



PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

l' UNIVERSITÉ GALATASARAY

Spécialité : **Mathématiques**

Géométrie Hyperbolique et Le Groupe Modulaire

Préparé par : **İbrahim Emir Çiçekli**

Résponsable : **Prof. Abdurrahman Muhammed Uludağ**

Juin 2023

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ceux qui ont joué un rôle essentiel dans la réalisation de mon projet. Leurs contributions, leur soutien et leur inspiration ont été inestimables.

Je voudrais commencer par remercier mon conseiller de projet, le Professeur A.M. Uludağ. Son expertise, ses conseils éclairés et sa soutien indéfectible ont été essentiels à la réussite de votre dévouement et de votre disponibilité pour m'orienter tout au long de ce processus.

J'aimerais également exprimer ma reconnaissance à Ayberk Zeytin, le coordinateur du projet. Sa organisation, son encadrement et son engagement constant ont grandement contribué à sa réalisation.

Un remerciement spécial à Daniel Massart pour la conférence inspirante qu'il a donnée sur la géométrie hyperbolique. Sa passion pour ce domaine a élargi mes horizons et a enrichi mon projet. Sa connaissances et son expertise ont été une véritable source d'inspiration.

Je tiens également à remercier chaleureusement mon amie et collègue, Eliz. Sa présence encourageante, sa collaboration et nos échanges fructueux ont été des éléments essentiels pour le succès de ce projet. Elle été une source d'inspiration et de soutien précieuse.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude profonde envers mes parents. Leur amour inconditionnel, leur soutien sans faille et leurs encouragements constants ont été les piliers de ma réussite académique.

Cette projet a été soutenue par le projet TÜBİTAK intitulé "Temel Modüler Groupoid" et codé par 119F405.

RÉSUMÉ

La géométrie hyperbolique est l'une des géométries non euclidiennes. Les Russes préfèrent l'appeler géométrie lobatchevskienne. Elle tente de remplacer le postulat de parallélisme d'Euclide. Cette forme de géométrie est considérée, par certains géomètres, comme encore plus naturelle. Autrement dit, si nous devions choisir un objet au hasard dans notre univers, il est plus probable qu'il présente les propriétés d'un espace hyperbolique plutôt que celles de l'espace euclidien. Elle occupe également une place spéciale dans la théorie de la relativité.

Il est donc bénéfique d'avoir une compréhension solide de ce type de géométrie pour tout géomètre en herbe. Le fait qu'elle soit étroitement liée au groupe modulaire, qui est l'objet central de notre groupe de recherche, en fait un objet d'étude idéal pour moi.

Dans le premier chapitre, nous revenons aux bases de la géométrie euclidienne et examinons les cinq postulats d'Euclide. Ensuite, nous rappelons quelques notions géométriques et topologiques utiles.

Dans le chapitre 2, nous examinons de près trois modèles de géométrie hyperbolique. Nous étudions leurs propriétés fondamentales telles que leurs groupes d'isométries et leurs géodésiques. Finalement, nous nous aventurons un peu dans les profondeurs de la géométrie riemannienne.

Table des matières

Remerciements	i
1 Géométrie Euclidienne	2
1.1 Les bases de la géométrie euclidienne	2
1.2 Quelques notions géométriques utiles	5
2 Modèles de Géométrie Hyperbolique	7
2.1 Modèle de Bertlami-Klein	7
2.2 Métriques Riemanniennes	13
2.3 Modèle Demi-Plan Supérieur	16
2.4 Disque de Poincaré	25
3 Conclusion	29

Chapitre 1

Géométrie Euclidienne

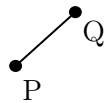
1.1 Les bases de la géométrie euclidienne

Nous commençons par examiner les bases de la géométrie euclidienne.

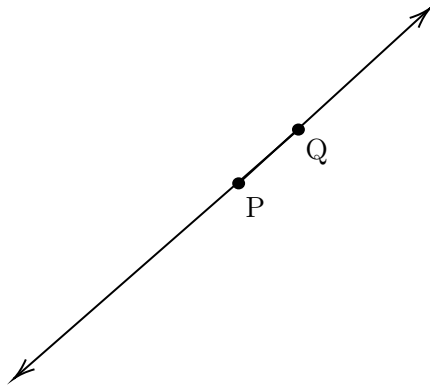
S'il s'avère que la géométrie sphérique et hyperbolique étaient connues depuis la Grèce antique, l'invention et le développement de la géométrie hyperbolique sont généralement attribués aux grands mathématiciens des 18e et 19e siècles. Car contrairement à leurs prédécesseurs, qui voulaient seulement montrer que le 5e postulat d'Euclide était indépendant des quatre premiers, ces mathématiciens se sont rendus compte qu'ils avaient découvert une toute nouvelle géométrie.

Les cinq postulats d'Euclide sont les suivants

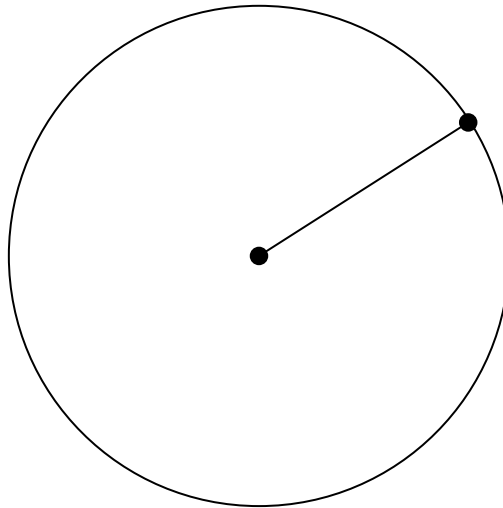
1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.



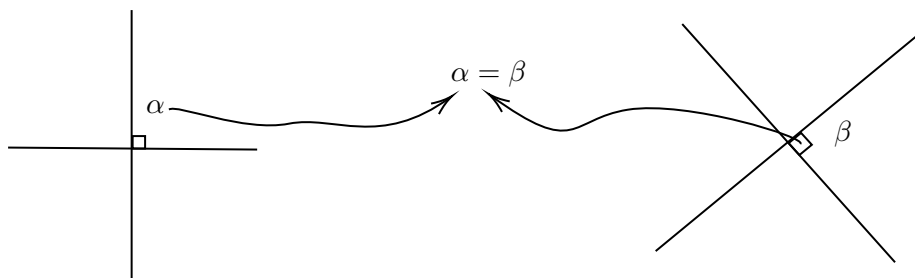
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment.



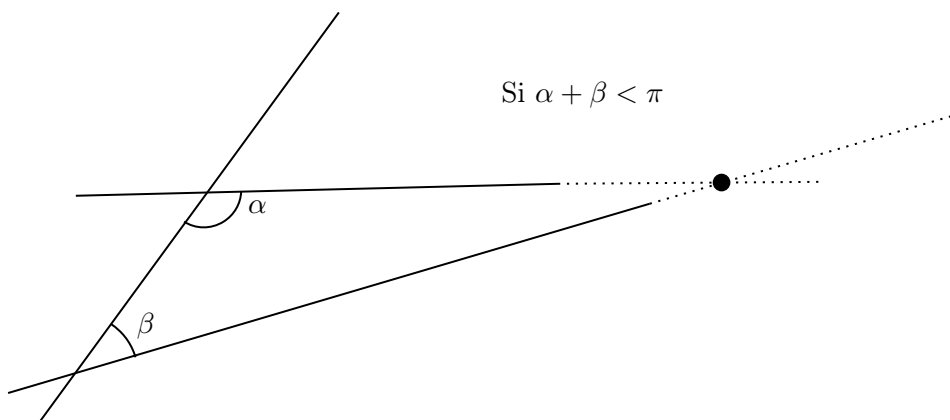
3. Étant donné un segment de ligne, un cercle avec une extrémité du segment comme centre et la longueur du segment comme rayon peut être dessiné.



4. Tous les angles droits sont congruents. (Si deux lignes se croisent de telle manière que les angles de chaque côté sont identiques, alors ces angles sont définis comme étant des angles droits.)



