

Г. Е. Векштейн

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД В ЗАДАЧАХ



Г. Е. ВЕКШТЕЙН

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД В ЗАДАЧАХ



Москва

2002

УДК 539.1; 530.1
В26

Интернет-магазин
MANIFESTS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - техника
-

Векштейн Г. Е.

Физика сплошных сред в задачах. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 208 стр.

Вниманию читателей предложены задачи с решениями, относящиеся к различным разделам электродинамики сплошных сред, гидродинамики, теории упругости и механики жидких кристаллов. Наряду с типовыми учебными задачами приведено большое количество задач, построенных на рассмотрении ярких и поучительных явлений и эффектов, ставших в последние десятилетия «классикой» (затухание Ландау, нелинейное взаимодействие волн, солитоны, переход Фредерикса и т. п.).

Пособие рассчитано на студентов и преподавателей физических специальностей вузов.

ISBN 5-93972-136-2

© Г. Е. Векштейн, 2002

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

Оглавление

Предисловие	5
Часть I. Электродинамика сплошных сред	6
§ 1. Векторы, тензоры, преобразование Фурье	6
§ 2. Тензор диэлектрической проницаемости. Электромагнитные волны в средах	12
§ 3. Естественная оптическая активность. Эффекты Фарадея и Керра	39
§ 4. Частотная дисперсия и аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$. Распространение электромагнитных волн в диспергирующих средах	52
§ 5. Излучение Вавилова–Черенкова. Переходное излучение . . .	64
§ 6. Нелинейное взаимодействие волн	82
Часть II. Гидродинамика и теория упругости	101
§ 7. Динамика идеальной жидкости	101
§ 8. Движение вязкой жидкости	133
§ 9. Конвекция и турбулентность	141
§ 10. Звуковые волны	159
§ 11. Ударные волны	169
§ 12. Нелинейные волны в средах с дисперсией. Солитоны	175
§ 13. Теория упругости	183
§ 14. Механика жидких кристаллов	194
Литература	207

Предисловие

Настоящее учебное пособие возникло на основе лекционного курса, читавшегося на протяжении ряда лет на физических факультетах Новосибирского Университета и Университета Манчестера в Англии.

Построено оно как набор задач, сопровождаемых подробными решениями. Так что это, скорее, не стандартный задачник, а сжатое изложение отдельных вопросов, имеющее своей целью дополнить содержание систематических курсов физики сплошных сред. Поэтому перед каждым разделом приведен лишь минимум основных определений и уравнений, необходимых для решения конкретных задач.

В виде отдельной книги этот сборник был опубликован в 1992 г. в Англии (IOP Publishing), в то время как на русском языке имелось лишь ротапринтное издание 1989 г., уже давно ставшее библиографической редкостью. Поэтому я признателен А. Борисову, директору издательства «Регулярная и хаотическая динамика», за инициативу в подготовке этого дополненного и исправленного русского варианта книги.

Я также искренне благодарен моим друзьям и коллегам Б. Брейзману, И. Котельникову, В. Мирнову, Д. Рютову, Г. Ступакову, Е. Priest, помощью и советами которых я постоянно пользовался.

*Г. Векштейн
Манчестер, декабрь 2001 г.*

ЧАСТЬ I

Электродинамика сплошных сред

§ 1. Векторы, тензоры, преобразование Фурье

Векторные операции в цилиндрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \\ \text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ \text{div } \vec{A} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\ (\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad (\text{rot } \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\ (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}; \\ \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \\ (\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \quad (\Delta \vec{A})_z = \Delta A_z; \\ (\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Векторные операции в сферической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \\
\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\
\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\
\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}; \\
(\operatorname{rot} \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]; \\
(\operatorname{rot} \vec{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]; \\
(\operatorname{rot} \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \\
(\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]; \\
(\Delta \vec{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]; \\
(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right].
\end{array} \right. \quad (1.2)$$

Тождества векторного анализа:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{а) } \operatorname{div} (f \vec{A}) = f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f; \\
\text{б) } \operatorname{rot} (f \vec{A}) = f \operatorname{rot} \vec{A} - [\vec{A} \times \vec{\nabla} f]; \\
\text{в) } \operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}; \\
\text{г) } \operatorname{rot} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}; \\
\text{д) } \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = [\vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B}] + [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A}] + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.
\end{array} \right. \quad (1.3)$$

Эрмитовы и антиэрмитовы тензоры. Тензор второго ранга T_{ik} называется эрмитовым, если $T_{ki} = T_{ik}^*$, и антиэрмитовым, если $T_{ki} = -T_{ik}^*$.

Произвольный тензор T_{ik} можно представить в виде суммы эрмитового $T_{ik}^{(H)}$ и антиэрмитового $T_{ik}^{(A)}$ тензоров:

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_{ik} = T_{ik}^{(H)} + T_{ik}^{(A)}; \\
T_{ik}^{(H)} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}^*); \quad T_{ik}^{(A)} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}^*)
\end{array} \right. \quad (1.4)$$

Вектор A_i называется собственным вектором оператора (матрицы) T_{ik} , если $T_{ik} \cdot A_k = \lambda A_i$. При этом число λ — собственное значение оператора T_{ik} .

Если матрица оператора T_{ik} эрмитова, то его собственные значения вещественны, и наоборот, если оператор T_{ik} антиэрмитов, то его собственные значения чисто мнимые.

1-1. Найти средние значения следующих выражений: $(\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n}$, $[\vec{a} \times \vec{n}]^2$, $[\vec{a} \times \vec{n}] \cdot (\vec{b} \cdot \vec{n})$, если \vec{n} — единичный вектор, все направления которого равновероятны, \vec{a} и \vec{b} — заданные векторы.

Запишем первое выражение в тензорных обозначениях: $\{(\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}\}_i = a_k n_k n_i$. Тогда среднее значение (отмеченное символом $\langle \rangle$) есть $\langle a_k n_k n_i \rangle = a_k \langle n_k n_i \rangle$, так как вектор \vec{a} — постоянный. Величина $\langle n_i n_k \rangle$ является тензором второго ранга, не зависящим от выбора системы координат, так как все направления вектора \vec{n} равновероятны. Поэтому $\langle n_i n_k \rangle$ является инвариантным тензором второго ранга, который должен быть пропорционален тензору δ_{ik} , $\langle n_i n_k \rangle = A \delta_{ik}$. Постоянная A определяется из условия равенства следа (суммы диагональных элементов) этих тензоров. Поскольку вектор \vec{n} — единичный, то $n_i n_i = 1$. отсюда $1 = A \delta_{ii} = 3A$, т. е. $A = 1/3$. Окончательно получаем: $\langle a_k n_k n_i \rangle = a_k \langle n_k n_i \rangle = (1/3) \delta_{ik} a_k = a_i/3$. Возвращаясь к векторным обозначениям, можно это записать так: $\langle (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n} \rangle = \vec{a}/3$. Аналогично усредняются и две другие комбинации. $\langle [\vec{a} \times \vec{n}]^2 \rangle = \langle e_{ikl} a_k n_l e_{ipq} a_p n_q \rangle = a_k a_p e_{ikl} e_{ipq} \langle n_l n_q \rangle = \frac{1}{3} \delta_{lq} a_k a_p e_{ikl} e_{ipq} = \frac{1}{3} a_k a_p e_{ikl} e_{ipl}$, где e_{ikl} — единичный антисимметричный тензор. Учитывая теперь, что $e_{ikl} e_{ipl} = 2\delta_{kp}$, получаем, что $\langle [\vec{a} \times \vec{n}]^2 \rangle = \frac{2}{3} a_k a_p \delta_{kp} = \frac{2}{3} a^2$. $\langle [\vec{a} \times \vec{n}] \cdot [\vec{b} \cdot \vec{n}] \rangle = \langle e_{ikl} a_k n_l b_m n_m \rangle = e_{ikl} a_k b_m \langle n_l n_m \rangle = e_{ikl} a_k b_m \frac{1}{3} \delta_{lm} = \frac{1}{3} e_{ikl} a_k b_l = \frac{1}{3} [\vec{a} \times \vec{b}]$.

1-2. Найти электромагнитное поле равномерно движущегося точечного заряда (заряд q , скорость \vec{v}), решая уравнения Максвелла методом преобразования Фурье.

Запишем уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.5)$$

где $\vec{j} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$, и совершив в них преобразование Фурье, перейдя от

переменных (\vec{r}, t) к переменным (\vec{k}, ω) по следующему правилу:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega; \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{B}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Обратное преобразование при этом выглядит так:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{r} dt; \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{B}(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{r} dt. \end{cases} \quad (1.7)$$

Такое преобразование Фурье годится, конечно, не только для \vec{E} или \vec{B} , но для любой другой функции координат и времени, убывающей на бесконечности, и будет использоваться в дальнейшем.

Подставим теперь выражения для \vec{E} и \vec{B} в форме (1.6) в уравнение (1.5). Пользуясь правилом (б) тождеств (1.3) и учитывая, что при равенстве двух функций равны их Фурье-компоненты, получаем

$$\begin{cases} \vec{B}(\vec{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega)]; \\ [\vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}, \omega)] = -\frac{\omega}{c} \vec{E}(\vec{k}, \omega) - \frac{4\pi i}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega), \end{cases} \quad (1.8)$$

где, согласно правилу (1.7), Фурье-компонента тока

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{k}, \omega) &= \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^2} \int \delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{r} dt = \\ &= \frac{q\vec{v}}{(2\pi)^2} \int e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})t} dt = \frac{q\vec{v}}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

Исключив из (1.8) поле \vec{B} , для \vec{E} получаем

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \vec{j}.$$

Величину $(\vec{k} \cdot \vec{E})$ найдем, умножив второе уравнение (1.8) скалярно на \vec{k} ,

что дает $(\vec{k} \cdot \vec{E}) = -\frac{4\pi i}{\omega}(\vec{k} \cdot \vec{j})$. После этого находим:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{k}, \omega) &= \frac{2iq\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2} [-\vec{k} + \vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{v})/c^2]; \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}] = \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega)].\end{aligned}$$

Зная теперь Фурье-образ $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$, по определению (1.6) запишем:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{2iq}{(2\pi)^2} \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} i\omega \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot \frac{-\vec{k} + \vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{v})/c^2}{k^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2} = \\ &= \frac{2ie}{(2\pi)^2} \int e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{v})t]} d\vec{k} \cdot \frac{-\vec{k} + \vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{v})/c^2}{k^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2}. \quad (1.9)\end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла заметим, что при $\vec{v} = 0$ он должен быть равен известному выражению для поля неподвижного заряда, так что

$$-\frac{2iq}{(2\pi)^2} \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \frac{\vec{k}}{k^2} d\vec{k} = q\vec{r}/r^3. \quad (1.10)$$

Пусть заряд движется вдоль оси r . Введем вектор $\vec{R} = \{x - vt, y, z\}$. Тогда входящий в (1.9) интеграл можно записать так:

$$\int e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \frac{\vec{k} d\vec{k}}{k^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2} = \int \frac{e^{i\vec{k}_* \cdot \vec{R}_*}}{k_*^2} \gamma d\vec{k}_* \{\gamma k_{*v}, \vec{k}_{*\perp}\},$$

где векторы $\vec{R}_* = \{\gamma R_x, \vec{R}_1\}$, а $\vec{k}_* = (k_x/\gamma, \vec{k}_1)$. Сравнивая это с (1.10), получаем

$$-\frac{2iq}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \vec{k} d\vec{k}}{k^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v})^2/c^2} = \frac{\gamma q}{R_*^3} \{\gamma^2(x - vt, y, z)\}.$$

Тогда из (1.9) окончательно следует, что $\vec{E}(\vec{r}, t) = \gamma q \vec{R}/R_*^3$. Магнитное поле $\vec{B}(\vec{r}, t) = (1/c)[\vec{v} \times \vec{E}(\vec{r}, t)]$.

1-3. Определить средние по времени значения тензоров $E_\alpha E_\beta$, $B_\alpha B_\beta$ и $E_\alpha B_\beta$, где векторы \vec{E} и \vec{B} есть электрическое и магнитное поле электромагнитной волны с круговой поляризацией, распространяющейся в вакууме с волновым вектором \vec{k} . Амплитуда электрического поля волны равна E_0 .

Рассмотрим, например, среднее значение первого из этих тензоров, $\langle E_\alpha E_\beta \rangle$. По самому смыслу усреднения очевидно, что этот тензор должен быть инвариантен относительно вращения системы координат вокруг вектора \vec{k} . Поэтому тензор $\langle E_\alpha E_\beta \rangle$ может быть построен только из следующих тензорных величин: инвариантный тензор $\delta_{\alpha\beta}$ и тензор $k_\alpha k_\beta / k^2 = n_\alpha n_\beta$, где $\vec{n} = \vec{k}/k$:

$$\langle E_\alpha E_\beta \rangle = a\delta_{\alpha\beta} + b n_\alpha n_\beta.$$

Для нахождения величин a и b рассмотрим след этого тензора и его свертку с тензором $n_\alpha n_\beta$. Так,

$$\text{Sp}\langle E_\alpha E_\beta \rangle = \langle E^2 \rangle = E_0^2 = 3a + b,$$

в то время как

$$\langle E_\alpha E_\beta \rangle n_\alpha n_\beta = \langle E_\alpha E_\beta n_\alpha n_\beta \rangle = 0 = (a + b),$$

поскольку для электромагнитной волны в вакууме $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ (см. (1.8)). Отсюда $a = E_0^2/2$, $b = -E_0^2/2$, так что

$$\langle E_\alpha E_\beta \rangle = \frac{E_0^2}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta). \quad (1.11)$$

Так как в вакууме $\omega = kc$, то из (1.8) также следует, что $\vec{B} = (\vec{n} \times \vec{E})$, т. е. $B_\beta = e_{\beta\gamma\delta} n_\gamma E_\delta$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle B_\alpha B_\beta \rangle &= \langle e_{\alpha\gamma\delta} n_\gamma E_\delta e_{\beta\mu\tau} n_\mu E_\tau \rangle = \\ &= e_{\alpha\gamma\delta} n_\gamma e_{\beta\mu\tau} n_\mu \langle E_\delta E_\tau \rangle = e_{\alpha\gamma\delta} n_\gamma e_{\beta\mu\tau} n_\mu \frac{E_0^2}{2} (\delta_{\delta\tau} - n_\delta n_\tau) = \\ &= \frac{E_0^2}{2} e_{\alpha\gamma\tau} e_{\beta\mu\tau} n_\gamma n_\mu = \frac{E_0^2}{2} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\gamma\beta}) n_\gamma n_\mu = \frac{E_0^2}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta), \end{aligned}$$

$$\text{а } \langle E_\alpha B_\beta \rangle = \langle E_\alpha e_{\beta\gamma\delta} n_\gamma E_\delta \rangle = e_{\beta\gamma\delta} n_\gamma \frac{E_0^2}{2} (\delta_{\alpha\delta} - n_\alpha n_\delta) = \frac{E_0^2}{2} e_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma.$$

§ 2. Тензор диэлектрической проницаемости. Электромагнитные волны в средах

В линейной электродинамике сплошных сред плотность тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ пропорциональна электрическому полю: $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}$, где $\hat{\sigma}$ — линейный оператор, который в самом общем случае может быть представлен в следующем виде:

$$j_{\alpha}(\vec{r}, t) \int \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') E_{\beta}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'. \quad (2.1)$$

Введя вектор индукции

$$\vec{D}(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \vec{j}(\vec{r}, t') dt', \quad (2.2)$$

уравнения Максвелла можно записать так:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\varepsilon} \vec{E}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ записывается в форме, аналогичной (2.1):

$$D_{\alpha}(\vec{r}, t) \equiv \hat{\varepsilon} \vec{E} = E_{\alpha}(\vec{r}, t) + \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') E_{\beta}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'. \quad (2.4)$$

Если среда пространственно однородна и стационарна (т. е. все ее характеристики не меняются во времени), то входящие в (2.1) и (2.4) тензорные функции $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ зависят только от разности своих аргументов:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau); \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau); \\ \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'; \quad \tau = t - t'. \end{cases} \quad (2.5)$$

В этом случае удобно перейти к Фурье-представлению, для которого действие операторов $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ сводится к умножению на тензоры проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$,

$$\begin{cases} j_{\alpha}(\vec{k}, \omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{\beta}(\vec{k}, \omega); \\ D_{\alpha}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{\beta}(\vec{k}, \omega). \end{cases} \quad (2.6)$$

Тензоры $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ выражаются через функции (2.5) соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \int \sigma_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau; \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau, \end{cases} \quad (2.7)$$

причем, как это следует из определения \vec{D} в (2.2),

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega). \quad (2.8)$$

В Фурье-представлении уравнения Максвелла (2.3) эквивалентны системе уравнений

$$L_{\alpha\beta} E_{\beta} \equiv \left(k_{\alpha} k_{\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right) E_{\beta} = 0, \quad (2.9)$$

так что дисперсионное уравнение, связывающее между собой волновой вектор \vec{k} и частоту ω электромагнитных волн в среде, записывается так:

$$\det \|L_{\alpha\beta}(k, \omega)\| = 0. \quad (2.10)$$

Если среда изотропна и при отражении не изменяется (отсутствует стереоизомерия), то самый общий вид ее тензора диэлектрической проницаемости есть

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) \varepsilon_{\parallel}(k, \omega) \cdot \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} + \varepsilon_{\perp}(k, \omega) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right). \quad (2.11)$$

Электромагнитные волны в такой среде разделяются на продольные (l), в которых $\vec{E} \parallel \vec{k}$, и поперечные (t), в них $\vec{E} \perp \vec{k}$. Дисперсионное уравнение (2.10) выглядит при этом так:

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega_l, k) = 0; \quad k^2 = \frac{\omega_t^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(k, \omega_t). \quad (2.12)$$

Затухание электромагнитных волн в среде определяется антиэрмитовой частью тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$, и объемная мощность диссипации энергии волны

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\alpha} E_{0\beta}. \quad (2.13)$$

В области прозрачности, где затухание волн мало ($\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} \ll \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}$), можно определить плотности энергии W и импульса \vec{P} электромагнитной волны

$$\begin{cases} W = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial\omega} \{\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}(\vec{k}, \omega)\} E_{0\alpha}^* E_{0\beta} \\ \vec{P} = \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot W, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}$ — соответственно антиэрмитова и эрмитова части тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$, а \vec{E}_0 — амплитуда электрического поля волны.

2-1. Показать, что формула (2.1) действительно является самым общим видом связи тока и поля в линейной электродинамике.

Пусть $j_\alpha = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} E_\beta$, где $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ — произвольный линейный оператор в пространстве координат и времени. Представим электрическое поле в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} E_\beta(\vec{\xi}) &= \int A_\beta(\vec{q}) \Psi_{\vec{q}}(\vec{\xi}) d\vec{q}; \quad \vec{\xi} = (\vec{r}, t); \quad \vec{q} = (\vec{k}, \omega); \\ \Psi_{\vec{q}}(\vec{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты $A_\beta(\vec{q}) = \int E_\beta(\vec{\xi}') \Psi_{\vec{q}}^*(\vec{\xi}') d\vec{\xi}'$, так что

$$\begin{aligned} j_\alpha(\vec{\xi}) &= \hat{\sigma}_{\alpha\beta} E_\beta = \int A_\beta(\vec{q}) \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Psi_{\vec{q}}(\vec{\xi}) d\vec{q} = \\ &= \int d\vec{q} \int d\vec{\xi}' E_\beta(\vec{\xi}') \Psi_{\vec{q}}^*(\vec{\xi}') \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Psi_{\vec{q}}(\vec{\xi}). \end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') = \int d\vec{q} \Psi_{\vec{q}}^*(\vec{\xi}') \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Psi_{\vec{q}}(\vec{\xi}).$$

При таком определении

$$j_\alpha(\vec{\xi}) = \int \sigma_{\alpha\beta}(\vec{\xi}, \vec{\xi}') E_\beta(\vec{\xi}') d\vec{\xi}',$$

что и требовалось доказать.

2-2. Электромагнитные свойства однородной изотропной среды без пространственной дисперсии можно описать «традиционными» электрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Выразить ε и μ через предельные (при $k \rightarrow 0$) значения введенных в (2.11) величин $\varepsilon_{\parallel}(k, \omega)$ и $\varepsilon_{\perp}(k, \omega)$.

В терминах ε и μ плотность тока в среде представляется в виде $\vec{j} = \partial \vec{P} / \partial t + c \operatorname{rot} \vec{M}$, где \vec{P} и \vec{M} — векторы поляризации и намагничивания единицы объема среды, равные

$$\vec{P} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} \vec{E}; \quad \vec{M} = \frac{(\mu - 1)}{4\pi\mu} \vec{B}.$$

Переходя к Фурье-представлению (\vec{k}, ω) и учитывая, что в этих переменных $\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}]$ (что следует из (2.3)), получим

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -i\omega \vec{P} + ic[\vec{k} \times \vec{M}] = \\ &= -\frac{i\omega(\varepsilon - 1)}{4\pi} \vec{E} + \frac{i(\mu - 1)c^2}{4\pi\mu\omega} [\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E}]. \end{aligned}$$

Отсюда находим тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{-i\omega(\varepsilon - 1)}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} - \frac{i(\mu - 1)k^2 c^2}{4\pi\mu\omega} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right)$$

и, в соответствии с соотношением (2.8), тензор

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta} + \frac{(\mu - 1)k^2 c^2}{\mu\omega^2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right).$$

Сравнивая теперь это выражение с (2.11), видим, что в пределе $k \rightarrow 0$, когда пространственная дисперсия отсутствует, $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_{\parallel}(k, \omega) = \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_{\perp}(k, \omega)$, откуда

$$\varepsilon(\omega) = \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_{\perp}(k, \omega); \quad \mu^{-1} = 1 - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega^2(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})}{k^2 c^2}.$$

2-3. Вычислить тензор диэлектрической проницаемости «холодной» плазмы, состоящей из бесконечно тяжелых ионов и покоящихся электронов (заряд электронов — e , масса — m , плотность — n), находящейся во внешнем магнитном поле \vec{B}_0 .

Считая ионы бесконечно тяжелыми, можно пренебречь их вкладом в ток (роль ионов состоит при этом лишь в нейтрализации объемного заряда электронов). Так как в невозмущенном состоянии электроны покоятся, то в линейном приближении их ток $\vec{j} = ne\vec{v}$. Скорость электронов \vec{v} определяется из уравнения движения, в котором по той же причине можно не учитывать влияние переменного магнитного поля,

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}_0].$$

Введя единичный вектор $\vec{h} = \vec{B}_0/B_0$ и циклотронную частоту электронов во внешнем магнитном поле $\omega_B = eB_0/mc$, при заданной частоте ω получим

$$\vec{v} = \frac{ie}{m\omega}\vec{E} + \frac{i\omega_B}{\omega}[\vec{v} \times \vec{h}].$$

Для нахождения скорости \vec{v} умножим это уравнение скалярно и векторно на \vec{h} :

$$\vec{h} \cdot \vec{v} = \frac{ie}{m\omega}(\vec{h} \cdot \vec{E});$$

$$[\vec{h} \times \vec{v}] = \frac{ie}{m\omega}[\vec{h} \times \vec{E}] + \frac{i\omega_B}{\omega}[\vec{v} - \vec{h}(\vec{h} \cdot \vec{v})].$$

Определяя отсюда значение $[\vec{h} \times \vec{v}]$, находим скорость

$$\vec{v} = (1 - \omega_B^2/\omega^2)^{-1} \left\{ \frac{ie}{m\omega}\vec{E} - \frac{e\omega_B}{m\omega^2}[\vec{h} \times \vec{E}] - \frac{ie\omega_B^2}{m\omega^3}(\vec{h} \cdot \vec{E})\vec{h} \right\}$$

Вычисляя теперь ток и переходя к тензорным обозначениям $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta$, для тензора проводимости получим

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2}\right)^{-1} \left\{ \frac{ine^2}{m\omega}\delta_{\alpha\beta} - \frac{ne^2\omega_B}{m\omega^2}e_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma - \frac{ine^2\omega_B^2}{m\omega^3}h_\alpha h_\beta \right\},$$

а из (2.8) тензор диэлектрической проницаемости равен

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_B^2}\right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{i\omega_{pe}^2\omega_B}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}e_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma + \\ + \frac{\omega_{pe}^2\omega_B^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_B^2)}h_\alpha h_\beta, \quad (2.15) \end{aligned}$$

где $\omega_{pe}^2 = 4\pi ne^2/m$ — квадрат плазменной частоты электронов.

2-4. Найти закон дисперсии для электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме без внешнего магнитного поля.

Как следует из (2.15), в отсутствие внешнего магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости такой плазмы приобретает простой вид:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta}; \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2. \quad (2.16)$$

Тогда, согласно общему правилу (2.12), дисперсионное уравнение для поперечных волн

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)$$

дает

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}. \quad (2.17)$$

Для продольных (электростатических) колебаний из условия $\varepsilon(\omega_l) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 = 0$ следует $\omega_l = \omega_{pe}$. Это так называемые электронные ленгмюровские колебания в плазме.

2-5. Каждая молекула разреженного газа представляет собой два противоположно направленных электрических диполя, $\pm \vec{d}$, разделенных расстоянием \vec{a} , которое пропорционально электрической силе $\vec{F}_{\pm} = \pm(\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ действующей на составляющие молекулу диполи: $\vec{a} = \gamma \vec{F}_{+}$. Определить тензор диэлектрической проницаемости такого газа, считая ориентацию молекулярных диполей случайной. Плотность газа есть n молекул в единице объема.

Рассмотрим вначале некоторые общие соотношения для усредненных (макроскопических) зарядов и токов в среде. С микроскопической точки зрения плотность зарядов и токов есть

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i,a} q_{ia} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a - \vec{\xi}_{ia}), \quad \vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i,a} q_{ia} \dot{\vec{\xi}}_{ia} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a - \vec{\xi}_{ia}). \quad (2.18)$$

Здесь среда представлена как набор атомов, где \vec{r}_a есть координаты ядра a -го атома, $\vec{\xi}_{ia}$ — координаты i -го электрона этого атома отсчитанные от положения ядра (так что $i = 0$ соответствует ядру, т. е. $\xi_{0a} = 0$, $q_{0a} = Ze$). Макроскопические заряды и токи, $\langle \rho \rangle$ и $\langle \vec{j} \rangle$, есть результат усреднения (2.18) по «физически малому» объему, который, с одной стороны, содержит много атомов, но в то же время мал по сравнению с характерной длиной изменения электрического и магнитного поля в среде (например, с длиной волны

электромагнитного поля распространяющегося в среде). По самому смыслу такого усреднения, длина волны λ должна быть много больше размера атома ξ_i . Поэтому при усреднении выражений (2.18) типичные значения $|\vec{r} - \vec{r}_a|$ нужно считать большими по сравнению с ξ_i , так что справедливо следующее разложение:

$$\begin{aligned}\langle \rho \rangle &\approx \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle - \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \xi_{ia\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \xi_{ia\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle + \dots \\ \langle j_\alpha \rangle &\approx \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \dot{\xi}_{ia\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle - \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \dot{\xi}_{ia\alpha} \xi_{ia\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle + \dots\end{aligned}\quad (2.19)$$

В разложении (2.19) для $\langle \rho \rangle$ первый член равен нулю ввиду нейтральности атома, $\sum_i q_{ia} = 0$. Второе слагаемое для $\langle \rho \rangle$ может быть записано как $-\text{div } \vec{P}$, где

$$\vec{P} = \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \xi_{ia} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle$$

есть вектор поляризации среды (электрический дипольный момент единицы объема). Однако, для рассматриваемой в этой задаче модели газа \vec{P} , очевидно, равно нулю, так что необходимо учесть следующий член разложения в (2.19). Это дает

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad D_{\alpha\beta} = \left\langle \sum_{i,a} q_{ia} \xi_{ia\alpha} \xi_{ia\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle, \quad (2.20)$$

где $D_{\alpha\beta}$ есть квадрупольный электрический момент среды. Используя выражение (2.19) для $\langle \vec{j} \rangle$, нетрудно показать, что

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \quad (2.21)$$

где

$$\vec{M} = \left\langle \frac{1}{2c} \sum_{i,a} q_{ia} [\vec{\xi}_{ia} \times \dot{\vec{\xi}}_{ia}] \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \right\rangle$$

есть намагничение среды (магнитный дипольный момент единицы объема). Таким образом, зная \vec{P} , \vec{M} и $D_{\alpha\beta}$, можно вычислить ток и, следовательно, проводимость и диэлектрическую проницаемость среды. При вычислении \vec{M} и $D_{\alpha\beta}$ для рассматриваемой модели удобно представить диполь \vec{d} как предельный случай двух противоположных по знаку зарядов $\pm q$ разделенных расстоянием $\vec{\Delta}$, когда $\vec{\Delta} \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$, а $q \cdot \vec{\Delta} \rightarrow \vec{d}$. Магнитный момент системы точечных зарядов есть

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i].$$

Отсюда непосредственно следует, что два противоположно направленных диполя $\pm \vec{d}$, разделенные расстоянием \vec{a} , имеют магнитный момент

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} [\vec{d} \times \dot{\vec{a}}]. \quad (2.22)$$

Так как для данной модели молекулы газа $\vec{d} = \gamma(\vec{d} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = i\gamma(\vec{d} \cdot \vec{k})\vec{E}$ (мы считаем, что $\vec{E} \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$), то из (2.22) следует, что

$$m_\alpha = \frac{\gamma\omega}{2c} e_{\alpha\beta\mu} d_\beta d_\nu k_\nu E_\mu.$$

Усредняя это выражение по всем возможным направлениям вектора \vec{d} , так что $\langle d_\beta d_\nu \rangle = \frac{1}{3} d^2 \delta_{\beta\nu}$, находим макроскопическую намагниченность среды

$$\vec{M} = \frac{\gamma n \omega d^2}{6c} (\vec{k} \times \vec{E}). \quad (2.23)$$

Аналогичным образом вычисляем тензор поляризации $D_{\alpha\beta}$. Квадрупольный момент системы зарядов есть

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta},$$

так что для одной молекулы данного газа

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = d_\alpha a_\beta + d_\beta a_\alpha = i\gamma(d_\alpha d_\mu k_\mu E_\beta + d_\beta d_\mu k_\mu E_\alpha),$$

и после усреднения находим, что

$$D_{\alpha\beta} = \frac{i\gamma n d^2}{3} (k_\alpha E_\beta + k_\beta E_\alpha). \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) получаем макроскопический ток

$$\langle \vec{j} \rangle = c \operatorname{rot} \vec{M} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = ic[\vec{k} \times \vec{M}] - \frac{\omega}{2} k_{\beta} D_{\alpha\beta} = -\frac{i\omega\gamma nd^2 k^2}{3} E_{\alpha}.$$

Отсюда тензор проводимости газа есть

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i\omega\gamma nd^2 k^2}{3} \delta_{\alpha\beta},$$

следовательно

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta} = (1 + \frac{4\pi}{3} \gamma nd^2 k^2) \delta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, диэлектрическая постоянная такого газа отлична от единицы только благодаря пространственной дисперсии ($k \neq 0$).

2-6. Найти потенциал электрического поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q в одноосном кристалле.

Одноосным кристаллом называется анизотропный диэлектрик, в котором поляризуемость вдоль одного выделенного направления (оптической оси) отличается от изотропной поляризуемости в плоскости, перпендикулярной к оптической оси. Если \vec{n} — единичный вектор вдоль оптической оси кристалла, то тензор его диэлектрической проницаемости можно записать так:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp}(\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha}n_{\beta}) + \varepsilon_{\parallel}n_{\alpha}n_{\beta}. \quad (2.25)$$

Если $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, то $D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}E_{\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\beta}}$, и уравнение для φ имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\beta}} \right) = 4\pi q \delta(\vec{r}). \quad (2.26)$$

Выберем систему координат с осью z вдоль оптической оси. При этом у тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ отличны от нуля только компоненты $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$, значит, уравнение (2.26) можно записать так:

$$\varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varepsilon_{\perp} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = -4\pi q \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Введя новую переменную $z_* = z\sqrt{\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}}$, его можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_*^2} = -\frac{4\pi q}{\varepsilon_{\perp}} \delta(x) \delta(y) \delta(z) = -\frac{4\pi q}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}} \cdot \delta(x) \delta(y) \delta(z_*).$$

В этих обозначениях оно совпадает с обычным решением Пуассона для точечного заряда, поэтому его решение

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r_* \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}} = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \left(x^2 + y^2 + \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} z^2 \right)^{1/2}}.$$

2-7. Определить продольную, ε_{\parallel} , и поперечную, ε_{\perp} , диэлектрическую проницаемость холодной электрон-позитронной плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле \vec{B}_0 .

Искомый результат легко получить, используя результаты, полученные в задаче 2-3. Действительно, вклад электронов и позитронов в тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ непосредственно следуют один из другого, так как эти частицы имеют одинаковую массу и равный по величине, но противоположный по знаку, заряд. Поэтому из выражения (2.15) для электронного вклада видно, что при учете позитронов второй член в правой части этого равенства сократится, в то время как остальные два слагаемых, одинаковые для электронов и позитронов, удвоятся. В результате тензор диэлектрической проницаемости электрон-позитронной плазмы примет следующий вид:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{2\omega_{pe}^2 \omega_B^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_B^2)} h_{\alpha} h_{\beta}, \quad \vec{h} = \frac{\vec{B}_0}{B} \quad (2.27)$$

(здесь использованы те же обозначения что и в задаче 2-3). Таким образом, тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ имеет структуру аналогичную выражению (2.25) для одноосного кристалла. При этом оптическая ось такой плазмы направлена вдоль магнитного поля \vec{B}_0 , а

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_B^2}.$$

2-8. Определить потенциал электрического поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(k) \delta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon(k) = 1 + (ka)^{-2}$.

Переходя в уравнении Пуассона (2.26) к Фурье-представлению, получим, что

$$-k^2 \varepsilon(k) \varphi(\vec{k}) = 4\pi \rho(\vec{k}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = 4\pi q / (2\pi)^{3/2}.$$

Отсюда $\varphi(\vec{k}) = 2q / \sqrt{2\pi} \cdot (k^2 + a^{-2})$, поэтому

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} = \frac{q}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 + a^{-2}} \quad (2.28)$$

(здесь сделан переход к сферической системе координат с полярной осью вдоль \vec{r}). Интегрирование по углу в (2.28) элементарно, так что

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k^2 + a^{-2}} k dk = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin \kappa r/a}{1 + \kappa^2} \kappa d\kappa. \quad (2.29)$$

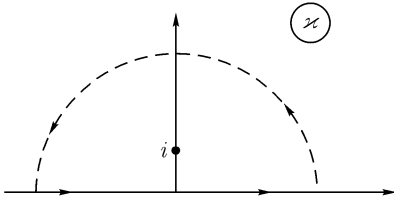


Рис. 2.1. Контур интегрирования в комплексной плоскости

Для вычисления этого интеграла запишем его в таком виде, используя свойства четности функций $\cos \kappa r/a$ и $\sin \kappa r/a$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \kappa z}{1 + \kappa^2} \kappa d\kappa = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa z}}{1 + \kappa^2} \kappa d\kappa. \quad (2.30)$$

Теперь он легко находится с помощью теории вычетов в комплексной плоскости κ (рис. 2.1). Действительно, в верхней полуплоскости подынтегральное выражение в (2.30) экспоненциально затухает. Поэтому, дополнив интеграл по вещественной оси интегралом по «бесконечно большой» полуокружности в верхней полуплоскости, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa z}}{1 + \kappa^2} \kappa d\kappa = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\kappa z}}{1 + \kappa^2} \right)_{\kappa=i} = i\pi e^{-z}.$$

Далее из (2.29) следует: $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} e^{-r/a}$. Физический смысл экспоненциально быстрого уменьшения φ на больших расстояниях ($r \gg a$) связан с тем,

что $\varepsilon(k)$ увеличивается при малых k ($k \ll a^{-1}$), так что при $r \rightarrow \infty$ (чему соответствует $k \rightarrow 0$) происходит сильная экранировка поля точечного заряда. Примером среды, где осуществляется такая экранировка, является ионизированный газ (плазма) [6, § 78].

2-9. Точечный заряд q расположен в жидкости, движущейся со скоростью \vec{v} . Диэлектрическая проницаемость неподвижной жидкости равна ε . Найти потенциал электрического поля, создаваемого этим зарядом, считая, что $v < c/\sqrt{\varepsilon}$.

Здесь удобно определить сначала скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля в системе координат, связанной с жидкостью, где последняя покоится, а заряд движется со скоростью $-\vec{v}$. Из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) &= 4\pi \rho_{CT}; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{CT} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}); & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где в данном случае $\rho_{CT} = q\delta(\vec{r} + \vec{v}t)$, $\vec{j}_{CT} = -q\vec{v}\delta(\vec{r} + \vec{v}t)$, следует, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\partial\vec{A}/\partial t$, а потенциалы \vec{A} и φ при выборе лоренцевой калибровки $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{CT}; \quad \Delta \varphi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_{CT}.$$

Переходя к Фурье-представлению, отсюда нетрудно найти

$$\begin{cases} \vec{A}'(\vec{k}', \omega') = -2q\vec{v}\delta(\omega' + \vec{k}'\vec{v})/c[(\vec{k}')^2 - (\omega')^2\varepsilon/c^2]; \\ \varphi'(\vec{k}', \omega') = 2q\delta(\omega' + \vec{k}'\vec{v})/\varepsilon[(\vec{k}')^2 - (\omega')^2\varepsilon/c^2], \end{cases} \quad (2.31)$$

где штрихи обозначают, что величины \vec{A}' , φ' , \vec{k}' , ω' относятся к системе координат, связанной с жидкостью. Для перехода в лабораторную систему (систему заряда) нужно воспользоваться тем, что величины $(\vec{A}, i\varphi)$, $(\vec{k}, i\omega/c)$ образуют четырех-векторы A_i и k_i , компоненты которых в разных системах отсчета изменяются согласно преобразованию Лоренца [4, § 6]:

$$A_i = \alpha_{il} A'_l, \quad k_i = \alpha_{il} k'_l.$$

Если скорость \vec{v} направлена вдоль оси x , то матрица α_{ik} имеет вид

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma, & 0, & 0, & -i\gamma\frac{v}{c} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ i\gamma\frac{v}{c}, & 0, & 0, & \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(\vec{k}, \omega) = \gamma \left(\varphi' + \frac{v}{c} A'_x \right)$; $A_x(\vec{k}, \omega) = \gamma \left(A'_x + \frac{v}{c} \varphi' \right)$; $A_y = A_z = 0$; $\omega' = \gamma(\omega - k_x v)$; $k'_x = \gamma \left(k_x - \frac{v}{c^2} \omega \right)$; $k'_y = k_y$; $k'_z = k_z$. В результате из (2.31) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{k}, \omega) &= \frac{2q\delta(\omega)}{\varepsilon \left[k_x^2 \frac{\gamma^2}{\gamma_\varepsilon^2} + k_\perp^2 \right]} \frac{\gamma^2}{\gamma_\varepsilon^2}; & A_x(\vec{k}, \omega) &= -\frac{v(\varepsilon - 1)\gamma_\varepsilon^2}{c} \varphi(\vec{k}, \omega); \\ \gamma^2 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1}; & \gamma_\varepsilon^2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon v^2}{c^2} \right)^{-1}; \end{aligned}$$

(здесь мы сразу положили $\omega = 0$, учитывая, что $\varphi, A_x \sim \delta(\omega)$). Возвращаясь теперь к переменным (\vec{r}, t) , с помощью обратного Фурье-преобразования находим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \varphi(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{2q\gamma^2/\gamma_\varepsilon^2}{\varepsilon \left[k_x^2 \frac{\gamma^2}{\gamma_\varepsilon^2} + k_\perp^2 \right]} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для вычисления интеграла в (2.32) можно использовать прием, примененный в задаче 1-2 (см. формулу (1.10)). Введем векторы $\vec{k}^* = \left(k_x \frac{\gamma}{\gamma_\varepsilon}, \vec{k}_\perp \right)$ и $\vec{r}^* = \left(x \frac{\gamma_\varepsilon}{\gamma}, \vec{r}_\perp \right)$. Тогда интеграл (2.32) легко вычисляется, так как в этих переменных приводится к виду (1.10). Отсюда

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q\gamma/\gamma_\varepsilon}{\varepsilon \sqrt{x^2 \gamma_\varepsilon^2/\gamma^2 + y^2 + z^2}}.$$

Обратим внимание на то, что такая процедура возможна лишь при условии, что $\gamma_\varepsilon^2 > 0$, т. е. $v < c\sqrt{\varepsilon}$. Если скорость течения жидкости v превышает скорость распространения в ней электромагнитных волн $c/\sqrt{\varepsilon}$, то поля отличны от нуля лишь внутри «черенковского» конуса с углом раствора $\cos \theta = c/v\sqrt{\varepsilon}$ [1, гл. 7].

Сравнивая полученное выражение для скалярного потенциала $\varphi(\vec{r})$ с решением задачи 2-6, нетрудно увидеть, что движущийся диэлектрик с точки зрения своих электрических свойств аналогичен одноосному кристаллу (с оптической осью вдоль скорости), у которого $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon$, а $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon\gamma_\varepsilon^2/\gamma^2$. Но, в отличие от задачи 2-6, в данном случае в нем появляется и постоянное магнитное поле. Теперь $A_x(\vec{r}) = -\frac{v(\varepsilon-1)}{c}\gamma_\varepsilon^2\varphi(\vec{r})$, так что $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A} = (\varepsilon-1)\gamma_\varepsilon^2 \left[\vec{E} \times \frac{\vec{v}}{c} \right]$. Эту задачу, заметим, можно решить и без перехода к системе отсчета, связанной с жидкостью, если воспользоваться формулами Минковского для движущихся диэлектриков [8, § 76].

2-10. Определить закон дисперсии и типы электромагнитных волн в одноосном кристалле.

Выберем систему координат, в которой ось z направлена вдоль оптической оси, а волновой вектор \vec{k} лежит в плоскости (x, z) , $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$. Тогда уравнение (2.9), учитывая вид (2.25) тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$, таковы:

$$\begin{cases} \left(-k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right)E_x + k_x k_z E_z = 0; \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right)E_y = 0; \\ \left(-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel}\right)E_z + k_z k_x E_x = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Соответствующее дисперсионное уравнение $\det \|L_{\alpha\beta}\| = 0$; или

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right) \left[\left(-k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right) \left(-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel}\right) - k_x^2 k_z^2 \right] = 0$$

имеет два решения. Первое $-\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}\right) = 0$. Такая волна называется обыкновенной, так как для нее показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ и не зависит от направления волнового вектора. Из (2.33) видно, что эта волна линейно поляризована, так как электрическое поле имеет только y -компоненту. Вектор \vec{B} , поперечный к \vec{E} , лежит в плоскости (x, z) и направлен на ней так, что $\vec{B} \perp \vec{k}$.

Второе решение можно привести к виду

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Это так называемая необыкновенная волна. если ввести угол θ между вектором \vec{k} и оптической осью, то для показателя преломления получим

$$n = \left(\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{-1/2},$$

т. е. он разный для различных направлений распространения необыкновенной волны. Как это следует из (2.33), в такой волне есть E_x и E_z . Но так как вектор \vec{B} поперечен и к \vec{k} и к \vec{E} , то есть только $\vec{B}_y \neq 0$. Таким образом, и эта волна линейно поляризована.

2-11. У необыкновенной электромагнитной волны, распространяющейся в одноосном кристалле с заданными ε_{\parallel} и ε_{\perp} , волновой вектор \vec{k} составляет угол θ с оптической осью. Найти направление лучевого вектора (потока энергии) в такой волне.

Направим ось z вдоль оптической оси, а вектор \vec{k} в плоскости (x, z) . Тогда (см. задачу 2-10) в необыкновенной волне вектор \vec{B} поперечен к плоскости (x, z) , а векторы \vec{E} и \vec{D} лежат в этой плоскости. Так как $\vec{D} \perp \vec{k}$, то (рис. 2.2) $D_x = D \cos \theta$, $D_z = -D \sin \theta$. Отсюда определяем компоненты вектора \vec{E} :

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{D \cos \theta}{\varepsilon_{\perp}}; \quad E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_{\parallel}} = -\frac{D \sin \theta}{\varepsilon_{\parallel}}.$$

Лучевой вектор (вектор Пойнтинга) есть $\vec{s} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]$. Таким образом, в необыкновенной волне направление вектора потока энергии не совпадает с волновым вектором \vec{k} . Из рис 2.2 видно, что вектор \vec{s} также лежит в плоскости (x, y) и направлен к оптической оси под таким углом θ_1 , что $\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{E_z}{E_x} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta$.

2-12. Найти коэффициент отражения плоскополяризованной электромагнитной волны, падающей под углом θ_0 к нормали на плоскую поверхность среды с заданными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ (рис. 2.3).

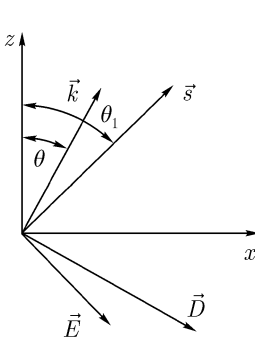


Рис. 2.2. Геометрия необыкновенной волны

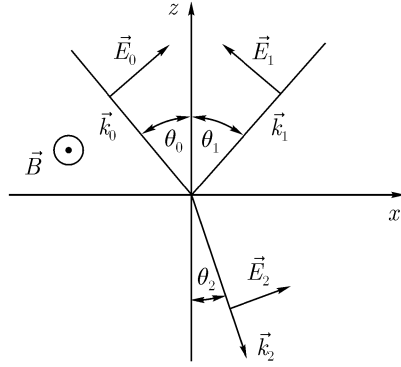


Рис. 2.3. Отражение и преломление волн

Выберем такую систему координат, в которой плоскость падения совпадает с плоскостью (x, z) . Тогда из условия равенства x — составляющей волнового вектора у падающей (0), отраженной (1) и преломленной (2) волн — и закона дисперсии

$$k_0 = k_1 = \frac{\omega}{c}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

(ω — частота, одинаковая для всех волн) следуют известные соотношения для углов отражения и преломления: $\theta_1 = \theta_0$; $\sin \theta_2 = \sin \theta_0 / \sqrt{\varepsilon\mu}$. Коэффициент отражения (и преломления) зависит от того, в какой плоскости поляризована падающая волна. Рассмотрим здесь случай (рис. 2.3), когда вектор \vec{B} перпендикулярен к плоскости падения (направление векторов \vec{E} показано на рисунке). Амплитуды волн связаны граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{H} и \vec{E} :

$$B_0 + B_1 = B_2 / \mu; \quad E_0 \cos \theta_0 - E_1 \cos \theta_0 = E_2 \cos \theta_2.$$

Учитывая, что $B_0 = E_0$, $B_1 = E_1$, а $B_2 = E_2 \sqrt{\varepsilon\mu}$, нетрудно получить

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \frac{\cos \theta_0 \sqrt{\varepsilon/\mu} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / \varepsilon\mu}}{\cos \theta_0 \sqrt{\varepsilon/\mu} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / \varepsilon\mu}}; \\ E_2 = E_0 \frac{2 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 \sqrt{\varepsilon/\mu} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / \varepsilon\mu}}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Коэффициент отражения $R = |E_1 / E_0|^2$.

2-13. Найти условие существования поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль границы раздела вакуум–диэлектрик с заданной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Определить закон дисперсии таких волн для случая $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ (холодная плазма, см. задачу 2-3).

Пусть диэлектрик заполняет полупространство $z < 0$, а ось x направлена вдоль направления распространения волны. В таком случае зависимость полей от координат и времени пропорциональна $f(z)e^{i(kx - \omega t)}$, где ω — частота волны, а k — волновой вектор. Из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}$$

получаем для электрического поля \vec{E}

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E} = 0.$$

Это уравнение нужно решать отдельно для вакуума ($z > 0$) и в среде ($z < 0$). Интересуясь решением, убывающим при удалении от границы раздела $z = 0$ (поверхностная волна), получим

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_1 e^{-\kappa_1 z} e^{i(kx - \omega t)}, & z > 0, \quad \kappa_1 = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} > 0; \\ \vec{E}_2 e^{\kappa_2 z} e^{i(kx - \omega t)}, & z < 0, \quad \kappa_2 = \sqrt{k^2 - \varepsilon \omega^2/c^2} > 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Для нахождения поляризации поверхностной волны и закона ее дисперсии распишем уравнение Максвелла по-компонентно:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} B_x; & -\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon E_x; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - ikE_z = \frac{i\omega}{c} B_y; & \frac{\partial B_x}{\partial z} - ikB_z = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon E_y; \\ ikE_y = \frac{i\omega}{c} B_z; & ikB_y = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon E_z. \end{cases} \quad (2.36)$$

Так как E_y и B_x должны быть непрерывны на границе раздела, то из первого уравнения левого столбца (2.36) сразу следует, что они равны нулю, поскольку в противном случае производная $\partial E_y / \partial z$ имела бы разрыв при $z = 0$, как это видно из решения (2.35). Тогда из третьего уравнения того же столбца получаем, что и $B_z = 0$. Таким образом, поляризация волны такова, что отличны от нуля (в выбранной системе координат) только B_y , E_x и E_z .

Запишем теперь первое из уравнений правого столбца (2.36) для вакуума и диэлектрика:

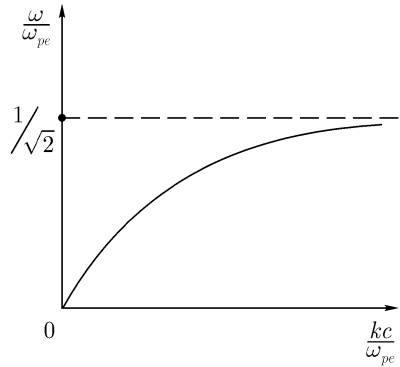
$$\kappa_1 B_y = \frac{-i\omega}{c} E_x, \quad \kappa_2 B_y = \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) E_x.$$

Учитывая, что компоненты B_y и E_x непрерывны на границе раздела, отсюда сразу получаем условие разрешимости $\kappa_2 = -\varepsilon(\omega)\kappa_1$. Как видно, такие волны могут существовать только в той области частот, где $\varepsilon(\omega) < 0$. Подставив выражения (2.35) для κ_1 и κ_2 , получаем искомое дисперсионное уравнение

$$\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)} = -\varepsilon(\omega) \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (2.37)$$

Решая это уравнение для частного случая $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, нетрудно получить, что

$$\omega = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{kc}{\omega_{pe}} \right)^2 - \sqrt{1 + 4k^4 c^4 / \omega_{pe}^4} \right\}^{1/2}.$$



Примерный график зависимости $\omega(k)$ показан на рис. 2.4. Для коротких волн, когда $kc/\omega_{pe} \gg 1$, поверхностная электромагнитная волна становится почти потенциальной (электростатической), так что в ней $|B| \ll |E|$. Дисперсионное уравнение в этом пределе имеет очень простой вид: $\varepsilon(\omega) = -1$. Это сразу следует и из общего дисперсионного соотношения (2.37), если перейти в нем к пределу $c \rightarrow \infty$.

Рис. 2.4. Закон дисперсной поверхностной электромагнитной волны в плазме

2-14. Найти плотность энергии и импульса электромагнитной волны в прозрачной среде.

Определим плотность энергии и импульса электромагнитной волны в среде как разность энергий и импульсов единицы объема среды с волной и без волны (при заданных макроскопических параметрах среды, например,

плотности ρ и температуре T). Эту разность можно вычислить следующим образом.

Представим, что в среде возникло очень слабое затухание. Тогда амплитуда волны будет уменьшаться со временем и, в конце концов, волна затухнет. При этом энергия W и импульс \vec{P} волны также будут уменьшаться за счет поглощения в среде:

$$\frac{dW}{dt} = -Q; \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{\Pi},$$

где Q и $\vec{\Pi}$ — энергия и импульс, поглощаемые в единице объема в единицу времени. Интегрируя эти соотношения по времени от начального момента до бесконечности, когда волны уже нет, отсюда получим

$$W = \int_0^{\infty} Q dt; \quad \vec{P} = \int_0^{\infty} \vec{\Pi} dt. \quad (2.38)$$

Поглощаемая в среде энергия $Q = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$, где символ $\langle \rangle$ означает усреднение по периоду волны. Вычислим эту величину для монохроматического поля с заданной частотой ω . Так как Q есть величина, квадратичная по амплитуде волны, здесь нужно перейти к записи полей и токов в вещественной форме:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{i\omega t}); \quad \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}_0 e^{-i\omega t} + \vec{j}_0^* e^{i\omega t}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle &= \frac{1}{4}(\vec{E}_0 \vec{j}_0^* + \vec{E}_0^* \vec{j}_0) = \frac{1}{4}(E_{0\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^* E_{0\beta}^* + E_{0\beta}^* \sigma_{\alpha\beta} E_{0\alpha}) = \\ &= \frac{1}{4} E_{0\alpha} E_{0\beta}^* (\sigma_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\beta}^*) = -\frac{i\omega}{16\pi} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*) E_{0\alpha}^* E_{0\beta} \end{aligned}$$

(здесь использовано соотношение (2.8), связывающее между собой тензоры $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$).

Таким образом, поглощение энергии в среде определяется антиэрмитовой (1.4) частью тензора диэлектрической проницаемости:

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\alpha}^* E_{0\beta}. \quad (2.39)$$

Наличие поглощения, и тем самым затухание волны, означает, что амплитуда поля \vec{E}_0 уже не постоянна, а будет экспоненциально уменьшаться: $\vec{E}_0 \sim e^{-\gamma t}$, где γ — декремент затухания. То, что затухание предполагается слабым, означает $\gamma \ll \omega$, или, что то же самое, антиэрмитова часть тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ мала: $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} \ll \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}$. При заданном γ мощность диссипации энергии волны — $Q \sim e^{-2\gamma t}$, поэтому, интегрируя в (2.38) и используя (2.39), получим, что плотность энергии волны

$$W = \frac{-i\omega}{16\pi\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\alpha}^* E_{0\beta}. \quad (2.40)$$

Из определения W ясно, что она не должна зависеть от затухания, которое явно входит в (2.40). Его действительно можно исключить, если учесть, что антиэрмитова часть $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)}$ и декремент затухания γ связаны между собой дисперсионными уравнениями (2.9) и (2.10). В отсутствие поглощения тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ эрмитов, $\gamma = 0$, т. е. частота чисто вещественна, а амплитуда поля \vec{E}_0 удовлетворяет уравнениям (2.9):

$$L_{\alpha\beta} E_\beta = \left[k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}(\omega) \right] E_{0\beta} = 0.$$

При малом, но конечном $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)}$, появляется добавка к частоте $\delta\omega = -i\gamma$, так что теперь оператор $L_{\alpha\beta}$ принимает вид

$$L_{\alpha\beta}(\omega - i\gamma) \approx L_{\alpha\beta}(\omega) - i\gamma \frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial \omega} = L_{\alpha\beta}^H + L_{\alpha\beta}^A;$$

$$L_{\alpha\beta}^H = k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}(\omega);$$

$$L_{\alpha\beta}^A = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)}(\omega) - \frac{i\gamma}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}).$$

Несколько меняется теперь и собственный вектор \vec{E}_0 , т. е. $E_\beta = E_{0\beta} + \delta E_\beta$, уравнение (2.9) для которого принимает вид

$$L_{\alpha\beta} E_\beta (L_{\alpha\beta}^{(H)} + L_{\alpha\beta}^{(A)})(E_{0\beta} + \delta E_\beta) \approx L_{\alpha\beta}^{(H)} \delta E_\beta + L_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\beta} = 0. \quad (2.41)$$

Так как нас здесь интересует лишь декремент γ , а не поправки δE_β (которые описывают изменение поляризации волны), умножим уравнение (2.41)

скалярно на вектор $E_{0\alpha}^*$:

$$L_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\alpha}^* E_{0\beta} = -L_{\alpha\beta}^{(H)} \delta E_{\beta}^* E_{0\alpha}^* = -L_{\beta\alpha}^{(H)*} E_{0\alpha}^* \delta E_{\beta} = 0;$$

(мы учли здесь, что оператор $L_{\alpha\beta}^{(H)}$ эрмитов, т. е. $L_{\beta\alpha}^{(H)*} = L_{\alpha\beta}^{(H)}$, а также то, что $E_{0\alpha}$ есть собственный вектор этого оператора: $L_{\alpha\beta}^{(H)} E_{0\beta} = 0$). Отсюда получаем

$$\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} E_{0\alpha}^* E_{0\beta} = i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\alpha}^* E_{0\beta}.$$

Подставляя это выражение для γ в (2.40), окончательно имеем

$$W = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\alpha}^* E_{0\beta}. \quad (2.42a)$$

Следует отметить, что выражение (2.42a) включает в себя как «электрическую», так и «магнитную» составляющую энергии волны, и может быть преобразовано к следующему виду:

$$W = \frac{|\vec{B}_0|^2}{16\pi} + \frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\alpha}^* E_{0\beta}. \quad (2.42b)$$

Действительно, нетрудно убедиться, что разность выражений (2.42a) и (2.42b), равная

$$\frac{1}{16\pi} (\varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} E_{0\alpha}^* E_{0\beta} - |\vec{B}_0|^2)$$

обращается в нуль для полей \vec{E}_0 и \vec{B}_0 удовлетворяющих уравнению Максвелла (2.3): в прозрачной (без диссипации) среде

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0) = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0; \quad (\vec{k} \times \vec{B}_0)_\alpha = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} E_{0\beta}. \quad (2.43)$$

Умножив второе из этих уравнений скалярно на \vec{E}_0^* , и используя первое, получаем:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} E_{0\beta} E_{0\alpha}^* = -\frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{E}_0^* = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) \cdot \vec{B}_0 = \vec{B}_0^* \cdot \vec{B}_0 = |\vec{B}_0|^2,$$

что и требовалось показать.

