Université Galatasaray
Faculté de Sciences et Lettres
Département de Mathématiques

Notes du cours - Algèbre Linéaire (2020-2021)

Auteurs
Meral Tosun
İbrahim Emir Çıçekli

28 août 2023

Table des matières

Chapitre 1

Un peu de Géométrie

1.1 Vecteur

Soit $p \in \mathbb{R}^n$ un point. Un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ partant de l'origine et indiquant le point p est noté par

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

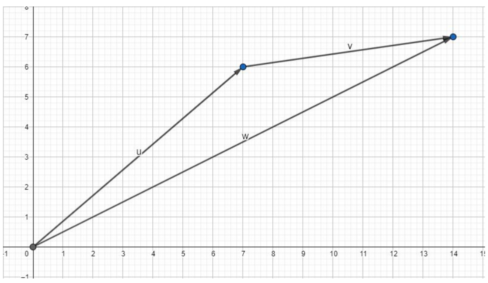
où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est les cordonnées de p dans $\mathbb{R}^n$. La longueur d'un vecteur $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ est definie comme le nombre :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

L'addition de deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est définie comme

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

On la voit géométriquement comme :



La substraction $\vec{u} - \vec{v}$ est deéfinie comme

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

qui est géométriquement :

renkli sekil

La multiplication de deux vecteurs demande plus d'attention et on la définie en trois façon différentes. La multiplication d'un vecteur par scalaire $k \cdot \vec{v}$ est :

$$k \cdot \vec{v} = k.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (k \cdot x_1, k \cdot x_2, \ldots, k \cdot x_n)$$

où $k \in \mathbb{R}$.

renkli sekil

Avant de continuer par deux autres multipliciations, étudions quelques propriétés :

Proposition 1. *Pour $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$
3. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4. $\vec{v} + (\vec{-v}) = \vec{0}$
5. $k_1.(k_2.\vec{v}) = (k_1.k_2)\vec{v}$
6. $k.(\vec{v} + \vec{u}) = k.\vec{v} + k.\vec{u}$
7. $(k_1 + k_2)\vec{v} = k_1\vec{v} + k_2\vec{v}$

La deuxième multiplication des vecteurs est définie comme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

On l'appelle la multiplicitaion scalaire des vecteurs comme le résultat à droite est un scalaire. Remarquons qu'on a $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$.

Proposition 2. *On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v|cos\theta$. ? ? ?*

La multiplication des vecteurs qu'on appelle la multiplication vectorielle est définie dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

où $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{u} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$. La définition sera généralisé plus loin pour des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

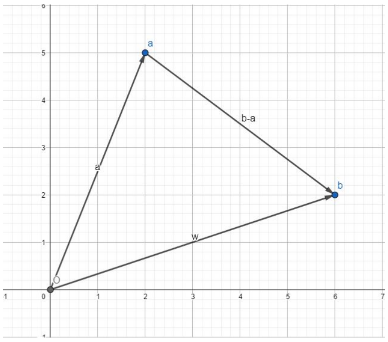
Proposition 3. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\vec{v} \times \vec{u}$ = - $\vec{u} \times \vec{v}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ = $\vec{u} \times \vec{v}$+$\vec{u} \times \vec{w}$
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u}$=$\vec{v} \times \vec{u}$+$\vec{w} \times \vec{u}$
4. $k.\vec{v} \times \vec{u}$ = $\vec{kv} \times \vec{u}$=$\vec{v} \times \vec{ku}$
5. $\vec{v} \times \vec{0}$ = $\vec{0}$
6. $\vec{v} \times \vec{v}$=$\vec{0}$

1.2 Droite

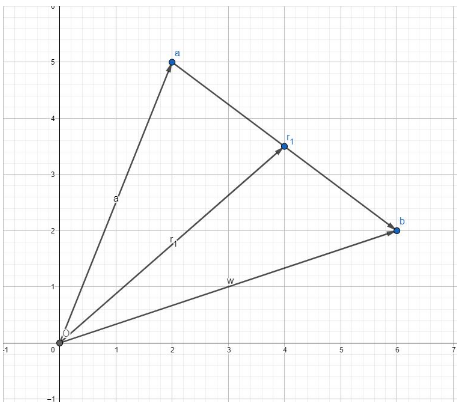
Soient $a = (x_1, y_1)$ et $b = (x_2, y_2)$ deux points distincts dans $\mathbb{R}^2$. Notons par $\vec{a}$ (resp. $\vec{b}$) le vecteur partant de l'origine et indiquant les points a et b respectivement. Posons :

$$\vec{b} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})$$



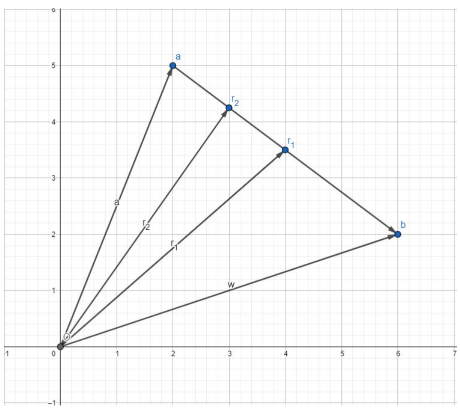
Considérons le vecteur $\vec{r}_1$ partant de l'origine et indiquant le point au milieu de $\vec{b} - \vec{a}$. C'est à dire qu'on a :

$$\vec{r}_1 = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$



Maintenant considérons le vecteur $\vec{r}_2$ partant de l'origine et indiquant le point au milieu de $\vec{b} - \vec{r}_1$. On a :

$$\vec{r}_2 = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$$



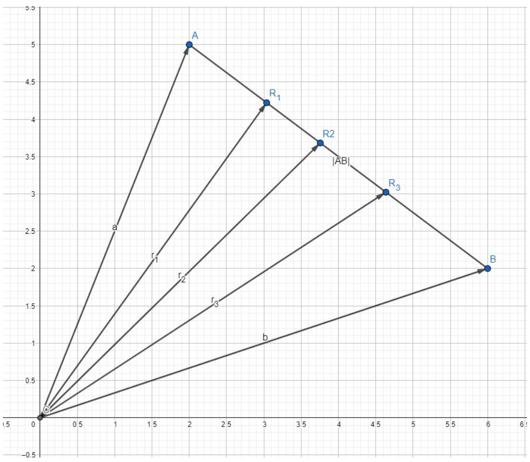
Si l'on continue ainsi on peut obtenir tous les points entre a et b comme : Donc on a :

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \\
r_1 &= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \\
\vec{r_2} &= \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Comme on change seulement le coefficient de $\vec{b} - \vec{a}$ on peut exprimer le procés en utilisant un paramètre $t \in [0,1]$ comem :

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \tag{1.1}$$

où $t \in [0,1]$.



On obtient donc un morceau de la droite passant par a et b, qu'on appelle le **segment**. Si l'on considère $t \in \mathbb{R}$ on obtiendra la droite passante par les points a et b. L'équation

$$\vec{r} = \vec{a} + t.\vec{v}$$

est dite l'équation vectorielle d'une droite dans $\mathbb{R}^2$ où $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Si l'on remplace $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$ dans l'équation ci-dessus :

$$(x, y) = (a_1, a_2) + t \cdot (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
x &= a_1 + t \cdot (b_1 - a_1) \\
y &= a_2 + t \cdot (b_2 - a_2)
\end{aligned}$$

Ces deux égalités sont dites les équations paramétriques de la droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par a et b. Ceci nous permet d'obtenir l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^n$, qui est donnée par les équations paramètriques :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t \cdot (b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + t \cdot (b_2 - a_2) \\ \cdots&\cdots\cdots \\ x_n &= a_n + t \cdot (b_n - a_n) \end{aligned}$$

passant par les points $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. On peut aussi la décrire comme l'équation vectorielle

$$\vec{r} = \vec{a} + t.\vec{v}$$

de la droite passant par le point a en direction du vecteur $v = \vec{b} - \vec{a}$. Une droite dans $\mathbb{R}^n$ est donc définie par n équations paramétriques et $(n-1)$ équations cartésiennes. Par exemple, la droite dans $\mathbb{R}^2$ donnée par les équations paramétriques ci-dessous :

$$\begin{aligned} x &= 3 + 4t \\ y &= 2 + 5t \end{aligned}$$

a l'équation cartésienne :

$$5x - 4 = 7y$$

d'après la substitution $t = \frac{x-3}{4}$.

1.3 Hyperplan

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Une équation linéaire ayant n variables est de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1.2}$$

où $a_i, b \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et au moins un a_i est nonnul. Notons par $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions d'un telle équation.

Si $n = 1$ et $a_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathcal{S}$ est un point dans $\mathbb{R}$.

Si $n = 2$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\mathcal{S}$ est une droite dans $\mathbb{R}^2$.

Si $n = 3$ et $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, $\mathcal{S}$ est un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Si $n \geq 4$, l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les solutions est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et l'objet géométrique définie par $\mathcal{S}$ est dit l'hyperplan dans $\mathbb{R}^n$. On dit que l'équation 1.2 est l'équation cartesienne de l'hyperplan $\mathcal{S}$.

Chapitre 2

Système des équations linéaires

2.1 Système linéaire

Un système à m équations linéaire ayant n variables est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ du système 2.1 est l'ensemble des n-uplets $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant chacune des équations du système.

Remarque. Si $b_i = 0$ pour tout i le système 2.1 est dit homogène. Dans ce cas, $(0, 0, \ldots, 0)$ est toujours une solution du système.

Définition 1. On dit que le system 2.1 est compatible si $\mathcal{S}$ est nonvide ; sinon on dit que le système est incompatible.

Remarquons qu'un système linéaire homogène est toujours un système compatible.