5. Si deux segments de ligne coupent un troisième segment de ligne de telle sorte que la somme des angles d'intersection d'un côté soit inférieure à deux angles droits, ces deux segments de ligne se croiseront de ce côté s'ils sont suffisamment prolongés.



Cela définit évidemment la notion de parallélisme. En utilisant cet axiome, il n'est pas difficile de voir que sur le plan, pour une ligne donnée R et un point donné P qui n'appartient pas à R , il n'y a qu'une seule ligne passant par P qui est parallèle à R . Comme on peut le voir, le cinquième est considérablement plus long et plus élaboré que les quatre premiers. Cela a conduit beaucoup à croire qu'il devrait s'agir d'un théorème plutôt que d'un postulat. Après des siècles de travail, les mathématiciens se sont rendus compte que ce n'était pas démontrable. Parce que le cinquième postulat était indépendant des quatre premiers.

On montre qu'un axiome est indépendant des autres en montrant qu'il est possible de définir un système cohérent sans cet axiome. Autrement dit on le montre en donnant un modèle qui manque le cinquième postulat. Géométrie hyperbolique remplace le cinquième postulat d'Euclide avec :

Étant donné un point P et une ligne droite R qui ne contient pas P , il existe deux droites distincts l_1 et l_2 passant par P telles que ni l_1 ni l_2 s'intersectent avec R .

1.2 Quelques notions géométriques utiles

Avant d'examiner les modèles de géométrie non euclidienne, nous aimerions rappeler quelques définitions utiles en géométrie et topologie.

Soit (X, d) un espace métrique pas nécessairement induite d'une métrique riemannienne. Considérons l'ensemble

$$\text{Isom}(X) := \{f : (X, d) \longrightarrow (X, d) \mid f \text{ une isométrie}\}.$$

Proposition 1.2.1. $\text{Isom}(X)$ est un groupe avec composition des applications.

Démonstration. Soient $f, g \in \text{Isom}(X)$. Composition de deux fonctions bijectives est bijective. Donc $f \circ g$ est bijective. Soit $x, y \in X$

$$d(f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y)$$

donc $f \circ g$ est une isométrie. L'inverse d'une isométrie est isométrie. Si $f \in \text{Isom}(X)$, $d(x, y) = d((f \circ f^{-1})(x), (f \circ f^{-1})(y)) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$.

$\text{Id}_X : x \mapsto x$ est une isométrie aussi. Id_X fonctionne comme identité de $\text{Isom}(X)$.

Composition des fonctions est associative. Donc $\text{Isom}(X)$ est un groupe. \square

Proposition 1.2.2. Si X est de plus une variété lisse, le sous ensemble

$$\text{Isom}^+(X) := \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ isométrie}, \det(df) > 0\} \quad (1.2.1)$$

est un sous groupe de $\text{Isom}(X)$, appelé *isométries positives*.

La preuve est immédiate du fait que le déterminant est multiplicatif et de la règle de chaîne, version à plusieurs variables, c'est-à-dire $d(f \circ g) = df \cdot dg$ pour f, g applications différentiables.

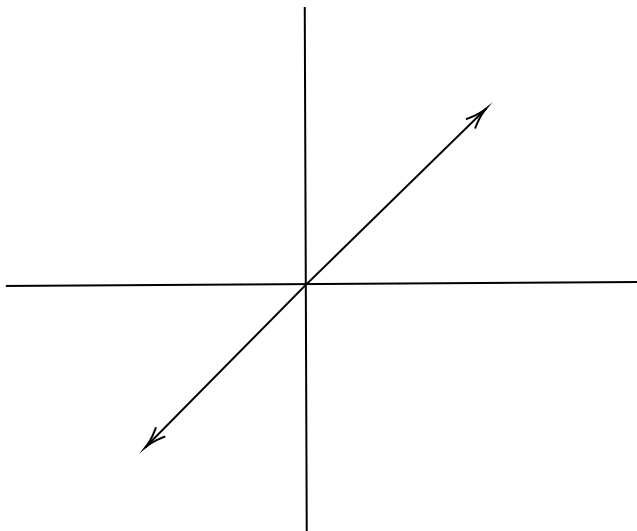
Définition 1.2.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow X$ est une ligne géodésique si pour tout $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$|t_1 - t_0| = d(\lambda(t_1), \lambda(t_0)),$$

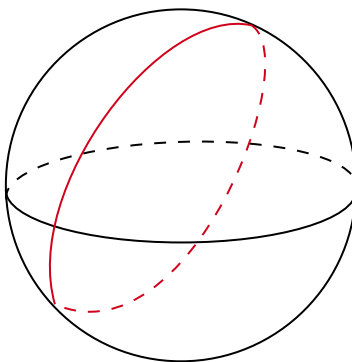
autrement dit si λ est une isométrie.

Un géodésique est tout simplement l'image d'un ligne géodésique dans X .

Exemple 1.2.1. Les géodésiques sur le plan euclidien sont les droites du sens euclidien.



Exemple 1.2.2. Les géodésiques sur la sphère S^2 sont les cercles sur la sphère.



En général, une façon de trouver les géodésiques d'une surface située dans \mathbb{R}^3 consiste à intersecter la surface avec des plans dans \mathbb{R}^3 .

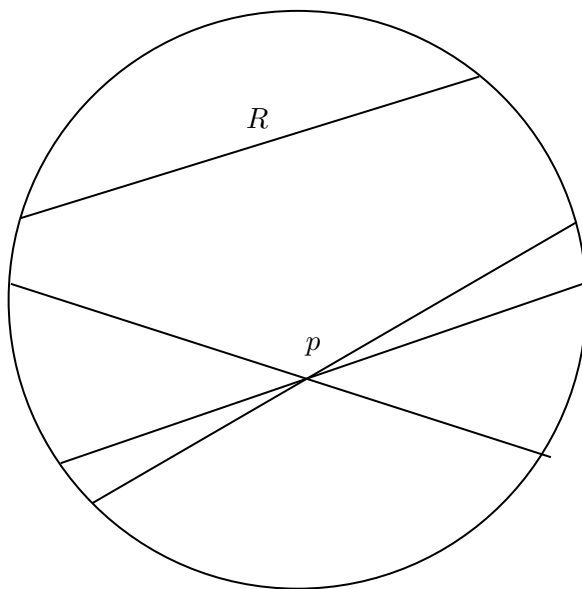
Chapitre 2

Modèles de Géométrie Hyperbolique

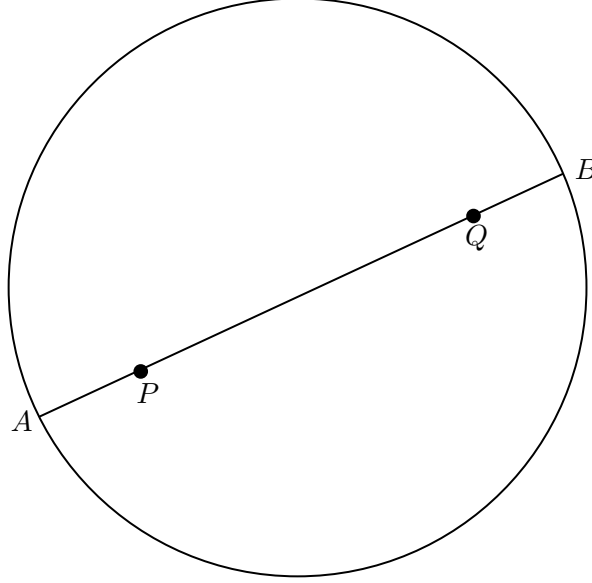
2.1 Modèle de Bertlami-Klein

Dans ce modèle, le plan hyperbolique est représenté par l'intérieur de disque unitaire. Les droites du modèle sont les cordes du cercle. Les points au bord d'une corde sont appelés ses *points idéaux*.

On voit dans la figure que, pour la ligne R , il y a plusieurs lignes passant par $p \notin R$ parallèles à R .



La métrique ici est appelé métrique de Cayley-Klein. Pour les points P et Q à l'intérieur, on trace la cord qui les relie. On nomme les points idéaux sur cette cord comme A et B de telle maniere qu'on ait les inégalités $|AP| < |AQ|$ et $|QB| < |PB|$ où $|\cdot|$ est la distance euclidienne.



