

# ASPECTOS DE VÓRTICES AUTODUALES EN EL MODELO ABELIANO DE HIGGS

ISAÍ EMANUEL DÁVILA CUBA



Trabajo de Diploma  
Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional de La Plata

DIRECTOR:  
Diego Hernán Correa

Junio 2021 – Primer esbozo

La Plata



## Parte I

### CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

En esta parte del trabajo elaboraremos los conceptos básicos que serán de utilidad antes de introducir el objeto de estudio en Parte II. Comenzaremos introduciendo el concepto de solitón topológico para luego especializarnos en los vórtices.



## INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

---

Los solitones juegan un papel muy importante en muchas áreas de la física, desde materia condensada, fluidos, física de partículas y cosmología a incluso teoría de cuerdas. Uno de los solitones más importantes, el vórtice, ha sido observado experimentalmente en superconductores tipo II formando una arreglo conocido como enrejado de Abrikosov.

En cosmología, las cuerdas cósmicas, que no son de naturaleza fundamental como las cuerdas en teoría de cuerdas, sino más bien son mucho más grandes y pesadas, se piensan que pueden explicar los filamentos que se observan a grandes escalas en el Universo.

En física del estado sólido, en particular en relación con el efecto Hall cuántico fraccional, teorías de campo efectivas que incluyen términos de Chern-Simons han probado ser de gran importancia. Una descripción efectiva de los electrones en un fluido de Hall cuántico superconductor puede ser descrita por una teoría de campos escalar con un término de interacción del tipo Chern-Simons.

Uno de los problemas abiertos más importantes en física de partículas surgió a partir de la introducción de la Cromodinámica Cuántica, el llamado problema del confinamiento de quark o simplemente confinamiento. Este fenómeno es bienvenido ya que explica porqué no se ha detectado quarks libres. Aún no se ha encontrado una prueba analítica del confinamiento en todas las teorías de gauge no abelianas, y nuevos métodos de cálculo deben ser desarrollados. Estos nuevos métodos deben ser de naturaleza no perturbativa, en donde los solitones juegan un rol importante. Aunque en este trabajo no tocaremos teorías de gauge no abelianas, es importante remarcar que en ciertas teorías de gauge abelianas también exhiben confinamiento.

Avocándonos al tema de este trabajo, los vórtices abelianos son solitones topológicos en 2 dimensiones que aparecen como soluciones en el modelo de Higgs abeliano. Este modelo es una teoría de campo gauge  $U(1)$  con un potencial cuártico cuya variedad de vacío posee una topología no trivial. Esta topología no trivial provee estabilidad a los vórtices. Estos vórtices llevan una carga topológica que es igual al *winding* del campo de Higgs  $\phi$  en el infinito o, de forma equivalente, al número de ceros de  $\phi$  contado con multiplicidades. Un tipo especial de estos vórtices son los vórtices autoduales o vórtices críticos los cuales aparecen después de un argumento de Bogomolny sobre el funcional de energía. Estos son soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, las conocidas ecuaciones de Bogomolny, que también satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones se pueden juntar en una sola ecuaciones diferencial de segundo orden llamada ecuación de Taubes sujeta a condiciones de contorno. Esta ecuación no es fácil de resolver y sólo se conocen un puñado de soluciones analíticas, por lo que se suelen resolver numéricamente. Cronológicamente, la primera solución analítica apareció en un paper de 1977 de Edward Witten en el contexto de la teoría de Yang-Mills  $SU(2)$ . Más tarde, otras dos soluciones explícitas fueron encontradas por Dunajski [Contatto22] usando trascendentes de Painlevé.

Otros cuatro tipos de solitones fueron presentados por Manton usando una generalización de la ecuación de Taubes, los cuales son los vórtices de Popov, Jackiw-Pi, Ambjorn-Olesen y Bradlow. Junto con los vórtices hallados por Witten, se tienen cinco vórtices llamados vórtices exóticos. Los vórtices de Witten y Popov surgen de una reducción de simetría de las ecuaciones de anti autodualidad de Yang-Mills (ASDYM) con grupo de gauge  $SU(2)$  y  $SU(1,1)$  respectivamente. Es natural preguntarse si los tres restantes vórtices también pueden surgir de una reducción de simetría de las ecuaciones ASDYM. La

respuesta a esta pregunta es afirmativa, así como lo descubrieron Contatto y Dunajski, presentamos sus resultados en el capítulo 4.

Finalizamos este trabajo presentando modelos modificados del modelo de Higgs abeliano. Introduciendo términos cinéticos no estándares y modificando el potencial cuártico a una potencia arbitraria de modo que el argumento de Bogomolny siga valiendo, es posible obtener nuevas soluciones explícitas de estos modelos.

Con toda esta introducción y motivación introduzcamos el concepto de un solitón topológico.

### 1.1 SOLITÓN TOPOLÓGICO

Un solitón es una onda solitaria o excitación de algún campo que se propaga sin deformarse, es decir, manteniendo su forma e intensidad en el tiempo, que además tampoco se deforma cuando colisiona con otros solitones. El interés de este trabajo son solitones que tienen un origen topológico con la diferencia que estos si pueden ser afectados en colisiones, es decir, pueden dispersarse.

Para ilustrar el origen topológico de este tipo de solitones, consideremos la teoría más simple que presenta solitones topológicos: una teoría  $1 + 1$  con un campo escalar con un potencial polinómico cuártico. El solitón respectivo se hace llamar *domain wall*. El respectivo lagrangiano de la teoría es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \chi^2)^2, \quad \lambda, \chi > 0, \quad (1.1.0.1)$$

el cuál posee una simetría discreta  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\phi \rightarrow -\phi$ . El vacío rompe esta simetría  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{I}$ . El campo escalar puede escoger entre dos vacíos,  $\phi = \chi$  o  $\phi = -\chi$ . Una configuración que tenga al vacío  $\phi = -\chi$  en  $x \rightarrow -\infty$  y al vacío  $\phi = \chi$  en  $x \rightarrow +\infty$  debe pasar por  $\phi = 0$  creando una densidad de energía distinta de cero, esto es, una partícula solitónica. En este ejemplo el *domain wall* vive en un espacio de una dimensión espacial y una dimensión temporal y se puede pensar como una pseudopartícula localizada y de energía finita. Es común que este objeto se presente extendido en dos dimensiones espaciales y una temporal. Enfatizamos que la existencia del *domain wall* recae en la topología no trivial de la variedad de vacío  $\mathcal{M} = \{-\chi, \chi\}$ .

En general, este tipo de defecto está caracterizado por el  $l$ -avo grupo de homotopía  $\pi_l(\mathcal{M})$  de la variedad de vacío  $\mathcal{M}$ . Para solitones topológicos viviendo en una teoría en  $d + 1$  dimensiones espacio temporales uno puede clasificarlos de acuerdo a  $l$ . Para el *domain wall* se tiene que  $l = 0$ , para  $l = 1$  tenemos a los vórtices que son solitones topológicos en  $d = 2$  caracterizados por  $\pi_1(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$ , para  $l = 2$  tenemos a los monopolos que viven en un espacio  $d = 3$ , finalmente con  $l = 3$  tenemos a los instantones.

### 1.2 TEOREMA DE DERRICK

Una pregunta importante acerca de los solitones es su estabilidad. El teorema de Derrick, basado en un argumento de escaleo, nos dice que no hay configuraciones de campo de energía finita en más de una dimensión, a parte del vacío, que presente un punto estacionario. Esto significa que solitones de energía finita no son estables para  $d > 1$ . Repasemos el argumento de Derrick brevemente. Por simplicidad, consideremos una teoría de campo escalar en  $d$  dimensiones espaciales y hagamos el siguiente rescaleo  $x \rightarrow \mu x$ ,  $\phi(x) \rightarrow \phi(\mu x)$ , entonces la derivadas se rescalean como  $\partial_i \rightarrow \mu \partial_i$  mientras que el ele-

mento  $d^d x \rightarrow \mu^{-d} d^d x$ . Asumamos también que  $\phi$  describe una solución estacionaria no trivial, es decir, que debe ser un punto crítico de la energía

$$E[\phi(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x [|\partial_i \phi|^2 + V[\phi]] \quad (1.2.0.1)$$

La energía después del rescaleo es

$$E[\phi(\mu x)] = \int_{\mathbb{R}^d} d^d(\mu x) [\mu^{2-d} |\partial_i \phi|^2 + \mu^{-d} V[\phi(\mu x)]] \quad (1.2.0.2)$$

Para que esta energía posea un punto estacionario para todo valor de  $\mu$ , es claro que

$$\left. \frac{dE[\phi(\mu x)]}{d\mu} \right|_{\mu=1} = 0 \quad (1.2.0.3)$$

donde escogimos el valor arbitrario de  $\mu = 1$ . Desarrollando a ecuación anterior se tiene

$$(2-d) \int_{\mathbb{R}^d} d^d x |\partial_i \phi(x)|^2 = d \int_{\mathbb{R}^d} d^d x V[\phi(x)] \quad (1.2.0.4)$$

Esta ecuación nos da dos posibilidades para  $d$ . Para  $d = 1$  podemos tener configuraciones no triviales pues las contribuciones del escaleo del término cinético pueden compensar las del potencial (de hecho son iguales ambas contribuciones). Para  $d = 2$  esto ya no es posible pues  $V = 0$ , caso que corresponden a los *lumps* en el modelo sigma. Armemos a nuestra teoría de campo escalar con un campo de gauge, de modo que cuando rescalemos la derivada covariante lo hagamos del siguiente modo  $D_\mu \rightarrow \mu D_\mu$ , entonces claramente el campo de gauge rescalea como  $A_\mu \rightarrow \mu A_\mu$ , por lo tanto la nueva energía rescaleada es

$$E[\phi(\mu x)] = \int_{\mathbb{R}^d} d^d(\mu x) \left[ \frac{\mu^{4-d}}{g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mu^{2-d} |D_i \phi|^2 + \mu^{-d} V[\phi(\mu x)] \right] \quad (1.2.0.5)$$

Aplicando (1.2.0.3) a esta energía llegamos a

$$(4-d) \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \frac{1}{g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (2-d) \int_{\mathbb{R}^d} d^d x |D_i \phi|^2 = d \int_{\mathbb{R}^d} d^d x V[\phi(x)], \quad (1.2.0.6)$$

claramente vemos que para  $d = 2$  la contribución de los campos de gauge balancea la contribución del potencial dando pie a la aparición de los vórtices. Un comentario adicional es que para  $d = 4$  el término de los campos de gauge no escalea y no hay necesidad de término cinético ni de potencial, dando origen a un solitón sin rompimiento espontáneo de la simetría, llamado instantón. Tal vez el solitón más importante en la física de altas energías es el instantón hallado por Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin (BPST) en la teoría de Yang-Mills  $SU(2)$  pura, el cuál revisaremos en 4.2.1.

Pero si no hay potencial, por lo tanto no hay variedad de vacío, entonces, ¿cuál es el origen topológico de los instantones? La respuesta es simplemente que los instantones mapean el borde del espacio tiempo  $\partial \mathbb{R}^4$ , que puede ser identificado con la esfera cuatro dimensional  $S^3$  mediante una compactificación, al grupo de gauge  $SU(2) \equiv S^3$ . Tales mapeos son caracterizados por el tercer grupo de homotopía  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, el número instantónico o la carga del instanton es de origen topológico.

Otro comentario interesante sobre los instantones es que la acción es inversamente proporcional a la constante de acoplamiento  $S \propto g^{-2}$ . Las amplitudes de transición (o amplitudes en general) están descritas por la integral de caminos de Feynman, que mediante una rotación de Wick se puede escribir como  $\sim e^{-S}$ . Por lo tanto, los instantones se vuelven importantes en el régimen de constante de acoplamiento grande, llamado también *strong coupling*.





## Parte II

### MODELO ABELIANO DE HIGGS

En esta parte del trabajo introduciremos la teoría de Ginzburg-Landau (o modelo abeliano de Higgs). Comenzaremos con la motivación original del modelo para luego adentrarnos en describir sus propiedades y soluciones.



## VÓRTICES

Como anunciamos en la parte introductoria, los vórtices son solitones topológicos que viven en un espacio de  $d = 2$  dimensiones espaciales. En principio el teorema de Derrick impide su existencia, sin embargo, hay tres modos de sobrepasarlo: agregar un campo de gauge; agregar términos de momento angular (es el caso de los *Q-lumps*); agregando términos con derivadas de mayor orden (es el caso de los *baby-Skyrmions*). Los vórtices aparecen considerando la primera opción, es decir, a partir de una teoría de gauge. Los vórtices en el modelo abeliano de Higgs o en el modelo de Ginzburg-Landau nacen de una teoría de gauge  $U(1)$  que se rompe espontáneamente a 1,  $U(1) \rightarrow 1$ . El argumento topológico para los vórtices es  $\pi_1(U(1)) \approx \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . El potencial de la teoría se rompe debido al mecanismo de Higgs o en teorías supersimétricas agregando un término de Fayet-Illiopoulos. En nuestro caso el potencial que vamos a considerar es el potencial cuártico con rompimiento espontáneo de la simetría

$$V = \frac{\lambda}{2}(\chi^2 - |\phi|^2)^2 \quad (2.0.0.1)$$

El vórtice surge de un mapeo no trivial del infinito espacial de la configuración de campos a la variedad de vacío. Una representación gráfica se muestra en Fig. 1. La magnitud del campo  $|\phi|$  es constante en el infinito, sin embargo la fase puede cambiar por un entero  $N \in \mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$ , es decir, puede dar  $N$  vueltas alrededor de una circunferencia. Esto es lo que se llama la vorticidad.

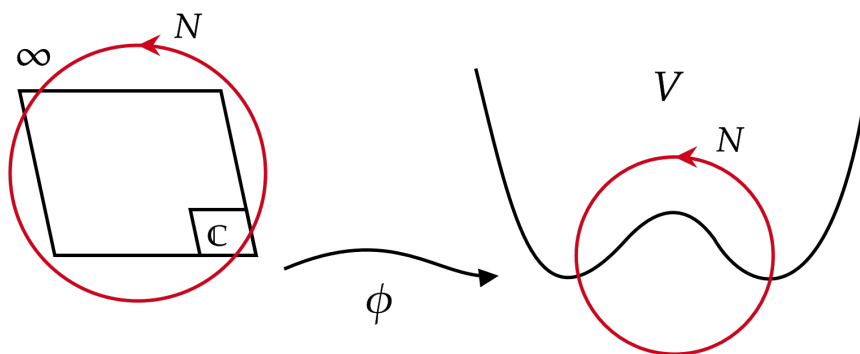


Figura 1: Dibujo del mapeo del infinito de un campo escalar a la variedad de vacío. Estos mapeos son caracterizados por el primer grupo de homotopía.

Los vórtices aparecen en distintas teorías que barren muchas áreas de la Física. En este trabajo vamos a estudiar los vórtices en el modelo abeliano de Higgs. Comenzaremos en sección 2.1 con el modelo de Ginzburg-Landau que es una versión no relativista del modelo abeliano de Higgs. Este modelo se usa para explicar la superconductividad a nivel macroscópico.

## 2.1 MODELO DE GINZBURG-LANDAU

Uno de primeros modelos que explicaron la superconductividad apareció en los años cincuenta de la mano de V. Ginzburg y L. Landau. Siguiendo el modelo de transiciones de

fase de la termodinámica, el "grado de superconductividad" de un cuerpo que ocupa una región del espacio  $\omega \in \mathbb{R}^3$ , está caracterizado por un parámetro de orden representado como una "pseudo función de onda"  $\phi : \omega \rightarrow \mathbb{C}$ . En la terminología moderna,  $\phi$  es una sección en un fibrado lineal  $\hat{\mathcal{L}}$ .

### 2.1.1 Funcional de energía

El funcional de energía para un superconductor propuesta por Ginzburg y Landau se puede escribir como

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( |d_A \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - |\phi|^2)^2 \right) d^3x \quad (2.1.1.1)$$

Este funcional tiene sus mínimos cuando  $|\phi| = m$  y  $d_A \phi = 0$ , asumiendo que  $\lambda > 0$ . Donde  $d_A = d - ieA$  es la extensión covariante de la derivada exterior.

### 2.1.2 El efecto Meissner

El hecho de que  $\phi \neq 0$  con  $d_A \phi = 0$  implica que la curvatura de  $\hat{\mathcal{L}}$  es cero dentro del material superconductor. Explícitamente,  $d_A \phi = 0$  implica que  $0 = d_A^2 \phi = -2ieF\phi$ , de modo que  $F = 0$  siempre y cuando  $\phi$  sea no nula. Este fenómeno es lo que se conoce como el efecto Meissner: el campo magnético se anula muy dentro del superconductor. Si una esfera de plomo es colocada en el seno de un campo magnético constante, entonces a altas temperaturas el campo magnético no es afectado por la esfera, sin embargo, debajo de una temperatura crítica (usualmente debajo de los 7.2 Kelvin) la esfera se vuelve superconductora y el campo magnético es expedito del interior, como se muestra en la siguiente figura

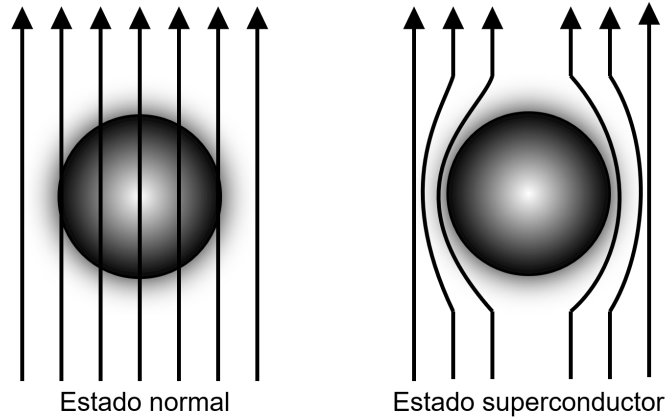


Figura 2: Esfera de plomo en el seno de un campo magnético. A la izquierda por encima de la temperatura crítica. A la derecha el campo magnético es expulsado del interior de la esfera.