Proposition 4. *Soient $(c_1, \ldots, c_n)$ une solution d'un système homogène. Alors la somme $(c_1, \ldots, c_n) + (d_1, \ldots, d_n)$ est une solution de 2.1 si et seulement si $(d_1, \ldots, d_n)$ est aussi une solution du système 2.1.*

Preuve. Soient $(c_1, \ldots, c_n)$ et $(d_1, \ldots, d_n)$ deux solutions du système homogène associé à 2.1. Vérifions si $(c_1, \ldots, c_n) + (d_1, \ldots, d_n) = (c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n)$ est une solution de 2.1. On remplace $(c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n)$ dans l'équation $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$:

$$a_{i1}(c_1 + d_1) + \ldots + a_{is}(c_n + d_n) = (a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n) + (a_{i1}d_1 + \ldots + a_{in}d_n) = b_i + 0 = b_i$$

Donc $(c_1, \ldots, c_n) + (d_1, \ldots, d_n) = (c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n)$ est une solution de chaque équation dans le système 2.1 ; par conséquant, c'est une solution de 2.1. ∎

Proposition 5. *L'ensemble des solutions du système 2.1 est obtenu par la somme d'une solution du système homogéne associé au système 2.1 et d'une solution du système 2.1.*

Proposition 6. *Considérons deux systèmes linéaires ayant n variables. Les deux systèmes sont équivalentes si et seulement si l'un des systèmes est obtenu par un nombre fini des operations ci-dessous à partir de l'autre :*

- *Échanger i-ème équation et j-ème équations dans le système ; on va noter cette opération par $E_i \leftrightarrow E_j$ pour $i \neq j$,*
- *Multiplier une équation dans le système par un nombre $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si on multplie i-ème équation on va noter cette opération par $E_i \leftarrow k \cdot E_i$,*
- *Multiplier une équation dans le système par un nombre $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ et l'ajouter à une autre équation dans le système ; on va noter cette opération par $E_i \leftarrow E_i + k \cdot E_j$.*

Exemple 1. Considérons le système ci-dessous :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Par l'opération $E_2 \leftrightarrow E_3$, on obtient le système équivalent au système donné comme :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Par l'opération $E_1 \leftrightarrow (-1) \cdot E_1$ le système équivalent obtenu est :

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Par l'opération $E_2 \leftrightarrow E_2 + 1 \cdot E_3$ le système équivalent obtenu est :

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1 \\ 2x_2 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est donc de la forme :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_4 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Le système 2.1 est dit **en forme èchelonné** si l'on a :

(i) tous les coefficients sont zéros au-dessous du premier coefficient qui est nonzero dans la première équation,

(ii) le premier coefficient nonzero d'une équation est strictement à droite du premier coefficient nonzero de l'équation précedent.

Définition 2. Le premier coefficient nonzero de chaque équation est dit pivot de l'équation.

Définition 3. Le rang d'un système échelonné est le nombre des pivots dans le système.

Remarque. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ le rang du système 2.1. Alors $r \leq m$.

Définition 4. On dit qu'un système échelonné est réduit si :

1. tous les pivots sont 1.
2. le pivot est le seul nonzero coefficient lorsqu'on regard la colonne où le pivot se trouve.

Exemple 2. Le système

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

est échelonné mais il n'est pas réduit. Si l'on fait l'opération $E_1 \leftarrow E_1 + (-2) \cdot E_3$ on obtient le système équaivalent :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

qui est en forme échelonné reduite.

Exemple 3. Considerons le système ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Pour le mettre en forme échelonné réduit, on commence par l'opération $E_2 \leftarrow (\frac{1}{2})E_2$ et on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 1.x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Ce système est échelonné et tous les pivots sont 1. Comme les pivots ne sont pas les seuls coefficients non-nuls dans leurs colonnes on fait l'opération $E_1 \leftarrow (-1).E_2$ et on obtient :

$$\begin{aligned} 1.x_1 + 0.x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= -2 \\ 0.x_1 + 1.x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 &= 2 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Il faut continuer ! On continue par les opérations $E_1 \leftarrow E_1 + \frac{1}{2}E_3$ et $E_2 \leftarrow \frac{1}{2}E_3$ et on obtient :

$$\begin{aligned} 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 &= -\frac{1}{2} \\ 0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 &= \frac{5}{2} \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 1.x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nous n'avons pas à nous soucier de la quatrième colonne puisqu'elle ne contient pas de pivot. On obtient donc le système équaivalent :

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{5}{2} \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

D'après la Proposition 6, chaque système est équivalent et donc admet la même solution. Notons que le derier système est plus facile à résoudre que le premier système donné. Les solutions du système sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} - x_4 \\ x_2 &= \frac{5}{3} \\ x_3 &= 1 - x_4 \end{aligned}$$

Donc si on note l'ensemble des solutions avec ES, on a

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{1}{2} - x_4, \frac{5}{3}, 1 - x_4, x_4)\}$$

Définition 5. La méthode ci-dessus pour résoudre un système de la forme 2.1 est appellé l'élimination de Gauss.

Proposition 7. *Tout système linéaire ayant n variables et m équations admet un système équivalent qui est échelonné reduit.*

La preuve de cette proposition est une bonne exercice.

2.2 Matrice asscoiée à un système linéaire

On associe à une système linéaire 2.1 une matrice comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & | & b_2 \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ . & . & \cdots & . & | & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Définition 6. La première matrice est dite la matrice augmenté associée au système. La deuxième matrice est dite la matrice de coefficients associée au système.

Exemple 4. Le système S :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 &= -5 \end{aligned}$$

La matrice augmentée associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & | & 1 \\ 2 & -1 & 5 & | & -5 \\ -1 & -3 & -9 & | & -5 \end{pmatrix}$$

2.3 Elimination de Gauss

Si l'on fait les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + (-2).L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ la matrice se transforme à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & | & 1 \\ 0 & -3 & 2 & | & -7 \\ 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

On fait $L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} L_2$ pour reduire le pivot et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{7}{3} \\ 0 & -2 & -2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

On fait $L_1 \leftarrow L_1 + (-1)L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2.L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{3} & | & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & | & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

On fait $L_3 \leftarrow \frac{-3}{4}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{3} & | & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + (\frac{-2}{3})L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{-19}{3}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{-27}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alors le nouveau système qui est équivalent à S est :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-27}{6} \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $ES = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1, x_2, x_3) = (-\frac{27}{6}, 2, \frac{1}{2})\}$. Ceci dit que le système admet une unique solution.

Exemple 5. Considèrons la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Si on veut écrire le système associé , c'est

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_3 &= 3 \\ 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

D'où on peut voir que l'une des lignes est redondante. Donc on peut l'enlever. Si on l'enleve la matrice se transforme à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

S n'est pas échelonné parce que le pivot de la deuxième ligne est à gâuche de celui de première. Heuresement on peut échanger les lignes et obtenir un système équivalent. On fait $L_1 \leftrightarrow L_2$ et après $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

S est échelonné mais il n'est pas reduit. Il faut faire $L_1 \leftarrow L_1 + (-\frac{1}{3})L_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Donc l'ensemble des solutions ES est $ES = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = 3\}$ autrement dit, $ES = \{(x_1, -\frac{1}{3}, 3) \in \mathbb{R}^3\}$. Ceci nous montre que le système S admet une infinité des solutions.

Exemple 6. Considèrons

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci est un système homogène. Donc on peut dire qu'il existe au moins une solution qui est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$. L'étudiant(e) peut examiner s'il existe d'autres solutions en utilisant Élimination de Gauss afin de s'entraîner.

2.4 Calcul avec les matrices

2.4.1 Produit des matrices

Soit A et B deux matrices de taille 2×2. Le produit AB est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

Soient A une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $m \times k$ avec $m, n, k \geq 1$. Le produit AB est une matrice C de taille $n \times k$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2k} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ C_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

où C_{ij} signifie le produit de i-ième ligne de A et j-ième colonne de B ; c'est à dire qu'on a pour chaque $1 \leq j \leq k$:

$$C_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$$

Remarque. En termes des matrices, le système 2.1 s'écrit comme

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

où A est la matrice de coefficients de 2.1, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$.

Définition 7. La matrice $Id_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & 1 & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ est dite la matrice d'identité.

Exemple 7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si les matrices sont de même tailles

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A.(B.C) = (A.B).C$

Remarque. On n'a pas nécessairement $AB = BA$, c'est-à-dire la multiplication n'est pas commutativé.

Exemple 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque. $A.B = 0$ n'implique pas que soit $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 9.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$A_{mxn}.X_{nx1} = B_{mx1} \tag{2.2}$$

Si on veut resoudre pour X_{nx1}, on a

$$X = A^{(-1)}B$$

Il faut faire attention au fait qu'on a multiplié chaque côte avec $A^{(-1)}$ par la gâuche. La direction est importante parce que $A^{(-1)}B$ n'est pas nécéssairement égal à $B.A^{(-1)}$. Mais comment trouver $A^{(-1)}$?

2.4.2 Calcul de l'inverse d'une matrice - Méthode-1

Soit A une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que l'inverse A^{-1} de A satisfait le produit $A \cdot A^{-1} = Id_2$ ou bien $A^{-1} \cdot A = Id_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait la multiplication et on obtient

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, 2a + c = 1$$
$$b = 1, 2b + d = 0$$

D'où on obtient $c = 1$ et $d = -2$ Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2.4.3 Calcul de l'inverse d'une matrice - Méthode-2

Définition 8. Une matrice E est dit élémentaire si elle peut être obtenue par les opérations O_1, O_2 ou O_3 à partir de la matrice d'identité.

Exemple 10. $O_1 : L_i \leftrightarrow L_j$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenu par l'opération $L_2 \leftrightarrow L_3$ sur I_{3x3}

Exemple 11. $O_2 : L_i \leftarrow k.L_i$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenu par l'opération $L_1 \leftarrow 2.L_1$ sur I_{3x3}

Exemple 12. $O_3 : L_i \leftarrow L_i + k.L_j$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenu par l'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ sur I_{4x4}

Théorème 8. *Si la matrice E est une matrice élémentaire obtenue par Id_m alors pour toute matrice A de taille mxn, le produit $E.A$ est egal à la matrice obtenue avec la même opération sur A.*

Exemple 13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ on obtient

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Et si on fait $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ sur Id_3 on a

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Don le produit EA

$$E.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

Donc $A' = E.A$ implique $A \approx A'$

La preuve est une bonne exercice.

Théorème 9. *Pour toute matrice de taille nxn les propriétes suivantes sont équivalentes.*

- *i* *A est inversible*
- *ii* *$A.X = B$ admet une seule solution pour tout matrice B et cette solution est obtenue par $X = A^{-1}.B$*
- *iii* *$A.X = 0$ admet la solution triviale $X = 0$*
- *iv* *A est équivalente, par lignes, à Id_n*
- *v* *A est un produit des matrices élémantaires.*

2.4.4 Transpose d'une matrice

Définition 9. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

La transpose de A, écrite A^t , est la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{nxm}$$

Théorème 10. *Pour les matrices A et B on a les propriétes suivants*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(k.A)^t = k.A^t$ *où* $k \in \mathbb{R}$
3. $(A.B)^t = B^t.A^t$
4. *Si A est inversible A^t l'est aussi, de plus* $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

La preuve est une bonne exercice.