La distance entre Q et P est

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} \right) = \frac{1}{2} \log (cr(A, P; B, Q))$$

où cr signifie le birapport.

Proposition 2.1.1. La fonction d ci-dessus est une métrique sur le disque de Klein.

Démonstration. Grâce à la façon dans laquelle on a nommé et ordonné nos points, on a $\frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} \geq 1$. Par conséquent $d(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} \right) \geq 0$. Donc d est définie positive. Évidemment, d est symétrique.

Si on a $d(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} \right) = 0$, on a

$$\log \left(\frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{|AQ||PB|}{|AP||QB|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|AQ|}{|AP|} = \frac{|QB|}{|PB|}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\frac{|AQ|}{|AP|} &= \frac{|AP| + |PQ|}{|AP|} = \frac{|QB|}{|PB|} = \frac{|QB|}{|BQ| + |QP|} \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{|PQ|}{|AP|} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow |PQ| &= 0 \Leftrightarrow P = Q\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que d satisfait inégalité triangulaire. Pour cela on a besoin de quelques définitions et lemmes.

Lemme 2.1.2. Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Considérons la forme quadratique $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. L'ensemble

$$\text{SO}(2, 1) = \{T \in \text{SO}(3, \mathbb{R}) \mid A(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

est un sous-groupe de $\text{SO}(3)$.

Démonstration. $\text{Id} \in \text{SO}(2, 1)$. Soient $T, F \in \text{SO}(2, 1)$ alors

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(TT^{-1}\mathbf{x}, TT^{-1}\mathbf{y}) = A(T^{-1}\mathbf{x}, T^{-1}\mathbf{y}).$$

Donc $T^{-1} \in \text{SO}(2, 1)$ De plus,

$$A(TF\mathbf{x}, TF\mathbf{y}) = A(F\mathbf{x}, F\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

donc $TF \in \text{SO}(2, 1)$. On en déduit que $\text{SO}(2, 1)$ est un sous-groupe de $\text{SO}(3)$. \square

Lemme 2.1.3. Le groupe $\text{SO}(2, 1)$ agit sur le disque D . Pour $T \in \text{SO}(2, 1)$ et $(x, y) \in D$. On définit $\overline{(x, y, z)} = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ pour $z \neq 0$. L'action est définie comme

$$T \cdot (x, y) = \overline{T(x, y, 1)}.$$

Cette action est transitive sur D et préserve la fonction d .

Démonstration. Soient $T, F \in \text{SO}(2, 1)$ et $(x, y) \in D$. $I \cdot (x, y) = \overline{I(x, y, 1)} = \overline{(x, y, 1)} = (x, y)$. Notons que $\overline{(\lambda x, \lambda y, \lambda z)} = \overline{(x, y, z)} = (x/z, y/z)$. Supposons que $T(x, y, 1) = (a, b, c)$ alors

$$\begin{aligned}F \cdot (T \cdot (x, y)) &= F \cdot (\overline{T(x, y, 1)}) = F \cdot (a/c, b/c) \\ &= \overline{F(a/c, b/c, 1)} = \overline{(1/c)F(a, b, c)} \\ &= \overline{F(a, b, c)} = \overline{FT(x, y, 1)} = (FT) \cdot (x, y)\end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'une action.

$x^2 + y^2 - 1 < 0$. Soit $T(x, y, 1) = (a, b, c)$. Puisque T préserve la forme quadratique A qu'on a définie, on a aussi $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ qui implique $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 1 < 0$. On obtient

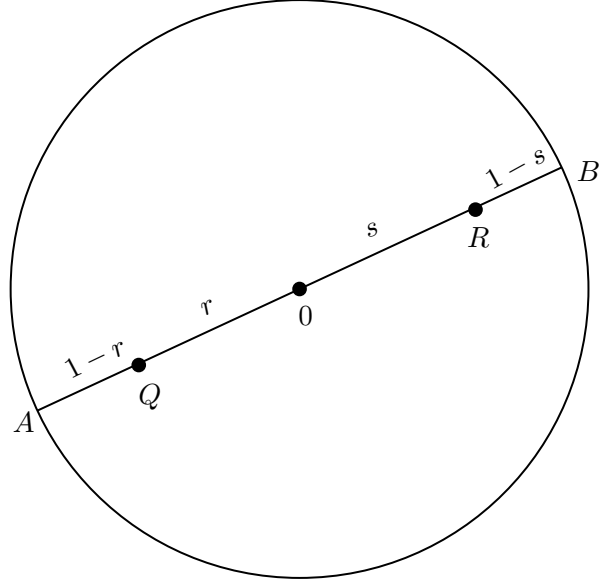
$$T \cdot (x, y) = \overline{T(x, y, 1)} = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \in D$$

Donc $SO(2, 1)$ préserve l'espace D . Pour voir que d est invariant sous cette action il suffit de se rappeler que $SO(2, 1)$ est un sous-groupe de $SO(3)$ qui est isomorphe à $PSO(3)$ qui est à son tour un sous-groupe de $PSL(\mathbb{R}, 3)$. Le birapport est $PSL(\mathbb{R}, 3)$ -invariant et par conséquent d est $SO(2, 1)$ -invariant. Le même fait nous montre que $SO(2, 1)$ agit transitivement puisque $PSL(3)$ agit transitivement et que $SO(2, 1)$ préserve D . Donc tout élément de $PSL(3)$ qui envoie $x \in D$ à $y \in D$ est, par définition, un élément de $SO(2, 1)$, sous la même identification d'éléments $(x, y) \in D \mapsto (x, y, 1)$. □

Soient P, Q, R trois points dans le disque. Sans perte de généralité on peut supposer que l'un entre deux est situé à l'origine, disons P . Parce que le groupe $SO(2, 1)$ agit transitivement sur disque de Klein et d est $SO(2, 1)$ -invariant par **Lemme 2.1.3**.

Alors on a $d(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ où r est la distance euclidienne entre P et Q . De même $d(P, R) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+s}{1-s} \right)$ où $s = |PR|$.

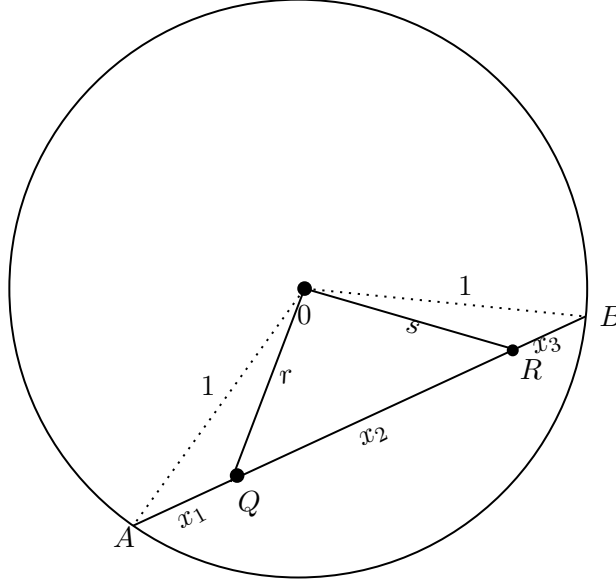
On doit démontrer que $d(P, Q) + d(P, R) \geq d(Q, R)$.