Для нахождения плотности импульса волны \vec{P} , заметим, что поглощаемый средой в единицу времени импульс $\vec{\Pi}$ есть средняя сила, действующая на единицу объема среды. Поэтому

$$\vec{\Pi} = \langle \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \rangle.$$

Учитывая здесь, что $\vec{B} = \frac{c}{\omega} [\vec{k} \times \vec{E}]$, а плотность заряда ρ связана с током \vec{j} уравнением непрерывности $\partial \rho / \partial t + \text{div } \vec{j} = 0$, или, в Фурье-представлении, $\rho = (\vec{k} \cdot \vec{j}) / \omega$, получим, что $\vec{\Pi} = (\vec{k} / \omega) \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = (\vec{k} / \omega) Q$. Тогда из (2.38) сразу следует, что

$$\vec{P} = \frac{\vec{k}}{\omega} W. \quad (2.44)$$

2-15. На примере электронных ленгмюровских колебаний (см. задачу 2-4) непосредственным вычислением проверить, что плотность энергии и импульса этих волн правильно описываются общими формулами (2.14).

Будем исходить из данного в предыдущей задаче определения энергии и импульса волны. В рассматриваемом случае в отсутствие колебаний электроны и ионы покоятся, так что энергия и импульс единицы объема среды без волны равны нулю. Пусть теперь в плазме возбуждена ленгмюровская волна, распространяющаяся вдоль оси z :

$$\vec{E} = \vec{e}_z \cdot E_0 \cos(kz - \omega_{pe} t).$$

Теперь энергия среды складывается из энергии электрического поля и кинетической энергии электронов (ионы считаем бесконечно тяжелыми, так что их энергией можно пренебречь):

$$W = \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi} + \frac{nm}{2} \langle v^2 \rangle.$$

Из уравнения движения электронов (его z -компоненты), $m \frac{\partial v}{\partial t} = eE_z$, получим, что $v = -\frac{eE_0}{m\omega_{pe}} \sin(kz - \omega_{pe} t)$, так что $W = E_0^2 / 8\pi$. Вычислим теперь импульс колебаний. Плотность импульса поля, равная $[\vec{E} \times \vec{B}] / 4\pi c$, обращается в данном случае в нуль ($\vec{B} = 0$, колебания электростатические). Поэтому вклад в импульс волны дают только электроны:

$$\vec{P} = \langle mv(n + \delta n) \rangle \vec{e}_z = m \langle v \delta n \rangle \vec{e}_z,$$

где δn — изменение плотности электронов в волне, определяемое из линеаризованного уравнения непрерывности $\partial \delta n / \partial t + n \partial v / \partial z = 0$, так что

$$\delta n = -\frac{kneE_0}{m\omega_{pe}^2} \sin(kz - \omega_{pe}t).$$

Отсюда $\vec{P} = \vec{e}_z m \langle \delta n v \rangle = \vec{e}_z \frac{kE_0^2}{8\pi\omega_{pe}} = \frac{\vec{k}}{\omega_{pe}} W$ (здесь учтено, что $\omega_{pe}^2 = 4\pi ne^2/m$). Таким образом, выражение для импульса совпадает с (2.14). Тензор диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)$ (2.16). Поэтому по общей формуле (2.14) для энергии получим

$$W = \frac{E_0^2}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon(\omega)) \Big|_{\omega=\omega_{pe}} = E_0^2/8\pi,$$

что также совпадает с результатом непосредственного вычисления.

2-16. Показать, что в системе отсчета, движущейся относительно плазмы со скоростью $u > \omega_{pe}/k$, рассмотренная в предыдущей задаче ленгмюровская волна имеет отрицательную энергию.

Запишем линеаризованные уравнения Пуассона, непрерывности и движения электронов (учитывая, что в невозмущенном состоянии они движутся со скоростью u):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} &= 4\pi e \delta n; & \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n \delta v + u \delta n) &= 0; \\ \frac{\partial \delta v}{\partial t} + u \frac{\partial \delta v}{\partial z} &= \frac{e}{m} E. \end{aligned}$$

Интегрируясь решением в виде волны, бегущей вдоль оси z , когда $E = E_0 \cos(kz - \omega t)$, для возмущений плотности и скорости электронов отсюда получим

$$\delta n = -\frac{eE_0 kn}{m\omega_{pe}^2} \sin(kz - \omega t); \quad \delta v = -\frac{eE_0}{m(\omega - ku)} \sin(kz - \omega t),$$

где закон дисперсии выглядит так: $(\omega - ku)^2 = \omega_{pe}^2$, т. е. $\omega = ku \pm \omega_{pe}$. Отличие частоты от ω_{pe} связано с доплеровским смещением, а два знака ($\pm \omega_{pe}$)

соответствуют волнам, которые в системе покоя электронов распространяются вперед и назад вдоль оси z . Рассмотрим здесь волну, распространяющуюся назад, для которой $\omega - ku = -\omega_{pe}$, и вычислим ее энергию. Энергия среды с такой волной складывается из энергии электрического поля $W_{эл} = \langle E^2 \rangle / 8\pi = E_0^2 / 16\pi$ и кинетической энергии электронов

$$W_{кин} = \left\langle \frac{m}{2} (n + \delta n) (u + \delta v)^2 \right\rangle = \frac{nm u^2}{2} + \frac{mn}{2} \langle (\delta v)^2 \rangle + mu \langle \delta n \delta v \rangle.$$

По определению, энергия $W = W_{эл} + W_{кин} - \frac{mnu^2}{2}$ (вычитается кинетическая энергия движения электронов в отсутствии волны). Используя полученные выражения для δn и δv и проводя усреднение, нетрудно получить, что $W = (E_0^2 / 8\pi) (1 - ku / \omega_{pe})$. Таким образом, энергия такой волны действительно отрицательная при $u > \omega_{pe} / k$.

2-17. Вычислить энергию поверхностной электромагнитной волны, рассмотренной в задаче 2-13.

Будем действовать в соответствии с общей процедурой, изложенной в задаче 2-14. Для этого считаем, что в тензоре диэлектрической проницаемости есть малая антиэрмитова добавка $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)}$, и найдем вызванное ею поглощение энергии волны в среде. Поскольку в данном случае речь идет об изотропной среде без пространственной дисперсии, для которой тензор $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega) \delta_{\alpha\beta}$, то его антиэрмитова часть определяется мнимой частью $\varepsilon(\omega)$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(A)} = i\varepsilon''(\omega) \delta_{\alpha\beta}$. Поэтому, согласно (2.39), диссипируемая в единице объема мощность $Q = |E|^2 \omega \varepsilon''(\omega) / 8\pi$.

Для поверхностной волны смысл имеет не объемная плотность энергии, а энергия волны на единицу площади поверхности раздела. Так что диссипируемую мощность Q нужно проинтегрировать по z от нуля до $-\infty$, т. е. по объему диэлектрика с единичной площадью поперечного сечения. Так как амплитуда электрического поля затухает в глубь диэлектрика пропорционально $e^{\kappa_2 z}$, то $Q \sim e^{2\kappa_2 z}$, а $\tilde{Q} = \int_{-\infty}^0 Q dz = \frac{|E_0|^2 \omega \varepsilon''(\omega)}{16\pi \kappa_2}$, где $|E_0|$ — модуль амплитуды электрического поля в диэлектрике у его поверхности. Наличие поглощения будет приводить к затуханию волны с декрементом γ , поэтому, по аналогии с (2.38),

$$W = \int_0^\infty \tilde{Q} dt = \frac{\tilde{Q}_0}{2\gamma} = \frac{|E_0|^2}{16\pi \kappa_2} \omega \frac{\varepsilon''}{2\gamma}.$$

Связь между $\varepsilon''(\omega)$ и γ определяется из дисперсионного уравнения (2.37). Проведя в нем разложение с точностью до величин первого порядка малости по $\varepsilon''(\omega)$ и γ , получим

$$\gamma \left[\frac{\omega \varepsilon'}{c^2} \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \left(\frac{\omega^2}{2c^2 \varkappa_2} - \varkappa_1 \right) \right] = \varepsilon'' \left(\frac{\omega^2}{2c^2 \varkappa_2} - \varkappa_1 \right).$$

В результате для энергии поверхностной электромагнитной волны получаем выражение

$$W = \frac{|E_0|^2}{8\pi} \frac{\omega}{4\varkappa_2} \left[\frac{\omega \varepsilon'}{c^2} \left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \right) + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \left(\frac{\omega^2}{2c^2 \varkappa_2} - \varkappa_1 \right) \right] \left(\frac{\omega^2}{2c^2 \varkappa_2} - \varkappa_1 \right)^{-1}.$$

Оно существенно упрощается для коротковолновых колебаний. В этом случае $W \approx \frac{|E_0|^2}{8\pi} \frac{\omega_0}{4k} \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}$, где ω_0 — частота, определяемая из условия $\varepsilon'(\omega_0) = -1$.

2-18. Определить бесстолкновительное затухание ленгмюровских колебаний (затухание Ландау) в плазме с отличной от нуля температурой электронов.

Пусть ленгмюровская волна с волновым вектором \vec{k} распространяется вдоль оси x . Тогда ее электрическое поле тоже направлено вдоль оси x , и может быть записано так:

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega_{pe}t). \quad (2.45)$$

Вычислим изменение импульса электронов, вызываемое электрическим полем (2.45), считая это поле «включенным» в момент времени $t = 0$, когда функция распределения электронов $f(x, v_x, t = 0) = f_0(v) = n_0(2\pi T_e/m)^{-1/2} \exp(-mv^2/2T_e)$, где n_0 есть начальная однородная плотность электронов, а T_e — их температура. Тогда темп изменения импульса электронов равен

$$\frac{dP_e}{dt} = \langle en(x, t)E(x, t) \rangle = e \int_{-\infty}^{+\infty} dv \langle f(x, v, t)E(x, t) \rangle \quad (2.46)$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение вдоль координаты x . Так как $\langle E(x, t) \rangle = 0$, то отличная от нуля передача импульса возникает при учете корреляций между электрическим полем и вызванным им изменением функции распределения электронов. Для вычисления последней используем теорему Лиувилля, согласно которой в бесстолкновительной плазме функция распределения остается постоянной вдоль траектории частиц [10]. Рассмотрим электрон, который в начальный момент $t = 0$ имел координату $x = x_0$ и скорость $v = v_0$. Под действием поля (2.45) его скорость становится равной $v_0 + \Delta v$, где возмущение Δv определяется уравнением движения

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = \frac{e}{m} E_0 \sin[k(x_0 + v_0 t) - \omega_{pe} t],$$

решение которого, удовлетворяющее условию $\Delta v(0) = 0$, есть

$$\Delta v = \frac{e E_0}{m(\omega_{pe} - k v_0)} \{ \cos[k x_0 - (\omega - k v_0) t] - \cos k x_0 \}.$$

Поэтому из теоремы Лиувилля следует, что

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= f_0(v_0) = f_0[v - \Delta v(x, t)] \approx f_0(v) - \\ &- \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{e E_0}{m(\omega_{pe} - k v)} \{ \cos[k x_0 - (\omega_{pe} - k v) t] - \cos k x_0 \}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение для f и поле E из (2.45) в (2.46), и усредняя их произведение по x_0 , находим, что

$$\langle f E \rangle = - \frac{e E_0^2}{2m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot \frac{\sin[(\omega_{pe} - k v) t]}{(\omega_{pe} - k v)},$$

так что

$$\frac{dP_e}{dt} = - \frac{e^2 E_0^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_0}{dv} \cdot \frac{\sin[(\omega_{pe} - k v) t]}{(\omega_{pe} - k v)} dv. \quad (2.47)$$

Входящая в подынтегральное выражение функция

$$F(v) = \frac{\sin[(\omega_{pe} - k v) t]}{(\omega_{pe} - k v)}$$

имеет резкий максимум при скорости электрона v удовлетворяющей условию резонанса (резонанс Ландау)

$$\omega_{pe} - kv = 0. \quad (2.48)$$

Так как высота этого максимума растет со временем, $F_{\max} \sim t$, а ширина уменьшается как $\Delta v \sim t^{-1}$, то через несколько волновых периодов эту функцию в интеграле (2.47) можно заменить дельта-функцией как $F(v) \approx \pi \delta(\omega_{pe} - kv)$. В результате

$$\frac{dP_e}{dt} = -\frac{\pi e^2 E_0^2}{2mk} \frac{df_0}{dv} \bigg|_{v=\omega_{pe}/k}. \quad (2.49)$$

Как видно из (2.49), при максвелловском распределении электронов, когда производная $df_0/dv < 0$, резонансные электроны приобретают импульс, $dP_e/dt > 0$, поэтому импульс волны должен уменьшаться, т. е. волна затухает. Скорость затухания волны характеризуется декрементным затуханием γ , который можно вычислить следующим образом. Согласно закону сохранения импульса,

$$\frac{dP_w}{dt} = -\frac{dP_e}{dt} = \frac{\pi e^2 E_0^2}{2mk} \frac{df_0}{dv} \bigg|_{v=\omega_{pe}/k},$$

где $P_w = \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot \frac{k}{\omega_{pe}}$ есть плотность импульса волны вычисленная в задаче 2-15. Отсюда декремент затухания

$$\gamma = \frac{dP_w/dt}{2P_w} = \frac{2\pi^2 e^2 \omega_{pe}}{mk^2} \frac{df_0}{dv} \bigg|_{v=\frac{\omega_{pe}}{k}} = -\omega_{pe} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{u_\phi}{v_T} \right)^3 \exp \left(-\frac{u_\phi}{v_T} \right)^2,$$

где $u_\phi = \omega_{pe}/k$ есть фазовая скорость волны, а $v_T = (2T_e/m)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов. Отсюда следует, что условия существования ленгмюровских волн, т. е. слабость из затухания, $|\gamma|/\omega_{pe} \ll 1$, выполняется если тепловая скорость электронов много меньше фазовой скорости волны (когда число резонансных электронов мало).

§ 3. Естественная оптическая активность. Эффекты Фарадея и Керра

Если прозрачная изотропная среда не инвариантна относительно преобразования инверсии (обладает свойством стереоизомерии), то при учете слабой пространственной дисперсии ее тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta} + if(\omega)e_{\alpha\beta\gamma}k_{\gamma}, \quad (3.1)$$

где \vec{k} — волновой вектор, а ε и f вещественны. Такая среда обладает свойством естественной оптической активности, и угол поворота плоскости поляризации электромагнитной волны на единицу длины пути в такой среде

$$d\varphi/dl = \omega^2 f / 2c^2. \quad (3.2)$$

В достаточно слабом внешнем магнитном поле \vec{B}_0 тензор диэлектрической проницаемости изотропной прозрачной среды принимает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega)\delta_{\alpha\beta} + ib(\omega)e_{\alpha\beta\gamma}B_{0\gamma} \quad (3.3)$$

(ε и γ — вещественны). При распространении электромагнитной волны в такой среде происходит вращение ее плоскости поляризации (эффект Фарадея), причем угол поворота на единицу длины пути

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{b}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{\omega}{c} B_0 \cos \theta, \quad (3.4)$$

где θ — угол между волновым вектором волны и внешним магнитным полем.

Тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды, помещенной в достаточно слабое внешнее электрическое поле \vec{E}_0 , меняется следующим образом:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + a_1 E_0^2 \delta_{\alpha\beta} + a_2 E_{0\alpha} E_{0\beta}. \quad (3.5)$$

По своим свойствам такая среда становится аналогичной одноосному кристаллу с оптической осью, направленной вдоль \vec{E}_0 , и поляризуемости

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon + (a_1 + a_2)E_0^2; \quad \varepsilon_{\perp} = \varepsilon + a_1 E_0^2 \quad (3.6)$$

(эффект Керра).

3-1. Выразить величину $f(\omega)$, входящую в тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$ (3.1) и определяющую естественную оптическую активность среды (3.2), через характеристики фигурирующего в (2.4) тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$, связывающего векторы $\vec{D}(\vec{r}, t)$ и $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

В стационарной однородной изотропной среде, не обладающей центром инверсии, наиболее общий вид тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ следующий:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{\rho}, \tau) = a_1(\rho, \tau)\delta_{\alpha\beta} + \\ + a_2(\rho, \tau)\rho_\alpha\rho_\beta + a_3(\rho, \tau)e_{\alpha\beta\gamma}\rho_\gamma; \\ \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \tau = t - t', \end{cases} \quad (3.7)$$

поскольку в изотропной среде единственными «конструкциями» являются вектор $\vec{\rho}$ и инвариантные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta\gamma}$. Так как последний из них есть псевдотензор, то a_3 — псевдоскаляр, который может быть отличен от нуля только в случае среды, не имеющей центра инверсии. Подставляя выражение (3.7) в формулу (2.7), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = & \delta_{\alpha\beta} \left[1 + \int a_1 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau \right] + \\ & + \int a_2 \rho_\alpha \rho_\beta e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau + e_{\alpha\beta\gamma} \int a_3 \rho_\gamma e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Входящие сюда функции $a_1(\rho, \tau)$, $a_2(\rho, \tau)$, $a_3(\rho, \tau)$ заметно отличны от нуля при $\rho \lesssim r_0$, где для обычных сред величина r_0 порядка молекулярных размеров. В то же время сами уравнения макроскопической электродинамики сплошной среды имеют смысл, если размер, на котором меняются средние поля (а это есть длина волны λ), много больше r_0 . Так как $\lambda = 2\pi/k$, то это означает, что в фигурирующих в (3.8) интегралах величина $\vec{k} \cdot \vec{\rho} \ll 1$ во всей области, дающей основной вклад. Следовательно, справедливо разложение

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \approx 1 - i\vec{k} \cdot \vec{\rho} + \dots$$

Подставляя первые два члена этого ряда в (3.8) и проведя интегрирование

по углам ($d\vec{\rho} = \rho^2 d\rho d\Omega$), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) \approx \delta_{\alpha\beta} \left\{ 1 + 4\pi \int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau \int \rho^2 a_1(\rho, \tau) d\rho + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau \int_0^\infty \rho^4 d\rho a_2(\rho, \tau) \right\} - \\ - ie_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma \left\{ \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau \int_0^\infty \rho^4 d\rho a_3(\rho, \tau) \right\}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

При интегрировании по углам было учтено

$$\int \rho_\alpha d\Omega = 0; \quad \int \rho_\alpha \rho_\beta d\Omega = \frac{4\pi}{3} \rho^2 \delta_{\alpha\beta}; \quad \int \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma d\Omega = 0.$$

Таким образом, полученное выражение (3.9) для $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$, имеющее тензорную структуру типа (3.1) (величины $\varepsilon(\omega)$ и $f(\omega)$ определяются, соответственно, первым и вторым выражением в фигурных скобках), представляет собой первые два члена разложения тензора диэлектрической проницаемости по степеням малого параметра r_0/λ .

3-2. *Определить изменение поляризации электромагнитной волны при ее распространении в среде, тензор диэлектрической проницаемости которой имеет вид (3.1).*

Будем исходить из уравнений (2.9) для \vec{E} :

$$L_{\alpha\beta} E_\beta \equiv \left(k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right) E_\beta = 0.$$

Пусть волна распространяется вдоль оси z , $\vec{k} = (0, 0, k)$. При таком выборе системы координат уравнения для компонент электрического поля волны выглядят так:

$$\begin{cases} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_x + i \frac{\omega^2}{c^2} f k E_y = 0; \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_y - i \frac{\omega^2}{c^2} f k E_x = 0; \\ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

В поперечной электромагнитной волне $E_z = 0$, и из первых двух уравнений (3.10) получаем дисперсионное уравнение

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)^2 = \frac{\omega^4}{c^4}f^2k^2, \quad \text{т. е.} \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = \pm \frac{\omega^2}{c^2}fk. \quad (3.11)$$

Двум отличающимся знаком решениям в (3.11) соответствуют поляризации $E_x = \pm iE_y$. Здесь снимается вырождение по поляризации, т. е. в такой среде собственным решением является электромагнитная волна с круговой (левой или правой) поляризацией. При заданной частоте волны этим двум поляризациям соответствуют, как это следует из (3.11), несколько отличающиеся по величине волновые векторы:

$$k_{\pm} \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} \pm \Delta k; \quad \Delta k = \frac{\omega^2}{2c^2}f \ll \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

Это различие и приводит к вращению плоскости поляризации волн.

Пусть в плоскости $z = 0$ электромагнитная волна линейно поляризована вдоль x . Представив ее в виде суперпозиции двух круговых поляризаций (собственных решений), для электрического поля при ее дальнейшем распространении получим

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}[\vec{e}_+e^{ikz} + \vec{e}_-e^{ikz}]; \\ \vec{e}_{\pm} &= (\vec{e}_x \pm \vec{e}_y)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим компоненты поля

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{E_0}{2}e^{i(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z - \omega t)}(e^{i\Delta kz} + e^{-i\Delta kz}) = E_0 \cos \Delta kz e^{i(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z - \omega t)}; \\ E_y &= \frac{iE_0}{2}e^{i(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z - \omega t)}(e^{i\Delta kz} - e^{-i\Delta kz}) = -E_0 \sin \Delta kz e^{i(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}z - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

и видим: поскольку отношение $E_y/E_x = -\tan \Delta kz$, то волна остается линейно поляризованной, но плоскость поляризации повернута относительно оси x на угол $\varphi = \Delta kz$. Следовательно, при распространении волны в такой среде плоскость ее поляризации вращается так, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta k = \frac{\omega^2}{2c^2}f.$$

3-3. Световая волна распространяется в оптически активной среде с постоянной вращения плоскости поляризации $d\varphi/dl = 0.2\pi/\text{см}$ (см. предыдущую задачу). Из-за различия в поглощении левой и правой круговых поляризаций линейно поляризованная вначале волна при прохождении 1 м в среде превращается в эллиптически поляризованную с отношением полуосей эллипса поляризации равным 2. Какой будет поляризация волны после прохождения еще одного метра в этой среде?

Пусть l_+ и l_- есть длины поглощения соответственно левой и правой круговых поляризаций. Тогда полученные в предыдущей задаче выражения (3.13) для компонент поля линейно поляризованной вначале (при $z = 0$) волны, поправленные с учетом присутствующего теперь поглощения, будут выглядеть так:

$$E_x = \frac{E_0}{2} \exp\left[i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} z - \omega t\right)\right] \left[\exp(i\Delta k z - z/l_+) + \exp(-i\Delta k z - z/l_-) \right],$$

$$E_y = \frac{iE_0}{2} \exp\left[i\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} z - \omega t\right)\right] \left[\exp(i\Delta k z - z/l_+) - \exp(-i\Delta k z - z/l_-) \right].$$

Отношение E_y/E_x , определяющее поляризацию волны, есть

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{[\exp(i\Delta k z - z/l_+) - \exp(-i\Delta k z - z/l_-)]}{[\exp(i\Delta k z - z/l_+) + \exp(-i\Delta k z - z/l_-)]}.$$

Как было показано в предыдущей задаче, $\Delta k = d\varphi/dl$, следовательно $\Delta k = 0.2\pi/\text{см}$ для данной среды. При $z = L = 1 \text{ м}$ величина $\Delta k L = 20\pi$, поэтому здесь

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{\exp(-L/l_+) - \exp(-L/l_-)}{\exp(-L/l_+) + \exp(-L/l_-)} = i \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

где $\alpha = \exp[-L(l_+^{-1} + l_-^{-1})]$. Это соответствует эллиптической поляризации с главными осями вдоль координатных осей (x , y). Отношение полуосей эллипса есть $(1 + \alpha)/(1 - \alpha)$, и оно равно в этой точке 2. Отсюда $\alpha = 1/3$. Теперь легко видеть, что в точке $z = 2L$ поляризации света будет эллиптической с теми же главными осями, а отношение полуосей эллипса поляризации равно здесь $(1 + \alpha^2)/(1 - \alpha^2) = 5/4$.

3-4. Молекулы разреженного газа представляют собой хаотически ориентированные одновитковые правые «двойные спирали» — две жесткие заряженные (с линейной плотностью $\pm\rho$ каждая) винтовые нити

(рис. 3.1). Под действием электрического поля нити смещаются друг относительно друга вдоль образующей их винтовой линии на величину, пропорциональную среднему вдоль молекулы значению продольной составляющей электрического поля ($\Delta = \beta \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l}$). Показать, что такой газ обладает естественной оптической активностью, и найти угол поворота плоскости поляризации (на единицу длины пути луча), считая размеры молекулы малыми по сравнению с длиной волны ($a, h \ll \lambda$).

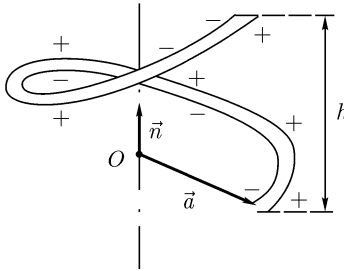


Рис. 3.1. Молекула «двойная спираль»

Задача сводится, по существу, к вычислению тензора диэлектрической проницаемости такого газа с точностью до членов первого порядка по малым параметрам a/λ , h/λ . Соответственно этому, при вычислении интеграла $\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, определяющего смещение нитей и, тем самым, ток, электрическое поле можно приближенно записать так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \approx \vec{E}_0 e^{-i\omega t} (1 + i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (3.14)$$

где \vec{E}_0 — поле в начале координат (точка 0 на рис. 3.1).

Ориентация молекулы полностью определяется заданием единичного вектора \vec{n} , направленного вдоль оси винтовой линии молекулы, и вектора $\vec{a} \perp \vec{n}$, отмечающего начало молекулы в поперечной к \vec{n} плоскости. Тогда положение каждой точки молекулы определяется одним параметром — углом поворота φ :

$$\vec{R}(\varphi) = \vec{n} h \frac{\varphi}{2\pi} + \vec{a} \cos \varphi + [\vec{n} \times \vec{a}] \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3.15)$$

так что с учетом (3.14)

$$\begin{aligned} \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l} \approx \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ 1 + i \left[(\vec{k} \cdot \vec{n}) h \frac{\varphi}{2\pi} + (\vec{k} \cdot \vec{a}) \cos \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \vec{k} [\vec{n} \times \vec{a}] \sin \varphi \right] \right\} \left\{ \frac{\vec{n} h}{2\pi} - \vec{a} \sin \varphi + [\vec{n} \times \vec{a}] \cos \varphi \right\}, \end{aligned}$$

а смещение нитей

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{n}, \vec{a}, \vec{E}_0) = & \beta e^{-i\omega t} \left\{ h(\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) + i(\vec{E}_0 \cdot \vec{n})(\vec{k} \cdot \vec{n}) \frac{h^2}{2} + \right. \\ & \left. + i(\vec{E}_0 \cdot \vec{a})(\vec{k} \cdot \vec{n})h - i\pi(\vec{E}_0 \cdot \vec{a})(\vec{k} \cdot [\vec{n} \times \vec{a}]) + i\pi(\vec{k} \cdot \vec{a})(\vec{E}_0 \cdot [\vec{n} \times \vec{a}]) \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для удобства дальнейших вычислений введем бесконечно малую площадь поперечного сечения молекулы S . Тогда возникающая в молекуле при смещении нитей объемная плотность тока $\vec{j} = \rho \Delta \vec{t} / S = -i\omega \rho \Delta(\vec{n}, \vec{a}, \vec{E}_0) \cdot \vec{t} / S$, где \vec{t} — единичный вектор вдоль линии молекулы, равный, согласно (3.15),

$$\vec{t} = (a^2 + h^2/4\pi^2)^{-1/2} \left(\vec{n} \frac{h}{2\pi} - \vec{a} \sin \varphi + [\vec{n} \times \vec{a}] \cos \varphi \right).$$

В полученном выражении плотность тока в точке \vec{r} определяется через \vec{E}_0 — значение электрического поля в точке 0. Но для нахождения тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\vec{k})$ необходимо знать связь между \vec{j} и \vec{E} в одной и той же точке пространства. Для этого выразим \vec{E}_0 через $\vec{E}(\vec{r})$, что с нужной здесь точностью даст $\vec{E}_0 = \vec{E} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \approx \vec{E}(1 - i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Поскольку в выражении (3.16) для Δ все слагаемые, кроме первого, пропорциональны k , т. е. уже являются величинами первого порядка малости по a/λ , h/λ , то отличие \vec{E}_0 от \vec{E} достаточно учесть только в первом слагаемом, полагая в остальных $\vec{E}_0 = \vec{E}$. Тогда, используя (3.15) и (3.16), находим, что внутри молекулы ток

$$\begin{aligned} \vec{j} = & \frac{-i\omega\rho\beta}{S(a^2 + h^2/4\pi^2)^{1/2}} \left(\vec{n} \frac{h}{2\pi} - \vec{a} \sin \varphi + [\vec{n} \times \vec{a}] \cos \varphi \right) \\ & \left\{ h(\vec{E} \cdot \vec{n}) - ih(\vec{E} \cdot \vec{n}) \left[(\vec{k} \cdot \vec{n})h \frac{\varphi}{2\pi} + (\vec{k} \cdot \vec{a}) \cos \varphi + \vec{k}[\vec{n} \times \vec{a}] \sin \varphi \right] + \right. \\ & + i \frac{h^2}{2} (\vec{E} \cdot \vec{n})(\vec{k} \cdot \vec{n}) + ih(\vec{E} \cdot \vec{a})(\vec{k} \cdot \vec{n}) - \\ & \left. - i\pi(\vec{E} \cdot \vec{a})(\vec{k}[\vec{n} \times \vec{a}]) + i\pi(\vec{k} \cdot \vec{a})(\vec{E}[\vec{n} \times \vec{a}]) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Теперь для определения тензора проводимости такого газа (как сплошной среды) нужно провести в (3.17) усреднение по «физически бесконечно

малому» объему, т.е. области пространства, малой по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, но содержащей еще много молекул. Такое усреднение удобно проделать в несколько этапов. Сначала при заданной ориентации молекулы (\vec{n} и \vec{a} фиксированы) усредняем ток (3.17) по различным ее точкам, т.е. по φ . Затем при постоянном \vec{n} проводим усреднение по равновероятным положениям вектора \vec{a} в плоскости, поперечной к \vec{n} . Последним делается усреднение по направлениям осей молекул, т.е. по \vec{n} . Мы не приводим здесь деталей этих промежуточных вычислений, которые хоть и просты, но довольно громоздки. Отметим лишь, что при таком усреднении удобно использовать тензорные обозначения и результаты, полученные в задаче 1-1. Так как ток отличен от нуля только внутри молекул, то результат усреднения по их ориентации нужно умножить на долю объема, занимаемого молекулами, т.е. на n_0SL , где n_0 — их средняя плотность, S — площадь поперечного сечения, а $L = 2\pi(a^2 + h^2/4\pi^2)^{1/2}$ — длина. В результате получается, что тензор проводимости газа

$$\sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) = -\frac{i\hbar^2}{3}\omega n_0\rho\beta\delta_{\alpha\beta} - \frac{2\pi\omega n_0\rho\beta\hbar a^2}{3}e_{\alpha\beta\gamma}k_\gamma.$$

Отсюда тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{\alpha\beta}$ равен $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + ife_{\alpha\beta\gamma}k_\gamma$, где

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi}{3}h^2n_0\rho\beta; \quad f = \frac{8\pi^2}{3}n_0\rho\beta\hbar a^2. \quad (3.18)$$

Соответственно, газ «спиралей» действительно обладает свойством естественной оптической активности, определяемым константой f из (3.18). Обратим внимание на то, что величина f обращается в нуль как при $a \rightarrow 0$, так и при $h \rightarrow 0$. Это не удивительно, так как в данных предельных случаях спираль вырождается в палочку или кольцо, которые уже не обладают свойством стереоизомерии.

Полезно привести здесь и другое решение этой задачи, использующее понятие поляризации и намагничения молекул. При относительном смещении нитей на величину Δ на концах молекулы появляются заряды $\pm\rho\Delta$, так что у нее возникает электрический дипольный момент $\vec{d} = \rho\Delta h\vec{n}$. При изменении Δ во времени по молекуле течет ток $J = \rho\dot{\Delta}$, что приводит к появлению магнитного момента $\vec{\mu} = \frac{J\pi a^2}{c}\vec{n} = \frac{-i\omega\rho\Delta}{c}\pi a^2\vec{n}$. Тогда средняя поляризация \vec{P} и намагничение \vec{M} единицы объема газа равны $\vec{P} = n_0\langle\vec{d}\rangle$,

$\vec{M} = n_0 \langle \vec{\mu} \rangle$, где символ $\langle \rangle$ означает усреднение по всем ориентациям молекул. После этого $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}$, откуда находится тензор проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$ и тем самым $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Используя выражение (3.16) для Δ , запишем

$$\vec{d} = \rho h \Delta \vec{n} = \rho h \beta \vec{n} \left\{ h(\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) + i(\vec{E}_0 \cdot \vec{n})(\vec{k} \cdot \vec{n}) \frac{h^2}{2} + i(\vec{E}_0 \cdot \vec{a})(\vec{k} \cdot \vec{n})h - \right. \\ \left. - i\pi(\vec{E}_0 \cdot \vec{a})(\vec{k}[\vec{n} \times \vec{a}]) + i\pi(\vec{k} \cdot \vec{a})(\vec{E}_0[\vec{n} \times \vec{a}]) \right\} e^{-i\omega t}.$$

Усредняя, получим, что $\langle \vec{d} \rangle = \rho h \beta \left\{ h \frac{\vec{E}_0}{3} + i\pi \frac{a^2}{3} [\vec{k} \times \vec{E}_0] \right\}$. Так как ток намагничения пропорционален $\operatorname{rot} \vec{M} = i[\vec{k} \times \vec{M}]$, то $\vec{\mu}$ можно вычислить в нулевом приближении по k :

$$\vec{\mu} = \frac{-i\omega\rho\Delta}{c} \pi a^2 \vec{n} = -\frac{i\omega}{c} \pi a^2 \vec{n} \rho \beta h (\vec{E}_0 \cdot \vec{n}); \quad \langle \vec{\mu} \rangle = \frac{i\omega\beta\pi a^2 h \rho}{3c} \vec{E}_0.$$

Отсюда $\vec{j} = -i\omega\vec{P} + ic[\vec{k} \times \vec{M}] = -i\rho h \beta n_0 \omega \left\{ h \frac{\vec{E}_0}{3} + \frac{i\pi a^2}{3} [\vec{k} \times \vec{E}_0] \right\} + \frac{\omega\rho\pi a^2 h \beta n_0}{3} [\vec{k} \times \vec{E}_0]$, что дает уже известное выражение (3.18) для тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Интересно отметить, что токи поляризации и намагничения дают одинаковый вклад в величину f , определяющую оптическую активность газа.

3-5. Показать, что если среда, обладающая свойством естественной оптической активности и имеющая тензор диэлектрической проницаемости (3.1), становится слабо-неоднородной (т. е. пространственный масштаб l изменения ее параметров много больше молекулярной длины r_0), то связь векторов \vec{D} и \vec{E} в ней принимает следующий вид:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + f(\vec{r}) \cdot \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}[\vec{\nabla} f(\vec{r}) \times \vec{E}(\vec{r})]. \quad (3.19)$$

Запишем самый общий вид связи векторов $\vec{D}(\vec{r})$ и $\vec{E}(\vec{r})$ в изотропной среде:

$$\begin{cases} D_\alpha(\vec{r}) = E_\alpha(\vec{r}) + \int \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{E}_\beta(\vec{r}') d\vec{r}'; \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}') = a_1(\vec{r}, \vec{r}') \delta_{\alpha\beta} + a_2(\vec{r}, \vec{r}') (r_\alpha - r'_\alpha)(r_\beta - r'_\beta) + \\ + a_3(\vec{r}, \vec{r}') e_{\alpha\beta\gamma} (r_\gamma - r'_\gamma) \end{cases} \quad (3.20)$$

(сравни с (3.7)).

Входящие сюда функции a_1, a_2, a_3 не могут быть произвольными. Из общих термодинамических соотношений следует, что тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}')$ должен удовлетворять такому условию: $\varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}') = \varepsilon_{\beta\alpha}(\vec{r}', \vec{r})$. Это есть следствие принципа симметрии кинетических коэффициентов [7, гл. 8].

Поэтому здесь удобно ввести вместо \vec{r} и \vec{r}' новые переменные $R = \frac{\vec{r} + \vec{r}'}{2}$ и $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$. Тогда из (3.20) следует, что необходимые условия симметрии будут выполнены, если $a_{1,2,3}(\vec{r}, \vec{r}') \equiv a_{1,2,3}(\vec{R}, \rho)$. В случае однородной среды функции $a_{1,2,3}$ не зависят от \vec{R} и мы возвращаемся к выражению (3.7). Если же среда неоднородна, то можно приближенно воспользоваться разложением по $\vec{\rho}$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho}/2$, так что $a_{1,2,3}(\vec{R}, \rho) \approx a_{1,2,3}(\vec{r}, \rho) - \frac{\vec{\rho}}{2} \vec{\nabla} a_{1,2,3}$. Учитывая также неоднородность поля $E_\beta(\vec{r}') \approx E_\beta(\vec{r}) - \rho_\gamma \partial E_\beta / \partial x_\gamma$ и подставляя это в (3.20), получим

$$\begin{aligned} D_\alpha(\vec{r}) = & E_\alpha(\vec{r}) \left[1 + \int a_1(\vec{r}, \rho) d^3 \rho - \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} a_1 \cdot \vec{\rho} d^3 \rho \right] + \\ & + E_\beta(\vec{r}) \left[\int a_2(\vec{r}, \rho) \rho_\alpha \rho_\beta d^3 \rho - \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} a_2 \cdot \vec{\rho} \rho_\alpha \rho_\beta d^3 \rho \right] + \\ & + E_\beta(\vec{r}) \left[\int a_3(\vec{r}, \rho) e_{\alpha\beta\gamma} \rho_\gamma d^3 \rho - \frac{1}{2} \int \vec{\nabla} a_3 \cdot \vec{\rho} e_{\alpha\beta\gamma} \rho_\gamma d^3 \rho \right] - \\ & - \int d^3 \rho \rho_\delta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\delta} [a_1(\vec{r}, \rho) \delta_{\alpha\beta} + a_2(\vec{r}, \rho) \rho_\alpha \rho_\beta + a_3(\vec{r}, \rho) e_{\alpha\beta\gamma} \rho_\gamma]. \end{aligned}$$

Проводя здесь интегрирование по углам $d^3 \rho = \rho^2 d\rho d\Omega$, точно так же, как в (3.9), имеем

$$\begin{aligned} D_\alpha(\vec{r}) = & E_\alpha(\vec{r}) \varepsilon(\vec{r}) - e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\gamma} \int \frac{4\pi}{3} a_3(\vec{r}, \rho) \rho^4 d\rho - \\ & - \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} E_\beta \int \frac{4\pi}{3} \frac{\partial a_3}{\partial x_\gamma} \rho^4 d\rho. \end{aligned}$$

Таким образом, связь \vec{D} и \vec{E} действительно имеет вид (3.19), где

$$\begin{aligned}\varepsilon(\vec{r}) &= 1 + 4\pi \int_0^\infty a_1(\vec{r}, \rho) \rho^2 d\rho + \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty a_2(\vec{r}, \rho) \rho^4 d\rho; \\ f(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty a_3(\vec{r}, \rho) \rho^4 d\rho.\end{aligned}$$

Следует отметить, что соотношение (3.19) играет важную роль при выяснении граничных условий в электродинамике неоднородных сред с пространственной дисперсией [1, с. 258–261].

3-6. *Определить изменение поляризации электромагнитной волны, распространяющейся в изотропной среде без пространственной дисперсии, помещенной во внешнее магнитное поле \vec{B}_0 (эффект Фарадея).*

Во внешнем магнитном поле \vec{B}_0 тензор диэлектрической проницаемости такой среды принимает вид (3.3):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + ibe_{\alpha\beta\gamma}B_{0\gamma}.$$

Выберем систему координат так, что волновой вектор \vec{k} направлен вдоль оси z , а внешнее магнитное поле \vec{B}_0 лежит в плоскости (x, z) . Тогда уравнения (2.9) для компонент электрического поля волны \vec{E} запишутся так:

$$\begin{cases} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)E_x + i\frac{\omega^2}{c^2}bB_{0z}E_y = 0; \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)E_y - i\frac{\omega^2}{c^2}bB_{0z}E_x + i\frac{\omega^2}{c^2}bB_{0x}E_z = 0; \\ \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E_z - i\frac{\omega^2}{c^2}bB_{0x}E_y = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Прежде всего заметим, что представление тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в виде (3.3) является учетом линейной по величине внешнего поля B_0 поправки к тензору диэлектрической проницаемости изотропной среды. Поэтому учет в уравнениях (3.21) членов более высокого порядка по B_0 был бы превышением точности. Тогда из последнего уравнения в (3.21) видно, что продольное поле E_z оказывается величиной первого порядка малости, поэтому во втором из уравнений можно пренебречь последним слагаемым в левой части,

которое квадратично по B_0 (напомним, что в анизотропной среде поперечным к \vec{k} является вектор \vec{D} , а не \vec{E}). После этого получается система двух уравнений для E_x и E_y , из условия совместности которых находим дисперсионное уравнение

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = \pm b \frac{\omega^2}{c^2} B_{0z} = \pm b_0 \cos \theta \quad (3.22)$$

(θ – угол между векторами \vec{k} и \vec{B}_0).

Двум разным знакам в (3.22) соответствуют циркулярно-поляризованные электромагнитные волны ($E_y = \mp i E_x$), имеющие различные волновые векторы:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \pm \Delta k; \quad \Delta k \approx \frac{b}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{\omega}{c} B_0 \cos \theta.$$

Отсюда аналогично задаче 3-2 получаем, что внешнее магнитное поле приводит к вращению плоскости поляризации волны, причем

$$\frac{d\varphi}{dl} = \Delta k = \frac{b}{2\sqrt{\varepsilon}} B_0 \cos \theta.$$

В данном случае величина вращения зависит от направления распространения волны (пропорциональна $\cos \theta$).

3-7. Найти фарадеевское вращение плоскости поляризации для холодной плазмы с бесконечно тяжелыми ионами.

Воспользуемся найденным ранее (2.15) тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ этой среды во внешнем магнитном поле \vec{B}_0 . Считая последнее слабым, из общей формулы (2.15) получим

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \approx \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{i\omega_{pe}^2\omega_b}{\omega^3} e_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma}. \quad (3.23)$$

Сравнивая с (3.3), находим величину b , определяющую вращение плоскости поляризации, $b = -e\omega_{pe}^2/mc\omega^3$, так что угол поворота в этом случае

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{b}{2\sqrt{\varepsilon}} B_0 \cos \theta = -\frac{\omega_b}{2c} \frac{\omega_{pe}^2 \cos \theta}{\omega^2 (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)^{1/2}}.$$

Когда можно считать внешнее магнитное поле слабым, так чтобы можно было применить упрощенное выражение (3.23) для $\varepsilon_{\alpha\beta}$? Если учесть, что для электромагнитных волн в плазме $\omega \geq \omega_{pe}$ (смотри (2.17)), то из (2.15) нетрудно увидеть, что это верно, если $\omega_b \ll \omega_{pe}$ (циклотронная частота электронов много меньше плазменной частоты).

3-8. *Линейно поляризованная электромагнитная волна падает по нормали на поверхность изотропного диэлектрика, находящегося во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 (рис. 3.2). Считая, что $(\vec{k}_0 \cdot \vec{E}_0) = 0$, определить поляризацию отраженной волны.*

В системе координат, где ось x направлена вдоль \vec{E}_0 , тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ диэлектрика, согласно (3.5), выглядит так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} &= \varepsilon + a_1 E_0^2; \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\parallel} &= \varepsilon + (a_1 + a_2) E_0^2.\end{aligned}$$

Пусть падающая волна поляризована так, что вектор электрического поля в ней $\vec{E}^{(n)}$ (лежащий в плоскости (x, y)) составляет угол θ с E_0 , т. е. $E_x^{(n)} = E^{(n)} \cos \theta$, $E_y^{(n)} = E^{(n)} \sin \theta$. Эффект изменения поляризации связан с различной поляризуемостью диэлектрика вдоль x и y , $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy}$. Используя формулу (2.34) для данного случая нормального падения, и считая изменение поляризуемости под действием внешнего поля слабым ($a_1 E_0^2 \ll \varepsilon$, $a_2 E_0^2 \ll \varepsilon$), получим для поля отраженной волны $\vec{E}^{(0)}$

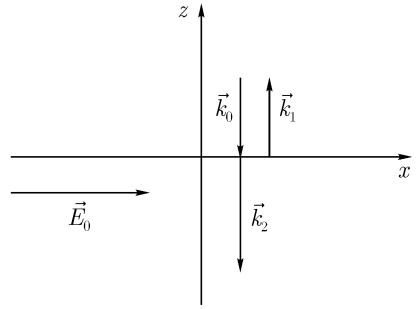


Рис. 3.2. Отражение волны при эффекте Керра

$$\begin{cases} E_x^{(0)} = E_x^{(n)} \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} + 1} = E^{(n)} \cos \theta \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} + 1} \approx \\ \approx E^{(n)} \cos \theta \left[1 + \frac{(a_1 + a_2) E_0^2}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)}; \\ E_y^{(0)} = E_y^{(n)} \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} + 1} \approx E^{(n)} \sin \theta \left[1 + \frac{a_1 E_0^2}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Если поглощение в диэлектрике отсутствует, т. е. ε , a_1 и a_2 вещественны, то отраженная волна остается линейно поляризованной, но плоскость по-

ляризации слегка поворачивается. Из (3.24) следует, что

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_y^{(0)}}{E_x^{(0)}} \approx \operatorname{tg} \theta \left[1 - \frac{a_2 E_0^2}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \right],$$

так что поворот плоскости поляризации происходит на угол

$$\Delta \theta = \theta - \theta_1 \approx \frac{a_2 E_0^2}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \sin \theta \cos \theta.$$

§ 4. Частотная дисперсия и аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$. Распространение электромагнитных волн в диспергирующих средах

В изотропной среде без пространственной дисперсии связь между индукцией $\vec{D}(t)$ и электрическим полем $\vec{E}(t)$ имеет следующий вид (2.4):

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau, \quad (4.1)$$

так что тензор диэлектрической проницаемости такой среды $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon(\omega) \delta_{\alpha\beta}$ (2.7), где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (4.2)$$

Определяемая формулой (4.2) функция $\varepsilon(\omega)$ является аналитической в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , причем $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. При этом действительная (ε') и мнимая (ε'') части функции $\varepsilon(\omega)$ связаны между собой соотношениями Крамерса – Кронига:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'; \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти соотношения несколько изменяются в случае проводящей среды, для которой функция $\varepsilon(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = 0$ (см. задачу 4-2).

4-1. Найти входящую в соотношение (4.1) функцию «памяти» среды $f(\tau)$, если ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/(\omega + i\gamma)$, $\gamma > 0$.

Из (4.2) следует, что $\int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = -\omega_{pe}^2/\omega(\omega + i\gamma)$. Доопределим теперь функцию $f(\tau)$ при $\tau < 0$ так, что $f(\tau) \equiv 0$, если $\tau < 0$. Тогда можно записать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2\pi} f(\tau)) e^{i\omega\tau} d\tau = -\omega_{pe}^2/\omega(\omega + i\gamma).$$

То есть мы знаем Фурье-образ функции $\sqrt{2\pi} f(\tau)$. Используя обратное преобразование Фурье, получим

$$f(\tau) = -\frac{\omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega(\omega + i\gamma)} d\omega. \quad (4.4)$$

Подынтегральная функция в (4.4) имеет особенность в точке $\omega = 0$, правило обхода которой определяется тем, что $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$. Так как выражение под интегралом в (4.4) при $\tau < 0$ экспоненциально убывает при $|\omega| \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости, то обходить плюс в точке $\omega = 0$ нужно сверху (рис. 4.1).

Действительно, при $\tau < 0$ искомый интеграл можно дополнить интегралом по «большой» полуокружности в верхней полуплоскости (так как последний равен нулю). При этом $f(\tau) \equiv 0$, поскольку внутри получающегося контура интегрирования нет особенностей. Теперь для вычисления $f(\tau)$ при $\tau > 0$ дополним контур интегрирования «большой» полуокружностью в нижней полуплоскости. Результат сводится к сумме вычетов в точках $\omega = 0$ и $\omega = -i\gamma$

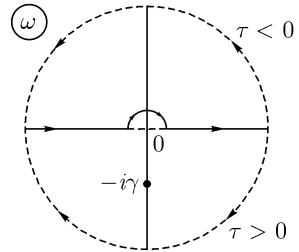


Рис. 4.1. Правило обхода полюса при интегрировании

(взятых со знаком минус):

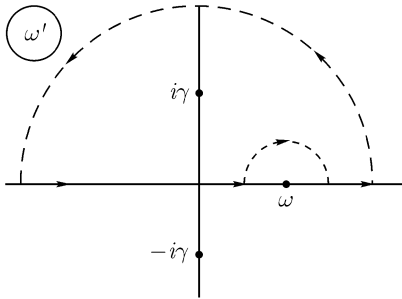
$$f(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi} 2\pi i \left[\frac{1}{i\gamma} + \frac{e^{-\gamma\tau}}{(-i\gamma)} \right] = \frac{\omega_p^2}{\gamma} (1 - e^{-\gamma\tau}).$$

В данном случае $f(\tau)$ не стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$. Это связано с тем, что рассматриваемая среда является проводником ($\varepsilon(\omega)$ имеет полюс при $\omega = 0$).

4-2. Найти диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$, если известна ее мнимая часть $\varepsilon''(\omega) = \gamma\alpha^2/\omega(\omega^2 + \gamma^2)$, $\gamma > 0$.

Для определения действительной части $\varepsilon'(\omega)$ воспользуемся соотношениями Крамерса–Кронига (4.3), учитывая, что так как $\varepsilon''(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = 0$, то среда является проводником. В этом случае соотношения (4.3) справедливы для «регуляризованной» проницаемости $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) - \frac{4\pi i}{\omega}\sigma$, где σ — статическая проводимость среды, равная $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \varepsilon''(\omega)/4\pi$. В данном примере $\sigma = \alpha^2/4\pi\gamma$, так что

$$\tilde{\varepsilon}''(\omega) = \frac{\gamma\alpha^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} - \frac{\alpha^2}{\omega\gamma} = -\alpha^2/\gamma(\omega^2 + \gamma^2).$$



Теперь первое из соотношений (4.3) дает

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'(\omega) &= \varepsilon'(\omega) = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{\pi\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega' d\omega'}{(\omega^2 + \gamma^2)(\omega' - \omega)}. \end{aligned}$$

Рис. 4.2. Комплекс интегрирования в комплексной плоскости

Получающийся интеграл удобно вычислять, переходя в плоскость комплексной переменной ω' (рис. 4.2).

Дополняя его интегралом по «малой» полуокружности вокруг точки $\omega' = \omega$ (равным полувычету в этой точке) и стремящимся к нулю интегралом по

«большой» полуокружности в верхней полуплоскости, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega' d\omega'}{(\omega^2 + \gamma^2)(\omega' - \omega)} = 2\pi i \operatorname{Res} |_{\omega' = i\gamma} + i\pi i \operatorname{Res} |_{\omega' = \pi} = \pi \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}.$$

Отсюда $\varepsilon'(\omega) = 1 - \alpha^2/(\omega^2 + \gamma^2)$, так что окончательно диэлектрическая проницаемость этой среды $\varepsilon(\omega) = 1 - \alpha^2/\omega(\omega + i\gamma)$.

4-3. Для плоских монохроматических волн, падающих по нормали на полупространство, заполненное некоторым веществом, измерен коэффициент отражения $R(\omega)$ во всей области частот $(0 \leq \omega \leq +\infty)$. Найти диэлектрическую проницаемость этого вещества $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$.

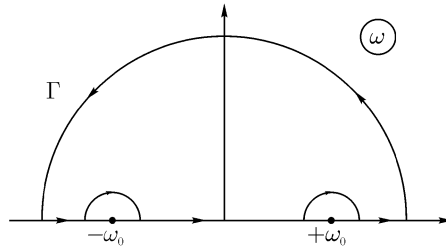


Рис. 4.3. Вычисление интеграла по контуру Γ

Как известно (задача 2-12), в случае нормального падения коэффициент отражения электромагнитной волны $R(\omega) = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)} + 1} \right|^2$. Для нахождения $\varepsilon(\omega)$ воспользуемся методом, аналогичным применяемому при выводе соотношений Крамерса–Кронига (4.3). Рассмотрим комплексную функцию $\Phi(\omega) = (\sqrt{\varepsilon(\omega)} - 1)/(\sqrt{\varepsilon(\omega)} + 1) \equiv \sqrt{R(\omega)}e^{i\varphi(\omega)}$. Тогда функция $Z(\omega) \equiv \ln \Phi(\omega) = \frac{1}{2} \ln R(\omega) + i\varphi(\omega)$, и задача сводится к нахождению мнимой части функции $Z(\omega)$ по известной ее действительной части. Так как функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет особенностей и нулей в верхней полуплоскости комплексной переменной ω и обращается в единицу лишь при $|\omega| \rightarrow \infty$, то и функции $\Phi(\omega)$ и $Z(\omega)$ также будут аналитическими в этой области. Рассмотрим теперь интеграл $\int Z(\omega) d\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)$, взятый по указанному на рисунке 4.3 контуру Γ . Хотя функция $Z(\omega)$ и растет логарифмически

при $|\omega| \rightarrow \infty$ (так как в этом пределе $R(\omega) \rightarrow 0$), вклад в интеграл от «бесконечно большой» полуокружности стремится к нулю из-за высокой степени частоты (ω^2) в знаменателе подынтегрального выражения. Так как внутри контура Γ последнее не имеет особенностей, то

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{i\pi}{2\omega_0} Z(-\omega_0) - \frac{i\pi}{2\omega_0} Z(\omega_0) = 0. \quad (4.5)$$

Учитывая, что действительная и мнимая части функции $\varepsilon(\omega)$ являются, соответственно, четной и нечетной функцией частоты на действительной оси (4.2), нетрудно увидеть, что такими же свойствами обладает и функция $Z(\omega)$. Приравнивая теперь к нулю действительную часть выражения (4.5) (мнимая его часть обращается в нуль тождественно), получим

$$Z''(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z'(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega.$$

Отсюда $\varphi(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln R(x)}{\omega^2 - x^2} dx$. Зная фазу $\varphi(\omega)$ и $R(\omega)$, можно, в принципе, восстановить и диэлектрическую проницаемость вещества $\varepsilon(\omega)$.

4-4. Найти скорость перемещения и изменение формы квазимонохроматического пакета электромагнитных волн в среде с заданной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$.