Chapitre 3

Espace Vectoriel

3.1 Espace vectoriel réel/complexe

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $\mathcal{V}$ un ensemble sur lequel on définie l'addition et la multiplication par scalaire :

$$\begin{aligned} + : &\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ &(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \cdot : &\mathbb{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ &(\alpha, \vec{v}) \longmapsto \alpha \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Si $\mathcal{V}$ admet les propriétés suivantes on dit que $\mathcal{V}$ est **un espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou bien un $\mathbb{K}$-espace vecteoriel) :

(**V1**) (Associativité additive) Pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ on a $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,

(**V2**) (Commutativité additive) Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,

(**V3**) (Identité additive) Pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}$, il existe $\vec{0} \in \mathcal{V}$ tel que $\vec{v}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$,

(**V4**) (Inverse additive) Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}$, il existe $\vec{v} \in \mathcal{V}$ tel que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$,

(**V5**) (Associativité multiplicative) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$,

(**V6**) (Identité multiplicative) Pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}$, il existe $1 \in \mathbb{K}$ tel que $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$,

(**V7**) (Distribution) Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\alpha \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$ et $(\alpha+\beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$.

Définition 10. Un élément d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé *vecteur*.

Définition 11. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{V}$ avec les propriétés ci-dessus est dit un espace vectoriel réel ; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{V}$ est dit un espace vectoriel complexe.

Remarque. (1) L'ensemble $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ est le plus petit espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

L'identité additive donné en (**V3**) est unique : Si l'on a deux identités additives comme $\vec{0}$ et $\vec{0}'$, par la propriété (**V3**), on a $\vec{0} = \vec{0}+\vec{0}' = \vec{0}'+\vec{0} = \vec{0}'$, ce qui donne $\vec{0} = \vec{0}'$.

(3) Pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}$, il existe un unique $-\vec{w}$ qui satisfait la propriété (**V4**) : Supposons que $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ satisfont $\vec{w}+\vec{v}=0$ et $\vec{w}+\vec{v'}=0$; on a

$$\vec{v} = \vec{0}+\vec{v} = \vec{w}+\vec{v'}+\vec{v} = (\vec{w}+\vec{v})+\vec{v'} = \vec{0}+\vec{v'} = \vec{v'}$$

(4) Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, la soustraction est définie comme $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-1)\vec{v}$.

Exemple 14. Si $\mathbb{K} = \mathcal{V} = \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 15. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ alors $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 16. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$. Soit $\vec{u} = (x_1, y_1) \in \mathcal{V}$ et $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathcal{V}$. On a :

$$\vec{u}+\vec{v} = (x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

Comme $x_1+x_2, y_1+y_2, \alpha x_1, \alpha x_2 \in \mathbb{R}$ on a $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in \mathcal{V}$ et $(\alpha x_1, \alpha y_1) \in \mathcal{V}$. Par conséquent, $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De la même façon, on peut montrer que $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{K} = \mathbb{R}$-espace vectoriel pour $n \geq 1$.

Exemple 17. Montrons que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel : Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}$ deux vecteurs. Ils sont sous la forme $\vec{u} = a+ib$ et $\vec{v} = c+id$ et leur somme est $\vec{u}+\vec{v} = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$. Puisque $(a+c), (b+d) \in \mathbb{R}$, on a $(a+c)+i(b+d) \in \mathbb{C}$.

Soient $\vec{u} \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc, $\vec{u} = a+ib$ et $\alpha = p+iq \in \mathbb{C}$. Alors on a $\alpha \cdot \vec{u} = (a+ib)\cdot(p+iq) = (ap-bq)+i(bp+aq)$. Puisque $ap-bq, bp+aq \in \mathbb{R}$ on a $\alpha \cdot \vec{u} \in \mathbb{C}$.

Soit d un nombre naturel non-zéro. Soit $\mathcal{P}_d(x)$ ensemble des polynômes à une variable dont le dégre est égal ou plus petit que d et dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$. Donc :

$$\mathcal{P}_d(x) := \{a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K}, d \in \mathbb{N}^*\}$$

Exemple 18. Montrons que $\mathcal{P}_d(x)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : Prenons deux vecteurs $\vec{u} = \mathcal{P}_d(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ve $\vec{u} = \mathcal{P}_e(x) = a_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de cet ensemble. Évidemment on a $e \leq d$. Par conséquent la somme de ces deux éléments est un polynôme dont les coefficient sont dans $\mathbb{R}$ et dont le dégre est au plus d. Naturelement, ce polynôme est un élément de $\mathcal{P}_d(x)$.

De même, on a $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \in \mathcal{P}_d(x)$. D'où on peut deduire que $\mathcal{P}_d(x)$ a une structure d'espace vectoriel.

3.1.1 Combinaison linéaire

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une liste de vecteurs dans $\mathcal{V}$. Alors une combinaison linéire de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est la somme

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

où $a_i \in \mathbb{F}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Par exemple, $\mathbf{v} = (0, 1, -3)$ est une combinaison linaire comme $\mathbf{v} = 0.(1, 0, 0) + 1, (0, 1, 0) + (-3).(0, 0, 1)$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est noté comme $span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Proposition 11. *L'ensemble $U := span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace de $\mathcal{V}$, appellé le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont appelés les générateurs de U.

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble d'espace vectoriel $\mathcal{V}$ tel que $\vec{v} \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \vec{v} \in \mathcal{U}$. On a $\mathcal{U} = \{\alpha \cdot \vec{v}\} =$ span $\{ \ \vec{v} \ \}$

•$span\{\vec{v}\} = \{\alpha \cdot \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$

•$span\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$

•$span\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} = \{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v_n} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$

3.2 Sous-espaces

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble non-vide de $\mathcal{V}$. Si les vecteurs dans $\mathcal{U}$ satisfont les propriétés suivantes on dit que $\mathcal{U}$ est un sous-espace de V :

(**SV1**) Pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$, on a $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{U}$,

(**SV2**) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $\vec{u} \in \mathcal{U}$, on a $\alpha \cdot \vec{u} \in \mathcal{U}$.

Remarque. (i) Tout sous-espace $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$ contient l'élément $\vec{0}$. (ii) Pour tout $\vec{v} \in \mathcal{U}$ on a $-\vec{v} \in \mathcal{U}$.

Exemple 19. Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx, m \in \mathbb{R}\}$$

Ceci dit que les points de $\mathcal{D}$ sont de la forme (x, mx) dans $\mathcal{V}$. On a $\vec{0} = (0, 0) \in \mathcal{U}$. Considérons les éléments $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{U}$; Pour $a, b, m \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = (a, ma)$ et $\vec{u} = (b, mb)$, l'addition de deux points $\vec{u} + \vec{v} = (a, ma) + (b, mb) = (a + b, m(a + b))$ est dans $\mathcal{D}$ car $\mathcal{R}$ est un corps, donc on a $a + b, m(a+)b \in \mathcal{R}$. Par conséquent $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 20. Considérons l'ensemble $\mathcal{U} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Est-ce $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$? La réponse est positive car :

• $(0, 0, 0) \in \mathcal{U}$ est évident. $\vec{0}$= (0,0,0) $\in \mathbb{V}$

• Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, il faut vérifier $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{V}$. Notons $\vec{u} = (x_1, y_1, 0)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, 0)$ tel que $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. La somme $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \mathcal{V}$ tel que $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$ parce que $\mathbb{R}$ est un corps.

• Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x_1, y_1, 0) \in \mathcal{V}$ on a $\alpha \cdot (x_1, y_1, 0) \in \mathcal{V} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, 0)$ tel que $\alpha \cdot x_1 \in \mathcal{R}, \alpha \cdot y_1 \in \mathcal{R}$

Donc, l'ensemble $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Tout hyperplan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 21. L'espace $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Exemple 22. L'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues dans l'intervale $[0, 1]$ est un espace vectoriel. Démontrez-le.

Exemple 23. L'ensemble $\mathcal{V} = \{(x, y, 1) | x, y \in \mathbb{R}^3\}$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ acr $(0, 0, 0) \notin \mathcal{V}$.

Exemple 24. L'ensemble $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+2y+3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel.

$\vec{0}$= (0,0,0) $\in M$ parce que $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$\vec{u} \in M$, $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ satisfait l'équation : $x_1 + 2 \cdot y_1 + 3 \cdot z_1 = 0$

$\vec{v} \in M$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ satisfait l'équation : $x_2 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot z_2 = 0$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$(x_1 + x_2) + 2 \cdot (y_1 + y_2) + 3 \cdot (z_1 + z_2) = 0$

$\alpha \in \mathcal{R}, \alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1)$

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1)$

$=\alpha(x_1 + 2 \cdot y_1 + 3 \cdot z_1) = 0$

Exemple 25. $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_i i \in \mathbb{R}, \forall i \right\} \subset E_{m \cdot n}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple 26. $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j, a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{nn} = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel.

3.3 Indépendence Linéaire

On dit que la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$ des vecteurs dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est libre ou bien linéairement indépendants si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \iff \alpha_i = 0, \forall i$$

Exemple 27. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{R}^n[x]$.

Exemple 28. $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathcal{V}$

$\mathcal{W} = \{\alpha \cdot (1,-1) + \beta \cdot (0,1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$ =span $\{v_1, v_2\}$

tel que $\vec{v_1} = (1,-1)$ et $\vec{v_2} = (0,1)$

Il faut d'abord éxaminer indépendence linéaire : $\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} = 0 \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\alpha_1 \cdot (1,-1) + \alpha_2 \cdot (0,1) = 0$

$(\alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2) = 0$

$(\alpha_1, -\alpha_1) + (0, \alpha_2) = (0,0)$

$\alpha_1 = 0$ et $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

La solution commune de deux équations est $\alpha_2 = 0$.

Alors, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendents.

Exemple 29. $\mathcal{U} = \{(1,-1,0), (2,1,0), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

Il faut d'abord éxaminer indépendence linéaire. On a le système d'équations suivant :

$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \alpha_3 = 0$

$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\alpha_3 = 0$

Si on résout tout le système, on a $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 = 0$.

Donc, les vecteurs (1,-1,0), (2,1,0), (1,1,1) sont linéairement indépendents.

Exemple 30. $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = span\{1, x, x^2\} = \{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1\} = \{a \cdot \vec{v_1} + b \cdot \vec{v_2} + c \cdot \vec{v_3}\}$

Exemple 31. span { (1,1,1), (1,-1,0), (2,1,0) } = span { (1,1,1), (1,-1,0), (2,1,0), (6,0,0) }

Exemple 32. span { (0,1), (1,0) } = span { (0,1), (1,0), (1,-1) } = span { (0,1), (1,2), (2,3), (4,7), (6,8), (-1,-1), (1,0) }

Remarque. $\mathbb{R}^2 = span\{(0,1), (1,0)\}$

$\mathbb{R}^2$ a dimension 2.