Si P, Q et R sont colinéaires comme ci-dessus, on a $|AR| = |AP| + |PR| = 1 + r$, $|QB| = |QP| + |PB| = s + 1$, $|AQ| = |AP| - |PQ| = 1 - r$ et $|RB| = |BP| - |RP| = 1 - s$

$$d(P, Q) + d(P, R) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(r+1)(s+1)}{(r-1)(s-1)} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|AR||QB|}{|AQ||RB|} \right) = d(Q, R)$$

Sinon P, R et Q forment un triangle et on a une configuration similaire à la figure ci-dessous



On a noté $|AQ| = x_1, |QR| = x_2, |RB| = x_3$. par l'inegalite triangulaire de la distance euclidienne on sait que $x_2 \leq s + r$, $x_1 \geq r - 1$ et $x_3 \geq s - 1$

$$\begin{aligned}
 d(Q, R) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{|AR||QB|}{|AQ||RB|} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)}{x_1 x_3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{x_2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_3}{x_1 x_3} \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{2x_2}{x_1 x_3} + 1 \right) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{2s + 2r}{(1 - r)(1 - s)} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{rs + r + s + 1}{(1 - r)(1 - s)} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(1 + r)(1 + s)}{(1 - r)(1 - s)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + s}{1 - s} \right) = d(P, Q) + d(P, R)
 \end{aligned}$$

□

2.2 Métriques Riemanniennes

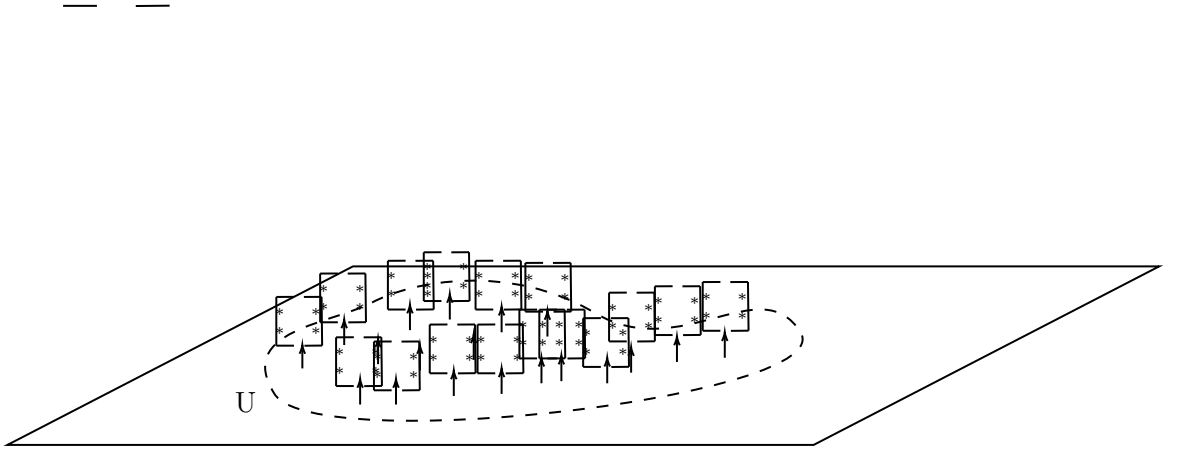
Maintenant, nous devons faire une brève digression de notre discussion afin de rendre le prochain modèle plus facile à examiner. La définition suivante et les théorèmes qui suivent sont principalement vrais dans ce cas très particulier qui nous intéresse. La géométrie riemannienne est un domaine vaste et complexe.

Les modèles suivantes nécessitent une approche plus prudente et compliquée. Car on veut qu'on puisse définir une métrique sur des surfaces en général sans les considérer assis dans espace ambiant \mathbb{R}^3 . Puisque les surfaces dans \mathbb{R}^3 sont paramétrisées en utilisant des ouverts dans \mathbb{R}^2 , on va essayer d'associer une fonction à une ouverte U de \mathbb{R}^2 afin de calculer les distances. C'est ce qu'on appelle une métrique riemannienne. Notons par G l'ensemble des matrices symétriques, définies positives de taille 2x2.

Définition 2.2.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Une application dérivable

$$\varphi : U \longrightarrow G$$

est dite une *métrique riemannienne* sur U .



Remarque 2.2.1. Soit A une matrice 2×2 , symétrique et définie positive. Alors pour deux vecteurs colonnes $v, u \in \mathbb{R}^2$, l'application $(v, u) \mapsto v^t \cdot A \cdot u$ définit un produit scalaire. Donc ce que nous avons fait, c'est essentiellement associer à chaque point de U un produit scalaire. Donc pour chaque point $a \in U$, et pour chaque vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tangent à a , nous avons un moyen de calculer la norme du vecteur v à ce point a en disant $\|v\|_a^2 = \langle v, v \rangle_a = v^t \cdot \varphi(a) \cdot v$.

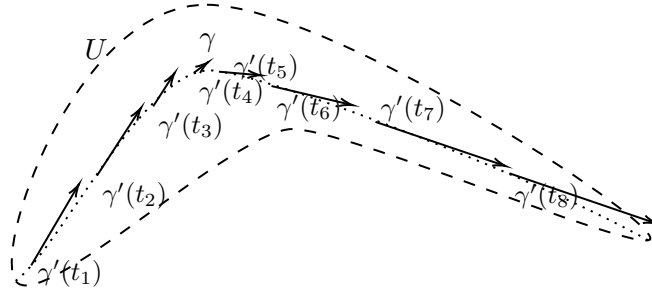
Exemple 2.2.1. L'application constante

$$\begin{aligned}\varphi_0 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

est une métrique riemannienne. En fait, c'est la métrique usuelle d'Euclide. Car pour un vecteur $v = (x, y)$ quelconque on a $\|v\|_{\varphi_0}^2 = v^t \cdot \varphi(a) \cdot v = v^t \cdot I_{2 \times 2} \cdot v = v^t \cdot v = x^2 + y^2$.

La métrique riemannienne contient le mot métrique pour une raison. En l'utilisant, nous pouvons définir la longueur des vecteurs tangents et par conséquent la longueur des chemins.

Donc si on prend un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, reliant deux points $x, y \in U$, en utilisant cette métrique riemannienne on peut définir la longueur de γ .



La longueur du chemin en pointillés γ est approximativement

$$|\gamma| \approx \sum_{i=1}^8 |\gamma'(t_i)| |t_{i+1} - t_i|$$

Et si nous rendons les intervalles de temps de plus en plus petits, nous obtenons une intégrale. Ainsi, la définition suivante.

Définition 2.2.2.

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(s)^t \cdot \varphi_1(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)} ds$$

Essentiellement on calcule la longueur de vecteur tangent à chaque point $\gamma(t)$ du chemin et on les somme afin de trouver la longueur du chemin γ .

On définit une métrique d sur U en utilisant cette notion de longueur.

Proposition 2.2.1. La fonction

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ un chemin reliant } x \text{ et } y\}$$

est une métrique sur X .

Démonstration. La symétrie et la non-négativité de d est évident. On montre l'inegalité triangulaire. Etant donné deux chemins $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ on peut les composer dans un sens comme suivante :

$$\gamma_1 \# \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donc $\gamma_1 \# \gamma_2$ est un chemin de longueur $L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ reliant x à z . Disons on a trois points x, y et z . On peut supposer qu'il existe au moins une courbe γ_1 reliant x à y qui n'est pas le plus court chemin. Alors $d(x, y) < L(\gamma_1) + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ par la définition de infimum. Similairement, on peut supposer que γ_2 est un chemin reliant y et z tel que $d(y, z) < L(\gamma_2) + \epsilon$. Donc on a :

$$d(x, z) < L(\gamma_1 \# \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(x, y) + d(y, z) - 2\epsilon$$

Quand on fait $\epsilon \rightarrow 0$, $<$ devient \leq et on obtient $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ □

Proposition 2.2.2. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 muni d'une métrique riemannienne g . Une fonction dérivable et bijective $\phi(x)$ est une isométrie de U si $\phi'(x)$ préserve la métrique riemannienne, autrement dit, si

$$\langle v, u \rangle_x = \langle \phi'(x)v, \phi'(x)u \rangle_{\phi(x)}$$

pour tout $x \in U$ et pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$ vecteurs tangents en x .

