Avances de la tesina

Isaí E. Dávila Cuba

28 de junio del 2021

Modelo abeliano de Higgs

$\phi : \mathbb{R}^{2+1} \to \mathbb{C}$ es un campo escalar complejo acoplado al campo electromagnético mediante acoplamiento mínimo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi\overline{D^\mu\phi} - \frac{\lambda}{8}(1 - |\phi|^2)^2 \tag{1}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\lambda}{2}(1 - |\phi|^2)\phi = 0 \tag{2}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{3}$$

donde $J^\mu = \frac{i}{2}(\bar{\phi}D^\mu\phi - \phi\overline{D^\mu\phi})$. Buscamos soluciones estáticas y con energía finita. Definimos el funcional de energía V_λ

$$V_\lambda = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(B^2 + D_i\phi\overline{D_i\phi} + \frac{\lambda}{4}(1 - |\phi|^2)^2\right)d^2x \tag{4}$$

Condiciones de contorno en el infinito ($|\vec{\mathbf{x}}| \to \infty$) para que V_λ sea finita

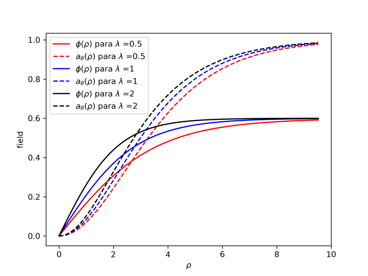
$$|\phi| \to 1 \tag{5}$$
$$B \to 0 \tag{6}$$
$$D_i\phi \to 0 \tag{7}$$

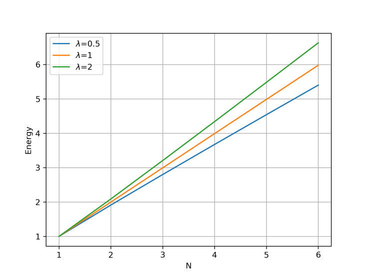
Estas condiciones de contorno y simetría permiten escribir el *ansatz* de Nielsen-Olesen o vortices radiales

$$\phi(\rho, \theta) = f_N(\rho)e^{iN\theta} \tag{8}$$
$$A_\theta(\rho, \theta) = N\alpha_N(\rho) \tag{9}$$
$$A_\rho = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2 f_N}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df_N}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}(N - \alpha_N)^2 f_N + \frac{\lambda}{2}(1 - f_N^2)f_N = 0 \tag{11}$$
$$\frac{d^2\alpha_N}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d\alpha_N}{d\rho} + (N - \alpha_N)f_N^2 = 0 \tag{12}$$

Soluciones numéricas





Gráficas de los campos y de la energía obtenidos numéricamente en Python.

Vórtices críticos

Completamos cuadrados a la Bogomolny y obtenemos un límite inferior para el funcional de energía para $\lambda = 1$.

$$V_{\lambda=1} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(B - \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2) \right)^2 + |D_1\phi + iD_2\phi|^2 \right] d^2x + \pi N \tag{13}$$

$$V_{\lambda=1} \geq \pi N \tag{14}$$

El límite se satura si ϕ satisface las ecuaciones de Bogomolny

$$\begin{cases} D_1\phi + iD_2\phi = 0 \\ B = \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2) \end{cases} \tag{15}$$

La primera ecuación se puede escribir como una condición de analiticidad análoga a las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$D_{\bar{z}}\phi = 0 \tag{16}$$

Escribiendo $f = e^{-\omega}\phi$, se puede mostrar que $\partial_{\bar{z}} f = 0$ si $\partial_{\bar{z}}\omega = iA_{\bar{z}}$. Por lo tanto, si podemos encontrar una solución para ω, la función f es analítica. La solución está dada por la fórmula de Cauchy-Pompeiu para $A_{\bar{z}} = 0$ en el borde de D.

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{iA_{\bar{z}}}{z-u} d\bar{u} \wedge du \tag{17}$$

Como f es analítica, tiene ceros aislados y cerca de los ceros

$$f \sim c_j(z - z_j)^{n_j}, \quad n_j \in \mathbb{N} \tag{18}$$

Estos ceros corresponden a los ceros de ϕ también, pues $e^{-\omega} \neq 0$. z_j no son otra cosa que los centros de los vórtices donde $B = 0$.

Reducción a la ecuación de Taubes

Una vez que se conoce una solución ϕ, el campo de gauge queda determinado por

$$A_z = i\partial_z \log \bar{\phi}, \quad A_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}} \log \phi \tag{19}$$

Escribiendo $\phi = e^u$ e insertando (19) en $B = 2i(\partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z$ y finalmente reemplazando todo en la segunda ecuación de Bogomolny, llegamos a la ecuación de Taubes [**?**]

$$\Delta u - e^u + 1 = 0 \tag{20}$$

Teorema (Teorema de Taubes)

Dado un entero $N \geq 0$ y un conjunto de puntos $\{z_i\}, i = 1, 2, \cdots N$ en el plano complejo $\mathbb{C}$, existe una solución de las ecuaciones de Bogomolny que es única a menos de una transformación de gauge