Remarque. $\mathbb{R}^3 = span\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

$V = span\{\vec{0}\} = \{\alpha \cdot \vec{0} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ Alors V a dimension 0.

$V' = span\{(1,0)\} = \{\alpha \cdot (1,0) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ Alors V' a dimension 1.

$V'' = span\{(1,0), (-3,0)\} = \{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot (-3\vec{v_1})\} = \{(\alpha_1 - 3\alpha_2) \cdot \vec{v_1}\}$

V'' a dimension 1.

Exemple 33. Est-ce qu'on a $(0, 1, 2) \in span\{(1, 1, 1), (3, 2, 1), (1, 0, 1)\}$?

$(0, 1, 2) = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \alpha_3 \cdot \vec{v_3} = \alpha_1 \cdot (1, 1, 1) + \alpha_2 \cdot (3, 2, 1) + \alpha_3 \cdot (1, 0, 1) = (\alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

D'après la solution de ce système, on obtient $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$ ve $\alpha_3 = 0$.

Exemple 34. Est-ce qu'on a $\mathbb{R}^3 = span\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (3, 5, 7)\}$?

$span\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (3, 5, 7)\}$

$= a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (1, 1, 1) + a_3 \cdot (3, 5, 7) = (0, 0, 0)$

Si on écrit les équations :

$a_1 + a_2 + 3 \cdot a_3 = 0$

$2 \cdot a_1 + a_2 + 5 \cdot a_3 = 0$

$3 \cdot a_1 + a_2 + 7 \cdot a_3 = 0$

Si on cherche la solution commune, on trouve :

$a_1 = 2$, $a_2 = 1$ et $a_3 = -1$.

Donc, $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ ve $\vec{v_3}$ sont linéairement dépendants.

Théorème 12. *Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.*

Donc, span $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$= span$\{\vec{v_1}\}$+ span $\{\vec{v_2}\}$+ ...+ span $\{\vec{v_n}\}$

Exemple 35. Soient $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$.

L'ensemble $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ ne peut pas être un espace vectoriel.

$\mathcal{U}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\} = span\{(0, y)\} = \text{span } \{(0, 1)\} = span\{\alpha \cdot (0, 1)\}$

$\mathcal{U}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\} = span\{(x, 0)\} = span\{(1, 0)\} = span\{\beta \cdot (1, 0)\}$

$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \{\alpha \cdot (0, 1)\} \cup \{\beta \cdot (1, 0)\}$

$(1, 1) \in \mathbb{R}^2$

$(1, 1) \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$

Donc, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 36. $\mathcal{U}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2 \cdot y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{U}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^3$, est-il un sous-espace vectoriel ?

• $x + 2 \cdot y - z = 0 \to x = z - 2 \cdot y$

$(x, y, z) \in \mathcal{U}_1 \iff (z - 2 \cdot y, y, z) = (z, 0, z) + (-2 \cdot y, y, 0) = z \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (-2, 1, 0) =$ *span*{ (1,0,1), (-2,1,0) } sont linéairement indépendants.

$\mathcal{U}_1 = span\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$

$\bullet 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z \rightarrow 2 \cdot x = 3 \cdot y - 3 \cdot z$

$(x, y, z) \in \mathcal{U}_2 \iff (3/2 \cdot (y - z), y, z) = (3 \cdot y - 3 \cdot z, 2 \cdot y, 2 \cdot z) = (3 \cdot y, 2 \cdot y, 0) + (-3 \cdot z, 0, 2 \cdot z) = y \cdot (3, 2, 0) + z \cdot (-3, 0, 2) = span$ { (1,0,-2/3), (0,1,1) }

$\mathcal{U}_2 = span\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} = \{(3, 0, 2), (0, 1, 1)\}$

$\bullet \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2 \cdot y - z = 0, 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot x + 6 \cdot y = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 5 \cdot x + 3 \cdot y = 0\}$

$x = -3/5 \cdot y$

$(x, y, z) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \iff (-3/5 \cdot y, y, 0) = y \cdot (-3/5, 1, 0)$

3.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ engendre $\mathcal{V}$ et si ils sont linéairement indépendants, alors $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ est appelé une **base** de $\mathcal{V}$.

Exemple 37. On a $\mathbb{R}^3 = span\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Cette famille est appelé la base canonique (standard) de $\mathbb{R}^3$.

La famille $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ est linéairement indépendant, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a $\mathbb{R}^3 = span\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Théorème 13. *Toute famille des vecteurs dans $\mathcal{V}$ qui engendre $\mathcal{V}$ peut être reduit à une base de $\mathcal{V}$.*

Théorème 14. *Soit $dim(\mathcal{V}) < \infty$. Soient $\mathcal{V} = span\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\} = span\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}\}$. Si les deux familles sont une base de $\mathcal{V}$ alors on a $k = m$.*

3.4.1 Dimension d'un espace vectoriel

Remarque. $\mathcal{V} = \text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 38. • $\mathbb{R}^2 = span\{(0, 1), (1, 0)\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

• $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = span\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Proposition 15. *Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel, si la dimension de $\mathcal{V}$ est finie, alors, la dimension de sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$ est finie.*

Définition 13. Le nombre des vecteurs dans une base d'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est la dimension de $\mathcal{V}$.

corollary .1. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. Soit la liste de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ une base de $\mathcal{V}$. Alors, Supposons que les vecteurs (**i**) $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}$ sont dans $\mathcal{P}$.

• Si $\mathcal{V}$=span$\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}\}$, alors, $p \geq k$

• Si $\mathcal{V}$=span$\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}\}$ et $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_p}$ sont linéairement indépendants, alors, on a $k = p$.

Autrement dit, il existe une base de $\mathcal{V}$ qui se compose de k éléments.

(**ii**) La dimension de $\mathcal{V}$ est k.

(**iii**) Si un ensemble qui contient k vecteurs linéairement indépendants engendre $\mathcal{V}$ alors cet ensemble est une base de $\mathcal{V}$.

(**iv**) Soit $E \subset \mathcal{V}$ tel que span$E$=$\mathcal{V}$ alors il existe une base B de $\mathcal{V}$ tel que $B \subset E$

Exemple 39. • La dimension d'espace $\mathbb{R}^n$ est n. Parce que, $\mathbb{R}_n$=span$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

• L'espace $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a dimension $n+1$. Parce que, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$=span$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

• span$\{\}$ a dimension zéro. Parce que l'ensemble vide est une base de $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$.

3.4.2 Intersection, réunion et la somme des espaces vectoriels

Définition 14. Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ sous-espaces de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{E}= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \ldots + \mathcal{U}_n = \{\vec{u_1} + \vec{u_2} + \ldots + \vec{u_n} | \vec{u_i} \in \mathcal{U}_i, \forall i\}$

Définition 15. Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}$ sous-ensembles. Si, pour tout $\vec{v} \in \mathcal{V}$, il existe unique $\vec{u}_i \in \mathcal{U}_i$ tel que $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n$, alors on dit que la somme $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \ldots + \mathcal{U}_n$ est dit la somme *directe* et elle est noté par $\mathcal{U}_1 \bigoplus \mathcal{U}_2 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathcal{U}_n$.

Définition 16. Si es ensembles $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ sont sous-ensembles de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \bigoplus \mathcal{U}_2$, alors $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont dit espaces *complémentaires.*

Remarque. Soient les ensembles $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ sont sous-espaces de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}$ ou $\mathcal{U}_2 = \mathcal{V}$, alors $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel.

Théorème 16. *Soit l'ensemble $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec dimension finie. Si l'ensemble $\mathcal{U}$, est un sous-espace de $\mathcal{V}$,*

• *alors l'ensemble $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel avec dimension finie.*

• *$dim\, \mathcal{U} \leq dim\, V$*

• *Il existe un sous-espace $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$, tel que $\mathcal{U} \bigoplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$*

Remarque. Soient les ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$, sous-espaces vectoriels de $\mathcal{V}$. Si les propriétés suivantes sont satisfait alors $\mathcal{V}$ est dit en somme directe et il est noté par $\mathcal{V} = \mathcal{U} \bigoplus \mathcal{W}$.

• $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$

• $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$

Exemple 40. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4 = <\mathrm{e}_1, e_2, e_3, e_4>$

$\mathcal{U} =< e_1, e_2 >$

$\mathcal{W} =< e_3, e_4 >$

dim $\mathcal{U}$=2

dim $\mathcal{V}$=2

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

Donc on a

$\mathcal{U} \bigoplus \mathcal{V} = \mathbb{R}^4$

Théorème 17. *Soient les ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ sous-espaces de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, alors dim($\mathcal{U} + \mathcal{W}$)= dim ($\mathcal{U}$) + dim($\mathcal{W}$)*

Dans le cas $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \{\vec{0}\}$;

dim($\mathcal{U} + \mathcal{W}$)= dim ($\mathcal{U}$) + dim($\mathcal{W}$) - dim($\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$)

corollary .2. • $\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \ldots + \mathcal{U}_m) \leq \dim \mathcal{U}_1 + \ldots + \dim \mathcal{U}_m$

• Si l'espace $\mathcal{V}$ est définie comme $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathcal{U}_n$,

On a l'égalité $\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \ldots + \mathcal{U}_m) = \dim \mathcal{U}_1 + \ldots + \dim \mathcal{U}_m$.

Chapitre 4

Transformation linéaire

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux espaces vectoriels, si l'application $T : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ satisfait les propriétés suivantes on dit que T est une **application linéaire** de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$: Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

(**i**) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

(**ii**) $T(\vec{u} + \vec{v})$=T()+T($\vec{v}$). Préservation de l'addition dans un certain sens.

(**iii**) T($\alpha\vec{u}$)= $\alpha \cdot T(\vec{u})$. Préservation de multiplication par scalaire.

Exemple 41. Supposons qu'on a $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ olsun. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(**i**) $(x, y) \longmapsto (x + 1, y + 1)$ n'est pas une application linéaire.

(**ii**) $(x, y) \longmapsto (x + y, y)$ est une application linéaire.

(**iii**) $(x, y) \longmapsto (x + 2y, 3y - x)$ est une application linéaire.

(**iv**) $(x, y) \longmapsto (x, x^2)$ n'est pas une application linéaire.