Démonstration. Supposons que ϕ est dérivable et $\phi'(x)$ préserve la métrique riemannienne. Soient x et y deux points dans U . D'abord on fait quelques observations. Par notre hypothèse on a $\langle v, u \rangle_x = \langle \phi'(x)v, \phi'(x)u \rangle_{\phi(x)}$. Si on met $u = v$ on voit que :

$$\|v\|_x^2 = \langle v, v \rangle_x = \langle \phi'(x)v, \phi'(x)v \rangle = \|\phi'(x)v\|_{\phi(x)}^2$$

Autrement dit, $\phi'(x)$ préserve la norme des vecteurs tangents. Une autre remarque est que si α est un chemin reliant $\phi(x)$ à $\phi(y)$, alors il existe un

chemin γ reliant x à y tel que $\alpha(t) = (\phi \circ \gamma)(t)$ grâce au fait que ϕ est bijective. On a donc $\|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} = \|(\phi \circ \gamma)'(t)\|_{(\phi \circ \gamma)(t)} = \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$. D'où,

$$\begin{aligned} d(\phi(x), \phi(y)) &= \inf_{\alpha} \left(\int_0^1 \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt \right) \\ &= \inf_{\gamma} \left(\int_0^1 \|(\phi \circ \gamma)'(t)\|_{(\phi \circ \gamma)(t)} dt \right) \\ &= \inf_{\gamma} \left(\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt \right) = d(x, y). \end{aligned}$$

□

2.3 Modèle Demi-Plan Supérieur

Définition 2.3.1 (Modèle Demi-Plan Supérieur). Considérons demi-plan supérieur

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

muni de la métrique riemannienne

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{H}^2$. On va noter $\langle v, u \rangle_a = v^t \cdot \varphi_1(a) \cdot u$ et par $\|v\|_a$ la norme induite de cette métrique riemannienne. Remarquons aussi qu'il est parfois utile de regarder \mathbb{H}^2 comme un sous ensemble de \mathbb{C} qui contient les nombres complexes $z = x + iy$ avec $\Im(z) = y > 0$. Car on aimerait utiliser les outils puissants de l'analyse complexe.

Exemple 2.3.1. Calculons la longueur du chemin $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ où $0 \leq t \leq \pi$.

Donc on a $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \gamma'(s)^t \cdot \frac{1}{(1 + \sin(s))^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma'(s) &= \frac{1}{(1 + \sin(s))^2} \gamma'(s)^t \cdot \gamma'(s) \\ &= \frac{\sin^2(s) + \cos^2(s)}{(1 + \sin(s))^2} \end{aligned}$$

on calcule

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{\gamma'(s)^t \cdot \varphi(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)} ds \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin^2(s) + \cos^2(s)}{(1 + \sin(s))^2}} ds \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin(s)} ds = 2
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. Les angles dans le plan hyperbolique sont les mêmes que celles du plan euclidienne.

Démonstration. Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux vecteurs tangents à un point $(x, y) \in \mathbb{H}^2$. Rappelons que l'angle euclidienne θ entre eux est déterminé par la formule

$$\cos(\theta) = \frac{\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle}{\|(u_1, v_1)\| \cdot \|(u_2, v_2)\|}$$

De même façon, si l'on calcule l'angle hyperbolique entre eux en utilisant la norme hyperbolique on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{(x,y)}}{\|(u_1, v_1)\|_{(x,y)} \cdot \|(u_2, v_2)\|_{(x,y)}} &= \frac{(u_1, v_1) \cdot \frac{1}{y^2} I_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{u_1^2 + v_1^2}{y^2}} \cdot \sqrt{\frac{u_2^2 + v_2^2}{y^2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{y^2} (u_1, v_1) \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}}{\frac{1}{y^2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}} \\
&= \frac{\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle}{\|(u_1, v_1)\| \cdot \|(u_2, v_2)\|} = \cos(\theta)
\end{aligned}$$

□

Donc nous pouvons en déduire que la notion d'angle dans \mathbb{H}^2 est la même que celle de plan euclidienne.

Remarque 2.3.1. Notons que les longueurs des vecteurs dans \mathbb{H}^2 ne sont pas constantes partout comme dans le plan euclidienne. En fait, plus nous

nous rapprochons de l'axe des x , plus nos vecteurs deviennent petits à ce point. Donc si nous devons nous déplacer à vitesse constante vers l'axe des x , un observateur euclidien nous verrait devenir de plus en plus lent puisque notre vecteur vitesse deviendrait de plus en plus petit. Nous ne pourrions jamais arriver à l'axe des x . Cela signifie que pour les êtres vivant sur le plan hyperbolique, l'axe des x est à l'infini.

Isométries positives de \mathbb{H}^2

Maintenant nous cherchons $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. Puisque notre notion des angles est la même que celle de géométrie euclidienne. Nos isométries devraient également préserver les angles. Tout comme la géométrie euclidienne, les translations horizontales sont également des isométries puisque notre métrique riemannienne n'inclut aucun facteur en cordonnée x . Les translations verticales et rotations ne fonctionnent pas puisque elles ne préservent pas \mathbb{H}^2 .

On retiendra du cours d'analyse complexe que une fonction holomorphe f est conforme, une fonction qui préserve l'angle entre deux vecteurs, à un point $z \in \mathbb{C}$ si $f'(z) \neq 0$. Les fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule jamais sur \mathbb{H}^2 sont donc un bon ensemble de candidats. Une telle famille de fonctions holomorphes sont celles de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ces types de fonctions peuvent être réalisés sous forme d'actions matricielles.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Mais quelles conditions doit-on mettre sur ces matrices? La dérivée d'une telle fonction $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Donc pour que la dérivée soit non-zéro, il faut que $ad - bc \neq 0$. On n'a pas besoin de s'inquiéter du point $\frac{-d}{c}$ car le point $\frac{-d}{c}$ qui n'appartient pas à \mathbb{H}^2 .

Donc cette famille de fonctions est conforme si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$. Si

\mathbb{H}^2 est préservé sous cette fonction alors

$$\begin{aligned}\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \Im\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \Im\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \frac{(ad-bc)\Im(z)}{|cz+d|^2} > 0\end{aligned}$$

Donc il faut que $ad - bc > 0$. Donc A est nécessairement de déterminant positif. De plus si on définit

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \frac{1}{\det(A)} A$$

Alors $\det(A') = 1$ et

$$A' \cdot z = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{\det(A)(a'z + b')}{\det(A)(c'z + d')} = \frac{az + b}{cz + d} = A \cdot z$$

Donc il suffit de considérer des matrices A de déterminant 1. Autrement dit, de considérer $SL_2(\mathbb{R})$. Maintenant, soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ et soit ϕ sa fonction associée. Si ϕ préserve la métrique riemannienne alors ϕ est une isométrie, par **Proposition 2.2.2**.

Proposition 2.3.2. Soit $z \in \mathbb{H}^2$ et $v = (x, y)$ un vecteur tangent en z . On a

$$\|v\|_z = \|\phi'(z)v\|_{\phi(z)}$$

où $\phi'(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. Par conséquent, ϕ est une isométrie.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\|\phi'(z)v\|_{\phi(z)}^2 &= (\phi'(z)v)^t \cdot \frac{1}{\Im(\phi(z))^2} I_{2 \times 2} \cdot (\phi(z)v) \\ &= (\phi'(z)v)^t \cdot \frac{|cz+d|^4}{(ad-bc)^2 \Im(z)^2} \cdot (\phi'(z)v) \\ &= |\phi'(z)|^2 \frac{|cz+d|^4}{(ad-bc)^2 \Im(z)^2} (v^t \cdot v) \\ &= \frac{(ad-bc)^2}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{(ad-bc)^2 \Im(z)^2} (v^t \cdot v) = \frac{1}{\Im(z)^2} (v^t \cdot v) = \|v\|_z^2\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.3. L'application

$$\begin{aligned}\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \\ A &\mapsto f(z) = A \cdot z\end{aligned}$$

est un homomorphisme presque injectif dont le noyau est $\langle \pm I_{2 \times 2} \rangle$

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A \cdot z = z$ pour tout z . Alors

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

par consequence, $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ pour tout z . Le seul polynôme qui s'annule partout est le polynôme zéro. Donc on a $c = b = 0$ et $d = a$. Mais si $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = ad - bc = a^2 = 1$. On obtient $a = \pm 1$ et donc $A = \pm I_{2 \times 2}$. On conclut $\ker(\psi) = \langle \pm I_{2 \times 2} \rangle$. □

On ne sait pas, a priori, qu'on a trouvé toutes les isométries. Pour cela, on a besoin d'un lemme.