Vortices en superficies de Riemann

No se conoce soluciones explícita para la ecuación de Taubes en el plano hasta la fecha. Pueden existir soluciones explícitas en espacios curvos. Cambiemos la métrica plana por

$$ds_0^2 = \Omega_0((dx^1)^2 + (dx^2)^2) = \Omega_0 dz d\bar{z} \tag{21}$$

donde Ω_0 es un factor conforme y $z = x + iy$. Esta métrica define una superficie de Riemann M_0. Podemos considerar la ecuación de Taubes definida en M_0

$$-\frac{1}{\Omega_0}\Delta u + e^u - 1 = 0 \tag{22}$$

Más ecuaciones de vórtices

Consideremos C_0 y C dos constantes. Generalizamos la ecuación de Taubes en M_0 de la siguiente forma

$$-\frac{1}{\Omega_0}\Delta u - Ce^{u} + C_0 = 0 \tag{23}$$

Las constantes pueden tomar cualquier valor, sin embargo, se tienen tres valores estándar $-1, 0, 1$. Por lo tanto, nueve ecuaciones vorticiales. Sólo cinco son físicamente viables. [Manton]

Vórtices	C_0	C
Vórtices hiperbólicos (Taubes)	-1	-1
Vórtices de Popov	0	1
Vórtices de Jackiw-Pi	1	1
Vórtices de Bradlow	-1	0
Vórtices de Ambjorn-Olesen	-1	1

Vórtices hiperbólicos fueron obtenidos por primera vez por Witten [Witten77] en términos de una función analítica $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$

$$\phi = \frac{1-|z|^2}{1-|f|^2}\frac{df}{dz} \tag{24}$$

En el modelo del disco de Poincaré,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N+1} \frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z} \tag{25}$$

donde $|a_n| < 1$.
En particular $f(z) = z^{N+1}$. En este caso, hay N vórtices coincidentes en el origen.

Generalizando

En [Baptista][**?**] se sugiere la siguiente métrica

$$ds^2 = |\phi|^2 ds_0^2 = e^u ds_0^2 \tag{26}$$

La métrica original reescaleada confomemente con el cuadrado del campo de Higgs. Métrica de Baptista no es regular pues se hace cero en los centros de los vórtices $\phi = 0$. Definimos nuevo factor conforme $\Omega = e^u \Omega_0$. Las curvaturas de las superficies que estas métricas definen están relacionadas por la ecuación de Baptista

$$(K_0 - C_0)\Omega_0 = (K - C)\Omega \tag{27}$$

Vortices integrables

Cuando la curvatura de M_0, K_0, es contante y toma un valor específico de acuerdo a su ecuación de vórtice, decimos que tal ecuación es integrable. Este valor específico es aquel que satisface la ecuación de Baptista, $K_0 = C_0$. Entonces, la métrica de Baptista tiene curvatura constante $K = C$, excepto en las singularidades. Como, M_0 y M tienen curvatura constante, sus factores conforme Ω_0 y Ω deben satisfacer la ecuación de Liouville

$$\Delta \log \Omega_0 = -2K_0\Omega_0 \tag{28}$$

$$\Delta \log \Omega = -2K\Omega \tag{29}$$

Solución general es conocida

$$\Omega = \frac{4}{(1 + C|f(z)|^2)^2} \left|\frac{df}{dz}\right|^2 \tag{30}$$

$$\Omega_0 = \frac{4}{(1 + C_0|z|^2)^2} \tag{31}$$

Entonces, solución general es

$$|\phi|^2 = \frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{(1 + C_0|z|^2)^2}{(1 + C|f(z)|^2)^2} \left|\frac{df}{dz}\right|^2 \tag{32}$$

Podemos elegir,

$$\phi = \frac{1 + C_0|z|^2}{1 + C|f(z)|^2} \frac{df}{dz} \tag{33}$$

Los puntos donde $\frac{df}{dz} = 0$ son los centros de los vórtices $\phi = 0$.

Ecuaciones de Bogomolny y Supersimetría

Extensión $N=1$ del modelo abeliano de Higgs en $2+1$

En [Edelstein94] propusieron la siguiente extensión supersimétrica de la ección del modelo abeliano de Higgs

$$L_{N=1} = \int d^2\theta \left\{ \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha - \frac{1}{4}(\mathcal{D}^\alpha + ie\Gamma^\alpha)\Phi^\dagger(\mathcal{D}_\alpha - ie\Gamma_\alpha)\Phi - \frac{1}{4}\mathcal{D}^\alpha S \mathcal{D}_\alpha S + \sqrt{2\lambda} S\Phi^\dagger\Phi + \eta S \right\}$$

donde $\mathcal{D}^\alpha$ es la superderivada covariante, Γ^α es el supercampo vectorial, W^α es el supercampo electromagnético, Φ es un supercampo escalar complejo y S un supercampo escalar real.

