Pendahuluan Graf

Farida Hanum

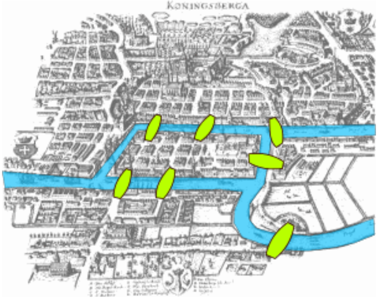
Dept. Matematika IPB

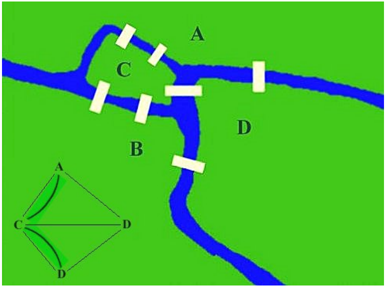
18 April 2013

Sejarah Teori Graf

Teori graf pertama kali muncul pada tahun 1736: "**Masalah Jembatan Königsberg**"

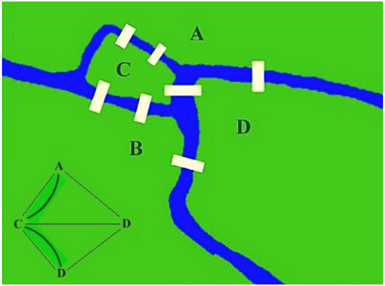
Di kota Königsberg pada abad ke 18, tujuh jembatan melintasi sungai Pregel dan mengelilingi Pulau Kneiphof.





Yang menjadi pertanyaan adalah apakah terdapat suatu tour yang dimulai dari suatu daratan, melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula.

Matematikawan Swiss Leonhard Euler merepresentasikannya dalam bentuk graf



- dan membuktikan bahwa tour seperti itu tidak ada.

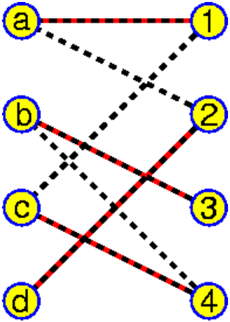
Beberapa contoh aplikasi graf (1)

- Misalkan Pemda Kodya Bokor ingin mendirikan stasiun pemadam kebakaran. Diberikan bagan jalan di Bokor seperti pada gambar.

Tentukan lokasi stasiun pemadam kebakaran yang dapat meminimumkan rata-rata jarak perjalanan ke setiap lokasi yang membutuhkan $\longrightarrow$ masalah jarak/*center*

Beberapa contoh aplikasi graf (2)

- *Marriage Problem:* $\longrightarrow$ masalah *matching*
  Misalkan terdapat sejumlah hingga laki-laki dan setiap orangnya mempunyai sejumlah hingga teman perempuan. Dalam kondisi bagaimana semua laki-laki dapat dinikahkan dengan teman perempuannya?



- Masalah Penjadwalan $\rightarrow$ masalah *coloring*
  Sepuluh mahasiswa FMIPA IPB akan melakukan ujian akhir semester beberapa matakuliah pilihan yaitu P, Q, R, S, T, U, dan V. Nama mahasiswa dan ujian akhir matakuliah pilihan yang harus diikuti diberikan pada tabel. Ingin diketahui, berapa periode waktu ujian akhir yang diperlukan agar semua mahasiswa dapat mengikutinya (artinya tidak ada mahasiswa yang harus mengikuti dua ujian pada saat yang sama).

Mhs.	Matakuliah	Mhs.	Matakuliah
Parara	P, R, V	Dedi	S, T
Wendy	P, Q, U	Hasannudin	Q, R
Vina	Q, S	Ariyanto	P, V
Atikah	P, R	Intan	P, U, V
Resty	R, S	Sifa	T, U

Beberapa contoh aplikasi graf (4)

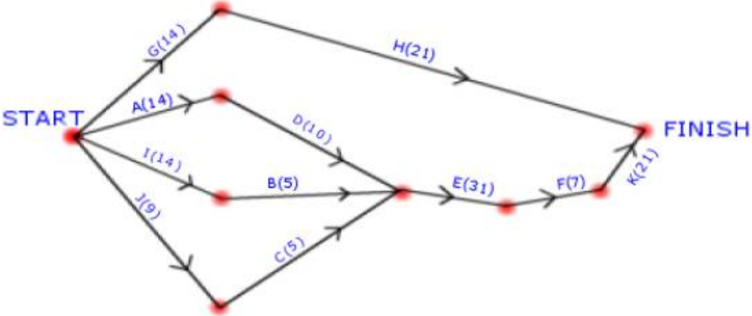
- Pemilik perusahaan bahan kimia ingin menyimpan semua bahan kimianya, yaitu A,B,C,D,E,dan F di gudang. Karena beberapa bahan kimia dapat berbahaya jika saling bereaksi, maka diperlukan beberapa kamar di dalam gudang sehingga pasangan bahan kimia yang berbahaya tidak disimpan dalam satu kamar. Dalam tabel berikut tanda asterisk (*) menyatakan bahwa pasangan bahan kimia tersebut harus dipisahkan.

	A	B	C	D	E	F
A	—	*	*	*		
B	*	—	*	*	*	
C	*	*	—	*		*
D	*	*	*	—		*
E		*			—	
F			*	*		—

Jika pemilik ingin mengetahui berapa **minimum** banyaknya kamar yang harus dibuat, maka permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan graf.

Beberapa contoh aplikasi graf (5)

- Suatu proyek pekerjaan dibagi menjadi beberapa kegiatan. Hubungan urutan kegiatan dan waktu pelaksanaan kegiatan diberikan pada gambar berikut. Tentukan lintasan kritisnya dan tentukan pula berapa waktu minimum kegiatan dapat diselesaikan.



Beberapa contoh aplikasi graf (6)

Banyak masalah lain dalam dunia nyata yang dapat dinyatakan dalam suatu graf, misalkan:

- masalah rute perjalanan,
- masalah penjadwalan,
- masalah jaringan listrik,
- masalah kontrol dan perencanaan produksi,
- diagram untuk molekul-molekul kimia,
- dan lain-lain.

Definition

Suatu **graf** G adalah pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan takkosong dari elemen-elemen graf yang disebut verteks (*node*, simpul) dan E adalah himpunan pasangan tak terurut (mungkin saja himpunan kosong) dari verteks-verteks berbeda di V.
V dapat dituliskan $V(G)$ dan $E = E(G)$.

Konsep-Konsep Dasar (2)

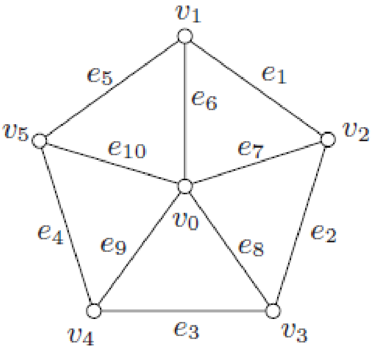
Adjacent & Incident

Definition

Misalkan G graf maka $\{u, v\} \in E(G)$ (dengan $u, v \in V(G)$) disebut sisi (*edge*). Sisi $\{u, v\}$ dapat dituliskan $\{v, u\}$ dan boleh disingkat dengan uv (atau vu).

1. Jika $e = uv \in E(G)$, maka u dan v dikatakan *adjacent* di G, dan e **menghubungkan** u dan v.
2. Jika $e = uv \in E(G)$ maka u dan v masing-masing dikatakan *incident* dengan e.
3. Jika $e = pq \in E$ dan $f = pr \in E$ maka sisi-sisi e dan f dikatakan *adjacent* karena mempunyai verteks sekutu ("*vertex common*"), yaitu p.