Esta explicación del efecto Meissner recae en la suposición de que el campo magnético no es muy fuerte. Sea  $\mathcal{V}$  el volumen de la esfera de plomo en fig. 2. Si hacemos  $\phi = 0$  en toda la esfera, entonces el campo magnético puede penetrar libremente y de acuerdo a la ecuación (2.1.1.1), la energía es  $\lambda m^4 \mathcal{V} / 8$ . Si hacemos  $\phi = m$ , el campo es expedito del material y de acuerdo al funcional de energía, esto tiene un costo energético de aproximadamente  $|B|^2 \mathcal{V} / 2$ . El efecto Meissner ocurrirá si es favorecido energéticamente, esto pasa cuando la energía para expedit el campo magnético es menor a la energía para hacer

$\phi = 0$ . Esto pasa cuando  $B$  es menor a un valor crítico  $B_c = \lambda^{1/2} m^2 / 2$ . Este valor crítico es típicamente del orden de 10000 veces el campo magnético de la Tierra y está cerca de los imanes más potentes actualmente.

Ya que la energía para expedir al campo magnético es proporcional a  $|B|^2$ , la energía crece cuando  $B$  aumenta. Como resultado de esto, un superconductor es repelido de una región donde el campo magnético es grande. Esto lleva al fenómeno de la levitación magnética (fig. 3).

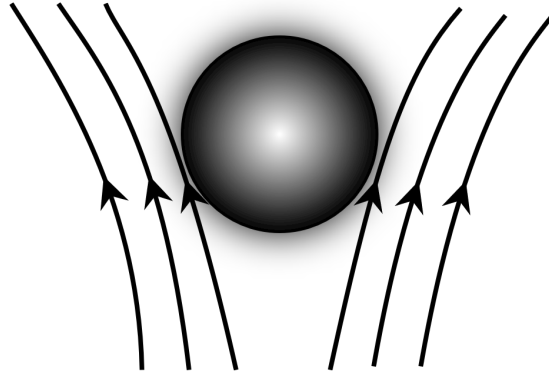


Figura 3: Esfera superconductora es repelida de una región donde el campo magnético es fuerte.

Un material superconductor presenta corrientes eléctricas que fluyen en su interior y que son los responsables de cambiar la configuración del campo externo mostrado en fig. 3. Las corrientes dentro del superconductor crean un campo magnético tal que la suma del campo externo con este campo interno se anula. Estas corrientes fluyen indefinidamente, ya que el efecto Meissner es energéticamente favorable. El hecho de que estas corrientes fluyan indefinidamente sin gasto energético es lo que conocemos como superconductividad.

Las ecuaciones de Maxwell independientes del tiempo demandan de que si el campo magnético es nulo en el interior de un superconductor, entonces la densidad de corrientes  $\vec{j}$  también. Por lo tanto, las corrientes deben fluir en la superficie del material.

### 2.1.3 Líneas de flujo

Una línea de flujo es una región unidimensional dentro del superconductor donde la sección  $\phi = 0$ . Estas líneas de flujo son de gran importancia científica y tecnológica y son conocidas como líneas de flujo de Abrikosov-Gorkov. Una representación de estas líneas de flujo en una esfera superconductora se muestra en figura 4

Podemos describir matemáticamente a las líneas de flujo como mínimos de un funcional de energía adecuado. En el modelo de Ginzburg-Landau, la función de energía es la suma de la energía para  $\phi$ , dada en (2.1.1.1), y la energía magnética, que es la integral de  $|B|^2/2$ . La función a minimizar es

$$V(\phi, B) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left( \frac{|B|^2}{2} + \frac{1}{2} |d_A \phi|^2 + \frac{\lambda}{8} (m^2 - \phi^2)^2 \right). \quad (2.1.3.1)$$

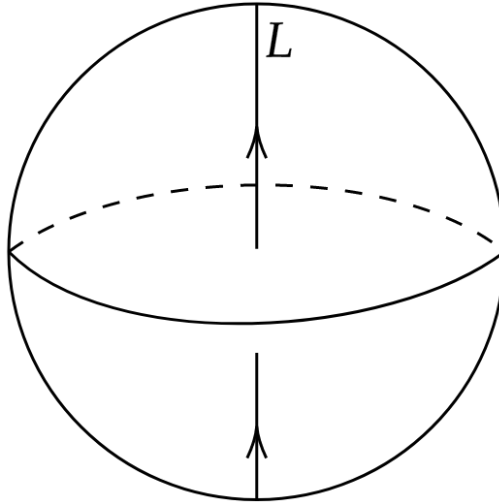


Figura 4: Línea de flujo dentro de una esfera superconductora. A lo largo de la línea  $\phi = 0$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos devuelven las ecuaciones de la teoría de Ginzburg-Landau:

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\lambda}{4} \phi (m^2 - \phi^2) = 0 \quad (2.1.3.2)$$

$$\epsilon_{ij} B_i + ie(\bar{\phi} D_j \phi - \phi D_i \bar{\phi}) = 0 \quad (2.1.3.3)$$

Estas ecuaciones en derivadas parciales se pueden reducir a ecuaciones diferenciales ordinarias usando argumentos de simetría (como veremos en la sección 2.3) en  $\mathbb{R}^2$ . Soluciones a estas ecuaciones con el típico comportamiento  $|\phi| \rightarrow m$  y  $d_A \phi \rightarrow 0$  en el infinito son caracterizadas por un entero  $n$ , conocido como la primera clase de Chern. Soluciones existen, pero no se pueden escribir en una forma explícita, incluso la solución más básica de la línea vorticial de Abrikosov-Gorkov con  $n = 1$ .

#### 2.1.4 Superconductores Tipo I y Tipo II

Podemos reescalar la energía de Ginzburg-Landau de modo que sólo dependa de una constante adimensional. Considere los siguientes reescalos: la sección  $\phi$  puede ser reescalada como  $\phi \rightarrow \phi/a$ , las nuevas coordenadas espaciales  $x \rightarrow emx$ , la conexión  $A \rightarrow eA$  y la curvatura  $F \rightarrow eF$ . Con estas definiciones la constante de acoplamiento se vuelve adimensional  $\lambda \rightarrow \lambda/e^2$ .

Una transición de fase ocurre cuando  $\lambda = 1$ . Considere una superconductor que llena todo el espacio  $\mathbb{R}^3$  que posee líneas de flujo. Para  $\lambda < 1$ , las líneas de flujo se atraen y se combinan para formar una sólo línea de flujo. Estos materiales son llamadas superconductores tipo I; ejemplos incluyen muchos metales puros. Para  $\lambda > 1$ , las líneas de flujo se repelen. Un material con esta propiedad es llamado un superconductor tipo II.

La distinción de estos dos tipos de superconductores es de gran importancia práctica. Cuando un campo magnético externo se comienza a acercar al campo magnético crítico, líneas de flujo comienzan a penetrar el material. En superconductores Tipo I, estas líneas se atraen, provocando una región no superconductora (líneas de flujo la atraviesan) que va creciendo conforme seguimos aumentando el campo; eventualmente, la superconductividad se pierde. En el caso de superconductores Tipo II, las líneas de flujo se repelen, pudiendo formar un arreglo estable (fig. 5). Como resultado, un superconductor Tipo II puede mantener su superconductividad incluso para campos magnéticos por encima del

valor crítico, haciéndolos más útiles para aplicaciones tecnológicas. Aún así, llegado a un segundo valor crítico del campo magnético, la superconductividad se pierde.

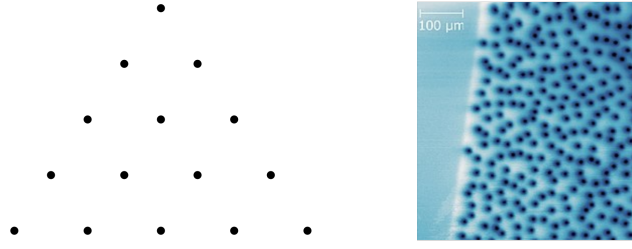


Figura 5: A la izquierda, un arreglo estable de líneas de flujo vistas desde arriba. A la derecha vórtices en una lámina delgada de 200 nm de YBCO, tomada usando microscopía SQUID.

## 2.2 MODELO DE HIGGS ABELIANO

El modelo de Higgs abeliano (o modelo de Maxwell-Higgs) es la versión relativista del modelo GL. La sección  $\phi(x) : \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{C}$  la llamaremos a partir de ahora campo de Higgs. Esta teoría es el paradigma para obtener soluciones vorticiales. La densidad lagrangiana que describe la teoría es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi\overline{D^\mu\phi} - \frac{\lambda}{8}(m^2 - |\phi|^2)^2 \quad (2.2.0.1)$$

Este funcional corresponde a una teoría gauge pues el campo de Higgs se encuentra acoplado al campo electromagnético. La teoría tiene presente las simetrías internas típicas del electromagnetismo, i.e., invarianza ante transformaciones de gauge  $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$  y  $A_\mu \rightarrow A_\mu - i\partial_\mu\alpha$ . Las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$D_\mu D^\mu\phi + \frac{\lambda}{2}(m^2 - |\phi|^2)\phi = 0, \quad (2.2.0.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.2.0.3)$$

donde  $J^\mu = \frac{i}{2}(\bar{\phi}D^\mu\phi - \overline{D^\mu\phi}\phi)$  puede ser considerada como una *corriente* generada por la simetría interna. Nótese que estas ecuaciones son idénticas en forma a las ecuaciones de Ginzburg-Landau, per difieren en que el modelo de Ginzburg-Landau está definido en  $\mathbb{R}^3$  mientras que el modelo abeliano de Higgs está definido en un espacio tiempo  $(2+1)$ -dimensional.

Buscamos configuraciones de campos vorticiales, esto es, soluciones estáticas a (2.2.0.2) y (2.2.0.3) con energía finita. En el gauge temporal,  $A_0 = 0$ , la energía de estas soluciones está dada por el funcional de energía  $V$

$$V_\lambda = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( B^2 + D_i\phi\overline{D_i\phi} + \frac{\lambda}{4}(m^2 - |\phi|^2)^2 \right) d^2x \quad (2.2.0.4)$$

## 2.3 MODELO ABELIANO DE HIGGS GLOBAL

Antes de encontrar soluciones vorticiales para el modelo abeliano de Higgs, notemos que uno puede obtener una teoría que posea simetría de gauge global, es decir, simetría ante una fase global, a partir de (2.2.0.1) haciendo  $A_\mu = 0$ . Posibles soluciones estáticas tendrán una energía igual a

$$V_G = \frac{1}{2} \int \left( |\nabla \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - |\phi|^2)^2 \right), \quad (2.3.0.1)$$

que no es más que el funcional (2.2.0.4) con  $A_i = 0$ . Las correspondientes ecuaciones de movimiento son

$$\nabla^2 \phi + \frac{\lambda}{2} (m^2 - |\phi|^2) \phi = 0. \quad (2.3.0.2)$$

La variedad de vacío la componen configuraciones de campo tales que  $|\phi| = m$ , de modo que no es trivial; hay posibilidad de encontrar vórtices. Sin embargo, teorema de Derrick elimina toda posibilidad de soluciones estáticas en dos dimensiones. Esto no quita que soluciones estáticas existan, sin embargo, estas tendrán una energía infinita.

Para encontrar estas soluciones analicemos el funcional de energía en coordenadas polares  $x^1 = \rho \cos \theta$  y  $x^2 = \rho \sin \theta$

$$V_G = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( \partial_\rho \bar{\phi} \partial_\rho \phi + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \bar{\phi} \partial_\theta \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - |\phi|^2)^2 \right) \rho d\rho d\theta \quad (2.3.0.3)$$

Si tratamos de hacer finita esta energía, el campo debe cumplir que el potencial cuártico y la derivada respecto al campo radial se anulen en el infinito

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} |\phi| = m \quad (2.3.0.4)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \partial_\rho \phi = 0. \quad (2.3.0.5)$$

No es necesario hacer  $\partial_\theta \phi = 0$  en el infinito pues ese término ya se anula en el infinito debido al factor  $\frac{1}{\rho^2}$  que tiene en frente.

Entonces, imponemos las condiciones de contorno  $|\phi| \rightarrow m$  y  $\partial_r \phi \rightarrow 0$ . La primera condición implica que  $\phi_\infty = e^{i\chi}$ , donde  $\chi$  debe ser constante para que el gradiente del campo  $\phi$  sea cero. Queremos ver si podemos encontrar soluciones estáticas con simetría rotacional. Esto es, hacer que el módulo de la configuración de campo no dependa de  $\theta$ . Se puede plantear el siguiente *ansatz*

$$\phi(\rho, \theta) = f_N(\rho) e^{iN\theta}. \quad (2.3.0.6)$$

Donde  $f_N(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 1$  para satisfacer las condiciones de contorno y  $N$  es un entero. Veremos más adelante que este entero está relacionado con la topología no trivial de la variedad de vacío.

Insertando el *ansatz* (2.3.0.6) en el funcional de energía se tiene

$$V_G = \pi \int_0^\infty \left[ \left( \frac{df_N(\rho)}{d\rho} \right)^2 + \frac{N^2}{\rho^2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - f_N^2)^2 \right] \rho d\rho. \quad (2.3.0.7)$$

Insertando el mismo *ansatz* en la ecuación de movimiento se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para  $f_N(\rho)$

$$\frac{d^2 f_N}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_N}{d\rho} - \frac{N^2}{\rho^2} f_N + \frac{\lambda}{2} (1 - f_N^2) f_N = 0 \quad (2.3.0.8)$$



Se ha probado la existencia de soluciones a (2.3.0.9) en [Manton,177] y se encuentran mayormente de forma numérica. En el apéndice mostramos algunas gráficas de soluciones a (2.3.0.8) para valores arbitrarios de  $\lambda$  y  $N$ ; obtenidos de forma numérica.

Como se había anticipado, las soluciones que se obtienen no tienen energía finita. Un pequeño análisis sobre (2.3.0.7) muestra que la energía diverge logarítmicamente. Basta con ver el término del gradiente angular

$$V_\lambda = \pi \int_0^\infty \left( f_N'^2(\rho) + \frac{N^2}{\rho^2} f_N^2(\rho) \right) \rho d\rho \stackrel{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \pi N^2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \infty \quad (2.3.0.9)$$

**TOPOLOGÍA EN LA TEORÍA GLOBAL** Hemos visto que la densidad de energía decae a cero rápidamente cuando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  si  $|\phi| \rightarrow 1$  y  $\partial_\rho \phi \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow \infty$ . Asumamos que estos límites existen. Entonces,  $\phi_\infty(\theta) = e^{i\chi_\infty(\theta)}$ , esto es, el campo en el infinito toma valores en la circunferencia  $S_\infty^1$  y devuelve valores también en una circunferencia  $S^1$ . Interpretamos al campo como un mapeo  $\phi_\infty : S_\infty^1 \rightarrow S^1$ . El vacío tiene una topología no trivial, sin embargo, no hay configuraciones de campo con energía finita. Esto era debido a que la contribución a la energía de la parte angular divergía logarítmicamente a menos que  $N = 0$ .

## 2.4 VÓRTICES EN EL MODELO HIGGS ABELIANO

Ahora, analicemos las soluciones vorticiales en el modelo de Higgs abeliano cuyo funcional de energía es (2.2.0.1). Este funcional es invariante gauge  $\phi \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{x})}\phi$  y  $A_i \rightarrow A_i + \partial_i \alpha$  y las respectivas ecuaciones de movimiento obtenidas de variar el funcional respecto a  $\phi$  y a  $A_i$  son

$$D_i D_i \phi + \frac{\lambda}{2} (1 - |\phi|^2) \phi = 0 \quad (2.4.0.1)$$

$$\epsilon_{ij} \partial_j B + \frac{i}{2} (\bar{\phi} D_i \phi - \phi \overline{D_i \phi}) = 0 \quad (2.4.0.2)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de Ginzburg-Landau presentadas en la sección anterior.

**UN COMENTARIO SOBRE (2.4.0.2)** Esta ecuación se puede interpretar como una versión bidimensional de la ecuación de Ampere. Podemos tratar a  $J_i = \frac{i}{2} (\bar{\phi} D_i \phi - \phi \overline{D_i \phi})$  como una corriente en el plano.

Estamos interesados en configuraciones de campo que minimizen la energía y además que sea finita. Para esto imponemos las siguientes condiciones de contorno

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\phi| = 1 \quad (2.4.0.3)$$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} B = 0 \quad (2.4.0.4)$$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} D_i \phi = 0 \quad (2.4.0.5)$$

Como en el caso de la teoría de Ginzburg-Landau global, condición (2.4.0.3) implica que  $\phi_\infty(\vec{x}) = e^{i\chi_\infty(\vec{x})}$ , condición (2.4.0.4) requiere que  $\vec{A}$  sea un gauge puro, es decir,  $A_i = \partial_i \alpha(\vec{x})$ . Por último, condición (2.4.0.5) requiere que

$$\text{im}(\partial_i \chi_\infty - \partial_i \alpha) e^{i\chi_\infty} = 0 \quad (2.4.0.6)$$

de modo que  $\partial_i (\chi_\infty - \alpha) = 0$  y  $\alpha = \chi_\infty + \text{cte}$ . Por lo tanto, la configuración de campo en el infinito es

$$\phi_\infty = e^{i\chi_\infty}, \quad A_i = \partial_i \chi_\infty \quad (2.4.0.7)$$

Tenemos la libertad de elegir el gauge  $\chi_\infty = 0$ , obteniendo la siguiente configuración en el infinito  $(\phi, A) = (1, 0)$ .

