于基环树，先把环找出来，然后将环上的边的方向统一一下；非环边的方向则是唯一确定的，从环上的点向外做一遍 *dfs* 即可。对于树，可以正反两次 *dfs* 处理出每个点作为根时所需要的反向次数，并统计出最小值以及方案数。最后将答案合并即可。

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q)，表示如果把 p 位置的数换成 q，这个序列的可见度为多少？
$1 \leq n, m \leq 10^5$

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q)，表示如果把 p 位置的数换成 q，这个序列的可见度为多少？
$1 \le n, m \le 10^5$

Solution

法一：线段树维护

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q)，表示如果把 p 位置的数换成 q，这个序列的可见度为多少？
$1 \le n, m \le 10^5$

Solution

法一：线段树维护
法二：考虑每次修改不叠加，因此我们可以从如何对原序列进行预处理着手。通过观察可以发现，将原序列从任意位置断开，我们可以通过分别维护左右段的某些信息来拼接得到答案。对于每次询问：考虑这个数左边的部分加上这个数之后的答案和最大值；再找到右边第一个大于左半部分最大值的数，答案相加即可。

Problem (Pop the Balloons)

给定一个 $m \times n$ 气球矩阵，扎掉一个气球后，同行同列的气球都消失。
问对于每个 $1 \leq x \leq k$，扎恰好 x 次能够清除所有气球的方案数。
$1 \leq n \leq 20, 1 \leq m \leq 12.$

Solution

显然扎掉的气球两两不同行且不同列。只需要求出扎 x 个气球的集合，然后乘以 $x!$ 即可。

由于行数较少，考虑枚举扎掉的行集合，设扎掉的行的 $bitmap$ 为 $mask1$。设 $dp[r][mask2]$ 为考虑前 r 列，已经扎掉的气球所在行为 $mask2$ 的方案数。考虑状态 $dp[r][mask2]$ 的转移：

- 如果第 $i+1i+1$ 列的气球被 $mask1$ 包含，则 $dp[r+1][mask2] += dp[r][mask2]$;
- 对于第 $i+1i+1$ 列的每个在 $mask1$ 中，但不在 $mask2$ 中的气球 w，我们可以将它扎掉，即为 $dp[r+1][mask2|w] += dp[r][mask2]$;

总复杂度:$O(nm3^m)$

亦可以把最开始枚举的 $mask1$ 放到状态里和 $mask2$ 合并，复杂度不变。

A little tricky problem

Problem

给你 $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_k \leq n$, 请计算:

$$gcd(2^{F(x_1)} - 1, 2^{F(x_2)} - 1, \cdots, 2^{F(x_n)} - 1)$$

其中 $F(n)$ 是斐波那契数列: $F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 1, \ldots.$

A little tricky problem

Problem

给你 $1 \le x_1, x_2, \ldots, x_k \le n$，请计算：

$$gcd(2^{F(x_1)} - 1, 2^{F(x_2)} - 1, \cdots, 2^{F(x_n)} - 1)$$

其中 $F(n)$ 是斐波那契数列：$F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 1, \ldots$.

Solution

$$ans = 2^{F(gcd(x_1, x_2, \ldots, x_n))} - 1$$

Problem (bookshelf)

有 N 本一摸一样的书，有一个共有 K 层的书架，现在要把书都放到书架上。放完后假设第 i 层书架有 s_i 本书，则该层书架的稳固值为 $2^{F(s_i)}-1$。定义整个书架的美观值为所有层书架的稳固值的 GCD。问现在随机放这些书 $(N = s_1 + s_2 + \cdots + s_K$，两个放法不同当且仅当某个 i 使得 $s_i \neq s_i')$，整个书架的美观值的期望值是多少。
$1 \le N, K \le 10^5$，答案模 10^9+7。

2018 Multi-University Training Contest 6

Problem (bookshelf)

有 N 本一摸一样的书，有一个共有 K 层的书架，现在要把书都放到书架上。放完后假设第 i 层书架有 s_i 本书，则该层书架的稳固值为 $2^{F(s_i)}-1$。定义整个书架的美观值为所有层书架的稳固值的 GCD。问现在随机放这些书 $(N = s_1 + s_2 + \cdots + s_K$，两个放法不同当且仅当某个 i 使得 $s_i \neq s_i')$，整个书架的美观值的期望值是多少。
$1 \leq N, K \leq 10^5$，答案模 10^9+7。

Solution

我们本质要求 $d = gcd(s_1, s_2, \ldots, s_K)$ 的分布，枚举 d，然后求 gcd 是 d 倍数的方案的个数，然后容斥。

Problem (Shoot Game)

平面上，有 n 个障碍物，每个障碍物由 (H, L, R, w) 描述，表示障碍物是一条在高度是 H，x 坐标从 L 到 R 的闭线段，强度为 w。
你现在可以从原点发射一些射线，每条射线的能量由你定，发射后如果碰到强度小于等于能量的障碍物，则障碍物被清除，射线继续向前，且能量不变；否则射线消失。
请问最少需要发射多少能量的射线才能清除所有障碍物？
$1 \le n \le 300$, $1 \le H \le 10^9$, $-10^9 \le L, R \le 10^9$, $0 \le w \le 10^9$.

Solution

任何一种方案都可以转化成射向端点的方案，然后我们就考虑向这 $2n$ 个端点发射射线。
然后用 $dp[l][r]$ 表示，消灭所有完全包含在 l 到 r 这段的线段最少需要多少能量，因为每个区间中，能量最大的一定会被消灭，只需要枚举我们消灭能量最大的障碍在哪个节点就行。