Ilustrasi

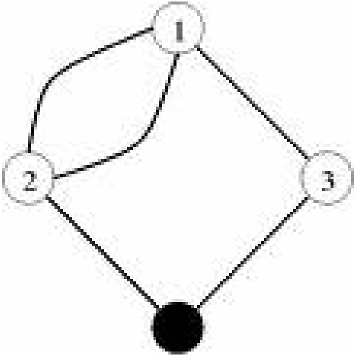


- Verteks v_1 dan v_2 *adjacent* di G.
- Verteks v_1 dan v_2 *incident* dengan sisi (*edge*) e_1.
- Sisi e_5 *adjacent* dengan sisi e_{10} dengan verteks sekutu v_5.

Konsep Dasar (3): Multigraf

Definition

Suatu **multigraf** adalah pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan takkosong dari verteks-verteks dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari verteks-verteks berbeda di V dan pengulangan diperbolehkan.



- satu pasang verteks boleh dihubungkan dengan lebih dari satu sisi,
- dua atau lebih sisi yang menghubungkan sepasang verteks disebut **sisi-sisi paralel**.

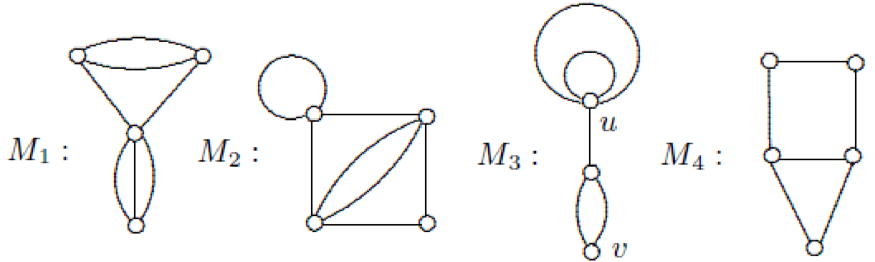
Konsep Dasar (4): Pseudograf

Definition

Suatu **pseudograf** adalah pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan takkosong dari verteks-verteks dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari verteks-verteks di V dan pengulangan diperbolehkan.

Jadi, pada pseudograf dimungkinkan terdapat *loop* (yaitu sisi yang menghubungkan satu verteks dengan dirinya sendiri).

Multigraf, Pseudograf, Graf Simple (Graf Sederhana)



Definition

Graf yang tidak mengandung sisi paralel dan *loop* disebut **graf sederhana** (*simple graph*).

Order & Size

Definition

Banyaknya verteks/simpul dari suatu graf G disebut *order* dari G, dan banyaknya sisi/*edge* dari G disebut *size* dari G. Jadi *order* dari G adalah $|V(G)|$ dan *size* dari G adalah $|E(G)|$.

- Suatu graf dengan *order* p dan *size* q dituliskan sebagai **graf** (p, q). Jelas,

$$q \leq \binom{p}{2}.$$

PR: Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.1 nomor 1,2,3,4.

Derajat Verteks

Definition

Derajat (*degree*) dari verteks v, dinyatakan dengan $\deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang *incident* dengan v.

Verteks yang berderajat 0 dinamakan **verteks yang terisolasi**, dan verteks berderajat 1 disebut **verteks-ujung** (*end-vertex*).
Verteks berderajat ganjil **(genap)** disebut verteks ganjil **(genap)**.

- Himpunan derajat verteks dari graf G, dinotasikan dengan $\mathcal{D}(G)$.
- Graf yang semua verteksnya berderajat 0 dinamakan **graf nol** (*null graph*).
- Jika G graf berorde p, maka

$$\boxed{0 \leq \deg(v) \leq p - 1.}$$

Neigborhood dari verteks

Definition

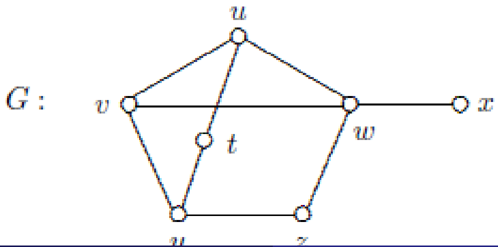
Untuk suatu verteks v di G didefinisikan *neighborhood* dari v adalah himpunan verteks yang *adjacent* dengan v, yaitu

$$N(v) = N_G(v) = \{u \in V(G) \,|\, vu \in E(G)\}.$$

Jadi banyaknya verteks yang *adjacent* dengan v adalah derajat dari v,

$$|N(v)| = \deg(v).$$

Ilustrasi:



Teorema 1.1 (Teorema Pertama dalam Teori Graf)

Perhatikan bahwa total derajat semua verteks graf tersebut adalah dua kali banyaknya sisi.

Theorem

Misalkan G adalah graf (p, q) *dengan*

$$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\},$$

maka

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q.$$

Bukti: Karena setiap sisi menghubungkan dua verteks, maka ketika menjumlahkan derajat verteks suatu graf, setiap sisi dihitung dua kali. Jadi total derajat verteks adalah dua kali banyaknya sisi.

Akibat 1.1

Theorem

Banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Bukti:

- Misalkan V_e: himpunan verteks berderajat genap, dan V_o : himpunan verteks berderajat ganjil dari graf G yang mempunyai *size* q.

Akibat 1.1

Theorem

Banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Bukti:

- Misalkan V_e: himpunan verteks berderajat genap, dan V_o : himpunan verteks berderajat ganjil dari graf G yang mempunyai *size* q.
- Maka

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_e} \deg v + \sum_{v \in V_o} \deg v = 2q.$$

Akibat 1.1

Theorem

Banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Bukti:

- Misalkan V_e: himpunan verteks berderajat genap, dan V_o : himpunan verteks berderajat ganjil dari graf G yang mempunyai *size* q.
- Maka
$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_e} \deg v + \sum_{v \in V_o} \deg v = 2q.$$
- sehingga
$$\sum_{v \in V_o} \deg v = 2q - \sum_{v \in V_e} \deg v$$

Theorem

Banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Bukti:

- Misalkan V_e: himpunan verteks berderajat genap, dan V_o : himpunan verteks berderajat ganjil dari graf G yang mempunyai *size* q.
- Maka
$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_e} \deg v + \sum_{v \in V_o} \deg v = 2q.$$
- sehingga
$$\sum_{v \in V_o} \deg v = 2q - \sum_{v \in V_e} \deg v$$
- Karena setiap suku merupakan bilangan genap, maka $\sum_{v \in V_o} \deg v$ berupa bilangan genap.

Akibat 1.1

Theorem

Banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Bukti:

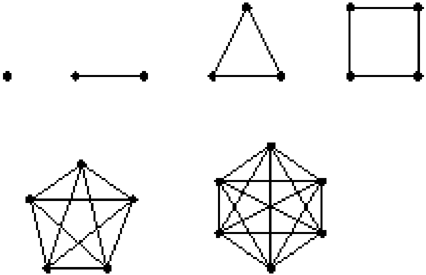
- Misalkan V_e: himpunan verteks berderajat genap, dan V_o : himpunan verteks berderajat ganjil dari graf G yang mempunyai *size* q.
- Maka
$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \sum_{v \in V_e} \deg v + \sum_{v \in V_o} \deg v = 2q.$$
- sehingga
$$\sum_{v \in V_o} \deg v = 2q - \sum_{v \in V_e} \deg v$$
- Karena setiap suku merupakan bilangan genap, maka $\sum_{v \in V_o} \deg v$ berupa bilangan genap.
- Jadi banyaknya simpul berderajat ganjil adalah bilangan genap.

Graf regular

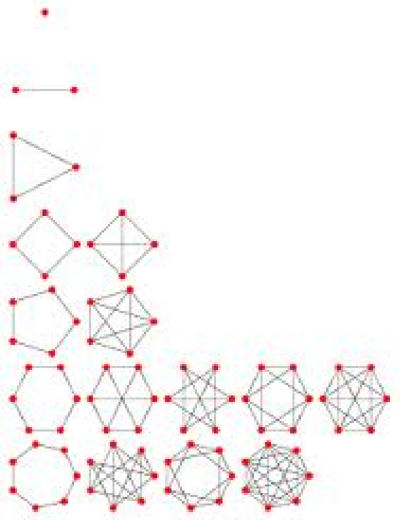
Definition

Suatu graf dikatakan **r-regular** jika semua verteksnya berderajat r, untuk suatu bilangan bulat taknegatif r.