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) в среде имеется электромагнитное возмущение, имеющее форму одномерного волнового пакета

$$E(z, 0) = E_0 e^{-z^2/l^2} e^{ik_0 z} \quad (4.6)$$

(здесь E — одна из поперечных компонент электрического поля, например, E_x). Для определения его дальнейшей эволюции представим это поле в виде набора монохроматических гармоник

$$\begin{cases} E(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int E(k) e^{ikz} dk; \\ E(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int E(z, 0) e^{-ikz} dz = \\ = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/l^2 + i(k_0 - k)z} dz = \frac{E_0 l}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k - k_0)^2 l^2}{4}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Как видно из (4.7), спектр такого пакета имеет гауссовский вид с характерной шириной $\Delta k \sim 1/l$. Поэтому его можно считать узким (квазимонохроматическим), если $\Delta k \ll k_0$, т. е. $k_0 l \gg 1$. Каждая гармоника имеет определенную частоту $\omega(k)$, задаваемую законом дисперсии электромагнитных волн $k^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2$. Следовательно, в последующие моменты времени

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int E(k) e^{i[kz - \omega(k)t]} dk. \quad (4.8)$$

Для квазимонохроматического пакета, имеющего узкий спектр ($\Delta k \ll k_0$), можно воспользоваться приближенным разложением для $\omega(k)$:

$$\begin{aligned} \omega(k) &\approx \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 \equiv \\ &\equiv \omega_0 + v_\Gamma (k - k_0) + \alpha (k - k_0)^2. \end{aligned}$$

Подставляя теперь это выражение для $\omega(k)$ и спектр (4.7) в (4.8), получим

$$E(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \Phi(z, t),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \frac{E_0 l}{2\sqrt{\pi}} \int \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 l^2}{4} + i\kappa(z - v_\Gamma t) - i\kappa^2 \alpha t \right\} d\kappa = \\ &= \exp \left\{ -\frac{(z - v_\Gamma t)^2}{l^2 + 4i\alpha t} \right\} / (1 + 4i\alpha t/l^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Функция $\Phi(z)$ называется комплексной огибающей волнового пакета. Интенсивность сигнала определяется абсолютной величиной Φ :

$$|\Phi(z, t)| = \frac{l}{L(t)} e^{-(z - v_\Gamma t)/L(t)}, \quad L(t) = (l^2 + 16\alpha^2 t^2/l^2)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Отсюда видно, что волновой пакет перемещается с групповой скоростью $v_\Gamma = \partial\omega/\partial k$, одновременно уширяясь из-за дисперсии. Групповая скорость электромагнитных волн в среде с $\varepsilon(\omega)$

$$v_\Gamma = c\sqrt{\varepsilon(\omega)} \Big/ \left[\varepsilon(\omega) \frac{\omega}{2} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right].$$

Можно показать, что для прозрачной (без затухания) среды эта скорость не превышает скорости света [8, § 84].

В рассмотренном примере, когда начальное распределение поля имело вид (4.6), ширина волнового пакета монотонно увеличивалась со временем (4.9). Нетрудно видеть, что это свойство волновых пакетов не является обязательным, т. е. возможно и сжатие волновых пакетов при распространении в диспергирующей среде. В случае (4.6) пакет имел минимальную ширину при $t = 0$, так как в этот момент времени все гармоники $E(k)$ имели одинаковую фазу (4.7). Поэтому всегда можно подобрать начальные фазы гармоник таким образом, чтобы они совпали в любой заданный момент времени t_0 , так что и ширина пакета будет наименьшей при $t = t_0$.

Пусть, например,

$$E(k) = \frac{E_0 l}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2 l^2}{4}} + i\alpha(k-k_0)^2 t_0.$$

Повторяя приведенные выше вычисления, снова получим выражение вида (4.9) для огибающей, с той лишь разницей, что теперь

$$L(t) = [l^2 + 16\alpha^2(t-t_0)^2/l^2]^{1/2}.$$

Как видно, при $t < t_0$ ширина волнового пакета уменьшается со временем, достигает своего минимума при $t = t_0$ ($L_{\min} = l$), а затем пакет начинает расширяться. Все это, разумеется, полностью согласуется с «соотношением неопределенностей» $\Delta z \cdot \Delta k \geq 1$. В этом примере $\Delta k \sim \frac{1}{l}$, а $\Delta z \sim L$.

4-5. Показать, что в прозрачной анизотропной среде с тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ скорость распространения энергии электромагнитной волны совпадает с ее групповой скоростью.

Частота ω и волновой вектор \vec{k} электромагнитной волны в среде связаны между собой дисперсионным уравнением (2.10), которое следует из уравнений Максвелла (2.3) и (2.9). Поэтому $\omega = \omega(\vec{k})$, а групповая скорость волны есть

$$\vec{V}_g = \frac{\partial \omega(\vec{k})}{\partial \vec{k}}. \quad (4.10)$$

С другой стороны, поток электромагнитной энергии в среде определяется вектором Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]$, так что скорость распространения

энергии в электромагнитной волне с волновым вектором \vec{k} и, соответственно, частотой $\omega(\vec{k})$ естественно определить как

$$\vec{V}_E = \langle \vec{S}_k \rangle / W, \quad (4.11)$$

где $\langle \vec{S}_k \rangle$ есть усредненный по периоду волны поток энергии, а W — плотность энергии волны, определяемая соотношениями (2.42). Таким образом, задача состоит в том, чтобы показать, что $\vec{V}_E = \vec{V}_T$.

Прежде всего, записав поля \vec{E} и \vec{B} в вещественной форме:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{i\omega t}), \quad \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{B}_0 e^{-i\omega t} + \vec{B}_0^* e^{i\omega t}),$$

где \vec{E}_0 и \vec{B}_0 есть амплитуды электрического и магнитного поля в волне, представим $\langle \vec{S}_k \rangle$ в виде

$$\langle \vec{S}_k \rangle = \frac{c}{16\pi} \{ [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*] + [\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0] \}. \quad (4.12)$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла (2.43) для этих амплитуд, рассмотрев их вариации при малом изменении, $\delta \vec{k}$, волнового вектора волны и, соответственно, $\delta \omega(\vec{k})$ для ее частоты:

$$[\delta \vec{k} \times \vec{E}_0] + [\vec{k} \times \delta \vec{E}_0] = \frac{\delta \omega}{c} \vec{B}_0 + \frac{\omega}{c} \delta \vec{B}_0, \quad (4.13a)$$

$$[\delta \vec{k} \times \vec{B}_0] + [\vec{k} \times \delta \vec{B}_0] = \frac{\delta \omega}{c} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\beta} - \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} \delta E_{0\beta}. \quad (4.13b)$$

Умножив теперь скалярно (4.13a) на \vec{B}_0^* , (4.13b) на $-\vec{E}_0^*$, а комплексно-сопряженные (2.43) соответственно на $-\delta \vec{B}_0$ и $\delta \vec{E}_0$, получаем

$$[\delta \vec{k} \times \vec{E}_0] \cdot \vec{B}_0^* + [\vec{k} \times \delta \vec{E}_0] \cdot \vec{B}_0^* = \frac{\delta \omega}{c} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* + \frac{\omega}{c} \delta \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} -[\delta \vec{k} \times \vec{B}_0] \cdot \vec{E}_0^* - [\vec{k} \times \delta \vec{B}_0] \cdot \vec{E}_0^* &= \frac{\delta \omega}{c} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\beta} E_{0\alpha}^* + \\ &+ \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} \delta E_{0\beta} E_{0\alpha}^* \end{aligned} \quad (4.14b)$$

$$-[\vec{k} \times \vec{E}_0^*] \cdot \delta \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c} \vec{B}_0^* \delta \vec{B}_0 \quad (4.14c)$$

$$\begin{aligned} [\vec{k} \times \vec{B}_0^*] \cdot \delta \vec{E}_0 &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)*} E_{0\beta}^* \delta E_{0\alpha} = \\ &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{\beta\alpha}^{(H)} E_{0\beta}^* \delta E_{0\alpha} = \\ &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)} E_{0\alpha}^* \delta E_{0\beta} \end{aligned} \quad (4.14d)$$

(в последнем уравнении использована эрмитовость тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}$, т. е. $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)*} = \varepsilon_{\beta\alpha}^{(H)}$).

Сложив теперь левые и правые части уравнений (4.14), и используя перестановочные тождества для смешанных произведений векторов, находим, что

$$\delta \vec{k} \{ [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*] + [\vec{E}_0^* \times \vec{B}_0] \} = \frac{\delta \omega}{c} \{ \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* + \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon_{\alpha\beta}^{(H)}) E_{0\alpha}^* E_{0\beta} \}.$$

Сравнивая это соотношение с выражениями (4.12) и (2.42b) для $\langle \vec{S}_k \rangle$ и W , его можно записать как

$$\delta \vec{k} \cdot \langle \vec{S}_k \rangle = \delta \omega \cdot W,$$

так что действительно

$$\vec{V}_\Gamma = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\langle \vec{S}_k \rangle}{W} = \vec{V}_E.$$

4-6. На полупространство, заполненное диэлектриком с задней проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, падает по нормали полуограниченный в пространстве волновой пакет, так что амплитуда электрического поля в падающей волне на границе диэлектрика (при $z = 0$) равна

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E_0 \sin \omega_0 t, & t > 0. \end{cases}$$

Найти электрическое поле в диэлектрике $E(z, t)$.

Представим падающий на диэлектрик волновой пакет в виде набора гармоник

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \\ E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sin \omega_0 t e^{i\omega t - \delta t} dt = \\ = \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\delta} \right). \end{cases} \quad (4.15)$$

Мы ввели здесь для удобства вычислений малое затухание пакета ($\delta > 0$), которое при $\delta \rightarrow 0$ выпадает из конечных результатов. Для каждой гармоники решение известно (см. задачу 2-12); амплитуда прошедшей в диэлектрик

волны есть $2E(\omega)/(1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)})$, поэтому общее решение для поля в диэлектрике записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(\omega)}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}} e^{i\left[\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} z - \omega t\right]} d\omega = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\left[\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} z - \omega t\right]}}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\delta} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Исходя из него, прежде всего докажем, что $E(z, t) = 0$ при $z > ct$. Для этого рассмотрим комплексную плоскость ω . Поле E в (4.16) определяется интегралом, взятым вдоль действительной оси. При $\delta > 0$ полюса подынтегрального выражения находятся в нижней полуплоскости. Отсюда видно, что учет бесконечно малого затухания дает «правило обхода» полюсов в точках $\omega = \pm\omega_0$: Их нужно обходить сверху (рис. 4.4). Так как в верхней полуплоскости $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, то при $z > ct$ подынтегральная функция в (4.16) экспоненциально убывает при $|\omega| \rightarrow \infty$. Поэтому исходный интеграл можно дополнить интегралом по «большой» полуокружности. Учитывая аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости ω , можно заключить, что внутри образованного таким образом замкнутого контура интегрирования подынтегральное выражение не имеет особенностей, так что весь интеграл и тем самым $E(z, t) = 0$ при $z > ct$.

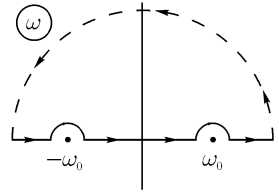


Рис. 4.4. Правило обхода полюсов в интеграле (4.16)

Каким будет поле при $z < ct$? Общая формула (4.16) не дает обзримого результата, поэтому здесь удобно рассмотреть отдельно вклад различных частот. Как видно из (4.15), наибольшую амплитуду в спектре падающего волнового фронта имеют частоты, близкие к $\pm\omega_0$. Они и определяют распространение в среде «основного» сигнала. Для упрощения вычислений рассмотрим одну из экспонент в $\sin \omega_0 t$, так что будем считать, что в падающей волне

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E_0 e^{-i\omega_0 t}, & t > 0. \end{cases}$$

Тогда $E(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau$, а

$$E(z, t) = \frac{E_0}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i(\omega-\omega_0)\tau} \frac{2e^{i[k(\omega)z-\omega t]}}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \quad (4.17)$$

Интересуясь здесь вкладом частот, близких к ω_0 , проведем разложение в показателе экспоненты в (4.17):

$$\omega = \omega_0 + \xi;$$

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \xi^2 = k_0 = \frac{\xi}{v_\Gamma} - \frac{\xi^2}{2} \frac{v'_\Gamma}{v_\Gamma^2}$$

В результате $E(z, t) = E_0 e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega_0)}} F(z, t)$, где огибающая

$$F(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp \left\{ i\xi\tau + i \left[\frac{\xi}{v_\Gamma} (z - v_\Gamma t) - \frac{\xi^2}{2} \frac{v'_\Gamma}{v_\Gamma^2} z \right] \right\}.$$

Интегрирование по ξ выполняется выделением полного квадрата, после чего получим

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_{y_0}^\infty dy e^{iy^2}; \quad y_0 = \frac{z - v_\Gamma t}{\sqrt{2z|v'_\Gamma|}}.$$

Как и следовало ожидать, основной фронт распространяется в глубь среды с групповой скоростью v_Γ , причем ширина его увеличивается со временем из-за дисперсионного расплывания

$$\Delta z \sim (z|v'_\Gamma|)^{1/2} \sim (v_\Gamma|v'_\Gamma|t)^{1/2}.$$

Достаточно далеко за фронтом, т.е. при $y_0 < 0$, но $|y_0| \gg 1$, огибающая $F(z, t) \rightarrow 1$. Это означает, что там устанавливается френелевское решение для монохроматической волны с частотой $\omega = \omega_0$.

Хотя спектральное распределение (4.15) и имеет максимум при $\omega = \pm\omega_0$, $E(\omega)$ отлично от нуля при любой заданной частоте. В частности, в спектре содержатся гармоники и с очень большими частотами.

Так как диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$ для таких частот близка к единице, скорость распространения соответствующих сигналов почти равна скорости света. Поэтому такие возмущения опережают рассмотренный выше «основной» фронт и называются «предвестниками». При вычислении электрического поля в «предвестнике» учтем, что для высоких частот $\varepsilon(\omega) \approx 1 - \omega_p^2/\omega^2$, где ω_p^2 — электронная плазменная частота среды (малое отличие $\varepsilon(\omega)$ от единицы нужно учитывать только в показателе экспоненты в (4.16)). Тогда

$$E(z, t) \approx -\frac{E_0\omega_0}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{\omega^2} \exp \left\{ i \left[\frac{\omega}{c}(z - ct) - \frac{\omega_p^2}{2\omega} t \right] \right\}. \quad (4.18)$$

Интеграл (4.18) вычисляется по контуру Γ , показанному на рисунке 4.5. Изменим путь интегрирования удобным для вычислений образом. Деформируем контур Γ в верхней полуплоскости в «большую» полуокружность. В то же время при $z - ct < 0$ подынтегральная функция в (4.18) экспоненциально затухает в нижней полуплоскости ω . Поэтому искомый интеграл можно дополнить интегралом по «большой» полуокружности в нижней полуплоскости, так что интегрирование в (4.18) проводится теперь по окружности «большого» радиуса. Выберем его таким:

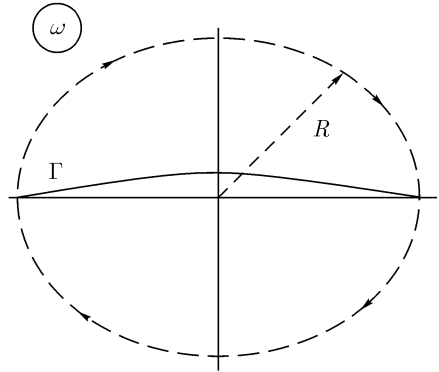


Рис. 4.5. Контур интегрирования для «предвестника»

$$R = \left[\frac{\omega_p^2 ct}{2(ct - z)} \right]^{1/2}.$$

В области «предвестника» величина $\xi \equiv (ct - z)/ct \ll 1$, так что такой радиус R действительно будет «большим». При этом $\omega = Re^{i\varphi}$, так что

из (4.18) следует, что

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &\approx -\frac{iE_0\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{Re^{i\varphi}} \exp i \left\{ \left[-\omega_p t \sqrt{\frac{\xi}{2}} e^{i\varphi} - \omega_p t \sqrt{\frac{\xi}{2}} e^{-i\varphi} \right] \right\} = \\
 &= \frac{E_0\omega_0}{\omega_p} \sqrt{2\xi} J_1(\omega_p t \sqrt{2\xi}) = \frac{E_0\omega_0}{\omega_p} \sqrt{\frac{2(ct-z)}{ct}} J_1 \left[\omega_p t \sqrt{\frac{2(ct-z)}{ct}} \right],
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода [см., например: 11, гл. 13], имеющая следующее интегральное представление:

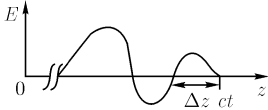


Рис. 4.6. Форма импульсов в «предвестнике»

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - \varphi)} d\varphi.$$

Используя известные свойства функции Бесселя $J_1(x)$, нетрудно из (4.19) заключить, что «предвестник» представляет собой последовательность импульсов (рис. 4.6), ширина и амплитуда которых убывает по мере распространения вглубь среды:

$$E \sim E_0 \frac{\omega_0}{\omega_p^2 t}; \quad \Delta z \sim \frac{c}{\omega_p^2 t}.$$

§ 5. Излучение Вавилова–Черенкова. Переходное излучение

5-1. Найти мощность черенковского излучения для монополя Дирака, имеющего магнитный заряд q и движущегося с постоянной скоростью в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$.

В случае существования магнитных зарядов уравнения Максвелла в сплошной среде приобретают такой вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ст}}^{(E)}; & \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi \rho_{\text{ст}}^{(M)}; \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ст}}^{(E)}; & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ст}}^{(M)}, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\rho_{\text{ст}}^{(E)}$, $\vec{j}_{\text{ст}}^{(E)}$ и $\rho_{\text{ст}}^{(M)}$, $\vec{j}_{\text{ст}}^{(M)}$ — плотность и ток сторонних электрических и магнитных зарядов. В данной задаче $\rho_{\text{ст}}^{(E)}$ и $\vec{j}_{\text{ст}}^{(E)}$ равны нулю, а $\rho_{\text{ст}}^{(M)} = q\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$, $\vec{j}_{\text{ст}}^{(M)} = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$, где \vec{v} — скорость магнитного монополя. Переходя к Фурье-представлению, из двух последних уравнений в (5.1) находим

$$\vec{B}(\vec{k}, \omega) = \frac{2iq \left(\varepsilon \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \vec{k} \right)}{k^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2} \delta(\omega - \vec{k} \vec{v}),$$

так что $\vec{B}(\vec{r}, t)$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \vec{B}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega = \\ &= \frac{iq}{2\pi^2} \int d\vec{k} \frac{e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{v})t]}}{[k^2 - \varepsilon(\vec{k} \cdot \vec{v})^2 / c^2]} \left[\frac{\varepsilon \vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{v})}{c^2} - \vec{k} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В прозрачной среде потери энергии частицы определяются только ее излучением, поэтому мощность излучения I связана с тормозящей частицу силой \vec{F} таким соотношением: $I = -\vec{F} \cdot \vec{v} = -q\vec{v} \cdot \vec{B}(\vec{r} = \vec{v}t)$ (из соображений симметрии здесь очевидно, что электрическое поле не дает вклада в силу торможения). Используя (5.2), получим

$$\begin{aligned} I &= -\frac{iq^2}{2\pi^2} \int \frac{d\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\varepsilon v^2}{c^2} - 1 \right)}{k^2 - \varepsilon(\vec{k} \cdot \vec{v})^2 / c^2} = \\ &= -\frac{iq^2}{2\pi^2 v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d\vec{k}_{\perp} \frac{\omega \left[\frac{\varepsilon(\omega) v^2}{c^2} - 1 \right]}{\left[k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2} \right]}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

При интегрировании по $d\vec{k}$ мы перешли здесь к новым переменным: поперечной к \vec{v} компоненте вектора \vec{k}_{\perp} и частоте $\omega = (\vec{k} \cdot \vec{v})$, так что $d\vec{k} = d\vec{k}_{\perp} d\omega / v$. Поскольку частоты $\pm\omega$ соответствуют одной и той же волне (физический смысл имеют только положительные частоты), то спектральную мощность потерь энергии монополя можно, следуя (5.3), представить

в таком виде:

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{iq^2}{2\pi^2 v} \int dk_{\perp} \sum_{+,-} \frac{\omega \left(\frac{\varepsilon v^2}{c^2} - 1 \right)}{\left[k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \right]}, \quad (5.4)$$

где символ $\sum_{+,-}$ означает сумму вкладов положительных и отрицательных частот. Как будет ясно из дальнейшего, появление черенковского излучения связано с возможностью обращения в нуль знаменателя под интегралом (5.4). Поэтому для корректного его вычисления будем считать, что в среде есть слабое затухание, связанное с мнимой частью диэлектрической проницаемости $\varepsilon''(\omega)$. Учитывая теперь, что $\varepsilon''(\omega)$ является нечетной функцией ω , а действительная часть $-\varepsilon'(\omega)$ — четной (эти свойства функции $\varepsilon(\omega)$ следуют из (4.2)), получим из (5.4)

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{iq^2}{\pi v} \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \omega \left(\frac{\varepsilon' v^2}{c^2} - 1 \right) \frac{2i \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''}{\left(k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon' \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'' \right)^2}$$

Так как в пределе $\varepsilon'' \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon'' \rightarrow 0} \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''}{\left(k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon' \frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'' \right)^2} = \pi \delta \left(k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right),$$

то в прозрачной среде

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{q^2 \omega}{v} \left(\frac{\varepsilon(\omega) v^2}{c^2} - 1 \right) \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2 \delta \left[k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right]. \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что излучение возможно только при условии, что скорость монополя $v > c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (в противном случае нельзя обратить в нуль аргумент δ -функции в (5.5)). Каждой заданной частоте (для которой

$\sqrt{\varepsilon(\omega)} > c/v$ соответствует свой черенковский конус $\cos \theta = c/v\sqrt{\varepsilon(\omega)}$, где θ — угол между направлением волнового вектора излучаемой волны \vec{k} и скоростью \vec{v} (последнее равенство следует из того, что $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} = kv \cos \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} v \cos \theta$). Окончательно из (5.5) следует

$$\frac{dI}{d\omega} = \begin{cases} \frac{q^2 \omega}{v} \left[\frac{\varepsilon(\omega) v^2}{c^2} - 1 \right], & \varepsilon(\omega) > c^2/v^2; \\ 0, & \varepsilon(\omega) < c^2/v^2. \end{cases}$$

5-2. Получить результат предыдущей задачи путем непосредственного вычисления потока электромагнитной энергии на больших расстояниях от движущегося монополя.

Согласно (5.1), Фурье-образ электрического поля

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\frac{c}{\omega \varepsilon} [\vec{k} \times \vec{B}] = \frac{2iq\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{(k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2)} \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{k} \right],$$

так что в (\vec{r}, t) представлении

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{iq}{2\pi^2 c} \int d\vec{k} d\omega \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{(k^2 - \omega^2 \varepsilon / c^2)} [\vec{v} \times \vec{k}] \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}). \quad (5.6)$$

Направим ось z вдоль вектора скорости \vec{v} , и введем поперечные к \vec{v} компоненты векторов \vec{r} и \vec{k} как $\vec{r} = (\vec{r}_\perp, z)$, $\vec{k} = (\vec{k}_\perp, k_\parallel)$. Ввиду δ -функции под интегралом в (5.6) $k_\parallel = \omega/v$, так что

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{iq}{2\pi^2 cv} \int d\vec{k}_\perp d\omega \frac{e^{i\omega(\frac{z}{v} - t)}}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)} [\vec{v} \times \vec{k}_\perp]. \quad (5.7)$$

Введем теперь полярные координаты (k_\perp, α) в плоскости \vec{k}_\perp , где α есть угол между векторами \vec{k}_\perp и \vec{r}_\perp , и цилиндрические координаты (ρ, φ, z) в пространстве. Тогда из (5.7) следует, что $E_z = 0$,

$$E_\rho = \frac{iq}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \cdot \frac{e^{i\omega(\frac{z}{v} - t)}}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \int_0^\infty k_\perp^2 dk_\perp \int_0^{2\pi} d\alpha \sin \alpha e^{ik_\perp \rho \cos \alpha} = 0,$$

так как последний интеграл по углу α обращается в нуль, а

$$E_\varphi = \frac{iq}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha e^{ik_\perp \rho \cos \alpha}.$$

Здесь последний интеграл по α равен $2\pi i J_1(k_\perp \rho)$, где J_1 есть функция Бесселя первого ранга (см., напрмер, [11]). Поэтому

$$E_\varphi = -\frac{q}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{(k_\perp^2 + p^2)} J_1(k_\perp \rho),$$

где $p^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}$. Согласно известным соотношениям для функций Бесселя [11],

$$\int_0^\infty \frac{J_1(k_\perp \rho) k_\perp^2 dk_\perp}{(k_\perp^2 + p^2)} = p K_1(p\rho),$$

где K_1 есть модифицированная функция Бесселя. Поэтому

$$E_\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{q}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} p K_1(p\rho),$$

и ее временная Фурье-компонента есть

$$E_\varphi(\vec{r}, \omega) = -\frac{q}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\omega \frac{z}{v}} p K_1(p\rho). \quad (5.8)$$

Аналогично, для магнитного поля из (5.2) следует, что

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{iq}{2\pi^2 v} \int d\vec{k}_\perp d\omega \frac{e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} e^{i\vec{k}_\perp \vec{\rho}}}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \left\{ \left(\frac{\varepsilon \omega}{c^2} v - \frac{\omega}{v} \right) \vec{e}_z - \right. \\ \left. - k_\perp \cos \alpha \vec{e}_\rho - k_\perp \sin \alpha \vec{e}_\varphi \right\}.$$

Отсюда $B_\varphi = 0$, а

$$\begin{aligned}
 B_z(\vec{r}, \omega) &= \frac{iq\sqrt{2\pi}}{2\pi^2} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp e^{i\omega \frac{z}{v}} \frac{\left(\frac{\varepsilon\omega}{c^2} - \frac{\omega}{v^2}\right)}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \cdot \int_0^{2\pi} e^{ik_\perp \rho \cos \alpha} d\alpha = \\
 &= \frac{iq}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2}\right) e^{i\omega \frac{z}{v}} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{(k_\perp^2 + p^2)} J_0(k_\perp \rho) = \\
 &= \frac{iq}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega \left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2}\right) e^{i\omega \frac{z}{v}} K_0(p\rho). \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Здесь J_0 и K_0 есть, соответственно, функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя нулевого ранга. Подобным же образом получаем, что

$$\begin{aligned}
 B_\rho(\vec{r}, \omega) &= -\frac{iq\sqrt{2\pi}}{2\pi^2 v} e^{i\omega \frac{z}{v}} \int_0^\infty \frac{k_\perp^2 dk_\perp}{(k_\perp^2 + p^2)} \cdot \int_0^{2\pi} e^{ik_\perp \rho \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha = \\
 &= \frac{q}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\omega \frac{z}{v}} p K_1(p\rho). \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Как видно из (5.8)–(5.10), электромагнитное поле, создаваемое в среде движущимся магнитным монополем, обладает азимутальной симметрией относительно вектора скорости \vec{v} .

Свойства этого поля на больших расстояниях от траектории монополя ($\rho \rightarrow \infty$) существенно зависят от того, является ли скорость источника в среде сверхсветовой ($v > c/\sqrt{\varepsilon}$), или досветовой ($v < c/\sqrt{\varepsilon}$). В последнем случае параметр $p^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} > 0$, так что функции $K_0(p\rho)$ и $K_1(p\rho)$ при $p\rho \gg 1$ пропорциональны $e^{-p\rho}$, т. е. на больших расстояниях электрическое и магнитное поле экспоненциально затухают, и излучение отсутствует. Наоборот, при $v > c/\sqrt{\varepsilon}$, когда $s^2 \equiv -p^2 > 0$, функции Бесселя

$$K_{0,1}(p\rho) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2s\rho}} e^{is\rho}, \quad s\rho \gg 1, \quad (5.11)$$

что соответствует электромагнитной волне, распространяющейся от траек-

тории источника. Действительно, в этом случае поле меняется как

$$\exp\left[i\left(s\rho + \frac{\omega}{v}z\right)\right] = \exp\left[i\left(\frac{\omega}{v}z + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \frac{\omega^2}{v^2}\rho}\right)\right],$$

что соответствует электромагнитной волне излучаемой в направлении задаваемом условием черенковского резонанса:

$$\cos\theta = k_z/k = \frac{\omega/v}{\sqrt{\varepsilon}\omega/c} = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon}}.$$

Мощность излучения можно теперь вычислить как поток электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга) через цилиндрическую поверхность большого радиуса ($\rho \rightarrow \infty$) с осью вдоль координаты z и длиной равной v (путь, проходимый частицей в единицу времени):

$$I = 2\pi\rho v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_\rho dt = \frac{1}{2}vc\rho \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi B_z dt. \quad (5.12)$$

Представив $E_\varphi(t)$ и $B_z(t)$ в виде Фурье-интегралов:

$$E_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad B_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B_z(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega',$$

получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(t) B_z(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t} E_\varphi(\omega) B_z(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_\varphi(\omega) B_z(-\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega E_\varphi(\omega) B_z^*(\omega) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega E_\varphi(\omega) B_z^*(\omega). \quad (5.13) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t} = 2\pi\delta(\omega + \omega'),$$

и свойство симметрии Фурье-компонент действительной функции $f(t)$: $f(-\omega) = f^*(\omega)$.

Очевидно, что в пределе $\rho \rightarrow \infty$ вклад в излучение будет давать только область, где $\sqrt{\varepsilon(\omega)} > c/v$, так что при вычислении мощности (5.12) можно использовать асимптотики (5.11) для функций Бесселя. Тогда из (5.8) и (5.9) следует, что

$$E_{\varphi}(\rho, \omega) \approx iq\sqrt{\frac{s}{\rho}}e^{i\left(\frac{\omega}{z}+s\rho\right)}$$

$$B_z(\rho, \omega) \approx \frac{iq\omega}{c^2\sqrt{s\rho}}\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2}\right)e^{i\left(\frac{\omega}{v}z+s\rho\right)}.$$

Подставив эти выражения в (5.12) и (5.13), находим

$$I = \int_0^{\infty} d\omega \frac{q^2\omega}{v} \left[\varepsilon(\omega) \frac{v^2}{c^2} - 1 \right],$$

что совпадает с результатом, полученным в задаче 5-1.

5-3. Вычислить мощность излучения Вавилова – Черенкова для релятивистского нейтрона, движущегося с постоянной скоростью в прозрачной среде с заданной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Магнитный момент нейтрона ориентирован перпендикулярно к его скорости.

В системе покоя нейтрон имеет собственный магнитный дипольный момент m_0 , а его электрический дипольный момент равен нулю. В лабораторной же системе отсчета присутствуют как магнитный (\vec{m}), так и электрический (\vec{d}) дипольные моменты, величины которых зависят от ориентации спина нейтрона относительно его скорости, и даются следующими выражениями [8, § 76]:

$$\vec{d} = \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{m}_0), \quad \vec{m} = \vec{m}_0 - (\gamma - 1)\vec{v}\frac{(\vec{m}_0 \cdot \vec{v})}{\gamma v^2}, \quad (5.14)$$

так что в данном случае $\vec{m} = \vec{m}_0$. Сторонний ток, создаваемый в среде движущимся нейтроном, есть

$$\vec{j}_{\text{ст}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (5.15)$$

где \vec{P} и \vec{M} есть плотности сторонних электрического и магнитного дипольных моментов:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{d} \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{M} = \vec{m} \delta(\vec{r} - \vec{v}t).$$

Переходя в уравнениях Максвелла (5.1) к Фурье-представлению, и учитывая, что согласно (5.15),

$$\vec{j}_{\text{ст}}(\vec{k}, \omega) = \frac{i\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{2\pi} (-\omega \vec{d} + c[\vec{k} \times \vec{m}]),$$

находим Фурье-компоненты электрического и магнитного поля в среде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{k}, \omega) &= 2 \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left[\frac{\omega^2}{c^2} \vec{d} - \frac{\omega}{c} (\vec{k} \times \vec{m}) - \frac{\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{d})}{\varepsilon} \right] \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}), \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= 2 \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left[\frac{\omega}{c} (\vec{k} \times \vec{d}) - [\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{m}]] \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Следующий шаг состоит в вычислении тормозящей силы, действующей на нейтрон. Для этого выведем предварительно общее выражение для электромагнитной силы, действующей на движущуюся систему зарядов и токов, характеризуемую объемным распределением дипольных моментов $\vec{P}(\vec{r})$ и $\vec{M}(\vec{r})$, так что

$$\vec{d} = \int \vec{P} dV, \quad \vec{m} = \int \vec{M} dV$$

есть, соответственно, электрический и магнитный дипольный момент системы как целой. Распределение зарядов и токов в терминах \vec{P} и \vec{M} есть

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{M},$$

поэтому искомая электромагнитная сила

$$\vec{F} = \int dV \left\{ \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}] \right\}$$

может быть записана как $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, где

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= - \int dV \cdot \vec{E} \cdot \text{div } \vec{P}, & \vec{F}_2 &= \int dV [\text{rot } \vec{M} \times \vec{B}], \\ \vec{F}_3 &= \frac{1}{c} \int dV \left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \times \vec{B} \right].\end{aligned}\quad (5.17)$$

Интегрирование по частям в \vec{F}_1 и \vec{F}_2 приводит к известным выражениям для электрической и магнитной сил в неоднородном поле: $\vec{F}_1 = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$, $\vec{F}_2 = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$. Рассмотрим отдельно силу \vec{F}_3 , связанную с поляризационным током $\partial \vec{P} / \partial t$. Хотя распределение \vec{P} и \vec{M} внутри движущейся системы подразумевается неизменным, производная $\partial \vec{P} / \partial t$ отлична от нуля в лабораторной системе отсчета. Действительно, если скорость системы есть \vec{v} , то для стационарного распределения \vec{P} , полная производная, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P} = 0$. Отсюда $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P}$. Подставив это выражение в (5.17), и используя тензорные обозначения, находим, что

$$F_{3i} = -\frac{1}{c} \int dV e_{ikl} \frac{\partial P_k}{\partial x_m} \cdot v_m B_l = -\frac{1}{c} e_{ikl} v_m \int dV \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} (P_k B_l) - P_k \frac{\partial B_l}{\partial x_m} \right\},$$

где e_{ikl} есть антисимметрический единичный тензор третьего ранга. Первый интеграл в правой части этого выражения равен нулю, т. к. $\vec{P} = 0$ вне системы. Следовательно, $\vec{F}_3 = \frac{1}{c} [\vec{d} \times (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}]$, и полная сила, действующая на движущийся диполь, равна

$$\vec{F} = (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{c} \vec{d} \times (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (5.18)$$

Применим теперь этот результат к движущемуся нейтрону, используя выражения (5.16) для создаваемого им поля в среде. Это дает

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (2\pi)^{-2} 2 \int d\vec{k} d\omega \frac{e^{i[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega]t}}{(k^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2)} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \left\{ i(\vec{k} \cdot \vec{d}) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \vec{d} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega}{c} (\vec{k} \times \vec{m}) - \frac{\vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{d})}{\varepsilon} \right] + i\vec{k} \left[\frac{\omega}{c} \vec{m} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{d}) - (\vec{k} \cdot \vec{m})^2 + k^2 m^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{\omega^2}{c^2} d^2 \vec{k} - \frac{i\omega^2}{c^2} \vec{d}(\vec{k} \cdot \vec{d}) + i \frac{\omega}{c} (\vec{k} \cdot \vec{m}) [\vec{k} \times \vec{d}] + \frac{i\omega k^2}{c} [\vec{d} \times \vec{m}] \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда мощность тормозящей силы $I = -\vec{F} \cdot \vec{v}$, есть

$$I = \frac{-i}{2\pi^2} \int \frac{d\vec{k}}{(k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2)} \left\{ (\vec{k} \cdot \vec{d}) \left[-\frac{\omega}{c} \vec{v} \cdot [\vec{k} \times \vec{m}] - \frac{\omega(\vec{k} \cdot \vec{d})}{\varepsilon} \right] + \right. \\ \left. + \omega \left[-\frac{\omega^2}{c^2} m^2 + k^2 m^2 - (\vec{k} \cdot \vec{m})^2 \right] + \frac{\omega^3}{c^2} d^2 + \frac{\omega v^2}{c^2} (\vec{k} \cdot \vec{m})^2 - \omega \frac{k^2 v^2}{c^2} m^2 \right\} \quad (5.19)$$

(здесь использовано, что векторы \vec{m} и \vec{d} поперечны к \vec{v}). После вычислений, аналогичных проведенным в задаче 5-1, находим из (5.19) спектральную мощность излучения:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\omega}{\pi v} \int d\vec{k}_\perp \delta\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left\{ (\vec{k}_\perp \cdot \vec{d})^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) + m^2 \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon - 1) - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2 v^2}{c^4} m^2 (\varepsilon - 1) - (\vec{k}_\perp \cdot m)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right\}. \quad (5.20)$$

В отличие от случая точечного заряда, в излучении отсутствует азимутальная симметрия относительно вектора скорости \vec{v} , так что мощность (5.20) зависит от угла φ между векторами \vec{k}_\perp и \vec{m} . После интегрирования (5.20) по модулю k_\perp , т. е. $d\vec{k}_\perp = \frac{1}{2} d(k_\perp^2) d\varphi$, и подстановки \vec{d} и \vec{m} из (5.14), получаем из (5.20), что

$$\frac{dI}{d\omega d\varphi} = \frac{\omega m_0^2}{2\pi v} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{v^2}{c^2} \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon - 1) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \varphi \right\},$$

т. е. распределение мощности излучения по азимутальному углу φ . Полная спектральная мощность излучения есть

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\omega^3 m_0^2}{2vc^2} \varepsilon(\omega) \left[2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{\varepsilon c^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right) \right].$$

Это выражение упрощается для ультрарелятивистского нейтрона, когда

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \gg 1:$$

$$\frac{dI}{d\omega} = \begin{cases} \frac{\omega^3 m_0^2}{2c^3 \varepsilon(\omega)} [\varepsilon(\omega) - 1]^2, & \varepsilon(\omega) > 1; \\ 0, & \varepsilon(\omega) < 1. \end{cases}$$

5-4. Найти амплитуду ленгмюровских колебаний (см. задачу 2-4), возбуждаемых в холодной плазме с бесконечно тяжелыми ионами однородно заряженной плоскостью, движущейся с постоянной скоростью и в направлении своей нормали.

Пусть плоскость имеет плотность поверхностного заряда σ и движется вдоль оси z . Тогда электрическое поле $E_z \equiv E$, объемная плотность зарядов в плазме ρ и плотность тока \vec{j} зависят только от z и t и подчиняются следующим уравнениям:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 4\pi\rho + 4\pi\rho_{\text{ст}}; \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0; \quad \rho_{\text{ст}} = \sigma\delta(z - ut). \quad (5.21)$$

Дифференцируя второе из них по времени

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$$

и учитывая, что в линейном приближении

$$j = nev; \quad \frac{dj}{dt} = ne \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} E = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E$$

(n — плотность электронов, e и m — их заряд и масса, v — скорость), получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

Вместе с первым из уравнений (5.21) находим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho = -\omega_p^2 \rho_{\text{ст}} = -\omega_p^2 \sigma \delta(z - ut). \quad (5.22)$$

Это уравнение осциллятора, возбуждаемого внешней силой, имеющей характер мгновенного «толчка» в момент времени $t = z/u$. Его решение легко получить, проинтегрировав обе части (5.22) по бесконечно малому временному интервалу от $z/u - \varepsilon$ до $z/u + \varepsilon$. В результате получим, что $\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{z/u+\varepsilon} = -\omega_p^2 \sigma / u$. Решая после этого уравнение свободных колебаний с таким начальным условием (и учитывая, что $\rho|_{z/u} = 0$), найдем возмущение плотности заряда в плазме

$$\rho(z, t) = \begin{cases} -\frac{\omega_p \sigma}{u} \sin \omega_p(t - z/u), & t > z/u \\ 0, & t < z/u. \end{cases} \quad (5.23)$$

Таким образом, за плоскостью образуется «шлейф» возмущений плотности заряда и продольного электрического поля, т. е. ленгмюровских колебаний с частотой ω_p . Из (5.23) и уравнения Пуассона можно найти электрическое поле возбуждаемых плоскостью колебаний

$$E(z, t) = \begin{cases} -4\pi\sigma \cos \omega_p(t - z/u), & t > z/u \\ 0, & t < z/u. \end{cases} \quad (5.24)$$

Как видно из (5.24), волновой вектор возбуждаемых ленгмюровских колебаний $k = \omega_p/u$, так что выполняется условие черенковского резонанса $\omega = ku$.

Рассмотрим теперь баланс энергии для этого процесса. Непрерывное возбуждение ленгмюровских колебаний (5.24) увеличивает их энергию, отнесенную к единице площади движущейся плоскости, следующим образом:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = W \cdot u = \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot u = \frac{(4\pi\sigma)^2}{8\pi} u = 2\pi\sigma^2 u,$$

где W есть плотность энергии этих волн (см. задачу 2-15). Следовательно, тормозящая сила, испытываемая этой заряженной плоскостью, должна быть равна $F_T = -\frac{1}{u} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\pi\sigma^2$.

Нетрудно проверить, что это действительно так. Искомая тормозящая сила равна σE_1 , где E_1 есть электрическое поле, создаваемое плазмой в месте нахождения плоскости. Так как электрическое поле последней есть

$$E_{\text{ст}} = \begin{cases} -2\pi\sigma, & z < ut, \\ +2\pi\sigma, & z > ut, \end{cases}$$

то из (5.24) следует, что

$$E_1(z = ut) = E(z = ut) - E_{\text{ст}} = -2\pi\sigma,$$

как и должно быть для выполнения баланса энергии в системе.

5-5. *Нерелятивистский точечный заряд e движется в вакууме с постоянной скоростью v по направлению нормали к границе идеального проводника. Определить спектральное и угловое распределение, а также поляризацию излучения, возникающего при пересечении зарядом границы вакуум-проводник (переходное излучение).*

В случае идеально проводящей среды ее поляризация эквивалентна появлению фиктивного заряда $-e$, находящегося в симметричной (относительно плоскости $z = 0$) точке (рис. 5.1). Дипольный момент такой системы зарядов

$$\vec{d} = \begin{cases} 2e\vec{v}t, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

(считается, что заряд достигает поверхности раздела в момент $t = 0$).

Так как при этом вектор $\vec{d} = -2e\vec{v}\delta(t)$ то в момент $t = 0$ возникает вспышка переходного излучения. Согласно известным формулам электродинамики [4, § 67], для дипольного излучения в волновой зоне поля \vec{E} и \vec{B} равны

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R} [(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \times \vec{n}]; \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2 R} [\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}]; \quad \vec{n} = \vec{R}/R.$$

Отсюда сразу следует, что в рассматриваемом случае излучение будет линейно поляризованным, причем так, что вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости, образуемой волновым вектором излучаемой волны и вектором скорости заряда. Для углового и спектрального распределения излучения получаем

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}_\omega|^2 R^2 = \frac{[(\ddot{\vec{d}})_\omega \times \vec{n}]^2}{2\pi c^3}.$$

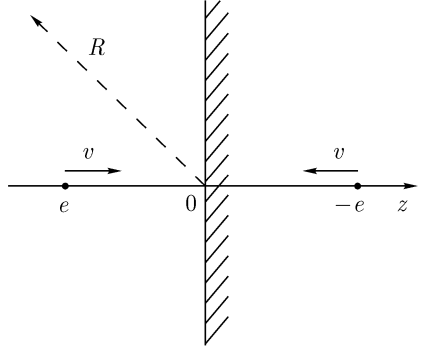


Рис. 5.1. Модель переходного излучения

Вычисляя Фурье-компоненты выражения (5.25), получим $(\ddot{d})_\omega = -2e\vec{v}/\sqrt{2\pi}$, так что

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2 c^3} [\vec{v} \times \vec{n}]^2. \quad (5.26)$$

Как видно, полная излучаемая зарядом энергия, равная интегралу от (5.26) по всем частотам и направлениям, оказывается бесконечной из-за расходимости при больших частотах (спектр $d\varepsilon/d\omega$ не зависит от ω). Это связано с использованием в решении модели идеального проводника. На самом деле, при больших частотах для любого вещества функции $\varepsilon(\omega)$ стремятся к единице. Так что полученное в этом приближении выражение (5.26) для $d\varepsilon/d\omega d\Omega$ становится неверным при частотах $\omega \geq \sigma_0$, где σ_0 — статическая проводимость проводника.

5-6. *Нерелятивистский точечный заряд q движется с постоянной скоростью v , направленной по нормали к плоскости раздела вакуум-диэлектрик. Найти энергию поверхностных волн (см. задачу 2-13), возбуждаемых зарядом при пересечении этой границы (рис. 5.2).*

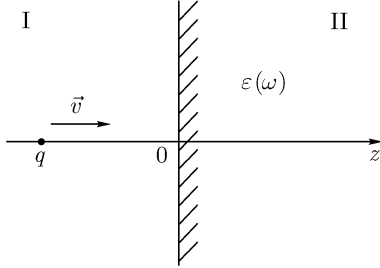


Рис. 5.2. Возбуждение поверхностных волн движущимся зарядом

Так как скорость заряда $v \ll c$, то приближенно можно считать, что создаваемое им электрическое поле потенциально, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. Тогда $\text{div}(\varepsilon\vec{E}) = -\text{div}(\varepsilon\vec{\nabla}\varphi) = 4\pi\rho_{\text{ст}}$, где $\rho_{\text{ст}} = q\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$. Пусть заряд движется вдоль оси z . Тогда совершим Фурье-преобразование по поперечным координатам (x, y) и времени, введя $\varphi(\vec{k}_\perp, \omega, z)$, и будем решать уравнение Пуассона отдельно для вакуума ($z < 0$, область I) и диэлектрика ($z > 0$, область II). Учитывая, что

$$\rho_{\text{ст}}(\vec{k}_\perp, \omega, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int q\delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{-i(\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp - \omega t)} d\vec{r}_\perp dt = \frac{qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^{3/2}v},$$

для потенциала в вакууме, φ_1 , получим

$$\Delta\varphi_1 = -k^2\varphi_1 + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = -4\pi\rho_{\text{ст}} = -\frac{2qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^{1/2}v},$$

откуда

$$\varphi_1 = Ae^{kz} + \frac{2qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^{1/2}(k^2 + \omega^2/v^2)v}. \quad (5.27)$$

Здесь и в дальнейшем k обозначает модуль вектора \vec{k}_\perp , и в (5.27) оставлено только убывающее при $z \rightarrow -\infty$ решение. Аналогичным образом находим потенциал поля в среде

$$\varphi_2 = Be^{-kz} + \frac{2qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^{1/2}v\varepsilon(\omega)(k^2 + \omega^2/v^2)}. \quad (5.28)$$

Входящие в (5.27) и (5.28) константы A и B определяются из граничных условий, состоящих в том, что на границе раздела (при $z = 0$) должны быть непрерывны потенциал и нормальная составляющая индукции $D_z = -\varepsilon d\varphi/dz$. После простых вычислений отсюда получим

$$A = -\frac{2q(\varepsilon - 1)}{(2\pi)^{1/2}v(\varepsilon + 1)(k^2 + \omega^2/v^2)}; \quad B = \frac{2q(\varepsilon - 1)}{(2\pi)^{1/2}v(k^2 + \omega^2/v^2)\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

Дальнейший ход решения состоит в следующем. Зная потенциал, находим электрическое поле и тормозящую силу, действующую на движущийся заряд. Из полученных таким образом потерь энергии заряда нужно выделить вклад, связанный с возбуждением поверхностных волн.

Заметим прежде всего, что нас интересует поле, действующее на заряд со стороны среды. Соответствующий потенциал (обозначим его $\tilde{\varphi}$) нетрудно получить из (5.27) и (5.28), вычитая потенциал, создаваемый самим зарядом. Так как последний описывается теми же выражениями с $\varepsilon(\omega) \equiv 1$ (движущийся заряд в вакууме), то

$$\tilde{\varphi}_1 = Ae^{kz}; \quad \tilde{\varphi}_2 = Ae^{-kz} + \frac{2qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^{1/2}v(k^2 + \omega^2/v^2)} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right). \quad (5.29)$$

Тормозящая сила определяется компонентой поля \tilde{E}_z , для которой из (5.29) следует

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z^{(1)}(k, \omega, z) &= -kAe^{kz}; \\ \tilde{E}_z^{(2)}(k, \omega, z) &= kB e^{-kz} - i\frac{\omega}{v} \frac{2qe^{i\omega z/v}(1/\varepsilon - 1)}{(2\pi)^{1/2}v(k^2 + \omega^2/v^2)}. \end{aligned}$$

Совершая теперь обратное преобразование Фурье и интересуясь электрическим полем в момент нахождения заряда в данной точке ($\vec{r}_\perp = 0$, $t = z/v$), получим

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{E}_z^{(1)}(\vec{r}_\perp = 0, t = \frac{z}{v}) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega k A e^{(k - i\frac{\omega}{v})z}; \\ \tilde{E}_z^{(2)}(\vec{r}_\perp = 0, t = \frac{z}{v}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ k B e^{-(k + i\frac{\omega}{v})z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\omega}{v} \frac{2q(1/\varepsilon - 1)}{(2\pi)^{1/2} v (k^2 + \omega^2/v^2)} \right\}. \end{aligned} \right. \quad (5.30)$$

Полная работа, совершаемая против силы торможения,

$$W = - \int_{-\infty}^{+\infty} q \tilde{E}_z(\vec{r}_\perp = 0, t = \frac{z}{v}) dz.$$

Второе слагаемое в выражении (5.30) для $\tilde{E}_z^{(2)}$ не зависит от z и описывает потери энергии частицы в однородной среде. Поэтому «переходная» часть потери энергии движущегося заряда связана с двумя другими слагаемыми в (5.30), которые экспоненциально убывают при удалении от границ раздела. Отсюда после интегрирования по z находим

$$\begin{aligned} W_{\text{п}} &= \frac{-q^2}{\pi v} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \times \\ &\quad \times \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)(k^2 + \omega^2/v^2)} \left[\frac{1}{k - i\frac{\omega}{v}} + \frac{1}{k + i\frac{\omega}{v}} \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Как выделить вклад именно поверхностных волн? Из решения задачи 2-13 следует, что в нерелятивистском приближении частота поверхностных электростатических колебаний определяется условием $\varepsilon(\omega_0) = -1$. Значит, искомый вклад связан с полюсами подынтегрального выражения (5.31) в точках $\omega = \pm\omega_0$, где $(\varepsilon + 1) = 0$. Поэтому в дальнейших вычислениях можно везде, кроме полюсного знаменателя, положить $\varepsilon = -1$.

Тогда из (5.31) получим

$$W_{\Pi} = \frac{4iq^2}{\pi v^2} \int_0^{\infty} k^2 dk \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega d\omega}{[\varepsilon(\omega) + 1](k^2 + \omega^2/v^2)}. \quad (5.32)$$

Отсюда видно, что энергия возбуждаемых зарядом поверхностных волн определяется мнимой частью интеграла (5.32). Для ее вычисления нужно учесть хоть и малую, но конечную мнимую часть функции $\varepsilon(\omega)$ (аналогично тому, как это было сделано при вычислении мощности черенковского излучения в задаче 5-1). Нетрудно видеть, что получающийся при этом результат сводится к сумме полувычетов, возникающих при обходе полюсов в интеграле (5.32). Действительно, вблизи точки ω_0 резонансный знаменатель $\varepsilon(\omega) + 1$ приближенно можно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) + 1 &\approx \varepsilon(\omega_0) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + i\varepsilon''(\omega_0) + 1 = \\ &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + i\varepsilon'', \end{aligned} \quad (5.33)$$

так что учет ε'' приводит к смещению полюса подынтегрального выражения с вещественной оси в точку $\omega = \omega_0 - i\gamma$, где $\gamma = \varepsilon''(\omega_0)/(\partial \varepsilon / \partial \omega)_{\omega_0}$. В равновесной среде при положительных частотах функции $\varepsilon''(\omega)$ и $\partial \varepsilon / \partial \omega$ также больше нуля (последняя из них определяет, в частности, знак энергии поверхностных волн, см. задачу 2-17). Поэтому $\gamma > 0$, так что полюс должен быть ниже контура интегрирования и обходить его нужно сверху (рис. 5.3). Проведя разложение, аналогичное (5.33), в точке $\omega = -\omega_0$ и учитывая, что вещественная $\varepsilon(\omega)$ и мнимая $\varepsilon''(\omega)$ части диэлектрической проницаемости являются, соответственно, четной и нечетной функциями частоты, получим, что и в этой точке полюс при интегрировании в (5.32) нужно обходить сверху. В результате отличный от нуля вклад в (5.32) дают только два полувычета

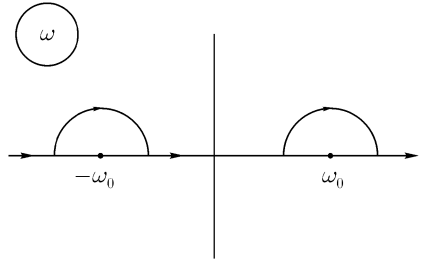


Рис. 5.3. Правило обхода полюсов в интеграле (5.32)

в точках $\omega = \pm\omega_0$, и

$$W_{\text{п}} = \frac{8q^2\omega_0}{v^2(\partial\varepsilon/\partial\omega)_{\omega_0}} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(k^2 + \omega_0^2/v^2)^2}.$$

Подынтегральное выражение в этой формуле дает распределение возбуждаемых поверхностных волн по волновым векторам. Отсюда следует, что характерная длина волны этих колебаний $\lambda \sim v/\omega_0$, и полная энергия возбуждаемых поверхностных волн есть

$$W_{\text{п}} = 2\pi q^2/v(\partial\varepsilon/\partial\omega)_{\omega_0}.$$

§ 6. Нелинейное взаимодействие волн

Уравнения электродинамики сплошной среды являются, вообще говоря, нелинейными. Выражение (2.1) для тока в терминах линейного оператора проводимости есть фактически первый член разложения в ряд по степеням поля. В этом приближении (линейная электродинамика) электромагнитные волны в среде, описываемые уравнениями (2.9) и (2.10), распространяются независимо друг от друга. Учет следующих (нелинейных) членов такого разложения приводит к появлению взаимодействия волн, в результате которого происходит обмен энергией между ними. В случае слабой нелинейности основным нелинейным процессом является резонансное трехволновое взаимодействие. Оно может происходить, если волновые векторы и частоты трех волн (1, 2, 3) удовлетворяют следующим условиям:

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3; \quad \omega(\vec{k}_1) = \omega(\vec{k}_2) + \omega(\vec{k}_3), \quad (6.1)$$

где частоты $\omega(\vec{k})$ определяются линейным дисперсионным уравнением (2.10) и считаются положительными. Уравнения для амплитуд взаимодействующих волн записываются при этом так:

$$\dot{C}_1 = V_1 C_2 C_3, \quad \dot{C}_2 = V_2 C_1 C_3^*, \quad \dot{C}_3 = V_3 C_1 C_2^*. \quad (6.2)$$

Амплитуды $C(\vec{k})$ удобно нормировать таким образом, чтобы энергия волны, определяемая согласно формуле (2.14), равнялась

$$W_{\vec{k}} = \pm |C_{\vec{k}}|^2 \hbar \omega(\vec{k}), \quad (6.3)$$

где знак зависит от того, положительна или отрицательна энергия волны, а \hbar — постоянная Планка. Хотя все рассматриваемые здесь процессы являются классическими, введение квантовой постоянной \hbar позволяет дать очень простую и наглядную интерпретацию нелинейного взаимодействия волн. Если $\hbar\omega$ и $\hbar\vec{k}$ суть энергия и импульс одного кванта, то условия (6.1) представляют собой законы сохранения энергии и импульса в одном элементарном акте трехволнового взаимодействия: распаде кванта 1 на кванты 2 и 3 (и обратном процессе слияния 2 и 3 в 1). При этом из определения (6.3) следует, что $|C'_k|^2 \equiv N_{\vec{k}}$ есть число квантов (квазичастиц) с импульсом $\hbar\vec{k}$ (и энергией $\hbar\omega(\vec{k})$). Фигурирующие в уравнении (6.2) величины V называются матричными элементами трехволнового взаимодействия. Если энергия всех трех волн положительна, то они обладают следующими свойствами симметрии:

$$V_2 = V_3 = -V_1^*. \quad (6.4)$$

Нетрудно проверить, используя (6.2) и (6.3), что это обеспечивает сохранение полной энергии (и импульса) волн при их взаимодействии:

$$W = \sum_{\vec{k}} W(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) = \text{const.}$$

В случае, когда одна из трех взаимодействующих волн (например, волна 1) имеет отрицательную энергию, вместо (6.4) имеем

$$V_2 = V_3 = V_1^*. \quad (6.5)$$

Полная энергия волн, по-прежнему, сохраняется, но теперь она записывается так: $W = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) - \sum_k N_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k})$, где со знаком минус суммируются волны, энергия которых отрицательна.

Кроме интегралов энергии и импульса, при резонансном трехволновом взаимодействии выполняются законы сохранения, связывающие числа заполнения квазичастиц $N_{\vec{k}}$ и называемые соотношениями Мэнли–Роу. Так из уравнений (6.2) при условиях (6.4) сразу следует, что

$$N_1 + N_2 = \text{const}; \quad N_1 + N_3 = \text{const}; \quad N_2 - N_3 = \text{const}. \quad (6.6)$$

Физический смысл этих соотношений очевиден с квантовой точки зрения. В элементарном акте трехволнового взаимодействия квазичастица 1 распадается на квазичастицы 2 и 3, так что убыль числа квазичастиц сорта 1 (N_1)

сопровождается таким же увеличением чисел N_2 или N_3 (такие же рассуждения справедливы и для обратного процесса — слияния 2 и 3 в 1).