Queremos escribir a (2.2.0.1) en coordenadas polares, para esto definimos  $A_\rho = A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta$  y  $A_\theta = -A_1 \rho \sin \theta + A_2 \rho \cos \theta$ , entonces

$$V_\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\rho^2} f_{\rho\theta}^2 + \overline{D_\rho \phi} D_\rho \phi + \frac{1}{\rho^2} \overline{D_\theta \phi} D_\theta \phi + \frac{\lambda}{4} (1 - |\phi|^2)^2 \right) \rho d\rho d\theta. \quad (2.4.0.8)$$

Donde  $f_{\rho\theta} = \partial_\rho A_\theta - \partial_\theta A_\rho = \rho B$ ,  $D_\rho \phi = \partial_\rho \phi - i A_\rho \phi$  y  $D_\theta \phi = \partial_\theta \phi - i A_\theta \phi$ . Condición (2.4.0.4) implica que  $A_\rho = \partial_\theta \alpha(\rho, \theta)$  y  $A_\theta = \partial_\rho \alpha(\rho, \theta)$ . Esto nos permite escribir un *ansatz* para la configuración de campos

$$\phi(\rho, \theta) = f_N(\rho) e^{iN\theta}, \quad A_\theta(\rho, \theta) = N\alpha_N(\rho) \quad (2.4.0.9)$$

donde  $f_N \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 1$  y  $\alpha_N \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$  para satisfacer las condiciones de contorno en el infinito. Insertando (2.4.0.9) en las ecuaciones de movimiento (2.4.0.1) y (2.4.0.2) obtenemos ecuaciones diferenciales para  $f_N$  y  $\alpha_N$ :

$$\frac{d^2 f_N}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_N}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} (N - \alpha_N)^2 f_N + \frac{\lambda}{2} (1 - f_N^2) f_N = 0 \quad (2.4.0.10)$$

$$\frac{d^2 \alpha_N}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\alpha_N}{d\rho} + (N - \alpha_N) f_N^2 = 0 \quad (2.4.0.11)$$

Se han demostrado en [Manton, 333, 50] que soluciones que satisfacen las condiciones de contorno existen para todo  $N \neq 0$  y todo  $\lambda > 0$ . Soluciones numéricas fueron obtenidas utilizando el lenguaje de programación Python, las cuales se muestran en el Apéndice.

**CARGA TOPOLÓGICA** El grado topológico del campo  $\phi$  es la carga topológica del vórtice o también llamado primer número de Chern, definido como

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f \quad (2.4.0.12)$$

donde  $f = dA$  y  $A$  es el campo de gauge escrito como una 1-forma. Entonces, el primer número de Chern es el flujo de campo magnético total. Se demuestra en [Manton] que  $c_1$  es un entero<sup>1</sup>. En componentes y usando nuestra notación tenemos que

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x B \quad (2.4.0.15)$$

## 2.5 VÓRTICES CRÍTICOS

En esta sección vamos a ver que para un valor específico de la constante de acoplamiento  $\lambda$ , las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.4.0.1) y (2.4.0.2), se reducen a ecuaciones de primer orden, llamadas ecuaciones de Bogomolny.

<sup>1</sup> En general, el primer número de Chern no necesita ser un entero. Usando el teorema de Stokes en (2.4.0.12) podemos escribirla como una integral de línea a lo largo de un disco con radio muy grande  $D_R$

$$c_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{D_R} A = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} A_\theta d\theta \quad (2.4.0.13)$$

Las condiciones de contorno sobre  $A$  hacen que en el infinito se comporte como un gauge puro  $A = d\alpha_\infty$ . En particular,  $A_\theta = \partial_\theta \alpha_\infty$  en el infinito. Por lo tanto,

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \alpha_\infty}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} (\alpha_\infty(2\pi) - \alpha_\infty(0)) \quad (2.4.0.14)$$

En el caso de vórtices, las condiciones extras de contorno hacían que el campo fuera univaluado y por eso  $\alpha_\infty(2\pi) - \alpha_\infty(0) = 2\pi N$ . Pero este no es el caso general.

### 2.5.1 Cálculo de Bogomolny

Analizaremos el cálculo clásico de Bogomolny [Bogomolny] de completar cuadrados en el funcional. Consideremos el funcional de GL para el modelo de Higgs abeliano (2.2.0.1). Este se puede escribir de la siguiente forma

$$V_\lambda = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( B - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (1 - |\phi|^2) \right)^2 + B\sqrt{\lambda}(1 - |\phi|^2) + |D_1\phi + iD_2\phi|^2 \right] d^2x, \quad (2.5.1.1)$$

donde  $|D_1\phi + iD_2\phi|^2 = |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 + 2(\partial_1\phi A_2 - \partial_2\phi A_1)\phi$ , que también se escribe, en el lenguaje de la geometría diferencial, como  $|D_1\phi + iD_2\phi|^2 = |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 + 2\phi d\phi \wedge A$ . Ahora analicemos el segundo término en (2.5.1.1):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} B\sqrt{\lambda}(1 - |\phi|^2) d^2x &= \int_{\mathbb{R}^2} B\sqrt{\lambda} d^2x - \int_{\mathbb{R}^2} B\sqrt{\lambda} |\phi|^2 d^2x \\ &= 2\pi N\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 dA \\ &= 2\pi N\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} d|\phi|^2 \wedge A \\ &= 2\pi N\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} \phi d\phi \wedge A \end{aligned} \quad (2.5.1.2)$$

Vemos que el segundo término de (2.5.1.2) elimina exactamente al término producto de  $|D_1\phi + iD_2\phi|^2$  sólo cuando  $\lambda = 1$ . En ese caso, el funcional se escribe como

$$V_{\lambda=1} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( B - \frac{1}{2} (1 - |\phi|^2) \right)^2 + |D_1\phi + iD_2\phi|^2 \right] d^2x + \pi N \quad (2.5.1.3)$$

### 2.5.2 Desigualdad de Bogomolny

Los integrandos de (2.5.1.3) son no negativos por lo que la integral es necesariamente no negativa. Entonces, la siguiente desigualdad es evidente

$$V_{\lambda=1} \geq \pi N \quad (2.5.2.1)$$

Ecuación (2.5.2.1) es conocida como desigualdad de Bogomolny.

### 2.5.3 Ecuaciones de Bogomolny

El caso interesante es cuando la desigualdad de Bogomolny se satura, i.e.,  $V_{\lambda=1} = \pi N$ . Esto pasa cuando los integrandos de (2.5.1.3) se anulan por separado

$$\begin{cases} D_1\phi + iD_2\phi = 0 \\ B = \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2) \end{cases} \quad (2.5.3.1)$$

Estas son conocidas como las ecuaciones de Bogomolny, y como se observa, son ecuaciones diferenciales de primer orden.

Configuraciones de campo que satisfacen las ecuaciones de Bogomolny (2.5.3.1) necesariamente satisfacen también las ecuaciones de movimiento (2.4.0.1) y (2.4.0.2) y, por lo tanto, son mínimos de la energía.

Estas ecuaciones fueron derivadas por primera vez por Bogomolny en [Bogomolny,gab] utilizando este método de factorización. Esta propiedad de reducción de las ecuaciones de movimiento de segundo orden (2.2.0.2) y (2.2.0.3) a ecuaciones de primero orden se ha encontrado en muchos modelos en teorías de gauge. Uno de los primeros casos se encontró en la teoría de gauge no abeliana de Yang-Mills puro [Jaffe,Taubes]. En este caso, los solitones son llamados *instantones* y corresponden a campos de gauge autoduales. Otra de las teorías de gauge en que podemos hacer un procedimiento de factorización es la teoría de Chern-Simons.

Taubes, en [Manton,396,397], realizó un estudio sobre las ecuaciones de Bogomolny y obtuvo resultados importantes concernientes a vórtices críticos. Estos resultados son presentados en el libro [Jaffe,Taubes]. Uno de estos resultados es el ahora conocido como Teorema de Taubes, el cuál analizaremos los aspectos más importantes en un capítulo posterior. Otro de los resultados importantes fue la reducción de las ecuaciones de Bogomolny a una ecuación escalar conocida como ecuación de Taubes. Esta ecuación fue generalizada por [Manton,Five vortex equations], obteniendo cinco ecuaciones vorticiales con soluciones analíticas conocidas.

#### 2.5.4 Unas palabras sobre vórtices con carga

Al principio no es evidente que los vórtices que hemos estudiado en esta sección son eléctricamente neutros. Para comprobar esto, recordemos que para obtener las soluciones vorticiales usamos el gauge temporal  $A_0 = 0$ . De las ecuaciones de Maxwell, sabemos que el campo eléctrico se puede expresar en función del potencial escalar y vectorial

$$\vec{E} = -\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.5.4.1)$$

Para una configuración estática y en el gauge temporal, es evidente de la ecuación anterior que  $\vec{E} = 0$ . Entonces surge la pregunta, ¿es posible encontrar vórtices con carga eléctrica en el modelo abeliano de Higgs? Lamentablemente, la respuesta es negativa.

En un paper de 1975, Julia y Zee [Julia-Zee] estudiaron el modelo abeliano de Higgs. Usando un *ansatz* radialmente simétrico, como el estudiado en esta sección; y asumiendo condiciones de contorno en el infinito, lograron concluir que una solución estática de energía finita de las ecuaciones de movimiento en un espacio tiempo  $(2+1)$ -dimensional de Minkowski debe satisfacer el gauge temporal, y necesariamente ser eléctricamente neutro. A partir de este trabajo, se aceptó rápidamente que era necesario introducir más estructura a la teoría para permitir la existencia de vórtices cargados. A modo de obtener estos vórtices es necesario agregar un término de Chern-Simons, de modo que la densidad lagrangiana es [Paul-Khare]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\bar{\phi}D^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(m^2 - |\phi|^2)^2 + \frac{\kappa}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha \quad (2.5.4.2)$$

## CINCO ECUACIONES VORTICIALES

En este capítulo enunciaremos el Teorema de Taubes y mostraremos los pasos más importantes para su demostración. Este teorema aparece por primera vez en [Taubes, N vortex]. El teorema muestra que un conjunto no ordenado de puntos en el plano complejo (no necesariamente distintos) determina únicamente una solución analítica de las ecuaciones de Bogomolny, también se demuestra que esta es la única solución  $C^\infty$ . La importancia del teorema es clara, sin embargo, no provee con una solución explícita de las ecuaciones de Bogomolny en el plano. Además de presentar este teorema, en la presente sección, mostraremos cinco ecuaciones vorticiales que dan soluciones explícitas en superficies de Riemann.

## 3.1 TEOREMAS DE TAUBES

Los teoremas de Taubes proveen una descripción de los espacios de módulo de soluciones de las ecuaciones de Bogomolny. El espacio de módulos de las soluciones no es más que el espacio de soluciones módulo transformaciones de gauge. El primer teorema de Taubes es el siguiente:

**Teorema 1 (Taubes 1)** *Dado un entero  $N \geq 0$  y un conjunto de puntos  $\{Z_i\}, i = 1, 2, \dots, k$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$  con multiplicidades  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , tal que  $\sum d_j = N$ , existe una solución de las ecuaciones de Bogomolny que es única a menos de una transformación de gauge, con las siguientes propiedades:*

1. *La solución es globalmente  $C^\infty$ .*
2. *Los ceros de  $\phi$  son el conjunto de puntos  $\{Z_i\}$ . Además, cerca de sus ceros el campo se comporta como*

$$\phi \sim c_j (z - Z_j)^{n_j}, \quad c_j \neq 0, \quad (3.1.0.1)$$

*donde  $n_j$  es la multiplicidad de  $Z_j$ .*

Una de las consecuencias es que el número de vórtice es igual a  $N$ . Llamamos a esta solución una solución  $N$ -vorticial. Nótese que el teorema se puede usar, de forma totalmente análoga, para  $N < 0$  ya que una solución anti-vorticial corresponde a tomar la conjugada compleja de una solución vorticial.

Es fácil ver que para  $N = 0$ , la solución es equivalente a la solución trivial  $A_z = 0$  y  $\phi = 1$ .

**Teorema 2 (Taubes 2)** *Cualquier solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $N > 0$  y  $\lambda = 1$  es equivalente a una solución  $N$ -vorticial de las ecuaciones de Bogomolny.*

Una consecuencia de este teorema es que soluciones vorticiales del modelo abeliano de Higgs son  $N$ -vórtices o  $N$ -antivórtices, es decir, no existen soluciones vórtice-antivórtice. Esto significa que, físicamente, las soluciones de las ecuaciones de Bogomolny son estables y su energía es la mínima.

### 3.1.1 Espacio de módulos

El espacio de módulos para las soluciones de las ecuaciones vorticiales está implícito en el primer teorema de Taubes. La descripción de una solución  $N$ -vorticial está descrita enteramente por  $N$  puntos en el plano complejo, por lo que podemos argumentar que  $\mathcal{M} = \mathbb{C}^N$ . Los puntos del plano pueden ser elegidos sin ningún orden en especial, por lo que para no contar  $d_k$  veces un punto, debemos cocientar  $\mathcal{M}$  por el grupo simétrico  $S_N$ . Entonces,  $\mathcal{M} = \mathbb{C}^N / S_N = \mathbb{C}^N$ .

## 3.2 ESTRUCTURA COMPLEJA DE LAS ECUACIONES DE BOGOMOLNY

En esta sección veremos como las ecuaciones de Bogomolny esconden una estructura compleja que será de gran ayuda en 3.3.

Consideremos la primera ecuación en (2.5.3.1) y desarrollemosla:

$$D_1\phi + iD_2\phi = (\partial_1 + i\partial_2)\phi - i(A_1 + iA_2)\phi = 0. \quad (3.2.0.1)$$

Definimos la derivada compleja  $\partial_{\bar{z}}$  y el campo de gauge complejo  $A_{\bar{z}}$  como

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \\ A_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(A_1 + iA_2). \end{aligned}$$

Combinamos ambos en la derivada covariante compleja, definida como,  $D_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} - iA_{\bar{z}}$ . Entonces, la primera ecuación de Bogomolny se escribe en forma compacta como

$$D_{\bar{z}}\phi = 0. \quad (3.2.0.2)$$

Ecuación (3.2.0.2) guarda una semejanza con la versión compleja de las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $\partial_{\bar{z}}f = 0$ . Entonces, podemos decir que la primera ecuación de Bogomolny es una versión covariante de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que, dan a entender que  $\phi$  es una función analítica en el sentido covariante. Esto es más claro si consideramos que existe una función  $w(z, \bar{z})$  tal que  $\partial_{\bar{z}}(e^{-w}\phi) = 0$ . Para que esto se cumpla,  $w$  debe satisfacer  $\partial_{\bar{z}}w = iA_{\bar{z}}$ . Entonces, la función compleja  $f = e^{-w}\phi$  es una función analítica, por lo tanto, tiene ceros aislados. Estos ceros coinciden con los ceros de  $\phi$  pues  $e^{-w}$  es no nula en todo punto. Además,  $f$  localmente tiene la forma

$$f(z) \sim c_j(z - Z_j)^{n_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

De aquí podemos leer el comportamiento de  $\phi$  cerca de sus ceros.

Pero, queda la pregunta de que si  $\partial_{\bar{z}}w = iA_{\bar{z}}$  tiene solución. Ya que  $\frac{1}{u-z}$  es la función de Green del operador  $\partial_{\bar{z}}$ , la solución puede escribirse como

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u-z|<\epsilon} \frac{iA_{\bar{z}}(z, \bar{z})}{u-z} du d\bar{u} \quad (3.2.0.3)$$

Debido a la ecuación (3.2.0.2), una vez que se obtiene una solución para  $\phi$ , el campo de gauge queda determinado

$$A_z = i\partial_z \log \bar{\phi}, \quad A_{\bar{z}} = -i\partial_{\bar{z}} \log \phi \quad (3.2.0.4)$$

## 3.3 REDUCCIÓN A UNA ECUACIÓN ESCALAR

Queremos escribir la segunda ecuación de Bogomolny en forma compleja. Para esto, escribimos  $A_1$  y  $A_2$  en términos de  $A_z$  y  $A_{\bar{z}}$  y luego reemplazando en B, obteniéndose

$$B = 2i(\partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z) \quad (3.3.0.1)$$

La forma de la segunda ecuación de Bogomolny no cambia, simplemente el campo magnético se escribe de otra forma. Para combinar ambas ecuaciones de Bogomolny en una sola ecuación, usemos (3.2.0.4) en (3.3.0.1)

$$B = -2i^2(\partial_z \partial_{\bar{z}} \log \phi - \partial_{\bar{z}} \partial_z \log \bar{\phi}) = 2\partial_z \partial_{\bar{z}}(\log \phi + \log \bar{\phi}) = 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \log |\phi|^2. \quad (3.3.0.2)$$

Entonces, la segunda ecuación de Bogomolny se escribe

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log |\phi|^2 = \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2) \quad (3.3.0.3)$$

Si hacemos  $|\phi|^2 = e^{2u}$  y notamos que  $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ , entonces (3.3.0.3) se escribe como

$$-\Delta u + e^{2u} - 1 = 0 \quad (3.3.0.4)$$

Ecuación (3.3.0.4) está incompleta pues  $u$  tiene una singularidad logarítmica en los ceros de  $\phi$ , en donde tiende a  $-\infty$ . Entonces, ecuación (3.3.0.4) debe suplementarse con funciones delta con soporte justamente en estos ceros,

$$-\Delta u + e^{2u} - 1 = -4\pi \sum_{j=1}^N \delta(z - Z_j) \quad (3.3.0.5)$$

Ecuación (3.3.0.5) es conocida como la ecuación de Taubes. Hasta el momento de escribir este trabajo, no se conocen soluciones explícitas a esta ecuación en el espacio plano.