Exemple 42. Examinons plus en détail (**ii**) de l'exemple 52 .

T : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(x,y) $\longmapsto (x + y, y)$

(**i**) T($\vec{0}$)= $\vec{0}$

(**ii**) Soit $\vec{u} = (x_1, y_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2)$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont éléments de $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel, $\vec{u} + \vec{v}$ est aussi un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

T($\vec{u}$) = T((x_1, y_1)) = $(x_1 + y_1, y_1)$

T($\vec{v}$) = T((x_2, y_2)) = $(x_2 + y_2, y_2)$

T($\vec{u} + \vec{v}$)= T($x_1 + x_2, y_1 + y_2$) = $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2\ ,\ y_1 + y_2)$

T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$)= T((x_1, y_1)) + T((x_2, y_2)) = $(x_1 + y_1, y_1)$ +$(x_2 + y_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2\ ,\ y_1 + y_2)$

Évidemment on a l'égalité T($\vec{u} + \vec{v}$)= T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$) .

(iii) $\alpha\vec{u}$= $(\alpha x_1, \alpha y_1) \in \mathbb{R}^2$

T($\alpha\vec{u}$)= T($(\alpha x_1, \alpha y_1)$) $= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha y_1) = \alpha(x_1 + y_1, y_1)$= $\alpha \cdot T(\vec{u})$

Donc,l'égalite T($\alpha\vec{u}$)= $\alpha \cdot T(\vec{u})$ est satisfait.

Exemple 43. T : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(x$_1, x_2) \longmapsto (x_1, -x_2)$

est une **reflexion** qui est une application linéaire.

Exemple 44. T : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(x,y) $\longmapsto (-y, x)$

est une **rotation**, qui est une application linéaire.

Exemple 45. T : $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_2, x_1, x_3, x_4)$ est une **permutation**, qui est une application linéaire.

Exemple 46. Id : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. L'identité Id est une application linéaire qu'on appelle application ¨**identité**.

Exemple 47. f : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(x$_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2 + x_3)$

Projection est une application linéaire.

Exemple 48. g : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

(x,y) $\longmapsto (x, y, -x, -y)$

g est une application linéaire injective.

Exemple 49. T : $P_4(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$

P(x) $\longmapsto P'(x) = \frac{\partial P}{\partial x} = T(P(x))$

T(P(x))=$\frac{\partial P(x)}{\partial x}$= P'(x)

T(Q(x))=$\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$= Q'(x)

• T(P(x)+ Q(x))= $\frac{\partial P(x)+Q(x)}{\partial x}$= $\frac{\partial P(x)}{\partial x}$ +$\frac{\partial Q(x)}{\partial x}$ (la formule d'addition de dérives)

= P'(x) + Q'(x) = T(P(x))+ T(Q(x)). Donc l'addition est conservé.

• T($\alpha P(x)$)= $\frac{\partial P(\alpha \cdot x)}{\partial x}$ $= \alpha \cdot$ $\frac{\partial P(x)}{\partial x}$ $= \alpha \cdot T(P(x)$

Donc la multiplication par scalaire est conservé aussi.

Donc dérivation est une application linéaire.

4.0.1 Géométrie des transformations linéaires

4.0.2 Noyau et image d'une transformation linéaire

Définition 17. Soit T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire.Le noyau de T, est noté par N(T). (parfois appelé *kernel* et noté Ker(T).) Définie comme suivant :

Ker(T)= N(T)= $\{\vec{v} \in \mathcal{V} \| T(\vec{v}) = \vec{0}_w\}$

Autrement dit, le noyau, se compose des vecteurs de $\mathcal{V}$ qui sont associé à 0 par l'application linéaire T.

Exemple 50. Soit I : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ application identité.

I$(\vec{v}) = \vec{v}$

N(I)= $\{\vec{v} \in \mathcal{V} \| I(\vec{v}) = \vec{0}_v\} = \{\}$

Exemple 51. Soit T : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire.

(x.y.z) $\longrightarrow x + y + z$

N(T)= $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| T(x, y, z) = \vec{0}_R\}$

N(T)= $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| x + y + z = \vec{0}_R\}$

On peut voir que le noyau d'application linéaire T est le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$.

Remarque. Soit T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire. Le noyau de T, N(T), est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

Preuve. • $\vec{0_V} = (0, \ldots, 0) \in$N(T).

N(T)=$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V} \| T(x_1, \ldots, x_n) = \vec{0_W}\}$

Alors, $\vec{0_V} \in N(T)$

• $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in$ N(T)

T$(\vec{u_1}) = \vec{0_W}$ ve T$(\vec{u_2}) = \vec{0_W}$. Donc, $T(\vec{u_1}) + T(\vec{u_2}) = \vec{0_W}$.

Puisque T est une application linéaire $T(u_1 \vec{+} u_2) = \vec{0_W}$

• Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire et $\vec{u} \in$ N(T) un vecteur, $\alpha \cdot \vec{u} \in$ N(T).

$\alpha \cdot T(\vec{u}) = \alpha \cdot \vec{0_W} = \vec{0_W}$ ■

Définition 18. Soit l'application T : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}$ définie comme :

$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \ldots + x_n\vec{v_n}$

Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ est linéairement indépendants, $x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \ldots + x_n\vec{v_n}$=0 est satisfait si et seulement si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple 52. Soit T :$\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ une application linéaire définie comme :

T$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, x_3, 0, 0)$

Verifions si c'est vraiement une application linéaire et

N(T)= $\{(0, 0, 0, x_4, x_5\} \| x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

si N(T) est vrai.

• $\vec{0} \in \mathbb{R}^5$ tel que $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Par définition de T, T($\vec{0}$)= $\vec{0}$ est immédiat.

• Examinons si on a T($\vec{u} + \vec{v}$)= T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$).

Soient $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4.x_5)$ et $\vec{v} = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, x_4 + x'_4, x_5 + x'_5)$.

L'image de cette somme est,

T($\vec{u} + \vec{v}$)=T($(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, x_4 + x'_4, x_5 + x'_5$)= $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, 0, 0)$

La somme des images est ,

T($\vec{u}$) $+ T(\vec{v})$= T$(x_1, x_2, x_3, x_4.x_5) + T(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$

$= (x_1, x_2, x_3, 0, 0) + (x'_1, x'_2, x'_3, 0, 0)$

$= (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, 0, 0)$

T($\vec{u} + \vec{v}$)= T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$) est satisfait.

• Examinons si on aT($\alpha\vec{u}$)= $\alpha \cdot T(\vec{u})$.

Soit $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4.x_5)$.

La multiplication par α est $\alpha \vec{\cdot} u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4.\alpha x_5)$. L'image de cette multiplication est,

T($\alpha \vec{\cdot} u$) $= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4.\alpha x_5) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, 0, 0)$

D'autre part, $\alpha \cdot T(\vec{u}) = \alpha \cdot T(x_1, x_2, x_3, x_4.x_5)$

$=\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3, 0, 0) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, 0, 0)$

T($\alpha\vec{u}$)= $\alpha \cdot T(\vec{u})$ est satisfait.

$N(T) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^5 \| T(\vec{u}) = 0$

$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4.x_5) \in \mathbb{R}^5 \| T((x_1, x_2, x_3, x_4.x_5)) = 0\}$

$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4.x_5) \in \mathbb{R}^5 \| (x_1, x_2, x_3, 0, 0)\} = 0$

$= \{(0, 0, 0, x_4, x_5\} = \{x_4 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + x_5 \cdot (0, 0, 0, 0, 1)\}$

$= span\{(0, 0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 0, 1)\}$

Dans ce cas, on voit que l'espace de noyau N(T) est un espace dont la base est (0,0,0,1,0) et (0,0,0,0,1). Donc N(T) a dimension 2.

$dim(N(T)) = 2$ et $N(T) \subset \mathbb{R}^5$

Définition 19. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles et f : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ une fonction. f est dit **injective** si et seuelement si , quand on a x=y, on a l'égalité f(x)= f(y). Autrement dit, f est injective si et seulement si elle associe éléments différents aux éléments différents.

Remarque. Soit T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire.

T est injective si et seulement si N(T)=$\{0\}$.

Autrement dit, N(T) est le dégre d'injectivité de T.

Preuve. Supposons que N(T) = $\{0\}$. Soient $x, y \in V$ tels que $T(x) = T(y)$. Alors on a

$T(x) = T(y)$

$T(x) - T(y) = 0$ et par la propriété des applications linéaires

$T(x - y) = 0$, ce qui implique que $x - y \in N(T)$. D'où $x - y = 0$ et par consequant $x = y$. On a supposé que $T(x) = T(y)$ et montré que $x = y$ donc on peut conclure que T est injective.

Maintenant supposons que T est injective. On a déjà $0 \in N(T)$ donc il suffit de montrer il n'existe pas d'autre élément dans N(T). Supposons qu'il existe $v \in N(T)$ non-zéro. Alors on a T(0) = T(v) = 0 lorsque $v \neq 0$. Ce qui contradit le fait que T est injective. Donc notre hypothése , il existe v non zero dans N(T) est fausse. Par consequant on a N(T) = $\{0\}$ ■

4.1 La Représentation Matricielle des Applications Linéaires

Il est possible de représenter les applicatios linéaires avec les matrices.

Définition 20. Soit $\mathbb{M}$ une matrice de taille $m \times n$. On définit T :$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ comme une application. Alors, T(x)=$\mathbb{M} \cdot x$.. Donc, T est une application linéaire.

On peut également acquérir une matrice à partir d'une transformation linéaire . Avant de montrer des examples il faut rappeler quelques propriétés des matrices :

Remarque. Supposons que $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $u \vec{+} v$. Autrement dit ;

$$\left[u + v\right]_i \quad = \quad \left[u\right]_i \quad + \quad \left[v\right]_i \qquad , \ 1 \leq i \leq m$$

Remarque. Supposons que $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La multiplication scalaire de vecteur $\vec{u}$ avec le scalaire α est le vecteur $\alpha\vec{u}$. Autrement dit ;

$$\left[\alpha u\right]_i \quad = \quad \alpha \cdot \left[u\right]_i \qquad , \ 1 \leq i \leq m$$

Remarque. Soit $\mathbb{M}$ une matrice de taille mxn et $\vec{u}$, une vecteur avec n composantes. La matrice-vecteur multiplication de $\mathbb{M}$ avec $\vec{u}$ est définie comme la combinasion linéaire :

$$\mathbb{M}u = \left[u\right]_1 \mathbb{M}_1 \quad + \quad \left[u\right]_2 \mathbb{M}_2 \quad + \quad \dots \quad + \quad \left[u\right]_n \mathbb{M}_n$$

Exemple 53. Soit l'application T :$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie comme :

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) \quad = \quad \begin{bmatrix} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ 8x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

Représantons cette application sous la forme matricielle comme dans la Définition 24.

$$\begin{bmatrix} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\ 8x_1 - 2x_3 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 3x_1 \\ -x_1 \\ 8x_1 \end{bmatrix} \quad + \quad \begin{bmatrix} 4x_2 \\ x_2 \\ 7x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad + \quad \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ 2x_3 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \quad x_1 \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad + \quad x_2 \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad + \quad x_3 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Donc, on a obtenue la forme T(x)=$\mathbb{M} \cdot x$. D'où on peut deduire que T est une application linéaire.