Lemme 2.3.4. Si une isométrie dérivable φ de \mathbb{H}^2 fixe le point $i \in \mathbb{H}^2$ et sa dérive φ' fixe le vecteur tangent $(0, 1)$ en i , alors φ est l'identité.

Démonstration. Observons d'abord que si ϕ est une isométrie, elle envoie des géodésiques vers des géodésiques puisque les géodésiques sont caractérisées par le fait qu'elles préservent localement la distance. Donc ϕ fixe par ensemble les géodésiques. Mais, il doit également les fixer ponctuellement. Puisque, sur une géodésique issus d'un vecteur il n'y a qu'un seul point qui est à une distance fixe D de i . Mais i est fixe donc le point qui est à la distance D est fixe. Si on fait varier D de 0 à l'infini on voit que tout point sur la géodésique est fixe.

Ensuite notons que puisque ϕ est une isométrie, sa dérivée, qui est une application linéaire, $\phi'(i) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ préserve les normes de vecteurs tangents par **Proposition 2.2.2**. Donc $\phi'(i)$ est une isométrie de \mathbb{R}^2 préservant l'orientation et le vecteur $(0, 1)$. D'où $\phi'(i)$ est l'identité. On a vu que tous les vecteurs tangents sont fixes ce qui implique que tous les géodésiques issues de i sont fixes. Par conséquent \mathbb{H}^2 est fixe partout. □

Proposition 2.3.5. ψ est surjective.

Démonstration. Il est avantageux de considérer \mathbb{C} comme \mathbb{R}^2 avec la base $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$. Nous utiliserons cet abus de notation au cours de cette démonstration.

Soit φ une isométrie positive et dérivable de \mathbb{H}^2 et soit $\varphi(i) = ai + b$. Alors $\psi_1(z) = \frac{z-b}{a}$ et $\psi_1^{-1} \circ \phi$ sont des isométries et $\psi_1^{-1} \circ \phi(i) = i$. Mais $\psi_1^{-1} \circ \phi$ ne fixe pas nécessairement le vecteur $(0, 1)$.

Ensuite on regarde le vecteur $(\psi_1^{-1} \circ \phi)'(i)(0, 1)$ tangent en i . Puisque $\psi_1^{-1} \circ \phi$ est une isométrie ce vecteur est de norme 1 on peut l'écrire sous la forme $(\sin \theta, \cos \theta) = \sin \theta + i \cos \theta$. Soit $\psi_2(z) := \frac{z \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{z \sin(\theta/2) - \cos(\theta/2)}$. Alors $\psi_2(i) = i$ aussi. De plus on a :

$$\begin{aligned} \psi_2'(z) &= \frac{\cos(\theta/2)(z \sin(\theta/2) - \cos(\theta/2)) - \sin(\theta/2)(z \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2))}{(z \sin(\theta/2) - \cos(\theta/2))^2} \\ &= \frac{-1}{(z \sin(\theta/2) - \cos(\theta/2))^2} \end{aligned}$$

donc il est facile de vérifier que $\psi_2'(i) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Donc

$$\psi_2'(i)(\sin \theta, \cos \theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)(\sin \theta + i \cos \theta) = i = (0, 1).$$

Par conséquent, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \varphi$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 qui fixe i dont la dérivée fixe $(0, 1)$. Donc par le lemme $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \varphi = \text{Id}(\mathbb{H}^2)$ et $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Alors ψ est surjective. Par le premier théorème d'isomorphisme,

$$\text{SL}_2(\mathbb{R})/\ker(\psi) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\langle \pm I_{2 \times 2} \rangle \cong \text{im}(\psi) = \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$$

□

Le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{R})/\langle \pm I_{2 \times 2} \rangle$ est noté $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

L'aire des triangles dans \mathbb{H}^2

Un autre avantage de définir une métrique riemannienne sur \mathbb{H}^2 est de pouvoir calculer les aires des régions dans \mathbb{H}^2 . Nous définissons une forme de l'aire, c'est-à-dire une forme différentielle de degré 2, sur \mathbb{H}^2 en utilisant la métrique riemannienne comme suit :

Tout d'abord, nous introduisons un léger changement de notation. Fixons la base canonique de \mathbb{R}^2 Soient $dx, dy : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications définies comme suit :

dx donne la première coordonnée d'un vecteur tangent v en point (x, y) et dy donne la deuxième coordonnée de ce même vecteur tangent v de (x, y) .

C'est-à-dire $dx(v, u) = v$, $dy(v, u) = u$. Nous pouvons maintenant reformuler la métrique riemannienne de la manière suivante :

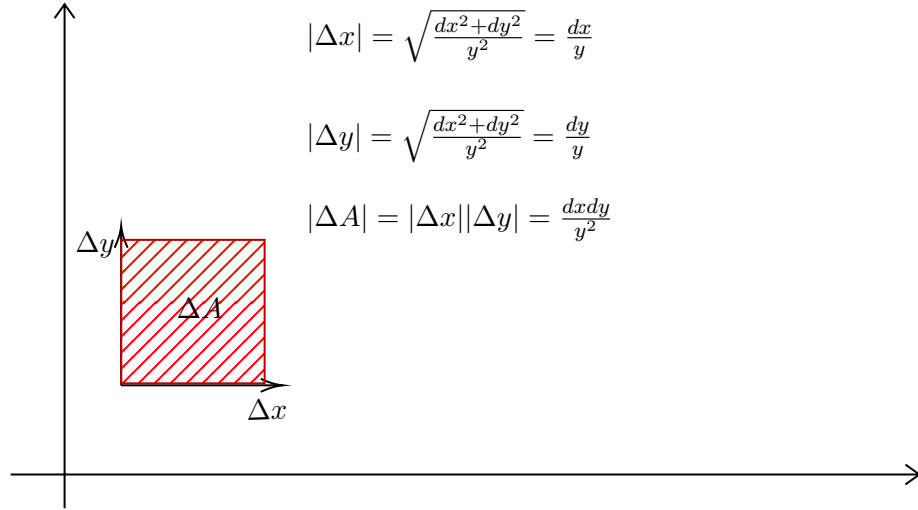
$$ds^2 := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Notez que $ds^2(v, u) = \frac{dx^2(v, u) + dy^2(v, u)}{y^2} = \frac{v^2 + u^2}{y^2} = |(v, u)|_{\mathbb{H}^2}^2$. Ainsi, nos définitions coïncident effectivement.

Définition 2.3.2. Sous cette reformulation, on peut exprimer notre forme de volume comme :

$$dA = \frac{dxdy}{y^2}$$

Remarque 2.3.2. Nous pouvons justifier quelque peu cette définition si nous considérons l'aire infinitésimale donnée par la métrique riemannienne.



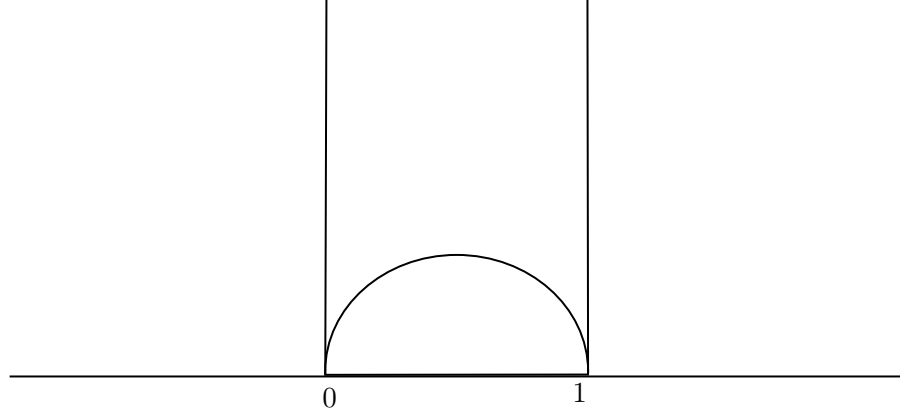
Maintenant, pour calculer l'aire hyperbolique d'une région $R \subset \mathbb{H}^2$, nous calculons simplement l'intégrale

$$\int_R dA = \int_R \frac{dxdy}{y^2}.$$

Si elle converge, l'aire de R est finie. Sinon, l'aire de R n'est pas définie.