## 3.4 VÓRTICES EN SUPERFICIES RIEMANNIANAS

En la sección anterior introducimos la ecuación de Taubes que describe vórtices en el plano, además, mencionamos que no existen hasta la fecha soluciones analíticas en el plano. Entonces, es natural preguntarse si pueden existir soluciones analíticas en espacios curvos para la ecuación de Taubes. Tales vórtices, si existen, se llaman vórtices integrables.

Los objetos de estudio son un campo escalar  $\phi$  y un campo de gauge  $A$ , que son una sección y una conexión en un fibrado  $U(1)^1$  sobre  $M_0$  respectivamente. Aquí  $M_0$  es una superficie de Riemann que puede ser compacta o no (pero con un borde en el infinito). En coordenadas complejas  $z = x^1 + ix^2$ , la métrica en  $M_0$  es

$$ds_0^2 = \Omega_0((dx^1)^2 + (dx^2)^2) = \Omega_0 dz d\bar{z}, \quad (3.4.0.1)$$

donde  $\Omega_0$  es un factor conforme que depende de las coordenadas. El campo de gauge tiene curvatura  $F = dA$ , o en componentes,  $F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ . El campo magnético físico es  $B = \frac{1}{\Omega_0} F_{12}$ . Con estas generalizaciones, las ecuaciones de Bogomolny se escriben

$$D_1 \phi + iD_2 \phi = 0, \quad (3.4.0.2)$$

$$B = \frac{\Omega_0}{2}(1 - |\phi|^2). \quad (3.4.0.3)$$

<sup>1</sup> Localmente, la sección se representa por una función compleja sobre  $M_0$  y la conexión como una 1-forma real con componentes  $A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2$ .

Las ecuaciones de Taubes también se modifican y toman la siguiente forma

$$-\Delta u + \Omega_0 e^{2u} - \Omega_0 = 0, \quad (3.4.0.4)$$

donde debemos tener en cuenta el comportamiento logarítmico de  $u$  cerca los ceros de  $\phi$

$$u \sim \log |z - Z| + \text{constante}. \quad (3.4.0.5)$$

De esta forma podemos ignorar las funciones delta de Dirac en (3.3.0.5). Las soluciones vorticiales no deberían tener más singularidades en  $M_0$ . Si  $u$  tiene un máximo en  $M_0$  el laplaciano de  $u$  es negativo, además, debido a la ecuación (3.4.0.4),  $u \leq 0$  en el máximo y por lo tanto también en todo punto, a causa del principio del máximo. Este argumento es válido sólo si  $M_0$  es compacta. En el caso de que no lo sea debemos imponer la condición  $|\phi| = 1$  o  $u = 0$  en el borde.

Podemos generalizar aún más la ecuación (3.4.0.4) de la siguiente manera

$$-\Delta u + \Omega_0 (C_0 - C e^{2u}) = 0, \quad (3.4.0.6)$$

donde  $C_0$  y  $C$  son constantes reales. Es claro, que uno puede reescalar estas constantes multiplicando por un factor que se puede absorber en el factor conforme. Entonces, sin pérdida de generalidad podemos hacer que  $C_0$  y  $C$  tomen tres valores estándar  $-1, 0$  o  $1$ . Esto hace que hayan nueve posibles combinaciones y, por lo tanto, nueve ecuaciones vorticiales. De estas nueve ecuaciones sólo cinco tienen soluciones vorticiales.

El segundo y tercer términos de (3.4.0.6) describen al campo magnético, entonces, para que describa un campo magnético físico se debe cumplir que  $-C_0 + C e^u \geq 0$ . Esto excluye cuatro casos:  $C_0 = 0$  o  $C_0 = 1$ , combinados con  $C = -1$  o  $C = 0$ . Los cinco casos restantes se resumen en la siguiente cuadro

Vórtices	$C_0$	$C$
Vórtices hiperbólicos (Taubes)	-1	-1
Vórtices de Popov	0	1
Vórtices de Jackiw-Pi	1	1
Vórtices de Bradlow	-1	0
Vórtices de Ambjorn-Olesen	-1	1

Cuadro 1: Ecuaciones vorticiales

Los vórtices hiperbólicos fueron obtenidos por primera vez por Witten [witten77] mediante una reducción de dimensión de una teoría de Yang-Mills  $SU(2)$ . La motivación inicial de Witten era obtener soluciones autoduales  $F_{\mu\nu} = \bar{F}_{\mu\nu}$  que posean simetría ante rotaciones y transformaciones de gauge. Esto lo llevó a plantear un ansatz para el campo de gauge no abeliano  $A_\mu^a$  que reducía la acción de Yang-Mills a la acción de Maxwell-Higgs pero en un espacio con métrica  $g^{\mu\nu} = r^2 \delta^{\mu\nu}$ , es decir, un espacio con curvatura constante negativa  $-1$ , llamado el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Las ecuaciones de autodualidad correspondían a las ecuaciones de Bogomolny con  $\Omega_0 = \frac{1}{r^2}$ . En  $\mathbb{H}^2$ , la ecuación de Taubes se reducía a la ecuación de Liouville, cuya solución general es conocida y está caracterizada por una función analítica arbitraria  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ .

La ecuación de Popov [Popov] surgió de una forma completamente análoga a lo obtenido por Witten, pero para una teoría de Yang-Mills  $SU(1,1)$ . En vez de un espacio hiperbólico, las soluciones de Popov son integrables en una esfera, que tiene curvatura constante positiva  $+1$ . La solución está dada por funciones racionales en la esfera  $R : S^2 \rightarrow S^2$  [Manton sobre Popov].



Los vórtices de Jackiw-Pi [Jackiw-Pi 1y2] aparecen en la teoría abeliana de Chern-Simons y son integrables en el plano o en un toro (condiciones de contorno periódicas en el plano).

Los vórtices de Bradlow fueron introducidos por primera vez en [Manton five] son integrables en  $H^2$ . Este caso es el caso límite de la ecuación de Taubes cuando  $N$  alcanza el valor máximo permitido en una superficie compacta.

La ecuación de Ambjorn-Olesen apareció en [Manton five 13 y 14] en su estudio sobre inestabilidades de campos magnéticos fuertes en la teoría electrodébil.

Todas estas ecuaciones, conocidas como ecuaciones de vórtices exóticas, son integrables en dos dimensiones, pero todas en una superficie de Riemann distinta. Mirando al cuadro anterior uno puede ver una conexión entre el coeficiente  $C_0$  y la curvatura de la superficie de Riemann en la que son integrables. Esta conexión es presentada por primera vez en [Manton five].

El funcional de energía correspondiente es análogo al del modelo abeliano de Higgs pero con coeficientes distintos:

$$V_\lambda = \frac{1}{2} \int_{M_0} \left[ B^2 - \frac{2C}{\Omega_0} D_i \phi \overline{D_i \phi} + \frac{\lambda}{4} (-C_0 + C|\phi|^2)^2 \right] \Omega_0 d^2x. \quad (3.4.0.7)$$

El argumento a la Bogomolny muestra que para  $\lambda = 1$  el funcional se puede escribir como

$$V_{\lambda=1} = \frac{1}{2} \int_{M_0} \left[ \left( B^2 + \frac{1}{2} (C_0 - C|\phi|^2) \right)^2 - \frac{2C}{\Omega_0} |D_1 \phi + i D_2 \phi|^2 \right] \Omega_0 d^2x - \pi C_0 N. \quad (3.4.0.8)$$

Si las ecuaciones de Bogomolny se satisfacen la energía es estacionaria y tiene el valor de  $-\pi C_0 N$ . En el caso de que  $C \leq 0$ , el integrando de (3.4.0.8) es positivo, por lo tanto, la energía es minimizada.

### 3.5 VÓRTICES COMO MÉTRICAS CÓNICAS

En [Manton,23], N. Manton sugiere considerar la métrica original  $ds_0^2$  conformemente reescalada con el cuadrado del campo de Higgs,

$$ds^2 = e^{2u} ds_0^2, \quad (3.5.0.1)$$

donde  $|\phi|^2 = e^{2u}$ . Más tarde, esta métrica fue estudiada a detalle por Baptista [Manton,15], razón por la cuál, a partir de ahora la métrica (3.5.0.1) será llamada métrica de Baptista. En palabras de Manton: *ds<sup>2</sup> define una geometría intrínseca de una solución vorticial, y en ciertos casos, resulta más fácil describir y visualizar esta geometría intrínseca que estudiar por separado ds<sub>0</sub><sup>2</sup> y e<sup>2u</sup>.*

La métrica de Baptista no es una métrica riemanniana regular pues se anula en los centros de los vórtices donde  $|\phi| = 0$ . Una de las consecuencias del Teorema de Taubes es que  $\phi$ , por lo tanto  $u$ , tienen una forma asintótica cerca de estos centros dada por (3.1.0.1). Consideremos el caso más simple,  $N = 1$ , entonces  $e^{2u} \sim \mu|z|^2$ , donde  $\mu$  es una constante positiva. La métrica  $ds_0^2$  se escribe alrededor del centro como  $ds_0^2 = \Omega_0(0) dz d\bar{z}$  y por lo tanto, la métrica de Baptista se escribe como  $\mu\Omega_0(0)|z|^2 dz d\bar{z} \sim r^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)$  en coordenadas polares. Haciendo el cambio  $\rho = \frac{1}{2}r^2$  y  $\chi = 2\theta$ , la métrica de Baptista se escribe como la métrica plana en coordenadas polares  $d\rho^2 + \rho^2 d\chi^2$ , pero el nuevo ángulo polar va de 0 a  $4\pi$ . Esto define una métrica cónica, con exceso  $2\pi$ .

Baptista derivó una relación simple entre la curvatura de la métrica original y la curvatura de la métrica de Baptista. Para la derivación de esta ecuación seguimos el pro-

cedimiento de Manton. Comenzamos con la fórmula de la curvatura gaussiana para la métrica original,

$$K_0 = -\frac{1}{2\Omega_0} \nabla^2 \log \Omega_0 \quad (3.5.0.2)$$

La métrica de Baptista, con factor conforme  $\Omega = e^{2u}\Omega_0$ , tiene curvatura gaussiana

$$K = -\frac{1}{2\Omega} \nabla^2 \log \Omega = -\frac{1}{2e^{2u}\Omega_0} \nabla^2 (2u + \log \Omega_0),$$

de modo que ambas curvaturas están relacionadas por

$$-\frac{1}{\Omega_0} \nabla^2 u = -K_0 + Ke^{2u}.$$

Pero  $u$  también satisface la ecuación de Taubes,

$$-C_0 + Ce^{2u} = -\frac{1}{\Omega_0} \nabla^2 u = -K_0 + Ke^{2u}.$$

Multiplicando por  $\Omega_0$ , llegamos a la ecuación de Baptista

$$(K_0 - C_0)\Omega_0 = (K - C)\Omega \quad (3.5.0.3)$$

Esta ecuación permite desvelar una simetría escondida de las soluciones vorticiales, a la que Baptista llama propiedad de transitividad, que permite construir soluciones vorticiales a partir de otras deformando la métrica. Para ver más explícitamente esta propiedad de superposición de soluciones vorticiales, sea  $h$  una solución vorticial en la superficie de Riemann  $\Sigma$  con número vorticial  $N$ , por lo tanto, satisface la ecuación de Taubes

$$-\Delta h + \Omega_0(C_0 - Ce^{2u}) = 0$$

En  $\Sigma$  definamos la métrica cónica (3.5.0.1) con  $\Omega = e^{2u}\Omega_0$ . Sea  $\bar{h}$  una solución vorticial con número vorticial  $\bar{N}$  en  $(\Sigma, \Omega)$ , por lo tanto, satisface la ecuación de Taubes con este factor conforme modificado

$$\Delta \bar{h} + \Omega(C - C_1 e^{2\bar{h}}) = 0$$

Si sumamos ambas ecuaciones diferenciales encontramos que

$$\begin{aligned} -\Delta(h + \bar{h}) + C(\Omega - \Omega_0 e^{2h}) + \Omega_0 C_0 - \Omega C_1 e^{2\bar{h}} &= 0 \\ -\Delta(h + \bar{h}) + \Omega_0(C_0 - C_1 e^{2(h+\bar{h})}) &= 0 \end{aligned}$$

y que  $e^{h+\bar{h}}$  tiene número vorticial  $N + \bar{N}$ . Entonces, la superposición de una solución vorticial con constantes  $(C, C_1)$  en una superficie de Riemann con métrica reescalada, con una solución vorticial con constantes  $(C_0, C)$  produce una solución vorticial con constantes  $(C_0, C_1)$  y con número vorticial igual a la suma de los números vorticiales de cada solución.

Parafraseando el resultado anterior, si queremos obtener una solución vorticial con número de vórtice  $N + \bar{N}$  en una superficie de Riemann  $(\Sigma, \Omega_0)$ , podemos primero hallar una solución  $N$ -vorticial en  $(\Sigma, \Omega_0)$  y luego encontrar una solución  $\bar{N}$ -vorticial en  $(\Sigma, e^{2u}\Omega_0)$ . Por supuesto, el procedimiento opuesto es posible. Este resultado es poderoso, ya que conociendo una solución 1-vorticial en cualquier superficie, aplicando recursivamente esta regla, uno puede construir una solución  $N$ -vorticial.

## 3.5.1 Vórtices integrables

En esta sección analizaremos el caso en que la ecuación de Taubes (3.4.0.4) es integrable, es decir, presenta soluciones analíticas, en el sentido de que se pueden escribir explícitamente.

Cuando la curvatura  $K_0$  de la superficie de fondo  $(M_0, \Omega_0)$  es constante, con un valor tal que satisface la ecuación de Baptista (3.5.0.3), diremos que la ecuación de Taubes o los vórtices son integrables. Entonces, los vórtices son integrables cuando  $K_0 = C_0$ . Además, la métrica de Baptista en la superficie  $(M, \Omega)$  tiene una curvatura  $K = C$  lejos de las singularidades cónicas. En este caso de curvatura constante, el problema se reduce a resolver la ecuación de Liouville. Las soluciones de la ecuación se conocen y han sido bien estudiadas. Estas soluciones se escriben en términos de una función holomorfa  $f$ , y las singularidades cónicas corresponden a puntos de ramificación de  $f$ , donde la derivada se anula. Para algunos de los vórtices, esta construcción es bien conocida, por ejemplo, los vórtices hiperbólicos obtenidos por Witten discutidos en 3.4.

La reducción a la ecuación de Liouville es la siguiente. Escribamos el factor conforme de la métrica de Baptista como  $\Omega = e^{2v}$ . Entonces, usando la ecuación de curvatura gaussiana para  $\Omega$ , esta se reduce a la ecuación de Liouville

$$\nabla^2 v = -C e^{2v}, \quad (3.5.1.1)$$

donde reemplazamos  $K = C$ . La solución general de (3.5.1.1) en una región simplemente conexa en el plano  $z$  es

$$\Omega = e^{2v} = \frac{4}{(1 + C|f(z)|^2)^2} \left| \frac{df}{dz} \right|^2, \quad (3.5.1.2)$$

donde  $f$  es una función holomorfa. Esta reducción también se puede hacer para la métrica de fondo, obteniéndose una expresión análoga a (3.5.1.2)

$$\Omega_0 = \frac{4}{(1 + C_0|z|^2)^2}. \quad (3.5.1.3)$$

Notemos que  $|\phi|^2 = e^{2u} = \Omega/\Omega_0$ , esto nos da una expresión explícita para la solución a todos los casos integrables

$$|\phi|^2 = \frac{(1 + C_0|z|^2)^2}{(1 + C|f(z)|^2)^2} \left| \frac{df}{dz} \right|^2. \quad (3.5.1.4)$$

Uno puede elegir una gauge para el campo de Higgs y eliminar cualquier fase que pueda surgir para obtener

$$\phi = \frac{1 + C_0|z|^2}{1 + C|f(z)|^2} \frac{df}{dz}. \quad (3.5.1.5)$$

En el caso particular de la ecuación de Taubes en el espacio hiperbólico tenemos  $C_0 = C = -1$  y  $f$  es una función holomorfa del plano hiperbólico al plano hiperbólico  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . En el modelo del disco de Poincaré,  $f$  es una función racional de Blaschke

$$f(z) = \prod_{m=1}^{N+1} \frac{z - a_m}{1 - \bar{a}_m z} \quad (3.5.1.6)$$

con  $|a_m| < 1$ . El ejemplo más simple es cuando  $a_m = 0$ , de modo que  $f(z) = z^{N+1}$ . Claramente,  $\frac{df}{dz}$  tiene  $N$  ceros, lo que indica que hay  $N$  vórtices. Todos estos vórtices son coincidentes en el origen y el campo de Higgs toma la forma

$$\phi = \frac{(N+1)z^N(1-|z|^2)}{1-|z|^{2(N+1)}} \quad (3.5.1.7)$$

Nótese que se satisface  $|\phi| \rightarrow 1$  cuando nos acercamos al borde del disco de Poincaré  $|z| \rightarrow 1$ .