Graf Regular (2)



Graf Regular (2)



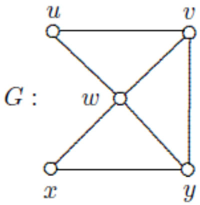
Komplemen dari Graf

Definition

Graf $\overline{G}$ dikatakan **komplemen** dari graf G jika $V\left(\overline{G}\right) = V\left(G\right)$ dan

$$uv \in E\left(\overline{G}\right) \text{ jika dan hanya jika } uv \notin E\left(G\right).$$

Ilustrasi: -



Theorem

G regular jika dan hanya jika $\overline{G}$ regular.

PR:

Soal latihan Chartrand & Oellermann 1.2 no. 1,2,3, 4,9, 11.

Isomorfisme Graf & Graf Isomorfik

Definitions

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf. Maka **isomorfisme** dari G_1 ke G_2 adalah pemetaan satu-satu dan pada (bijektif) $\phi : V_1 \to V_2$ sehingga

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_2,$$

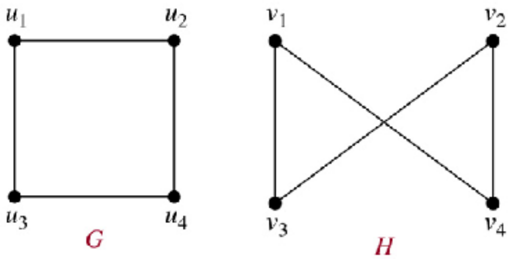
(berarti u dan v *adjacent* di G_1 jika dan hanya jika $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ *adjacent* di G_2).

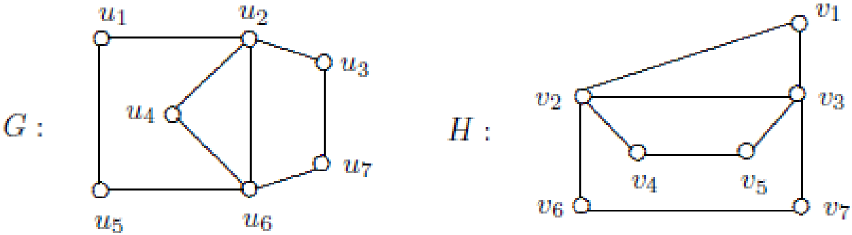
Definitions

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat suatu isomorfisme dari G_1 ke G_2 dan dituliskan dengan

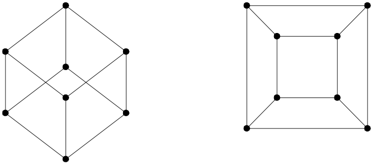
$$G_1 \simeq G_2.$$

Contoh Graf Isomorfik (1)

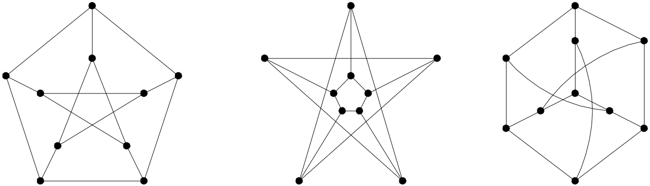




Contoh Graf Isomorfik (2)



Graf G_1 dan G_2



Graf G_3, G_4, G_5

Dua Graf Isomorfik

- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:

Dua Graf Isomorfik

- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:
  1. banyaknya simpul di G_1 dan G_2 sama,

Dua Graf Isomorfik

- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:
  1. banyaknya simpul di G_1 dan G_2 sama,
  2. banyaknya sisi di G_1 dan G_2 sama,

Dua Graf Isomorfik

- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:
  1. banyaknya simpul di G_1 dan G_2 sama,
  2. banyaknya sisi di G_1 dan G_2 sama,
  3. banyaknya simpul berderajat i (untuk setiap i) pada kedua graf adalah sama.

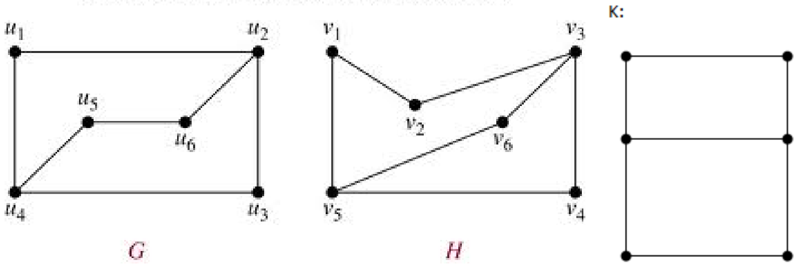
Dua Graf Isomorfik

- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:
  1. banyaknya simpul di G_1 dan G_2 sama,
  2. banyaknya sisi di G_1 dan G_2 sama,
  3. banyaknya simpul berderajat i (untuk setiap i) pada kedua graf adalah sama.
- Perhatikan bahwa ketiga hal di atas merupakan syarat perlu.

Dua Graf Isomorfik

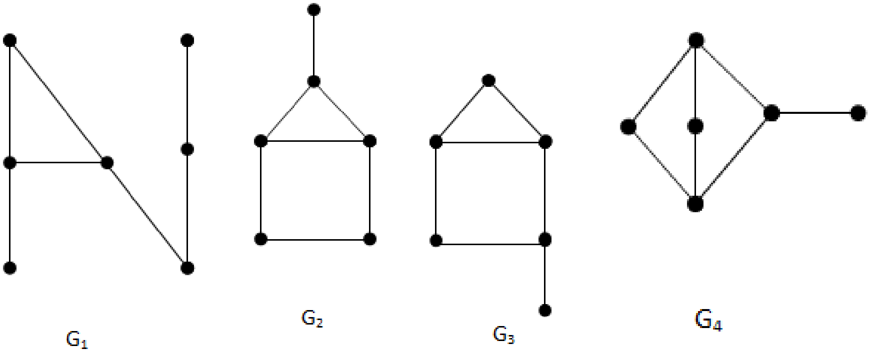
- Jika $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dua graf yang isomorfik, maka:
  1. banyaknya simpul di G_1 dan G_2 sama,
  2. banyaknya sisi di G_1 dan G_2 sama,
  3. banyaknya simpul berderajat i (untuk setiap i) pada kedua graf adalah sama.
- Perhatikan bahwa ketiga hal di atas merupakan syarat perlu.
- Jadi, bisa saja terdapat dua graf yang memenuhi ketiga hal tersebut tetapi tidak isomorfik.

Manakah di antara graf-graf ini yang isomorfik? Memenuhi syarat perlu keisomorfikan tapi tidak isomorfik?



Apakah isomorfik?

Manakah di antara graf-graf ini yang isomorfik? Memenuhi syarat perlu keisomorfikan tapi tidak isomorfik?



Graf Sama

Definition

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan **sama** (*equal*) jika

$$V(G_1) = V(G_2) \text{ dan } E(G_1) = E(G_2).$$

- Graf yang isomorfik belum tentu sama.
- **Ilustrasi:** -

Graf Trivial & Taktrivial

Definition

Suatu graf ber*order* 1 dinamakan graf **trivial,** dan graf ber*order* lebih dari satu dinamakan graf **taktrivial.**

- Terdapat dua graf (takisomorfik) taktrivial ber*order* 2, dan 4 graf (takisomorfik) ber*order* 3.