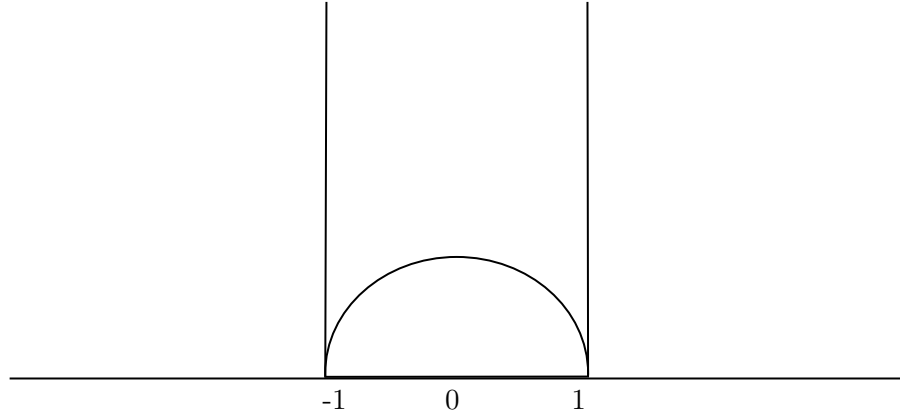
Rappelez-vous que les points idéaux de \mathbb{H}^2 sont des points à l'infini par rapport à sa métrique. Bien qu'ils ne soient techniquement pas dans l'espace lui-même, ces points sont importants. Nous les utiliserons pour dériver la formule de l'aire d'un triangle hyperbolique dans \mathbb{H}^2 .

Afin de dériver la formule d'aire d'un triangle, on commence par le cas le plus bizzare, celui d'un triangle idéale, c'est-à-dire, celui d'un triangle dont les sommets sont les points idéaux $0, 1$ et ∞ .



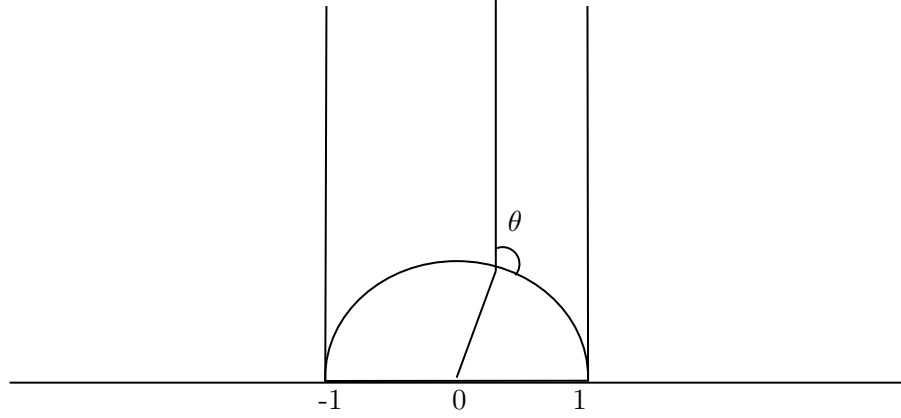
D'abord notons que, à l'isométrie près, il existe un seul triangle idéal, le triangle $(0, 1, \infty)$. Pour les points $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ quelconques, l'isométrie $z \mapsto \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$ envoie $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto \infty$. Plus précisément, le group d'isométries $PSL(2, \mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H}^2 et sa bord de manière triplement transitive.

Donc il nous reste de calculer l'aire de triangle $(0, 1, \infty)$. Mais pour faciliter les calculs, il est préférable de calculer l'aire du triangle T donné par $(-1, 1, \infty)$, car il est symétrique par rapport à l'axe des y .



$$\int_T dA = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi}^0 d\theta = \pi$$

On a fait le changement de variable $x = \cos \theta$. Donc l'aire de triangles idéaux est π



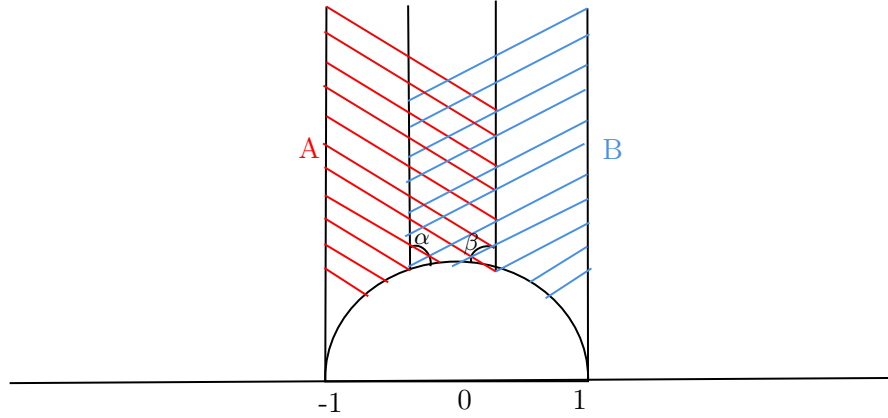
Ensuite on calcule l'aire d'un triangle ayant deux points idéaux comme de sommets. Tout à l'heure, un triangle ayant angle θ comme dans le figure est encore unique à isométrie près.

Le calcul se poursuit de manière similaire.

$$\int_T dA = \int_{\cos(\pi-\theta)}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\theta}^{\pi} d\theta = \pi - \theta$$

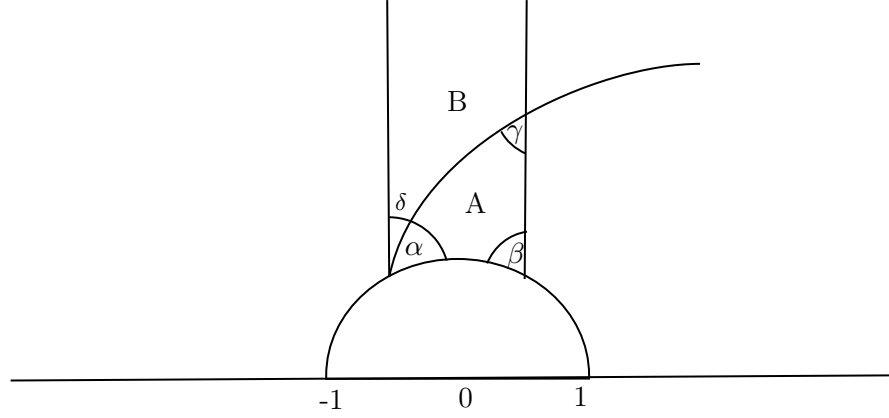
grâce au changement de variable $x = \cos(\pi - \theta)$. Alors l'aire d'un triangle ayant deux points idéaux et l'angle θ est $\pi - \theta$.

Comme on peut le deviner, nous procédons avec un triangle avec un seul point à l'infini. Disons qu'il a des angles α et β comme dans la figure.



Soit $A = \pi - \beta$ l'aire du triangle rouge, $B = \pi - \alpha$ l'aire du triangle bleu et C l'aire que nous cherchons. En utilisant les cas précédents, nous avons $A + B = \pi + C$. Donc $C = A + B - \pi = (\pi - \beta) + (\pi - \alpha) - \pi = \pi - \alpha - \beta$.

Enfin on regarde un triangle avec aucun sommet à ∞ avec les angles α, β, γ . Si on divise la région comme dans la figure,



$$\begin{aligned}
A + B &= \pi - (\alpha + \delta + \beta) \\
B &= \pi - (\delta + \pi - \gamma) = \gamma - \delta \\
\Rightarrow A &= \pi - \alpha - \delta - \beta - \gamma + \delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma.
\end{aligned}$$

Donc l'aire d'un triangle aux angles α, β, γ est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. L'aire d'un triangle hyperbolique ne depend que ses angles !