Fórmulas similares se han hallado en la construcción de soluciones vorticiales para los vórtices de Popov con  $C_0 = C = 1$ . Estos vórtices viven en una esfera unitaria, y son contruidos usando una función meromorfa  $f$  de la esfera de Riemann a la esfera de Riemann. Tales funciones meromorfas deben ser racionales para asegurar la finitud del número de vórtice  $N$ :

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (3.5.1.8)$$

donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios en  $z$  sin raíces en común. Si ambos polinomios tienen grado  $n$ , entonces  $\frac{df}{dz}$  tiene  $N = 2n - 2$  ceros. Nótese que los vórtices sólo pueden tener número vorticial par, sin embargo, es posible que existan soluciones con  $N$  impar.

## VÓRTICES INTEGRABLES A PARTIR DE AUTODUALIDAD

Contatto y Dunajski demostraron que las cinco soluciones vorticiales integrables obtenidas por Manton surgen como reducción de simetría de las ecuaciones de autodualidad de Yang-Mills en una cuatro variedad. En este capítulo introduciremos brevemente la teoría de Yang-Mills y las ecuaciones de (anti-)autodualidad, mostrando algunas de las soluciones instantónicas. También mostraremos explícitamente el cálculo hecho por Witten y obtendremos las soluciones vorticiales ya vistas en el plano hiperbólico. Luego, nos evocaremos a mostrar los resultados de Contatto y Dunajski, basándonos principalmente en [Contatto-Dunajski], dando un bosquejo de demostración del resultado principal. Para esto, vamos a introducir también el formalismo CSDR (*Coset Space Dimensional Reduction*) que nos permitirá reducir una teoría de Yang-Mills definida en una variedad  $\mathcal{M}$  a un modelo de Higgs en una dimensión menor.

### 4.1 TEORÍA DE YANG-MILLS

Los instantones son solitones topológicos de la teoría de Yang-Mills pura definidas en un espacio euclídeo cuatrimensional. Consideraremos a los instantones como solitones estáticos en un espacio de cuatro dimensiones, de modo que son del mismo tipo que los vórtices que estuvimos estudiando.

La motivación para considerar un espacio euclídeo cuatrimensional y no el espacio tiempo de Minkowski  $3+1$ -dimensional es que en la Teoría Cuántica de Campos debemos calcular integrales de camino, las cuáles deben ser continuadas analíticamente (con una rotación de Wick) para estar bien definidas. Llamaremos al tiempo euclídeo  $it$  como la coordenada  $x^4$  en una teoría estática. La importancia de las soluciones clásicas es que proveen la contribución dominante a la integral de caminos, en particular, los instantones generan efectos cuánticos no perturbativos.

En el contexto más general de las teorías de Gauge, las teorías de Yang-Mills son ejemplos especiales de teorías de gauge con grupos de simetría no abelianos.

Consideremos una teoría de gauge  $SU(2)$  con un potencial de gauge  $A_\mu, \mu = 1, \dots, 4$ , tomando valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . El tensor de campo asociado es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (4.1.0.1)$$

La teoría de Yang-Mills pura está descrita por la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{8} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (4.1.0.2)$$

donde ahora usamos la métrica euclidiana es  $(+, +, +, +)$ . La variación de esta acción permite obtener la ecuación de campo de Yang-Mills <sup>1</sup>

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.0.3)$$

Introduzcamos la 2-forma  $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  que representa el campo electromagnético. En un espacio de cuatro dimensiones el dual de Hodge de una 2-forma es otra dos forma. En componentes, el dual de Hodge de  $F$ ,  $\star F$ , está definido como

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (4.1.0.4)$$

<sup>1</sup> El cálculo explícito de la variación de la acción de Yang-Mills se muestra en el apéndice A.1

donde  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  es el tensor totalmente antisimétrico con la convención  $\epsilon_{1234} = -1$ . Usando el hecho de que  $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \text{Tr}(\star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu})^2$ , la acción (4.1.0.2) puede ser reescrita como

$$S = -\frac{1}{16} \int [\text{Tr}((F_{\mu\nu} \mp \star F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} \mp \star F_{\mu\nu})) \pm 2 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu})] d^4x \quad (4.1.0.5)$$

Definamos la siguiente cantidad

$$N = -\frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr}(F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}) d^4x, \quad (4.1.0.6)$$

que no es más que el segundo número de Chern para un campo de gauge  $SU(2)$  en  $\mathbb{R}^4$ . El primer término es un cuadrado, por lo que es no negativo. Esto conlleva a la siguiente desigualdad

$$S \geq \pi^2 |N|, \quad (4.1.0.7)$$

que es análoga a la desigualdad de Bogomolny que derivamos para los vórtices. Estamos interesados con campos que hagan la acción finita, esto implica que  $F_{\mu\nu} = 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , esto implica que cuando  $|x| \rightarrow \infty$  el campo de gauge tiende a un gauge puro

$$A_\mu = -\partial_\mu g_\infty g_\infty^{-1} \quad (4.1.0.8)$$

para algún  $g_\infty \in SU(2)$  definido en el infinito espacial. En este caso  $N$  es un número entero y es igual al grado del mapeo  $g_\infty : S_\infty^3 \rightarrow SU(2)$ .

De la ecuación (4.1.0.5) es inmediato que la desigualdad (4.1.0.8) se satura cuando los campos son autoduales o anti autoduales

$$F_{\mu\nu} = \pm \star F_{\mu\nu}. \quad (4.1.0.9)$$

Estas son las ecuaciones de (anti)autodualidad de Yang-Mills. Soluciones de estas ecuaciones que hacen finita la acción son llamados (anti)instantones.  $N$  es un entero positivo para campos autoduales no triviales y se interpreta como el número de instantones (análogamente  $|N|$  es el número de anti instantones si  $N < 0$ ).

La solución general para el instantón con  $N = 1$  fue obtenida por primera vez por Belavin *et al.* [Manton,47]. Más tarde, 't Hooft [Manton,402], obtuvo esta y otras soluciones multinstantónicas utilizando un ansatz. Para presentar el ansatz de 't Hooft, introduzcamos el tensor antisimétrico  $\sigma_{\mu\nu}$ , definido como

$$\sigma_{i4} = \tau_i, \quad \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.1.0.10)$$

y que tiene la propiedad de ser anti autodual:  $\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\mu\nu}$ . El potencial de gauge autodual se contruye a partir de un campo escalar real  $\rho$  como

$$A_\mu = \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} \partial_\nu \log \rho \quad (4.1.0.11)$$

Si sustituimos este ansatz en (4.1.0.9) llegamos a

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \rho = 0 \quad (4.1.0.12)$$

que no es más que la ecuación de Laplace en  $\mathbb{R}^4$ . La solución instantónica con  $N = 1$  es generada por una solución que tiene un polo en un cuadvectores arbitrario constante  $a \in \mathbb{R}^4$

$$\rho(x) = 1 + \frac{\lambda^2}{|x - a|^2}. \quad (4.1.0.13)$$

<sup>2</sup> Demostración en Apéndice A.2

<sup>3</sup> Para una pequeña introducción, véase el Apéndice

La constante positiva  $\lambda$  representa el ancho del instantón, en el sentido que la acción es máxima en  $x = a$  y decae a la mitad cuando  $|x - a| \leq \lambda$ . Esta solución puede ser usada para generar instantones con  $N$  arbitrario haciendo que la solución de la ecuación de Laplace tenga  $N$  polos distintos

$$\rho(x) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2}{|x - a_j|^2}, \quad (4.1.0.14)$$

con anchos y posiciones arbitrarias.

Este ansatz lleva a que el campo de gauge sea singular. Considere de nuevo la solución con  $N = 1$  con  $a = 0$ , usando (4.1.0.11) podemos ver que el potencial tiene una singularidad en  $x = 0$

$$A_{\mu}^{\text{sing}} = \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} \frac{-2\lambda^2 x^{\nu}}{x^2(x^2 + \lambda^2)}. \quad (4.1.0.15)$$

Sin embargo, mediante una transformación de gauge singular podemos remover la singularidad

$$A_{\mu}^{\text{reg}} = -i\sigma_{\mu\nu} \frac{x^{\nu}}{(x^2 + \lambda^2)}. \quad (4.1.0.16)$$

#### 4.1.1 Espacio de módulos del instantón $SU(2)$

Para especificar completamente el instantón (4.1.0.13) hace falta conocer cinco parámetros reales, a saber, las cuatro componentes de  $a$  y el ancho del instantón  $\lambda$ . Además de estos parámetros, se debe incluir una transformación de gauge  $SU(2)$  para especificar la orientación del instantón. Esto agrega tres parámetros extra, teniendo un total de ocho. Por lo tanto, el espacio de módulos del instantón  $N = 1$ ,  $\mathcal{M}_1$ , tiene ocho dimensiones.

Resulta de mucho interés en matemática y física matemática estudiar estos espacios de módulos y sus métricas, en parte, debido a los trabajos de Donaldson y Witten sobre 4-variedades [Manton,111,112]. Para instantones en  $\mathbb{R}^4$  estos espacios de módulos son ejemplos de variedades hiperkähler. La métrica en el espacio de módulos se define restringiendo la métrica natural del espacio de configuraciones a la subvariedad de instantones. Atiyah, Hitchin y Singer [Manton,19] mostraron que el espacio de módulos para el instantón con carga  $N$ ,  $\mathcal{M}_N$ , tiene dimensión  $8N$ . Cuando todos los instantones están muy separados entre ellos, los  $8N$  parámetros pueden pensarse como 8 parámetros para cada uno de los  $N$  instantones.

#### 4.1.2 Solución multinstantónica de Witten

Históricamente, la primera solución multinstantónica fue encontrada por Witten [Witten77] antes del descubrimiento de las soluciones de  $t'$  Hoof. Como se explicó en 3.4 el enfoque de Witten fue encontrar instantones con simetría cilíndrica en cuatro dimensiones (simetría ante rotaciones alrededor del eje  $x^4$ ). Explícitamente, el ansatz de Witten plantea el siguiente campo de gauge  $SU(2)$

$$\begin{aligned} A_i^a &= \frac{\phi_2 + 1}{r^2} \epsilon_{j a k} x_k + \frac{\phi_1}{r^3} [\delta_{j a} r^2 - x_j x_a] + A_1 \frac{x_j x_a}{r^2}, \\ A_0^a &= \frac{A_0 x^a}{r}. \end{aligned} \quad (4.1.2.1)$$

donde los índices  $j, k$  son índices espaciales y  $a$  es índice de isoespín, es decir, indica el generador  $t^a$  de  $SU(2)$ . Además,  $\phi_1, \phi_2, A_0$  y  $A_1$  son funciones de  $x^4$  y  $r$ . Witten argumentó que este ansatz es el más general con simetría ante rotaciones y transformaciones de gauge. Usando (4.1.2.1) uno puede calcular el tensor de campo  $F_{\mu\nu}^a$  y su dual  $\star F_{\mu\nu}^a$ :

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &= (\partial_4 \phi_2 - A_0 \phi_1) \frac{\epsilon_{iak} x_k}{r^2} + (\partial_4 \phi_1 + A_0 \phi_2) \frac{(\delta_{ai} r^2 - x_a x_i)}{r^3} + r^2 (\partial_4 A_1 - \partial_1 A_0) \frac{x_a x_i}{r^4}, \\ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a &= -\frac{\epsilon_{ias} x_s}{r^2} (\partial_1 \phi_1 + A_1 \phi_2) + \frac{(\delta_{ai} r^2 - x_a x_i)}{r^3} (\partial_1 \phi_2 - A_1 \phi_1) + \frac{x_a x_i}{r^4} (1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) \end{aligned} \quad (4.1.2.2)$$

donde  $\partial_1 = \partial/\partial r$ . La forma de (4.1.2.2) sugiere que consideremos a  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  como un campo escalar complejo de Higgs interactuando con un campo de gauge bidimensional  $A_\mu = (A_0, A_1)$ , con derivada covariante  $D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \epsilon_{ij} A_\mu \phi_j$ . Insertando (4.1.2.2) en la acción de Yang-Mills (4.1.0.2) se tiene

$$S = \frac{1}{8} \int d^3x \int dt F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dr \left[ \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{8} r^2 F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} r^{-2} (1 - |\phi|^2)^2 \right], \quad (4.1.2.3)$$

donde ahora  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . La acción de Yang-Mills se ha reducido a una versión modificada del funcional de energía del modelo abeliano de Higgs. De hecho, en un espacio curvo con métrica  $g^{\mu\nu}$ , el funcional de energía se puede escribir

$$\int d^2x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_i D_\nu \phi_i + \frac{1}{8} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} (1 - |\phi|^2)^2 \right], \quad (4.1.2.4)$$

donde  $g = \det g^{\mu\nu}$ . Esta ecuación coincide con (4.1.2.3) si  $g^{\mu\nu} = r^2 \delta^{\mu\nu}$ . Esta métrica corresponde a un espacio con curvatura constante negativa igual a  $-1$ . Es decir, que  $x^4$  y  $r$  son coordenadas en un espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

Si insertamos los tensores de campo (4.1.2.2) en las ecuaciones de autodualidad, estas se reducen a las ecuaciones de Bogomolny para vórtices hiperbólicos discutidos en 3.4. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} D_4 \phi + i D_r \phi &= 0, \\ B - \frac{1}{2r^2} (1 - |\phi|^2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.2.5)$$

donde  $B = \partial_4 A_1 - \partial_r A_0$ . Estas ecuaciones se resuelven derivando la ecuación de Taubes correspondiente y luego reduciéndola a la ecuación de Liouville. Esto lo hicimos explícitamente en 3.5.1.

## 4.2 CINCO ECUACIONES VORTICIALES A PARTIR DE AUTODUALIDAD

En esta sección expondremos el trabajo de Conttato y Dunajski [ContDunaj] sobre la obtención de las cinco ecuaciones vorticiales a partir de reducciones de simetría de las ecuaciones de anti autodualidad de Yang-Mills en cuatro dimensiones.

### 4.2.1 El grupo $G_C$

El elemento clave de esta sección es el grupo  $G_C \subset SL(2, \mathbb{C})$ , que es un grupo de Lie que consiste de matrices  $K$  tales que

$$K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} K^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4.2.1.1)$$



Este grupo se puede escribir de otra forma equivalente como

$$G_C = \left\{ K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ C\bar{k}_2 & \bar{k}_1 \end{pmatrix}; k_1, k_2 \in \mathbb{C}, |k_1|^2 - C|k_2|^2 = 1 \right\}. \quad (4.2.1.2)$$

Es claro a partir de esta definición que  $G_{-1} = \text{SU}(2)$ ,  $G_1 = \text{SU}(1, 1)$  y  $G_0 = \text{E}(2)$  - el grupo euclídeo. Los generadores del álgebra de Lie correspondiente  $\mathfrak{g}_C$  son

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -Ci & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (4.2.1.3)$$

los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_1, J_2] = -CJ_3, [J_2, J_3] = J_1, [J_3, J_1] = J_2. \quad (4.2.1.4)$$

#### 4.2.2 La 4-variedad

Sea  $M$  una 4-variedad riemanniana dada por el siguiente producto cartesiano  $\Sigma \times N$  con la siguiente métrica

$$g = g_\Sigma + g_N, \quad (4.2.2.1)$$

donde  $(\Sigma, g_\Sigma)$  es una superficies riemanniana como la usada en las secciones del capítulo anterior, y  $(N, g_N)$  es una superficie riemanniana con curvatura gaussiana constante  $-C_0$ . Elijamos coordenadas complejas locales en estas superficies, para  $\Sigma$  sea  $w$  sus coordenadas locales y  $z$  para  $N$ , de modo que

$$g_\Sigma = \Omega(w, \bar{w})dw d\bar{w}, \quad g_N = \frac{4}{(1 - C_0|z|^2)^2} dz d\bar{z} \quad (4.2.2.2)$$

donde  $\Omega$  es una factor conforme en  $\Sigma$ . La forma del factor conforme en  $N$  es solución de la ecuación de Liouville. Este es algo obvio pues  $N$  tiene curvatura constante. Las correspondientes formas de Kaehler  $\omega_\Sigma$  en  $\Sigma$  y  $\omega_N$  en  $N$  están dadas por

$$\omega_\Sigma = \frac{i}{2} \Omega(w, \bar{w}) dw \wedge d\bar{w}, \quad \omega_N = \frac{2idz \wedge d\bar{z}}{(1 - C_0|z|^2)^2} = 2id\beta, \quad (4.2.2.3)$$

donde

$$\beta = \frac{zd\bar{z} - \bar{z}dz}{2(1 - C_0|z|^2)}. \quad (4.2.2.4)$$

#### 4.2.3 Equivarianza

Sean  $G_C$  y  $G_{C_0}$  grupos de Lie como los definidos en 4.2.1 y donde  $C, C_0$  son constantes reales. Vamos a considerar a  $G_C$  como el grupo de gauge y a  $G_{C_0}$  como el grupo de simetrías de una teoría de Yang-Mills definida en  $M = \Sigma \times N$ . Sea  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado vectorial con una conexión representada por una 1-forma  $A$  que toma valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_C$ . El grupo de simetrías  $G_{C_0}$  es un subgrupo del grupo conforme en  $(M, g)$  y actúa en  $M$  de la siguiente forma

$$(w, z) \mapsto \left( w, K \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left( w, \frac{k_1 z + k_2}{C_0 \bar{k}_2 z + \bar{k}_1} \right), \quad (4.2.3.1)$$

donde  $K \in G_{C_0}$ .

Impondremos una condición de simetría sobre la conexión  $A$ , llamada condición de equivarianza. Esta condición fue introducida por Manton y Forgács [ManFor80] junto con un método de construcción de campos de gauge simétricos ante un grupo de gauge arbitrario. La condición, la cual derivaremos en la siguiente sección, es la siguiente

$$\mathcal{L}A = DW \quad (4.2.3.2)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie y  $DW = dW - [A, W]$  es la derivada covariante de una función en  $M$  que toma valores en  $\mathfrak{g}_C$ .