Если энергия одной из волн (например, волны 1) отрицательна, то имеют место условия симметрии (6.5), и соотношения Мэнли–Роу в этом случае таковы:

$$N_1 - N_2 = \text{const}; \quad N_1 - N_3 = \text{const}; \quad N_2 - N_3 = \text{const}, \quad (6.7)$$

элементарным актом при этом является одновременное рождение (или исчезновение) трех квазичастиц.

6-1. По заданному виду закона дисперсии $\omega(\vec{k})$ для волн в изотропной среде определить, возможно ли в этом случае резонансное трехволновое взаимодействие.

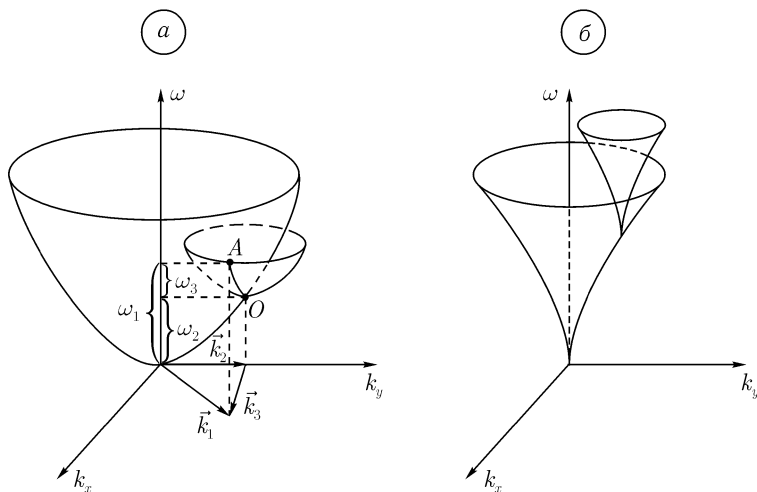


Рис. 6.1. Геометрическое построение для распадных (а) и нераспадных (б) спектров

Трехволновое взаимодействие возможно, если выполняются законы сохранения (6.1). Для изотропной среды частота волны не зависит от направления ее волнового вектора, т. е. $\omega \equiv \omega(k)$, и возможность выполнения условий (6.1) легко установить графически (рис. 6.1, а). Из первого условия (6.1) следует, что волновые векторы всех трех взаимодействующих волн должны лежать в одной плоскости. Пусть это будет плоскость (k_x, k_y) . При

этом функция $\omega(k)$ задает в пространстве (k_x, k_y, ω) поверхность вращения с осью вдоль ω . Возьмем теперь некоторую точку O , лежащую на этой поверхности, и снова построим поверхность $\omega(k_x, k_y)$, но уже с началом координат в точке O . Если эти две поверхности пересекаются, то законы сохранения (6.1) можно удовлетворить, и такой спектр называется распадным. Действительно, пусть точка A лежит на линии пересечения. Спроецируем теперь точки O и A на плоскость (k_x, k_y) и на ось ω . Как видно из рис. 6.1, а, три образующихся таким образом вектора \vec{k}_1 , \vec{k}_2 и \vec{k}_3 и соответствующие им частоты ω_1 , ω_2 и ω_3 удовлетворяют условиям распада (6.1). На рис. 6.1, б показан пример нераспадного спектра, для которого построенные указанным выше способом поверхности не имеют точек пересечения, так что условия (6.1) не могут быть выполнены.

6-2. Возможно ли резонансное трехволновое взаимодействие для следующих типов волн:

а) $\omega = (\alpha k^3 / \rho)^{1/2}$ — капиллярные волны на поверхности глубокой жидкости (ρ — плотность жидкости, α — коэффициент поверхностного натяжения);

б) $\omega = (gk)^{1/2}$ — гравитационные волны на поверхности жидкости;

в) $\omega = (\omega_p^2 + k^2 c^2)^{1/2}$ — электромагнитные волны в плазме;

г) $\omega = kc_s / (1 + k^2 a^2)^{1/2}$ — ионно-звуковые волны в плазме (a — дебаевский радиус, c_s — скорость звука);

д) коллективные возбуждения в жидком гелии, спектр которых (спектр Ландау) показан на рис. 6.2. Для них $\omega \approx kv$ при $k \ll k_0$ (фононы) и $\omega \approx \omega_0 + (k - k_0)^2 / 2\mu$ при $|k - k_0| \ll k_0$ (ротоны).

Воспользуемся методом, изложенным в предыдущей задаче. Легко заметить, что вид спектра волн (а) и (б) в точности соответствует изображенному на рис. 6.1. Поэтому капиллярные волны обладают распадным спектром, а гравитационные — нераспадным. Построим теперь картинки для остальных типов волн (рис. 6.3). Спектры электромагнитных (см. рис. 6.3, а) и ионно-звуковых волн (см. рис. 6.3, б) в плазме нераспадные. В жидком же гелии (см. рис. 6.3, в) возможны распады ротонов

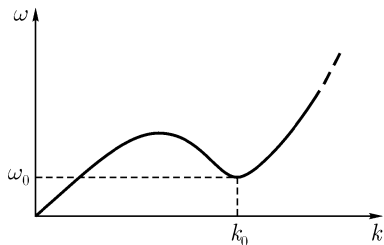


Рис. 6.2. Спектр возбуждений в жидком гелии

на ротон и фонон. Причем пересечение кривых в плоскости рисунка означает, что здесь разрешены (в отличие, например, от капиллярных волн) и одномерные распады, когда волновые векторы всех трех взаимодействующих волн коллинеарны.

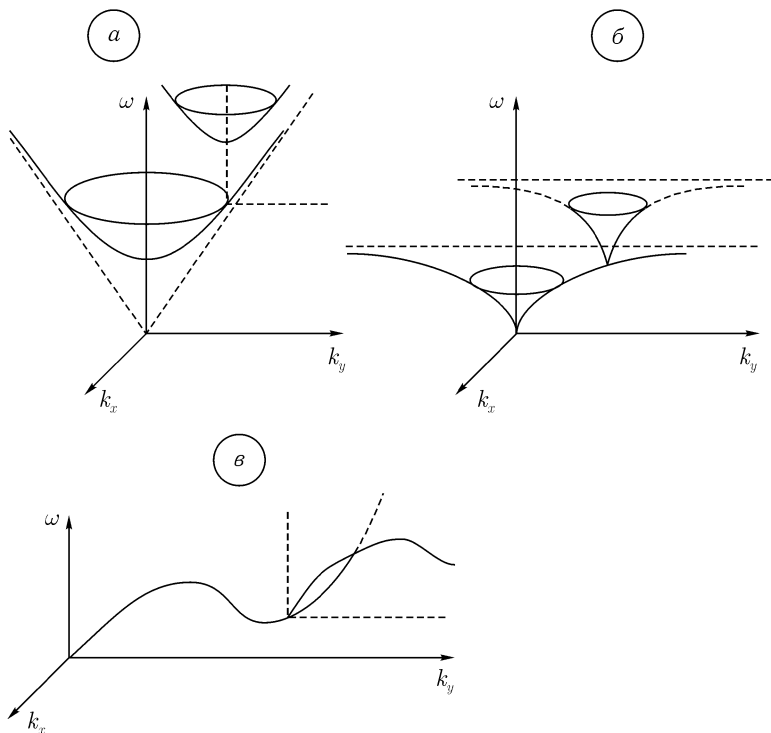


Рис. 6.3. Примеры распадных и нераспадных спектров

6-3. Найти минимальную частоту волны, при которой возможен ее распад на две другие, если закон дисперсии имеет вид $\omega(k) = \omega_0 + \alpha k^2$.

Из законов сохранения (6.1) и дисперсионного уравнения $\omega(k) = \omega_0 + \alpha k^2$ следует, что $(\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3) = \omega_0/2\alpha$. Таким образом, вопрос сводится к нахождению минимума суммы $(k_2^2 + k_3^2)$ при заданном скалярном произведении этих векторов $(\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3)$. Очевидно, что этот минимум будет достигаться при

параллельных \vec{k}_2 и \vec{k}_3 . Тогда $k_3 = \omega_0/2\alpha k_2$ и $k_2^2 + k_3^2 = k_2^2 + \omega_0^2/4\alpha^2 k_2^2$. Это выражение имеет минимум, когда $k_2 = k_3 = (\omega_0/2\alpha)^{1/2}$. Итак, минимально возможная частота распадающейся волны

$$\omega_{\min}(k_1) = 3\omega_0.$$

6-4. Волна l с законом дисперсии $\omega_l = \omega_0 + \alpha k^2$ распадается по схеме $l \rightarrow l' + s$ на волну l' такого же типа и волну s с законом дисперсии $\omega_s = kc_s$. Найти минимальную частоту исходной волны, для которой возможен такой распад.

Нарисуем графическую картинку сложения частот и волновых векторов для такого процесса. При этом возможны два различных случая: в первом случае (рис. 6.4, а), когда групповая скорость волны l' меньше скорости звука c_s , волна l имеет групповую скорость большую чем c_s . Если частота волны l' настолько велика, что ее групповая скорость больше c_s (см. рис. 6.4, б), то волна l может иметь частоту, сколь угодно близкую к частоте волны l' . Так как для волн типа l их групповая скорость монотонно возрастает с увеличением частоты, то ω_l будет минимально в том случае, когда групповая скорость волны l' будет как раз равна c_s , и при этом $\omega_l = \omega_{l'}$, а $\omega_s \rightarrow 0$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial k} = 2\alpha k = c_s; \quad k_0 = c_s/2\alpha; \quad \omega_{\min} = \omega_0 + \alpha k_0^2 = \omega_0 + c_s^2/4\alpha.$$

6-5. Определить инкремент распадной неустойчивости, возникающей при трехволновом взаимодействии колебаний с положительной энергией.

Распадная неустойчивость состоит в том, что стационарное состояние, когда в системе возбуждена только волна с максимальной частотой (в данном случае волна 1), а амплитуды двух других волн (C_2 и C_3) равны нулю, оказывается неустойчивым. Под действием малых возмущений энергия волны 1 перекачивается в энергию волн 2 и 3.

Итак, пусть в начальном состоянии $C_1 = C_0$, а $C_2 = C_3 = 0$. Добавим теперь малые возмущения: $C_1 = C_0 + a_1 e^{\gamma t}$, $C_2 = a_2 e^{\gamma t}$, $C_3 = a_3 e^{\gamma t}$, считая их зависимость от времени экспоненциальной. Подставив эти выражения для амплитуд в уравнения (6.2), с учетом (6.4) в линейном по $a_1, 2, 3$ приближении получим

$$a_1 = 0; \quad \gamma a_2 = -V^* C_0 a_3; \quad \gamma a_3 = -V^* C_0 a_2^*.$$

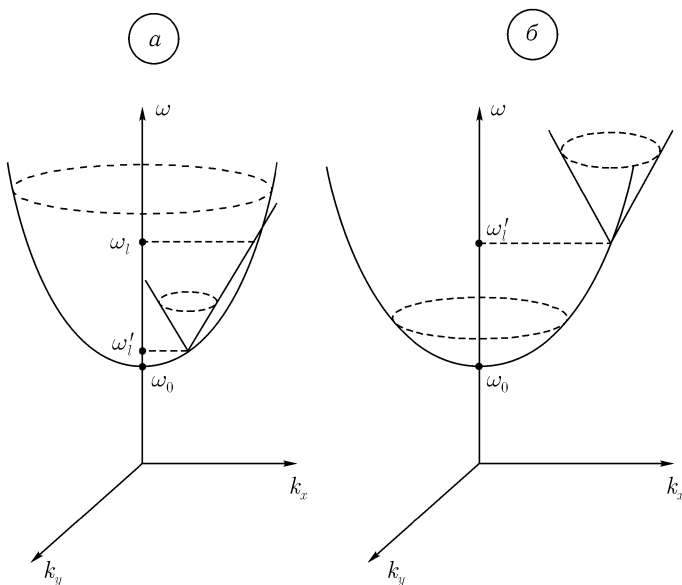


Рис. 6.4. Графическая схема распада волн

Отсюда сразу следует, что $|\gamma|^2 = |V|^2|C_0|^2$, следовательно, такое стационарное состояние неустойчиво, так как существуют экспоненциально нарастающие возмущения ($\text{Re } \gamma > 0$). Отметим выделенность здесь волны 1, имеющей максимальную частоту. Нетрудно проверить, что стационарные состояния, когда возбуждена только волна 2 или 3, устойчивы. В этом случае малые возмущения не нарастают, а осциллируют, не меняя своей амплитуды.

При распадной неустойчивости волны 1 экспоненциальный рост возмущений происходит лишь на начальной стадии неустойчивости, пока $a \ll C_0$. Затем амплитуды волн 2 и 3 нарастают до тех пор, пока их энергия не сравняется по порядку величины с энергией волны 1, после чего начинается перекачка энергии в обратном направлении. Такое поведение амплитуд волн с положительной энергией можно предвидеть и не решая уравнений (6.2), так как интеграл энергии и соотношения Мэнли–Роу (6.6) ограничивают сверху значения чисел заполнения $N_{\vec{k}}$ для каждой из взаимодействующих волн.

Совершенно иначе обстоит дело, если одна из волн имеет отрицательную энергию. В этом случае амплитуды всех трех волн могут неограниченно возрастать, не противореча закону сохранения энергии и соотношениям Мэнли–Роу (6.7) (см. задачу 6-6).

6-6. Показать, что если при трехволновом взаимодействии волна с наибольшей частотой (волна 1) имеет отрицательную энергию, то возможна так называемая «взрывная» неустойчивость волн, заключающаяся в том, что их амплитуды возрастают до бесконечности за конечный промежуток времени. Найти закон роста амплитуд вблизи момента «взрыва».

Рассмотрим для простоты случай, когда в начальный момент времени ($t = 0$) возбуждены волны 2 и 3, причем $C_2(0) = C_3(0) = C_0$, а $C_1(0) = 0$. Будем также считать матричный элемент взаимодействия этих волн V и начальную амплитуду C_0 вещественными. Тогда, как это следует из (6.2) и (6.5), амплитуды $C_{1,2,3}$ останутся вещественными. Согласно соотношениям Мэнли–Роу (6.7), в этом случае $C_2(t) = C_3(t) \equiv C(t)$, а $C_1^2(t) - C_0^2(t) = \text{const} = -C_0^2$, или $C^2(t) = C_1^2(t) + C_0^2$. После этого первое из уравнения (6.2) запишется так:

$$\frac{dC_1}{dt} = VC_2C_3 = VC^2 = V(C_1^2 + C_0^2)$$

и легко интегрируется: $C_1(t) = C_0 \operatorname{tg}(VC_0 t)$. Отсюда следует, что амплитуды всех трех волн обращаются в бесконечность в момент $t = t_0 = \pi/2VC_0$. Вблизи момента «взрыва» рост амплитуд происходит по закону $C_{1,2,3} \sim (t_0 - t)^{-1}$.

6-7. Получить нелинейные уравнения, описывающие взаимодействие электромагнитных и ленгмюровских волн в холодной плазме с бесконечно тяжелыми ионами.

Диэлектрическая проницаемость такой плазмы (см. задачу 2-3) $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$ (n_0 , $-e$, m — плотность, заряд и масса электронов). Закон дисперсии для электромагнитных волн $\omega(k) = (\omega_p^2 + k^2 c^2)^{1/2}$, а для ленгмюровских колебаний $\omega(k) = \omega_p$ (см. задачу 2-4). Хотя оба эти спектра в отдельности являются нераспадными, (см. задачи 6-1, 6-2), здесь возможно трехволновое взаимодействие, если, например, волны 1 и 2 — электромагнитные, а 3 — ленгмюровская. Рассмотрим самый простой случай, когда все три волны распространяются в одном направлении (пусть это будет ось z), а поперечные электромагнитные волны поляризованы линейно

и одинаково, так что в них отлична от нуля только x -составляющая электрического поля E_x (а магнитного, соответственно, B_y). При этом условия резонанса $k_1 = k_2 + k_3$, $\omega(k_1) = \omega(k_2) + \omega(k_3)$ всегда можно выполнить, если частота распадающейся электромагнитной волны $\omega_1 \equiv \omega(k_1)$ больше, чем $2\omega_p$ (k_1 и k_2 — волновые векторы электромагнитных волн, а k_3 — ленгмюровской волны). Запишем теперь уравнения Максвелла и уравнения движения для электронов:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} \vec{v}(n_0 + n) = \\ = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi n_0 e}{c} \vec{v} + \frac{\vec{v}}{c} \operatorname{div} \vec{E}; \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{e}{m} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}, \end{cases} \quad (6.8)$$

где n — отклонение плотности электронов от равновесного значения n_0 (из уравнения Пуассона следует, что $n = -\operatorname{div} \vec{E}/4\pi e$).

В рассматриваемом нами случае отличны от нуля лишь компоненты E_x , B_y , v_x , E_z и v_z . Представляя каждую из них в виде суммы Фурье-гармоник, например, $E_x(z, t) = \sum_k E_{xk}(t) e^{ikz}$, получим из (6.8) следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{xk}}{\partial t} = -ickB_{yk} + 4\pi n_0 e v_{xk} - i \sum_{k'} k' E_{zk'} v_{x(k-k')}; \\ \frac{\partial B_{yk}}{\partial t} = -ickE_{xk}; \\ \frac{\partial v_{xk}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_{xk} - i \sum_{k'} k' v_{xk'} v_{z(k-k')} + \frac{e}{mc} \sum_{k'} B_{yk'} v_{z(k-k')}; \\ \frac{\partial E_{zk}}{\partial t} = 4\pi n_0 e v_{zk} - i \sum_{k'} k' E_{zk'} v_{z(k-k')}; \\ \frac{\partial v_{zk}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_{zk} - i \sum_{k'} k' v_{zk'} v_{z(k-k')} - \frac{e}{mc} \sum_{k'} B_{yk'} v_{x(k-k')}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Нелинейность этих уравнений определяется слагаемыми, фигурирующими в (6.9) в виде суммы по k' . В линейном приближении, когда ими можно пренебречь, ленгмюровские волны (им соответствуют E_z и v_z) и электромагнитные волны (E_x , B_y , v_x) имеют постоянные амплитуды и распространяются независимо друг от друга.

6-8. Получить уравнения для амплитуд при резонансном трехволновом взаимодействии, исходя из нелинейных уравнений типа (6.9).

Полученные для Фурье-компонент возмущений в среде уравнения (6.9) можно записать символически в следующем виде:

$$\frac{\partial A_{\alpha\vec{k}}}{\partial t} - L_{\alpha\beta}(\vec{k})A_{\beta\vec{k}} = \sum_{\vec{k}'} T_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}, \vec{k}')A_{\beta\vec{k}'}A_{\gamma(\vec{k}-\vec{k}')}, \quad (6.10)$$

где $\vec{A}_{\vec{k}}$ — «вектор состояния» среды, в рассмотренном в предыдущей задаче случае $A_{\alpha} = (E_x, B_y, v_x, E_z, v_z)$. Такая запись позволяет рассчитать нелинейное взаимодействие волн любой природы. Задача состоит теперь в том, чтобы получить уравнения для изменения амплитуд волн со временем, связанного с их взаимодействием, считая последнее (т. е. нелинейность) слабым.

Матрица $L_{\alpha\beta}(\vec{k})$ в (6.10) описывает волны в среде в линейном приближении, а $T_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}, \vec{k}')$ — нелинейность. Введем собственные векторы линейной задачи

$$\varphi_{\alpha\vec{k}}(t) = C_{\vec{k}}e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\Psi_{\alpha\vec{k}}, \quad (6.11)$$

где $(-i\omega_{\vec{k}})$ — собственные значения матрицы $L_{\alpha\beta}(\vec{k})$. Если в системе отсутствует диссипация, то частоты $\omega_{\vec{k}}$ должны быть действительными, то есть собственные значения матрицы $L_{\alpha\beta}$ — чисто мнимые. Это означает, что матрица $L_{\alpha\beta}$ антиэрмитова, и $L_{\alpha\beta} = -L_{\alpha\beta}^*$. Условимся нормировать вектор $\vec{\varphi}_{\vec{k}}$ так, чтобы квадрат его «длины» $\varphi_{\alpha\vec{k}}\varphi_{\alpha\vec{k}}^*$ был равен $W_{\vec{k}}$ — плотности энергии колебаний, а квадрат «единичного» вектора $\Psi_{\vec{k}}$ равнялся $\hbar\omega_{\vec{k}}$ — энергии одного кванта с частотой $\omega_{\vec{k}}$. Тогда плотность энергии волны $W_{\vec{k}} = |C_{\vec{k}}|^2\hbar\omega_{\vec{k}}$, так что квадрат модуля амплитуды $|C_{\vec{k}}|^2 \equiv N_{\vec{k}}$ имеет смысл плотности числа квазичастиц с импульсом $\hbar\vec{k}$ и энергией $\hbar\omega_{\vec{k}}$. Так как состоящий из физических величин вектор $\vec{A}_{\vec{k}}$ должен быть действительным, то в сумме Фурье-гармоник с разными \vec{k} и $\omega_{\vec{k}}$ амплитуды $C_{\vec{k}}$ и $C_{-\vec{k}}$ должны удовлетворять условию $C_{-\vec{k}} = C_{\vec{k}}^*$ (при этом, очевидно, должно быть и $\omega(-\vec{k}) = -\omega(\vec{k})$). Поэтому гармоники с волновыми векторами и частотами $(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})$ и $(-\vec{k}, -\omega_{\vec{k}})$ описывают одну и ту же волну. Так что в дальнейшем будем под частотой волны всегда понимать положительную величину. Поскольку плотность энергии волн в среде может быть и отрицательной, то для таких волн условимся считать нормировку такой, что

$$W_{\vec{k}} = -|C_{\vec{k}}|^2\hbar\omega_{\vec{k}} = -N_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}}.$$

Нелинейность уравнений приводит к изменению со временем амплитуд $C_{\vec{k}}$ и, вообще говоря, некоторому «повороту» единичного вектора $\vec{\Psi}_{\vec{k}}$,

$$\vec{\varphi}_{\vec{k}} = C_{\vec{k}}(t)e^{-i\omega_{\vec{k}}t}[\vec{\Psi}_{\vec{k}} + \delta\vec{\Psi}_{\vec{k}}(t)], \quad (6.12)$$

причем из сохранения нормировки следует, что векторы $\vec{\Psi}_{\vec{k}}$ и $\delta\vec{\Psi}_{\vec{k}}$ ортогональны, так что $\Psi_{\alpha\vec{k}} \rightarrow \delta\Psi_{\alpha\vec{k}}^* = 0$. Подставим теперь выражение (6.12) для $\vec{\varphi}_{\vec{k}}$ в уравнение (6.10), учитывая, что при слабой нелинейности в квадратичных по амплитуде членах можно ограничиться невозмущенными величинами:

$$\begin{aligned} & \dot{C}_{\vec{k}}e^{-i\omega_{\vec{k}}t}\Psi_{\alpha\vec{k}} - i\omega_{\vec{k}}C_{\vec{k}}e^{-i\omega_{\vec{k}}t}[\Psi_{\alpha\vec{k}} + \delta\Psi_{\alpha\vec{k}}] - \\ & - C_{\vec{k}}e^{-i\omega_{\vec{k}}t}L_{\alpha\beta}(\vec{k})[\Psi_{\beta\vec{k}} + \delta\Psi_{\beta\vec{k}}] = \\ & = \sum_{\vec{k}'} T_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}, \vec{k}')C_{\vec{k}'}C_{\vec{k}-\vec{k}'}\Psi_{\beta\vec{k}'}\Psi_{\gamma(\vec{k}-\vec{k}')}e^{-i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}-\vec{k}'})t} \end{aligned} \quad (6.13)$$

(в левой части (6.13) опущены слагаемые более высокого порядка по возмущениям, такие, как $\dot{C}_{\vec{k}}\delta\Psi_{\vec{k}}$ и $\delta\vec{\Psi}_{\vec{k}} \cdot C_{\vec{k}}$). Учитывая, что $\vec{\Psi}_{\vec{k}}$ есть собственный вектор матрицы $L_{\alpha\beta}(\vec{k})$, получим

$$\begin{aligned} & \dot{C}_{\vec{k}}\Psi_{\alpha\vec{k}} - i\omega_{\vec{k}}C_{\vec{k}}\delta\Psi_{\alpha\vec{k}} - C_{\vec{k}}L_{\alpha\beta}\delta\Psi_{\beta\vec{k}} = \\ & = \sum_{\vec{k}'} T_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}, \vec{k}')\Psi_{\beta\vec{k}'}\Psi_{\gamma(\vec{k}-\vec{k}')}C_{\vec{k}'}C_{\vec{k}-\vec{k}'}e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}-\vec{k}'})t}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из этого векторного уравнения и условия ортогональности $\vec{\Psi}_{\vec{k}} \cdot \delta\vec{\Psi}_{\vec{k}}^* = 0$ можно найти поправку $\delta\vec{\Psi}_{\vec{k}}$ к единичному вектору и изменение амплитуды $\dot{C}_{\vec{k}}$. Если интересоваться только последней, то удобно получить одно скалярное уравнение. Для этого умножим обе части (6.14) скалярно на вектор $\vec{\Psi}_{\alpha\vec{k}}^*$. Тогда второе слагаемое в левой части (6.14) даст нулевой вклад, так как $\vec{\Psi}_{\alpha\vec{k}}^* \cdot \delta\Psi_{\alpha\vec{k}} = 0$, а третье можно преобразовать, используя антиэрмитовость матрицы $L_{\alpha\beta}$:

$$L_{\alpha\beta}\delta\Psi_{\beta}\Psi_{\alpha}^* = -L_{\beta\alpha}^*\Psi_{\alpha}^*\delta\Psi_{\beta} = -i\omega\Psi_{\beta}^*\delta\Psi_{\beta} = 0.$$

Таким образом, поправка $\delta\vec{\Psi}_{\vec{k}}$ выпадает из уравнения для амплитуды. Кроме того, в правой части (6.14) сразу оставим только резонансные слагаемые,

для которых $\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}-\vec{k}'} = 0$. Только они приводят к эффективно-му взаимодействию волн, так как не содержат быстроосциллирующей экспоненты. Обозначив соответствующую сумму символом $\widetilde{\sum}_{\vec{k}'}$, окончательно получим

$$\begin{cases} \dot{C}_{\vec{k}} = \widetilde{\sum}_{\vec{k}'} V(\vec{k}, \vec{k}') C_{\vec{k}'} C_{\vec{k}-\vec{k}'}; \\ V(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{T_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}, \vec{k}') \Psi_{\alpha\vec{k}}^* \Psi_{\beta\vec{k}'} \Psi_{\gamma}(\vec{k}-\vec{k}')}{\hbar\omega_{\vec{k}}}. \end{cases} \quad (6.15)$$

6-9. Используя результаты предыдущей задачи, найти матричные элементы трехволнового взаимодействия электромагнитных и ленгмюровских волн (см. задачу 6-7).

Применим развитую выше общую схему к конкретному процессу: распаду электромагнитной волны в плазме на электромагнитную и ленгмюровскую. Вектор состояния \vec{A} здесь удобно определить так: $\vec{A} = (E_x, B_y, \sqrt{4\pi n_0 m} v_x, E_z, \sqrt{4\pi n_0 m} v_z)$. Тогда система уравнений (6.9) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{1k}}{\partial t} = -ickA_{2k} + \omega_p A_{3k} - i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} \sum_{k'} (k - k') A_{3k'} A_{4(k-k')}; \\ \frac{\partial A_{2k}}{\partial t} = -ickA_{1k}; \\ \frac{\partial A_{3k}}{\partial t} = -\omega_p A_{1k} + \frac{2\sqrt{\pi}e}{mc} \sum_{k'} A_{2k'} A_{5(k-k')} - \\ - i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} \sum_{k'} k' A_{3k'} A_{5(k-k')}; \\ \frac{\partial A_{4k}}{\partial t} = \omega_p A_5 - i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} \sum_{k'} k' A_{4k'} A_{5(k-k')}; \\ \frac{\partial A_{5k}}{\partial t} = -\omega_p A_4 - \frac{2\sqrt{\pi}e}{mc} \sum_{k'} A_{2k'} A_{3(k-k')} - \\ - i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} \sum_{k'} A_{5k'} A_{5(k-k')} k'; \end{cases} \quad (6.16)$$

Линейная матрица $L_{\alpha\beta}$ является, как и должно быть, антиэрмитовой и имеет ненулевые компоненты

$$L_{12} = -L_{21}^* = -ick; \quad L_{13} = -L_{31}^* = \omega_p; \quad L_{45} = -L_{54}^* = \omega_p.$$

Ее собственные векторы соответствуют поперечным электромагнитным (l) и продольным ленгмюровским (t) волнам:

$$\varphi_\alpha^{(l)} = C^{(l)} e^{-i\omega_p t} \Psi_\alpha^{(l)}; \quad \varphi_\alpha^{(t)} = C^{(t)} e^{-i\omega^{(t)} t} \Psi_\alpha^{(t)}; \quad \omega^{(t)} = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2},$$

где нормированные нужным образом «единичные» векторы $\Psi_\alpha^{(l)}$ и $\Psi_\alpha^{(t)}$ равны

$$\begin{cases} \Psi_\alpha^{(l)} = \sqrt{\hbar\omega_p} \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right); \\ \Psi_\alpha^{(t)} = \sqrt{\hbar\omega^{(t)}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega^{(t)})}}{2}, \frac{-i\omega_p}{\sqrt{2}\omega^{(t)}}, 0, 0 \right). \end{cases} \quad (6.17)$$

Пусть теперь электромагнитная волна, имеющая волновой вектор k_1 , частоту $\omega_1 = \omega^{(t)}(k_1)$ и амплитуду C_1 , распадается на другую электромагнитную волну (с волновым вектором k_2 , частотой $\omega_2 = \omega^{(t)}(k_2)$ и амплитудой C_2) и ленгмюровскую (волновой вектор $k_3 = k_1 - k_2$, частота $\omega_3 = \omega_p = \omega_1 - \omega_2$). В данном случае из (6.16) видно, что отличны от нуля лишь следующие составляющие матрицы нелинейного взаимодействия $T_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned} T_{134}(k, k') &= -i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} (k - k'); & T_{325}(k, k') &= \frac{2\sqrt{\pi}e}{mc}; \\ T_{335}(k, k') &= -i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} k'; & T_{445}(k, k') &= -i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} k'; \\ T_{523}(k, k') &= -\frac{2\sqrt{\pi}e}{mc}; & T_{555}(k, k') &= -i \frac{2\sqrt{\pi}e}{m\omega_p} k'. \end{aligned}$$

Учитывая это и приведенные в (6.17) компоненты «единичных» векторов $\Psi_\alpha^{(l,t)}$, по общей формуле (6.15) получим для амплитуды следующее уравнение:

$$\dot{C}_1 = V_1 C_2 C_3, \quad (6.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{\hbar\omega_1} \{ T_{134}(k_1, k_2) \Psi_{1k_1}^* \Psi_{3k_2} \Psi_{4k_3} + \\
 &\quad + T_{325}(k_1, k_2) \Psi_{3k_1}^* \Psi_{2k_2} \Psi_{5k_3} + T_{335}(k_1, k_2) \Psi_{3k_1}^* \Psi_{3k_2} \Psi_{5k_3} \} = \\
 &= \frac{2\sqrt{\pi}e}{\hbar m \omega_1} \frac{\sqrt{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_p}}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{k_3}{\omega_2} + \frac{\omega_p \sqrt{\varepsilon(\omega_2)}}{c \omega_1} - \frac{k_2 \omega_p}{\omega_1 \omega_2} \right) = \\
 &= -\frac{e(k_1 - k_2)}{m} \frac{\sqrt{\pi \hbar \omega_p}}{2\omega_1 \omega_2}.
 \end{aligned}$$

Как получить теперь уравнение для изменения двух других амплитуд, C_2 и C_3 ? Для этого заметим, что условие резонанса для рассматриваемых трех волн можно формально записать так: $k_2 = k_1 + (-k_3)$; $\omega_2 = \omega_1 + (-\omega_3)$. Поскольку, как уже отмечалось, изменение знака волнового вектора и частоты означает переход к комплексно сопряженным величинам амплитуды и «единичного» вектора, то, согласно общей схеме,

$$\dot{C}_2 = V_2 C_1 C_3^*, \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{1}{\hbar\omega_2} \{ T_{134}(k_2, k_1) \Psi_{1k_2}^* \Psi_{3k_1} \Psi_{4k_3}^* + \\
 &\quad + T_{325}(k_2, k_1) \Psi_{3k_2}^* \Psi_{2k_1} \Psi_{5k_3}^* + T_{335}(k_2, k_1) \Psi_{3k_2}^* \Psi_{3k_1} \Psi_{5k_3}^* \} = \\
 &= \frac{e(k_1 - k_2)}{m} \frac{\sqrt{\pi \hbar \omega_p}}{2\omega_1 \omega_2}.
 \end{aligned}$$

Аналогично для C_3 :

$$\dot{C}_3 = V_3 C_1 C_2^*, \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
 V_3 &= \frac{1}{\hbar\omega_p} \{ T_{523}(k_3, k_1) \Psi_{5k_3}^* \Psi_{2k_1} \Psi_{3k_2}^* + \\
 &\quad + T_{523}(k_3, -k_2) \Psi_{5k_3}^* \Psi_{3k_1} \Psi_{2k_2}^* \} = V_2
 \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (6.18)–(6.20) для амплитуд этих трех волн может быть записана в стандартном для волн с положительной

энергией в виде (6.2), (6.4):

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= V C_2 C_3; & \dot{C}_2 &= -V^* C_1 C_3^*; \\ \dot{C}_3 &= -V^* C_1 C_2^*; & V &= -\frac{e(k_1 - k_2)}{m} \frac{\sqrt{\pi \hbar \omega_p}}{2\omega_1 \omega_2}.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Хотя входящий сюда матричный элемент взаимодействия волн V и содержит квантовую постоянную \hbar , рассматриваемый процесс является, конечно, чисто классическим. Появление \hbar в (6.21) связано, как нетрудно видеть, с принятой нормировкой амплитуд, при которой числа заполнения $n_{\vec{k}} = |C_{\vec{k}}|^2 \sim \hbar^{-1}$. Как уже отмечалось, такая нормировка удобна тем, что позволяет интерпретировать трехволновое взаимодействие как процессы распада и слияния квазичастиц. На квантовом языке полученные здесь уравнения (6.21) соответствуют классическому пределу больших чисел заполнения, когда главную роль играют индуцированные процессы.

6-10. Получить кинетическое уравнение (уравнение для чисел заполнения квазичастиц $N_{\vec{k}}$) для ансамбля резонансно взаимодействующих волн.

Если в среде возбужден широкий спектр волн, то условия резонанса могут быть выполнены для большого числа наборов из трех волн, т. е. каждая волна взаимодействует не с одной парой, а с большим числом других волн. В этом случае становится применимым статическое описание, при котором фазы волн можно считать случайными (так называемое «приближение хаотических фаз»), а эволюция волновых возмущений описывается в терминах чисел заполнения $N_{\vec{k}}$. Для получения кинетического уравнения будем исходить из уравнения (6.15) для амплитуды $C_{\vec{k}}$, сохранив в нем экспоненту, содержащую разность частот взаимодействующих волн, и считая спектр непрерывным (переходя к интегрированию по \vec{k}'):

$$\dot{C}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}'} C_{\vec{k}''} e^{(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''})t}, \quad \vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}'; \quad (6.22)$$

(множитель $\frac{1}{2}$ возникает здесь из-за того, что перестановка волновых векторов \vec{k}' и \vec{k}'' соответствует одному и тому же процессу). Отсюда изменение числа заполнения $N_{\vec{k}}$,

$$\begin{cases} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} = C_{\vec{k}}^* \dot{C}_{\vec{k}} + C_{\vec{k}} \dot{C}_{\vec{k}}^* = \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}'} C_{\vec{k}''} C_{\vec{k}}^* e^{i\Delta\omega t} + \text{к. с.} \\ \omega = \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Теперь в этом уравнении необходимо провести усреднение по фазам, входящим в амплитуды волн $C_{\vec{k}}$, $C_{\vec{k}'}$ и $C_{\vec{k}''}$. для этого используем теорию возмущений, представляя амплитуды в виде ряда по оператору взаимодействия V , $C_{\vec{k}}^{(0)} = C_{\vec{k}}^{(0)} + C_{\vec{k}}^{(1)} + \dots$. Хаотичность фаз означает отсутствие фазовых корреляций в нулевом приближении, т. е.

$$\begin{aligned} \langle C_{\vec{k}}^{(0)} \rangle &= 0; & \langle C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'}^{(0)*} \rangle &= N_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}'); \\ C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'}^{(0)} &= N_{\vec{k}} \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Здесь использовано равенство $C_{\vec{k}}^* = C_{-\vec{k}}$, а знак $\langle \rangle$ означает усреднение по фазам. Тогда в нулевом приближении по взаимодействию правая часть уравнения (6.23) обратится в нуль. Поэтому для нахождения $\dot{N}_{\vec{k}}$ необходимо использовать приближение $C_{\vec{k}}^{(1)}$. Из уравнения (6.22) с нужной точностью получим

$$\frac{\partial C_{\vec{k}}^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(0)} e^{i\Delta\omega t}. \quad (6.25)$$

Проинтегрируем это уравнение по времени от $-\infty$ до заданного момента (который всегда выбором отсчета можно сделать равным $t = 0$), введя для удобства бесконечно медленное (адиабатическое) включение взаимодействия ($V \sim e^{-\gamma^2 t^2}$), так что при $t \rightarrow -\infty$ $C_{\vec{k}}^{(1)} = 0$. Тогда из (6.25) следует

$$\begin{aligned} C_{\vec{k}}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(0)} \int_{-\infty}^0 e^{i\Delta\omega t - \gamma^2 t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(0)} \frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma} e^{-(\Delta\omega)^2 / 4\gamma^2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

(амплитуды $C_{\vec{k}'}^{(0)}$ и $C_{\vec{k}''}^{(0)}$ при этом следует считать постоянными, так как учет их изменения приводит к поправкам более высокого порядка по взаимодействию). Поскольку

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{e^{-(\Delta\omega)^2 / 4\gamma^2}}{\sqrt{\pi} 2\gamma} = \delta(\Delta\omega),$$

то, согласно (6.26),

$$C_{\vec{k}}^{(1)} \approx \frac{\pi}{2} \int d\vec{q} V_{\vec{k}\vec{q}}^* C_{\vec{q}}^{(0)} C_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)} \delta(\Delta\omega). \quad (6.27)$$

Аналогичным образом находятся поправки к амплитудам $C_{\vec{k}'}^{(1)}$ и $C_{\vec{k}''}^{(1)}$, которые, используя уравнения (6.2) и свойства симметрии матричных элементов (6.4), можно записать в виде

$$\begin{cases} C_{\vec{k}'}^{(1)} = -\frac{\pi}{2} \int d\vec{q} V^* C_{\vec{q}}^{(0)} C_{\vec{q}-\vec{k}'}^{(0)} \delta(\Delta\omega); \\ C_{\vec{k}''}^{(1)} = -\frac{\pi}{2} \int d\vec{q} V^* C_{\vec{q}}^{(0)} C_{\vec{q}-\vec{k}''}^{(0)} \delta(\Delta\omega). \end{cases} \quad (6.28)$$

Согласно (6.4), мы подразумеваем, что энергия взаимодействующих волн положительна. Подставляя выражения (6.27) и (6.28) в (6.23) и усредняя по фазам волн, получим

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} &= \frac{1}{2} \int d\vec{k}' V e^{i\Delta\omega t} \langle C_{\vec{k}'}^{(1)} C_{\vec{k}''}^{(0)} C_{\vec{k}}^{*(0)} + C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(1)} C_{\vec{k}}^{*(0)} + \\ &\quad + C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(0)} C_{\vec{k}}^{*(1)} \rangle + \text{к. с.} = \\ &= \frac{\pi}{2} \int d\vec{k}' V \left\{ \int d\vec{q} V^* \langle C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}''}^{(0)} C_{\vec{q}}^{*(0)} C_{\vec{k}-\vec{q}}^{*(0)} \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \int d\vec{q} V^* \langle C_{\vec{k}''}^{(0)} C_{\vec{k}}^{*(0)} C_{\vec{q}}^{(0)} C_{\vec{q}-\vec{k}'}^{*(0)} \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \int d\vec{q} V^* \langle C_{\vec{k}'}^{(0)} C_{\vec{k}}^{*(0)} C_{\vec{q}}^{(0)} C_{\vec{q}-\vec{k}''}^{*(0)} \rangle \right\} \delta(\Delta\omega). \quad (6.29) \end{aligned}$$

Так как в нулевом приближении фазы волн никак не скоррелированы, то усреднение по фазам произведений четырех амплитуд в (6.29) сводится, согласно (6.24), к произведению двух чисел заполнения. Действительно, в первом слагаемом в правой части (6.29) отличный от нуля результат получится в двух случаях: $\vec{q} = \vec{k}'$ или $\vec{q} = \vec{k}''$. Проведя такое же «спаривание» амплитуд и в остальных слагаемых, окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} &= \pi \int d\vec{k}' |V_{\vec{k}\vec{k}'}|^2 (N_{\vec{k}'} N_{\vec{k}-\vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}-\vec{k}'} \times \\ &\quad \times \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}-\vec{k}'})). \quad (6.30) \end{aligned}$$

Это уравнение для числа квазичастиц с максимальной частотой. Из соотношения Мэнли–Роу следует, что для двух других участвующих во взаимодействии волн

$$\frac{dN_{\vec{k}'} }{dt} = \frac{dN_{\vec{k}-\vec{k}'} }{dt} = \frac{dN_{\vec{k}} }{dt}. \quad (6.31)$$

Кинетическое уравнение (6.30) можно получить и из квантовомеханического принципа соответствия, рассматривая баланс числа квазичастиц в элементарных актах трехволнового взаимодействия. Пусть $w(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}'$ есть вероятность распада квазичастицы с импульсом $\hbar\vec{k}$ на две другие с импульсом в интервале $[\hbar\vec{k}', \hbar(\vec{k}' + d\vec{k}')] и $[\hbar(\vec{k} - \vec{k}'), \hbar(\vec{k} - \vec{k}' - d\vec{k}')]$. Согласно принципу детального равновесия [10, § 2], обратный процесс (слияние двух квазичастиц в одну) имеет такую же вероятность. Поэтому изменение числа заполнения $N_{\vec{k}}$ есть$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} = \frac{1}{2} \int w(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' \times \\ \times \{ (N_{\vec{k}} + 1) N_{\vec{k}'} N_{\vec{k}-\vec{k}'} - N_{\vec{k}} (N_{\vec{k}'} + 1) (N_{\vec{k}-\vec{k}'} + 1) \}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Множитель 1/2 появляется по той же причине, что и в (6.22), а комбинации чисел заполнения в правой части (6.32) определяются собственными значениями операторов рождения и уничтожения квазичастиц [5, § 64]. В классическом пределе, когда число квазичастиц велико ($N_{\vec{k}}, N_{\vec{k}'}, N_{\vec{k}-\vec{k}'} \gg 1$), из уравнения (6.32) получается уравнение (6.30), причем вероятность процесса равна

$$w(\vec{k}, \vec{k}') = 2\pi |V_{\vec{k}\vec{k}'}|^2 \delta(\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}-\vec{k}'}),$$

что соответствует общим правилам вычисления вероятностей квантовомеханических процессов [5, § 43].

В отличие от динамических уравнений для амплитуд (6.2), кинетическое уравнение (6.30) уже не обладает свойством обратимости во времени. Так, оно приводит к возрастанию энтропии в газе квазичастиц (см. следующую задачу).

6-11. Доказать закон возрастания энтропии в газе квазичастиц, взаимодействие которых описывается кинетическим уравнением (6.30).

В классическом пределе больших чисел заполнения плотность энтропии Бозе-газа равна [6, § 55] (с точностью до несущественной постоянной)

$S = \int \ln N_{\vec{k}} d\vec{k}$. Отсюда изменение энтропии газа квазичастиц

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{1}{N_{\vec{k}}} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} d\vec{k}. \quad (6.33)$$

При вычислении интеграла (6.33) необходимо учитывать изменение чисел заполнения всех участвующих во взаимодействии квазичастиц. Поэтому (6.33) получим, используя уравнения (6.30) и (6.31),

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int d\vec{k} \frac{dN_{\vec{k}}}{dt} \left(\frac{1}{N_{\vec{k}}} - \frac{1}{N_{\vec{k}'}} - \frac{1}{N_{\vec{k}} - N_{\vec{k}'}} \right) = \\ &= \int d\vec{k} d\vec{k}' |V|^2 \delta(\Delta\omega) \frac{(N_{\vec{k}'} N_{\vec{k}-\vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}'} - N_{\vec{k}} N_{\vec{k}-\vec{k}'})^2}{N_{\vec{k}} N_{\vec{k}'} N_{\vec{k}-\vec{k}'}} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, энтропия такой системы не возрастает только в том случае, если

$$\frac{1}{N_{\vec{k}}} = \frac{1}{N_{\vec{k}'}} + \frac{1}{N_{\vec{k}-\vec{k}'}}. \quad (6.34)$$

Нетрудно увидеть, что такое соотношение соответствует состоянию термодинамического равновесия в газе квазичастиц. Действительно, в классическом пределе равновесным является распределение Рэлея–Джинса, когда $N_{\vec{k}} \sim T/\omega_{\vec{k}}$. В этом случае равенство (6.34) выполняется тождественно вследствие условия (6.1) для частот трех резонансно взаимодействующих волн.

Однако у кинетического уравнения (6.30) могут быть и другие, неравновесные решения. Обычно они соответствуют ситуации, когда в некоторой области частот (или длин волн) квазичастицы возбуждаются каким-либо внешним источником, а в другой области затухают вследствие диссипативных процессов. Поэтому такие неравновесные решения описывают поток энергии по спектру волн из области генерации квазичастиц в область их затухания [2, с. 18].

ЧАСТЬ II

Гидродинамика и теория упругости

§ 7. Динамика идеальной жидкости

Движение идеальной жидкости описывается уравнением сохранения массы жидкости (уравнение непрерывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.1)$$

уравнением движения (уравнение Эйлера)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (7.2)$$

и условием адиабатичности

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0, \quad (7.3)$$

где $\rho(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ — плотность, давление и скорость жидкости, а $s(p, \rho)$ — энтропия единицы массы. В случае стационарного течения из (7.2) и (7.3) следует уравнение Бернулли

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (7.4)$$

т. е. постоянство величины $(v/2 + w)$ вдоль линий тока (w — тепловая функция (энтальпия) единицы массы жидкости). При движении идеальной жидкости сохраняется циркуляция скорости вдоль любого замкнутого «жидкого» контура (теорема Кельвина):

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} d\vec{l} = 0. \quad (7.5)$$

Уравнение движения (7.2) эквивалентно закону сохранения импульса жидкости и может быть записано в «дивергентном» виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (7.6)$$

где $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ — тензор плотности потока импульса в идеальной жидкости. Аналогичным образом закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = -\operatorname{div} \vec{q}, \quad (7.7)$$

где $\vec{q} = \rho \vec{v}(v^2/2 + \varepsilon)$ — вектор плотности потока энергии, ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости.

7-1. Вывести уравнение эволюции вихря скорости $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ в идеальной жидкости. Показать, что завихренность остается «вмороженной» в жидкость при ее течении.

Уравнение Эйлера (7.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = -\vec{\nabla} w,$$

или

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v} \times \vec{\Omega}) = -\vec{\nabla} \left(w + \frac{v^2}{2} \right). \quad (7.8)$$

Взяв ротор от обеих частей этого равенства, получаем что

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}).$$

Так как $\operatorname{div} \vec{\Omega} = 0$, перепишем это уравнение как

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (7.9)$$

Согласно уравнению непрерывности (7.1),

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho,$$

так что (7.9) можно преобразовать как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{\Omega}}{\rho} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v}. \quad (7.10)$$

Рассмотрим теперь некоторый малый элемент длины $\delta \vec{l}$, который перемещается в пространстве вместе с образующими его частицами среды. Если \vec{v} есть скорость среды на одном его конце, то скорость другого есть $\vec{v} + (\delta \vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, поэтому изменение $\delta \vec{l}$ со временем описывается уравнением

$$\frac{d\delta \vec{l}}{dt} = (\delta \vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v},$$

которое совпадает с (7.10) для вектора $\vec{\Omega}/\rho$. Поэтому если эти два вектора имеют одинаковое направление в начальный момент времени, то они будут оставаться параллельными друг другу, а отношение их длин также не будет изменяться со временем. Другими словами если две близкие частицы среды находятся на одной линии векторного поля $\vec{\Omega}$ в некоторый момент времени, они будут оставаться на одной и той же линии завихренности течения $\vec{\Omega}$. Переходя теперь от двух близких частиц к частицам, находящимся на конечном расстоянии друг от друга, можно заключить, что каждая линия векторного поля $\vec{\Omega}$ перемещается вместе со средой, т. е. вектор $\vec{\Omega}$ «вморожен» в среду. Теперь нетрудно увидеть, что теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости в идеальной жидкости есть одно из следствий «вмороженности» вектора $\vec{\Omega}$. Действительно, любой заданный «жидкий» контур при своем движении не пересекает линий ротора скорости, следовательно поток вектора $\vec{\Omega}$ через поверхность, образуемую этим контуром, не меняется. Но, согласно теореме Стокса, поток вектора $\vec{\Omega}$ равен циркуляции вектора скорости вдоль контура.

7-2. Записать уравнение одномерной газодинамики идеальной (без диссипации) среды в лагранжевых координатах.

Лагранжево описание производится в терминах $x(x_0, t)$, $\rho(x_0, t)$ и $p(x_0, t)$, где x_0 — начальное положение элемента (в одномерном случае слоя) среды. Условие сохранения массы в данном случае означает, что $\rho dx = \rho_0 dx_0$, где $\rho_0(x_0)$ — начальное значение плотности. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t = \rho_0(x_0)/\rho(x_0, t). \quad (7.11)$$

Из уравнения движения слоя с толщиной dx

$$\rho dx \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{x_0} = -p(x + dx) + p(x) + \rho dx f(x_0, t),$$

(f — удельная плотность объемных сил), получим

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{x_0} = -\frac{1}{\rho_0(x_0)} \left(\frac{\partial p}{\partial x_0} \right)_t + f(x_0, t). \quad (7.12)$$

Третье уравнение выражает условие сохранения энтропии слоя:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{x_0} = 0, \quad (7.13)$$

где $s(p, \rho)$ — энтропия единицы массы среды.

7-3. В однородной среде с плотностью ρ_0 и равным нулю давлением (пыль) в некоторый момент времени создается неоднородное в пространстве поле скорости $v(x) = v_0 \sin \pi x/l$. Найти возникающее в результате движения распределение плотности пыли $\rho(x, t)$.

Решение удобно провести в лагранжевых координатах, где, в отличие от эйлерова описания, уравнение движения среды оказывается линейным, и легко решается. Действительно, в отсутствие давления и объемных сил ($p = 0, f = 0$) из уравнения (7.12) следует, что каждый слой пыли продолжает свое движение с постоянной скоростью: $(\partial^2 x / \partial t^2)_{x_0} = 0$, т. е.

$$x = x_0 + v(x_0)t = x_0 + v_0 t \sin \pi x_0/l.$$

Тогда для плотности пыли из уравнения (7.11) получим

$$\rho(x_0, t) = \rho_0 / \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_t = \rho_0 / \left(1 + \frac{\pi v_0 t}{l} \cos \frac{\pi x_0}{l} \right). \quad (7.14)$$

Вместе с известной уже зависимостью $x(x_0, t)$ эта формула позволяет определить и распределение плотности $\rho(x, t)$. Принципиально важным моментом здесь является обращение плотности вещества в бесконечность через некоторое время после начала движения. Как видно из (7.11), для этого нужно обращение в нуль производной $(\partial x / \partial x_0)_t$. В данном случае, согласно (7.14), это раньше всего происходит в точке $x_0 = l$ в момент времени $t = t^* = l/\pi v_0$. Это явление называют «опрокидыванием» профиля

скорости, так как в этот момент времени график скорости $v(x, t)$ имеет бесконечно большую производную в точке $x_0 = l$. При $t > t^*$ происходит так называемое «пересечение» траекторий, когда в одной и той же точке пространства оказываются элементы с разными начальными координатами. При этом связь $x(x_0, t)$ перестает быть взаимно однозначной, так что лагранжево описание становится неприменимым.

7-4. *Описать разлет покоящегося в начальный момент равномерно заряженного шарового скопления пыли.*

Обозначим начальную плотность массы пыли через ρ_0 , а плотность заряда — $\alpha\rho_0$ (так что константа α есть заряд единицы массы пыли). Используем здесь лагранжево описание, интересуясь функциями $r(r_0, t)$ и $v(r_0, t)$. Если «опрокидывание» отсутствует (что будет подтверждено полученным далее решением), то остается постоянным полный заряд, заключенный внутри каждой расширяющейся сферической поверхности пыли, $q = q(r_0) = \alpha\rho_0\frac{4}{3}\pi r_0^3$. Тогда уравнение движения запишется так:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right)_{r_0} = f(r_0, t) = \alpha E(r_0, t) = \alpha^2 \rho_0 \frac{4}{3}\pi r_0^3 / r^2.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $r(0) = r_0$ и $\dot{r}(0) = 0$, получим

$$\omega_0 t = \int_1^{r/r_0} dx / \sqrt{1 - 1/x}, \quad (7.15)$$

где величина ω_0 имеет размерность частоты и равна $(8\pi\alpha^2\rho_0/3)^{1/2}$. Это равенство определяет в неявном виде зависимость $r(r_0, t)$, которую, очевидно, можно представить так: $r = r_0 F(\omega_0 t)$. Отсюда сразу следует, например, отсутствие «опрокидывания». Кроме того, это означает, что движение облака имеет характер однородного всестороннего расширения, так что плотность пыли (внутри облака) остается однородной $\rho(t) = \rho_0 / F^3(\omega_0 t)$. При $\omega_0 t \gg 1$ функция F , отметим, имеет очень простой вид: $F(\omega_0 t) \approx \omega_0 t$. Это означает, что когда облако пыли сильно расширилось (по сравнению с исходным своим состоянием), электрические поля стали пренебрежимо слабыми, поэтому каждый шаровой слой продолжает расширяться уже с почти постоянной скоростью $v(r_0) \approx \omega_0 r_0$.

7-5. Найти условие отсутствия опрокидывания в рассмотренном в предыдущей задаче шаровом облаке заряженной пыли, если в начальный момент распределение плотности в нем неоднородно и равно $\rho_0(r_0)$.

Из уравнения движения частиц пыли в общем случае неоднородного облака получается соотношение, обобщающее (7.15):

$$\int_1^{r/r_0} \frac{dx}{\sqrt{1-1/x}} = \omega(r_0)t; \quad (7.16)$$

$$\omega(r_0) = \left(8\pi\alpha^2 \int_0^{r_0} \rho_0(x)x^2 dx \right)^{1/2} / r_0^{3/2}.$$

Отсутствие «опрокидывания» означает положительность производной $(\partial r / \partial r_0)_t$, для которой из (7.16) нетрудно получить такое выражение:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \right)_t = t r_0 \frac{d\omega}{dr_0} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{1/2} + \frac{r}{r_0}.$$

Исключая отсюда t с помощью (7.16), условие отсутствия «опрокидывания» приводим к виду

$$\frac{r_0}{\omega} \frac{d\omega}{dr_0} > - \frac{x / \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{1/2}}{\int_1^x \frac{dz}{(1-1/z)^{1/2}}} \equiv -P(x); \quad x = \frac{r}{r_0}. \quad (7.17)$$

Это неравенство должно выполняться при всех $1 \leq x \leq +\infty$. Задача сводится, таким образом, к нахождению минимума функции $P(x)$ в этом интервале. Входящий в ее определение интеграл выражается через элементарные функции, так что

$$P(x) = \left[1 - \frac{1 + \sqrt{1-1/x} \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})}{x} \right]^{-1}.$$

Функция $P(x) > 0$, причем $P(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1$, и $P(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Асимптотика $P(x)$ при $x \gg 1$ показывает, что там $P(x) < 1$.