Exemple 54. Soit I définie comme : I : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{u} \longmapsto \vec{u}$

Soit le vecteur $\vec{u}$ =$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matrice identité est définie comme :

$$\mathbb{M}(I) = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{nxn} \quad \cdot \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

Exemple 55. Soit F : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y, z) \longmapsto (x - 2z, x - 3y, y, x)$

• Trouvons le noyau de F.

N(F)= $\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \| F(v) = 0_V\}$

N(F)= $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| F(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4}\}$

$0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) = (x - 2z, x - 3y, y, x)$ Donc, les équations

$x - 2z = 0$

$x - 3y = 0$

$y = 0$ et $x = 0$ sont acquis.

Si on resout les équation ci-dessus, on obtient la solution $x = y = z = 0$.

Donc, N(F)= $\{(0, 0, 0, 0)\}$

• Deuxièmement, examinon la représentation matricielle de F.

$$\mathbb{M}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Définition 21. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels, On peut décrire l'ensemble de tout les applications linéaires possibles de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$. On appelle cet ensemble $\mathcal{L}$(V,W). Autement dit,

$\mathcal{L}$(V,W)=$\{T \| T : V \longrightarrow W$ est linéaire $\}$

Rappelons l'addition et la multiplications par scalaire définies sur les éléments de $\mathcal{L}$(V,W).

Remarque. Addition des applications linéaires :

Soient T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et S :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ deux applications linéaires. Donc, leur somme est la fonction T+S :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et noté comme :

(T+S)($\vec{u}$) = T($\vec{u}$) + S($\vec{u}$)

Remarque. Multiplication par scalaire des application linéaires :

Soit T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ Une application linéaire. Si on a $\alpha \in \mathbb{R}$, multiplication par scalaire α est la fonction αT :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et définie comme :

$(\alpha T)(\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

Examinons les théorème s qui établilissent le fait que les applications obtenues par cette opérations sont aussi dans $\mathcal{L}$(V,W) :

Théorème 18. *La somme des applications linéaire est une application linéaire*

Soient T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et S :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ deux applications linéaires. Alors, leur somme $T+S$:$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est une application linéaire.

Preuve. Il faut vérifier les propriétés des applications linéaires.

Vérifions si (T+S)(0) = 0

(T+S)(0) = T(0) + S(0) = 0 + 0 = 0

Vérifions si pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$ on a : (T+S)($\vec{u} + \vec{v}$) = (T+S)($\vec{u}$) + (T+S)($\vec{v}$)

On a : (T+S)($\vec{u}+\vec{v}$) = T($\vec{u}+\vec{v}$) + S($\vec{u}+\vec{v}$) = T($\vec{u}$) + T($\vec{v}$) + S($\vec{u}$) + S($\vec{v}$) = T($\vec{u}$) + S($\vec{u}$) + T($\vec{v}$) + S($\vec{v}$) = (T+S)($\vec{u}$) + (T+S)($\vec{v}$)

Vérifions si pour le scalaire α on a (T+S)($\alpha \cdot \vec{u}$) = α(T+S)($\vec{u}$)

On a : (T+S)($\alpha \cdot \vec{u}$) = T($\alpha \cdot \vec{u}$) + S($\alpha \cdot \vec{u}$) = αT($\vec{u}$) + αS($\vec{u}$) = α(T($\vec{u}$) + S($\vec{u}$))=α(T+S)($\vec{u}$)
Donc T+S est une application linéaire ■

Théorème 19. *Multiplication scalaire d'une application linéaire est une application linéaire*

Soit T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ bir une application linéaire. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la multiplication par scalaire αT :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est aussi une application linéaire.

La preuve est une bonne excercise.

Théorème 20. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ espaces vectoriels. Si on définit l'addition et la multiplication par scalaire comme ci-dessus ; L'ensemble de toutes les applications linéaires de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(V, W)$, est un espace vectoriel.*

Il suffit de vérifier les propriétés des espaces vectoriels.

Définition 22. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles et f :$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ une fonction. f est surjective si et seulement si pour tout $b \in \mathcal{B}$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $f(a) = b$ Autrement dit, f est surjective si et seuelement si on a f($\mathcal{A}$)=$\mathcal{B}$.

Définition 23. Soit T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire. L'ensemble d'image de cette application linéaire est définit comme suivant :

IM(T)= $\{Tv \| v \in V\}$

Autrement dit, l'ensemble d'image Im(T) , est tout les éléments d'ensemle d'arrivée qui sont associés . T($\mathcal{V}$)= Im(T)

Remarque. Soit T :$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire. Autrement dit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors l'image de T , Im(T), est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$.

Preuve. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels. Soit T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire. Vérifions si Im(T) satisfait les propriétés des sous-espaces.

(i) T($\vec{0}_V$)= $\vec{0}_W \in G(T)$

(ii) Soient $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$, éléments de Im(T). Alors, ils existent $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ tels que T($\vec{v_1}$) = $\vec{w_1}$ et T($\vec{v_2}$) = $\vec{w_2}$. Alors, puisque $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel on a aussi $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$. Donc T($\vec{v_1}$) + T($\vec{v_2}$)= T($\vec{v}_1 + \vec{v}_2$) = $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ ∈Im(T) (**iii**) Similairement, si $\vec{w}$ ∈Im(T), il existe $\vec{v} \in \mathcal{V}$ tel que $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Alors, pour α scalaire, on a $\alpha \cdot \vec{w} = \alpha \cdot$T$(\vec{v})$ =T$(\alpha \cdot \vec{v})$ ∈Im(T).

Donc Im(T) est un sous-espace de $\mathcal{W}$ ■

Remarque. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ espaces vectoriels,

Soit T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application. T est surjective si et seuelement si image de T , Im(T), est égal à $\mathcal{W}$.

Remarque. Soit l'ensemble $\mathcal{Z}$ un sous-espace de $\mathcal{W}$.

Alors, l'ensemble $T^{-1}(\mathcal{Z}) = \{v \in \mathcal{V} \| T(v) \in \mathcal{Z}\}$ est un sous-espace de $\mathcal{V}$.

Plus précisément, si $\mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$, alors $T^{-1}(\mathcal{Z}) = N(T)$

Définition 24. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ espaces vectoriels et T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire.

La dimension du noyau de T est dit la nullité et noté par nullity(T).

La dimension d'image de T est dit le rang et noté par rang(T) ou bien parfois par rg(T).

Remarque. L'application nulle est la seule application dont le rang est zéro .

Exemple 56. Soit T$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, x_3, 0, 0)$ une application. Trouvons l'image, Im(T), et le noyau ,N(T), de T , examinons leurs dimensions.

N(T)= $\{x_4(0, 0, 0, 1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1)\}$

= span $\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$

dim(N(T))= 2

G(T)= $\{(x_1, x_2, x_3, 0, 0) \| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

=$\{x_1(1, 0, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 0, 0, 1)\}$

= span $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}$

dim(G(T))=3

Le rang est une mesure des informations conservées(ou bien le degré de liberté) par l'application. .

Pour cet exemple, bien qu'on a perdu deux degrés de liberté par T, on a aussi conservé trois degrés de liberté .

Théorème 21. *Théorème de rang :*

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels de dimension finie et T : $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une application linéaire. Dans ce cas,

dim($\mathcal{V}$) = $dim(N(T)) + dim(G(T))$= nullity(T) + rank(T)

Remarque. • Si dim $\mathcal{V}$ < dim $\mathcal{W}$, alors l'application T n'est pas surjective.

• Si dim $\mathcal{V}$ > dim $\mathcal{W}$, alors l'application T n'est pas injective.

Exemple 57. Soit T : $P_5(\mathbb{R}) \longrightarrow P_4(\mathbb{R})$ application de dérivé.

T(f)=$\frac{\partial f}{\partial x}$

D'abord, montrons que T est une application linéaire.

(**i**) T(0)= $\frac{\partial 0}{\partial x}$= 0

(**ii**) T(f+g)= $\frac{\partial (f+g)}{\partial x}$= $\frac{\partial f}{\partial x}$ + $\frac{\partial g}{\partial x}$=T(f)+T(g).

(**iii**) T(αf)= $\frac{\partial \alpha f}{\partial x}$= $\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ =$\alpha \cdot T(f)$.

Donc, T est une application linéaire.

Deuxièmement, examinons le noyau et sa dimension. Le noyau de T se compose des polynômes de $\mathcal{P}_5$ dont la dérivé est zéro. Ces polynômes sont constants. Donc,

N(T)= $\{c \| c \in \mathbb{R}\}$

dim(N(T))= 1

Trosièmement, examinon l'image Im(T) et sa dimension.

G(T)= $\{Q(x) \in P_4(\mathbb{R}) \| \exists P(x), \frac{\partial P(x)}{\partial x} = Q(x)\} = P_4(\mathbb{R})$

dim($P_4(\mathbb{R})$)= 5

A partir du théorème de rang, on peut voir que la dimesion de l'espace d'image est 5. Mais l'espace Im(T) est un sous-espace de $P_4(\mathbb{R})$ et $P_4(\mathbb{R})$ a dimension 5. Donc Im(T) doit être égal à $P_4(\mathbb{R})$. Autrement dit, on peut conclure que l'ensemble des polynômes dont le degré est plus petit ou égal à 4, il est construit par la dérivé des polynômes dont le degré est plus petit ou égal à 5.

4.1.1 Projection

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. Soit $p : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ une application linéaire.