En las coordenadas  $(w, \bar{w}, z, \bar{z})$  de  $M$  el potencial se puede escribir como

$$A = A_\Sigma + A_N, \quad \text{donde } A_\Sigma = A_w dw + A_{\bar{w}} d\bar{w} \text{ y } A_N = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}. \quad (4.2.3.3)$$

Ahora vamos a presentar el resultado de Contatto y Dunajski en el siguiente teorema

**Teorema 3 (Resultado principal)** *Sea  $A$  una conexión representada por una 1-forma que toma valores en  $\mathfrak{g}_C$  y además es equivariante ante  $G_{C_0}$ . Entonces,*

1. *Existe un gauge y una elección de estructura compleja en  $M$  tal que*

$$A = \begin{pmatrix} -C_0\beta + \frac{i}{2}\alpha & -\frac{i}{1-C_0|z|^2}\phi d\bar{z} \\ \frac{iC}{1-C_0|z|^2}\bar{\phi} dz & C_0\beta - \frac{i}{2}\alpha \end{pmatrix}, \quad (4.2.3.4)$$

donde  $\beta$  es la misma definida en (4.2.2.4),  $\alpha$  es una 1-forma que toma valores en  $\mathfrak{u}(1)$  (es decir, es un campo de gauge abeliano) y  $\phi$  es un campo escalar complejo en  $\Sigma$ .

2. *Las ecuaciones de anti autodualidad de Yang-Mills en  $(M, g)$  son*

$$\bar{D}\phi = 0, \quad f + \omega_\Sigma(C_0 - C|\phi|^2) = 0 \quad (4.2.3.5)$$

donde  $f = d\alpha$ .

La demostración se hará demostrando las siguientes dos proposiciones siguiendo el trabajo original

**Proposición 1** *Sea  $G_{C_0}$  el grupo de simetrías maximal de  $(N, g_N)$ , donde  $N = \mathbb{R}^2, S^2$  o  $\mathbb{H}^2$ . El campo de gauge equivariante ante  $G_{C_0}$  que toma valores en  $\mathfrak{g}_C$  más general es equivalente a (4.2.3.4) a menos de una transformación de gauge y a menos de una elección de estructura compleja en  $M$ .*

**Proposición 2** *Las ecuaciones de anti-autodualidad de Yang-Mills con  $A$  dado por (4.2.3.4) son equivalentes a (4.2.3.5).*

### 4.3 REDUCCIÓN DIMENSIONAL Y FORMALISMO CSDR

El formalismo CSDR (Coset Space Dimensional Reduction) se enfoca en la reducción dimensional de una teoría de Yang-Mills pura. En este formalismo el punto de partida es una teoría de Yang-Mills definida en un espacio  $\mathcal{M}$  y con grupo de gauge  $G$ . Se asume que la variedad  $\mathcal{M}$  se puede escribir como un producto directo del espacio de Minkowski  $D$ -dimensional  $\mathbb{M}_D$ , que actuará como el espacio-tiempo, y un espacio coset compacto  $S/R$ . Donde  $S$  es un grupo de Lie compacto (usualmente semi-simple) y  $R$  es un subgrupo de Lie de  $S$ . La métrica en  $\mathcal{M}$  es diagonal en bloque debido a la suposición de producto

directo del espacio tiempo. El grupo  $S$  actúa como un grupo de simetrías en  $S/R$  mediante multiplicación derecha. La reducción dimensional ocurre cuando requerimos que los campos de gauge sean simétricos ante la acción de  $S$ .

Por invarianza nos referimos a que la acción de cualquier elemento de  $S$  debe ser compensada por una transformación de gauge; la cuál definiremos explícitamente en la siguiente sección. Esto implicará que la dependencia del campo de gauge en las coordenadas del espacio coset queda determinada. Por lo tanto, el campo de gauge puede expresarse en términos de funciones dependientes sólo de las coordenadas en  $M_D$ . De esta forma, cuando el campo es insertado en la acción de Yang-Mills en  $M$ , uno integra en las coordenadas del espacio coset  $S/R$  y obtiene una acción correspondiente a un modelo de Higgs en  $D$  dimensiones.

#### 4.3.1 Invarianza típica

Comencemos reexaminando la condición de invarianza de un campo frente a una transformación de coordenadas. Considere una transformación de coordenadas que toma un tetravector  $x^\mu$  y lo transforma en otro tetravector  $x'^\mu$ . Nos preguntamos como distintos campos transforman ante este cambio. Un campo escalar transforma como

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (4.3.1.1)$$

Para un campo vectorial  $V_\mu$ , la regla de transformación es

$$V'_\mu = V_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \quad (4.3.1.2)$$

es decir, transforma de forma covariante. Para un tensor de rango 2, se tiene

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (4.3.1.3)$$

Y así para tensores de mayor rango. Ahora consideremos una transformación infinitesimal  $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = -\epsilon X^\mu$ , representado por un campo vectorial  $X^\mu$ . El cambio de los campos ante esta transformación infinitesimal están dados por

$$\delta_X \phi / \epsilon = X^\mu \partial_\mu \phi \quad (4.3.1.4)$$

$$\delta_X V_\mu / \epsilon = V^\alpha \partial_\alpha X_\mu + (\partial_\mu X^\alpha) V_\alpha \quad (4.3.1.5)$$

$$\delta_X g_{\mu\nu} / \epsilon = X^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + (\partial_\mu X^\alpha) g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu X^\alpha) g_{\mu\alpha} \quad (4.3.1.6)$$

Estas combinaciones de derivadas reciben el nombre de derivadas de Lie y se representa como  $\mathcal{L}_X$ . Esta derivada satisface la regla de Leibnitz y respeta las contracciones, de modo que el orden del tensor no se ve afectado.

Decimos que un campo es simétrico con respecto a una transformación de coordenadas cuando es invariante ante ese cambio. Es decir, la derivada de Lie de los campos a lo largo de un campo vectorial que representa la transformación se anula. Un campo escalar invariante ante traslaciones  $X^\mu = a^\mu$ , donde  $a^\mu$  es un tetravector constante, es aquel cuya derivada se anula  $\mathcal{L}_X = a^\mu \partial_\mu \phi = 0$ . Un campo escalar invariante frente a transformaciones de Lorentz  $X^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$ , donde  $\omega^{\mu\nu}$  es antisimétrico, es aquel cuya derivada antisimetrizada se anula:  $\mathcal{L}_X \phi = \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \phi = \omega^{\mu\nu} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi = 0$ , etc.

#### 4.3.2 Transformación de coordenadas para campos de gauge

El interés del formalismo recae en los campos de gauge. Ecuación (4.3.1.5) implica que para un campo de gauge simétrico, su derivada de Lie debe anularse,  $\mathcal{L}_X A_\mu = 0$ . Sin

embargo, esta condición es muy fuerte. Como veremos más adelante esta condición se puede debilitar un poco permitiendo una mayor cantidad de campos de gauge simétricos.

Se sabe que ante una transformación de gauge,  $A_\mu$  transforma como

$$A_\mu^g(x) = gA_\mu g^{-1} + (\partial_\mu g)g^{-1}, \quad (4.3.2.1)$$

donde  $g(x) \in G$  y  $G$  es el grupo de gauge.

La transformación anterior se puede escribir también como

$$A_\mu^g(x) = A_\mu + g^{-1}D_\mu g, \quad (4.3.2.2)$$

donde  $D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]$  es la derivada covariante. Ahora consideremos una transformación de gauge infinitesimal  $g = 1 + \epsilon W$ , donde  $1$  es la identidad de  $G$  y  $W$  es una función que toma valores en el álgebra de Lie de  $G$  y es el generador de transformaciones de gauge. Ante esta transformación infinitesimal, ecuación (4.3.2.2) se escribe como

$$A_\mu^g = A_\mu + \epsilon D_\mu W \quad (4.3.2.3)$$

Para los campos de gauge, imponemos la siguiente condición debilitada de simetría, esta es que para un dado  $g_0 \in G$

$$A_\mu^g(x) = A_\mu^{g_0}(x). \quad (4.3.2.4)$$

Esta condición de simetría implica que

$$\mathcal{L}_X A_\mu = D_\mu W_X \quad (4.3.2.5)$$

Que es la llamada condición de equivarianza. También es conocida como la ecuación de simetría para  $A_\mu$ . Queremos que esta condición siga valiendo ante un cambio de gauge de  $A_\mu$ , para que esto se cumpla, la función  $W$  debe transformar como

$$W^g = gWg^{-1} + g^{-1}\mathcal{L}_X g \quad (4.3.2.6)$$

Es importante notar que en el caso que la teoría tenga sólo una simetría, siempre es posible hacer  $W = 0$  mediante una transformación de gauge apropiada siguiendo (4.3.2.6). En este caso, el campo de gauge es explícitamente invariante, es decir, su derivada de Lie se anula. Cuando hay muchas simetrías, en general, no es posible hacer esta transformación de gauge simultáneamente para anular  $W$ .

Consideraremos ahora un campo de gauge que tenga muchas simetrías, denotadas por  $N$  campos vectoriales  $X_m^\mu$ , con  $1 \leq m \leq N$ . Desarrollando la derivada de Lie se tiene

$$(\partial_\mu X_m^\rho)A_\rho + X_m^\rho \partial_\rho A_\mu = D_\mu W_m, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (4.3.2.7)$$

Esta ecuación implica que existe un espacio vectorial de simetrías. Se puede mostrar que una combinación lineal de generadores  $X_m$  con coeficientes constantes,  $X = \sum_m \lambda_m X_m$ , satisface

$$\mathcal{L}_X A_\mu = D_\mu \left( \sum_m \lambda_m W_m \right) \quad (4.3.2.8)$$

Podemos asumir que todas las simetrías de  $A_\mu$  pertenecen a este espacio vectorial. Ahora, el conmutador de las derivadas de Lie de dos generadores de simetría particulares  $X_m$  y  $X_n$  nos da

$$(\mathcal{L}_{X_m} \mathcal{L}_{X_n} - \mathcal{L}_{X_n} \mathcal{L}_{X_m}) A_\mu = \mathcal{L}_{X_m} (D_\mu W_n) - \mathcal{L}_{X_n} (D_\mu W_m) \quad (4.3.2.9)$$

el cuál se reduce a

$$\mathcal{L}_{[X_m, X_n]} = D_\mu (\mathcal{L}_{X_m} W_n - \mathcal{L}_{X_n} W_m - [W_m, W_n]) \quad (4.3.2.10)$$

y finalmente a

$$\mathcal{L}_{X_m} W_n - \mathcal{L}_{X_n} W_m - [W_m, W_n] - W_{[X_m, X_n]} = 0 \quad (4.3.2.11)$$

A esta ecuación la llamaremos ecuación de consistencia para  $W_m$ . Esta ecuación debe satisfacerse por todos los generadores de transformaciones de gauge los cuales compensan la no invarianza de  $A_\mu$  frente a transformaciones de coordenadas. Notemos que (4.3.2.11) no hace referencia a  $A_\mu$ , entonces uno puede elegir un conjunto de transformaciones de coordenadas, resolver (4.3.2.11) para la transformación de gauge más general, y finalmente resolver (4.3.2.5) para determinar el campo de gauge más general ante esta transformación. Esto es básicamente el procedimiento que tenemos que seguir para hallar campos de gauge simétricos.

Sumando y restando términos a la derivada de Lie de  $A_\mu$ , esta se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X A_\mu &= \partial_\mu X^\rho A_\rho + X^\rho \partial_\rho A_\mu \\ &= \partial_\mu X^\rho A_\rho + X^\rho (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho + [A_\mu, A_\rho]) + X^\rho \partial_\mu A_\rho - X^\rho [A_\mu, A_\rho] \\ &= X^\rho F_{\rho\mu} + \partial_\mu (X^\rho A_\rho) + [A_\mu, X^\rho A_\rho] \\ &= X^\rho F_{\rho\mu} + D_\mu (X^\rho A_\rho) \end{aligned} \quad (4.3.2.12)$$

Usando la ecuación de simetría para  $A_\mu$  a la izquierda de la ecuación anterior y despejando el término con el tensor de campo, es claro que

$$X^\rho F_{\rho\mu} = D_\mu (W - X^\rho A_\rho). \quad (4.3.2.13)$$

Definiendo el campo escalar  $\Psi = X^\rho A_\rho - W$ , se tiene que

$$X^\rho F_{\rho\mu} = -D_\mu \Psi. \quad (4.3.2.14)$$

Esto quiere decir que ciertas componentes del tensor de campo contienen términos con derivadas covariantes de un campo escalar. Aunque este nuevo campo escalar no es el campo de Higgs, está estrechamente relacionado con este. Este nuevo campo la propiedad de simetría

$$\mathcal{L}_X \Psi - [W, \Psi] = 0, \quad (4.3.2.15)$$

es decir, es un campo escalar covariante. Aunque hemos estado usando un sólo generador de transformación de gauge  $X$ , los resultados son análogos para  $N$  generadores haciendo el cambio  $X \rightarrow X_m$  con  $1 \leq m \leq N$ . Podemos obtener un resultado más fuerte que (4.3.2.15) usando la ecuación de consistencia para  $W$  (4.3.2.11) y la ecuación de simetría para  $A_\mu$

$$\mathcal{L}_{X_m} \Psi_n - [W_m, \Psi_n] = \Psi_{[X_m, X_n]} \quad (4.3.2.16)$$

lo cuál nos permite calcular la doble contracción del tensor de campo

$$\begin{aligned} X_m^\mu X_n^\nu F_{\mu\nu} &= -X_n^\mu D_\nu \Psi_m \\ &= -X_n^\mu (\partial_\nu \Psi_m - [A_\nu, \Psi_m]) \\ &= -\mathcal{L}_{X_n} \Psi_m + [W_n + \Psi_n, \Psi_m] \\ &= \Psi_{[X_m, X_n]} - [\Psi_m, \Psi_n] \end{aligned} \quad (4.3.2.17)$$

que contiene términos algebraicos y cuadráticos en  $\Psi_m$ . Esto nos permitirá reducir una acción de Yang-Mills que automáticamente contendrá términos cuárticos, los cuales pueden considerarse como términos de un potencial.

Estas funciones  $W$  y  $\Psi$ , que surgen en un contexto formal como transformaciones de gauge infinitesimales que deben suplementar un cambio de coordenadas, de modo que se exhiba la invarianza de los campos de gauge, también tienen aparecen en un contexto físico como cantidades conservadas asociadas con la simetría en cuestión [Jackiw].

#### 4.3.3 Análisis en el espacio coset

Definamos coordenadas en  $\mathcal{M} = \mathbb{M}_D \times S/R$  como  $X^M = (x^\mu, y^\alpha)$ , donde  $x^\mu$  son coordenadas en el espacio tiempo  $\mathbb{M}_D$  y  $y^\alpha$  con  $\alpha = 1, \dots, d$  son coordenadas en  $S/R$  y  $d = \dim(S/R)$ . Estamos interesados en el caso en que  $S$  actúa trivialmente sobre  $\mathbb{M}_D$ , es decir es el grupo de simetrías del espacio tiempo.

Vamos a dividir a los vectores generadores de simetría de una forma similar. Las componentes de los generadores son entonces,  $X_m^\mu = (0, X_m^\alpha)$ . Ya que vamos a considerar derivadas respecto de los generadores  $X_m^\mu$ , estas sólo serán respecto a las coordenadas  $y^\alpha$ . Por esto, sólo vamos a considerar a  $W_m$  como funciones de  $y^\alpha$ . Además, debido a que la acción de  $S$  es transitiva en  $S/R$ , el valor de cualquier campo simétrico en cualquier punto de  $S/R$  está determinado por el valor en el origen  $y^\alpha = 0$  y una transformación por un elemento de  $S$ . Esto, es cualquier elemento de  $s \in S$  puede ser escrito de forma única como

$$s(y^{\hat{\alpha}}) = r(y^\omega) s_0(y^\alpha), \quad (4.3.3.1)$$

para algún  $r \in R$ . Además, hemos definido coordenadas en  $S$  como  $y^{\hat{\alpha}} = (y^\omega, y^\alpha)$ , donde el superíndice  $\omega$  indica coordenadas en  $R$  y  $y^\alpha$  las coordenadas usuales en  $S/R$ . Por lo tanto, vamos a hacer una identificación parecida para los generadores. Escribiendo,

$$X_m^{\hat{\alpha}} = (X_m^\omega, *X_m^\alpha), \quad (4.3.3.2)$$

que podemos interpretarla como los generadores de  $S/R$  extendidos a todo el grupo  $S$ . Es fácil ver que las componentes  $*X_m^\alpha$ , que son independientes de las coordenadas  $y^\omega$ , no son más que los generadores en  $S/R$ . Por lo tanto, podemos inferir que los generadores del espacio coset se obtienen mediante una proyección de los generadores del grupo de simetría  $S$ .

El objetivo de esta sección es mostrar que al embeber la ecuación de consistencia para  $W_m$  en todo el grupo de simetría, siempre es posible encontrar la solución  $W_m = 0$ .