Численный анализ позволяет определить, что $\min P(x) \approx 0,93$ (он достигается при $x \approx 8$). Теперь из (7.17) легко найти окончательное условие

$$\rho_0(r_0)r_0^3 > 1,14 \int_0^{r_0} \rho_0(x)x^2 dx. \quad (7.18)$$

Это неравенство должно выполняться для всех r_0 , меньших начального радиуса пылевого облака R_0 .

Пусть, например, начальное распределение плотности по радиусу имеет степенной вид: $\rho_0(r_0) \sim r_0^n$, где $n > -3$, так что полная масса облака конечна. Тогда из (7.18) следует, что «опрокидывание» происходит, если $n < -1,86$.

7-6. В холодной плазме с бесконечно тяжелыми ионами и электронами, имеющими массу m , заряд $(-e)$ и плотность n_0 , в некоторый момент времени создается поле скоростей электронов $v(x) = v_0 \sin \pi x/l$. Определить критическое значение амплитуды скорости v_0 , при превышении которого происходит «опрокидывание» электронного потока.

Единственной силой, действующей на электроны, является электрическая, так что, согласно уравнению (7.12), $(\partial^2 x / \partial t^2)_{x_0} = -eE/m$, где E — электрическое поле, возникающее из-за разделения зарядов при движении электронов. Так как ионы плазмы образуют неподвижный нейтрализующий фон, то смещение слоя электронов с начальной координатой x_0 в новое положение с координатой x приведет к появлению избыточного (на единицу площади слоя) заряда ионов $\sigma = n_0 e(x - x_0)$ с одной стороны слоя и противоположного по знаку заряда с другой стороны (мы здесь пока предполагаем отсутствие «пересечения» электронных траекторий). В результате появится электрическое поле $E = 4\pi\sigma = 4\pi n_0 e(x - x_0)$, и уравнение движения электронов легко интегрируется:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{x_0} = -\frac{eE}{m} = -\omega_p^2(x - x_0); & \omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m, \\ x - x_0 = A \sin \omega_p t + B \cos \omega_p t. \end{cases} \quad (7.19)$$

Постоянные A и B определяются начальными условиями, а именно: $(x - x_0)|_{t=0} = 0$, $\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x_0} |_{t=0} = v_0 \sin \pi x_0/l$. Поэтому из (7.19) получим

$$x(x_0, t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega_p} \sin \frac{\pi x_0}{l} \sin \omega_p t,$$

а степень сжатия слоев будет

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_t^{-1} = \left(1 + \frac{\pi v_0}{\omega_p l} \cos \frac{\pi x_0}{l} \sin \omega_p t\right)^{-1}.$$

Как следует из этого выражения, наиболее «опасным» для «опрокидывания» местом является слой с максимальным градиентом скорости ($x_0 = l$), и в момент времени $t = \pi/2\omega_p$ там произойдет «пересечение» электронных траекторий, т.е. обращение в нуль производной $(\partial x/\partial x_0)_t$, если $|\pi v_0/\omega_p l| > 1$ или $v_0 > v_{кр} = \omega_p l/\pi$.

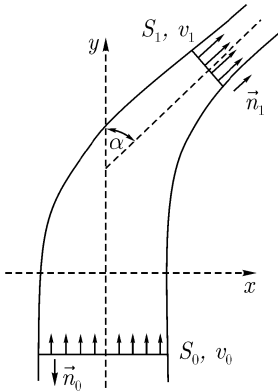


Рис. 7.1. Поворот потока жидкости в трубе

7-7. Стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ поворачивается на угол α трубой переменного сечения и выбрасывается в атмосферу (рис. 7.1). Считая, что в сечениях S_0 и S_1 скорость однородна, причем в сечении S_0 она равна v_0 , определить силу, действующую на изогнутый участок трубы. Атмосферным давлением пренебречь.

Для стационарного течения должен обращаться в нуль полный поток импульса через произвольную замкнутую поверхность $\int \Pi_{ik} dS_k = 0$, где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, определяемый по формуле (7.6), $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$. В качестве такой поверхности выберем боковую поверхность изогнутой части трубы и входной и выходной ее торцы (см. рис. 7.1). Тогда отсутствие полного потока импульса запишется так:

$$n_{0k} S_0 (p_0 \delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k}) + n_{1k} S_1 (p_1 \delta_{ik} + \rho v_{1i} v_{1k}) + \int p \delta_{ik} dS_k = 0. \quad (7.20)$$

Здесь \vec{n}_0 и \vec{n}_1 — единичные векторы нормали на торцевых участках, а оставшийся в левой части (7.20) интеграл берется по боковой поверхности трубы (слагаемое $\rho v_i v_k$ здесь не дает вклада, так как скорость жидкости направлена вдоль боковой поверхности: $v_k dS_k = 0$). Этот интеграл и есть сила, действующая на изогнутую часть трубы, так что $F_i = \int p dS_i = -S_0 p_0 n_{0i} + \rho v_0 S_0 v_{0i} - \rho v_1 S_1 v_{1i}$ (здесь учтено, что давление жидкости на выходе из

трубы $p_1 = 0$). Скорость течения на выходе $v_1 = v_0 S_0 / S_1$, а давление p_0 на входе, необходимое для «проталкивания» жидкости, определяется из уравнения Бернулли. Последнее для несжимаемой жидкости выглядит так: $p + \rho v^2 / 2 = \text{const}$, так что в нашем случае $p_0 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[\frac{S_0^2}{S_1^2} - 1 \right]$ (считается, что $S_0 > S_1$ и $p_0 > 0$). Теперь, введя оси координат указанным на рисунке образом, окончательно получим

$$F_x = -\frac{\rho v_0^2 S_0^2}{S_1} \sin \alpha; \quad F_y = \rho v_0^2 S_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_0^2}{S_1^2} + 1 \right) - \frac{S_0}{S_1} \cos \alpha \right].$$

7-8. Найти закон дисперсии поверхностных волн, распространяющихся вдоль горизонтальной границы раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 и находящихся в поле тяжести \vec{g} . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела равен α .

Предполагая амплитуду таких волн малой, можно считать движение жидкости потенциальным [9, § 9] и решать линеаризованную систему уравнений, учитывающую величины не более первого порядка малости по амплитуде возмущений, вносимых волной. С этой точностью

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \delta p, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (7.21)$$

В отсутствие волн, когда скорость жидкости \vec{v} и возмущение давления в ней δp равны нулю, равновесные давления в жидкостях 1 и 2, p_1 и p_2 , равны $p_1 = -\rho_1 g z + p_0$; $p_2 = -\rho_2 g z + p_0$ (p_0 — давление при $z = 0$). Выберем ориентацию системы координат в плоскости раздела жидкостей ($z = 0$) так (рис. 7.2), чтобы волна распространялась вдоль оси x . Тогда возмущения можно представить в таком виде: $\varphi = f(z) e^{i(kx - \omega t)}$, $\delta p = \Psi(z) e^{i(kx - \omega t)}$, $\xi = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$, где $\xi(x, t)$ — отклонение границы раздела жидкостей от плоскости $z = 0$. Функции $f(z)$ и $\Psi(z)$ будем находить по отдельности в верхней и нижней жидкостях. Потенциал скоростей, как это

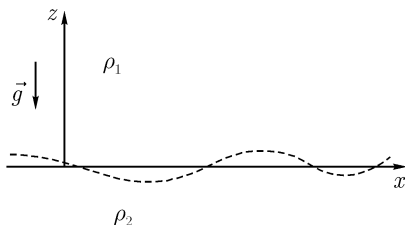


Рис. 7.2. Поверхностные волны в жидкости

следует из (7.21), удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$. Отсюда для $f(z)$ получаем, что $f'' - k^2 f = 0$. Так как нас интересуют поверхностные волны, возмущения от которых должны затухать при удалении от плоскости $z = 0$, то $\varphi_1 = Ae^{-kz}e^{i(kx-\omega t)}$, а $\varphi_2 = Be^{kz}e^{i(kx-\omega t)}$. Константы A и B не являются независимыми, а связаны условием равенства нормальной к границе раздела компоненты скорости обеих жидкостей. Так как сам потенциал скоростей φ уже является величиной первого порядка малости по амплитуде волны, то с нужной нам точностью можно не учитывать отличие границы раздела от плоскости $z = 0$. Поэтому $-\partial\varphi_1/\partial z|_{z=0} = -\partial\varphi_2/\partial z|_{z=0} = = \partial\xi/\partial t$, откуда $B = -A = i\omega\xi_0/k$. Подставив в линеаризованное уравнение движения (7.21) $\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi$, сразу получим, что возмущения давления в жидкостях

$$\begin{aligned}\delta p_1 &= -i\omega\rho_1\varphi_1 = \frac{-\omega^2\rho_1\xi_0e^{-kz}}{k}e^{i(kx-\omega t)}; \\ \delta p_2 &= -i\omega\rho_2\varphi_2 = \frac{\omega^2\rho_2\xi_0e^{kz}}{k}e^{i(kx-\omega t)}.\end{aligned}$$

Для получения закона дисперсии $\omega(k)$ нужно теперь написать граничное условие для разности давлений жидкостей на поверхности их раздела

$$(p_1 + \delta p_1)|_{z=\xi} - (p_2 + \delta p_2)|_{z=\xi} = \alpha/R,$$

где R — радиус кривизны границы раздела, взятый с нужным знаком ($R > 0$ там, где поверхность $z = \xi$ выпукла в сторону второй жидкости). Для малых смещений, когда $k\xi_0 \ll 1$,

$$R^{-1} \approx \partial^2\xi/\partial x^2 = -k^2\xi_0e^{i(kx-\omega t)}.$$

Тогда с точностью до членов первого порядка малости по амплитуде колебаний получим

$$\xi_0e^{i(kx-\omega t)} \left\{ -\rho_1g - \frac{\omega^2\rho_1}{k} + \rho_2g - \frac{\omega^2\rho_2}{k} \right\} = -\alpha k^2\xi_0e^{i(kx-\omega t)},$$

откуда

$$\omega(k) = \left[\frac{gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^3}{(\rho_1 + \rho_2)} \right]^{1/2}. \quad (7.22)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, следующие из этого соотношения:

а) $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \rho$ — свободная поверхность тяжелой жидкости. В этом случае $\omega(k) = \sqrt{gk + \alpha k^3/\rho}$. Для длинных волн, когда $k \ll \sqrt{\rho g/\alpha}$, $\omega \approx \sqrt{gk}$ — это гравитационные волны на поверхности жидкости. В другом предельном случае коротких волн ($k \gg \sqrt{\rho g/\alpha}$) $\omega \approx (\alpha k^3/\rho)^{1/2}$. Такие волны связаны лишь с поверхностным натяжением и называются капиллярными. Если $\rho_1 \neq 0$, но $\rho_1 < \rho_2$ (легкая жидкость находится над тяжелой), качественный вид спектра колебаний границы раздела жидкостей остается прежним.

б) $\rho_1 \neq 0$, причем $\rho_1 > \rho_2$ (тяжелая жидкость находится над легкой). В этом случае граница раздела становится неустойчивой. В отсутствие поверхностного натяжения инкремент неустойчивости $\gamma = i\omega = \sqrt{gk(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}$ — неустойчивость Рэлея–Тейлора. Капиллярность приводит лишь к стабилизации достаточно коротковолновых возмущений, когда $k > k_0 = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)/\alpha}$. Для возмущений с большой длиной волны ($k < k_0$) $\omega^2(k) < 0$, т. е. неустойчивость сохраняется.

7-9. Вычислить энергию и импульс гравитационно-капиллярной волны на свободной поверхности глубокой жидкости.

Согласно решению предыдущей задачи 7-8, вертикальное смещение поверхности жидкости в виде $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ соответствует потенциалу скорости

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{\omega}{k} \xi_0 \sin(kx - \omega t) e^{kz}.$$

Отсюда

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \omega \xi_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \omega \xi_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t),$$

так что кинетическая энергия жидкости, приходящаяся на единицу площади поверхности, равна

$$E_{\text{кин}} = \int_{-\infty}^0 dz \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho \omega^2 \xi_0^2}{4k}.$$

Поскольку для гармонических колебаний средняя по времени потенциальная энергия (в данном случае гравитационная энергия и энергия поверхностного натяжения) равна кинетической, полная энергия волны на единицу

поверхности есть

$$E = 2E_{\text{кин}} = \rho\omega^2\xi_0^2/2k. \quad (7.23)$$

Перейдем теперь к вычислению импульса поверхностной волны. На первый взгляд может показаться, что полный импульс жидкости отсутствует, т. к. среднее по времени значение обеих компонент скорости равно нулю, а плотность жидкости остается неизменной. На самом же деле отличный от нуля полный импульс, направленный вдоль волнового вектора волны (в данном случае вдоль оси x), возникает из-за корреляции между вертикальным смещением поверхности, $\xi(x, t)$, и горизонтальной компонентой скорости, v_x . Последняя положительна для гребешков волны, где $\xi > 0$, и отрицательна для впадин, где $\xi < 0$. В результате, в каждый момент времени несколько большее количество жидкости движется вправо, чем влево, так что полный импульс жидкости оказывается положительной величиной пропорциональной квадрату амплитуды волны ξ_0 .

Для вычисления импульса несжимаемой жидкости удобно ввести функцию потока $\Psi(x, z, t)$, определяемую соотношением

$$\vec{v}(x, z, t) = [\vec{\nabla}\Psi(x, z, t) \times \vec{e}_y],$$

$$v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

В данном случае $\Psi = -\frac{\omega}{k}\xi_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$, так что

$$\begin{aligned} P_x &= \left\langle \int_{-\infty}^{\xi(x, t)} dz \rho v_x \right\rangle = -\rho \left\langle \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial z} dz \right\rangle = \\ &= -\rho \langle \Psi(z = \xi) \rangle = \rho \frac{\omega}{k} \xi_0 \langle e^{k\xi_0 \cos(kx - \omega t)} \cos(kx - \omega t) \rangle \approx \\ &\approx \rho \frac{\omega}{k} \xi_0 \langle [1 + k\xi_0 \cos(kx - \omega t)] \cos(kx - \omega t) \rangle = \rho \xi_0^2/2. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Отметим следующее соотношение между энергией волны (7.23) и ее импульсом (7.24):

$$\vec{P} = \frac{\vec{k}}{\omega} E. \quad (7.25)$$

7-10. Исследовать неустойчивость Рэлея–Гэйлора при конечной толщине переходного слоя между легкой и тяжелой жидкостью, когда рас-

пределение плотности жидкости с высотой имеет следующий вид:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 = e\rho_2, & z \geq h, \\ \rho_2 e^{z/h}, & 0 \leq z \leq h, \\ \rho_2, & z \leq 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Ввиду симметрии задачи, зависимость возмущенных величин $(\delta\rho, \delta p, \vec{v})$ от координат и времени может быть выбрана в виде $f(z)e^{ikx+\gamma t}$. Тогда из условия несжимаемости жидкости, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, следует, что

$$ikv_x + \frac{dv_z}{dz} = 0, \quad \text{т. е.} \quad v_x = \frac{i}{k} \frac{dv_z}{dz}. \quad (7.27)$$

Далее, из линеаризованного уравнения непрерывности,

$$\frac{d}{dt}(\rho + \delta\rho) \approx \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + v_z \frac{d\rho}{dz} = 0, \quad (7.28)$$

так что

$$\delta\rho = -\frac{v_z}{\gamma} \frac{d\rho}{dz}. \quad (7.29)$$

Линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \delta p + \vec{g} \delta\rho. \quad (7.30)$$

Его x -компонента есть

$$\gamma\rho v_x = -ik\delta p, \quad \text{т. е.} \quad \delta p = i\gamma\rho v_x/k = -\frac{\gamma\rho}{k^2} \frac{dv_z}{dz}.$$

Подставляя теперь это выражение для δp , вместе с формулой (7.29) для $\delta\rho$, в z -компоненту (7.30), получаем следующее уравнение для вертикальной составляющей скорости v_z :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dv_z}{dz} \right) + \left(\frac{gk^2}{\gamma^2} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - k^2 \right) v_z = 0.$$

Его можно записать в более удобном виде, введя новую неизвестную функцию $q(z) = \rho^{1/2}(z)v_z$, так что

$$\frac{d^2 q}{dz^2} - k^2 \left[1 - \frac{g}{\gamma^2} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{k^2} \frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{d^2}{dz^2} (\rho^{1/2}) \right] q = 0. \quad (7.31)$$

Для профиля плотности (7.26) решение (7.31), удовлетворяющее условию затухания возмущений вдали от границы раздела, имеет вид

$$q(z) = \begin{cases} A_3 e^{-kz}, & z \geq h, \\ A_2 e^{\varkappa z} + B_2 e^{-\varkappa z}, & 0 \leq z \leq h, \\ A_1 e^{kz}, & z \leq 0, \end{cases} \quad (7.32)$$

где $\varkappa^2 = k^2 \left(1 - \frac{g}{\gamma^2 h} + \frac{1}{4k^2 h^2} \right)$, а постоянные A_2 , B_2 и A_3 находятся из условия сшивки решений в точках $z = 0$ и $z = h$. Последние условия состоят в непрерывности $q(z)$, в то время как производная dq/dz в этих точках терпит разрыв, величина которого находится путем интегрирования (7.31) по малому интервалу вблизи $z = 0, h$. Действительно, выполняя такое интегрирование вдоль промежутка $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$, получим

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{d^2 q}{dz^2} dz - \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} q \frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{d^2}{dz^2} (\rho^{1/2}) dz = 0,$$

откуда

$$\left. \frac{dq}{dz} \right|_{0+\varepsilon} - \left. \frac{dq}{dz} \right|_{0-\varepsilon} = \frac{q(0)}{\sqrt{\rho(0)}} \frac{d\rho^{1/2}}{dz} \Big|_{0+\varepsilon} = \frac{q(0)}{2h} = \frac{A_1}{2h}.$$

Аналогично,

$$\left. \frac{dq}{dz} \right|_{h+\varepsilon} - \left. \frac{dq}{dz} \right|_{h-\varepsilon} = -\frac{q(h)}{\sqrt{\rho(h)}} \frac{d\rho^{1/2}}{dz} \Big|_{h-\varepsilon} = -\frac{q(h)}{2h} = -\frac{A_3 e^{-kh}}{2h}.$$

В результате, условия сшивки решений (7.32) выглядят так:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 + B_2, \\ \varkappa(A_2 - B_2) - kA_1 &= A_1/2h, \\ A_2 e^{\varkappa h} + B_2 e^{-\varkappa h} &= A_3 e^{-kh}, \\ -kA_3 e^{-kh} - \varkappa A_2 e^{\varkappa h} + \varkappa B_2 e^{-\varkappa h} &= -\frac{A_3 e^{-kh}}{2h}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A_2 = A_1 \frac{(k + \varkappa + 1/2h)}{2\varkappa}, \quad B_2 = A_1 \frac{(\varkappa - k - 1/2h)}{2\varkappa},$$

а дисперсионное уравнение, определяющее инкремент неустойчивости γ , имеет вид

$$e^{2\kappa h} = [(4h^2)^{-1} - (k - \kappa)^2] / [(4h^2)^{-1} - (k + \kappa)^2].$$

После простых преобразований его можно записать как

$$\frac{\text{th}(\kappa h)}{\kappa h} = \frac{2kh}{\left(\frac{1}{4} - k^2 h^2 - \kappa^2 h^2\right)}. \quad (7.33)$$

Исследование дисперсионного уравнения (7.33) зависит от знака параметра κ^2 , введенного в (7.32). Рассмотрим сначала случай $\kappa^2 > 0$, построив (см. рис. 7.3) графики функций $f_1(\kappa h)$ и $f_2(\kappa h)$, представляющих, соответственно, левую и правую части (7.33). Как видно из этих графиков, искомого решения $f_1(\kappa h) = f_2(\kappa h)$ существует только если $f_2(0) = 2kh / \left(\frac{1}{4} - k^2 h^2\right) \leq 1$, т. е. $kh \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) \approx 0,12$. Для длинноволновых возмущений, когда $kh \ll 1$ и, следовательно, $f_2(0) \ll 1$, точка пересечения кривых f_1 и f_2 близка к $\kappa h \approx \frac{1}{2}$. Положив поэтому $\kappa h = \frac{1}{2} - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, находим из (7.33) что $\varepsilon \approx kh / \text{th}\left(\frac{1}{2}\right)$. Отсюда, согласно определению κ в (7.32), инкремент неустойчивости равен в этом случае

$$\gamma^2 \approx \frac{gk^2 h}{\varepsilon} = gk \text{th}\left(\frac{1}{2}\right) = gk \frac{e-1}{e+1} = gk \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (7.34)$$

т. е. совпадает с результатом, полученным в задаче 7-8 для модели резкой границы раздела жидкостей. Когда же длина волны возмущений становится сравнимой с толщиной переходного слоя, т. е. при $kh \sim 1$, инкремент неустойчивости становится порядка $(g/h)^{1/2}$. Для случая $\kappa^2 < 0$ дисперсионное уравнение (7.33) можно переписать в виде

$$\frac{\text{tg}(\alpha h)}{\alpha h} = \frac{2kh}{\left(\frac{1}{4} - k^2 h^2 + \alpha^2 h^2\right)}, \quad (7.35)$$

где $\alpha = i\kappa$. Графики функций $f_1(\alpha h)$ и $f_2(\alpha h)$, представляющих, соответственно, левую и правую часть (7.35), изображены на рис. 7.4.

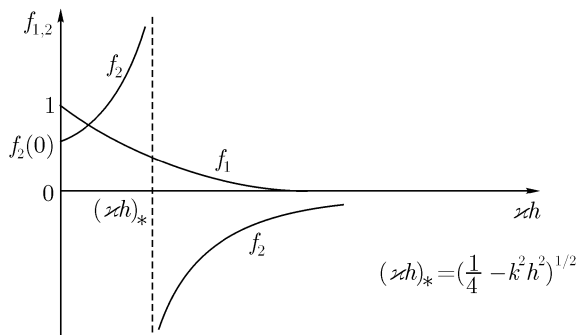


Рис. 7.3. Решение дисперсионного уравнения

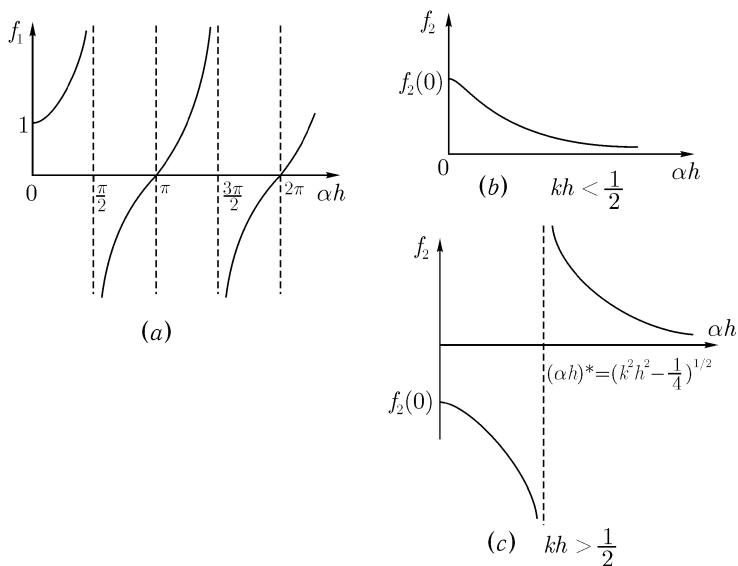


Рис. 7.4. Решение дисперсионного уравнения

Как видно из этих графиков, при заданной длине волны возмущений, т. е. при заданном значении параметра kh , функции f_1 и f_2 имеют дискретный ряд точек пересечения. Это означает, что в случае размытой границы

раздела жидкостей заданной длине волны соответствует не одна (как в случае резкой границы), а бесконечное множество собственных мод, каждая из которых имеет свой собственный инкремент нарастания. Рассмотрим сначала случай длинноволновых возмущений ($kh \ll 1$). Так как при этом $f_2(0) \approx 8kh \ll 1$ [рис. 7.4 (b)], то точки пересечения графиков f_1 и f_2 близки к $(\alpha h)_n \approx n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. Так как $\alpha^2 = -\kappa^2$, то из определения последнего в (7.32) следует, что соответствующий инкремент неустойчивости

$$\gamma_n \approx (gk)^{1/2} \cdot \left[kh / \left(\frac{1}{4} + n^2 \pi^2 \right) \right]^{1/2} \ll (gk)^{1/2},$$

что значительно меньше инкремента «основной» моды (см. (7.34)), который в этом пределе не зависит от толщины h переходного слоя.

В противоположном пределе коротковолновых возмущений, $kh \gg 1$, $f_2(0) \approx -2/kh \ll 1$, так что первый корень уравнения $f_1(\alpha h) = f_2(\alpha h)$ снова равен $(\alpha h)_1 \approx \pi$, что соответствует инкременту неустойчивости $\gamma_1 \approx (g/h)^{1/2}$. Инкремент роста более высоких мод, $n = 2, 3, \dots$, того же порядка, но постепенно уменьшается с ростом n . Таким образом, модель резкой границы раздела жидкостей, рассмотренная в задаче 7-8, адекватно описывает эволюцию длинноволновых ($kh \ll 1$) возмущений нарастающих во времени с инкрементом $\gamma \sim (gk)^{1/2}$. Когда же длина волны возмущений становится порядка толщины переходного слоя ($kh \sim 1$), поведение возмущений становится зависящим от детальной структуры границы. Это приводит к «насыщению» инкремента неустойчивости на уровне $\gamma \sim (g/h)^{1/2}$ для возмущений с $kh > 1$.

7-11. По поверхности жидкости распространяется квазимонохроматический пакет гравитационных поверхностных волн, содержащий N ($N \gg 1$) горбов и впадин (рис. 7.5). Сколько колебаний «вверх-вниз» совершит находящийся на поверхности легкий поплавок при прохождении этого волнового пакета?

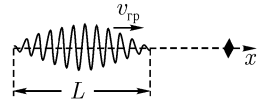


Рис. 7.5. Движение цуга гравитационных волн

Для такого цуга гравитационных волн возмущение поверхности жидкости можно представить в виде $\xi(x, t) = F(x - v_{\Gamma}t) \cos(kx - \omega t)$, где $F(x, t)$ — огибающая волнового пакета (см. задачу 4-4). Полная длина пакета $L = N\lambda = \pi N/k$. Так как пакет перемещается с групповой скоростью v_{Γ} , то поплавок будет совершать колебания в течение промежутка времени $\tau = L/v_{\Gamma} = 2\pi N/kv_{\Gamma}$. Для рассматри-

ваемого квазимонохроматического пакета период колебаний поверхности жидкости $T = 2\pi/\omega(k)$, поэтому число колебаний поплавок $n = \tau/T = 2\pi N\omega(k)/2\pi kv_\Gamma = N\omega(k)/kv_\Gamma = Nv_\Phi/v_\Gamma$.

Закон дисперсии гравитационных волн $\omega(k) = \sqrt{gk}$, так что их групповая скорость $v_\Gamma = \partial\omega/\partial k = \frac{1}{2}\omega/k$ равна половине фазовой скорости. Следовательно, поплавок совершит $2N$ колебаний.

7-12. При возмущении поверхности находящейся в поле тяжести жидкости мгновенным точечным источником (брошенным камешком) от места возмущения начинают расходиться в виде кругов гравитационные волны. При этом вертикальные смещения поверхности жидкости представляют собой последовательность чередующихся гребешков и впадин, заполняющих расширяющийся со временем круг радиусом $R(t)$. Найти временную зависимость $R(t)$.

Гребешки и впадины представляют собой линии (в данном случае окружности) постоянной фазы колебаний, причем разность фаз между соседними гребешками и впадинами равна π . Поэтому для определения $R(t)$ рассмотрим, как меняется фаза гравитационных волн в фиксированный момент времени t в зависимости от расстояния до источника r . Созданные источником возмущения распространяются с групповой скоростью $v_\Gamma = d\omega/dk$, так что в момент времени t в точке r будут находиться возмущения с таким волновым k , для которого $v_\Gamma(k) = r/t$. Отсюда следует, что $k(r, t) = gt^2/4r^2$. Фаза колебаний $\varphi(r, t) = \omega t - kr = gt^2/4r$. Из этого выражения видно, что в заданный момент времени t фаза колебаний сильно изменяется при малых r , так что там существует множество близко расположенных гребешков и впадин. С увеличением радиуса фаза меняется все более медленно. При $r \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow 0$, а при $r \sim r_1 \sim gt^2\varphi(r_1) \sim \pi$. Это означает, что набег фазы колебаний при изменении r от $r \sim r_1$ до $r = \infty$ будет порядка π . Поэтому здесь уже нет чередования гребешков и впадин. Таким образом, $R(t) \sim r_1 \sim gt^2$.

7-13. Найти форму линий, образуемых гребешками гравитационных волн при движении точечного источника с постоянной скоростью по поверхности жидкости («клин Кельвина»).

Образующаяся картина представляет собой суперпозицию возмущений, создаваемых источником в каждой точке своей траектории и распространяющихся затем по поверхности жидкости. При этом результирующая амплитуда смещений поверхности будет заметной только там, где отдельные возмущения не гасят друг друга, а складываются в одной фазе. Поэтому

интересующая нас линия гребешков (или впадин) есть линия постоянной фазы.

Рассмотрим теперь «элементарный акт» сложения двух близких круговых волн с одинаковой фазой, испущенных с интервалом времени Δt . Пусть в начальный момент ($t = 0$) источник находится в начале координат, а его скорость направлена вдоль оси x и равна $-v_0$. Тогда центр второй волны смещен относительно центра первой влево на расстояние $v_0 \Delta t$ (рис. 7.6), а радиус второй волны меньше радиуса первой на величину $v_\phi \Delta t$ (так как линия постоянной

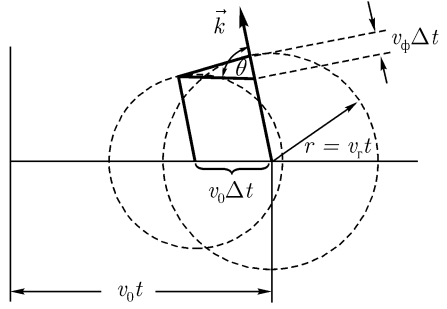


Рис. 7.6. Сложение возмущений от круговых волн

фазы перемещается именно с фазовой скоростью v_ϕ). Сложение волн с одинаковой фазой происходит на касательной к этим окружностям, поэтому волновой вектор \vec{k} здесь направлен так, что $\cos \theta = -k_x/k = v_\phi/v_0$, т.е. выполняется хорошо известное условие черенковского резонанса. Усложнение простой картины в данном случае связано лишь с тем, что гравитационные волны обладают дисперсией (их фазовая скорость зависит от длины волны). Поэтому в разных точках гребней будут складываться волны с разной длиной волны и угол θ уже не будет постоянным на линии одного гребешка. В момент времени t радиус r будет иметь волна, для которой $r = v_r t = \frac{1}{2} v_\phi t = \frac{v_0 t}{2} \cos \theta$. Поместив начало координат в текущее наложение движущегося источника, координаты этой точки примут вид $y = r \sin \theta$, $x = v_0 t - r \cos \theta$, а фаза волны в ней, согласно предыдущей задаче, равна $\varphi = gt^2/4r$. Тогда удобно выразить координаты точки сложения волн через фазу φ и угол θ , образуемый волновым вектором в этой точке с осью x :

$$\begin{cases} x = v_0 t - r \cos \theta = \frac{v_0^2 \varphi}{g} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta), \\ y = r \sin \theta = \frac{v_0^2 \varphi}{g} \sin \theta \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (7.36)$$

Так как на линии гребня фаза постоянна, то соотношения (7.36) задают в параметрическом виде форму этой линии. Ее вид показан на рис. 7.7, где

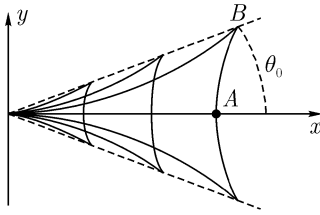


Рис. 7.7. Форма «клина Кельвина» для гравитационных волн

угол θ меняется в интервале $(0, \pi/2)$. Расходящийся от тела след соответствует углам θ , близким к $\pi/2$, т. е. волнам с очень малой фазовой скоростью ($v_\phi \ll v_0$, коротковолновые возмущения). Наоборот, за телом (в точке A) $\theta = 0$, так что здесь $v_\phi = v_0$, и для этой волны $k = g/v_0^2$. Все линии гребня (и впадин) подобны друг другу, так как отличаются лишь изменением фазы на 2π . При этом все они находятся внутри угла θ_0 . Значение θ_0 легко определить из условия, что в соответствующей точке (точка B на рис. 7.7) x и y принимают максимальные значения. Используя (7.36), получаем $\sin \theta_B = 1/\sqrt{3}$, так что $\tan \theta_0 = y_{\max}/x_{\max} = \sin \theta_B \cos \theta_B / (2 - \cos^2 \theta_B) = 1/2\sqrt{2}$. Отсюда $\theta_0 \approx 19,5^\circ$.

7-14. Найти условие устойчивости границы раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей, находящихся в поле тяжести \vec{g} , если верхняя среда значительно легче нижней ($\rho_1 \ll \rho_2$) и движется в горизонтальном направлении со скоростью V_0 (модель «ветра над океаном»). Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела равен α .

В отсутствие «ветра» (при $V_0 = 0$) отклонения границы раздела от горизонтальной плоскости представляет собой гравитационно-капиллярные волны с законом дисперсии $\omega(k) = \sqrt{gk + \alpha k^3/\rho}$ (см. задачу 7-8). В данном случае нас интересует неустойчивость этих волн, возбуждаемых «ветром». Пусть скорость V_0 направлена вдоль оси x . Тогда, считая движение обеих жидкостей потенциальным, для верхней из них в линейном приближении получим (используя результаты и обозначения задачи 7-8)

$$\begin{cases} \varphi_1 = A e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)}; \\ \rho_1 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) = -\vec{\nabla} \delta p_1, \quad \text{т. е.} \quad \delta p_1 = -i(\omega - kV_0) \rho_1 \varphi_1. \end{cases} \quad (7.37)$$

Здесь рассматриваются самые неустойчивые возмущения, которые распространяются в направлении течения верхней жидкости, т. е. вдоль оси x . При $z < 0$ решение остается прежним: $\varphi_2 = B e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}$, $\delta p_2 = -i\omega \rho_2 \varphi_2$. Если вертикальное смещение поверхности раздела $\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$, то теперь, учитывая исходное течение верхней жидкости, условие равенства нормальных компонент скорости обеих жидкостей на границе их раздела

принимает вид

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} - V_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

откуда для констант A и B находим

$$A = \frac{-i(\omega - kV_0)}{k} \xi_0; \quad B = \frac{i\omega}{k} \xi_0.$$

Записывая разность давлений на границе $(p_1 + \delta p_1)|_{z=\xi} - (p_2 + \delta p_2)|_{z=\xi} = \alpha/R$, получим следующее дисперсионное уравнение для частоты возмущений $\omega(k)$: $\omega^2 - 2\varepsilon k V_0 \omega - (gk + \alpha k^3/\rho_2 - \varepsilon k^2 V_0^2) = 0$, где $\varepsilon \equiv \rho_1/\rho_2 \ll 1$. Его решение: $\omega_{1,2} \approx \varepsilon k V_0 \pm \sqrt{gk + \alpha k^3/\rho_2 - \varepsilon k^2 V_0^2}$. Неустойчивость появляется при $Im \omega > 0$. Отсюда следует, что возмущение с заданным волновым вектором k становится неустойчивым, если $V_0 > \varepsilon^{-1/2}(g/k + \alpha k/\rho_2)^{1/2}$. Правая часть этого неравенства зависит от k и имеет минимум при $k = k_0 = (g\rho_2/\alpha)^{1/2}$, так что возмущения с такой длиной волны являются самыми неустойчивыми, и им соответствует критическая скорость ветра $V_{кр} = \varepsilon^{-1/2}u_0$, где $u_0 = (4\alpha g/\rho_2)^{1/4}$. Отсюда, в частности, следует, что в отсутствие поля тяжести ($g = 0$) или поверхностного натяжения ($\alpha = 0$) граница раздела таких жидкостей всегда неустойчива ($u_0 = 0$). Это частный случай неустойчивости тангенциального разрыва.

В рассмотренной выше модели, предполагающей резкий разрыв скоростей сред 1 и 2, критическая скорость, при которой граница раздела становится неустойчивой, пропорциональна $(\rho_2/\rho_1)^{1/2}$, т. е. возрастает с уменьшением ρ_1 . Так, например, для границы вода-воздух, когда $\rho_2/\rho_1 \approx 834$, вычисленная таким образом критическая скорость составляет примерно 7 м/сек. Это существенно превышает наблюдаемую скорость ветра, необходимую для возбуждения волн на поверхности воды. Поэтому такая неустойчивость не может объяснить генерацию ветровых волн.

Как будет показано в следующей задаче (7-15), действительный механизм связан с резонансным взаимодействием поверхностных волн с ветровым потоком, которое приводит к генерации волн при гораздо меньших скоростях ветра.

7-15. Рассмотреть резонансное взаимодействие ветрового потока с волнами на поверхности воды.

Присутствие сколь угодно малой вязкости приводит к размытию тангенциального разрыва скорости, так что скорость воздушного потока, $V(z)$,

есть плавная функция высоты z , возрастающая от нуля непосредственно у поверхности воды ($z = 0$) до некоторого максимального значения V_0 , которое и будем называть в дальнейшем скоростью ветра. Существенным отличием такого течения от модели тангенциального разрыва (задача 7-14) является непотенциальность поля скоростей воздуха, так что вихрь скорости $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} \neq 0$. Будучи «вмороженной» в среду (см. задачу 7-1), завихренность скорости играет важную роль во взаимодействии ветрового потока с поверхностной волной.

В присутствии поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси x , скорость воздуха можно представить в виде

$$\vec{v}(x, z, t) = V(z)\vec{e}_x + \vec{u}(z)\sin(kx - \omega t), \quad (7.38)$$

где второе слагаемое в правой части (7.38) описывает возмущение, вызванное волной. Для такого двумерного несжимаемого потока воздуха вихрь скорости имеет только компоненту $\Omega_y = \Omega(x, z, t)$, для которого из (7.10) следует, что

$$\frac{d\Omega}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\Omega = \frac{d\Omega}{dt} = 0. \quad (7.39)$$

Вычислим теперь изменение полного импульса воздушного потока в x -направлении, связанные с его взаимодействием с поверхностной волной. Для этого запишем уравнение Эйлера (7.2) в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = [\vec{v} \times \vec{\Omega}] - \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right). \quad (7.40)$$

Тогда

$$\frac{dP_x}{dt} = \int_0^\infty dz \rho \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial t} \right\rangle,$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по длине волны вдоль оси x . Учитывая, что второе слагаемое в правой части (7.40), будучи градиентом от периодической функции, обращается при усреднении в нуль, получаем, что

$$\frac{dP_x}{dt} = \int_0^\infty dz \rho \langle [\vec{v} \times \vec{\Omega}]_x \rangle = -\rho \int_0^\infty dz \langle v_z \Omega \rangle. \quad (7.41)$$

Так как, согласно (7.38), $\langle v_z \rangle = 0$, то при вычислении (7.41) необходимо учитывать вариации завихрения потока $\Omega(x, z)$. Поскольку величина Ω сохраняется не локально, а переносится вместе с элементом воздуха (см. (7.39)),

для нахождения ее локальных вариаций удобно рассмотреть траекторию отдельного элемента воздуха. Пусть в начальный момент ($t = 0$) такой элемент находился в точке ($x = x_0, z = z_0$). Исходный горизонтальный поток воздуха, $V(z)$, приводит к смещению этого элемента вдоль оси x как

$$x(t) = x_0 + V(z_0)t.$$

В свою очередь, под действием поверхностной волны элемент приобретает и вертикальную составляющую скорости. Согласно (7.38),

$$\dot{z} = u_z(z_0) \sin\{k[x_0 + V(z_0)t] - \omega t\} = u_z(z_0) \sin\{kx_0 - [\omega - kV(z_0)]t\}.$$

Эта скорость вызывает вертикальное смещение $\Delta z(t)$, так что высота элемента меняется во времени как

$$z = z_0 + \Delta z = z_0 + \frac{u_z(z_0)}{[\omega - kV(z_0)]} \{\cos[kx_0 - (\omega - kV(z_0))t] - \cos kx_0\}. \quad (7.42)$$

Вертикальные смещения элементов воздуха приводят к локальным изменениям завихренности, т. к. частицы воздуха с различной начальной высотой приносят с собой свою «собственную» завихренность $\Omega_0 = V'(z_0)$ определяемую профилем скорости исходного воздушного потока $V(z)$. Используя (7.42), получаем, что

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \Omega_0(z_0) = V'(z - \Delta z) \approx V'(z) - V''(z)\Delta z = \\ &= V'(z) - V''(z) \frac{u_z(z)}{[\omega - kV(z)]} \{\cos[kx_0 - (kV(z))t] - \cos kx_0\}, \end{aligned}$$

и подынтегральное выражение в (7.41) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle v_z \Omega \rangle &= -V''(z) \frac{u_z^2(z)}{[\omega - kV(z)]} \langle \sin[kx_0 - (\omega - kV(z))t] \times \\ &\quad \times \{\cos[kx_0 - (\omega - kV(z))t] - \cos kx_0\} \rangle. \end{aligned}$$

Усреднив полученное выражение по x_0 (используя, что $\langle \sin^2 kx_0 \rangle = \langle \cos^2 kx_0 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \sin kx_0 \cdot \cos kx_0 \rangle = 0$), и подставив полученный результат в (7.41), находим следующее выражение для изменения импульса

воздушного потока, отнесенного на единицу площади поверхности раздела:

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{\rho}{2} \int_0^{\infty} dz u_z^2(z) V''(z) \frac{\sin[\omega - kV(z)]t}{[\omega - kV(z)]}. \quad (7.43)$$

Хотя формально интегрирование в (7.43) производится по всему полупространству $z > 0$ занимаемому воздухом, основной вклад в изменение импульса обязан узкому слою вблизи точки $z = z_p$, где выполняется условие резонанса:

$$\omega - kV(z_p) = 0, \quad (7.44)$$

аналогичное условию резонанса Ландау в плазме (см. задачу 2-18). Это связано с тем, что функция

$$F(z) = \frac{\sin[\omega - kV(z)]t}{[\omega - kV(z)]},$$

входящая в интеграл (7.43), имеет резкий максимум в точке $z = z_p$, причем высота максимума увеличивается с течением времени ($F_{\max} \sim t$), а ширина уменьшается ($\Delta z \sim t^{-1}$). Поэтому после нескольких периодов волны эта функция может быть заменена дельта-функцией:

$$F(z) \approx \pi \delta[\omega - kV(z)] = \frac{\pi}{k|V'z_p|} \delta(z - z_p),$$

в результате чего выражение (7.43) приобретает вид

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{\pi \rho}{2k} \frac{u_z^2(z_p)}{|V'z_p|} V''(z_p). \quad (7.45)$$

Отсюда следует, что при $V''(z_p) < 0$, $dP_x/dt < 0$, так что импульс воздушного потока передается поверхностной волне, приводя к росту ее амплитуды. Если же $V''(z_p) > 0$, то передача импульса происходит в обратном направлении, и волна затухает. Поэтому, на первый взгляд может показаться, что вопрос о том, возбуждает ли ветер волны, или, наоборот, приводит к их затуханию, есть дело случая, зависящего от деталей профиля $V(z)$ воздушного потока. На самом деле, однако, практически всегда ветер генерирует поверхностные волны. Связано это с тем, что уже при очень малых

скоростях ветровой поток становится турбулентным. Поэтому в выражении (7.45) для передачи импульса под $V(z)$ в этом случае надо понимать скорость ветрового потока, усредненную по турбулентным пульсациям. Как известно [9, § 42], такая средняя скорость имеет логарифмический профиль: $V(z) \sim \log z$, так что $V''(z_p) < 0$. Таким образом, ветровой поток приводит к генерации поверхностных волн при выполнении условия резонанса (7.44). Для последнего достаточно, чтобы скорость ветра V_0 превышала фазовую скорость волны. Так как фазовая скорость гравитационно-капиллярных волн имеет минимум $u_0 = (4\alpha g / \rho_w)^{1/4} \approx 0,23$ м/сек при длине волны $\lambda \approx 1,7$ см, то, в принципе, уже скорости ветра $V_0 > 0,23$ м/сек достаточно для возбуждения волн. Подчеркнем, что эта критическая скорость ветра вообще не зависит от плотности воздуха ρ_a . Последняя определяет лишь темп передачи импульса и, следовательно, скорость нарастания поверхностных волн. Инкремент этой неустойчивости можно оценить, сравнивая выражение (7.45) для изменения импульса воздушного потока, и формулу (7.24) для импульса поверхностной волны. При логарифмическом профиле скорости $V'(z_p) \sim V_0/z_p$, а $V''(z_p) \sim V_0/z_p^2$. Так как возмущение воздушного потока, вызванное поверхностной волной, затухает как $\exp(-kz)$ при удалении от поверхности воды, то генерация волн ветром эффективна только при $kz_p \lesssim 1$ (иначе скорость $u_z(z_p)$, входящая в выражение (7.45), экспоненциально мала). Считая $kz_p \sim 1$, $u_z(z_p)$ можно оценить как $\omega \xi_0$, где ξ_0 есть амплитуда вертикального смещения поверхности воды. Отсюда

$$\frac{dP_x}{dt} \sim \frac{\rho_a}{k} \frac{\omega^2 \xi_0^2}{z_p} \sim \rho_a \omega^2 \xi_0^2.$$

С другой стороны, импульс волны $P_x \sim \rho_w \omega \xi_0^2$, следовательно, инкремент неустойчивости

$$\gamma \sim \frac{1}{P_x} \frac{dP_x}{dt} \sim \omega \frac{\rho_a}{\rho_w} \sim 10^{-3} \omega.$$

Таким образом, время нарастания волны из-за ее резонансного взаимодействия с ветровым потоком составляет примерно сотню волновых периодов $T = 2\pi/\omega$.

7-16. Вычислить силу, действующую на шар радиусом a , движущийся в несжимаемой идеальной жидкости, считая обтекание шара жидкостью потенциальным.

Пусть движение шара задано так, что координаты его центра есть $\vec{R}(t)$. Так как движение жидкости потенциально, то $\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi$, и условие несжи-

маемости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ дает для потенциала уравнение $\Delta\varphi = 0$. Его нужно решить с граничным условием $v_n|_S = -\partial\varphi/\partial n|_S = (\dot{\vec{R}} \cdot \vec{n})$, где $v_n|_S$ — нормальная составляющая скорости жидкости на поверхности шара, $\dot{\vec{R}}$ — скорость шара, а \vec{n} — единичный вектор нормали к его поверхности. Из соображений симметрии следует, что нужное здесь решение уравнения Лапласа для φ должно иметь дипольный вид:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{\alpha \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} = \frac{\alpha \dot{\vec{R}} \cdot \vec{\rho}}{\rho^3}; & \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}; \\ \vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{\alpha}{\rho^3} \left\{ -\dot{\vec{R}} + 3\vec{n}(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{n}) \right\}; & \vec{n} = \vec{\rho}/\rho. \end{cases} \quad (7.46)$$

Из граничного условия для скорости жидкости $(\vec{v} \cdot \vec{n})|_{\rho=a} = (\dot{\vec{R}} \cdot \vec{n})$ находим, что коэффициент $\alpha = a^3/2$.

Действующая на шар сила определяется распределением давления в жидкости вокруг шара:

$$\vec{F}_ж = - \int p d\vec{S} \quad (7.47)$$

(знак минус связан с тем, что элемент поверхности шара $d\vec{S}$ мы будем считать направленным по внешней нормали к шару). При найденном уже поле скорости жидкости (7.46) давление в ней определяется из уравнения движения:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p. \quad (7.48)$$

Так как $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} - [\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}]$, то для потенциального обтекания, когда $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, из (7.48) получим, что

$$p = p_0 - \rho_0 \frac{v^2}{2} + \rho_0 \partial\varphi/\partial t, \quad (7.49)$$

где p_0 — давление в покоящейся на бесконечности жидкости. Поскольку

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\alpha \ddot{\vec{R}} \cdot \vec{\rho}}{\rho^3} + \frac{3\alpha(\dot{\vec{R}}\vec{\rho})^2}{\rho^5} - \frac{\alpha(\ddot{\vec{R}})^2}{\rho^3}, \quad \text{а} \quad v^2 = \frac{\alpha^2}{\rho^6} \{(\dot{\vec{R}})^2 + 3(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{n})^2\},$$

то нетрудно убедиться в том, что в интеграл (7.47), определяющий силу, действующую на шар, отличный от нуля вклад даст лишь слагаемое в p ,

содержащее ускорение шара $\ddot{\vec{R}}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_ж &= - \int p d\vec{S} = - \frac{\alpha \rho_0}{a^2} \int (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{R}}) d\vec{S} = - \frac{\alpha \rho_0}{2} \int (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{R}}) \vec{n} dS = \\ &= - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_0 \ddot{\vec{R}}. \quad (7.50)\end{aligned}$$

Таким образом, при потенциальном обтекании действующая со стороны жидкости на шар сила не зависит от его скорости и определяется лишь ускорением шара. Если шар движется в жидкости под действием какой-либо сторонней силы $\vec{F}_{ст}$, то уравнение его движения можно записать так:

$$m_{ш} \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ст} + \vec{F}_ж,$$

или, с учетом (7.50), $(m_{ш} + \tilde{m}_{пр}) \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ст}$, где $\tilde{m}_{пр} = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_0$ — так называемая присоединенная масса.

7-17. Найти силу сопротивления для общего случая движения произвольного тела в идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть в некоторый момент времени скорость тела равна \vec{u} , а скорость движения обтекающей его жидкости есть $\vec{v}(\vec{r})$. Отличная от нуля сила сопротивления \vec{F} означает, что жидкости передается мощность равная $-\vec{F} \cdot \vec{u}$. Поскольку жидкость предполагается идеальной, в ней отсутствует диссипация энергии, а несжимаемость жидкости означает постоянство ее внутренней энергии, а также отсутствие излучения звуковых волн (см. § 10). Поэтому затрачиваемая мощность может быть связана только с изменением полной кинетической энергии жидкости $E_{кин} = \frac{\rho_0}{2} \int v^2 dV$, а именно

$$\frac{dE_{кин}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (7.51)$$

При этом оказывается, что искомая кинетическая энергия универсальным образом связана с асимптотическим поведением поля скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ на больших расстояниях от обтекаемого тела. Действительно, движение идеальной несжимаемой жидкости является потенциальным, $\vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi$, где потенциал скорости φ является решением уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Так как вдали от тела скорость жидкости стремится к нулю, общий вид искомого решения на больших расстояниях может быть представлен в виде

мультипольного разложения

$$\varphi = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) + B_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (7.52)$$

(дипольная, квадрупольная и т. д. составляющие, монопольная компонента, $\varphi \sim 1/r$, отсутствует, т. к. она соответствует отличному от нуля полному потоку жидкости на больших расстояниях). Вычислим теперь кинетическую энергию жидкости внутри объема V ограниченного сферой большого (по сравнению с размером тела) радиуса R , охватывающей внутри себя обтекаемое тело. Так как

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) dV, \quad (7.53)$$

то первый член в правой части (7.53) равен $u^2(V - V_0)$, где V_0 есть объем тела. Представив же во втором слагаемом выражение $(\vec{v} + \vec{u})$ как $\vec{\nabla}(-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})$, и используя условие несжимаемости, $\text{div } \vec{v} = 0$, его можно записать так:

$$\begin{aligned} \int (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) dV &= \\ &= \int \vec{\nabla}(-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) dV = \int \vec{\nabla} \cdot \{(-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u})\} dV = \\ &= \oint_S (-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S} + \oint_{S_0} (-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S}_0, \end{aligned} \quad (7.54)$$

где S и S_0 есть, соответственно, поверхности большой сферы и тела. Так как на поверхности тела нормальная составляющая его скорости равна нормальной составляющей скорости жидкости, $(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S}_0 = 0$, то второй интеграл в правой части (7.54) обращается в нуль. В первом же интеграле, выбрав радиус сферы R достаточно большим, можно ограничиться лишь первым, дипольным членом в разложении (7.52), положив

$$\varphi \approx -\frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{-3(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{r} + \vec{A} \cdot \vec{r}^2}{r^5}. \quad (7.55)$$

Учитывая, что для поверхности сферы $d\vec{S} = R^2 d\Omega \frac{\vec{R}}{R}$, где $d\Omega$ есть элемент

телесного угла, искомый интеграл принимает вид

$$\oint_S (-\varphi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{S} = \oint_S \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{R}}{R^3} + \vec{u} \cdot \vec{R} \right) \left(\frac{\vec{A} R^2 - 3\vec{R}(\vec{A} \cdot \vec{R})}{R^5} - \vec{u} \right) R \vec{R} d\Omega,$$

или, в тензорных обозначениях,

$$\oint_S d\Omega \left\{ \left(\frac{A_i n_i}{R^2} + u_k n_k R \right) \left(-\frac{2A_l n_l}{R} - u_l n_l R^2 \right) \right\}, \quad \vec{n} = \vec{R}/R.$$

Используя, что (см. задачу 1-1),

$$\oint d\Omega n_i n_k = 4\pi \langle n_i n_k \rangle = \frac{4\pi}{3} \delta_{ik},$$

получаем, что в пределе больших R

$$\int (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) = -4\pi(\vec{A} \cdot \vec{u}) - \frac{4\pi}{3} R^3 u^2.$$

Окончательно, полная кинетическая энергия жидкости принимает вид

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho_0}{2} [-4\pi(\vec{A} \cdot \vec{u}) - V_0 u^2]. \quad (7.56)$$

Вектор \vec{A} полностью определяется размером и формой обтекаемого тела, и, в силу линейности уравнения для φ , пропорционален скорости тела \vec{u} : $A_i = -\alpha_{ik} u_k$, что позволяет записать (7.56) как

$$E_{\text{кин}} = \frac{\tilde{m}_{ik} u_i u_k}{2}, \quad \text{где} \quad \tilde{m}_{ik} = \rho_0 [4\pi \alpha_{ik} - V_0 \delta_{ik}] \quad (7.57)$$

есть тензор присоединенной массы. Подставив это выражение для кинетической энергии жидкости в (7.51), получим, что искомая сила сопротивления есть

$$F_i = -\tilde{m}_{ik} \dot{u}_k. \quad (7.58)$$

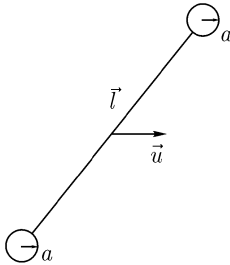
Как следует из (7.58), в общем случае тела произвольной формы сила сопротивления зависит не только от абсолютной величины ускорения, но и от его направления.

Сравним теперь этот общий результат с частным случаем тела сферической формы, рассмотренным в предыдущей задаче 7-16. Как следует из (7.46), в этом случае тензор $\alpha_{ik} = \frac{a^3}{2} \delta_{ik}$, так что

$$\tilde{m}_{ik} = \rho_0 \left(\frac{4\pi a^3}{2} - \frac{4\pi a^3}{3} \right) \delta_{ik} = \rho_0 \frac{2\pi}{3} a^3 \delta_{ik},$$

а сила сопротивления, согласно (7.58), $F_i = -\rho_0 \frac{2\pi a^3}{3} \dot{u}_i$, то есть совпадает с результатом (7.50), полученным путем непосредственного вычисления силы давления жидкости, действующей на ускоряемую сферу (в силу симметрии последней, сила сопротивления в этом случае не зависит от направления ускорения).

7-18. Найти тензор присоединенной массы для тела, представляющего собой длинную гантель: два шарика радиуса a , жестко соединенных тонким стержнем длины l , $l \gg a$ (рис. 7.8).