PR

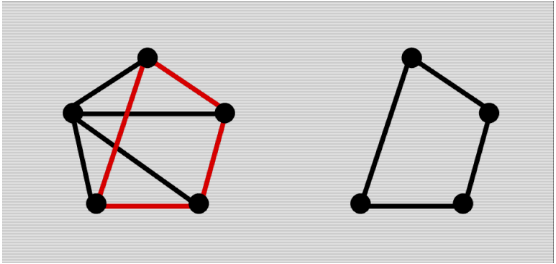
Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.3 no. 1,4,7,8

Subgraf

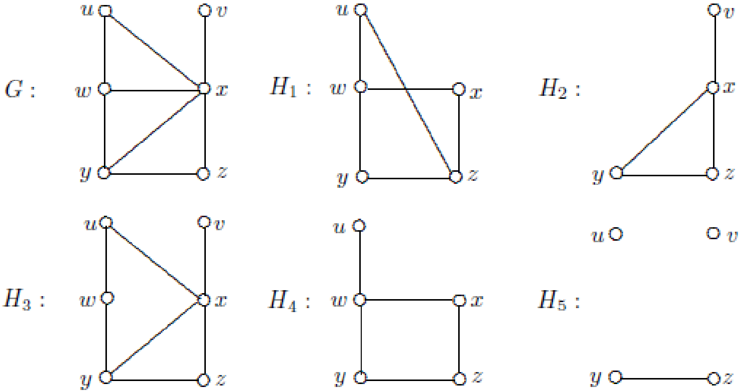
Definition

Graf H adalah **subgraf** dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$

- **Ilustrasi:** -



Contoh Subgraf



Spanning Subgraph

Definition

Subgraf H dari graf G dikatakan *spanning subgraph* dari G jika $V(H) = V(G)$.

- **Ilustrasi: -**

Subgraf yang Diinduksi Verteks

Definition

Misalkan $S \subseteq V(G)$ dan $S \neq \varnothing$. Subgraf yang **diinduksi oleh** S, dituliskan $\langle S \rangle$, adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan verteks S.

- Jadi, $\langle S \rangle$ memuat semua sisi dari G yang menghubungkan verteks-verteks di S.
- **Ilustrasi:** -

Definition

Subgraf H dari graf G dikatakan **subgraf yang diinduksi verteks** (*vertex-induced subgraph*) jika $H = \langle S \rangle$, untuk suatu himpunan takkosong $S \subseteq V(G)$.

Subgraf yang Diinduksi Sisi

Definition

Misalkan X himpunan takkosong yang merupakan subhimpunan dari $E(G)$. Maka subgraf yang diinduksi oleh X adalah subgraf minimal dari G dengan himpunan sisi adalah X dan dinotasikan dengan $\langle X \rangle$.

- Jadi, $\langle X \rangle$ terdiri atas verteks-verteks di G yang *incident* dengan paling sedikit satu sisi di X.
- **Ilustrasi:-**

Definition

Subgraf H dari graf G dikatakan **subgraf yang diinduksi sisi** (*edge-induced subgraph)* jika $H = \langle X \rangle$, untuk suatu himpunan takkosong $X \subseteq E(G)$.

Penghapusan Himpunan Verteks

Definition

Misalkan G suatu graf dan S adalah subhimpunan sejati dari $V(G)$ (yaitu $S \subset V(G)$ dan $S \neq V(G)$). Maka graf $G - S$ adalah $\langle V(G) - S \rangle$, yaitu subgraf yang diperoleh dengan menghilangkan verteks di S dan semua sisi yang *incident* dengan verteks-verteks di S.

- **Ilustrasi:** -
- Jika $S = \{v\}$, maka $G - S$ dapat dituliskan dengan $G - v$.

Penambahan Himpunan Sisi

Definition

Misalkan G graf dengan u_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah pasangan verteks yang tidak *adjacent* dari G. Maka

$$G + \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, \ u_nv_n\}$$

adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menambahkan himpunan sisi $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, \ u_nv_n\}$.

- Jka u dan v dua verteks yang tidak *adjacent* di G, maka $G + \{uv\}$ dapat dituliskan $G + uv$.
- **Ilustrasi:** -

Penghapusan Himpunan Sisi

Fact

Analog dengan penghapusan himpunan verteks, dapat juga dilakukan penghapusan untuk himpunan sisi.

- **Ilustrasi**

PR

Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.4 no. 1,2,3

Barisan Derajat

- Suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dipadankan dengan barisan bilangan bulat taknegatif

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_p$$

yang disebut **barisan derajat**.

- Suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dipadankan dengan barisan bilangan bulat taknegatif

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_p$$

yang disebut **barisan derajat**.

- Diasumsikan verteks-verteks dilabeli sehingga

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots \geq \deg v_p.$$

- Suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dipadankan dengan barisan bilangan bulat taknegatif

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_p$$

yang disebut **barisan derajat**.

- Diasumsikan verteks-verteks dilabeli sehingga

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots \geq \deg v_p.$$

- Derajat terkecil, $\deg v_p$, disebut **derajat minimum** dan dinotasikan dengan $\delta(G)$,

Barisan Derajat

- Suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dipadankan dengan barisan bilangan bulat taknegatif

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_p$$

  yang disebut **barisan derajat**.
- Diasumsikan verteks-verteks dilabeli sehingga

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots \geq \deg v_p.$$

- Derajat terkecil, $\deg v_p$, disebut **derajat minimum** dan dinotasikan dengan $\delta(G)$,
- nilai terbesar dari barisan derajat $(\deg v_1)$ disebut **derajat maksimum** dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Barisan Derajat

- Suatu graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dipadankan dengan barisan bilangan bulat taknegatif

$$\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_p$$

  yang disebut **barisan derajat**.
- Diasumsikan verteks-verteks dilabeli sehingga

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots \geq \deg v_p.$$

- Derajat terkecil, $\deg v_p$, disebut **derajat minimum** dan dinotasikan dengan $\delta(G)$,
- nilai terbesar dari barisan derajat $(\deg v_1)$ disebut **derajat maksimum** dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$.
- **Ilustrasi: -**

Theorem

Jika $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *adalah barisan derajat, maka* $\sum_{i=1}^{p} d_i$ *merupakan bilangan genap dan* $0 \leq d_i \leq p - 1$, *untuk* $1 \leq i \leq p$.

- Tetapi tidak berlaku sebaliknya.
- Contoh:
  Barisan $s : 5, 5, 3, 2, 1, 0$ bukan barisan derajat suatu graf manapun (*mengapa?*)

Definition

Suatu barisan bilangan bulat taknegatif dikatakan **graphical** jika barisan tersebut merupakan barisan derajat dari suatu graf.

Teorema 1.2 (Havel-Hakimi)

Theorem

Barisan bilangan bulat taknegatif $s : d_1, d_2, \ldots, d_p$, *dengan* $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_p$, *dengan* $p \geq 2$ *dan* $d_1 \geq 1$ *adalah graphical jika dan hanya jika barisan*

$$s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_p$$

adalah graphical.

Bukti: lihat Chartrand & Oellermann.

Prosedur Havel-Hakimi

Misalkan diberikan barisan $p \geq 1$ bilangan bulat taknegatif dengan urutan taknaik.
Jika barisan ini memuat suku dengan nilai melebihi $p - 1$, maka barisan tersebut tidak *graphical.*
Jika tidak,

1. Jika semua bilangan dalam barisan tersebut adalah 0, barisan tersebut *graphical.* Jika terdapat bilangan negatif, maka barisan tersebut pasti tidak *graphical.*
2. Jika diperlukan, urutkan kembali barisan, sehingga merupakan barisan taknaik.
3. Hapus suku pertama, misalkan n, dari barisan; kemudian kurangi n bilangan sesudahnya dengan 1.
4. Kembali ke langkah 1.

Ilustrasi:

Soal Latihan 1.5 nomor 1a:
Tentukan apakah barisan bilangan

$$s : 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0$$

adalah *graphical*, dan jika ya, tentukan graf dengan barisan derajat s.

Contoh Barisan Derajat

- Periksa apakah barisan-barisan berikut adalah *graphical*. Jika ya, maka dengan prosedur Havel-Hakimi tentukan graf dengan barisan derajat s :

  1. $s : 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1$
  2. $s : 7, 6, 2, 2, 2, 1, 0, 0$
  3. $s : 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1$
  4. $s : 5, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1$
  5. $s : 5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1$
  6. $s : 5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1$

- **Soal 1.5 no.5**
  Misalkan $1, 1, 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, x, 8$ adalah barisan derajat, dalam urutan takturun, dari suatu graf. Tentukan x.