En secciones anteriores dijimos que  $W_m$  eran funciones que toman valores en el álgebra de Lie de  $S/R$ , sin embargo, ahora las vamos a definir como funciones definidas en  $S$ , pero que son constantes en cualquier espacio coset, de modo que

$$W_m(y^\omega, y^\alpha) = W_m(y^\alpha) \quad \forall y^\alpha. \quad (4.3.3.3)$$

La derivada de Lie de  $W_m$  en la dirección de  $X_m^{\hat{\alpha}}$  es igual a la derivada de Lie en la dirección  $X_m^\alpha$  ya que  $W_m$  no depende de  $y^\omega$ . Explícitamente,

$$X_m^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} W_m = X^\alpha \partial_\alpha W_m. \quad (4.3.3.4)$$

Por lo que  $W_m$ , así definidas en (4.3.3.3), es solución de la ecuación de consistencia en  $S$

$$X_m^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} W_n - X_n^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} W_m - [W_m, W_n] - f_{mnp} W_p = 0, \quad (4.3.3.5)$$

con la restricción de que  $W_m$  es independiente de  $y^\omega$  y  $f_{mnp}$  son las constantes de estructura de  $S$ .

Definamos nuevos campos  $W_{\hat{\alpha}}$  como

$$W_m = X_m^{\hat{\alpha}} W_{\hat{\alpha}}, \quad (4.3.3.6)$$

donde estos nuevos campos  $W_{\hat{\alpha}}$  son en general no constantes en cada coset. En términos de estos campos, ecuación (4.3.3.5), se reduce a

$$\partial_{\hat{\alpha}} W_{\hat{\beta}} - \partial_{\hat{\beta}} W_{\hat{\alpha}} - [W_{\hat{\alpha}}, W_{\hat{\beta}}] = 0. \quad (4.3.3.7)$$

Esta ecuación es análoga al tensor electromagnético para un campo de gauge no abeliano  $W_{\hat{\alpha}}$ . Recordemos que cuando  $F = 0$ , el campo de gauge es un gauge puro. Entonces,

$$W_{\hat{\alpha}} = (\partial_{\hat{\alpha}} g) g^{-1} \quad (4.3.3.8)$$

en el grupo de simetría.

Embebiendo la ecuación de consistencia para  $W_m$  en el grupo de simetrías  $S$ , hemos sido capaces de aumentar el conjunto de transformaciones de gauge con aquellas que dependen de  $y^\omega$ . Siguiendo con la analogía con un campo de gauge, con una transformación de gauge es posible hacer  $W_{\hat{\alpha}} = 0$ , entonces  $W_m = 0$  en  $S$ . Las soluciones en el espacio coset están dadas por

$$W_m = X_m^{\hat{\alpha}} (\partial_{\hat{\alpha}} g) g^{-1} \quad (4.3.3.9)$$

con la restricción de que sean independiente de  $y^\omega$ . En general, estas soluciones no pueden hacerse cero mediante una transformación de gauge pues esta requería una dependencia en  $y^\omega$ .

Podemos hacer un análisis similar para el campo de gauge. Vamos a separar el campo de gauge como  $A_\mu = (A_i, A_\alpha)$ , donde  $A_i$  dependen sólo de las coordenadas del espacio tiempo y  $A_\alpha$  de las coordenadas en el espacio coset. Luego vamos a reducir la ecuación de simetría para  $A_\alpha$  embebiéndola en el grupo  $S$ . De forma similar vamos a tratar a  $A_\alpha$  como una función en  $S$  pero constante en cualquier coset, e introducimos componentes extras  $A_\omega = 0$  que corresponden a coordenadas en  $R$ , de modo que

$$A_{\hat{\alpha}}(y^{\hat{\beta}}) = (A_\omega(y^{\hat{\beta}}), A_\alpha(y^{\hat{\beta}})) = (0, A_\alpha(y^{\hat{\beta}})). \quad (4.3.3.10)$$

Entonces, se puede verificar que toda solución de la ecuación de simetría en el espacio coset es un caso especial de la misma ecuación en el grupo de simetría. Para ver esto, vamos a dividir la ecuación de simetría en  $S$  como

$$(\partial_\omega X_m^{\hat{\alpha}}) A_{\hat{\alpha}} + X_m^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} A_\omega = \partial_\omega W_m - [A_\omega, W_m], \quad (4.3.3.11)$$

$$(\partial_\beta X_m^{\hat{\alpha}}) A_{\hat{\alpha}} + X_m^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\alpha}} A_\beta = \partial_\beta W_m - [A_\beta, W_m]. \quad (4.3.3.12)$$

La primera de estas ecuaciones se satisface trivialmente ya que ni  $X_m^{\hat{\alpha}}$  ni  $W_m$  dependen de  $y^\omega$ . La segunda es la ecuación de simetría en  $S/R$ .

La ecuación de simetría en  $S$  se resuelve fácilmente usando la libertad de gauge sobre  $W_m$  y hacerla nula. De esta forma, la ecuación se reduce a

$$\mathcal{L}_{X_m} A_{\hat{\alpha}} = 0 \quad (4.3.3.13)$$

Analicemos las consecuencias de la ecuación anterior. Una de las implicancias es que el campo de gauge es completamente independiente de las coordenadas en el espacio coset.



Otra de las consecuencias es que la ecuación se desacopla y permite resolver para cada componente del campo de gauge separadamente

$$\mathcal{L}_{X_m} A_{\hat{\alpha}}^a = 0 \quad (4.3.3.14)$$

Esto nos permite escribir al campo de gauge como

$$A_{\hat{\alpha}}^a = \Phi_m^a \tilde{X}_{m\hat{\alpha}}, \quad (4.3.3.15)$$

donde  $\tilde{X}_m^{\hat{\alpha}}$  son traslaciones infinitesimales izquierdas. Estos están relacionados con los generadores  $X_m^{\hat{\alpha}}$  por una transformación de coordenadas que mapea cada elemento del grupo en su inverso. Estas satisfacen que

$$\mathcal{L}_{X_m} \tilde{X}_n^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \forall m, n, \quad (4.3.3.16)$$

y por lo tanto, son campos vectoriales invariantes. Podemos definir su correspondiente versión covariante  $\tilde{X}_{m\hat{\alpha}}$  de la siguiente forma

$$\tilde{X}_{m\hat{\alpha}} \tilde{X}_n^{\hat{\alpha}} = \delta_{mn}. \quad (4.3.3.17)$$

Combinaciones de estos nuevos generadores permiten definir tensores invariantes. De especial interés es el siguiente tensor

$$\tilde{h}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \tilde{X}_m^{\hat{\alpha}} \tilde{X}_m^{\hat{\beta}}, \quad (4.3.3.18)$$

el cuál actúa como un operador para subir índices. Esto es consecuencia de (4.3.3.17), ya que

$$\tilde{X}_{m\hat{\alpha}} \tilde{h}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \tilde{X}_m^{\hat{\beta}}. \quad (4.3.3.19)$$

Entonces,  $\tilde{h}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  actúa como una métrica en  $S$ .

Volvamos a (4.3.3.15). Los campos  $\Phi^a$  son independientes de las coordenadas en el espacio coset, por lo tanto, pueden depender sólo de las coordenadas del espacio-tiempo. Por lo tanto, la solución general a (4.3.3.14) es

$$A_i^a = A_i^a(x^\mu) \quad (4.3.3.20)$$

$$A_{\hat{\alpha}}^a = \Phi_m^a(x^\mu) \tilde{X}_{m\hat{\alpha}}(y^{\hat{\alpha}}) \quad (4.3.3.21)$$

Sin embargo, para asegurarnos de obtener una solución en  $S/R$  y no sólo en  $S$ , debemos imponer condiciones en los campos  $\Phi_m$  y  $A_i$ . Estas condiciones nacen de pedir que  $A_\omega = 0$  y que  $A_\alpha$  sean independientes de las coordenadas en  $R$ . Esto implica que el tensor de campo  $F$  se anula en las componentes  $F_{i\omega}, F_{\alpha\omega}, F_{\tau\omega}$ , donde  $\tau$  es una coordenada en  $R$  al igual que  $\omega$ .

Recordemos las (4.3.2.14) y (4.3.2.17), que eran las contracciones del tensor de campo en términos de un campo escalar  $\Psi_m$ . Notemos también que en el gauge donde  $W_m = 0$ , los campos  $\Psi_m$  se reducen a  $\Psi_m = X_m^{\hat{\alpha}} A_{\hat{\alpha}}$ , y usando (4.3.3.21), es fácil ver que se pueden escribir como  $\Psi_m = X_m^{\hat{\alpha}} \Phi_n \tilde{X}_{n\hat{\alpha}}$ . En términos de los campos  $\Phi_m$ , las contracciones del tensor de campo se escriben como

$$X_m^{\hat{\alpha}} F_{\hat{\alpha}i} = D_i \Phi_m \quad (4.3.3.22)$$

$$X_m^{\hat{\alpha}} X_n^{\hat{\beta}} F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = f_{mnp} \Phi_p - [\Phi_m, \Phi_n] \quad (4.3.3.23)$$

A partir de estas contracciones se pueden derivar las condiciones para los campos:

$$\partial_i \Phi_n - [A_i, \Phi_n] = 0 \quad (4.3.3.24)$$

$$[\Phi_m, \Phi_n] = -f_{mnp} \Phi_p \quad (4.3.3.25)$$



La segunda de estas ecuaciones nos dice que  $\Phi'_m = -\Phi_m$  en  $R$ , genera una subálgebra de  $G$  isomorfa a  $R$ . Ya que  $\Phi_m$  no dependen de las coordenadas en  $R$ , podemos hacer que sean constantes. De este modo, la primera ecuación arriba nos dice que  $A_i$  conmutan con los elementos de la subálgebra isomorfa a  $R$ . Entonces,  $A_i$  pertenecen al grupo pequeño de  $R$ . Este grupo pequeño es el grupo de simetría residual después de la reducción dimensional.

#### 4.3.4 Campos de gauge $U(1)$ esféricamente simétricos

El formalismo desarrollado en la sección anterior nos da las herramientas para aplicar a un ejemplo concreto, este es, campos de gauge  $U(1)$  esféricamente simétricos.

El grupo de gauge es  $U(1)$ , que es un grupo abeliano, por lo que las derivadas covariantes se trasforman en simples derivadas. Para rotaciones  $SO(3)$  una transformación infinitesimal toma la siguiente forma

$$x'^i = x^i + (d\vec{n} \times \vec{r})_i = x^i + \epsilon_{ijk} d\Omega_j x_k \quad (4.3.4.1)$$

donde  $d\Omega_i$  son ángulos infinitesimales que especifican una rotación alrededor de algún eje. Nótese que no se especificó la coordenada temporal, pues la transformación no le afecta. Por lo tanto, de (4.3.4.1) podemos identificar los tres generadores  $X_m^j = \epsilon^{mij} x^j$  de rotaciones.

Elijiendo como los ejes de rotación algún sistema ortogonal (por ejemplo, coordenadas cartesianas, coordenadas esféricas, etc) los generadores de rotación se pueden escribir en forma vectorial. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.4.2)$$

Las funciones  $W_m$  que compensarán las rotaciones infinitesimales serán 3, una por cada generador de rotaciones  $\vec{X}_m$ . Estas funciones deben satisfacer la ecuación de consistencia (4.3.2.11). Para este caso, el conmutador de dos funciones  $W$  es siempre cero pues ahora son funciones escalares. Luego, la ecuación de consistencia se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1} W_2 - \mathcal{L}_{X_2} W_1 - W_3 &= 0 \\ \nabla W_2 \cdot \vec{X}_1 - \nabla W_1 \cdot \vec{X}_2 - W_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.4.3)$$

La regla de transformación de gauge para  $W$  de ecuación (4.3.2.6) es ahora

$$\begin{aligned} W_m &\rightarrow g W_m g^{-1} + g^{-1} \nabla g \cdot \vec{X}_m, \\ &= W_m + g^{-1} \nabla g \cdot \vec{X}_m, \\ &= W_m + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} \epsilon^{mij} x^j \\ &= W_m + g^{-1} (\vec{r} \times \nabla)_m g \end{aligned} \quad (4.3.4.4)$$

donde usamos el hecho de que el grupo de gauge es abeliano. En este punto conviene pasar a coordenadas esféricas. Es claro que la componente radial de  $\vec{r} \times \nabla$  es cero, por lo

que  $W_r$  transforma homogéneamente. Esto significa que no existe una transformación de gauge que lo haga cero. El conjunto de transformaciones de gauge (4.3.4.4) es

$$W_r \rightarrow W_r, \quad (4.3.4.5)$$

$$W_\theta \rightarrow W_\theta - g^{-1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi}, \quad (4.3.4.6)$$

$$W_\phi \rightarrow W_\phi + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta}. \quad (4.3.4.7)$$

Aunque  $W_r$  no pueda hacerse cero mediante una transformación de gauge, si que es posible hacerlo con  $W_\theta$  o  $W_\phi$ . Este análisis no es tan obvio para las funciones  $W$  en coordenadas cartesianas. En coordenadas cartesianas uno puede ajustar una función de gauge para anular una de las tres funciones  $W$ . Elijamos poner  $W_3 = 0$ , entonces (4.3.4.3) se reduce a

$$\cot \theta \sin \phi \frac{\partial W_1}{\partial \phi} - \cos \phi \frac{\partial W_1}{\partial \theta} = -\cot \theta \cos \phi \frac{\partial W_2}{\partial \phi} - \sin \phi \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \quad (4.3.4.8)$$

Una solución a esta ecuación diferencial es de la forma  $W_1 = f(\theta) \cos \phi$  y  $W_2 = f(\theta) \sin \phi$ , donde  $f(\theta)$  satisface la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{df}{d\theta} + f \cot \theta = 0, \quad (4.3.4.9)$$

la cuál tiene por solución

$$f(\theta) = \frac{C}{\sin \theta}, \quad (4.3.4.10)$$

donde  $C$  es una constante. Por lo que las funciones  $W$  escritas en coordenadas esféricas son

$$W_r = C, \quad W_\theta = C \cot \theta, \quad W_\phi = 0. \quad (4.3.4.11)$$

Nótese que esto está de acuerdo con el análisis de transformaciones de gauge para  $W_\phi$ . También es importante notar que no hay dependencia de la variable  $\phi$ , esto es debido a la libertad de gauge que usamos para eliminar  $W_\phi$ .

Ahora, analicemos la ecuación de simetría para  $A_\mu$  (4.3.2.7)

$$(\partial_\mu X_m^\rho) A_\rho + X_m^\rho \partial_\rho A_\mu = D_\mu W_m. \quad (4.3.4.12)$$

Recordemos que los generadores de rotaciones son  $X_m^i = \epsilon^{mij} x_j$ , lo cuales al ser insertados en la ecuación anterior nos dan

$$(\vec{r} \times \nabla)_m A_\mu = \partial_\mu W_m, \quad (4.3.4.13)$$

que son tres ecuaciones para las tres componentes del campo de gauge. Las componentes del campo que se encuentran a partir de (4.3.4.13) son

$$A_\theta = \frac{a_\theta(r)}{r}, \quad (4.3.4.14)$$

$$A_\phi = C \frac{\cot \theta}{r} = \frac{a_\phi}{r}, \quad (4.3.4.15)$$

donde  $a_\theta$  y  $a_\phi$  deben satisfacer

$$[a_\theta, C] = a_\phi \quad (4.3.4.16)$$

$$[a_\phi, C] = -a_\theta \quad (4.3.4.17)$$

y  $A_r$  queda como una función arbitraria de  $r$ . Es claro que debido a que la teoría es abeliana, las ecuaciones anteriores implican que  $a_\theta = a_\phi = 0$ . Sin embargo, antes de llegar a esa conclusión, analicemos un poco las soluciones (4.3.4.14) y (4.3.4.15). La componente  $A_\phi$  presenta singularidades en  $\theta = 0, \pi$ , las cuales pueden ser removidas mediante una transformación de gauge apropiada:

$$\begin{aligned} A'_\phi &= A_\phi + e^{\mp\phi C} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} e^{\pm\phi C}, \\ &= \frac{C}{r \sin \theta} (\pm 1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (4.3.4.18)$$

donde el  $+$  es para la singularidad en el polo norte ( $\theta = 0$ ) y  $-$  para la singularidad en el polo sur ( $\theta = \pi$ ). En el ecuador ambas soluciones difieren en  $e^{2\phi C}$ , la cuál debe ser una función univaluada. Esto agrega una restricción sobre  $C$ , que no es otra cosa que la condición de cuantización de Dirac (para el caso abeliano). Incluso, ahora es posible calcular el tensor de campos y calcular el campo magnético

$$B = -\frac{1}{r^2} (C + [a_\theta, a_\phi]) \quad (4.3.4.19)$$

que para una teoría abeliana se reduce al campo de un monopolo magnético de Dirac.

Es importante analizar como se puede generalizar estos argumentos para cuando nos enfrentamos con grupos de gauge no abelianos. En primer lugar, la constante  $C$  para el caso abeliano se generaliza a un elemento del álgebra del grupo de gauge. La libertad de gauge permite reducir  $C$  a una matriz diagonal. Es claro que en este caso las funciones  $a_\theta$  y  $a_\phi$  son no triviales. Un posible caso es hacer  $C = 0$ . En este caso la única componente no trivial del campo de gauge es  $A_r$ , la cuál es una función arbitraria de  $r$ . En este caso la simetría rotacional es manifiesta explícitamente.

Un caso importante es cuando  $C$  es un elemento del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$ . En este caso las funciones  $a_\theta$  y  $a_\phi$  son no triviales y mediante una transformación de gauge las funciones  $W$  pueden hacerse todas constantes. De hecho, si todas las funciones  $W$  son constantes, la ecuación de consistencia implica

$$[W_m, W_n] = W_{[X_m, X_n]}, \quad (4.3.4.20)$$

esto quiere decir, que las funciones  $W$  son los generadores del grupo de gauge que satisfacen el álgebra de Lie de las transformaciones de coordenadas. Esto es lo que se conoce como un *embedding* de las transformaciones de coordenadas en el grupo de gauge. Se puede mostrar [Manton, Jackiw] que en este caso, el campo magnético es proporcional a  $C$  y la singularidad en  $r = 0$  se puede remover imponiendo condiciones de borde sobre  $a_\theta$  y  $a_\phi$  apropiadas en el origen. Este análisis conlleva finalmente a la solución de un monopolo.