Si on a $p \circ p = p$ alors p est une **projection**

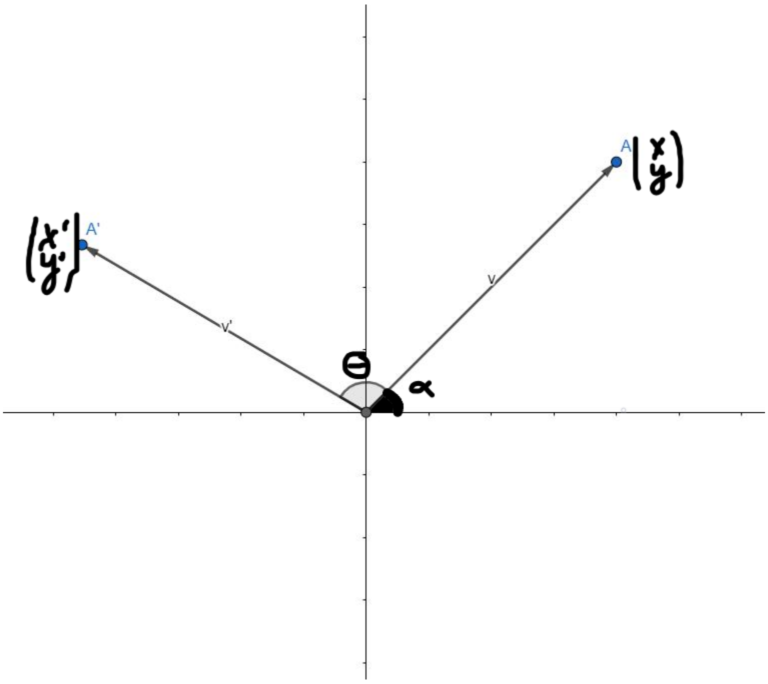
Exemple 58.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, montrez que l'application $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est une application linéaire.
2. Trouvez sa matrice représentante dans la base canonique.
3. Montrez que cette transformation est une projection

Exemple 59. Montrez que, dans $\mathbb{R}^3$, la transformation $(x, y, z) \mapsto (x, 0, z)$ est une application linéare. Trouvez sa matrice. La transformation , est-elle une projection ?

4.1.2 Rotation

Nous voulons décrire la transformation obtenue en faisant tourner un point $A(x, y)$ autour de l'origine avec un angle θ(rotation antihoraire) donné.



On peut éxprimer les cordonnés de point A en utilisant son angle et sa longeur. Supposons que le vecteur $\vec{v}$ qui indique le point A a la longeur r et l'angle α. Alors on peut deduire que $x = rcos(\alpha)$ et $y = rsin(\alpha)$. Donc $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos(\alpha) \\ rsin(\alpha) \end{pmatrix}$

De même façon, si on veut éxprimer son image A' sous cette rotation, on a :

$A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos(\alpha + \theta) \\ rsin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$

On utilise les formules de somme d'angles de la trigonométrie.

$$
\begin{aligned}
A' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos(\alpha + \theta) \\ rsin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r(cos(\alpha)cos(\theta) - sin(\alpha)sin(\theta)) \\ r(sin(\alpha)cos(\theta) + sin(\theta)cos(\alpha)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (rcos(\alpha)cos(\theta) - rsin(\alpha)sin(\theta)) \\ (rsin(\alpha)cos(\theta) + sin(\theta)rcos(\alpha)) \end{pmatrix} \ (\ Remplaçons\ rcos(\alpha) and\ rsin(\alpha)) \\
&= \begin{pmatrix} (xcos(\theta) - ysin(\theta)) \\ (ycos(\theta) + sin(\theta)x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc la matrice representante de rotation antihoraire par l'angle θ est $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Exemple 60. Soit R_θ l'application linéaire de rotation antihoraire par θ. Montrez que $R_{\theta+\alpha}(\vec{x}) = R_\theta(R_\alpha(\vec{x})) = R_\alpha(R_\theta(\vec{x}))$

C'est-à-dire, le faire tourner de $(\theta+\alpha)$ degrés revient à le faire tourner de (α) degrés puis le faire tourner de (θ) degrés ou θ degrés puis α degrés.

4.1.3 Symètrie

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. Soit $s : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ une application linéaire.

Si on a $s \circ s = s$ alors s est une **symètrie**

Exemple 61. Dans $\mathbb{R}^2$, trouvez la transformation qui correspond à symètrie par rapport à l'axe des x. C'est-à-dire la transformation qui envoie (x, y) à sa symètrie par rapport à la droit $y = 0$. Montrez que cette fonction est une application linéaire. Trouvez sa matrice representante A. Montrez que cette transformation vérifie la définition de symètrie donné au-dessus en utilisant A.

Remarque. Bien que elles soient similaires, les notions de symètrie, rotation et projection dans l'algèbre linéaire ne sont pas éxactement les mêmes que celles dans la géometrié analytique. Parce que symètrie par rapport à une droite qui ne passe pas par l'origine, disons $x = 1$, n'est pas une application linéaire, elle ne fixe pas (0,0).$(0,0) \mapsto (0,2)$

4.1.4 Matrice d'une transformation linéaire

Étant donné une application linéaire, on veut trouver la matrice correspondante.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension k muni d'une base $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ et soit $\mathcal{U}$ un espace vectoriel de dimension m muni d'une base $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Soit encore $T : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ une application linéaire. On appelle matrice de T dans les bases B et B' la matrice à m lignes et k colonnes dont la i-ème colonne est constitué par les coordonnées de $T(e_i)$ dans la base B' :

$$\begin{array}{c} T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_k) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 62. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie comme $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z)$. Écrivons la matrice de T dans la base canonique.

$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$

$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$

$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$ Donc la matrice de T dans la base canonique,

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.5 Matrice de passage d'une base dans une autre

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et d'une base $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. On dit que la matrice de passage de B_1 à B_2 est la matrice carrée dont la i-ième colonne est écrit par les cordonnées de y_i dans la base B_1.

Exemple 63. Dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de passage de la base canonique à la base $((3, 4), (1, 5))$ est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Proposition 22. *Soit $\vec{v}$ une vecteur de $\mathcal{V}$, soient X_1 sa cordonnés dans B_1 , X_2 sa cordonnées dans B_2 et $P_{B_1B_2}$ la matrice de passage d B_1 à B_2 alors on a :*

$X_1 = P_{B_1B_2} X_2$

et par consequant la matrice de passage de B_2 à B_1 , $P_{B_2B_1}$ est égal à $(P_{B_1B_2})^{-1}$.

Exemple 64. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

1. Montrez que B_2 constitue une autre base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouvez la matrice de passage de B_1 à B_2, $P_{B_1B_2}$.
3. Soit v un vecteur avec cordonnés (3,1,-5) dans la base B_2. Trouvez ses cordonnés dans la base canonique en utilisant $P_{B_1B_2}$

4.1.6 Matrices semblables

Soient A et B deux matrices. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in M(n,\mathbb{R})$ telle que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ ou bien $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$

Remarque. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

Exemple 65. $B_2 = \{(2,-1),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Supposons que $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{B_2}$ la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ par rappor à la base B_2.

Soit B_1 la base canonique. Écrivons la matrice de passage de B_1 à B_2.

$(2,-1) = 2e_1 - e_2$
$(1,1) = e_1 + e_2$

Donc $P = P_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ D'òu on obtient $P^{-1} = P^{-1}_{B_2B_1} = P_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1}_{B_2B_1} \cdot M_{B_2} \cdot P_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = M_{B_1}$

Donc M_{B_1} et M_{B_2} sont semblables.

Définition 25 (Matrices Triangulaires)**.** Soit $A_{n\times n}$ une matrice. On dit que A est triangulaire inférieure si pour tout $i < j$ on a $a_{ij} = 0$, autrement dit si les composantes au-dessus de la diagonale sont c'est-à-dire : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

On dit que $B_{n\times n}$ est une matrice supèrieure si les composantes en dessus de la diagonale sont nuls. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 23. *Une matrice de taille $n \times n$ triangulaire est inversible si et seuelement si les coefficients diagonaux sont tous non-nulls.*

Définition 26 (La trace)**.** La somme des coefficients sur la diagonale de matrice A est la trace de A. Noté par trace(A) ou bien tr(A). Donc,

$\text{trace}(A) = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Exemple 66. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Alors trace(A) = 1-2 = -1

Théorème 24. *Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors on a les propriétés suivantes*

1. *tr($A + B$) = tr(A) + tr(B)*
2. *tr($\alpha \cdot A$) = α·tr(A)*
3. *tr(A) = tr(A^t)*
4. *tr(AB) = tr(BA)*

Définition 27. Soit $A_{n\times n}$ une matrice. A est dit symètrique si $A = A^t$

Exemple 67. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Alors $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Donc A est symètrique.

Théorème 25. *Soit A une matrice. Alors AA^t et A^tA sont symètriques.*

Preuve. On a déjà montré que $(AB)^t = B^tA^t$. Donc on utilise cette propriété pour AA^t.

$(AA^t)^t = (A^t)^t \cdot (A^t) = AA^t$ La matrice et sa transpose sont égaux. Par définition AA^t est symètrique. Il suffit de utiliser le même raisonnement pour A^tA ■

Théorème 26. *Tout matrice $A_{n\times n}$ est la somme d'une matrice symètrique B et d'une matrice anti-symètrique C.*

$A = B + C$

(Indication :Est-ce que $\frac{A+A^t}{2}$ symètrique ou anti-symètrique ? Que de $\frac{A-A^t}{2}$?)

Théorème 27. *Soit A une matrice de taille $n \times n$. On a les affirmations suivantes.*

i. A est semblable à A.
ii. Si A est semblable à B, alors B est semblable à A.
iii. Si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C

iv. *Si A est semblable à B alors det(A) = det(B)*
v. *Si A est semblable à B alors tr(A) = tr(B)*
vi. *Si A est semblable à B alors A^k est semblable à B^k pour tout $k \in N^*$*
vii. *Si A est semblable à B alors A est inversible si et seulement si B est inversible. Dans ce cas A^{-1} est semblable à B^{-1}*
*C'est-à-dire la trace, le determinant et l'inversibilité sont **invariants** sous la similarité des matrices.*

Preuve. On montre $(iv), (v), (vi)$.