PR

Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.5 no. 1, 2, 3, 9.

Walk

Definition

Suatu *walk* dalam graf G adalah barisan berayun verteks dan sisi

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \quad (n \geq 0)$$

yang dimulai dan berakhir di verteks, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Karena sisi e_i sudah tercermin dari verteks yang mengapitnya, maka untuk selanjutnya *walk* dapat hanya dituliskan dengan barisan verteks

$$W : v_0, v_1, \ldots, v_n.$$

Walk

Definition

Suatu *walk* dalam graf G adalah barisan berayun verteks dan sisi

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \quad (n \geq 0)$$

yang dimulai dan berakhir di verteks, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Karena sisi e_i sudah tercermin dari verteks yang mengapitnya, maka untuk selanjutnya *walk* dapat hanya dituliskan dengan barisan verteks

$$W : v_0, v_1, \ldots, v_n.$$

- *Walk* yang dimulai dari v_0 dan berakhir di v_n disebut *walk* $v_0 - v_n$, dan *walk* W mempunyai panjang n karena melalui n sisi (tidak harus berbeda).

Walk

Definition

Suatu *walk* dalam graf G adalah barisan berayun verteks dan sisi

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \quad (n \geq 0)$$

yang dimulai dan berakhir di verteks, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Karena sisi e_i sudah tercermin dari verteks yang mengapitnya, maka untuk selanjutnya *walk* dapat hanya dituliskan dengan barisan verteks

$$W : v_0, v_1, \ldots, v_n.$$

- *Walk* yang dimulai dari v_0 dan berakhir di v_n disebut *walk* $v_0 - v_n$, dan *walk* W mempunyai panjang n karena melalui n sisi (tidak harus berbeda).
- *Walk* dengan panjang 0 dinamakan *walk trivial*.

Trail & Path

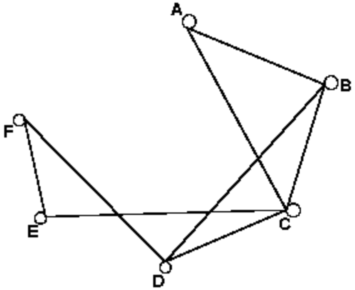
Definition

Trail adalah *walk* dengan setiap sisinya berbeda.

Definition

Path adalah *walk* dengan setiap simpulnya berbeda.

- **Ilustrasi: -**



Berikan contoh (jika ada):

1. *walk, trail, path*
2. *walk* yang bukan *trail*
3. *trail* yang bukan *path*
4. *path* yang bukan *trail*

Theorem

Setiap walk $u - v$ dalam suatu graf pasti memuat path $u - v$.

Bukti.

- Misalkan W adalah *walk* $u - v$ pada suatu graf G. Jika $u = v$, maka *path* $u - u$ pasti termuat dalam *walk* $u - u$.

Teorema 1.3

Theorem

Setiap walk $u - v$ *dalam suatu graf pasti memuat path* $u - v$.

Bukti.

- Misalkan W adalah *walk* $u - v$ pada suatu graf G. Jika $u = v$, maka *path* $u - u$ pasti termuat dalam *walk* $u - u$.
- Jadi, andaikan $u \neq v$. Misalkan $W : u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ (mungkin saja suatu verteks dilabeli lebih dari satu kali)

Teorema 1.3

Theorem

Setiap walk $u - v$ dalam suatu graf pasti memuat path $u - v$.

Bukti.

- Misalkan W adalah *walk* $u - v$ pada suatu graf G. Jika $u = v$, maka *path* $u - u$ pasti termuat dalam *walk* $u - u$.
- Jadi, andaikan $u \neq v$. Misalkan $W : u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ (mungkin saja suatu verteks dilabeli lebih dari satu kali)
- Jika tidak ada verteks di W yang dilabeli lebih dari satu kali, maka *path* $u - v$nya adalah W sendiri.

Teorema 1.3

Theorem

Setiap walk $u - v$ dalam suatu graf pasti memuat path $u - v$.

Bukti.

- Misalkan W adalah *walk* $u - v$ pada suatu graf G. Jika $u = v$, maka *path* $u - u$ pasti termuat dalam *walk* $u - u$.
- Jadi, andaikan $u \neq v$. Misalkan $W : u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ (mungkin saja suatu verteks dilabeli lebih dari satu kali)
- Jika tidak ada verteks di W yang dilabeli lebih dari satu kali, maka *path* $u - v$nya adalah W sendiri.
- Sebaliknya, misalkan i dan j dua bilangan bulat positif berbeda, dengan $i < j$, sehingga $u_i = u_j$.

Teorema 1.3

Theorem

Setiap walk $u - v$ *dalam suatu graf pasti memuat path* $u - v$.

Bukti.

- Misalkan W adalah *walk* $u - v$ pada suatu graf G. Jika $u = v$, maka *path* $u - u$ pasti termuat dalam *walk* $u - u$.
- Jadi, andaikan $u \neq v$. Misalkan $W : u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ (mungkin saja suatu verteks dilabeli lebih dari satu kali)
- Jika tidak ada verteks di W yang dilabeli lebih dari satu kali, maka *path* $u - v$nya adalah W sendiri.
- Sebaliknya, misalkan i dan j dua bilangan bulat positif berbeda, dengan $i < j$, sehingga $u_i = u_j$.
- Jika $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ dibuang, maka akan diperoleh *walk* $u - v$ W_1 dengan panjang *walk* W_1 lebih sedikit daripada pangjang *walk* W.

Bukti.

- Jika tidak ada verteks di W_1 yang dilabeli lebih dari satu kali, maka *path* $u - v$ yang dimaksud adalah W_1.

$\square$

Bukti Teorema 1.3 (lanjutan)

Bukti.

- Jika tidak ada verteks di W_1 yang dilabeli lebih dari satu kali, maka *path* $u - v$ yang dimaksud adalah W_1.
- Jika tidak, maka prosedur diulangi hingga diperoleh *path* $u - v$.

□

Cycle & Circuit

Definition

Cycle adalah *walk* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ dengan $n \geq 3$, $v_0 = v_n$, dan semua verteksnya berbeda.

- *Cycle* dengan panjang n dituliskan sebagai *n-cycle.*

Definition

Walk $u - v$ dikatakan tertutup jika $u = v$, dan jika tidak, dinamakan *walk* terbuka.

- Jadi *cycle* adalah *walk* tertutup dengan semua verteks berbeda.

Definition

Trail tertutup yang taktrivial dinamakan *circuit.*

- Jadi *cycle* pasti *circuit,* tetapi *circuit* belum tentu *cycle.*
- **Ilustrasi: –**

Verteks dan Graf Terhubungkan

Definitions

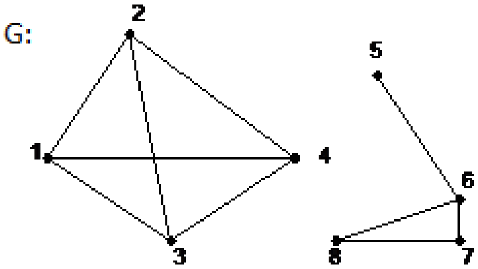
Misalkan u dan v verteks-verteks di graf G. Verteks u dikatakan **dihubungkan dengan** v jika G mempunyai *path* $u - v$.

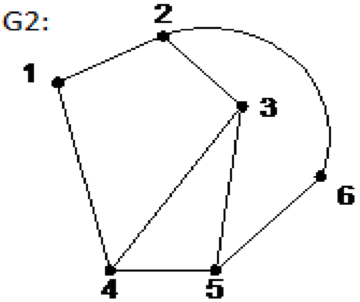
Definitions

Graf G dikatakan **terhubungkan** (*connected)* jika untuk setiap pasang verteks u dan v di G, maka u dihubungkan dengan v.