Пусть скорость гантели есть \vec{u} . Тогда из-за обтекания жидкостью сферы 1 в точке нахождения сферы 2 жидкость приобретает дополнительную скорость, равную, согласно (7.46),

$$\vec{v}_{12} = \frac{a^3}{2l^3} [-\vec{u} + 3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})], \quad \vec{n} = \vec{l}/l.$$

Это эквивалентно тому, что шар 2 движется относительно жидкости со скоростью

Рис. 7.8. К расчету присоединенной массы гантели

$$\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{v}_{12} = \vec{u} + \frac{a^3}{2l^3} [\vec{u} - 3\vec{u}(\vec{n} \cdot \vec{u})]. \quad (7.59)$$

Так как появляющаяся дополнительная скорость есть четная функция \vec{n} , то результат будет таким же и для первого шара, т. е. $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. Тогда потенциал скорости жидкости может быть записан как

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{a^3}{2} \frac{\vec{u}_1(\vec{r} - \vec{l}/2)}{|\vec{r} - \vec{l}/2|^3} + \frac{a^3}{2} \frac{\vec{u}_2(\vec{r} + \vec{l}/2)}{|\vec{r} + \vec{l}/2|^3}, \quad (7.60)$$

где начало координат выбрано в центре гантели. Теперь, согласно результатам предыдущей задачи 7-17, для вычисления тензора присоединенной

массы гантели достаточно найти вектор \vec{A} , определяющий дипольную составляющую потенциала скорости (7.60) на больших, $r \gg l$, расстояниях. Сравнение (7.55) и (7.60) показывает, что

$$\vec{A} = \frac{-a^3}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = -a^3 \left[\left(1 + \frac{a^3}{2l^3}\right) \vec{u} - \frac{3a^3}{2l^3} \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u}) \right],$$

или, в тензорных обозначениях,

$$A_i = -\alpha_{ik} u_k, \quad \alpha_{ik} = a^3 \left(1 + \frac{a^3}{2l^3}\right) \delta_{ik} - a^3 \frac{3a^3}{2l^3} n_i n_k.$$

Отсюда, согласно (7.57),

$$\tilde{m}_{ik} = \rho_0(4\pi\alpha_{ik} - V_0\delta_{ik}) = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} \left[\left(1 + \frac{3a^3}{2l^3}\right) \delta_{ik} - \frac{9a^3}{2l^3} n_i n_k \right]. \quad (7.61)$$

Как видно из (7.61), в жидкости такую гантелью легче разгонять вдоль ее оси, чем поперек, так как присоединенная масса при продольном ускорении, $\dot{\vec{u}} \parallel \vec{n}$, равна $\tilde{m}_{\parallel} \approx \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} \left(1 - 3\frac{a^3}{l^3}\right)$, в то время как для поперечного ускорения, $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\tilde{m}_{\perp} \approx \rho_0 \frac{4\pi a^3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a^3}{l^3}\right)$.

7-19. Частота колебаний тяжелого шарика, соединенного с пружиной, равна в воздухе ω_0 . Как изменится эта частота, если этот осциллятор поместить в идеальную жидкость с плотностью $\rho_{\text{ж}}$. Плотность материала шарика равна ρ_0 .

Влиянием воздуха на движение тяжелого шара можно пренебречь, так что частота $\omega = \sqrt{k/m_{\text{ш}}}$, где k — коэффициент упругости пружины, а $m_{\text{ш}}$ — масса шара. В жидкости частота колебаний будет определяться уже не только инерцией шара, но и реакцией жидкости, которая эффективно сводится к увеличению массы шарика на присоединенную массу жидкости, так что теперь

$$\omega = \sqrt{k/(m_{\text{ш}} + \tilde{m}_{\text{пр}})} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_{\text{ж}}/2}}.$$

7-20. Большой бак с идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ_0 под действием внешней силы совершает колебания с амплитудой A . Внутри бака находится маленький шарик, имеющий плотность ρ_1 (рис. 7.9). Какой будет амплитуда его колебаний?

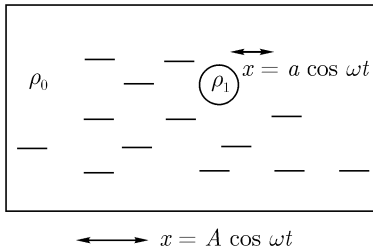


Рис. 7.9. Вынужденные колебания шара в жидкости

Пусть $X(t)$ — закон движения бака, а $x(t)$ — шарика. Тогда суммарную силу, действующую на шарик со стороны жидкости, можно разделить на две части. Первая из них связана с неоднородностью давления в баке, возникающей в результате его колебаний. Это есть, по существу, сила Архимеда, и она равна $F_1 = V\rho_0\ddot{X}$ (V — объем шарика). Вторая возникает из-за смещения шарика относительно бака и определяется присоединенной массой: $F_2 = -\frac{V}{2}\rho_0(\ddot{x} - \ddot{X})$.

Поэтому из уравнения движения шара

$$V\rho_1\ddot{x} = F_1 + F_2 = V\rho_0\ddot{X} - \frac{V}{2}\rho_0(\ddot{x} - \ddot{X})$$

получаем, что искомая амплитуда

$$a = A \frac{3\rho_0}{\rho_0 + 2\rho_1}.$$

7-21. Определить период колебаний математического маятника (маленькая сфера из материала с плотностью ρ_1 на нити длиной l), помещенного в идеальную несжимаемую жидкость с плотностью ρ_0 , ($\rho_1 > \rho_0$).

Без жидкости (в вакууме) период колебаний такого маятника равен, как известно, $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, где g есть ускорение силы тяжести. Присутствие жидкости имеет двоякий эффект. Во-первых, появляется выталкивающая сила (сила Архимеда), которая эффективно уменьшает ускорение силы тяжести, так что $g_{\text{эф}} = g(1 - \rho_0/\rho_1)$. Во-вторых, жидкость становится вовлеченной в движение, так что необходимо учитывать эффект присоединенной массы $\tilde{m} = \frac{2\pi}{3}a^3\rho_0$ где a есть радиус сферы. В пустоте период T_0 не зависит от массы сферы m , т. к. ее инерционная и гравитационная массы равны друг другу. В жидкости же присоединенная масса увеличивает инерцию системы, но не меняет ее гравитационной массы. В результате этого период колебаний маятника в жидкости дополнительно увеличивается в $\sqrt{(m + \tilde{m})/m} = (1 + \rho_0/2\rho_1)^{1/2}$ раз. Так что окончательно $T = T_0(1 - \rho_0/\rho_1)^{-1/2}(1 + \rho_0/2\rho_1)^{1/2}$.

7-22. В вертикальной трубе радиусом R , заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, соосно с ней помещен легкий (его плотность много меньше плотности жидкости) цилиндр радиусом r и длиной L , причем $L \gg R$ (рис. 7.10). Определить ускорение, с которым будет всплывать легкий цилиндр.

Ускорение цилиндра установится таким образом, чтобы выталкивающая сила жидкости (сила Архимеда) уравновешивалась силой реакции жидкости, возникающей при обтекании цилиндра (собственным весом цилиндра и его инерцией можно пренебречь). Отсюда следует, что

$$L\pi r^2 \rho g = \tilde{m}_{\text{пр}} a,$$

где ρ — плотность жидкости, а $\tilde{m}_{\text{пр}}$ — соответствующая такому обтеканию присоединенная масса. Последнюю можно найти следующим образом. Так как жидкость несжимаемая, то при движении цилиндра вверх возникает направленный в противоположную сторону поток жидкости. При условии $L \gg R$ можно пренебречь краевыми эффектами, так что этот противоток будет представлять собой однородное течение, заполняющее по длине L кольцевое сечение с площадью $\pi(R^2 - r^2)$ (см. рис. 7.10). Поэтому, если скорость цилиндра равна u , то скорость течения жидкости $V = ur^2/(R^2 - r^2)$. При этом кинетическая энергия жидкости $E_k = \rho u^2 \pi r^4 L / 2(R^2 - r^2)$. Тогда из закона сохранения энергии следует, что сила реакции жидкости $F = \dot{E}_k / u = \dot{u} \rho \pi r^4 L / (R^2 - r^2)$. Таким образом, присоединенная масса жидкости для этого течения $\tilde{m}_{\text{пр}} = \rho \pi r^4 L / (R^2 - r^2)$, а ускорение цилиндра $a = g(R^2 - r^2)/r^2$.

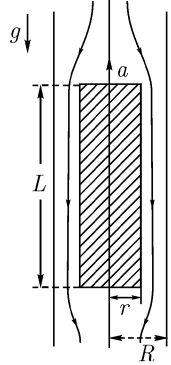


Рис. 7.10. Обтекание длинного цилиндра в трубе

§ 8. Движение вязкой жидкости

Тензор плотности потока импульса Π_{ik} в вязкой жидкости можно представить в следующем виде:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k + \pi_{ik}, \quad (8.1)$$

где дополнительный (см. формулу (7.6) для идеальной жидкости) член π_{ik} определяет «вязкий» перенос импульса, связанный с неоднородностью скорости течения жидкости. Если характерный пространственный масштаб L

изменения скорости течения жидкости или газа много больше длины свободного пробега молекул l , то в первом приближении по малому параметру l/L тензор π_{ik} зависит лишь от первых производных вектора скорости по координатам. Тогда в изотропной среде наиболее общим видом для π_{ik} является следующий:

$$\pi_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) - \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (8.2)$$

где η и ξ — коэффициенты вязкости, причем $\eta \geq 0$, $\xi \geq 0$ (последнее следует из закона возрастания энтропии, см. задачу 8-1). Подставив выражение (8.1) и (8.2) в уравнение сохранения импульса (7.6) и считая коэффициенты вязкости η и ξ постоянными, получим уравнение движения вязкой жидкости

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (8.3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости, когда $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, из (8.3) следует уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \nu \Delta \vec{v}, \quad (8.4)$$

где $\nu \equiv \eta/\rho$ — кинематическая вязкость среды.

8-1. Вычислить объемную мощность диссипации энергии в несжимаемой вязкой жидкости.

Так как в несжимаемой жидкости не производится работа сжатия (или разрежения) отдельных элементов среды, внутренняя энергия жидкости остается постоянной. Поэтому диссипация энергии полностью определяется изменением кинетической энергии жидкости. Для вычисления последней удобно записать уравнение Навье–Стокса в тензорных обозначениях:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad \pi_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Тогда изменение кинетической энергии жидкости внутри некоторого объема V принимает вид:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = \int_V \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} dV = \int_V v_i \left(-\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} \right) dV. \quad (8.5)$$

Так как

$$v_i \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \pi_{ik}) - \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k},$$

а

$$\rho v_i \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right],$$

(здесь использовано условие $\operatorname{div} \vec{v} = \partial v_k / \partial x_k = 0$), то (8.5) можно записать так:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = \int_S dS_k \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + v_i \pi_{ik} \right] + \int_V \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \quad (8.6)$$

Интеграл по поверхности в (8.6) описывает изменение энергии жидкости внутри выделенного объема, связанное с потоком энергии через его поверхность. Поэтому искомая диссипация энергии определяется объемным интегралом в (8.6), который, используя симметрию тензора π_{ik} , можно переписать как

$$\int_V \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = \frac{1}{2} \int_V \pi_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dV = -\frac{\eta}{2} \int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

Следовательно, мощность вязкой диссипации энергии в единице объема жидкости равна

$$Q = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (8.7)$$

8-2. Плоское «дно» бесконечно глубокой вязкой жидкости приводит в движение со скоростью $v = v_0 \cos \omega t$. Найти среднюю мощность, необходимую для поддержания этих колебаний. Плотность жидкости ρ , кинематическая ее вязкость ν .

Пусть жидкость занимает полупространство $z > 0$, ее дно является плоскостью $z = 0$ и движется вдоль оси x . Тогда, очевидно, и в жидкости будет отлична от нуля только компонента скорости $v_x(z, t) \equiv v(z, t)$. Для нее из (8.4) получаем уравнение $\partial v / \partial t = \nu \partial^2 v / \partial z^2$. Так как движение жидкости представляет собой колебание с той же частотой, будем искать его в виде $v(z, t) = \operatorname{Re}\{u(z)e^{i\omega t}\}$. Тогда $-i\omega u = \nu d^2 u / dz^2$. Решение этого уравнения, равное v_0 при $z = 0$ и обращающееся в нуль при $z \rightarrow +\infty$,

имеет вид

$$u = v_0 \exp \left\{ -\frac{(1-i)z}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right\}.$$

Отсюда

$$v(z, t) = v_0 e^{-z\sqrt{\omega/2\nu}} \left[\cos \omega t \cos \left(z \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) + \sin \omega t \sin \left(z \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \right].$$

Внешняя сила, приходящаяся на единицу площади дна, равна, очевидно, потоку импульса $F_i = (\Pi_{ik} n_k)|_{z=0} = -\Pi_{iz}|_{z=0}$. Так что интересующая нас x -компонента есть

$$F_x = -\rho\nu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = v_0 \rho \nu \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Средняя по периоду колебаний мощность, производимая этой силой, равна $\langle F_x v(z, t) \rangle = \rho v_0^2 \sqrt{\omega \nu} / 8$. Очевидно, что эта мощность расходуется на выделение тепла в колеблющейся жидкости из-за ее вязкости. В этом можно убедиться непосредственно, проинтегрировав полученную в предыдущей задаче объемную мощность диссипации энергии по объему, приходящемуся на единицу поверхности дна.

8-3. В кювете на тонком (по сравнению с ее поперечными размерами) слое вязкой жидкости толщины h плавает пластина, масса единицы площади которой равна μ . Дно кювета совершает малые колебания в своей плоскости с амплитудой A и частотой ω . Найти амплитуду колебаний пластины.

Пусть рассматриваемые колебания происходят вдоль оси x , а плоскости дна и пластины соответствуют $z = 0$ и $z = h$. Обозначив $v_x(z, t) \equiv v(z) e^{-i\omega t}$, из уравнения $-i\omega v = \nu d^2 v / dz^2$ получим

$$v_x(z, t) = \left[v_1 e^{(1-i)z\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} + v_2 e^{-(1-i)z\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right] e^{-i\omega t},$$

где v_1 и v_2 — постоянные, значения которых определяются из граничных условий. Если амплитуда колебаний пластины равна a , то $v_1 + v_2 = -i\omega A$;

$v_1 e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} + v_2 e^{-(1-i)z\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} = -i\omega a$, откуда

$$v_1 = \frac{-i\omega \left(a - A e^{-(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right)}{e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} - e^{-(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}};$$

$$v_2 = \frac{i\omega \left(a - A e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right)}{e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} - e^{-(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}}.$$

Написав теперь уравнение движения пластины $-\mu\omega^2 a = F_x = -\rho v \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=h}$, найдем значение амплитуды a :

$$a = A \left\{ \frac{\mu}{(1+i)\rho} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \left[e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} - e^{-(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[e^{(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} + e^{-(1-i)h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right] \right\}^{-1}. \quad (8.8)$$

Поскольку это общее выражение довольно громоздко, рассмотрим некоторые предельные случаи, связанные с возникающим здесь безразмерным параметром $\alpha \equiv (\mu/\rho)\sqrt{\omega/2\nu}$. Если $\alpha \ll 1$, т. е. пластина является «легкой», то амплитуда ее колебаний такая же, как для свободной поверхности:

$$|a| \approx |A| \left[\frac{2}{\operatorname{ch}(2h\sqrt{\omega/2\nu}) + \cos(2h\sqrt{\omega/2\nu})} \right]^{1/2}$$

(в этом случае первым слагаемым в правой части уравнения (8.8) можно пренебречь). Для «тяжелой» пластины, когда $\alpha \gg 1$, второе слагаемое в (8.8) становится существенным только при очень тонкой прослойке жидкости (при $h \ll \sqrt{2\nu/\omega}$). Поэтому в этом случае его можно считать равным единице, так что из (8.8) следует

$$|a| = |A| \left\{ \frac{1}{1 + \alpha^2 [\operatorname{ch}(2h\sqrt{\omega/2\nu}) - \cos(2h\sqrt{\omega/2\nu})]} \right\}^{1/2}.$$

При этом амплитуды колебаний дна и пластины начинают заметно отличаться друг от друга уже при толщине жидкой прослойки, много меньшей размера вязкого скин-слоя (при $h \geq \alpha^{-1} \sqrt{2\nu/\omega}$).

8-4. Плоское дно бесконечно глубокой вязкой несжимаемой жидкости в некоторый момент ($t = 0$) мгновенно начинает двигаться в собственной плоскости с постоянной скоростью u_0 . Определить движение жидкости и силу сопротивления, испытываемую единицей площади дна. Плотность жидкости ρ , кинематическая вязкость ν .

Выберем систему координат и направление движения такими же, как в предыдущей задаче. Тогда для компоненты скорости $v_x(z, t) \equiv v(z, t)$ получаем прежнее уравнение $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Если ввести теперь безразмерную скорость $u = v/u_0$, то нужно решать уравнение $\partial u / \partial t = \nu \partial^2 u / \partial z^2$ с такими граничными условиями: $u|_{z=0} = 1$, $u|_{z \rightarrow +\infty} = 0$. Так как плоскость приходит в движение мгновенно, то в задаче нет никаких параметров, задающих масштаб времени или длины (есть только кинематическая вязкость ν). Поэтому решение этой задачи должно быть автомодельным. Это означает, что решения в различные моменты времени отличаются лишь изменением пространственного масштаба. Так как размерность вязкости $[\nu] = \text{см}^2/\text{сек}$, то можно ввести безразмерную автомодельную переменную $\xi = z/\sqrt{\nu t}$ (т.е. в данном случае характерная длина растет пропорционально $t^{1/2}$, происходит диффузия скорости в вязкую жидкость). Так как $u|_{z=0} = 1$ и не зависит от времени, решение следует искать в виде $u(z, t) = f(\xi)$, что дает для f обыкновенное дифференциальное уравнение: $-\frac{\xi}{2} \frac{df}{d\xi} = d^2 f / d\xi^2$.

Отсюда $df/d\xi = C e^{-\xi^2/4}$, где C — пока не известная постоянная интегрирования. Так как $f(0) = 1$, то $f(\xi) = 1 + C \int_0^\xi e^{-y^2/4} dy$. Величина C находится из условия, что $f(+\infty) = 0$. Учитывая, что $\int_0^\infty e^{-y^2/4} dy = \sqrt{\pi}$, получаем окончательное решение:

$$v(z, t) = v_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi/\sqrt{\nu t}} e^{-y^2/4} dy \right\}.$$

Как видно отсюда, с ростом t в движение приходят все более удаленные от плоскости слои жидкости, так что ее суммарный импульс растет про-

порционально $t^{1/2}$ (как и должно быть при диффузионном процессе). Сила, действующая на плоскость, равна

$$F = -\rho\nu \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho\nu_0 \sqrt{\nu/\pi t}.$$

8-5. Вертикальная труба радиусом R заполнена вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью η . Вдоль оси трубы помещен длинный ($L \gg R$) невесомый цилиндр, радиус которого мало отличается от радиуса трубы, так что между ними остается узкий зазор толщиной $h \ll R$. Найти скорость всплывания цилиндра в поле тяжести g .

Скорость всплывания цилиндра установится такой, чтобы выталкивающая сила Архимеда уравнивалась силой вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра. Поскольку зазор между цилиндром и стенкой трубы мал ($h \ll R$), течение жидкости в нем можно считать плоским. Введем поэтому координату x , отсчитываемую от поверхности цилиндра, так что на стенке трубы $x = h$. Тогда для стационарного течения вязкой жидкости, которое в пренебрежении краевыми эффектами ($L \gg R$!) направлено вдоль оси z , получим уравнение

$$-\frac{dp}{dz} + \eta \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (8.9)$$

с граничными условиями $v(h) = 0$ и $v(0) = u$ — скорости всплывания цилиндра (здесь p есть давление, дополнительное к гидростатическому давлению $p_0 = -\rho g z$). В уравнение (8.9) входит градиент давления dp/dz , появление которого становится очевидным из следующих соображений. Если $dp/dz = 0$, то, как следует из (8.9), в жидкости установится линейный профиль скорости, меняющийся от $v = u$ на поверхности цилиндра до $v = 0$ на стенке трубы. Это означает, что движение жидкости, как и цилиндра, было бы направлено вверх. Но при конечной длине трубы это невозможно в силу несжимаемости жидкости. Поэтому в ней возникнет градиент давления, достаточный, чтобы проталкивать вниз необходимое по объему количество жидкости. Условие такого баланса имеет вид

$$u\pi R^2 = -2\pi R \int_0^h v(x) dx. \quad (8.10)$$

Общее решение уравнения (8.9) таково: $v = \frac{x^2}{2\eta} \frac{dp}{dz} + ax + b$. Постоянные a

и b определяются из граничных условий, что дает $b = u$, $a = -\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dz} - u/h$.

Теперь из условия (8.10) находим градиент давления $\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} = 3uR/h^3$.

Вязкая сила трения $F_{\text{тр}}$, тормозящая всплывание цилиндра, равна $F_{\text{тр}} = 2\pi RL \left(-\eta \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} \right) = -2\rho RL\eta a \approx 6\pi R^2 Lu\eta/h^2$. Приравнявая ее выталкивающей силе $F_A = \pi R^2 L\rho g$, получим, что искомая скорость всплывания $u \approx gh^2/6\nu$ ($\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости).

8-6. Определить частоту и декремент затухания малых радиальных колебаний пузырька газа радиусом R (показатель адиабаты γ), находящегося в вязкой несжимаемой жидкости с давлением p_0 , плотностью $\rho_{\text{ж}}$ и вязкостью η .

Пусть радиус пузырька меняется по закону $r_0(t) = R + ae^{-i\omega t}$, где a — амплитуда колебания, причем $a \ll R$. Очевидно, что возникающее при этом течение жидкости будет радиальным, т. е. отлична от нуля только компонента скорости $v_r(r, t) \equiv v(r, t)$. Так как жидкость несжимаемая, то $vr^2 = \text{const}$, и можно записать, что $v(r, t) = Ae^{-i\omega t}/r^2$. На границе пузырька скорость жидкости должна быть равна $dr_0(t)/dt$, поэтому $A = -i\omega aR^2$, т. е. $v(r, t) = -i\omega aR^2 e^{-i\omega t}/r^2$. Зная скорость, из линеаризованного уравнения движения жидкости можно найти распределение давления в ней $p_{\text{ж}}(r, t)$:

$$\rho_{\text{ж}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_{\text{ж}} + \eta \Delta \vec{v}. \quad (8.11)$$

Так как $\Delta \vec{v} = \vec{\nabla} \text{div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v}$, то в данном случае $\Delta \vec{v} = 0$ ($\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} = 0$). Поэтому из (8.11) получим

$$\frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial r} = -\rho_{\text{ж}} \frac{\partial v}{\partial t} = i\omega \rho_{\text{ж}} v = \rho_{\text{ж}} \omega^2 a R^2 e^{-i\omega t}/r^2.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что на бесконечности давление жидкости должно равняться невозмущенной величине p_0 , находим

$$p_{\text{ж}}(r, t) = p_0 - \rho_{\text{ж}} \omega^2 a R^2 e^{-i\omega t}/r.$$

Плотность газа внутри пузырька много меньше плотности жидкости. Поэтому его сжатия и расширения являются квазистатическими, т. е. плотность

газа остается однородной во всем объеме пузырька. Поэтому из условия адиабатичности

$$p_{\Gamma} V^{\gamma} = p_{\Gamma} r_0^{3\gamma} = \text{const} = p_0 R^{3\gamma}$$

следует, что давление в газе меняется так: $p_{\Gamma} = p_0 - 3\gamma p_0 e^{-i\omega t} a/R$. Зная давление в газе и жидкости, запишем теперь граничное условие на поверхности их раздела при $r = R$ (в линейном приближении изменение радиуса пузырька можно не учитывать). Здесь должен быть непрерывен вектор $\sigma_{ik} n_k$, где σ_{ik} — тензор напряжений, а \vec{n} — единичный вектор нормали к границе. В газе $\sigma_{ik}^{(\Gamma)} = -p_{\Gamma} \delta_{ik}$, а в вязкой жидкости $\sigma_{ik}^{(ж)} = -p_{(ж)} \delta_{ik} + \eta(\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)$. В данном случае это граничное условие дает, что $\sigma_{rr}^{(\Gamma)} = \sigma_{rr}^{(ж)}|_{r=R}$. Отсюда получаем следующее уравнение для частоты колебаний ω :

$$\omega^2 + \frac{4i\eta}{\rho_{ж} R^2} - \frac{3\gamma p_0}{\rho_{ж} R^2} = 0,$$

или

$$\omega = -\frac{2i\eta}{\rho_{ж} R^2} \pm \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_{ж} R^2} - \frac{4\eta^2}{\rho_{ж} R^4}}.$$

Если вязкость не слишком велика ($\eta^2 < 3\gamma p_0 \rho_{ж} R^2/4$), то пузырек совершает колебания с частотой $\Omega = \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_{ж} R^2} - 4\eta^2/\rho_{ж}^2 R^4}$ и декрементом затухания $\Gamma = 2\eta/\rho_{ж} R^2$. В отсутствие вязкости затухания нет, а частота $\Omega = \sqrt{3\gamma p_0/\rho_{ж} R^2}$. В случае большой вязкости радиальное смещение жидкости затухает аperiодически.

§ 9. Конвекция и турбулентность

9-1. Определить условие конвективной неустойчивости идеального газа с молекулярной массой μ и показателем адиабаты γ , находящегося в равновесии в поле тяжести \vec{g} .

Запишем уравнения движения, непрерывности и сохранения энтропии газа:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0; \quad \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0. \quad (9.1)$$

При статическом равновесии ($\vec{v} = 0$) отсюда следует, что давление и плотность газа в равновесии зависят только от координаты z : $p(z)$ и $\rho(z)$. Для

выяснения того, устойчиво ли это равновесие, рассмотрим малые отклонения от него, описываемые возмущениями давления δp , плотности $\delta \rho$ и скоростью газа \vec{v} . С точностью до величин первого порядка малости по эти возмущениям из (9.1) получаем:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \delta p + \vec{g} \delta \rho; & \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\delta p \rho^{-\gamma} - \gamma p \rho^{-(\gamma+1)} \delta \rho) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (p \rho^{-\gamma}) = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Если теперь ввести вектор смещения $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ элемента объема газа из положения равновесия, то скорость $\vec{v} = \partial \vec{\xi} / \partial t$, и из уравнения непрерывности и сохранения энтропии сразу следует, что возмущение плотности $\delta \rho = -\rho \operatorname{div} \vec{\xi} - \xi_z d\rho/dz$, а возмущение давления

$$\begin{aligned} \delta p &= \gamma p \frac{\delta \rho}{\rho} - \xi_z \left(\frac{dp}{dz} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) = \frac{\gamma p}{\rho} \left(-\rho \operatorname{div} \vec{\xi} - \xi_z \frac{d\rho}{dz} \right) - \\ &- \xi_z \left(\frac{dp}{dz} - \gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - \xi_z \frac{dp}{dz} = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Подставив эти выражения для $\delta \rho$ и δp в уравнения движения (9.2), получим

$$\rho \ddot{\vec{\xi}} = \vec{g} \left(-\rho \operatorname{div} \vec{\xi} - \xi_z \frac{d\rho}{dz} \right) - \vec{\nabla} (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) \equiv \vec{F}(\vec{\xi}), \quad (9.4)$$

где $\vec{F}(\vec{\xi})$ — возникающая при смещении сила, зависящая (линейно) только от $\vec{\xi}$. Из уравнения (9.4) следует закон сохранения энергии

$$W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = \text{const},$$

где кинетическая энергия газа $W_{\text{кин}} = \int \frac{\rho}{2} (\dot{\vec{\xi}})^2 dV$, а потенциальная энергия $W_{\text{пот}} = \int dV \vec{F}(\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}$. Из общих принципов механики теперь можно заключить, что равновесное состояние газа будет устойчивым, если $W_{\text{пот}}$, рассматриваемая как функция бесконечного числа степеней свободы системы $\vec{\xi}(\vec{r})$, имеет минимум при $\vec{\xi}(\vec{r}) = 0$. Другими словами, система устойчива, если $W_{\text{пот}} \geq 0$ для любого набора смещений $\vec{\xi}(\vec{r})$, удовлетворяющего

необходимым граничным условиям (см. ниже). В данном случае

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} &= -\frac{1}{2} \int \vec{F} \cdot \vec{\xi} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left\{ (\vec{\xi} \cdot \vec{g}) \left(\rho \operatorname{div} \vec{\xi} + \xi_z \frac{d\rho}{dz} \right) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Преобразуем второе слагаемое в $W_{\text{пот}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \int dV \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) &= \int dV \operatorname{div} \{ \vec{\xi} (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) \} - \\ &- \int \operatorname{div} \vec{\xi} (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) dV = \\ &= \int (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) \vec{\xi} d\vec{S} - \int (-\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} + \rho g \xi_z) \operatorname{div} \vec{\xi} dV. \end{aligned}$$

Входящий сюда интеграл по поверхности равен нулю, так как на границе газа с твердой поверхностью $(\vec{\xi} \cdot d\vec{S}) = 0$ (нет нормальной составляющей смещения), а на бесконечно удаленной поверхности обращаются в нуль p и ρ . Поэтому

$$\begin{aligned} W_{\text{пот}} &= \frac{1}{2} \int dV \left\{ -g \xi_z \left(\rho \operatorname{div} \vec{\xi} + \xi_z \frac{d\rho}{dz} \right) + \gamma p (\operatorname{div} \vec{\xi})^2 - \rho g \xi_z \operatorname{div} \vec{\xi} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma p (\operatorname{div} \vec{\xi})^2 - 2\rho g \xi_z \operatorname{div} \vec{\xi} - g \xi_z^2 \frac{d\rho}{dz} \right\}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Будем теперь минимизировать эту энергию, рассматривая ее как функционал от ξ_z и $\operatorname{div} \vec{\xi}$. Из условия экстремальности по $\operatorname{div} \vec{\xi}$ следует, что $2\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - 2\rho g \xi_z = 0$, т. е. $\operatorname{div} \vec{\xi} = \rho g \xi_z / \gamma p$. Подставив это в (9.6), получим, что $W_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \int dV \xi_z^2 \left(-g \frac{d\rho}{dz} - \rho^2 g^2 / \gamma p \right)$. Отсюда следует, что для устойчивости газа необходимо и достаточно, чтобы стоящее в скобках выражение было больше нуля при всех z . Действительно, если в каком-то месте эта величина отрицательна, то всегда можно выбрать такое распределение ξ_z , локализованное в этой точке, что $W_{\text{пот}}$ будет отрицательна. Таким образом, критерий устойчивости идеального газа в поле тяжести имеет локальный характер и выглядит так: $d\rho/dz < -\rho^2 g / \gamma p$. Так как для идеального газа $p = R\rho T / \mu$, то

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\mu}{RT} \frac{dp}{dz} - \frac{\mu p}{RT^2} \frac{dT}{dz},$$

а поскольку $dp/dz = -\rho g$, условие устойчивости можно записать так: $-dT/dz < \mu g(\gamma - 1)/\gamma R$. Как видно, при устойчивом равновесии газа его температура может и уменьшаться снизу вверх, но не слишком быстро.

Рассмотрим теперь, что собой представляют «самые неустойчивые» смещения $\vec{\xi}$. При $\text{div } \vec{\xi} = \rho g \xi_z / \gamma p$ возмущение давления, согласно (9.3), равно нулю. Это означает, что такие смещения представляют собой адиабатически медленные (давление успевает выравниваться) перестановки близких по высоте элементов газа.

9-2. Найти критерий возникновения конвективной неустойчивости в несжимаемой жидкости.

Считая жидкость несжимаемой, мы здесь имеем в виду то, что ее плотность $\rho(p, T)$, являющаяся, вообще говоря, функцией давления и температуры, очень слабо зависит от давления, так что можно считать $\rho \equiv \rho(T)$. Если при этом температура жидкости T не очень сильно отличается от некоторой T_0 , то зависимость $\rho(T)$ можно представить в виде $\rho(T) \approx \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$, где $\alpha > 0$ — коэффициент теплового расширения жидкости. Так как изменение плотности при этом остается небольшим, то в уравнении непрерывности им можно пренебречь и положить поэтому $\text{div } \vec{v} \approx 0$. В уравнении движения жидкости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v} \quad (9.7)$$

выделим из полного давления p величину, определяемую гидростатическим равновесием жидкости, $p = \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r} + p'$, так что поправку p' , связанную с тепловым расширением и движением жидкости, можно считать малой. Тогда

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = -\frac{\vec{\nabla}(\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r} + p')}{\rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]} \approx -\vec{g}[1 + \alpha(T - T_0)] - \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0}$$

и уравнение (9.7) принимает вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \alpha \vec{g}(T - T_0) + \nu \Delta \vec{v}. \quad (9.8)$$

Получим теперь недостающее уравнение для изменения температуры жидкости (уравнение теплопроводности). Поток тепла в жидкости \vec{q} , связанный как с теплопроводностью (диффузионный поток), так и с течением жидкости (конвективный поток), может быть записан так: $\vec{q} = \rho_0 c T \vec{v} - \kappa \vec{\nabla} T$

(κ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость жидкости, изменением плотности здесь можно пренебречь, $\rho \equiv \rho_0$). Тогда уравнение баланса тепла

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 c T) + \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

дает

$$\rho_0 c T \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_0 c T \vec{v} - \kappa \vec{\nabla} T) = -\rho_0 c \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \kappa \Delta T$$

(здесь учтено, что $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, а коэффициенты c и κ считаются постоянными ввиду малого изменения температуры жидкости). Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \chi \Delta T \quad (9.9)$$

($\chi \equiv \kappa / \rho_0 c$ — коэффициент температуропроводности жидкости). Уравнения (9.8) и (9.9) вместе с условием $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ составляют полную систему уравнений, описывающую конвекцию в жидкости (их принято называть системой уравнений Буссинеска).

Пусть жидкость находится между двумя горизонтальными плоскостями ($z = 0$ и $z = L$), имеющими температуру, соответственно, T_0 и T_1 (рис. 9.1). В состоянии статического равновесия распределение температуры $T(z)$ находится, согласно (9.9), из условия $d^2 T / dz^2 = 0$, т.е. $T(z) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} z$. Соответственно этому из условия равновесия (9.8) определяется поправка к давлению $p' = \rho_0 \alpha g (T_1 - T_0) z^2 / 2L$.

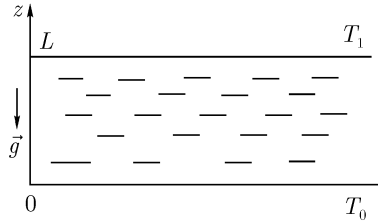


Рис. 9.1. Возникновение конвекции в жидкости

Рассмотрим теперь малые отклонения от равновесия, описываемые возмущениями температуры δT , давления δp и скоростью \vec{v} . В линейном приближении для них из уравнений (9.8) и (9.9) следует

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta p - \alpha \vec{g} \delta T + \nu \Delta \vec{v}; \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} + v_z \frac{T_1 - T_0}{L} = \chi \Delta \delta T. \end{cases} \quad (9.10)$$

Перейдем в системе уравнений (9.10) к безразмерным величинам, определенным следующим образом. В качестве единицы длины выберем расстояние между плоскостями L ($\vec{r} \rightarrow L$), единицы времени — L^2/ν , единицы скорости — ν/L , возмущение давления будем измерять в единицах $\rho_0 \nu^2/L^2$, а возмущение температуры — $(T_1 - T_0)$. В этих переменных уравнения (9.10) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \delta p + \Delta \vec{v} - \operatorname{Gr} \delta T \vec{e}_z; \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} + v_z = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \Delta \delta T, \end{cases} \quad (9.11)$$

(для упрощения записи обозначения безразмерных величин и переменных оставлены прежними), где

$$\operatorname{Gr} \equiv \frac{\alpha g L^3 (T_0 - T_1)}{\nu^2} \quad \text{— число Грасгофа,}$$

$$\operatorname{Pr} \equiv \nu/\chi \quad \text{— число Прандтля.}$$

Таким образом, задача о конвекции в несжимаемой жидкости характеризуется двумя безразмерными параметрами — числами Gr и Pr . Это означает, что данная задача обладает свойством подобия, т. е. при различных значениях величин плотности ρ_0 , коэффициента теплового расширения α , расстояния между пластинами L , вязкости ν и т. д. все характеристики конвекции будут одинаковыми, если остаются неизменными числа Gr и Pr (а измерение \vec{v} , δp , δT и т. д. производится во введенных выше единицах).

Так как равновесные величины не зависят от времени и поперечных координат $\vec{r}_\perp = (x, y)$, то для возмущений зависимость от \vec{r}_\perp и t может быть выбрана в виде, пропорциональном $e^{\lambda t + i \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}$. При этом для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda$ была отрицательна для всех \vec{k}_\perp . Для заданного \vec{k}_\perp всегда можно выбрать оси координат (x, y) так, чтобы $\vec{k}_\perp = (k, 0)$. В таком возмущении отличны от нуля лишь компоненты скорости v_z и v_x . Так как $\operatorname{div} \vec{v} = ikv_x + dv_z/dz = 0$, то $v_x = \frac{i}{k} dv_z/dz$. Взяв теперь ротор уравнения движения (9.11) (что позволяет исключить возмущение давления, так как $\operatorname{rot} \nabla \delta p = 0$), получим

$$\lambda \left(\frac{dv_x}{dz} - ikv_z \right) = \left(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(\frac{dv_x}{dz} - ikv_z \right) + \operatorname{Gr} \cdot ik \delta T$$

или, выразив компоненту скорости v_x через v_z —

$$\lambda \left(\frac{d^2 v_z}{dz^2} - k^2 v_z \right) = \left(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(\frac{d^2 v_z}{dz^2} - k^2 v_z \right) + \text{Gr} \cdot k^2 \delta T. \quad (9.12)$$

Уравнение теплопроводности из системы (9.11) принимает вид

$$\lambda \delta T + v_z = \frac{1}{\text{Pr}} \left(-k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \delta T. \quad (9.13)$$

Полученные два уравнения (9.12) и (9.13) для v_z и δT нужно решать с учетом граничных условий на ограничивающих жидкость плоскостях (при $z = 0$ и $z = 1$). Будем считать, что температура на границе подерживается постоянной, так что $\delta T|_{z=0,1} = 0$. Что касается граничных условий для скорости \vec{v} , то предположим, что граничные плоскости являются идеально «гладкими», т. е. отсутствует сила вязкого трения жидкости о них. Поэтому

$$\left. \frac{dv_x}{dz} \right|_{z=0,1} = \frac{i}{k} \frac{d^2 v_z}{dz^2} = 0.$$

Кроме того, очевидно, что и $v_z|_{z=0,1} = 0$. Нетрудно проверить, что решение уравнений (9.12) и (9.13), удовлетворяющих этим граничным условиям, имеет вид

$$\delta T = A \sin n\pi z; \quad v_z = B \sin n\pi z; \quad n = 1, 2, \dots$$

После простых вычислений условие совместимости этих уравнений определяет значение λ :

$$\lambda = -\frac{(k^2 + n^2 \pi^2)}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \pm \sqrt{\frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^2}{4} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right)^2 + \left[\text{Gr} \frac{k^2}{(k^2 + n^2 \pi^2)} - \frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^2}{\text{Pr}} \right]}.$$

Отсюда видно, что возмущения нарастают ($\text{Re } \lambda > 0$), если число $R \equiv \text{Gr Pr} > \frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^3}{k^2} \equiv F(k, n)$, где $R \equiv \frac{\alpha g L^3 (T_0 - T_1)}{\nu \chi}$ — число Рэлея. Возмущения с разными n и k имеют различные пороги неустойчивости. При заданном n «самым неустойчивым» оказывается возмущение

с $k = k_* = n\pi\sqrt{2}$ (такое k соответствует минимуму функции $F(k, n)$ которое начинает нарастать, если $R > R_*(n) = F(k_*, n) = \frac{27}{4}n^4\pi^4$). Таким образом, с ростом числа R [например, за счет увеличения перепада температур между плоскостями $(T_0 - T_1)$] раньше всего станут неустойчивыми возмущения с $n = 1$ и поперечным волновым числом $k_\perp = \pi/L\sqrt{2}$ (здесь мы вернулись к размерным величинам), а пороговое число Рэлея $R_{кр} = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 658$.

Итак, порог возникновения конвекции в несжимаемой жидкости, находящейся в гидростатическом равновесии в поле тяжести, определяется одним безразмерным параметром (число Рэлея). Этот результат имеет простой физический смысл. Энергетическим источником конвективной неустойчивости является уменьшение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести, возникающее при перемещении горячей (и следовательно, менее плотной) жидкости вверх, а холодной (и более плотной) — вниз. При заданном расстоянии между плоскостями L размер перемещаемых таким образом объемов жидкости, очевидно, не может быть больше L , поэтому выигрыш в потенциальной энергии $\Delta W_{\text{пот}} \sim \Delta m g L$, где Δm — разность масс этих объемов; $\Delta m \sim \Delta \rho L^3 \sim \alpha \rho_0 L^3 (T_0 - T_1)$. В результате $\Delta W_{\text{пот}} \sim \alpha \rho_0 (T_0 - T_1) g L^4$.

Так как жидкость является вязкой, то при перемещении в ней будет происходить диссипация энергии. Другими словами, для перестановки элементов жидкости нужно затратить работу, равную диссипируемой энергии. Поэтому для возникновения конвективной неустойчивости необходимо, чтобы выигрыш в потенциальной энергии $\Delta W_{\text{пот}}$ превышал диссипируемую энергию $\Delta W_{\text{дис}}$. Так как в несжимаемой вязкой жидкости объемная

мощность диссипации энергии $Q = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$ (см. задачу 8-1),

то $\Delta W_{\text{дис}} \sim Q L^3 \Delta t \sim \eta \frac{v^2}{L^2} L^3 L/v \sim \rho_0 \nu v L^2$ (здесь $\Delta t \sim L/v$ — характерное время перемещения). Как видно, диссипируемая из-за вязкости энергия $\Delta W_{\text{дис}} \sim \rho_0 \nu v L^2$ пропорциональна скорости жидкости и, казалось бы, может быть сколь угодно малой при уменьшении v . На самом же деле скорость перемещения не может быть слишком малой, и ограничение здесь связано с теплопроводностью жидкости.

Выше при оценке изменения потенциальной энергии жидкости в поле тяжести неявно предполагалось, что после перемещения температуры (и, следовательно, плотности) элементов жидкости равны своим исходным

значениям. Но если перемещение происходит очень медленно, то температура элементов объема жидкости выравнивается из-за теплопроводности и никакого выигрыша в потенциальной энергии не будет. Поэтому перемещение должно происходить достаточно быстро, т. е. за время, в течение которого теплопроводность еще не сильно скажется. Из сравнения конвективного ($\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$) и теплопроводностного слагаемых ($\chi \Delta T$) в уравнении (9.9) получим, что для этого необходимо, чтобы скорость перемещения жидкости v была достаточно большой: $v \gtrsim \chi/L$. В этом случае диссипируемая энергия $\Delta W_{\text{дис}} \gtrsim \rho_0 \nu \chi L$, так что возникновение конвекции будет энергетически выгодным, если $\Delta W_{\text{пот}} \sim \alpha \rho_0 (T_0 - T_1) g l^4 > \rho_0 \nu \chi L$, т. е. $\alpha g L^3 (T_0 - T_1) / \nu \chi > 1$. Таким образом, именно число Рэлея $R = \alpha g L^3 (T_0 - T_1) / \nu \chi$ определяет порог возникновения конвекции в несжимаемой жидкости.

9-3. *Определить возможные типы упорядоченных структур (конвективных ячеек), возникающих при слабонадкритической конвекции ($R - R_{\text{кр}} \ll R_{\text{кр}}$).*

При числе Рэлея R , превосходящем $R_{\text{кр}}$, прежде всего становятся неустойчивыми возмущения с $n = 1$ и $k_{\perp} = k_0 = \pi/L\sqrt{2}$ (см. предыдущую задачу). Поэтому при слабой надкритичности, когда это превышение мало ($R - R_{\text{кр}} \ll R_{\text{кр}}$), движение жидкости представляет собой суперпозицию таких самых неустойчивых возмущений, так что, например,

$$v_z = \sin \frac{\pi z}{L} \int A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} \delta(k_x^2 + k_y^2 - k_0^2) dk_x dk_y. \quad (9.14)$$

При произвольном выборе амплитуд $A(k_x, k_y)$ движение жидкости будет сильно нерегулярным. Из опыта, однако, известно, что при слабой надкритичности конвекция жидкости происходит упорядоченным образом. В этом случае жидкость разбивается на отдельные одинаковые конвективные ячейки, в каждой из которых движение жидкости происходит независимо от остальных. Такие конвективные ячейки образуют на горизонтальной поверхности жидкости периодическую структуру (двумерную кристаллическую решетку). Так как покрыть плотно плоскость можно лишь прямоугольниками, правильными треугольниками и шестиугольниками, то эти фигуры исчерпывают все возможные формы конвективных ячеек. Рассмотрим теперь, какому набору амплитуд $A(k_x, k_y)$ в (9.14) соответствует каждая из таких ячеек, и определим структуру течения жидкости в них.

Прямоугольным ячейкам соответствует решение, получающееся в результате сложения двух векторов в плоскости (k_x, k_y) с одинаковыми ам-

плитудами. Действительно, пусть есть два вектора (\vec{k}_1 и \vec{k}_2) длины k_0 с углом α (рис. 9.2). Выберем теперь направление осей (k_x, k_y) указанным образом, так что $\vec{k}_1 = \left(k_0 \cos \frac{\alpha}{2}, k_0 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$, $\vec{k}_2 = \left(k_0 \cos \frac{\alpha}{2}, -k_0 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$. Тогда при $A_1 = A_2 = v_0/2$ вертикальная составляющая скорости v_z в жидкости запишется так:

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{v_0}{2} \sin \frac{\pi z}{L} \{\cos(k_{1x}x + k_{1y}y) + \cos(k_{2x}x + k_{2y}y)\} = \\ &= v_0 \sin \frac{\pi z}{L} \cos \left(k_0 x \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(k_0 y \sin \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (9.15)$$

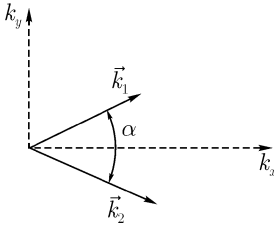


Рис. 9.2. Базисные векторы прямоугольных ячеек

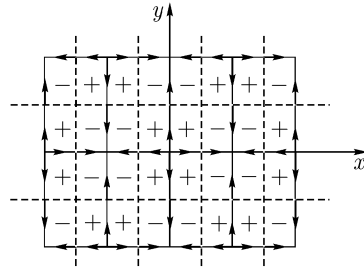


Рис. 9.3. Прямоугольные конвективные ячейки

Как следует из полученного в предыдущей задаче решения, при заданном \vec{k}_\perp горизонтальная скорость жидкости $\vec{v}_\perp \parallel \vec{k}_\perp$. Поэтому в данном случае

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp = \vec{v}_{\perp 1} + \vec{v}_{\perp 2} = & -\frac{\pi}{k_0 L} \frac{v_0}{2} \cos \frac{\pi z}{L} \left\{ \frac{\vec{k}_1}{k_0} \sin(k_{1x}x + k_{1y}y) + \right. \\ & \left. + \frac{\vec{k}_2}{k_0} \sin(k_{2x}x + k_{2y}y) \right\} \end{aligned}$$

или, покомпонентно,

$$\begin{cases} v_x = -v_0 \frac{\pi \cos \alpha/2}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \sin \left(k_0 x \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(k_0 y \sin \frac{\alpha}{2}\right); \\ v_y = -v_0 \frac{\pi \sin \alpha/2}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \cos \left(k_0 x \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(k_0 y \sin \frac{\alpha}{2}\right). \end{cases} \quad (9.16)$$

Изобразим теперь на плоскости (x, y) (рис. 9.3) горизонтальные линии тока (v_x, v_y) и линии, где $v_z(x, y) = 0$. На штрихованных линиях $v_z = 0$, а жирные линии со стрелками изображают особые (сепаратрисные) линии тока в плоскости (x, y) , соответствующие границам конвективных ячеек на поверхности жидкости ($z = L$). На рисунке принято, что $v_0 > 0$, так что знак $(+)$ соответствует движению жидкости вверх, а $(-)$ — вниз. Ячейка представляет собой прямоугольный параллелепипед с высотой L и сторонами $\Delta x = \pi/k_0 \cos \frac{\alpha}{2} = L \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha/2}$; $\Delta y = \pi/k_0 \sin \frac{\alpha}{2} = L \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha/2}$ (при $\alpha \rightarrow 0$

такая ячейка вырождается в бесконечную вдоль y полосу с шириной $L\sqrt{2}$). В свою очередь каждая ячейка разделяется на 4 части (см. рис. 9.3), в двух из которых жидкость поднимается вверх, а в двух других — опускается вниз.

Как видно из рис. 9.3, соседние ячейки отличаются друг от друга обращением поля скоростей в одной из них на противоположное. Рассмотрим теперь треугольную структуру, когда конвективная ячейка представляет собой призму, основанием которой является равносторонний треугольник. В этом случае решение является суперпозицией возмущений с тремя векторами \vec{k}_1, \vec{k}_2 и \vec{k}_3 (рис. 9.4): $\vec{k}_1 = k_0(0, 1)$; $\vec{k}_2 = k_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{k}_3 = k_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, и такими амплитудами: $A_1 = A_2 = A_3 = -iv_0$. Тогда из (9.14) следует:

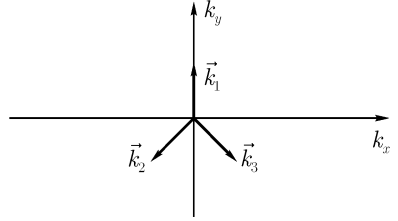


Рис. 9.4. Базисные векторы треугольных ячеек

$$v_z = v_0 \sin \frac{\pi z}{L} \left\{ \sin k_0 y + \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) - \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) \right\};$$

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \left\{ \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) - \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) \right\};$$

$$v_y = \frac{v_0}{2} \frac{\pi}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \left\{ 2 \cos k_0 y - \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) - \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) \right\}.$$

При этом на плоскости (x, y) граничные линии тока и линии с $v_z = 0$ выглядят следующим образом (рис. 9.5).

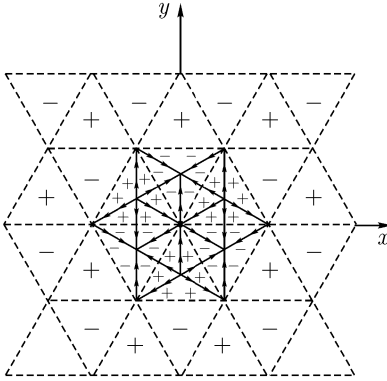


Рис. 9.5. Течение жидкости в треугольных конвективных ячейках

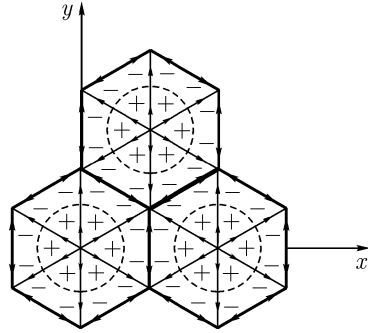


Рис. 9.6. Гексагональные ячейки Бенара

Линии, на которых $v_z = 0$ (штриховые линии на рисунке), представляют собой прямые, разбивающие плоскость (x, y) на правильные треугольники со стороной $4\pi/k_0\sqrt{3}$. В каждом из них жидкость либо поднимается вверх (+), либо опускается вниз (-). Особые горизонтальные линии тока, соответствующие границам конвективных ячеек на поверхности $z = L$, изображены на рисунке толстыми линиями со стрелками, указывающими направление течения жидкости. Как видно, каждая ячейка представляет собой правильную трехгранную призму со стороной, равной $4\pi/3k_0$. Равносторонний треугольник в горизонтальном сечении ячейки делится своей высотой на две половины. При этом, как и в случае прямоугольников, соседние ячейки отличаются друг от друга обращением поля скоростей.

Ячейки, представляющие собой шестигранные призмы (их называют ячейками Бенара), образуют в горизонтальной плоскости решетку из правильных шестиугольников. Она строится из тех же базисных векторов $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$, что и треугольная решетка, но с другими амплитудами: $A_1 = A_2 = A - 3 = v_0$. При этом

$$v_z = v_0 \sin \frac{\pi z}{L} \left\{ \cos k_0 y + \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) + \cos k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) \right\};$$

$$v_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \left\{ \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) + \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) \right\};$$

$$v_y = -\frac{v_0}{2} \frac{\pi}{k_0 L} \cos \frac{\pi z}{L} \left\{ 2 \cos k_0 y + \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) - \sin k_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} \right) \right\}.$$

Картина течения жидкости выйдет так, как изображено на рис. 9.6. Предельные горизонтальные линии тока такие же, как и в предыдущем случае, т. е. образуют систему правильных треугольников. Но теперь они уже не являются одинаковыми из-за различия в вертикальной составляющей скорости. Линии $v_z(x, y) = 0$ представляют собой в этом случае систему изолированных друг от друга замкнутых кривых, по случайной причине очень близких к окружностям (штриховые линии на рисунке). Внутри них жидкость поднимается (мы считаем, что $v_0 > 0$), а вне — опускается. Поэтому единичным структурным элементом оказывается правильный шестиугольник в плоскости (x, y) , имеющий сторону $4\pi/3k_0$. Конвективная ячейка представляет собой шестигранную призму, в центральной части которой движение жидкости направлено вверх, а вблизи границ — вниз. В отличие от прямоугольных и треугольных, все гексагональные ячейки одинаковы.

9-4. Найти связь между конвективным потоком тепла (направленным от нижней плоскости к верхней) и кинетической энергией движения жидкости при слабой надкритичности для конвективных ячеек квадратной формы.

Конвективный поток тепла описывается выражением $\vec{q}^v = \rho_0 c T \vec{v}$, так что интересующая нас вертикальная его компонента $q_z = \rho_0 c T v_z$. Так как суммарный вертикальный поток жидкости внутри каждой конвективной ячейки равен нулю, то полный конвективный поток тепла в ячейке есть величина, квадратичная по амплитуде конвективных возмущений, $Q = \int q_z dx dy = \rho_0 c S \langle \delta T v_z \rangle$, где δT — связанное с конвекцией возмущение температуры жидкости, S — площадь поперечного сечения ячейки, а скобки означают усреднение по этому сечению. Величину δT можно выразить через v_z , используя уравнение теплопроводности из (9.10), причем при слабой надкритичности можно не учитывать там временную производную от δT :

$$v_z \frac{(T_1 - T_0)}{L} = \chi \Delta \delta T = -\chi \left(k_0^2 + \frac{\pi^2}{L^2} \right) \delta T, \quad \text{т. е.} \quad \delta T = \frac{2L(T_0 - T_1)}{3\pi^2 \chi} v_z$$

(здесь учтено, что $k_0^2 = \pi^2/2L^2$). Из решения предыдущей задачи следует, что в случае квадратной ячейки ее размеры $\Delta x = \Delta y = 2L$, а вертикальная скорость, согласно (9.15), $v_z = v_0 \sin(\pi z/L) \cos(\pi x/2L) \cos(\pi y/2L)$. Отсюда сразу находим, что $\langle \delta T v_z \rangle = \frac{(T_0 - T_1) L v_0^2}{6\pi^2 \chi} \sin^2 \pi z/L$, а конвективный

тепловой поток

$$Q = \frac{2\rho_0 c v_0^2 L^3 (T_0 - T_1)}{3\pi^2 \chi} \sin^2 \frac{\pi z}{L}.$$

Кинетическая энергия движения в ячейке $W_k = \int \frac{\rho_0 v^2}{2} dV = \frac{3}{4} \rho_0 v_0^2 L^2$ (здесь использованы формулы (9.16) для v_x и v_y), так что окончательно получаем

$$Q = \frac{8c(T_0 - T_1)W_k}{9\pi^2 \chi} \sin^2 \pi z / L.$$

Фигурирующая здесь установившаяся амплитуда скорости v_0 должна определяться из нелинейных уравнений. Из общих соображений следует [9, § 26], что при слабой надкритичности ($R - R_{кр} \ll R_{кр}$) величина $v_0 \sim \sqrt{R - R_{кр}}$, так что конвективный тепловой поток $Q \sim (R - R_{кр})$ (это так называемый «мягкий режим» слабонадкритической конвекции).

9-5. Оценить поток тепла в нагреваемой снизу жидкости в режиме сильно турбулентной конвекции, когда число R значительно превышает пороговое значение $R_{кр}$.

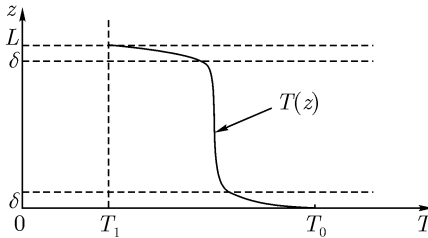


Рис. 9.7. Профиль температуры при турбулентной конвекции

В режиме турбулентной конвекции перенос тепла в основном объеме жидкости обеспечивается за счет ее движения (конвективный поток тепла, см. задачу 9-4), а диффузия тепла (теплопроводность) играет роль только вблизи ограничивающих жидкость плоскостей $z = 0, L$. Поэтому усредненный по турбулентным пульсациям профиль температуры жидкости $T(z)$ имеет вид, качественно изображенный на

рис. 9.7.

