

题目选讲

丁尧尧

August 23, 2018

Problem

没有兄弟的舞会 给你一棵 n 个点有根树，每个点有个权值，如果两个点有相同的父亲，则他们是兄弟。你现在需要找一个点集，其中最多有一对点是兄弟关系，问这个点集的权值和是多少？

$1 \leq n \leq 10^5$.

百度之星 2018 复赛 T1

Problem

没有兄弟的舞会 给你一棵 n 个点有根树，每个点有个权值，如果两个点有相同的父亲，则他们是兄弟。你现在需要找一个点集，其中最多有一对点是兄弟关系，问这个点集的权值和是多少？

$1 \leq n \leq 10^5$.

Solution

贪心或树型 DP

Problem (序列期望)

令 X_1, X_2, \dots, X_n 是整数随机变量, 其中 X_i 是从 $[l_i, r_i]$ 中随机选择一个整数, 令

$$h = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

$$Y = \prod_{i=1}^n (h + 1 - X_i) \quad (2)$$

问模 $10^9 + 7$ 意义下 $\mathbb{E}[Y]$.

$$1 \leq n \leq 100, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^4.$$

百度之星 2018 复赛 T2

Problem (序列期望)

令 X_1, X_2, \dots, X_n 是整数随机变量, 其中 X_i 是从 $[l_i, r_i]$ 中随机选择的一个整数, 令

$$h = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

$$Y = \prod_{i=1}^n (h + 1 - X_i) \quad (2)$$

问模 $10^9 + 7$ 意义下 $\mathbb{E}[Y]$.

$$1 \leq n \leq 100, 1 \leq l_i \leq r_i \leq 10^4.$$

Solution

枚举 h

百度之星 2018 复赛 T3

Problem (带劲的 and 和)

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，每个点有一个非负权值，点 i 的权值用 v_i 表示，令

$$f(i, j) = \mathbb{1}_{i \text{ 和 } j \text{ 连通}}$$

求：

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n f(i, j) \times \max(v_i, v_j) \times (v_i \& v_j)$$

$$1 \leq n \leq 10^5$$

百度之星 2018 复赛 T3

Problem (带劲的 and 和)

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，每个点有一个非负权值，点 i 的权值用 v_i 表示，令

$$f(i, j) = \mathbb{1}_{i \text{ 和 } j \text{ 连通}}$$

求：

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n f(i, j) \times \max(v_i, v_j) \times (v_i \& v_j)$$

$$1 \leq n \leq 10^5$$

Solution

先求连通块，对于同一个连通块的所有权值从小到大排序，然后从前往后算，其中 $v_i \& v_j$ 需要记录每一位出现多少次。

Problem (Character Encoding)

求

$$\sum_{i=1}^m x_i = k \quad (0 \leq x_i < n)$$

的方案数 (模 $10^9 + 7$)。

$1 \leq m, k, n \leq 10^5$.

Problem (Character Encoding)

求

$$\sum_{i=1}^m x_i = k \quad (0 \leq x_i < n)$$

的方案数 (模 $10^9 + 7$)。

$1 \leq m, k, n \leq 10^5$.

Solution

容斥

Problem (Card Game)

给定 n 张卡片，每张卡片正反面各有一个数。问至少要翻转多少张卡片，才能使正面向上的数互不相同，并求方案数。

Problem (Card Game)

给定 n 张卡片，每张卡片正反面各有一个数。问至少要翻转多少张卡片，才能使正面向上的数互不相同，并求方案数。

Solution

首先建图：每个数字为一个节点，每张卡片反面数字向正面数字连一条有向边。问题转化为：至少要反转多少条边的方向，才能使得每个点的入度不会超过 1。我们对每个弱连通分量分别处理。易知，当底图是树或基环树时，才可能有解。对于基环树，先把环找出来，然后将环上的边的方向统一一下；非环边的方向则是唯一确定的，从环上的点向外做一遍 dfs 即可。对于树，可以正反两次 dfs 处理出每个点作为根时所需要的反向次数，并统计出最小值以及方案数。最后将答案合并即可。

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q) ，表示如果把 p 位置的数换成 q ，这个序列的可见度为多少？
 $1 \leq n, m \leq 10^5$

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q) ，表示如果把 p 位置的数换成 q ，这个序列的可见度为多少？
 $1 \leq n, m \leq 10^5$

Solution

法一：线段树维护

2018 Multi-University Training Contest 8

Problem (Taotao Picks Apples)

对于一个序列，从前往后看，每次当手上没有数或者手上的数小于当前的数，就把手上的数替换成当前的数，定义手上出现的数的个数为这个序列的可见度。给定一个长为 n 的序列，有 m 个询问，每个询问两个数 (p, q) ，表示如果把 p 位置的数换成 q ，这个序列的可见度为多少？
 $1 \leq n, m \leq 10^5$

Solution

法一：线段树维护

法二：考虑每次修改不叠加，因此我们可以从如何对原序列进行预处理着手。通过观察可以发现，将原序列从任意位置断开，我们可以通过分别维护左右段的某些信息来拼接得到答案。对于每次询问：考虑这个数左边的部分加上这个数之后的答案和最大值；再找到右边第一个大于左半部分最大值的数，答案相加即可。