Graf Terhubungkan dan Tak Terhubungkan

- Suatu graf G dikatakan tak terhubungkan (*disconnected*) jika terdapat pasangan verteks $u - v$ di G sehingga tidak ada *path* $u - v$.
- Jadi graf trivial pasti terhubungkan.
- **Ilustrasi:**
  Graf G tak terhubung, dan graf $G2$ terhubung.



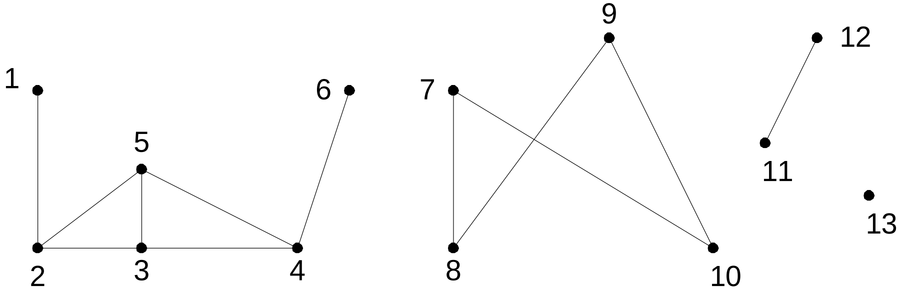


Komponen

Definition

Subgraf H dari graf G disebut **komponen** dari graf G jika H adalah subgraf maksimal dari G yang terhubungkan.

- Banyaknya komponen dari G dituliskan $\mathbf{k}(G)$.
- **Ilustrasi:** Graf berikut mempunyai 4 komponen.



PR

- Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.6 no. 1, 5, 9.

Cut-vertex dan Bridge

Definition

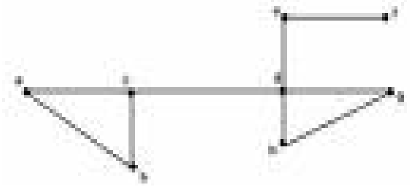
Verteks v di graf G disebut **cut-vertex** jika $k(G - v) > k(G)$.

- Jadi, v adalah *cut-vertex* dari graf terhubung G jika $G - v$ takterhubung.

Definition

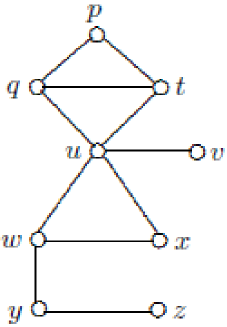
Sisi e pada graf G disebut *bridge* jika $k(G - e) > k(G)$.

- **Ilustrasi: –**

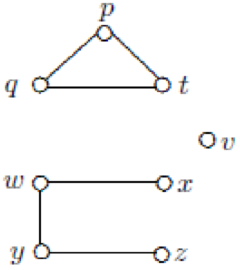


Contoh Cut-vertex dan Bridge

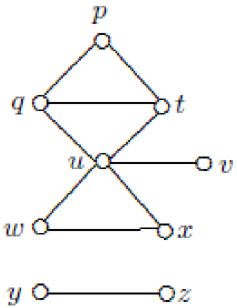
G :



$G - u$:



$G - wy$:



Teorema 1.4

Theorem

Suatu sisi e pada graf terhubung G adalah bridge jika dan hanya jika e tidak terletak pada suatu cycle di G.

Bukti.

Chartrand & Oellermann hlm. 23 (*pelajari!*) $\square$

Nonseparable, Block, End-Block

Definition

Suatu graf dikatakan **nonseparable** jika graf tersebut taktrivial, terhubungkan, dan tidak mempunyai *cut-vertex*.

- **Ilustrasi: –**

Definition

Misalkan G graf taktrivial yang terhubungkan. Suatu **blok** B dari G adalah subgraf maksimal yang *nonseparable*.

Definition

Suatu blok dari graf G yang memuat tepat satu *cut-vertex* dari G disebut **end-block** dari G.

- **Ilustrasi: –**

Teorema 1.5

Theorem

Misalkan G graf terhubung dengan paling sedikit satu cut-vertex, maka G mempunyai paling sedikit dua end-block.

- **Ilustrasi:**

PR

Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.7 no. 2,3,4, 6, 7.

Graf Lengkap

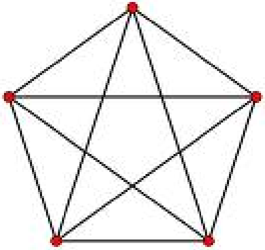
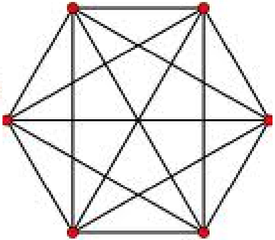
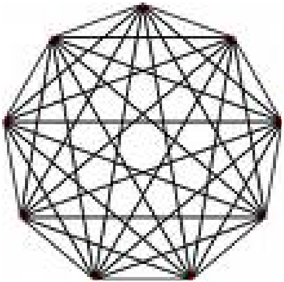
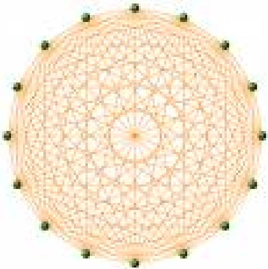
Definition

Graf berorder p sedemikian sehingga setiap verteksnya terhubungkan disebut graf **lengkap,** dan dinotasikan dengan K_p.

- Jadi graf lengkap berorder p adalah graf $(p-1)$ −**regular** dan mempunyai sisi $q = \binom{p}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$.

Ilustrasi Graf Lengkap

Graf Lengkap: K_5, K_6, K_9, dan K_{16}

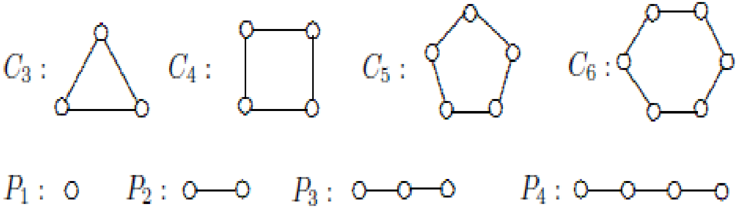
Definition

Graf berorder $n \geq 1$ yang berbentuk *path* disebut *path* **berorder** n, dituliskan P_n.

Definition

Graf berorder $n \geq 3$ yang berbentuk *cycle* disebut **n-cycle,** dan dituliskan dengan C_n.

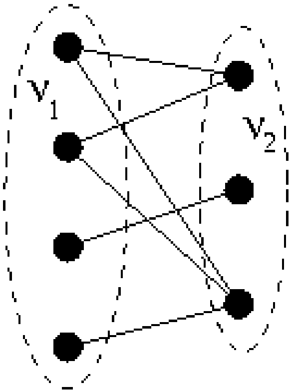
- **Ilustrasi:** C_3, C_4, C_5, dan C_6.



Definition

Suatu graf G dikatakan **bipartite** jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan takkosong V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi di G menghubungkan suatu verteks di V_1 dengan verteks di V_2.

- **Ilustrasi:** –



Teorema 1.6

Theorem

Graf taktrivial G adalah graf bipartite jika dan hanya jika G tidak mempunyai cycle ganjil.

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan G graf bipartite. Akan ditunjukkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil.

- Karena G bipartite, maka $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan takkosong V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi/*edge* dari G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.

$\square$

Teorema 1.6

Theorem

Graf taktrivial G adalah graf bipartite jika dan hanya jika G tidak mempunyai cycle ganjil.

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan G graf bipartite. Akan ditunjukkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil.

- Karena G bipartite, maka $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan takkosong V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi/*edge* dari G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan G mempunyai $n-$*cycle* $C_n : v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$.

$\square$

Teorema 1.6

Theorem

Graf taktrivial G adalah graf bipartite jika dan hanya jika G tidak mempunyai cycle ganjil.

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan G graf bipartite. Akan ditunjukkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil.

- Karena G bipartite, maka $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan takkosong V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi/*edge* dari G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan G mempunyai $n-$*cycle* $C_n : v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$.
- Akan ditunjukkan n bilangan genap.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.

□

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.
- Jadi n bilangan genap.