Температура жидкости почти однородна во всем объеме, а скачок температуры $\Delta T = T_0 - T_1$ происходит в тонких пристеночных слоях толщиной $\delta \ll L$, где теплопроводность играет доминирующую роль. При этом величина δ устанавливается такой, чтобы пристеночный слой оставался на пороге возникновения конвекции (см. задачу 9-2), так что соответствующее

число Рэлея

$$R_\delta \sim \alpha g \delta^3 (T_0 - T_1) / \gamma \chi \sim R_{кр}.$$

Поскольку число Рэлея для всего объема жидкости есть $R = \alpha g L^3 (T_0 - T_1) / \nu \chi$, отсюда следует, что

$$\delta \sim L (R_{кр} / R)^{1/3}.$$

Искомый поток тепла можно теперь оценить следующим образом. Вблизи граничных плоскостей этот поток определяется теплопроводностью жидкости, следовательно

$$q = \kappa \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \sim \kappa \frac{(T_0 - T_1)}{\delta} \sim \kappa \frac{(T_0 - T_1)}{L} (R / R_{кр})^{1/3}.$$

Так как поток тепла в неподвижной жидкости (в отсутствие конвекции) был бы, очевидно, равен $\kappa \frac{(T_0 - T_1)}{L}$, то развитие конвекции приводит к усилению теплопередачи в $(R / R_{кр})^{1/3}$ раз.

9-6. Оценить порядок величины v_τ изменения скорости данного перемещающегося в пространстве элемента турбулентной жидкости в течение промежутка времени τ , малого по сравнению с характерным временем $T_L \sim L/u$ движения в целом.

При развитой турбулентности [9, § 33] хаотическое движение жидкости представляет собой суперпозицию вихревых течений различных пространственных масштабов λ . В инерционном интервале $\lambda_0 \lesssim \lambda \lesssim L$ (L — размер основного течения, λ_0 — масштаб движений, где происходит вязкая диссипация энергии) характерная амплитуда скорости таких вихрей $v_\lambda \sim u(\lambda/L)^{1/3}$ — закон Колмогорова–Обухова (u — скорость основного течения). Рассмотрим теперь влияние движения с заданным λ на изменение скорости выделенного элемента жидкости. Это влияние существенно зависит от соотношения между интересующим нас временным интервалом τ и характерным периодом движения $T_\lambda \sim \lambda/v_\lambda \sim T_L(\lambda/L)^{2/3}$. Если $\tau \gg T_\lambda$ (что справедливо для достаточно мелкомасштабных вихрей), то изменение скорости $v_\tau(\lambda)$ будет, очевидно, порядка амплитуды скорости таких движений $v_\tau(\lambda) \sim v_\lambda \sim u(\lambda/L)^{1/3}$. Наоборот, в случае, когда $\tau \ll T_\lambda$ (большие λ), изменение скорости элемента жидкости составляет лишь малую часть от полной амплитуды:

$$v_\tau \sim v_\lambda \tau / T_\lambda \sim \frac{u^2}{L} \tau (\lambda/L)^{-1/3}.$$

Как видно из таких оценок, наибольший вклад в искомое изменение скорости v_τ будут вносить такие движения, характерный период которых $T_{\lambda_*} \sim \tau$, т.е. $\lambda_* \sim L(\tau/T_\lambda)^{3/2}$. Отсюда получаем, что $v_\tau \sim v_{\lambda_*} \sim u(\tau/T_L)^{1/2}$. Данная оценка верна до тех пор, пока τ не слишком мало, так что соответствующий ему размер λ_* находится еще в инерционном интервале $\lambda_* \sim L(\tau/T_L)^{3/2} \gg \lambda_0$. Если же $\tau < T_L(\lambda_0/L)^{2/3}$, то на таких промежутках времени движение элемента жидкости имеет регулярный характер, так что изменение его скорости $v_\tau \sim \tau$.

9-7. *Найти закон изменения во времени расстояния между двумя близкими элементами жидкости при ее турбулентном движении.*

Пусть в некоторый момент времени два элемента жидкости отстоят друг от друга на расстоянии l , причем $\lambda_0 \ll l \ll L$. Дальнейшее расхождение этих элементов связано с различием их скоростей. Для оценки последнего рассмотрим вклад, вносимый в него движениями с различными масштабами. Если $\lambda \lesssim l$, то разность скоростей $v_l \sim v_\lambda \sim u(\lambda/L)^{1/3}$. Если же $\lambda \geq l$, то $v_l \sim v_{\lambda l/\lambda} \sim u \frac{l}{L} (\lambda/L)^{-2/3}$. Таким образом, главную роль играют вихри с размером $\lambda \sim l$. Разность скоростей поэтому равна $v_l \sim u(l/L)^{1/3}$. Соответственно этому расстояние между двумя жидкими элементами будет изменяться по такому закону: $dl/dt \sim v_l \sim \frac{u}{L^{1/3}} l^{1/3}$.

Отсюда видно, что расхождение двух близких элементов жидкости имеет самоускоряющийся характер, поэтому через некоторое время расстояние между ними уже не зависит от своего начального значения и увеличивается по такому закону: $l(t) \sim u^{3/2} t^{3/2} / L^{1/2}$.

9-8. *В трубе с радиусом a и длиной L стационарное течение несжимаемой жидкости с плотностью ρ и вязкостью η создается перепадом давлений на концах трубы Δp . Найти расход жидкости в трубе при малых Δp , когда течение ламинарно и при большом перепаде давлений (в режиме сильно турбулентного течения).*

При установившемся ламинарном течении из уравнения Навье–Стокса (8.4) для скорости жидкости $v_z(r) \equiv v(r)$ получим такое уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\eta L}.$$

Его решение, конечное во всем сечении трубы и обращающееся в нуль при $r = a$; есть $v(r) = \Delta p(a^2 - r^2)/4\eta L$. Таким образом, профиль скорости в трубе получается параболическим (рис. 9.8, а). Расход жидкости Q (т.е.

масса жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени) в этом случае равен:

$$Q = 2\pi\rho \int_0^a vr \, dr = \frac{\pi\Delta p a^4}{8\nu L} \quad (9.17)$$

— формула Пуазейля.

Перейдем теперь к случаю турбулентного течения. Его удобно описывать в терминах потока z -компоненты импульса на поверхности стенки трубы (это есть сила трения на единицу поверхности стенки) σ . Из баланса сил $\pi a^2 \Delta p = \sigma 2\pi a L$ находим, что $\sigma = \Delta p a / 2L$. При заданном σ распределение средней скорости течения вблизи стенки описывается логарифмическим законом [9, § 42]:

$$v(y) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \ln \left(\frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \right), \quad (9.18)$$

где y — расстояние от стенки, а κ — численная постоянная ($\kappa \approx 0,4$). Такой логарифмический профиль скорости справедлив, пока $y \ll a$ и поток импульса является постоянным. Однако при турбулентном течении, когда число Рейнольдса $Re \equiv av/\nu$ велико, эта формула дает правильный (с логарифмической точностью) результат и для основного сечения трубы. Связано это с тем, что уже при $y \ll a$ стоящее в (9.18) под знаком логарифма выражение становится много больше единицы, так что логарифм мало меняется при дальнейшем увеличении y . Действительно, при $y \sim a$ аргумент логарифма есть $(a/\nu) \sqrt{a\Delta p/2\rho L}$. С другой стороны, при ламинарном течении характерная скорость жидкости равна $v \sim \Delta p a^2 / \rho \nu L$, так что число Рейнольдса $Re = av/\nu \sim \Delta p a^3 / \rho \nu^2 L$. Отсюда видно, что по порядку величины аргумент логарифма есть \sqrt{Re} , а так как переход к турбулентному течению происходит при $Re \gg 1$, то этот аргумент тоже большой. Таким образом, при турбулентном течении в трубе средняя скорость возрастает в пристеночном слое от нуля на самой стенке (где выражение (9.18) уже не применимо), до некоторой почти постоянной величины (пропорциональной логарифму большого числа).

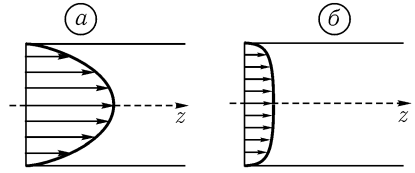


Рис. 9.8. Профиль скорости для ламинарного (а) и турбулентного (б) течений жидкости по трубе

Поэтому в основном сечении трубы скорость жидкости почти не меняется (см. рис. 9.8, б) и равна

$$v \sim \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\Delta p a}{2L\rho}} \ln \left(\frac{a}{\nu} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho L}} \right).$$

Соответственно этому расход жидкости

$$Q \approx \sigma a^2 \rho v \approx \frac{\pi a^2 \rho}{\kappa} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho L}} \ln \left(\frac{a}{\nu} \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho L}} \right).$$

Отметим, что если в ламинарном режиме расход жидкости растет пропорционально перепаду давления (9.17), то при турбулентном течении $Q \sim \sqrt{\Delta p}$, и расход жидкости много меньше, чем он был бы при ламинарном течении (при том же перепаде давления Δp).

9-9. Оценить пространственный масштаб движений, в которых происходит вязкая диссипация энергии, для основного сечения трубы в рассмотренном в предыдущей задаче турбулентном режиме.

Для основного сечения трубы перепад средней скорости течения равен, по порядку величины, $\sqrt{\sigma/\rho} \sim \sqrt{a\Delta p/\rho L}$. Поэтому крупномасштабные пульсации имеют здесь характерный размер a и амплитуду скорости $u \sim \sqrt{a\Delta p/\rho L}$. Тогда, согласно закону Колмогорова–Обухова, в инерционном интервале имеем

$$v_\lambda \sim u \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/3} \sim \sqrt{\frac{a\Delta p}{\rho L}} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/3}.$$

Нижняя граница инерционного интервала (λ_0), где становится существенной вязкость жидкости, определяется тем, что для движений с таким масштабом соответствующее число Рейнольдса порядка единицы,

$$\text{Re}(\lambda_0) \sim v_{\lambda_0} \lambda_0 / \nu \sim \left(\frac{a\Delta p}{\rho L} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda_0}{a} \right)^{1/3} \frac{\lambda_0}{\nu} \sim 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_0 \sim a \left(\frac{\nu^2 \rho L}{a^3 \Delta p} \right)^{3/8}.$$

§ 10. Звуковые волны

В линейном (акустическом) приближении распространение звуковых волн в среде описывается волновым уравнением для потенциала скорости $\varphi(\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi)$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = 0, \quad (10.1)$$

где скорость звука c_0 определяется адиабатической сжимаемостью вещества,

$$c_0^2 = (\partial p / \partial \rho)_s.$$

Для бегущей волны, распространяющейся в направлении, задаваемом единичным вектором \vec{n} , зависимость от φ от координат и времени принимает вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \vec{n} - c_0 t). \quad (10.2)$$

В этом случае возмущения плотности и давления в среде ($\delta\rho$ и δp) однозначно связаны со скоростью $\vec{v} = \vec{n}v$:

$$\delta\rho = \rho v / c_0; \quad \delta p = \rho v c_0; \quad v = -f'. \quad (10.3)$$

При этом плотность энергии E , поток энергии \vec{q} и тензор плотности потока импульса Π_{ik} , связанные с распространением в среде такой волны, равны

$$E = \rho v^2; \quad \vec{q} = c_0 E \vec{n}; \quad \Pi_{ik} = E n_i n_k. \quad (10.4)$$

10-1. Определить движение, возникающее в идеальном (в смысле отсутствия диссипации) сжимаемом газе, если в начальный момент в нем заданы одномерные распределения скорости $v_x(x) \equiv u(x)$ и давления $p(x) = p_0 + a(x)$. Считать, что $a(x)$ и $u(x)$ обращаются в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$ и достаточно малы, так что применимо акустическое приближение.

Очевидно, что и дальнейшее движение газа будет одномерным, следовательно, линеаризованные уравнения непрерывности и движения запишутся так:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \quad (10.5)$$

где $\delta\rho$ и δp — возмущения плотности и давления, связанные условием постоянства энтропии, $\delta p = (\partial p / \partial \rho)_s \delta\rho = c_0^2 \delta\rho$, c_0 — скорость звука. Из (10.5) для скорости газа $v(x, t)$ получается волновое уравнение

$\partial^2 v / \partial t^2 - c_0^2 \partial^2 v / \partial x^2 = 0$. Для нахождения его общего решения введем вместо x и t новые независимые переменные $\xi = x - c_0 t$ и $\eta = x + c_0 t$. Нетрудно проверить, что в переменных (ξ, η) волновое уравнение принимает вид $\partial^2 v / \partial \xi \partial \eta = 0$. Поэтому его общее решение выглядит так: $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, где f и g — произвольные функции. Возвращаясь к переменным x и t , получим

$$v(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t).$$

Вид функций f и g определяется начальными условиями при $t = 0$, когда $v(x, 0) = u(x)$, а

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p(x, 0)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{da}{dx}.$$

Отсюда следует, что $f(x) + g(x) = u(x)$,

$$c_0 \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{da}{dx}.$$

Так как при $x \rightarrow \pm\infty$ $v(x, t)$ и $a(x)$ обращаются в нуль, то $g(x) - f(x) = -\frac{1}{c_0 \rho} a(x)$, и окончательно получаем

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [u(x - c_0 t) + u(x + c_0 t)] + \frac{1}{2c_0 \rho} [a(x - c_0 t) - a(x + c_0 t)]. \quad (10.6)$$

10-2. В жидкости распространяется плоская волна сжатия с максимальным давлением p_m и длиной импульса l . Давление в ней падает линейно от максимального своего значения до нуля. При подходе такой волны к свободной поверхности (которая предполагается параллельной плоскости фронта) возникает волна разрежения, создающая в жидкости отрицательные давления. Если такая отрицательная нагрузка превышает по абсолютной величине значение $p_{кр}$, то происходит разрыв жидкости (явление откола). Считая применимым акустическое приближение, определить сколько слоев жидкости оторвется и какой будет толщина оторвавшихся слоев, если $p_m = n p_{кр}$ (n — целое число).

Так как давление жидкости у свободной поверхности должно быть рано нулю, то в момент, когда фронт волны сжатия подходит к этой поверхности (пусть это будет при $t = 0$), в обратном направлении начинает

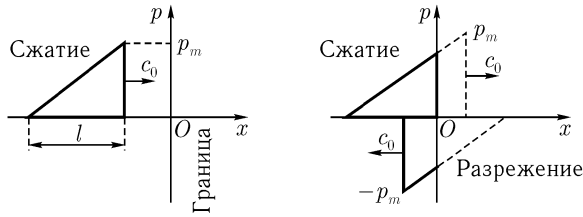


Рис. 10.1. Сложение импульсов сжатия и разрежения

распространяться волна разрежения, причем профиль давления имеет в ней противоположный знак (рис. 10.1). Так как обе волны распространяются с одинаковой скоростью, равной скорости звука c_0 , то в момент времени $t = l/2nc_0$ на расстоянии $|x| = l/2n$ от границы суммарное давление в жидкости будет равно $-p_{кр} = -p_m/n$, т.е. произойдет откол слоя жидкости толщиной $\delta = l/2n$. После этого мы возвращаемся к исходной ситуации с тем лишь отличием, что максимальное давление в волне сжатия равно теперь $p'_m = (n - 1)p_{кр}$. Поэтому полное число «оторванных» слоев будет равно n , и каждый из них имеет толщину $\delta = l/2n$.

10-3. Монохроматическая звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 , отражается по нормали от границы раздела этой жидкости с другой жидкостью, имеющей плотность ρ_2 и скорость звука c_2 . Найти среднюю (по времени) силу давления на единицу площади границы раздела жидкостей, если средняя плотность потока энергии в падающей звуковой волне равна q_1 .

После отражения в жидкостях будут распространяться три монохроматические волны с частотой ω , равной частоте падающей волны (рис. 10.2): падающая и отраженная волны в жидкости 1 и преломленная волна в жидкости 2. Обозначим амплитуды их потенциалов скорости соответственно через A_1 , A_2 и A_3 , получим

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 e^{i\omega\left(-\frac{z}{c_1}-t\right)}; & \varphi_2 &= A_2 e^{i\omega\left(\frac{z}{c_1}-t\right)}; \\ \varphi_3 &= A_3 e^{i\omega\left(\frac{z}{c_2}-t\right)}.\end{aligned}$$

Здесь использована связь волновых векторов звуковых волн и их частот $\vec{k} = \omega \vec{n}/c$ (\vec{n} — единичный вектор в направлении распространения волны). На поверхности раздела (при $z = 0$) должны быть равны изменения дав-

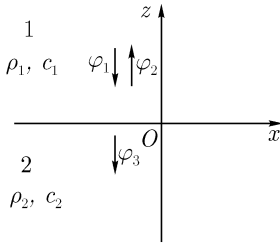


Рис. 10.2. Отражение звуковой волны от границы раздела жидкости

лений и нормальные компоненты скорости в обеих средах, что и позволяет связать амплитуды отраженной (A_2) и преломленной (A_3) волн с амплитудой падающей волны A_1 . Из линеаризованного уравнения движения $\rho \partial \vec{v} / \partial t = -\vec{\nabla} \delta p$ находим возмущение давлений δp в звуковых волнах: $\delta p = \rho \partial \varphi / \partial t = -i\omega \rho \varphi$. После этого граничные условия приводят к таким равенствам:

$$i\omega \rho_1 (\varphi_1 + \varphi_2)|_{z=0} = i\omega \rho_2 \varphi_3|_{z=0};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Отсюда следует

$$A_2 = A_1 \frac{c_2 \rho_2 - c_1 \rho_1}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2}; \quad A_3 = A_1 \frac{2c_2 \rho_1}{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2}. \quad (10.7)$$

В свою очередь амплитуда A_1 выражается через заданный поток энергии q_1 , согласно соотношениям (10.4):

$$q_1 = c_1 \rho_1 \bar{v}_1^2 = \frac{\omega^2 \rho_1}{2c_1} |A_1|^2. \quad (10.8)$$

Искомое давление p на границу раздела жидкостей равно суммарному изменению потока z -компоненты импульса в звуковых волнах. В рассматриваемом здесь случае нормального падения во всех трех волнах отлична от нуля, согласно (10.4), лишь компонента тензора потока импульса Π_{zz} . Поэтому давление $p = \Pi_{zz}^{(1)} + \Pi_{zz}^{(2)} - \Pi_{zz}^{(3)}$. Используя выражение (10.4) и соотношения (10.7), (10.8), получим

$$p = \frac{2q_1}{c_1} \frac{(c_1^2 \rho_1^2 + c_2^2 \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2)}{(c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2)^2}.$$

10-4. В прямой трубе длиной L , закрытой с обоих концов и установленной вертикально в поле тяжести g , находится идеальный газ с температурой T . Молекулярная масса газа μ , показатель адиабаты γ . Найти частоты собственных колебаний в отсутствие диссипации.

В состоянии равновесия давление газа меняется с высотой по закону $dp/dz = -\rho g$. Вместе с уравнением состояния $p = R\rho T/\mu$ это дает известную барометрическую формулу для распределения плотности и давления: $\rho = \rho_0 \exp(-z/h)$; $p = RT\rho_0\mu^{-1} \exp(-z/h)$; $h = (\mu g/RT)^{-1}$. При возникновении продольных колебаний газа появляются возмущения плотности $\delta\rho(z, t)$, давления $\delta p(z, t)$ и скорость $v_z(z, t) \equiv v(z, t)$. Линеаризуя уравнения непрерывности, движения и сохранения энтропии и считая возмущения δ , $\delta\rho$ и $v \sim \exp(-i\omega t)$, получаем

$$-i\omega\delta\rho + \frac{\partial}{\partial z}(v\rho_0 e^{-z/h}) = 0; \quad (10.9)$$

$$-i\omega\rho_0 e^{-z/h}v = -\frac{\partial\delta p}{\partial z} - g\delta\rho; \quad (10.10)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial z}; \quad s \sim p\rho^{-\gamma},$$

откуда

$$i\omega \left(\frac{\delta p}{\rho^\gamma} - \frac{\gamma p}{\rho^{\gamma+1}} \delta\rho \right) + v\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (10.11)$$

Выражая теперь $\delta\rho$ и δp через v с помощью уравнений (10.9), (10.11) и подставляя эти выражения в (10.10), нетрудно получить, что величина $u(z) \equiv v(z) \exp(-z/h)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$-\omega^2 u = c_0^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \gamma g \frac{du}{dz},$$

где $c_0 = (\gamma RT/\mu)^{1/2}$ — скорость звука в газе. Так коэффициенты этого уравнения не зависят уже от z , его решение можно искать в виде $u(z) \sim e^{ikz}$, откуда следует, что

$$k = i\gamma g/2c_0^2 \pm \sqrt{\omega^2/c_0^2 - \gamma^2 g^2/4c_0^4}.$$

Поэтому общее его решение

$$u(z) = A e^{-\gamma g z/2c_0^2} e^{iz\sqrt{\omega^2/c_0^2 - \gamma^2 g^2/4c_0^4}} + B e^{-\gamma g z/2c_0^2} e^{-iz\sqrt{\omega^2/c_0^2 - \gamma^2 g^2/4c_0^4}}.$$

Из граничного условия $u(0) = 0$ следует, что $B = -A$, а второе граничное условие $u(L) = 0$ определяет собственные частоты колебаний столба газа:

$$\sqrt{\omega^2/c_0^2 - \gamma^2 g^2/4c_0^4} = n\pi/L; \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$\omega_n = (\omega_g^2 + \omega_p^2)^{1/2},$$

где $\omega_g = \gamma g / 2c_0$, $\omega_p = n\pi c_0 / L$.

Из этого выражения видны два различных механизма таких колебаний газа. Первая частота, ω_g , обязана гравитации, в то время как вторая, ω_p , описывает стоячие звуковые волны связанные с давлением газа. Отношение этих частот, $\omega_g / \omega_p \sim L / nh$. Поэтому при $L \gg h$ моды с $n < L/h$ есть гравитационные колебания (g -моды), а звуковые (p -моды) соответствуют высоким обертонам:

$$n > L/h \gg 1.$$

Вертикальное распределение скорости газа при этом есть

$$v(z) = v_0 e^{z/2h} \sin(n\pi z / L),$$

так что при $L \gg h$ амплитуда колебаний скорости газа сильно нарастает в верхней части столба, где мала плотность газа.

10-5. Оценить декремент «радиационного» затухания малых радиальных колебаний пузырька газа радиусом R (показатель адиабаты газа γ), находящегося в идеальной жидкости с давлением p и плотностью ρ .

Радиационное затухание колебаний газового пузырька связано с потерями энергии, возникающими из-за излучения им звуковых волн (такое излучение возникает при учете конечной сжимаемости жидкости). Для оценки предположим (и это будет подтверждено полученным ниже результатом), что такое затухание является слабым, т. е. его декремент $\Gamma \ll \omega$ — частоты колебаний.

Как было получено в задаче 2-6, $\omega = (3\gamma p / \rho R^2)^{1/2}$. В несжимаемой жидкости при изменении радиуса пузырька $r_0(t) = R + ae^{-i\omega t}$ возникает течение со скоростью $v_r(r, t) \equiv v(r, t) = -i\omega a R^2 e^{-i\omega t} / r^2$, точно «отслеживающее» во всем объеме жидкости изменение радиуса $r_0(t)$ (в несжимаемой жидкости скорость звука $c_0 \rightarrow \infty$). При учете конечности c_0 такое поле скоростей успевает установиться лишь при $r \lesssim r_* \sim c_0 / \omega$ (это так называемая «квазистационарная» зона). При $r > r_*$ (в «волновой» зоне) движение жидкости представляет собой сферически расходящиеся звуковые волны. Поэтому на границе этих областей (при $r > r_*$) амплитуда скорости звуковой волны $\tilde{v}_* \sim v(r_*) \sim \omega a R^2 / r_*^2$. Зная величину \tilde{v}_* , нетрудно подсчитать поток энергии S , уносимый звуковыми волнами. Так как согласно (10.4), плотность потока энергии $q \sim c_0 \rho \tilde{v}_*^2$,

то $S \sim qr_*^2 \sim \rho c_0 \omega^2 a^2 R^4 / r_*^2 \sim \rho \omega^4 a^2 R^4 / c_0$. Декремент затухания $\Gamma \sim S/\varepsilon$, где ε — энергия колебаний, которая по порядку величины равна кинетической энергии жидкости, колеблющейся вместе с пузырьком. Так что $\varepsilon \sim \int \rho v^2 dV \sim \int_R \rho \omega^2 a^2 R^4 dr \sim \rho \omega a^2 R^3$. Отсюда $\Gamma \sim S/\varepsilon \sim \omega^2 R / c_0$. Отношение $\Gamma/\omega \sim \omega R / c_0 \sim (3\gamma p / \rho c_0^2)^{1/2}$. Так как скорость звука в жидкости $c_0 \gg (p/\rho)^{1/2}$, то всегда $\Gamma/\omega \ll 1$, т. е. радиационное затухание таких колебаний действительно является слабым.

10-6. Найти декремент затухания звуковых волн в идеальном газе, обусловленного теплопроводностью газа. Молекулярная масса газа равна μ , показатель адиабаты γ , коэффициент теплопроводности \varkappa .

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси z . Тогда возмущение плотности $\delta\rho$, давления δp и скорость газа $v_z \equiv v$ пропорциональны $\exp(ikz - i\omega t)$, так что линеаризованные уравнения непрерывности, движения и изменения энергии энтропии запишутся так:

$$\begin{cases} -i\omega\delta\rho + ikvp = 0; & i\omega\rho v = ik\delta p; \\ -i\omega\rho T\delta s = \delta Q. \end{cases} \quad (10.12)$$

Здесь δs — изменение энтропии единицы массы газа, а δQ — объемное выделение тепла вследствие теплопроводности. Так как энтропия s единицы массы идеального газа с показателем адиабаты γ равна $s = \frac{R}{\mu(\gamma-1)} \ln(p/\rho^\gamma)$, а диссипируемая в единице объема энергия $\delta Q = \operatorname{div}(\varkappa \vec{\nabla} T) = \varkappa \Delta T = -k^2 \varkappa \delta T$ [6, § 43], то из уравнений (10.12) следует

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\omega^2}{k^2}; \\ -i\omega\rho T \frac{R}{\mu(\gamma-1)} \left(\frac{\delta p}{p} - \gamma \frac{\delta\rho}{\rho} \right) &= -k^2 \varkappa \delta T. \end{aligned}$$

Используя уравнения состояния идеального газа, $p = R\rho T/\mu$, получим следующее дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω с волновым вектором k :

$$\frac{\omega^2}{k^2 c_0^2} = 1 - \frac{k^2 \varkappa (\gamma-1)/\gamma}{k^2 \varkappa - i\omega\rho R/\mu(\gamma-1)}; \quad c_0^2 = \gamma p/\rho. \quad (10.13)$$

Здесь нет необходимости решать уравнение третьего порядка для определения ω , так как в области применимости исходных газодинамических уравнений затухание звука является слабым (см. ниже). Поэтому частоту волны ω можно представить в виде $\omega \approx kc_0 - i\Gamma$, где декремент затухания $\Gamma \ll kc_0$. Соответственно этому во втором слагаемом в правой части (10.13) следует считать коэффициент теплопроводности малым, так что в знаменателе им можно пренебречь и положить там $\omega \approx kc_0$. Тогда сразу следует $\Gamma = (\gamma - 1)^2 \mu k^2 \kappa / 2\gamma \rho R$.

Приведем теперь оценки, показывающие, что затухание действительно является слабым. В газах коэффициент теплопроводности $\kappa \sim R\rho v_T l / \mu$, где l — длина свободного пробега молекул газа, а v_T — их тепловая скорость. Поэтому отношение $\Gamma / kc_0 \sim v_T k l / c_0 \sim v_T l / c_0 \lambda$ (λ — длина волны). Так как скорость звука в газе $c_0 \sim v_T$, то это отношение порядка l / λ , и оно предполагается малым по самому смыслу макроскопического описания поведения газа уравнениями газодинамики.

10-7. Найти декремент затухания звуковых волн, связанных с присутствием в жидкости небольшого количества газовых пузырьков.

Рассмотрим жидкость с хаотически и, в среднем, однородно распределенными в ней газовыми пузырьками. Последние удобно характеризовать их функцией распределения по размерам (радиусам) $f(r)$, так что $f(r) dr$ есть число пузырьков в единице объема, имеющих радиус в интервале от r до $r + dr$. Будем считать характерный радиус пузырьков R ($R = \int_0^\infty f r dr / \int_0^\infty f dr$) малым по сравнению со средним расстоянием l между

ними ($l = \left[\int_0^\infty f dr \right]^{-1/3}$). При распространении в такой среде звуковых волн с длиной волны $\lambda \gg l$ среду можно рассматривать как «сплошную» и пользоваться макроскопическими уравнениями для средних (по объему с размером, малым по сравнению с λ , но большим по сравнению с l) величин. При таком подходе для плоской звуковой волны малой амплитуды из линеаризованных уравнений непрерывности и движения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \rho \rangle + \langle \rho \rangle \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \langle \rho \rangle \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \langle \delta p \rangle,$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \delta \rho \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta p \rangle.$$

Здесь $\langle \delta \rho \rangle$ и $\langle \delta p \rangle$ — усредненные в указанном выше смысле возмущения плотности и давления, а $\langle \rho \rangle$ — средняя плотность среды, равная $\rho_0(1 - \alpha)$, ρ_0 — плотность жидкости, а $\alpha = \frac{4}{3}\pi \int_0^\infty f r^3 dr \sim (R/l)^3 \ll 1$ — доля объема, занимаемого пузырьками (плотностью газа в них можно пренебречь). Найдем связь между $\langle \delta \rho \rangle$ и $\langle \delta p \rangle$. В отсутствие пузырьков имеем просто $\delta \rho = \delta p / c_0^2$, где c_0 — скорость звука в чистой жидкости. Теперь же возмущения давления приводят к изменению радиуса пузырьков ξ_r (так как при заданном возмущении давления δp это изменение зависит от r , мы помечаем его индексом r). Поэтому при малых α можно записать, что

$$\langle \delta \rho \rangle = \frac{\langle \delta p \rangle}{c_0^2} - 4\pi \rho_0 \int_0^\infty f(r) r^2 \xi_r dr,$$

где изменение радиуса пузырьков ξ_r во времени описывается следующими уравнениями (см. задачу 8-6):

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \omega_0^2(r) \xi_r = -\langle \delta p \rangle / r \rho_0,$$

$\omega_0^2(r) = 3\gamma p / \rho_0 r^2$ — собственная частота радиальных колебаний пузырька. Рассмотрим теперь возмущения вида $\exp(ikx - i\omega t)$. В этом случае

$$\xi_r = -\frac{\langle \delta p \rangle}{r \rho_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}; \quad \langle \delta p \rangle = \langle \delta p \rangle \left\{ \frac{1}{c_0^2} + 4\pi \int_0^\infty \frac{f(r) r dr}{\omega_0^2(r) - \omega^2} \right\}$$

и дисперсионное уравнение принимает такую форму:

$$\omega^2 = k^2 c_0^2 \left\{ 1 + 4\pi c_0^2 \int_0^\infty \frac{f(r) r dr}{\omega_0^2(r) - \omega^2} \right\}^{-1}.$$

В отсутствие пузырьков, очевидно, $\omega = kc_0$. При малых α можно использовать теорию возмущений и в первом приближении положить в подынтегральном выражении $\omega \approx kc_0$. Тогда

$$\omega \approx kc_0 \left[1 - 2\pi c_0^2 \int_0^\infty \frac{f r dr}{\omega_0^2(r) - k^2 c_0^2} \right]. \quad (10.14)$$

Оценим возникающую поправку к частоте, предполагая вначале, что знаменатель в подинтегральном выражении в (10.14) не обращается в нуль. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{f r dr}{\omega_0^2 - k^2 c_0^2} \sim \alpha / R^2 \omega_0^2(R) \sim \frac{\alpha \rho_0}{p}, \quad \text{так что} \quad \frac{\Delta \omega}{\omega} \sim \alpha \frac{c_0^2 \rho_0}{p}.$$

Из-за слабой сжимаемости жидкости скорость звука в ней $c_0 \gg (p/\rho_0)^{1/2}$ (это неравенство становится очевидным, если заметить, что $(p/\rho_0)^{1/2}$ есть по порядку величины скорость звука в газе с тем же давлением и плотностью) так что поправка к частоте будет невелика, если $\alpha \ll \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv p/\rho_0 c_0^2 \ll 1$. Таким образом, при выполнении последнего равенства ($\alpha \ll \varepsilon$) наличие пузырьков приводит лишь к малой поправке к частоте звуковой волны. Однако даже в этом случае возможен качественно новый эффект (появление затухания звука), если в интеграле (10.14) знаменатель обращается в нуль при некотором r . Это предполагает наличие в жидкости пузырьков, собственная частота колебаний которых равна частоте звуковых волн. Такое резонансное затухание, имеющее место в отсутствие каких-либо диссипативных механизмов, называется затуханием Ландау, так как впервые было получено Л. Д. Ландау для электростатических колебаний (ленгмюровских волн) в бесстолкновительной плазме (см. задачи 2-18 и 7-16). Возникающая в интеграле (10.14) особенность связана с тем, что для резонансных пузырьков изменение их радиуса ξ_r формально обращается в бесконечность. Поэтому расходимости здесь можно избежать, если учесть малое затухание в собственных колебаниях пузырьков (например, из-за диссипативных процессов в газе или вязкости жидкости [см. задачу 8-6]). Тогда у частоты $\omega_0(r)$ появится мнимая добавка $\omega_0(r) = \omega_0 - i\nu$ ($\nu > 0$), и интеграл в (10.14) будет выглядеть так:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(r) r dr}{(\omega_0 + kc_0)(\omega_0 - kc_0 - i\nu)} = \int_0^{\infty} \frac{f(r) r dr}{(\omega_0 + kc_0)} \cdot \frac{(\omega - kc_0) + i\nu}{(\omega_0 - kc_0)^2 + \nu^2}. \quad (10.15)$$

Соответственно мнимую часть имеет и интеграл (10.15). Так как $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu/[(\omega_0 - kc_0)^2 + \nu^2] = \pi \delta(\omega - kc_0)$, то

$$\text{Im} \int_0^{\infty} \frac{f(r) r dr}{(\omega_0 + kc_0)(\omega_0 - kc_0 - i\nu)} \approx \pi \int_0^{\infty} \frac{f(r) r dr}{2\omega_0^2(r)} \delta[\omega_0(r) - kc_0].$$

Отсюда нетрудно увидеть, что введением малого затухания, которое в пределе $\nu \rightarrow 0$ никак не влияет на окончательный результат, дает правило обхода особенности (полюса) при интегрировании в (10.14), а результат сводится к вычислению полувычета в точке $\omega_0(r) = kc_0$. Это правило принято называть правилом обхода Ландау. Теперь легко получить, что декремент затухания звуковых волн Γ равен

$$\Gamma = \pi^2 c_0^2 \int_0^{\infty} f(r) r dr \delta[\omega_0(r) - kc_0].$$

Если функция распределения пузырьков по размерам $f(r)$ является плавной функцией с характерным масштабом своего изменения, равным по порядку величины радиусу резонансных пузырьков R , то простая оценка дает, что $\Gamma \sim \alpha c_0^2 / R^2 \omega_0(R)$. При этом величина $\Gamma / \omega \sim \alpha c_0^2 / R^2 \omega_0^2(R) \sim \alpha / \varepsilon$.

Поэтому для применимости всех полученных результатов, основанных на теории возмущений, необходимо не только то, что пузырьков мало ($\alpha \ll 1$), но требуется более сильное ограничение $\alpha \ll \varepsilon \ll 1$. В противном случае присутствие пузырьков нельзя уже рассматривать как малое возмущение, они сильно меняют закон дисперсии звуковых волн в такой среде.

§ 11. Ударные волны

11-1. В идеальном газе с давлением p_0 , плотностью ρ_0 и показателем адиабаты γ создано возмущение в виде неподвижного в начальный момент изменения плотности $\delta\rho(x)$, равного

$$\delta\rho = \begin{cases} \rho_1 \sin \pi x / L, & |x| \leq L; \\ 0, & |x| \geq L. \end{cases}$$

Определить момент возникновения разрыва (ударной волны) в газе, считая возмущение слабым ($\rho_1 \ll \rho_0$).

В линейном (акустическом) приближении такое начальное возмущение за время $\tau_0 \sim L/c_0$ распадается на два бегущих влево и вправо звуковых импульса с постоянными профилями скорости, плотности и давления (см. задачу 10-1). Укрупнение профиля импульсов и образование разрывов связано с нелинейностью, и при $\rho_1 \ll \rho_0$ оно происходит за время $\tau_1 \gg \tau_0$. Поэтому нелинейное укрупнение этих двух импульсов можно рассматривать

независимо друг от друга. Согласно полученному в задаче (10-1) решению, в линейном приближении имеем

$$\begin{cases} v_+(x, t) = \frac{c_0}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \sin \frac{\pi}{L}(x - c_0 t); \\ v_-(x, t) = -\frac{c_0}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \sin \frac{\pi}{L}(x + c_0 t); \\ |x \pm c_0 t| \ll L. \end{cases} \quad (11.1)$$

Здесь v_{\pm} соответствует импульсам, бегущим вправо и влево, и использовано выражение (10.6) с $u(x) = 0$ и $a(x) = c_0^2 \delta \rho = c_0^2 \rho_1 \sin \pi x/L$. Искажение профиля происходит из-за того, что при учете нелинейности скорость перемещения в пространстве различных по амплитуде участков импульса отличается от скорости звука в невозмущенном газе. Точное решение нелинейных уравнений для простой волны (волна Римана) [9, § 101] показывает, что такое перемещение происходит со скоростью

$$u = v \pm c(v), \quad (11.2)$$

где $c(v)$ — локальное значение скорости (два знака по-прежнему соответствуют волнам, бегущим вправо или влево). Так как в данном случае нелинейность является слабой ($\rho_1 \ll \rho_0$), то значение $c(v)$ можно найти по теории возмущений. Из уравнения непрерывности следует, что импульсам (11.1) соответствуют такие возмущения плотности и давления газа:

$$\delta p_{\pm} \approx c_0^2 \delta \rho_{\pm}; \quad \delta \rho_{\pm} = \pm \frac{\rho_0}{c_0} v_{\pm} = \frac{\rho_1}{2} \sin \frac{\pi}{L}(x \mp c_0 t).$$

Отсюда для локальной скорости звука $c(v)$ получим

$$c = (\gamma p / \rho)^{1/2} = \left(\gamma \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0 + \delta \rho} \right)^{1/2} \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta p}{p_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \approx c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} v$$

так что скорость распространения возмущений (11.2) равна

$$u = \pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \quad (11.3)$$

(отметим, что для идеального газа с постоянным γ выражение (11.3), полученное для случая слабой нелинейности, совпадает с точной формулой).

Зная теперь $u(v)$, нетрудно найти момент образования разрывов в таком решении. Здесь имеется полная аналогия с задачей 7-3, где рассматривалось образование разрывов в облаке пыли. Единственное различие состоит в том, что в пыли каждый элемент среды движется с начальной скоростью. В газе же, где есть упругость, вызываемая силами давления, скорость перемещения точек с заданной скоростью газа дается выражением (11.3). Отсюда

$$\begin{aligned} x(x_0, t) &= x_0 + ut = x_0 \pm c_0 t + \frac{\gamma + 1}{2} v_{\pm} = \\ &= x_0 \pm c_0 t \pm \frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_0 t}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \sin \frac{\pi x_0}{L}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Образованию разрыва соответствует обращение в нуль производной $(\partial x / \partial x_0)_t$. Как следует из (11.4),

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)_t = 1 \pm \frac{\gamma + 1}{2} \frac{c_0 t}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x_0}{L}. \quad (11.5)$$

Отсюда видно, что для импульса, бегущего вправо (знак + в (11.5)), разрыв раньше всего образуется в его начальной и конечной точках ($x_0 = \pm L$), и это происходит в момент времени

$$\tau_1 = \frac{L}{c_0} \frac{4}{\pi(\gamma + 1)} \frac{\rho_0}{\rho_1} \gg \tau_0.$$

Для импульса, распространяющегося влево, разрыв образуется в этот же момент времени, но в точке, находящейся в середине ($x_0 = 0$).

11-2. Ударная волна с числом Маха M распространяется в идеальном газе, имеющем давление p_1 и плотность ρ_1 . Найти давление и плотность газа за ударной волной, считая показатель адиабаты газа γ постоянным.

Состояние газа до и после ударной волны (будем обозначать их индексом 1 и 2 соответственно) связаны законами сохранения: непрерывностью потоков вещества, импульса и энергии через границу разрыва (7.6), (7.7). Это дает соотношения:

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2; \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2; \\ w_2 + \frac{v_1^2}{2} = w_2 + \frac{v_2^2}{2}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Для идеального газа с постоянным γ тепловая функция $w = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$. Учитывая, что по определению числа Маха скорость ударной волны в невозмущенном газе $v_1 = M c_1$ ($c_1 = (\gamma p_1 / \rho_1)^{1/2}$) — скорость звука, и введя безразмерные неизвестные $x \equiv \rho_2 / \rho_1$ и $y \equiv p_2 / p_1$, из (11.6) получим для последних такие уравнения:

$$1 + \gamma M^2 = y + \gamma M^2 / x; \quad \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{M^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{y}{x} + \frac{M^2}{2x^2}.$$

Исключая тривиальное решение ($x = y = 1$), находим отсюда:

$$\begin{cases} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}; \\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1}; \end{cases} \quad (11.7)$$

Как видно из (11.7), в пределе слабых ударных волн, когда $(M - 1) \ll 1$, $\rho_2 / \rho_1 \approx 1 + 4(M - 1) / (\gamma + 1)$; $p_2 / p_1 \approx 1 + 4\gamma(M - 1) / (\gamma + 1)$. Отсюда следует, что для слабых ударных волн $\delta p / p \approx \gamma \delta \rho / \rho$, т. е. закон изменения этих величин близок к адиабатическому, а возрастание энтропии является величиной более высокого порядка малости по малому параметру $(M - 1)$. В пределе сильных ударных волн, когда число Маха $M \gg 1$, из (11.7) следует

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \quad \frac{p_2}{p_1} \approx \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2. \quad (11.8)$$

Так что в сильной ударной волне степень сжатия газа остается конечной, а рост давления происходит за счет сильного нагрева.

11-3. Сильная ударная волна с числом Маха $M_0 \gg 1$ отражается от плоской абсолютно жесткой стенки (рис. 11.1). Определить число Маха M_1 отраженной ударной волны.

В системе отсчета, где газ у стенки покоится, ударная волна движется со скоростью $u_0 = M_0 c_0$, а газ за ней имеет скорость v (рис. 11.1, а). Так как эта ударная волна сильная, то сжатие газа в ней и увеличение давления описываются формулами (11.8), поэтому

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{u_0}{u_0 - v} \approx \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \quad \text{т. е.} \quad v \approx \frac{2}{\gamma + 1} M_0 c_0. \quad (11.9)$$

Скорость движения отраженной ударной волны (рис. 11.1, б) относительно газа перед ней есть $(u_1 + v)$, поэтому $(u_1 + v) = M_1 c_1$, где c_1 — скорость звука в этом газе. Используя (11.8), получим

$$c_1 = \left(\gamma \frac{p_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \approx c_0 \frac{M_0}{\gamma + 1} \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}. \quad (11.10)$$

После этого для скачка плотности в отраженной ударной волне можно записать, согласно (11.7),

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1 + v}{u_1} = \frac{M_1 c_1}{M_1 c_1 - v} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}.$$

Подставив сюда выражения (11.9) и (11.10) для v и c_1 , нетрудно получить такое квадратное уравнение для определения M_1 :

$$M_1^2 - \frac{(\gamma + 1)}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}} M_1 - 1 = 0,$$

подходящее решение которого (второй корень отрицателен) есть

$$M_1 \approx [2\gamma/(\gamma - 1)]^{1/2}.$$

Как видно отсюда, отраженная ударная волна имеет число Маха порядка единицы, так что при отражении от стенки интенсивность падающей ударной волны сильно «гасится».

11-4. Определить внутреннюю структуру фронта слабой ударной волны в вязком газе.

Согласно результатам задачи 11-1, простая волна в идеальном газе описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (11.11)$$

С течением времени происходит ее укрупнение, что и приводит в конечном итоге к ее «опрокидыванию». В реальном же газе неизбежно присутствуют диссипативные механизмы (например, вязкость или теплопроводность),

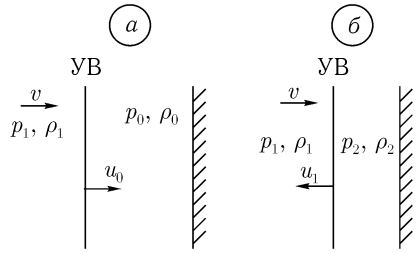


Рис. 11.1. Отражение ударной волны от стенки

которые приводят к остановке укрупнения и образованию ударной волны с конечной шириной фронта. Для нахождения структуры фронта ударной волны дополним (11.11) вязким слагаемым:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (11.12)$$

где ν есть кинематическая вязкость газа. Здесь следует отметить, что такая простая процедура учета вязкости возможна только для слабой ударной волны, в которой изменение энтропии есть величина более высокого порядка по малому параметру $(M - 1)$, чем скачки плотности и давления (см. задачу 11-2). Поэтому в этом случае левая часть (11.12) остается неизменной по сравнению с (11.11), полученным при условии сохранения энтропии газа.

Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся со скоростью звука c_0 , и введем новую неизвестную функцию $u = (\gamma + 1)v/2$. Тогда (11.12) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11.13)$$

известный как уравнение Бюргерса. Нас интересует его решение, описывающее стационарную ударную волну. Поэтому будем искать решение (11.13) в виде

$$u = f(x - v_0 t) \equiv f(z), \quad (11.14)$$

где v_0 есть скорость ударной волны в выбранной системе отсчета. Подстановка (11.14) в (11.13) дает

$$-v_0 f' + f f' = \nu f''.$$

Интегрируя один раз по z , находим, что

$$v_0 f + \frac{1}{2} f^2 = \nu f' + \text{const},$$

или

$$\nu f' = \frac{1}{2} (f - v_0)^2 + a,$$

где a есть новая постоянная интегрирования. Нас интересует решение с f' асимптотически стремящейся к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$ (однородный газ перед и за ударной волной). Поэтому величина a отрицательна: $a = -w_0^2/2$, так что

$$\nu f' = \frac{(f - v_0)^2}{2} - \frac{w_0^2}{2},$$

и асимптотика f при $z \rightarrow \pm\infty$ есть $f_+ = v_0 + w_0$, $f_- = v_0 - w_0$. Тогда для новой функции $\varphi(z) = (f - v_0)/w_0$ получаем уравнение

$$\varphi^2 - 1 = \frac{2\nu}{w_0}\varphi',$$

а его решение есть

$$\varphi(z) = \text{th}(w_0 z / 2\nu). \quad (11.15)$$

В слабой ударной волне скачок скорости, согласно (11.6) и (11.7), есть

$$v_1 - v_2 \approx 4c_0(M - 1)/(\gamma + 1).$$

С другой стороны, в принятых нами обозначениях $v_1 - v_2 = 4w_0/(\gamma + 1)$. Поэтому из (11.15) следует, что толщина фронта слабой ударной волны

$$\delta = 2\nu/w_0 = 2\nu/c_0(M - 1). \quad (11.16)$$

В заключение отметим, что при обычных условиях кинематическая вязкость газа $\nu \sim v_T \lambda$, где v_T есть тепловая скорость молекул, а λ — их длина свободного пробега. Так как $c_0 \sim v_T$, то из (11.16) толщину фронта можно оценить как $\delta \sim \lambda/(M - 1)$. Поэтому толщина фронта достаточно сильной ударной волны, для которой $(M - 1) \sim 1$, становится сравнимой с длиной свободного пробега λ , и, следовательно, в рамках макроскопической гидродинамики может рассматриваться как поверхность разрыва.

§ 12. Нелинейные волны в средах с дисперсией. Солитоны

12-1. Найти закон дисперсии для гравитационных волн, распространяющихся на неограниченной поверхности несжимаемой жидкости с глубиной h_0 .

Будем предполагать, как и в задаче 7-8, что в невозмущенном состоянии поверхность жидкости является горизонтальной плоскостью $z = 0$, а волна распространяется вдоль оси x . Отличие от рассмотренного там случая бесконечно глубокой жидкости состоит в том, что в общем решении уравнении Лапласа для потенциала скорости жидкости

$$\varphi = (B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)}$$

постоянная B_2 уже не равна нулю, а находится из граничного условия, что нормальная составляющая скорости на дне равна нулю:

$$v_z \Big|_{z=-h_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h_0} = 0,$$

откуда

$$\varphi = 2B_1 e^{-kh_0} \operatorname{ch} k(z + h_0) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12.1)$$

Из линеаризованного уравнения движения жидкости (7.21) тогда следует, что распределение давления в ней

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \rho g z + \delta p = p_0 - \rho g z - i\omega \rho \varphi = \\ &= p_0 - \rho g z - 2i\omega \rho B_1 e^{-kh_0} \operatorname{ch} k(z + h_0) e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Обозначив, как и раньше, вертикальное смещение поверхности жидкости через $\xi(x, t) = \xi_0 \exp\{i(kx - \omega t)\}$, найдем связь между постоянными B_1 и ξ_0 из условия, что $\partial \xi / \partial t = -\partial \varphi / \partial z|_{z=0}$, откуда $B_1 e^{-kh_0} = i\omega \xi_0 / 2k \operatorname{sh} kh_0$. Искомый закон дисперсии гравитационных волн следует теперь из граничного условия на поверхности жидкости:

$$p|_{z=\xi} = p_0 \quad (12.3)$$

(поверхностным натяжением здесь пренебрегаем).

Из (12.2) и (12.3) с точностью до членов первого порядка по амплитуде колебаний находим

$$\omega^2 = kg \operatorname{th} kh_0. \quad (12.4)$$

Отсюда видно, что конечность глубины жидкости становится существенной, когда длина волны $\lambda > h_0$. Для коротковолновых возмущений ($\lambda \ll h_0$) мы возвращаемся к полученному ранее в задаче 7-8 дисперсионному уравнению $\omega = \sqrt{gk}$. В другом предельном случае очень длинных волн ($\lambda \gg h_0$) из (12.4) следует

$$\omega \approx \pm u_0 k; \quad u_0 = \sqrt{gh_0}. \quad (12.5)$$

Это означает, что такие волны распространяются по поверхности жидкости со скоростью, равной u_0 .

12-2. Получить уравнение, описывающее распространение длинных ($\lambda \gg h_0$) гравитационных волн на поверхности жидкости, при учете слабой нелинейности и дисперсии.

В рассматриваемом пределе, когда $h_0 \ll \lambda$ (так называемые «волны на мелкой воде»), при выводе уравнений удобно сразу использовать возникающие в этом случае упрощения. Так из формул (12.1) и (12.2) следует, что для компонент скорости жидкости теперь выполняется неравенство $v_x \gg v_z$, причем как v_x , так и возмущение давления δp слабо зависят от z . Поэтому в первом приближении можно считать эту задачу одномерной, так что $v_x \equiv v$ и δp зависят только от координаты вдоль направления распространения волны x . Так как колебания сопровождаются вертикальными смещениями поверхности жидкости $\xi(x, t)$, то полная высота столба жидкости есть $h = h_0 + \xi$. Тогда уравнение сохранения массы несжимаемой жидкости (аналог уравнения непрерывности для данного случая) запишется так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) = 0. \quad (12.6)$$

В уравнении движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x}$$

возмущения давления δp можно выразить через смещение поверхности жидкости ξ , используя выражение (12.2) для полного давления и граничное условие (12.3), что дает $\delta p = \rho g \xi$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (12.7)$$

В линейном приближении уравнения (12.6) и (12.7) приобретают вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Это приводит к волновому уравнению $\partial^2 h / \partial t^2 - gh_0 \partial^2 h / \partial x^2 = 0$ с полученным выше законом дисперсии волн (12.5). Можно построить и точное решение нелинейных уравнений (12.6) и (12.7), имеющее вид простой волны (см. задачу 11-1). В этом случае $h(x, t) \equiv h(v)$, и из (12.6) и (12.7) следует

$$\frac{dh}{dv} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -h \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dh}{dv}. \quad (12.8)$$

Разделив теперь правые и левые части этих уравнений друг на друга, получим

$$\left(\frac{dh}{dv}\right)^2 = \frac{h}{g}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dh}{dv} = \pm\sqrt{h/g} \quad (12.9)$$

и второе из уравнений (12.8) преобразуются к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (12.10)$$

Отсюда следует: точка, имеющая заданное значение скорости v (а, тем самым, и h), перемещается в пространстве со скоростью

$$u = v \pm \sqrt{gh} \quad (12.11)$$

так что такое решение аналогично волне Римана в газодинамике (11.2), а роль скорости звука играет величина \sqrt{gh} (знаки \pm соответствуют, как и раньше, волнам, бегущим вправо и влево вдоль оси x). В линейном приближении $u = \pm\sqrt{gh_0}$. При учете слабой нелинейности из выражения (12.11) для u получим

$$u \approx v \pm \sqrt{gh_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{g/h_0} \cdot (h - h_0),$$

а так как, согласно (12.9), $h = h_0 + \left.\frac{dh}{dv}\right|_{h=h_0} \cdot v = h_0 \pm \sqrt{h_0/g} \cdot v$, то

$$u \approx \frac{3}{2}v \pm \sqrt{gh_0}. \quad (12.12)$$

Сравнивая теперь выражения (12.12) и (12.13) нетрудно увидеть, что в таком одномерном приближении «волны на мелкой воде» полностью аналогичны волнам в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Значит, при распространении волны будет происходить непрерывное укручение ее профиля (см. задачу 11-1). В газе этот процесс продолжается до тех пор, пока в игру не вступают диссипативные эффекты (вязкость и теплопроводность) и не формируется ударная волна с характерной толщиной порядка длины свободного пробега молекул (так что с макроскопической точки зрения образуется бесконечно тонкая поверхность разрыва). Для «волн на мелкой воде» нелинейное укручение профиля останавливается гораздо раньше за

счет дисперсионных эффектов. Как уже отмечалось при их выводе, уравнения (12.6) и (12.7) являются первым приближением по малому параметру h_0/λ . А так как укрупнение волны означает уменьшение λ (появляются гармоники с малыми длинами волн), то становится важным учет эффектов более высокого порядка по h_0/λ . Как будет видно из дальнейшего, они приводят к тому, что скорость распространения гармоник становится отличной от $u_0 = \sqrt{gh_0}$ и, что самое существенное, зависящей от длины волны (появляется дисперсия). Так как дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета (см. задачу 4-4), то она препятствует нелинейному укрупнению. В результате конкуренции этих двух процессов на поверхности «мелкой воды» могут распространяться нелинейные волны со стационарным профилем (см. следующую задачу).

Поскольку дисперсионные эффекты никак не связаны с нелинейностью, их можно получить из линейного дисперсионного уравнения (12.4) путем удержания в разложении членов более высокого порядка по малому параметру kh_0 . Тогда вместо (12.5) получим

$$\omega \approx \pm ku_0(1 - k^2 h_0^2/6). \quad (12.13)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы учесть эффект дисперсии в уравнении (12.10) для простой волны, записанном в (x, t) представлении. Это можно сделать, дополнив линеаризованное уравнение (12.10) таким слагаемым, которое при переходе к (k, ω) представлению даст нужную поправку (12.13) к закону дисперсии $\omega(k)$. Нетрудно видеть, что для волны, бегущей, например, вправо, это уравнение приобретет такой вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Учитывая теперь и нелинейность, с помощью выражения (12.12) получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{3}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \quad (12.14)$$

Второе слагаемое в левой части (12.14) никак не влияет на изменение профиля волны и описывает распространение возмущения как целого со скоростью u_0 . Перейдя поэтому в сопутствующую систему отсчета и введя новую переменную $V = 3v/2$, получим из (12.14)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 0; \quad \beta = u_0 h_0^2/6. \quad (12.15)$$

Это уравнение, полученное Кортевегом и де Вризом еще в конце прошлого века, интенсивно исследовалось в последние два десятилетия в связи с развитием физики нелинейных волн в диспергирующих средах. Изучение его свойств привело к открытию нового метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных — метода обратной задачи рассеяния [3].

12-3. Найти форму стационарных нелинейных волн, описываемых уравнением Кортевега–де Вриза.