$$\Phi(x;\theta) = \phi(x) + \bar{\theta}\psi(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \qquad (34)$$

$$\Gamma_\alpha(x;\theta) = iA_\mu(x)(\gamma^\mu\theta)_\alpha - \bar{\theta}\theta\rho_\alpha(x) \qquad (35)$$

$$S(x;\theta) = N(x) + \bar{\theta}\chi(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta D(x) \qquad (36)$$

$$L_{N=1} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu N\partial_\mu N + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - 4\lambda N^2|\phi|^2$$
$$-\lambda(|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 + \frac{i}{2}\bar{\rho}\gamma^\mu\partial_\mu\rho + \frac{i}{2}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \sqrt{2\lambda}N\bar{\psi}\psi$$
$$+\frac{ie}{2}(\bar{\psi}\rho\phi - \bar{\rho}\psi\phi^\dagger) - \sqrt{2\lambda}(\bar{\psi}\chi\phi + \bar{\chi}\psi\phi^\dagger)$$

Es posible extender esta simetría $N = 1$ a una simetría $N = 2$ haciendo el parámetro infinitesimal ϵ complejo ϵ^c, y juntando los fermiones reales en $\Sigma = \chi - i\rho$. Para esto debemos imponer una condición sobre la constante de acoplamiento. Esta es

$$\lambda = \frac{e^2}{8} \tag{37}$$

Esta es la condición obtenida para obtener las ecuaciones de Bogomolny de antes.

La corriente de Noether asociada a la supersimetría se puede calcular y a partir de esta, obtener la carga conservada. Escrita como $\mathcal{Q} = \bar{\epsilon}^c Q + \bar{Q}\epsilon^c$, para eliminar la variable de Grassmann infinitesimal, se tiene que

$$Q = \int d^2x \left[\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu}\gamma_\lambda + i\gamma^\mu \partial_\mu N - \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \right) \gamma^0 \Sigma \right.$$
$$\left. \left(i(\gamma^\mu D_\mu \phi)^\dagger - \frac{e}{2} N \phi^\dagger \right) \gamma^0 \psi \right]$$
$$\bar{Q} = \int d^2x \bar{\Sigma}\gamma^0 \left[\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu}\gamma_\lambda + i\gamma^\mu \partial_\mu N - \frac{e}{2}(|\phi|^2 - v^2) \right) \right.$$
$$\left. \bar{\psi}\gamma^0 \left(-i\gamma^\mu D_\mu \phi - \frac{e}{2} N \phi \right) \right]$$

Para configuraciones estáticas y en el gauge $A_0 = 0$, las cargas satisfacen la siguiente relación de anticonmutación

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = 2(\gamma_0)^\beta_\alpha P^0 + \delta^\beta_\alpha T \tag{38}$$

Donde P_0 no es más que la energía

$$P^0 = E = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{ij}^2 + \frac{1}{2} |D_i \phi|^2 + \frac{e^2}{8} (\phi_0^2 - |\phi|^2)^2 \right) \qquad (39)$$

Y T es la carga central

$$T = e\phi_0^2 \left(\frac{2\pi}{e} \right) N, \quad N \in \mathbb{Z} \qquad (40)$$

Elevando al cuadrado la relación de conmutación se puede obtener un límite para la energía

$$E \geq \frac{|T|}{2} \qquad (41)$$

No es más que el mismo inferior para la energía obtenido a la Bogomolny.

Para obtener explícitamente las ecuaciones de Bogomolny a partir del álgebra supersimétrica, definamos

$$Q_I = \frac{Q_+ + iQ_-}{\sqrt{2}} \tag{42}$$

$$Q_{II} = \frac{\bar{Q}^+ + i\bar{Q}^-}{\sqrt{2}} \tag{43}$$

donde $Q = (Q_+, Q_-)^T$ y $\bar{Q} = (\bar{Q}^+, \bar{Q}^-)$.
Un estado $|B\rangle$ que sature la desigualda de Bogomolny, necesariamente es aniquilado por las cargas, entonces, necesariamente

$$(Q_I \pm Q_{II})\,|B\rangle = 0 \tag{44}$$

Si esto ocurre entonces

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ij}F^{ij} = \frac{e}{2}(\phi_0^2 - |\phi|^2) \tag{45}$$

$$D_i\phi + iD_2\phi = 0 \tag{46}$$

Estas son las ecuaciones de Bogomolny.

Modelos abelainos de Higgs modificados

Podemos modificar el lagrangiano del modelo abeliano de Higgs admitiendo términos cinéticos no estándar [Sourrouille]

$$L = \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \omega(\phi) |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \right) \tag{47}$$

o también [Contatto],

$$L = \int d^2x \Omega \left(-\frac{G(|\phi|)^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \right) \tag{48}$$

Podemos contreñir la forma de estas funciones con condiciones de contorno en el infinito o de acuerdo a la forma de $V(\phi)$.

Por ejemplo si elegimos $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(1 - |\phi|^{2(n+1)})$, necesariamente

$$\omega(\phi) = \sqrt{\lambda}(n+1)|\phi|^{2n} \tag{49}$$

para obtener un análogo al límite de Bogomolny. En este caso, $E \geq 2\pi N\sqrt{\lambda}$. El límite se satura cuando

$$B = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1 - |\phi|^{2(n+1)}) \tag{50}$$

$$\phi^n(D_1 + iD_2)\phi = 0 \tag{51}$$

Referencias