□

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.
- Jadi n bilangan genap.
- Ini berarti G tidak mempunyai *cycle* ganjil.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.
- Jadi n bilangan genap.
- Ini berarti G tidak mempunyai *cycle* ganjil.
- ($\Leftarrow$) Sebaliknya, misalkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil. Akan ditunjukkan G graf *bipartite*.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.
- Jadi n bilangan genap.
- Ini berarti G tidak mempunyai *cycle* ganjil.
- $(\Leftarrow)$ Sebaliknya, misalkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil. Akan ditunjukkan G graf *bipartite*.
- Misalkan G graf terhubung, dan v_1 adalah verteks di G; maka terdapat *path* $v_1 - v$ di G, $\forall v \in G$.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Misalkan $v_1 \in V_1$. Karena sisi $v_1 v_2$ menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2, maka haruslah $v_2 \in V_2$.
- Dengan alasan yang sama, $v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ dst.
- Karena $v_n v_1$ sisi di G dan $v_1 \in V_1$, maka haruslah $v_n \in V_2$.
- Jadi n bilangan genap.
- Ini berarti G tidak mempunyai *cycle* ganjil.
- $(\Leftarrow)$ Sebaliknya, misalkan G tidak mempunyai *cycle* ganjil. Akan ditunjukkan G graf *bipartite*.
- Misalkan G graf terhubung, dan v_1 adalah verteks di G; maka terdapat *path* $v_1 - v$ di G, $\forall v \in G$.
- Didefinisikan $V_1 \subset V(G)$ yang memuat v_1 dan setiap $v \in G$ sehingga *path* $v_1 - v$ merupakan *path* genap.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;
- maka terdapat *edge*/sisi yang menghubungkan dua verteks di V_1 atau dua verteks di V_2.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;
- maka terdapat *edge*/sisi yang menghubungkan dua verteks di V_1 atau dua verteks di V_2.
- Misalkan sisi e menghubungkan verteks v_j dan v_k di V_2.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;
- maka terdapat *edge*/sisi yang menghubungkan dua verteks di V_1 atau dua verteks di V_2.
- Misalkan sisi e menghubungkan verteks v_j dan v_k di V_2.
- Karena $v_j, v_k \in V_2$, maka *path* $v_1 - v_j$ dan *path* $v_1 - v_k$ merupakan *path* ganjil.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;
- maka terdapat *edge*/sisi yang menghubungkan dua verteks di V_1 atau dua verteks di V_2.
- Misalkan sisi e menghubungkan verteks v_j dan v_k di V_2.
- Karena $v_j, v_k \in V_2$, maka *path* $v_1 - v_j$ dan *path* $v_1 - v_k$ merupakan *path* ganjil.
- Misalkan P: *path* $v_1 - v_j$ yang terpendek, dan Q : *path* $v_1 - v_k$ yang terpendek,

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

Didefinisikan $V_2 = V(G) - V_1$, maka setiap verteks yang *adjacent* dengan v_1 adalah elemen V_2.

- Akan ditunjukkan bahwa setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Andaikan tidak demikian;
- maka terdapat *edge*/sisi yang menghubungkan dua verteks di V_1 atau dua verteks di V_2.
- Misalkan sisi e menghubungkan verteks v_j dan v_k di V_2.
- Karena $v_j, v_k \in V_2$, maka *path* $v_1 - v_j$ dan *path* $v_1 - v_k$ merupakan *path* ganjil.
- Misalkan P: *path* $v_1 - v_j$ yang terpendek, dan Q : *path* $v_1 - v_k$ yang terpendek,
- maka P, Q, dan sisi $v_j v_k$ menghasilkan *walk* tertutup dengan panjang bilangan ganjil.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Ini berarti G graf *bipartite*. ■

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Ini berarti G graf *bipartite*. ■
- Andaikan G graf yang tak terhubungkan.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Ini berarti G graf *bipartite*. ■
- Andaikan G graf yang tak terhubungkan.
- G mempunyai dua atau lebih komponen, misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Ini berarti G graf *bipartite*. ■
- Andaikan G graf yang tak terhubungkan.
- G mempunyai dua atau lebih komponen, misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$.
- Karena setiap *cycle* di G adalah *cycle* genap, maka setiap *cycle* di setiap komponen G juga *cycle* genap.

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Dari Soal Latihan 1.6 nomor 10, diperoleh bahwa G memuat *cycle* ganjil.
- Kontradiksi.
- Jadi haruslah setiap *edge* di G menghubungkan verteks di V_1 dengan verteks di V_2.
- Ini berarti G graf *bipartite.* ■
- Andaikan G graf yang tak terhubungkan.
- G mempunyai dua atau lebih komponen, misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$.
- Karena setiap *cycle* di G adalah *cycle* genap, maka setiap *cycle* di setiap komponen G juga *cycle* genap.
- Karena setiap komponen adalah graf terhubungkan, maka dari bukti teorema ini untuk graf terhubung, maka setiap komponen dari graf G adalah graf *bipartite.*

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Maka himpunan simpul/verteks di komponen G_1, yaitu $V(G_1)$, dapat dipartisi menjadi U_1 dan W_1.

□

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Maka himpunan simpul/verteks di komponen G_1, yaitu $V(G_1)$, dapat dipartisi menjadi U_1 dan W_1.
- Demikian pula untuk komponen $G_2, \ldots, G_n$.

□

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Maka himpunan simpul/verteks di komponen G_1, yaitu $V(G_1)$, dapat dipartisi menjadi U_1 dan W_1.
- Demikian pula untuk komponen $G_2, \ldots, G_n$.
- Jadi setiap sisi di G menghubungkan verteks di $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ dengan verteks di $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$.

$\square$

Bukti Teorema 1.6 (lanjutan)

Bukti.

- Maka himpunan simpul/verteks di komponen G_1, yaitu $V\left(G_1\right)$, dapat dipartisi menjadi U_1 dan W_1.
- Demikian pula untuk komponen $G_2, \ldots, G_n$.
- Jadi setiap sisi di G menghubungkan verteks di $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ dengan verteks di $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$.
- Ini berarti G graf *bipartite.*

$\square$

Graf Bipartite Lengkap

Definition

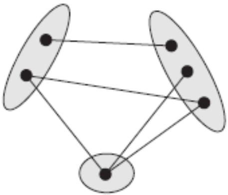
Suatu graf dikatakan *bipartite* dan lengkap, jika setiap verteks di V_1 *adjacent* dengan setiap verteks di V_2. Misalkan $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, maka graf ini dituliskan sebagai $K_{m,n}$.

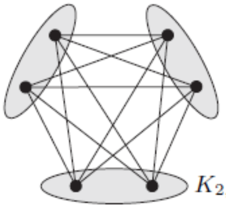
- Graf $K_{1,n}$ (atau $K_{n,1}$) dinamakan **star.**
- **Ilustrasi: –**

Graf Multipartite & Multipartite Lengkap

Graf *n-partite* (graf multipartite) dan graf *n-partite* lengkap (graf *multipartite* lengkap)
$\longrightarrow$ seperti graf *bipartite*, tapi himpunan simpul dipartisi menjadi n subhimpunan

Ilustrasi:





Graf 3-*partite*

Operasi terhadap Graf: Union

Definition

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf dengan himpunan verteks yang *disjoint*, yaitu $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, maka **union** dari G_1 dan G_2, dinyatakan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan

$$\begin{aligned} V(G_1 \cup G_2) &= V(G_1) \cup V(G_2), \quad \text{dan} \\ E(G_1 \cup G_2) &= E(G_1) \cup E(G_2). \end{aligned}$$

- Jika $G_1 \cong G_2 \cong G$, maka $G_1 \cup G_2$ dapat dituliskan dengan $2G$.
- **Ilustrasi: –**

Definition

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf dengan himpunan verteks yang *disjoint*, yaitu $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, maka **join** dari G_1 dan G_2, dituliskan $G_1 + G_2$, adalah graf $G_1 \cup G_2$ ditambah semua sisi bertipe $v_1 v_2$ dengan $v_1 \in V(G_1)$ dan $v_2 \in V(G_2)$.