Рассмотрим решения уравнения Кортевега–де Вриза, имеющие вид бегущих волн со стационарным профилем,

$$V = f(x - ut) \quad (12.16)$$

(напомним, что поскольку уравнение (12.5) получено в системе координат, уже движущейся со скоростью u_0 , то полная скорость волны есть $(u_0 + u)$, причем $u \ll u_0$, так как нелинейность с самого начала предполагалась слабой). Прямой подстановкой (12.16) в (12.15), получим

$$-uf' + ff' + \beta f''' = 0,$$

так что вместо уравнения в частных производных (12.15) получается обыкновенное дифференциальное уравнение. Его можно проинтегрировать:

$$f'' = \frac{u}{\beta}f - \frac{f^2}{2\beta} + c, \quad (12.17)$$

где c — постоянная интегрирования. Как не трудно заметить, значение этой постоянной определяет выбор системы отсчета, так что всегда можно положить $c = 0$, перейдя в движущуюся систему координат. Действительно, сделаем в уравнении (12.17) замену:

$$u = \tilde{u} + a; \quad f = \tilde{f} + b, \quad (12.18)$$

где a и b — некоторые константы. Тогда вместо (12.17) получим

$$\tilde{f}'' = \frac{\tilde{u}}{\beta}\tilde{f} - \frac{\tilde{f}^2}{\beta} + \tilde{f}\frac{(a-b)}{\beta} + \left(\frac{ab}{\beta} + \frac{\tilde{u}b}{\beta} - \frac{b^2}{2\beta} + c\right). \quad (12.19)$$

Если теперь $a = b$, и таково, что обращается в нуль последняя скобка в правой части (12.19), то мы возвращаемся (в терминах \tilde{f} и \tilde{u}) к уравнению (12.17) с $c = 0$. Для его решения удобно воспользоваться механической

аналогией, записав (12.17) ($c = 0$) в виде

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{u}{\beta} f - \frac{f^2}{2\beta} = F(f). \quad (12.20)$$

Если интерпретировать f как координату, а x — как время, то это есть уравнение движения частицы единичной массы в силовом поле $F(f)$, имеющем потенциал $W(f)$, равный

$$F = -\frac{dW}{df}; \quad W(f) = -\frac{uf^2}{2\beta} + \frac{f^3}{6\beta}. \quad (12.21)$$

График потенциальной энергии $W(f)$ показан на рис. 12.1 (здесь считается, что $u < 0$). Интересующим нас «финитным» траекториям соответствует интервал энергии частицы $0 < E < 2|u|^3/3\beta$. При малых энергиях частица совершает колебания вблизи точки $f = 0$ — дна потенциальной ямы. В этом случае форму потенциала можно считать почти параболической (второе слагаемое в правой части (12.21) много меньше первого), так что совершаемым частицей гармоническим колебаниям соответствует, согласно (12.16), волна

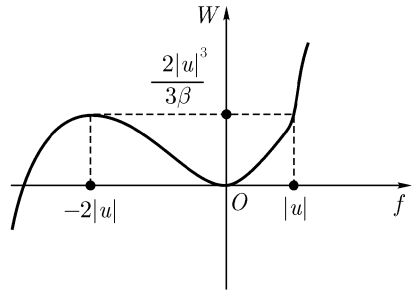


Рис. 12.1. Форма эффективной потенциальной энергии для бегущих волн

$$W(x, t) \approx V_0 e^{i\sqrt{|u|/\beta} \cdot (x-ut)}. \quad (12.22)$$

Очевидно, это решение является линейным приближением. Для него, как и должно быть по формуле (12.13), сдвиг фазовой скорости отрицателен ($u < 0$) и удовлетворяет соотношению $u = -k^2\beta$ (в решении (12.22) $k = \sqrt{|u|/\beta}$).

С ростом энергии частицы возрастает роль нелинейности и становится существенной несимметричность графика потенциальной энергии $W(f)$ (см. рис. 12.1): он является более пологим при $f < 0$ и более крутым при $f > 0$. Поэтому в нелинейной периодической волне максимумы V оказываются относительно узкими («частица» быстрее проскакивает эту

область значений f), а минимумы — широкими (здесь «частица» движется медленнее). В пределе, когда $E = 2|u|^3/3\beta$, левая точка остановки ($f = -2|u|$) достигается «частицей» за бесконечно большое время (период колебаний становится бесконечным). Поэтому при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ f увеличивается от $-2|u|$ до максимума, равного $|u|$, а затем уменьшается обратно до $-2|u|$. Это решение называется уединенной волной, или солитоном (от английского «solitary wave»). Если теперь, согласно правилу (12.18), (12.19), добавить к f и u величину $2|u|$, то в такой системе отсчета возмущение на бесконечности отсутствует ($f|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$), максимальное значение $f_{\max} = 3|u|$, а солитон движется вправо со скоростью $|u| \equiv u$ (теперь будем уже считать $u > 0$). Отсюда следует, что по поверхности невозмущенной на бесконечности жидкости солитон движется со «сверхзвуковой» скоростью ($u_0 + u$), причем $u = f_{\max}/3$. Для нахождения формы солитона проинтегрируем уравнение (12.20), используя «закон сохранения энергии частицы»:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + W(f) = E = \text{const.} \quad (12.23)$$

Нетрудно проверить, что в новой системе отсчета (где $u > 0$) солитону соответствует энергия «частицы» $E = 0$, так что из (12.23) и (12.21) получим

$$\frac{df}{dx} = \pm \sqrt{\frac{u}{\beta}} f \sqrt{1 - f/3u}. \quad (12.24)$$

Пусть теперь вершина солитона (точка, где $f = f_{\max} = 3u$) имеет координату $x = 0$. Тогда в области $x > 0$ возмущение убывает (знак минус в выражении (12.24)), откуда

$$\int_{f/f_{\max}}^1 \frac{dz}{z\sqrt{1-z}} = \left(\frac{u}{\beta} \right)^{1/2} x.$$

Входящий сюда интеграл вычисляется элементарно (подстановкой $z = \sin^2 \theta$), в результате чего имеем

$$\frac{1 + \sqrt{1 - f/f_{\max}}}{\sqrt{f/f_{\max}}} = \exp \left[\left(\frac{u}{\beta} \right)^{1/2} \frac{x}{2} \right].$$

Окончательно для формы солитона получается такое выражение:

$$f(x) = \frac{3u}{\operatorname{ch}^2 x/l}; \quad l = (4\beta/u)^{1/2}.$$

Таким образом, характерный размер солитона l уменьшается с ростом его амплитуды пропорционально $u^{-1/2}$. Этот результат имеет простой физический смысл. Как уже говорилось, постоянство формы солитона обеспечивается тем, что дисперсия уравнивает тенденцию к нелинейному укрупнению профиля возмущения. Сравнивая теперь по порядку величины нелинейное и дисперсионное слагаемые в уравнении Кортевега – де Вриза (12.15), имеем

$$V \frac{\partial V}{\partial x} \sim \frac{u^2}{l} \sim \beta \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \sim \beta \frac{u}{l^3}, \quad \text{т. е.} \quad l \sim (\beta/u)^{1/2}.$$

§ 13. Теория упругости

Малые деформации твердого тела описываются тензором деформаций

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (13.1)$$

где \vec{u} — вектор смещения точки тела. Возникающие при деформации внутренние силы характеризуются тензором напряжений σ_{ik} , так что сила, действующая на некоторый объем,

$$F_i = \oint \sigma_{ik} dS_k, \quad (13.2)$$

где вектор $d\vec{S}$ элемента площади направлен по нормали, внешней по отношению к охватываемому поверхностью объему. При этом объемная плотность внутренних сил

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \text{так что} \quad F_i = \int f_i dV. \quad (13.3)$$

Изотропная упругая среда характеризуется двумя упругими коэффициентами. Это могут быть модуль всестороннего сжатия K и модуль сдвига μ

($K > 0$, $\mu > 0$), либо модуль растяжения (модуль Юнга) E и коэффициент Пуассона σ , связанные с K и μ такими соотношениями:

$$E = 9K\mu/(3K + \mu); \quad \sigma = (3K - 2\mu)/2(3K + \mu), \quad (13.4)$$

(отсюда следует, что $E > 0$, а $-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, но для всех реальных сред $\sigma \geq 0$). В случае малых деформаций тензоры напряжений и деформаций пропорциональны друг другу (закон Гука). В изотропной среде эта связь выглядит так:

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = K u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right); \\ u_{ik} = \frac{1}{9K} \sigma_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right), \end{cases} \quad (13.5)$$

или, в терминах E и σ ,

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right); \\ u_{ik} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ll} \delta_{ik}]. \end{cases} \quad (13.6)$$

Объемная плотность упругой энергии деформированного тела

$$F = \sigma_{ik} u_{ik} / 2, \quad (13.7)$$

что с помощью (13.5) или (13.6) можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right)^2 + \frac{K}{2} (u_{ll})^2; \\ F = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll}^2 \right). \end{cases} \quad (13.8)$$

Уравнение равновесия деформированного тела можно записать, согласно (13.3), так:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0, \quad (13.9)$$

где ρ — плотность, а \vec{g} — удельная плотность сторонних (не упругих) сил. Используя (13.6) и (13.1), условие равновесия в терминах вектора смещения \vec{u} выражается в виде

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{1 - 2\sigma} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = -\rho \vec{g} \frac{2(1 + \sigma)}{E}. \quad (13.10)$$

13-1. Кубик из упругого материала с ребром l помещен в абсолютно жесткую полость. На его свободную грань действует давление p . Определить деформацию кубика.

Выбрав ориентацию осей координат указанным на рис. 13.1 образом, сразу получаем, что вектор смещения \vec{u} имеет в данном случае только одну отличную от нуля компоненту u_z , зависящую только от z , $u_z(z) \equiv u(z)$. Соответственно этому в тензоре деформаций u_{ik} единственная ненулевая компонента есть (13.1) $u_{zz} = du/dz$. Тогда из закона Гука (13.6) для тензора сопряжений σ_{ik} получим

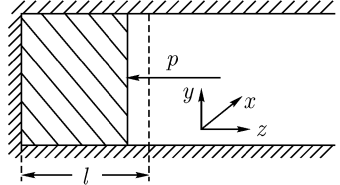


Рис. 13.1. Сжатие кубика в жесткой полости

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}; \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}. \quad (13.11)$$

Уравнение равновесия $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ означает в данном случае, что $u_{zz} = \text{const}$. Величина этой однородной деформации определяется из граничного условия на грани $z = l$, $\sigma_{zz}|_{z=l} = -p$. Используя последнее из соотношений (13.11), отсюда находим, что

$$u_{zz} = -\frac{p(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}.$$

13-2. Изотропный кристалл заполняет полупространство $z < 0$, а вдоль плоскости $z = 0$ он «склеен» с абсолютно жесткой средой. Найти коэффициент отражения продольной звуковой волны, падающей под углом θ_l на границу раздела.

Помимо падающей продольной волны (волна 1), в среде будут распространяться отраженные продольная волна (2) и поперечная волна (3). Обозначим амплитуды смещения в них через \vec{u}_1 , \vec{u}_2 и \vec{u}_3 (направление этих векторов показано на рис. 13.2). При заданном \vec{u}_1 векторы \vec{u}_2 и \vec{u}_3 определяются из граничных условий. В данном случае они состоят в отсутствии смещения в среде при $z = 0$. Тогда из равенства нулю $u_z(0)$ и $u_x(0)$ получаем

$$u_1 \cos \theta_l - u_2 \cos \theta_l + u_3 \sin \theta_t = 0;$$

$$u_1 \sin \theta_l + u_2 \sin \theta_l + u_3 \cos \theta_t = 0.$$

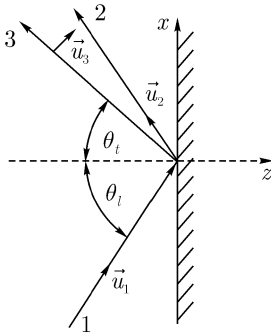


Рис. 13.2. Отражение звуковых волн от жесткой границы

Отсюда $u_2 = u_1 \cos(\theta_l + \theta_t) / \cos(\theta_l - \theta_t)$, так что искомый коэффициент отражения

$$R_l = \cos^2(\theta_l + \theta_t) / \cos^2(\theta_l - \theta_t). \quad (13.12)$$

Угол распространения поперечных волн θ_t нетрудно выразить через θ_l и скорости распространения продольных и поперечных волн c_l и c_t . Из равенства частот продольной и поперечной волны $c_l k_l = c_t k_t$, а из равенства x -компонент их волновых векторов $k_l \sin \theta_l = k_t \sin \theta_t$. Отсюда $\sin \theta_t = \frac{c_t}{c_l} \sin \theta_l$. Как следует из выражения (13.12) для коэффициента отражения R_l , он обращается в нуль при $\theta_l + \theta_t = \pi/2$. Это имеет простой геометрический смысл: так как в этом случае векторы \vec{u}_1 и \vec{u}_3 коллинеарны, то необходимое граничное условие $\vec{u}_1|_{z=0} = 0$ выполняется при $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1$, а $\vec{u}_2 = 0$.

13-3. В абсолютно жесткий цилиндрический канал (рис. 13.3, а) радиусом a вставлена пробка длиной L так, что на ее боковую поверхность действует давление p . Какую минимальную силу F_{\min} необходимо приложить к торцу пробки для ее проталкивания по каналу, если коэффициент трения боковой поверхности пробки о канал равен k , причем $k \ll 1$. Упругие константы материала пробки E и σ заданы.

Нетривиальность задачи связана с тем, что материал пробки имеет отличный от нуля (и положительный) коэффициент Пуассона σ . Если $\sigma = 0$, то при проталкивании пробки она не стремится расширяться, так что давление пробки на боковую поверхность канала остается равным p . Поэтому в этом случае необходимая сила $F_{\min} = 2\pi a L p k$. При $\sigma > 0$ продольные напряжения влияют на радиальные, что приводит к существенному увеличению F_{\min} даже при $k \ll 1$.

Запишем условие равновесия пробки в естественной для этой задачи цилиндрической системе координат. Для этого выделим объем, показанный на рис. 13.3, б. Суммируя силы, действующие на все участки его поверхности, нетрудно получить следующие уравнения равновесия вдоль r и z (равновесие по φ выполняется в данном случае тождественно из-за акси-

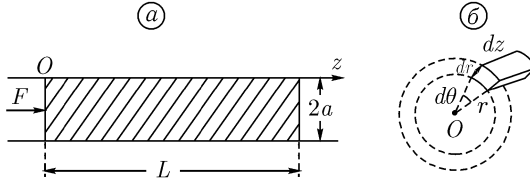


Рис. 13.3. Проталкивание пробки в канале (а) и расчет равновесия (б)

альной симметрии):

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (13.13)$$

В отсутствие продольной силы F отличны от нуля только компоненты σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ тензора напряжений, причем $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p$ (первое равенство следует из радиального равновесия в (13.13), а второе — из граничного условия на боковой поверхности). При этом пробка однородно деформирована, так что, как это следует из закона Гука (13.6), $u_{rr} = u_{\varphi\varphi} = -p(1 - \sigma)/E$, а $u_{zz} = 2p\sigma/E$. При проталкивании появляются также компоненты тензора напряжений σ_{zz} и σ_{zr} . Довольно очевидно (впрочем, в этом можно убедиться и непосредственной проверкой полученного ниже решения), что при $k \ll 1$ величина σ_{zr} будет мала по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. Поэтому в уравнении радиального равновесия можно пренебречь вкладом σ_{zr} , так что, как и раньше, $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$ (но теперь они уже зависят от z). Так как полость абсолютно жесткая, то радиальная деформация пробки не меняется: $u_{rr} = -p(1 - \sigma)E$. Но по закону Гука (13.6)

$$u_{rr} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)\sigma_{rr} - \sigma(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] = \frac{1}{E} [(1 - \sigma)\sigma_{rr} - \sigma\sigma_{zz}].$$

Отсюда получаем связь между σ_{rr} и σ_{zz} , $\sigma_{rr} = -p + \frac{\sigma}{1 - \sigma} \sigma_{zz}$. Интегрируя теперь по r уравнение продольного равновесия (второе из уравнений (13.13)), получим, что $\sigma_{zr} = -\frac{r}{2} \partial \sigma_{zz} / \partial z$ (постоянная интегрирования определяется из условия ограниченности σ_{zr} при $r = 0$). Используя теперь

граничное условие $\sigma_{zr}(a) = k\sigma_{rr}$ и выражая σ_{rr} через σ_{zz} , имеем

$$-\frac{a}{2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = k \left(-p + \frac{\sigma}{1-\sigma} \sigma_{zz} \right).$$

Решение этого уравнения с нужным граничным условием $\sigma_{zz}(0) = -F/\pi a^2$ следующее:

$$\sigma_{zz} = \frac{p(1-\sigma)}{\sigma} \left[1 - e^{-\frac{2k\sigma z}{a(1-\sigma)}} \right] - \frac{E}{\pi a^2} e^{-\frac{2k\sigma z}{a(1-\sigma)}}. \quad (13.14)$$

Рассмотрим теперь, как меняется σ_{zz} вдоль пробки в зависимости от приложенной к ее торцу силы F . При не слишком больших значениях F абсолютная величина σ_{zz} монотонно убывает внутри пробки от значения $F/\pi a^2$ при $z = 0$ и обращается в нуль в некоторой точке $z = z_0 < L$ (при $z > z_0$ уравнение (13.14) уже не применимо, и здесь нужно считать $\sigma_{zz} = 0$). В этом случае пробка еще «держит» нагрузку. Критический момент наступает, когда $z_0 = L$. При еще большей силе равновесия уже не будет и пробка придет в движение. Из этого условия, используя зависимость (13.14), получим

$$F_{\min} = \frac{p\pi a^2(1-\sigma)}{\sigma} \left[e^{\frac{2k\sigma L}{a(1-\sigma)}} - 1 \right]. \quad (13.15)$$

Отсюда видно, что в случае длинной пробки ($L \gg a$) необходимая для ее проталкивания сила становится экспоненциально большой даже при $k \ll 1$. Причиной является как раз отличие от нуля коэффициента Пуассона σ . Если же $\sigma \rightarrow 0$, то из (13.15) получается, как и следовало ожидать, простой результат: $F_{\min}(\sigma \rightarrow 0) = 2\pi a L p k$.

13-4. Упругий цилиндр радиусом R разрезали по плоскости, проходящей через его ось и образующую. Затем разрез разжали на угол α ($\alpha \ll 2\pi$), в образующуюся полость вставили клин из такого же, но ненапряженного материала и отпустили (рис. 13.4) (модель поворотной дислокации). Найти поле напряжений в поворотной дислокации и ее энергию (на единицу длины).

Согласно геометрии задачи, в данном случае азимутальное смещение $u_\varphi = \alpha r \varphi / 2\pi$. Кроме того, цилиндр «распухает», так что появится и радиальная компонента смещения u_r , которая, в силу симметрии, будет

зависеть только от r , $u_r(r)$. Для ее нахождения следует воспользоваться уравнением равновесия упругой среды (13.10), которое здесь дает

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (13.16)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \alpha/2\pi$ и не зависит от φ , то условие равновесия по φ удовлетворяется тождественно, поскольку

$$(\Delta \vec{u})_\varphi = \Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0.$$

Из радиальной компоненты уравнения (13.16) получим

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{u})_r + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_r) \right] &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_r}{dr} \right) - \frac{u_r}{r^2} - \\ &- \frac{2}{r^2} \frac{\alpha r}{2\pi} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_r) \right] = 0 \end{aligned}$$

(здесь использованы формулы (1.1) для $\Delta \vec{u}$). Отсюда

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru_r) \right] = \frac{\alpha(1-2\sigma)}{2\pi r(1-\sigma)}.$$

Интегрируя и учитывая, что $u_r(0) = 0$, имеем теперь

$$u_r = \frac{\alpha(1-2\sigma)}{2\pi(1-\sigma)} \left\{ \frac{r}{2} \ln r/R - \frac{r}{4} + \frac{Ar}{2} \right\},$$

где A — пока неизвестная константа, которая определяется из граничного условия на боковой поверхности цилиндра $(\sigma_{ik}n_k)|_{r=R} = 0$, т. е. $\sigma_{rr}(R) = \sigma_{zr}(R) = \sigma_{\varphi r}(R) = 0$. В данном случае отличны от нуля только две компоненты тензора деформаций:

$$u_{rr} = \frac{du_r}{dr}; \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}.$$

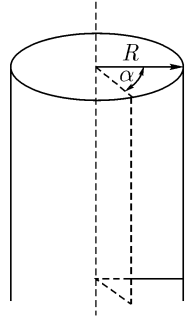


Рис. 13.4. Модель поворотной дислокации

Поэтому в тензоре напряжений присутствуют только диагональные компоненты, так что для выполнения граничных условий достаточно обратить в нуль $\sigma_{rr}(R)$. Согласно (13.6),

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\sigma} \left[u_{rr} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} (u_{rr} + u_{\varphi\varphi}) \right],$$

где

$$u_{rr} = \frac{\alpha(1-2\sigma)}{4\pi(1-\sigma)} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} + A \right);$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{\alpha(1-2\sigma)}{4\pi(1-\sigma)} \left(\ln \frac{r}{R} - \frac{1}{2} + A \right) + \frac{\alpha}{2\pi}.$$

После простых вычислений находим, что $A = -1/2(1-2\sigma)$, а компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\sigma^2)} \ln r/R; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\sigma^2)} \ln r/R + \frac{\alpha E}{4\pi(1-\sigma^2)};$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha E \sigma}{2\pi(1-\sigma^2)} \ln r/R + \frac{\alpha E \sigma}{4\pi(1-\sigma^2)}.$$

Плотность упругой энергии

$$F = \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} u_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} u_{\varphi\varphi}) =$$

$$= \frac{\alpha^2 E (1-2\sigma)}{16\pi^2 (1-\sigma^2) (1-\sigma)} \left[\ln^2 \frac{r}{R} + \ln \frac{r}{R} \right] + \frac{\alpha^2 E}{32\pi^2 (1-\sigma^2)}. \quad (13.17)$$

Энергия W , приходящаяся на единицу длины цилиндра, равна $\int_0^R F dS = 2\pi \int_0^R F r dr$. При интегрировании вклады обоих логарифмических слагаемых компенсируются, так что

$$W = \alpha^2 E R^2 / 32\pi (1-\sigma^2).$$

13-5. В недеформированном состоянии тонкий стержень имеет поперечное сечение в форме прямоугольника с размерами a и b (рис. 13.5).

Как изменится форма его поперечного сечения, если стержень изогнут в плоскости (x, z) с радиусом кривизны R .

В системе координат с осью z , направленной вдоль стержня, при изгибе последнего отличны от нуля только такие компоненты тензора деформаций: $u_{zz} = x/R$, $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} = -\sigma x/R$. Так как $u_{ik} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$, то после интегрирования получаем для вектора смещения \vec{u} при изгибе следующие выражения:

$$u_z = \frac{xz}{R}; \quad u_x = -\frac{1}{2R}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)]; \quad u_y = -\sigma xy/R$$

(постоянные интегрирования выбраны здесь так, чтобы точка начала координат не смещалась).

Рассмотрим плоскость поперечного сечения стержня $z = 0$. При изгибе лежащие на ней точки перемещаются только в плоскости (x, y) , причем

$$u_x = \frac{\sigma}{2R}(y^2 - x^2), \quad u_y = -\sigma \frac{xy}{R}.$$

Отсюда следует, что боковые стороны прямоугольника ($y = \pm b/2$) после изгиба занимают положение $y = \pm \frac{b}{2} + u_y \left(y = \pm \frac{b}{2} \right) = \pm \frac{b}{2}(1 - \sigma x/R)$, т. е. становятся наклонными прямыми (см. рис. 13.5). Верхняя же и нижняя стороны ($x = \pm a/2$) приобретают следующий вид: $x = \pm \frac{a}{2} \pm u_x \left(\pm \frac{a}{2} \right) = \pm \frac{a}{2} + \frac{\sigma}{2R}(y^2 - a^2/4)$, т. е. становятся отрезками параболы.

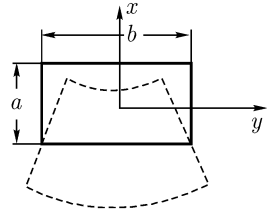


Рис. 13.5. Деформация поперечного сечения стержня при изгибе

13-6. Один конец тонкого круглого стержня длиной l и радиусом a ($l \gg a$) заделан, а на другом помещен груз весом p (рис. 13.6). Какой вес p_{\max} выдержит стержень, если его прочность на разрыв $\sigma_{\text{пр}} = \alpha E$, где E — модуль Юнга материала стержня, а α — численный коэффициент, причем $\alpha \ll a/l \ll 1$. Вес стержня пренебрежимо мал.

При $\alpha \ll a/l$ стержень останется слабо изогнутым даже при максимально допустимой нагрузке. Поэтому условие его равновесия записывается довольно просто. Рассмотрим часть стержня, заключенную между точкой с координатой z и свободным концом. Момент сил, создаваемый грузом

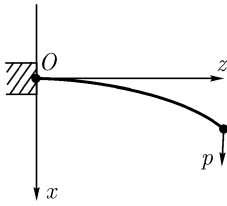


Рис. 13.6. Изгиб нагруженного стержня

и равный $p(l - z)$, должен уравниваться моментом сил внутренних напряжений в этом сечении стержня, так что $p(l - z) = EJ/R(z)$. Здесь J — момент инерции, который для круглого стержня равен $\pi a^4/4$ (нейтральная линия в плоскости поперечного сечения является, очевидно, диаметром, параллельным оси y). Отсюда максимальная кривизна, а, тем самым, и наибольшие напряжения, будут у заделанного конца стержня (при $z = 0$), где $1/R(0) = pl/EJ$. В тензоре напряжений отлична от нуля только компонента $\sigma_{zz} = E\xi/R$, где ξ — расстояние от нейтральной поверхности. Поэтому максимальное напряжение будет у края, где $\xi = a$,

$$\sigma_{zz}^{(\max)} = Ea/R(0) = pal/J = 4pl/\pi a^3.$$

Отсюда сразу получаем максимальную нагрузку

$$\frac{4p_{\max}l}{\pi a^3} = \alpha E, \quad \text{т. е.} \quad p_{\max} = \alpha \pi a^3 E/4l.$$

Нетрудно теперь проверить условие применимости этого решения, предполагающего изгиб стержня слабым. Максимальная кривизна $1/R(0) = \frac{p_{\max}l}{EJ} = \frac{\alpha}{a}$ должна быть много меньше обратной длины стержня, что и дает ограничение, $\alpha \ll a/l$. При слабом изгибе стержня его максимальное отклонение от недеформированного положения много меньше длины стержня. Действительно, найдем форму стержня $x(z)$, принимаемую им под действием нагрузки. Так как при слабом изгибе $1/R(z) \approx d^2x/dz^2$, то из уравнения равновесия следует $d^2x/dz^2 = p(l - z)/EJ$. Интегрируя с учетом граничных условий для заделанного конца стержня $x(0) = 0$, $dx/dz|_{z=0} = 0$, получим

$$x(z) = \frac{plz^2}{2JE}(1 - z/3l).$$

Отсюда видно, что наибольшее отклонение $x(l) = pl^3/3JE$ остается небольшим ($x_{\max} \ll l$), если $\alpha \ll a/l$.

13-7. Определить критическую сжимающую силу, при которой возникает изгибная неустойчивость тонкого стержня (задача Эйлера).

Критическая сила зависит от граничных условий на концах стержня. Рассмотрим, например, стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 13.7). Это означает, что концы стержня могут свободно поворачиваться. Кривизна линии стержня здесь равна нулю и отсутствует изгибный момент сил. Прямолинейная форма стержня становится неустойчивой, когда появляется еще одно равновесное решение, соответствующее слабому изгибу стержня.

Пусть на стержень действует сжимающая сила T . Запишем условие равновесия части стержня между точками $(0, z)$. Момент внешней силы, равный $-Tx$, уравнивается изгибным моментом упругих напряжений: $-Tx = EJ/R(z) \approx EJd^2x/dz^2$. Это уравнение имеет решение с нужными граничными условиями $x(0) = x(l) = 0$ при $(T/EJ)^{1/2}l = \pi$. Если стержень некруглый, то входящий сюда момент инерции J зависит от направления изгиба. Поэтому порог неустойчивости определяется изгибом в плоскости, имеющей наименьший момент инерции (ей соответствует из двух так называемых главных моментов инерции).

Рассмотрим теперь другой случай, когда концы стержня заделаны. При этом граничные условия требуют обращения в нуль x и dx/dz при $z = 0, l$ (стержень закреплен и не меняет своего направления). Но кривизна стержня на его концах теперь не равна нулю. Поэтому в уравнении равновесия нужно учитывать изгибный момент упругих напряжений на концах стержня, который устанавливается таким, чтобы выполнялись граничные условия. Обозначим этот момент сил при $z = 0$ через M_0 . Тогда условие баланса моментов запишется так:

$$-Tx + M_0 = EJd^2x/dz^2.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $x = 0$ и имеющее там нулевую производную, есть $x = (M_0/T)[1 - \cos(T/EJ)^{1/2}z]$. Тогда из условия, что $x(l) = 0$, получаем $(T/EJ)^{1/2}l = 2\pi$, так что критическая сила в этом случае равна $T_{кр} = 4\pi^2JE/l^2$. Как и в предыдущем случае, порог неустойчивости определяется изгибом в плоскости с минимальным моментом инерции J .

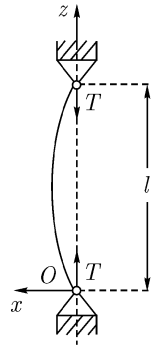


Рис. 13.7.
К расчету
изгибной
устойчивости
стержня

§ 14. Механика жидких кристаллов

Состояние нематического жидкого кристалла задается полем директоров $\vec{n}(\vec{r})$, где \vec{n} — единичный вектор, характеризующий направление ориентации молекул в пространстве. При этом значения \vec{n} и $-\vec{n}$ считаются физически эквивалентными (так что в каждой точке задается лишь ось, вдоль которой происходит ориентация). В равновесное состояние в отсутствие внешних воздействий поле директоров однородно ($\vec{n} = \text{const}$). Существует три независимых типа деформации поля директоров (рис. 14.1): поперечный изгиб, кручение, продольный изгиб. Поперечному изгибу соответствует отличие от нуля ($\text{div } \vec{n}$), кручению — $(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n})$, а продольному изгибу — $[\vec{n} \times \text{rot } \vec{n}]$. В деформированном состоянии нематический жидкий кристалл обладает избыточной энергией, в объемную плотность которой перечисленные три типа деформации дают аддитивные вклады:

$$F = K_1(\text{div } \vec{n})^2 + K_2(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n})^2 + K_3[\vec{n} \times \text{rot } \vec{n}]^2, \quad (14.1)$$

где K_1, K_2, K_3 — положительные коэффициенты, называемые, соответственно, модулями поперечного изгиба, кручения и продольного изгиба.

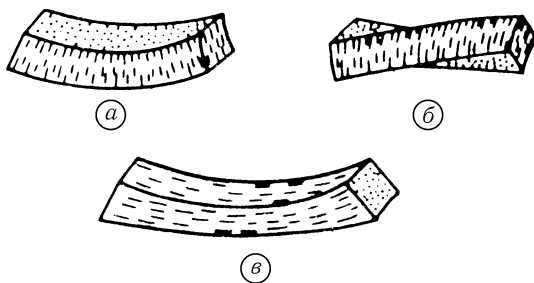


Рис. 14.1. Деформация поля директоров в нематике: (а) — поперечный изгиб, (б) — кручение, (в) — продольный изгиб

14-1. Найти равновесное поле директоров в холестерическом жидком кристалле.

Холестерические жидкие кристаллы отличаются от нематических от-

сутствием центра симметрии, т. е. при отражении молекулы такого жидкого кристалла переходят в другую (стереоизомерную) форму. Поэтому холестерики могут характеризоваться псевдоскалярными величинами, так что плотность их упругой энергии деформации может содержать дополнительное к (14.1) слагаемое типа $\alpha(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n})$, где α — псевдоскаляр. В результате плотность энергии приобретает вид:

$$F = K_1(\text{div } \vec{n})^2 + K_2(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n})^2 + K_3[\vec{n} \times \text{rot } \vec{n}]^2 + \alpha(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n}). \quad (14.2)$$

В равновесии эта энергия должна иметь минимум, которому теперь уже не соответствует однородное поле директоров ($\vec{n} = \text{const}$). Из условия экстремума для (14.2) следует, что в равновесии

$$\text{div } \vec{n} = 0; \quad [\vec{n} \times \text{rot } \vec{n}] = 0; \quad \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n} = -\alpha/2K_2 \equiv t_0 = \text{const}, \quad (14.3)$$

получается поле директоров с постоянным кручением.

Рассмотрим решение уравнений (14.3), зависящее только от одной координаты: $\vec{n}(z)$. Тогда из условия $\text{div } \vec{n} = 0$ следует $n_z = \text{const}$, а из равенства нулю величины $[\vec{n} \times \text{rot } \vec{n}]$ следует, что $n_z = 0$. В результате получаем плоское поле директоров (n_x, n_y) , которое можно представить в виде $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$, где угол φ зависит от z . Учитывая, что теперь $(\text{rot } \vec{n})_x = -\cos \varphi d\varphi/dz$, а $(\text{rot } \vec{n})_y = -\sin \varphi d\varphi/dz$, получим

$$(\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{n}) = -d\varphi/dz = t_0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi = \varphi_0 - t_0 z.$$

Отсюда видно, что равновесное состояние холестерика соответствует винтовой структуре поля директоров с постоянным шагом (периодом вдоль z), равным π/t_0 (напомним, что состояния жидкого кристалла с директорами \vec{n} и $-\vec{n}$ эквивалентны).

14-2. Пространство между двумя параллельными стеклянными пластинками заполнено нематическим жидким кристаллом, причем у поверхности пластин директор ориентирован вдоль них (рис. 14.2). При каком значении внешнего магнитного поля \vec{B} однородное поле директоров между пластинами станет неустойчивым (переход Фредерикса)? Считать модули упругости K_1 и K_3 равными ($K_1 = K_3 = K$).

Наложение внешнего магнитного поля изменяет энергию нематика. Если это поле достаточно слабое, то плотность энергии F меняется следующим образом:

$$F = K_1(\operatorname{div} \vec{n})^2 + K_2(\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{n})^2 + K_3[\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{n}]^2 - \beta(\vec{n} \cdot \vec{B})^2 \quad (14.4)$$

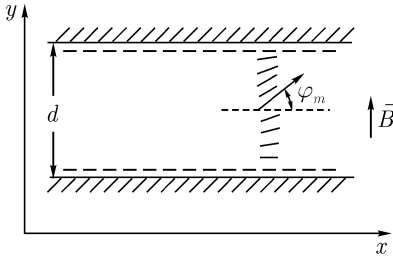


Рис. 14.2. Переход Фредерикса в магнитном поле

(возникающая добавка является первым неисчезающим членом разложения энергии по степеням индукции магнитного поля). В отсутствие магнитного поля направление поля директоров между пластинами постоянно, $\vec{n} = \text{const}$. Если константа β в (14.4) положительна, то при $B \neq 0$ директору энергетически выгодно повернуться так, чтобы стать параллельным \vec{B} . В этом случае возникает конкуренция между ориентирующим действием поверхности пластин и магнитным полем.

В результате получается, что если магнитное поле меньше некоторого критического значения $B_{\text{кр}}$, то поле директоров остается однородным во всем объеме, а при $B > B_{\text{кр}}$ распределение $\vec{n} = \text{const}$ оказывается неустойчивым и поле директоров деформируется. Для нахождения $B_{\text{кр}}$ получим уравнение равновесия для поле директоров $\vec{n}(\vec{r})$.

В рассматриваемой задаче поле директоров является плоским (отличны от нуля только n_x и n_y , зависящие от y), так что его можно описывать одним углом φ , $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$. Деформация кручения при этом отсутствует ($\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{n} = 0$), полная энергия нематика W приобретает, согласно (14.4), вид

$$W = \int_0^d F dy = \int_0^d dy \left\{ K_1 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \right. \\ \left. + K_3 \sin^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 - \beta B^2 \sin^2 \varphi \right\} = \int_0^d dy \left\{ K \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 - \beta B^2 \sin^2 \varphi \right\}.$$

В состоянии равновесия энергия W должна иметь экстремальное значение как функционал от $\varphi(y)$. Запишем вариацию W :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^d dy \left\{ 2K \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\delta\varphi}{dy} - 2\beta B^2 \sin \varphi \cos \varphi \delta\varphi \right\} = \\ &= \int_0^d dy \left\{ -2K \frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2\beta B^2 \sin \varphi \cos \varphi \right\} \delta\varphi \end{aligned}$$

(здесь первое слагаемое проинтегрировано по частям и учтено, что на поверхности пластин ($y = 0, d$) направление директора задано, поэтому $\delta\varphi(0) = \delta\varphi(d) = 0$). Из условия $\delta W = 0$ при произвольных $\delta\varphi(y)$ получаем искомое уравнение равновесия

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\beta B^2}{K} \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (14.5)$$

Отсюда видно, что при любых магнитных полях B уравнение (14.5) имеет решение $\varphi = 0$, соответствующее однородному полю директоров. Однако это решение становится неустойчивым при таком $B = B_{\text{кр}}$, когда у уравнения равновесия (14.5) появляется еще одно решение с малым отклонением директоров ($\varphi \ll 1$). При таких φ уравнение (14.5) упрощается:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\beta B^2}{K} \varphi = 0.$$

Его решение с граничным условием $\varphi(0) = 0$ есть $\varphi \sim \sin \left(\frac{\beta B^2}{K} \right)^{1/2} y$.

Теперь из второго граничного условия $\varphi(d) = 0$ находим критическое магнитное поле

$$\left(\frac{\beta B_{\text{кр}}^2}{K} \right)^{1/2} d = \pi, \quad \text{т. е.} \quad B_{\text{кр}} = \frac{\pi}{d} (K/\beta)^{1/2}.$$

14-3. Найти равновесное поле директоров в условиях предыдущей задачи, если превышение магнитного поля над критическим невелико: $B - B_{\text{кр}} \ll B_{\text{кр}}$.

При слабой надкритичности угол поворота директоров остается малым, поэтому в уравнение равновесия (14.5) достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения по степеням φ :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} \approx -\frac{\beta B^2}{K}(\varphi - 2\varphi^3/3).$$

Первый интеграл этого уравнения (который легко получить аналогично задаче 12-3, (12.20)) имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \frac{\beta B^2}{2K}(\varphi^2 - \varphi^4/3) = \text{const} = \frac{\beta B^2}{2K}(\varphi_m^2 - \varphi_m^4/3),$$

где φ_m — максимальный угол поворота директора, соответствующий точке $y = d/2$ (см. рис. 14.2). Еще одно интегрирование вместе с условием $\varphi(0) = 0$ дает неявную зависимость $\varphi(y)$

$$B \left(\frac{\beta}{K} \right)^{1/2} y = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\left[\varphi_m^2 - (\varphi')^2 - \frac{\varphi_m^4}{3} + \frac{(\varphi')^4}{3} \right]^{1/2}}.$$

Входящий сюда максимальный угол поворота φ_m определяется теперь таким соотношением:

$$\begin{aligned} B \left(\frac{\beta}{K} \right)^{1/2} \frac{d}{2} &= \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\left[\varphi_m^2 - \varphi^2 - \frac{\varphi_m^4}{3} + \frac{\varphi^4}{3} \right]^{1/2}} = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - x^2 - \frac{\varphi_m^2}{3}(1 - x^4) \right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл можно вычислить приближенно, учитывая, что $\varphi_m \ll 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - x^2 - \frac{\varphi_m^2}{3}(1 - x^4)\right]^{1/2}} &\approx \\ &\approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \left[1 + \frac{\varphi_m^2}{6}(1 + x^2)\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\varphi_m^2. \end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно получить, что $\varphi_m = 2(B/B_{\text{кр}} - 1)^{1/2}$, так что при слабой надкритичности деформации поля директоров пропорциональна квадратному корню из превышения напряженности магнитного поля над порогом неустойчивости.

14-4. Внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно к винтовой оси холестерического жидкого кристалла, приводит к уменьшению закрученности поля директоров. Определить критическое магнитное поле, при превышении которого винтовая структура полностью исчезает, т. е. холестерический жидкий кристалл приобретает нематическую структуру.

Направив ось кручения вдоль оси z , компоненты директора можно записать как

$$n_x(z) = \cos \varphi(z), \quad n_y(z) = \sin \varphi(z), \quad n_z = 0.$$

Если внешнее магнитное поле \vec{B} направлено вдоль оси y , то плотность упругой энергии холестерика, согласно (14.2) и (14.4), есть

$$F = K_2 \left(\frac{d\varphi}{dz} - t_0 \right)^2 - \beta B^2 \sin^2 \varphi, \quad t_0 = \alpha/2K_2.$$

Отсюда видно, что при $\beta > 0$ магнитное поле стремится ориентировать директор вдоль оси y , т. е. оно приводит к уменьшению кручения поля директоров. Уравнение равновесия для функции $\varphi(z)$ следует из условия экстремума для полной упругой энергии

$$W = \int F dz = \int dz [K_2(\varphi' - t_0)^2 - \beta B^2 \sin^2 \varphi]. \quad (14.6)$$

Условие $\delta W = 0$ приводит к следующему уравнению равновесия:

$$\gamma^2 \varphi'' + \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad \gamma = (K_2/\beta B^2)^{1/2}.$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\gamma^2 (\varphi')^2 + \sin^2 \varphi = \text{const} = \varkappa^{-2}, \quad (14.7)$$

где постоянная интегрирования, \varkappa^{-2} , должна быть больше единицы, т. к. $\varphi(z)$ есть периодическая функции z , меняющаяся в интервале $(0, \pi)$. Интегрирование (14.7) позволяет представить эту функцию в неявном виде с помощью эллиптического интеграла первого рода I , [11]:

$$\frac{z}{\gamma \varkappa} = \int_0^\varphi d\xi (1 - \varkappa^2 \sin^2 \xi)^{-1/2} \equiv I(\varkappa, \varphi).$$

Шаг винтовой структуры поля директоров, L , соответствующий изменению φ от 0 до π , дается тогда следующим выражением:

$$L = 2\gamma \varkappa K(x), \quad (14.8)$$

где $K(\varkappa) = \int_0^{\pi/2} d\xi (1 - \varkappa^2 \sin^2 \xi)^{-1/2} = I\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода. Тогда усредненная по периоду винтовой структуры упругая энергия (14.6) есть

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{L} \int_0^L dz [K_2(\varphi' - t_0)^2 - \beta B^2 \sin^2 \varphi] = \\ &= \frac{2\beta B^2}{L} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{d\varphi/dz} [\gamma^2 (\varphi' - t_0)^2 - \sin^2 \varphi]. \quad (14.9) \end{aligned}$$

Значение параметра \varkappa находится из условия минимума для этой энергии. Подставив в (14.9) выражение для φ' из (14.7), энергию $\langle W \rangle$ можно записать как

$$\langle W \rangle = \beta B^2 \left\{ 2\varkappa^{-2} \frac{E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - \frac{\gamma \pi t_0}{\varkappa K(\varkappa)} - \varkappa^{-2} + \gamma^2 t_0^2 \right\}, \quad (14.10)$$

где

$$E(\varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi (1 - \varkappa^2 \sin^2 \xi)^{1/2}$$

есть полный эллиптический интеграл второго рода. Здесь также использовано соотношение

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \xi d\xi}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \xi)^{1/2}} = \varkappa^{-2} [K(\varkappa) - E(\varkappa)].$$

Применяя теперь известное равенство для производных полных эллиптических интегралов, [11]:

$$\frac{dK}{d\varkappa} = \left[\frac{E}{\varkappa(1 - \varkappa^2)} - \frac{K}{\varkappa} \right]; \quad \frac{dE}{d\varkappa} = \frac{E - K}{\varkappa};$$

условие $d\langle W \rangle / d\varkappa = 0$ дает

$$E(\varkappa) / \varkappa = \frac{1}{2} \pi \gamma t_0. \quad (14.11)$$

Это равенство определяет \varkappa как функцию γ , т. е. дает ее зависимость от величины внешнего магнитного поля B . В результате шаг винта (14.8) холестерической структуры можно записать как

$$L/L_0 = (4/\pi^2) K(\varkappa) E(\varkappa), \quad (14.12)$$

где $L_0 = \pi/t_0$ есть шаг в отсутствие магнитного поля (при $B = 0$). Рассмотрим теперь, как меняется L в зависимости от приложенного магнитного поля. Для слабого поля, когда параметр $(\gamma t_0)^{-1} = B t_0 (\beta/K_2)^{1/2} \ll 1$, величина \varkappa мала: $\varkappa \approx (\gamma t_0)^{-1}$, так что из (14.12) следует, что

$$L/L_0 \approx 1 + \frac{1}{32} (\gamma t_0)^{-4},$$

т. е. длина шага медленно увеличивается с ростом магнитного поля, и ее приращение пропорционально B^4 . Переход от холестерика к нематике происходит при таком поле $B_{\text{кр}}$, когда длина L обращается в бесконечность. Это соответствует $\varkappa = 1$ в (14.11), так что $\gamma_{\text{кр}} t_0 = 2/\pi$, т. е.

$$B_{\text{кр}} = (\pi t_0 / 2) (K_2 / \beta)^{1/2}.$$

При $B > B_{кр}$ такой жидкий кристалл имеет нематическую упорядоченность поля директоров.

14-5. Определить поле директоров, соответствующее прямолинейной дисклинации с заданным индексом Франка m , считая модули упругости K_1 и K_3 равными ($K_1 = K_3 = K$).

Пусть линия дисклинации направлена вдоль оси z . Тогда поле директоров является плоским, т. е. отличны от нуля только n_x и n_y , зависящие от поперечных же координат x и y . Введем угол поворота директора $\varphi(x, y)$, так что $n_x = \cos \varphi$, $n_y = \sin \varphi$. При заданном направлении директоров величина φ определена не однозначно, а с точностью до целого кратного π . Наличие дисклинации приводит к тому, что при обходе точки начала координат по любому замкнутому контуру угол φ получает приращение, равное $m\pi$, где m — целое число, называемое индексом Франка дисклинации, $\oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = m\pi$.

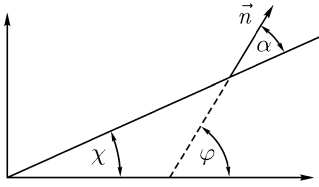


Рис. 14.3. К расчету поля директоров для прямолинейной дисклинации

Уравнение равновесия для функции $\varphi(x, y)$ получается аналогично тому, как это было сделано в задаче 14-2. В «плоском» случае деформация кручения отсутствует, и при $K_1 = K_3 = K$ плотность упругой энергии жидкого кристалла принимает простой вид: $F = K(\vec{\nabla} \varphi)^2$. Варьируя теперь полную энергию $W = K \int (\vec{\nabla} \varphi)^2 dS$, находим условие равновесия $\Delta \varphi = 0$. Если перейти в плоскость (x, y) к полярным координатам (r, χ) , то интересующее нас решение не должно зависеть от r (в противном случае $\oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l}$ был бы разным для окружностей с различными радиусами). Поэтому для $\varphi(\chi)$ имеем $\frac{1}{r^2} d^2 \varphi / d\chi^2 = 0$, т. е. $\varphi = A\chi + \varphi_0$. Из условия $\oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} = m\pi$ константа A выражается через индекс Франка:

$$\frac{m}{2} \chi + \varphi_0. \quad (14.13)$$

Получающее поле директоров удобно представить, получив уравнение для его «силовых» линий, которые в каждой точке касательны к \vec{n} (рис. 14.3); $\frac{1}{r} dr / d\chi = \text{ctg } \alpha = \text{ctg}[(m/2 - 1)\chi + \varphi_0]$. Если индекс Франка дисклинации $m \neq 2$, то постоянную φ_0 можно исключить соответствующим

выбором начала отсчета угла χ . Поле директоров для случая $m = \pm 1$ показано на рис. 14.4. Если же $m = 2$, то получающаяся картина зависит от φ_0 . Различные возможные случаи изображены на рис. 14.4.

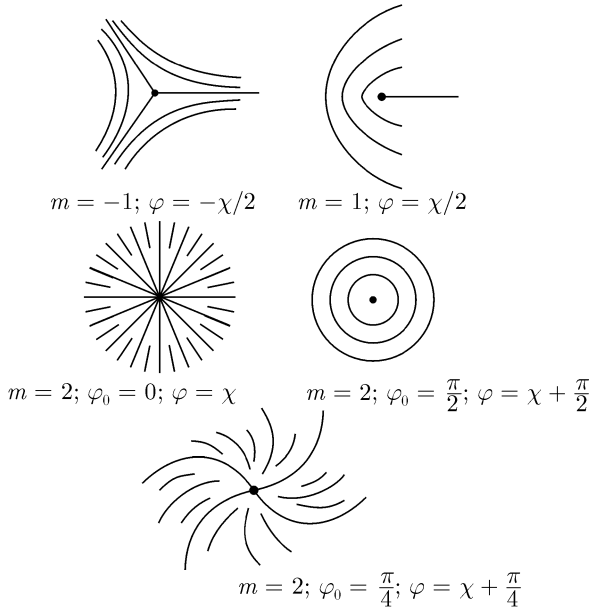


Рис. 14.4. Дисклинации с различными индексами Франка

14-6. В нематическом жидком кристалле имеются две параллельные дисклинации с индексами Франка $m_1 = m_2 = 1$. Изобразить поле директоров в плоскости, перпендикулярной дисклинациям. Найти силу взаимодействия этих дисклинаций. Модули упругости считать равными ($K_1 = K_3 = K$).

Пусть расстояние между дисклинациями равно d . Тогда на расстояниях, много больших d , поле директоров будет таким же, как и при наличии одной дисклинации с индексом Франка, равным сумме индексов обеих дисклинаций. В данном случае $m_1 + m_2 = 2$, так что картина существенно зависит от взаимной ориентации дисклинаций. Один из возможных случаев изображен на рис. 14.5. Силу взаимодействия дисклинаций можно

определить из энергетических соображений. Найдем энергию деформации нематика в случае, когда в нем присутствует одна прямолинейная дисклинация с индексом Франка, равным m . Эта энергия (приходящаяся на единицу длины дисклинации) равна

$$W = K \int (\vec{\nabla} \varphi)^2 dS = K \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\chi} \right)^2 2\pi r dr = \frac{2\pi K m^2}{4} \int \frac{dr}{r} \quad (14.14)$$

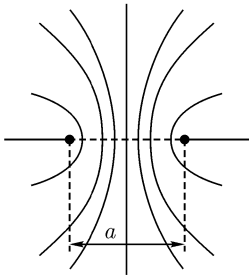


Рис. 14.5. Взаимодействие двух прямолинейных дисклиний

(здесь мы использовали выражение (14.13) для φ). Как видно, получившийся интеграл логарифмически расходится как на больших, так и на малых расстояниях от линии дисклинации. Поэтому в качестве верхнего предела в (14.14) следует взять размер L области, занимаемой жидким кристаллом, а в качестве нижнего — расстояние порядка молекулярных размеров r_0 , где деформации поля директоров велики и вся изложенная теория неприменима.

Тогда $W = \frac{\pi K m^2}{2} \ln L/r_0$. Так как $L/r_0 \gg 1$, то

полученная энергия содержит большой логарифм, который делает ее, с одной стороны, нечувствительной к конкретным значениям L и r_0 , а с другой — много большей, чем энергия ядра дисклинации ($r \lesssim r_0$). Последнее обстоятельство и позволяет, собственно, рассматривать дисклинации в рамках макроскопического описания.

Нетрудно видеть, что с энергетической точки зрения прямолинейная дисклинация эквивалентна такой же нити, равномерно заряженной по длине. Если линейная плотность заряда последней \varkappa , то энергия электрического поля (на единицу длины нити) равна $W_{эл} = \int (E^2/8\pi) 2\pi r dr = \varkappa^2 \int dr/r$. Сравнивая ее с энергией деформации нематика (14.14), замечаем: величине \varkappa нужно поставить в соответствие величину $\tilde{\varkappa} = m(\pi K/2)^{1/2}$. Тогда сразу следует, что взаимодействие параллельных дисклиний эквивалентно взаимодействию заряженных нитей, значит, сила, действующая на единицу длины каждой дисклинации, $T = \tilde{\varkappa}_1 2\tilde{\varkappa}_2/d = \pi K m_1 m_2/d$. При $m_1 = m_2 = 1$ дисклинации расталкиваются с силой $T = \pi K/d$.

Мы не останавливаемся здесь на формальном доказательстве такой эквивалентности. Последнее основано на том, что гармонической функции $\varphi(r, \chi) = \frac{m}{2}\chi + \varphi_0$ соответствует сопряженная (по условиям

Коши–Римана) функция $(m/2) \ln r$, которая пропорциональна электрическому потенциалу заряженной нити.

14-7. Найти силу, действующую на прямолинейную дисклинацию с индексом Франка m , находящуюся на расстоянии h от параллельной ей поверхности нематика, если на этой поверхности ориентация директоров фиксирована (рис. 14.6).

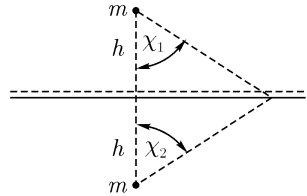


Рис. 14.6. Отталкивание дисклинаций от границы жидкого кристалла

Как нетрудно заметить, равновесным полем директоров в жидком кристалле, удовлетворяющем граничному условию на его поверхности, будет конфигурация, создаваемая данной дисклинацией и «отраженной» с те же индексом Франка. Это следует из того, что углы χ_1 и χ_2 равны, но при перемещении вдоль поверхности раздела вращение происходит для одной дисклинации по часовой стрелке, а для другой — против. Поэтому направление директора на этой поверхности меняться не будет. Из результата предыдущей задачи сразу следует, что дисклинация будет отталкиваться от поверхности с удельной (на единицу длины) силой, равной $\pi K m^2 / 2h$.

14-8. Нематический жидкий кристалл с одинаковыми модулями упругости $K_1 = K_3 = K$ заполняет пространство внутри цилиндрической полости радиусом R , причем у ее поверхности директор ориентирован параллельно границе раздела (и поперечно к оси цилиндра). Найти равновесное поле директоров в объеме жидкого кристалла.

Из постановки задачи следует, что искомое поле директоров будет плоским, с отличным от нуля $n_x(x, y)$ и $n_y(x, y)$ (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Так как на граничной окружности ($r = R$) директор параллелен ей, то при обходе по этому контуру угол поворота директора получает приращение 2π . Отсюда следует, что внутри этой окружности должны быть дисклинации с суммарным индексом Франка, равным двум. Здесь возможно, например, такое решение: в центре находятся дисклинации с индексом Франка $m = 2$, а «силовые» линии поля директоров являются окружностями. Но оно не является энергетически самым выгодным. Это становится понятным из таких соображений.

Представим себе, что вместо одной дисклинации в центре с $m = 2$ появились две очень близкие с $m_1 = m_2 = 1$. Но тогда они расталкивают-

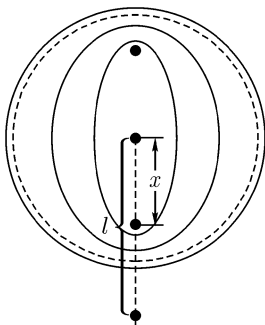


Рис. 14.7. Равновесное поле директоров

ся, стремясь удалиться друг от друга. В то же время они не могут подойти совсем близко к границе, так как от нее тоже отталкиваются (см. предыдущую задачу). Поэтому в равновесии две дискликации с $m_1 = m_2 = 1$ будут находиться на таком расстоянии x от центра, чтобы суммарная сила, действующая на каждую из них, равнялась нулю. При решении снова используем, как и в аналогичной электростатической задаче, метод отражений. Это значит, что для выполнения нужного граничного условия каждой дискликации, находящейся на расстоянии x от центра, соответствует «отраженная» дискликация с таким же индексом Франка, но расположенная вне полости на расстоянии

$l = R^2/x$ от центра. Из баланса сил теперь следует $\frac{1}{l-x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{l+x}$. От-

сюда получаем $x = R/\sqrt[4]{5}$. Примерный вид поля директоров для такого решения показан на рис. 14.7.

Литература

- [1] *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1987.
- [2] *Захаров В. Е.* Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности // Основы физики и плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — Т. 2.
- [3] *Захаров В. Е. и др.* Теория солитонов. — М.: Наука, 1980.
- [4] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
- [5] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
- [6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1.
- [7] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2.
- [8] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
- [9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
- [10] *Ландау Л. Д., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
- [11] *Ямке Е., Энде Ф., Лем Ф.* Специальные функции. — М.: Наука, 1964.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).

4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Векштейн Григорий Ефимович

ФИЗИКА СПЛОШНЫХ СРЕД В ЗАДАЧАХ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерный набор и верстка Д. К. Князев

Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 18.04.02. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч. изд. л. 11,62.

Гарнитура Times. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов

в Ижевской республиканской типографии,

426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