2.4 Disque de Poincaré

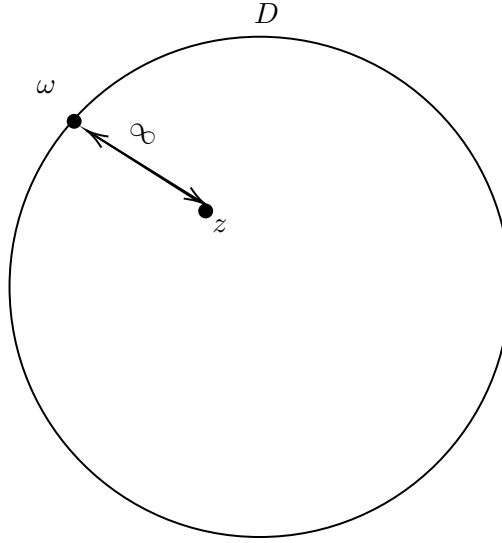
Le modèle suivant, tout comme le disque de Klein, est défini comme le cercle unité dans le plan complexe. Mais avec une différence clé. Par la métrique riemannienne avec laquelle nous l'équipons, le modèle devient conforme. De plus, il s'avère être isométrique à \mathbb{H}^2 .

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

Nous lui attribuons la métrique riemannienne suivante

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Remarque 2.4.1. Un phénomène similaire qui a été mentionné pour le modèle du demi-plan supérieur. Lorsqu'un nombre complexe $z \in D$ approche de la frontière du disque unité, qui est le cercle unité, la norme de z tend vers 1. Ainsi, le dénominateur de la métrique riemannienne tend vers ∞ . Par conséquent, les points du cercle unité sont infiniment éloignés des points à l'intérieur.



Une question immédiate que nous nous posons est la suivante :

Quel est le groupe d'isométries de cet espace ? Et quelles sont ses géodésiques ?

Heureusement, nous n'avons pas à passer par le même processus douloureux que nous avons connu pour \mathbb{H}^2 . Cela est dû à la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. D est isométrique à \mathbb{H}^2 via l'application

$$C: \mathbb{H}^2 \longrightarrow D$$

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

Cette application est appelé la transformation de Caley.

Démonstration. D'abord,

$$|z - i|^2 = (z - i)(\bar{z} + i) = |z|^2 + iz - i\bar{z} + 1 = |z|^2 - 2\Im(z) + 1$$

et similairement

$$|z + i|^2 = (z + i)(\bar{z} - i) = |z|^2 + 2\Im(z) + 1.$$

Puisque $z \in \mathbb{H}^2$, $\Im(z) < 0$ et par conséquent $|z - i|^2 < |z + i|^2$. D'où

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| < 1.$$

Donc notre application est définie. Calculons la dérivée de $C(z)$.

$$C'(z) = \frac{(z+i) - (z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{(z+i)^2}$$

et

$$(1-|C(z)|)^2 = \left(1 - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right)^2 = \left(\frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2}\right)^2 = \left(\frac{4\Im(z)}{|z+i|^2}\right)^2 = \frac{16\Im(z)^2}{|z+i|^4}.$$

Maintenant, nous procédons de manière similaire à la **Proposition 2.3.2**.

Donc étant donné $z \in \mathbb{H}^2$ et (u,v) vecteur tangent en z , on utilise l'équation précédente et on obtient

$$\begin{aligned} \|C'(z)(u,v)\|_{C(z)}^2 &= |C'(z)|^2 \frac{4(u^2 + v^2)}{(1-|C(z)|^2)^2} \\ &= \frac{4}{|z+i|^4} |z+i|^4 \frac{4(u^2 + v^2)}{16\Im(z)^2} \\ &= \frac{u^2 + v^2}{\Im(z)^2} = \|(u,v)\|_z^2. \end{aligned}$$

Donc par **Proposition 2.2.2**, C est une isométrie. \square

Remarque 2.4.2. Notez que les groupes d'isométries de deux espaces isométriques sont nécessairement isomorphes par conjugaison

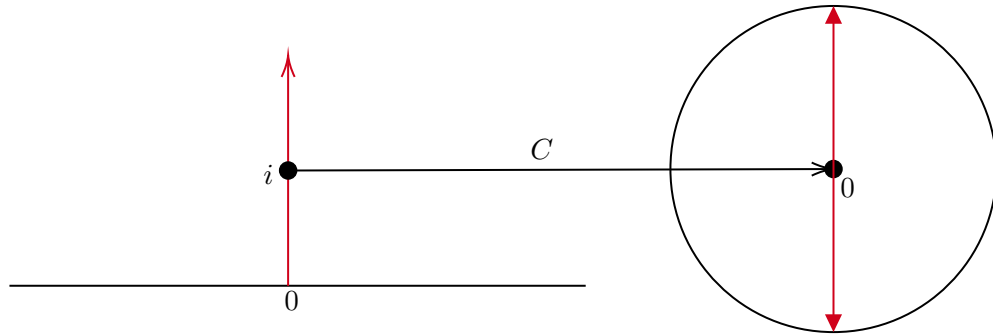
$$\begin{aligned} \psi: \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) &\longrightarrow \text{Isom}^+(D) \\ f &\mapsto C \circ f \circ C^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme des groupes. Donc pour déterminer les géodésiques de D il suffit d'appliquer C aux géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Par exemple, prenons l'axe imaginaire de \mathbb{H}^2 . On peut le paramétrer comme $\gamma(t) = i(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$.

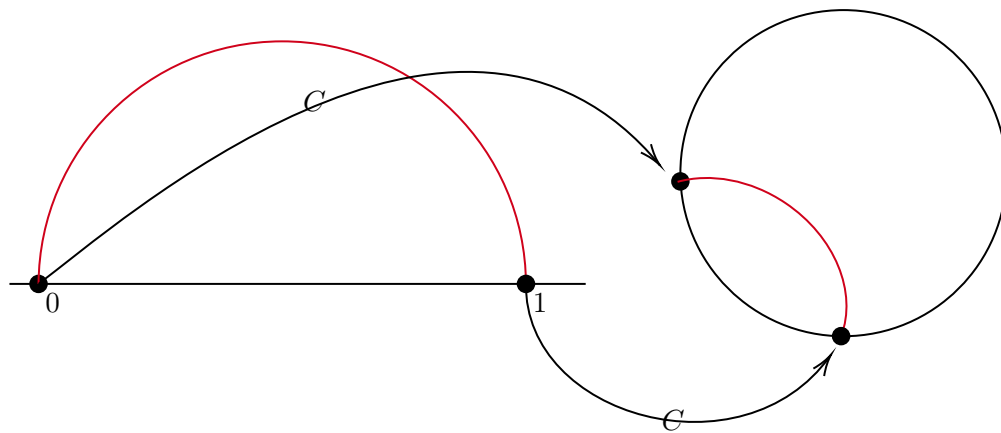
$$C(\gamma(t)) = \frac{\gamma(t) - i}{\gamma(t) + i} = \frac{i(t+1) - i}{i(t+1) + i} = \frac{t}{t+2}i$$

Ceci est la paramétrisation de la ligne ci-dessous :



Maintenant prenons le demi-cercle $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $-\pi < t < \pi$, qui est un géodésique de \mathbb{H}^2 . On applique encore C et on obtient :

$$C(\gamma(t)) = \frac{e^{it} + 1 - i}{e^{it} + 1 + i} = \frac{1 + 2 \cos t - i(2 \cos t + 2)}{3 + 2 \cos t + 2 \sin t}$$



Chapitre 3

Conclusion

En résumé, il existe des espaces dans lesquels le cinquième postulat d'Euclide n'est pas valide. De plus, ces espaces ne sont ni moins naturels ni moins cohérents que celui d'Euclide. Leurs géodésiques ne sont pas des lignes droites au sens euclidien, même si 3 des 3 modèles ont la même notion d'angle que celle d'Euclide. De plus, nous nous sommes familiarisés avec toute une nouvelle classe d'espaces, les espaces métriques dont la métrique est induite par un tenseur de métrique riemannien. Cela fait partie d'un domaine d'étude appelé la géométrie riemannienne, qui peut être un champ fertile pour ceux qui s'y intéressent.

Références

- [1] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, chapitres 1-6. Springer-Verlag, 1994.
- [2] Robert C. Penner, *Decorative Teichmüller Theory*, chapitre 1 et chapitre 2. European Mathematical Society, 2012.