- **Ilustrasi: –**
- Hasil kali graf: $G_1 \times G_2 \rightarrow$ tidak dibahas dulu.

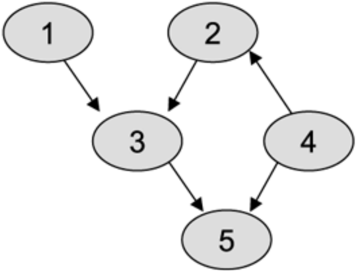
PR

Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.8 no. 1,3,6 (tanpa $\times$)

Digraf

Definition

Suatu **digraf** (graf berarah) D adalah himpunan takkosong dan hingga dari verteks-verteks, yaitu $V(D)$, dan himpunan sisi, yaitu $E(D)$, dari pasangan terurut verteks-verteks yang berbeda.
Elemen dari $E(D)$ disebut *arc* (sisi berarah).
Banyaknya verteks dari digraf D disebut *order*, dan banyaknya sisi berarah (*arc*) disebut *size* dari digraf D.

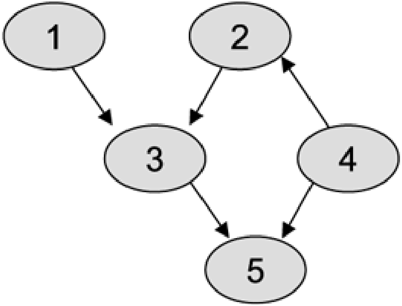


Underlying Graph

Definition

Underlying graph dari digraf D adalah graf G yang diperoleh dari digraf D dengan mengganti semua sisi berarah (u, v) atau (v, u) dengan sisi (*edge*) uv.

- **Ilustrasi: –**



Adjacent, incident, derajat

Definitions

Jika (u, v) adalah sisi berarah pada digraf D, maka u dikatakan *adjacent* ke (*adjacent to)* v, dan v dikatakan *adjacent* dari (*adjacent from*) u. Selanjutnya, sisi berarah (u, v) dikatakan *incident* dari u, dan *incident* ke v.

Definitions

Derajat-keluar (*outdegree*) **od** v dari verteks v dalam suatu digraf D adalah banyaknya verteks yang *adjacent* dari v, dan derajat-masuk (*indegree*) **id** v adalah banyaknya verteks yang *adjacent* ke verteks v.

- Derajat verteks v adalah

$$\boxed{\deg v = \text{ od } v + \text{ id } v}.$$

- **Ilustrasi: –**

Teorema 1.7

Theorem

Misalkan D digraf berorder p dan dengan size q, dengan $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, maka

$$\sum_{i=1}^{p} od\ v_i = \sum_{i=1}^{p} id\ v_i = q.$$

Isomorfisme Digraf

Dua digraf D_1 dan D_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat isomorfisme (fungsi bijektif) ϕ dari $V(D_1)$ ke $V(D_2)$ sehingga (u, v) sisi berarah (*arc*) di D_1 jika dan hanya jika (u, v) sisi berarah di D_2.

Subdigraf

Subdigraf dan *induced-subdigraf* didefinisikan dengan cara serupa dengan graf.

Ilustrasi: –

Walk

Suatu *walk* dalam digraf D adalah barisan berayun verteks dan sisi berarah

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \quad (n \geq 0)$$

yang dimulai dari dan diakhiri di verteks sehingga $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. *Walk* W ini adalah *walk* $v_0 - v_n$ yang mempunyai panjang n dan dapat dituliskan sebagai

$$W : v_0, v_1, \ldots, v_n.$$

Konsep *trail, path, cycle, circuit* analog dengan yang ada di graf.

Semiwalk

Definition

Suatu *semiwalk* dalam suatu digraf D adalah barisan berayun verteks dan sisi berarah

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n \quad (n \geq 0)$$

yang dimulai dari dan diakhiri di verteks sehingga $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ atau $e_i = (v_i, v_{i-1})$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Suatu *semiwalk* dalam suatu digraf adalah *walk* dalam *underlying graph*nya.

Ilustrasi: –

Keterhubungan (connectedness): weak

Definition

Dua verteks u dan v dalam digraf D dikatakan **terhubungkan** jika D memuat *semiwalk*-$u - v$.

Digraf D dikatakan terhubungkan jika setiap pasang verteks di D adalah terhubungkan.

- Digraf terhubungkan seperti ini dinamakan *weakly connected.*

Keterhubungan (connectedness): unilateral, strong

Definition

Suatu digraf D dikatakan **unilateral (***unilaterally connected***)** jika untuk setiap pasang verteks yang berbeda u dan v di D terdapat *path* $u - v$ atau *path* $v - u$ atau keduanya.

Definition

Suatu digraf D dikatakan **strong** (*strongly connected*) jika untuk setiap pasang verteks berbeda u dan v terdapat *path* $u - v$ dan *path* $v - u$.

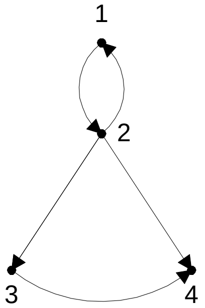
Jadi digraf *strong* pasti unilateral dan digraf unilateral pasti *weakly connected*, tapi tidak berlaku sebaliknya.

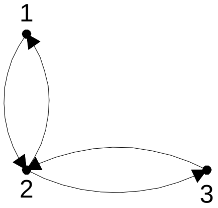
Problem

Berikan contoh digraf yang:

(1) unilateral tapi tidak strong, *(2) tidak unilateral,*
(3) tidak terhubungkan secara lemah, *(4) strong.*

Ilustrasi:





Digraf Regular

Definition

Suatu digraf D dikatakan **regular** jika terdapat bilangan bulat taknegatif r sehingga

$$od\ v = id\ v = r,$$

untuk setiap verteks v di D. Digraf demikian disebut $r-$regular.

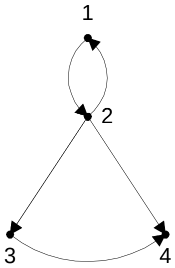
Ilustrasi: –

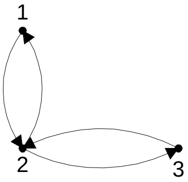
Digraf Simetrik

Definition

Suatu digraf D dikatakan **simetrik** jika (u, v) sisi berarah di D, maka (v, u) juga sisi berarah di D, untuk setiap sisi berarah (u, v) di D.

Digraf simetrik dapat diperoleh dari graf G dengan mengganti setiap sisi uv di G dengan sisi berarah (u, v) dan (v, u) dan dituliskan $D = G^*$.
Ilustrasi: Digraf pertama bukan digraf simetrik, digraf kedua: simetrik.





Digraf Asimetrik

Definition

Suatu digraf D dikatakan **asimetrik** jika (u, v) sisi berarah di D, maka (v, u) bukan sisi berarah di D , untuk setiap sisi berarah (u, v) di D.

Jadi pada digraf asimetrik setiap pasang verteksnya dihubungkan oleh paling banyak satu sisi berarah.

Perhatikan bahwa **digraf yang tidak simetrik belum tentu digraf asimetrik.**

Berikan contohnya.

Turnamen

Definition

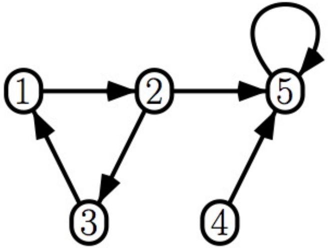
Suatu digraf dinamakan **turnamen** jika setiap pasang verteksnya dihubungkan oleh tepat satu sisi berarah.

Problem

Berikan contoh (jika ada):

1. *digraf asimetrik yang bukan turnamen,*
2. *turnamen yang bukan digraf asimetrik.*

Multidigraf dan Pseudodigraf didefinisikan secara serupa dengan multigraf dan pseudograf.



Ilustrasi:

PR

Soal Latihan Chartrand & Oellermann 1.9 no. 1,2,4,8.