(iv) : On a $B = P^{-1}AP$ alors,

$$\begin{aligned} det(B) &= det(P^{-1}AP) \\ &= det(P^{-1})det(A)det(P) \\ &= det(A)det(P^{-1})det(P) \\ &= det(A)det(P)^{-1}det(P) \\ &= det(A) \end{aligned}$$

(L'étudiant(e) peut preuver $det(P^{-1}) = det(P)^{-1}$)

(v) : On a $B = P^{-1}AP$ et on a dit que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ alors,

$$\begin{aligned} tr(B) &= tr(P^{-1}AP) \\ &= tr((P^{-1}A)P) \\ &= tr(P(P^{-1}A)) \\ &= tr((PP^{-1})A) \\ &= tr(A) \end{aligned}$$

(vi) : On a encore $B = P^{-1}AP$. On utilise raisonnement par récurrence. Pour $k = 1$, le resultat est immediate. Donc vérifions $k = 2$. Si $B = P^{-1}AP$ alors,

$$\begin{aligned} B^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= (P^{-1}A)(PP^{-1})(AP) \\ &= (P^{-1}A)(AP) \\ &= (P^{-1}A^2P) \end{aligned}$$

Alors par récurrence supposons que A^k est semblable à B^k, pour $k + 1$ on a :

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= BP^{-1}A^kP \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}A^kP) \\ &= (P^{-1}A)(PP^{-1})(A^kP) \\ &= (P^{-1}A)(A^kP) \\ &= (P^{-1}A^{k+1}P) \end{aligned}$$

■

Chapitre 5

Déterminant

Afin de bien établir le déterminant, on va introduire quelques notions qu'on va utiliser.

Définition 28. Soit $S = \{1,2,\ldots,n\}$ un ensemble de n éléments. On définit $\sigma : S \to S$, si σ est une bijection, alors elle est dite une permutation.

Exemple 68. $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \ldots, \sigma(n) = 1$

Parfois, pour brièveté , on écrit cette permutation en utilisant la notation suivante.

$\sigma = (23\ldots n1)$

On écrit à $\sigma(i)$ à i-ième place.

Définition 29. L'ensemble des toutes les permutations d'un ensemble de n éléments est noté par S_n

Exemple 69. L'ensemble E=$\{1,2\}$ admet

$\sigma_1 = (12)$ et $\sigma_2 = (21)$

Donc $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$

Exemple 70. Soit $S = \{1,2,3\}$. Les permutations de S sont suivantes :

$\sigma_1 = (123)$, $\sigma_2 = (213)$, $\sigma_3 = (132)$, $\sigma_4 = (312)$, $\sigma_5 = (321)$, $\sigma_6 = (231)$.

Donc $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$

Remarque. L'ensemble $S = \{1,2,\ldots,n\}$ admet $n!$ permutations (Indication : Avec combien d'éléments pouvez-vous associer 1 ? En supposant que vous avez déjà associé 1 avec un élément, combien d'options restent pour 2 ? Combien pour 3 ? etc)

Définition 30. Soit $\sigma \in S_n$, Si dans σ, un nombre plus grand vient avant un nombre plus petit, on dit que σ admet une inversion.

Exemple 71. $\sigma = (213)$ admet une inversion parce que 2 vient avant 1.

Pour $\sigma \in S_5$, supposons que $\sigma = (52134)$. 5 vient avant 2,1,3 et 4. D'où on obtient 4 inversions. De plus, 2 vient avant 1 aussi. Mais 3 et 4 sont plus grands que 2, donc ça fait seuelement 1 inversion. Par consequant,

inversion(σ) = 4 + 1 = 5

Supposons maintenant $\sigma = (613452)$. On obtient 5 inversions avec 6, 1 inversion avec 3, 1 inversion avec 4, 1 inversion avec 5. Donc inversion(σ) = 5 + 1 + 1 + 1 = 8

Définition 31. Une permutation σ qui a un nombre pair d'inversions est dite permutation paire, si σ admet un nombre impaire d'inversions alors σ est une permutation impaire. La fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \sigma \texttt{ est paire} \\ -1 & \sigma \texttt{ est impaire} \end{cases}$ est dite la signature de σ

Lemme 28. *Soit* $S = \{1, \ldots, n\}$. $n \geq 1$. *Soit* $\sigma \in S_n$. $i < j$, $i, j \in S$

$\sigma' = (\sigma(1), \ldots, \sigma(i-1), \sigma(j), \sigma(i+1), \ldots, \sigma(j-1), \sigma(i), \sigma(j+1), \ldots, \sigma(n))$. *C'est-à-dire on echange l'image de i avec celle de j pour creer une nouvelle permutation.*

Alors on a sign(σ) = - sign(σ')

Exemple 72. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $\sigma = (3214)$. Alors inversion(σ) = 2 + 1 = 3.Donc sign(σ) = -1. Éxaminons ce qui se passe si on échange 1 et 4.

σ' =(3241), inversion(σ') = 1+1 = , sign(σ') = 1

Exemple 73. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ un produit des éléments de matrice A est un produit des coefficients de A qui ne sont ni dans la même colonne ni dans la même ligne.

Par exemple $a_{11}a_{22}a_{33}$ est un produit des éléments. Et on y associe la permutation $\sigma_1 = (123)$.(Regardez les indices !) Notez que inversion(σ_1) = 0. Donc sign(σ) = 1..

On associe le produit $a_{13}a_{21}a_{32}$ à $\sigma_2 = (312)$ qui a sign(σ_2) = -1.

$a_{12}a_{23}a_{31}$: σ_3, sign(σ) = 1

etc, on peut associer à chaque produit , une permutation et par consequant une signature.

Alors, on peut maintenant définir concrètement le determinant

Définition 32. Le determinant de la matrice A est le nombre obtenue par $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$

où $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, également l'on peut le définir comme :

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$

Théorème 29. *Si A admet une ligne dont les coefficents sont tous nulls, on a det(A) = 0.*

Preuve. Par définition, chaque produit élémentaire contient un élément de la ligne contenant zéros. Donc chaque terme de la somme est zéro. Donc $\det(A) = 0$. ■

Théorème 30. *Soit A une matrice triangulaire inférieure(ou supérieure). Le det(A) est égal au produit $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$*

Preuve. Pour une telle matrice, le seul produit élémentaire non-zéro est $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ ■

Théorème 31. *Si A est une matrice ayant deux lignes égales alors, det(A) = 0.*

Preuve. Les produits élémentaires de A apparraissent deux fois avec deux signes opposés. D'où $\det(A) = 0$ ■

Théorème 32. *Soit A une matrice de taille $n \times n$. Soit E une matrice élémentaire.*

Si E est obtenue en échangeant les lignes i et j alors on la note par $E_{i\leftrightarrow j}$.

Si E est obtenue en multipliant la ligne i avec k, on la note $E_{k(i)}$.

Si E est obtenue par $L_i \leftarrow L_j + k \cdot L_i$ on la note $E_{j+k\cdot i}$.

Alors on a les affirmations suivantes

1. *det($E_{k\cdot i}$) = k*
2. *det($E_{k\leftrightarrow i}$) = -1*
3. *det($E_{j+k\cdot i}$) = 1*
4. *det(EA) = det(E)det(A)*

Théorème 33. *Pour les matrices carrées A et B on a det(AB) = det(A)det(B).(Indication :Utilisez les matrices élémentaires.)*

Théorème 34. *Soit $A_{n\times n}$ alors A est inversible si et seulement si det(A)$\neq 0$*

Preuve. Supposons que A est une matrice inversible. A est inversible si est seulement s'il existe matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_r$ telles que $A = E_1E_2\dots E_rI_n$ alors,

$$\begin{aligned}
A &= E_1E_2\dots E_rI_n \\
det(A) &= det(E_1E_2\dots E_rI_n) \\
&= det(E_1)det(E_2)\dots det(E_r)det(I_n)
\end{aligned}$$

On sait que le determinant d'une matrice élémentaire est non-zéro, donc le côté droit est non-zéro, d'où le côté gauche est non-zéro.

Réciproquement, si on suppose que A n'est pas inversible, la forme échellonne reduit A' de A admet une ligne des zéros, alors similairement il existe $E_1, E_2, \ldots, E_r$ telles que $A = E_1E_2 \ldots E_rA'$ donc on a :

$$\begin{aligned} A &= E_1E_2 \ldots E_rA' \\ det(A) &= det(E_1E_2 \ldots E_rA') \\ &= det(E_1)det(E_2) \ldots det(E_r)det(A') \\ &= det(E_1)det(E_2) \ldots det(E_r).0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.1 Calcul de l'inverse - Méthode III

Remarque. Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$ parce que, 1=$\det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1})$ $= \det(A)\det(A^{-1})$

■

Remarque. En utilisant les matrices élémentaires, le résultat $\det(A) = \det(A^t)$ est immédiat.

5.2 La règle de Cramer

Théorème 35. *Soit $A{\cdot}\vec{x} = \vec{b}$ un système linéaire définie comme suivant :* $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$

Alors on a $x_i = \frac{|B_i|}{\mathtt{det}(A)}$, où B_i est la matrice obtenue par A en remplaçant i-ième colonne par $\vec{b}$.z

Preuve. Notons $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . & & \\ . & . & \ldots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, alors on a :

$$x_i \cdot \mathtt{det}(A) = x_i \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . & & \\ . & . & \ldots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & x_ia_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & x_ia_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . & & \\ . & . & \ldots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & x_ia_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Maintenant on fait $C_i \leftarrow C_i + x_j \cdot C_j$ pour tout $j \neq i$, et on obtient :

$$x_i \cdot \mathtt{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & & \\ . & . & \dots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Mais, on sait que $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$, donc

$$x_i \cdot \mathtt{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & & \\ . & . & \dots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & & \\ . & . & \dots & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B_i|$$

Donc $x_i = \frac{|B_i|}{\mathtt{det}(A)}$

■

Définition 33. Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ une matrice. On appelle mineur d'un élément a_{ij} le déterminant de la sous-matrice obtenue en éliminant la i-ième ligne et j-ième colonne de A. On note mineur$(a_{ij}) = M_{ij}$

Exemple 74. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Alors mineur$(a_{21}) = M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Définition 34. On appelle cofacteur d'un élément a_{ij} le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Exemple 75. $C_{21} = (-1)^{(2+1)} M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Théorème 36. *Le déterminant est obtenue par la formule det(A)* $= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ *qui est dite le dèveloppement par rappor à la i-ième ligne.*

Ou bien, le déterminant est aussi obtenue par det(A) $= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$ *qui est dite le dèveloppement par rapport à la j-ième colonne.*

Vous voyez qu'il est permis de choisir n'importe quelle ligne ou colonne. Généralement, il est plus efficace de choisir la ligne ou la colonne qui contient le plus des zéros.

Exemple 76. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Choissions deuxième ligne. On a $\det(A) =$ -4.$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $+$ 2.$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ -1.$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $=$ -4.-1 $+$ 2.1 -1.1 $=$ 4+2-1 $=$ 5