#### 4.3.5 Reducción de la acción

Dada la forma en que elegimos la variedad donde definimos nuestra teoría de Yang-Mills, no es descabellado elegir una métrica para ese espacio que sea diagonal por bloques. Asumiremos que los campos de gauge son simétricos en el sentido definido en las secciones anteriores. En este caso, la acción se vuelve independiente de las coordenadas del espacio coset y por consiguiente podemos integrar en las coordenadas  $y^\alpha$  de  $S/R$ , obteniendo la teoría en  $D$  dimensiones.

La métrica que elegimos es la siguiente

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} h^{\alpha\beta}(y) \end{pmatrix} \quad (4.3.5.1)$$

La acción original de Yang-Mills es

$$S = -\frac{1}{8} \int d^{D+d}x h^{1/2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} h^{\mu\sigma} h^{\nu\tau}), \quad (4.3.5.2)$$

la cual puede ser expandida usando el *ansatz* para la métrica a

$$S = -\frac{1}{8} \text{Tr} \int d^D x d^d y h^{1/2} \left[ F_{ij} F_{kl} h^{ik} h^{jl} + \frac{2}{R^2} F_{i\alpha} F_{j\beta} h^{ij} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{R^4} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \right]. \quad (4.3.5.3)$$

Usando las contracciones del tensor de campo (4.3.3.22) y (4.3.3.23) podemos escribir la ecuación anterior como

$$S = \Omega \int d^D x R^d \sqrt{h} \left[ \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{kl}^a h^{ik} h^{jl} + \frac{1}{R^2} (D_i \Phi_m)^a (D_j \Phi_m)^a h^{ij} + \frac{1}{2R^4} V(\Phi) \right], \quad (4.3.5.4)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^a F_{\gamma\delta}^a h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} &= (f_{rst} \Phi_t - [\Phi_r, \Phi_s])^a (f_{rst} \Phi_t - [\Phi_r, \Phi_s])^a, \\ &\equiv 2V(\Phi), \end{aligned} \quad (4.3.5.5)$$

$\Omega$  es el volumen de  $S/R$  obtenido integrando  $\sqrt{\det h_{\alpha\beta}}$  en  $d^d y$ , ya que lo demás ya no depende de  $y^\alpha$ . Para eliminar el parámetro  $R(x)$ , podemos redefinir la métrica como

$$g^{ij} = f(x) h^{ij}. \quad (4.3.5.6)$$

Donde si queremos eliminar el factor de  $R^4$  que divide a  $V(\Phi)$  debemos tener  $f(x) = R^2(x)$  y  $D + d = 4$ . La acción resultante es

$$S = C \int d^D x \sqrt{\det g} \left[ \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{kl}^a g^{ik} g^{jl} + \frac{1}{2} (D_i \Phi_m)^a (D_j \Phi_m)^a g^{ij} + V(\Phi) \right], \quad (4.3.5.7)$$

donde  $C$  es una constante. Nótese que la acción describe el modelo de Higgs abeliano en  $D$  dimensiones definido en un espacio con métrica curva  $g^{ij}$ .

Este análisis nos permite tener una comprensión más amplia acerca del *ansatz* de Witten para los vórtices hiperbólicos. En el trabajo de Witten tanto el grupo de gauge como el grupo de simetría eran  $SO(3)$ . Este grupo está parametrizado por los tres ángulos de Euler  $(\chi, \theta, \phi)$  y un elemento general del grupo se puede escribir como la composición de tres rotaciones. Sea  $s \in SO(3)$ , entonces,

$$s(\chi, \theta, \phi) = R_z(\chi) R_x(\theta) R_z(\phi), \quad (4.3.5.8)$$

donde  $R_z(\chi)$  representa una rotación en ángulo  $\chi$  alrededor del eje  $z$ , y los demás son análogos. Las rotaciones alrededor del eje  $z$  forman un subgrupo  $SO(2) \subset SO(3)$ , por lo que una rápida comparación de (4.3.5.8) con (4.3.3.1), nos permite concluir que  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas en el espacio coset  $SO(3)/SO(2)$ . Las dimensiones del espacio tiempo en el *ansatz* de Witten ya están fijas en  $D + d = 4$  y tienen coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ . La dimensión del espacio coset también se conoce y es  $\dim SO(3)/SO(2) = 2$ , de modo que la dimensión del modelo de Higgs resultante es  $D = 2$ .

Los generadores de simetría, escritos como  $X_m^\alpha = (X_m^\theta, X_m^\phi)$  son

$$X_1^\alpha = (\cos \phi, -\cot \theta \sin \phi), \quad (4.3.5.9)$$

$$X_2^\alpha = (-\sin \phi, \cot \theta \cos \phi), \quad (4.3.5.10)$$

$$X_3^\alpha = (0, 1). \quad (4.3.5.11)$$

#### 4.3.6 Un resumen del método

Definamos una teoría de Yang-Mills en una variedad  $\mathcal{M} = M_D \times S/R$  y con grupo de gauge  $G$  y grupo de simetría  $S$ . Sea  $A_\mu$  un campo de gauge que, localmente, se escribe como una 1-forma que toma valores en  $\mathfrak{g}$ . Decimos que  $A$  (como una 1-forma) es equivariante ante  $S$  si la acción de  $S$  sobre  $A$  lo deja invariante a menos de una transformación de gauge. Esta definición se escribe infinitesimalmente como la ecuación de equivarianza. El formalismo desarrollado permite resolver la ecuación de equivarianza para todos los generadores de simetría  $X_m$ .

El procedimiento consiste en extender el análisis en  $S/R$  de la ecuación de equivarianza a todo el grupo de simetría  $S$ . Esto permite que las ecuaciones de consistencia para  $W$  se resuelvan con expresiones simples que pueden anularse mediante una transformación de gauge en  $S$ , simplificando considerablemente la ecuación de equivarianza. Una vez que esta ecuación se resuelve en  $S$ , uno debe asegurarse que el campo de gauge obtenido sea un campo en  $S/R$ . Esto significa que la dependencia de  $A$  con las coordenadas en  $S/R$  puede eliminarse con otra transformación de gauge. Para que esto pase se debe satisfacer ciertas ecuaciones.

Definimos coordenadas en  $S/R$  como  $y^\alpha$  y coordenadas en  $R$  como  $y^\omega$  de modo que  $(y^\alpha, y^\omega)$  forman coordenadas en  $S$ . Para cualquier elemento  $s \in S$ , sea  $s_0(y^\alpha) \in R s(y^\alpha)$  un elemento fijo en  $S/R$ , entonces,  $s$  se puede escribir como  $s = r(y^\omega) s_0(y^\alpha)$  para algún  $r \in R$ .

Sean  $J_m$  los generadores del álgebra de Lie de  $S$  con constantes de estructura  $f_{mnp}$ ,  $[J_m, J_n] = f_{mnp} J_p$ .

#### 4.3.7 Un bosquejo de la demostración del teorema principal

Para dar un bosquejo de la demostración de la proposición 1 vamos a considerar una teoría de Yang-Mills definida en un espacio  $M = \Sigma \times N$ . En analogía con el formalismo presentado, el espacio  $N$  será nuestro espacio coset y  $\Sigma$  será el espacio donde vivirá nuestro modelo de Higgs resultante.

Como dijimos en el enunciado del teorema principal el grupo  $G_C$  (ver sección 4.2.1) actuará como el grupo de gauge de la teoría y el grupo  $G_{C_0}$  actuará como el respectivo grupo de simetría. Nótese que antes dijimos que el grupo de simetría estaba definido como el grupo isometrías de  $N$  (pensado como una superficie de Riemann con curvatura constante) y en proposición 1, asumimos que este grupo contiene todas las dichas isometrías, es decir, es el grupo maximal de isometrías de  $N$ .

A cada campo vectorial  $X^\mu(x)$  que genera la acción de  $G_{C_0}$  en  $M$  le corresponde una función  $\Phi_X$  que toma valores en  $\mathfrak{g}_C$ . Esta función es el llamado campo de Higgs.

Considere  $N = G_{C_0}/U(1)$  como el espacio coset, donde  $U(1) \subset G_{C_0}$  es un subgrupo que es generado por  $J_3$  (que es diagonal), que a su vez corresponde a un campo vectorial  $X_3^\mu$  en  $M$ . Por lo tanto, las condiciones en los campo (ver ecuaciones (4.3.3.24) y (4.3.3.25)) se escriben entonces

$$d\Phi_3 - [A, \Phi_3] = 0, \quad [\Phi_3, \Phi_m] = -f_{3mp} \Phi_p \quad (4.3.7.1)$$

donde claramente  $f_{mnp}$  son las constantes de estructura de  $G_{C_0}$  y  $\Phi_m \equiv \Phi_{X_m}$ . Como dijimos al final de Sección 4.3.3, la segunda ecuación a la derecha nos muestra que  $\Phi_3$  genera una subálgebra de  $G_C$  isomorfa a  $\mathfrak{u}(1)$ ; es decir,  $\mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{g}_C$ . También dijimos que la primera condición implicaba que las componentes del campo de gauge en el espacio-tiempo  $\Sigma$  en este caso, eran elementos del grupo pequeño de  $R = U(1)$ , por lo que necesariamente,

$A_\Sigma$  es un campo de gauge abeliano y no depende de las coordenadas en el espacio coset  $N$ . Vamos a definir el campo de gauge abeliano como

$$a = a_w dw + a_{\bar{w}} d\bar{w} \equiv A_\Sigma \quad (4.3.7.2)$$

Para calcular los campos de gauge a partir de (4.3.7.1) elegimos un gauge donde  $\Phi_3$  es diagonal. Esto es siempre posible si  $C = -1$ , ya que en ese caso correspondería a una matriz hermítica, pero también se verifica para los demás casos. En general se encuentra que escribiendo  $\Phi_3 = \epsilon J_3$ , donde  $\epsilon = \pm 1$ , engloba todos los anteriores casos. Sin pérdida de generalidad se tomará  $\epsilon = 1$ . La solución general para (4.3.7.1) es

$$\Phi_1 = \phi_1 J_1 + \phi_2 J_2, \quad \Phi_2 = \phi_2 J_1 - \phi_1 J_2, \quad \Phi_3 = J_3, \quad (4.3.7.3)$$

donde  $\phi = \phi_2 - i\phi_1$  es una función compleja definida en  $\Sigma$  el cuál se indentificará con el campo de Higgs abeliano en las ecuaciones de vórtice.

Nos falta hallar las componentes restantes del campo de gauge - sus componentes en el espacio coset  $N$ . La solución nos la provee el formalismo CSDR desarrollado; ecuación (4.3.3.21) nos dice que las componentes del campo de gauge en  $N$  está dado por los campos de Higgs  $\Phi_m$  y por los generadores infinitesimales derechos  $\bar{X}_m$ . Estos últimos han sido hallados de forma explícita junto con una parametrización del grupo  $G_{C_0}$  la cuál mostramos a continuación:

$$K = \begin{pmatrix} e^{i(\kappa_3 - \kappa_2)/2} \cos(\sqrt{-C_0}\kappa_1/2) & -\frac{1}{\sqrt{-C_0}} e^{i(\kappa_2 + \kappa_3)/2} \sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1/2) \\ \sqrt{-C_0} e^{-i(\kappa_3 + \kappa_2)/2} \sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1/2) & e^{-i(\kappa_3 - \kappa_2)/2} \cos(\sqrt{-C_0}\kappa_1/2) \end{pmatrix}, \quad (4.3.7.4)$$

donde  $0 \leq \kappa_1 \leq 4\pi$ ,  $0 \leq \kappa_2 \leq 4\pi$ ,  $0 \leq \kappa_1 \leq \pi/\sqrt{-C_0}$  si  $C_0 < 0$  y  $\kappa_1 \geq 0$  si  $C_0 \geq 0$ ; son nuevas coordenadas en  $G_{C_0}$ . La coordenada  $\kappa_3$  parametriza a  $U(1)$ , por lo tanto los campos de gauge resultantes no dependerán de  $\kappa_3$ . Coordenadas en  $N$  son entonces,  $(\kappa_1, \kappa_2)$ , que reemplazan a  $(z, \bar{z})$ . La relación entre ambos sistemas de coordenadas está dado por

$$z = \frac{1}{\sqrt{-C_0}} \tan(\sqrt{-C_0}\kappa_1/2) e^{i\kappa_2} \quad (4.3.7.5)$$

Luego, los generadores infinitesimales derechos son

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{-\sqrt{-C_0}} \sin(-\sqrt{-C_0}\kappa_1) \cos \kappa_3 d\kappa_2 + \sin \kappa_3 d\kappa_1, \quad (4.3.7.6)$$

$$\bar{X}_2 = -\cos \kappa_3 d\kappa_1 + \frac{1}{\sqrt{-C_0}} \sin \kappa_3 \sin(-\sqrt{-C_0}\kappa_1) d\kappa_2, \quad (4.3.7.7)$$

$$\bar{X}_3 = -d\kappa_3 + \cos(-\sqrt{-C_0}\kappa_1) d\kappa_2. \quad (4.3.7.8)$$

Y los correspondientes generadores  $X_m$  tales que  $X_m \cdot \bar{X}_n = \delta_{mn}$  son

$$X_1 = -\sin \kappa_2 \partial_{\kappa_1} - \frac{\sqrt{-C_0}}{\tan(\sqrt{-C_0}\kappa_1)} \cos \kappa_2 \partial_{\kappa_2} - \frac{\sqrt{-C_0}}{\sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1)} \cos \kappa_2 \partial_{\kappa_3}, \quad (4.3.7.9)$$

$$X_2 = \cos \kappa_2 \partial_{\kappa_1} - \frac{\sqrt{-C_0}}{\tan(\sqrt{-C_0}\kappa_1)} \sin \kappa_2 \partial_{\kappa_2} - \frac{\sqrt{-C_0}}{\sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1)} \sin \kappa_2 \partial_{\kappa_3}, \quad (4.3.7.10)$$

$$X_3 = -\partial_{\kappa_2} \quad (4.3.7.11)$$

Recordemos que la ecuación de simetría para  $A$  se reducía cuando la insertábamos dentro del grupo de simetría; mediante una transformación de gauge era posible hacer  $W_m = 0$  y la ecuación se reducía a

$$\mathcal{L}_{X_3} A = 0 \quad (4.3.7.12)$$

y junto con las condiciones en los campo nos asegurábamos de obtener un campo de gauge en  $N$ . El campo de gauge en  $N = G_{C_0}/U(1)$  está dado por

$$A_N = A_1 d\kappa_1 + A_2 d\kappa_2, \quad (4.3.7.13)$$

dónde

$$A_1 = -\phi_2 J_1 + \phi_1 J_2, \quad (4.3.7.14)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{-C_0}} \sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1) \phi_1 J_1 + \frac{1}{\sqrt{-C_0}} \sin(\sqrt{-C_0}\kappa_1) \phi_2 J_2 + \cos(\sqrt{-C_0}\kappa_1) J_3. \quad (4.3.7.15)$$

Sin embargo, este resultado no tiene la forma de (4.2.3.4). Para llegar a la forma final, hagamos un cambio de gauge de la forma  $\text{diag}(e^{-i\kappa_2/2}, e^{i\kappa_2/2})$  y luego cambiar de coordenadas de vuelta a  $(z, \bar{z})$  usando la fórmula (4.3.7.5).

Calculemos las componentes del tensor de campo  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$ :

$$F_{z\bar{z}} = \frac{-C_0 + C\phi\bar{\phi}}{(1 - C_0 z\bar{z})^2} \sigma_3, \quad F_{w\bar{w}} = \frac{i}{2} f_{w\bar{w}} \sigma_3, \quad (4.3.7.16)$$

$$F_{\bar{z}w} = \frac{i}{1 - C_0 z\bar{z}} D_{\bar{w}} \phi \sigma_+, \quad F_{z\bar{w}} = -\frac{i}{1 - C_0 z\bar{z}} D_{\bar{w}} \bar{\phi} \sigma_-, \quad (4.3.7.17)$$

$$F_{zw} = -\frac{i}{1 - C_0 z\bar{z}} D_w \bar{\phi} \sigma_-, \quad F_{\bar{z}w} = \frac{i}{1 - C_0 z\bar{z}} D_w \phi \sigma_+ \quad (4.3.7.18)$$

donde  $f_{w\bar{w}} = \partial_w a_{\bar{w}} - \partial_{\bar{w}} a_w$ .

Ahora, insertemos estas componentes en la ecuación de anti dualidad de Yang-Mills (4.1.0.9)

$$\star F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} \quad (4.3.7.19)$$

que en coordenadas holomorfas  $(w, z)$  se reducen a  $(\omega_N + \omega_\Sigma) \wedge F = 0$  y  $dw \wedge dz \wedge F = 0$ . Y estas a su vez se reducen a

$$F_{wz} = 0, \quad F_{\bar{w}\bar{z}} = 0, \quad \Omega^{-1} F_{w\bar{w}} + \frac{(1 - C_0 |z|^2)^2}{4} F_{z\bar{z}} = 0 \quad (4.3.7.20)$$

Las dos primeras se reducen al reemplazar las componentes a  $D_{\bar{w}} \phi = 0$  y la tercera se reduce a

$$\frac{i}{2} f_{w\bar{w}} + \frac{\Omega}{4} (-C_0 + C|\phi|^2) = 0, \quad (4.3.7.21)$$

resultando en las ecuaciones de Bogomolny para los vórtices integrables.





## SUPERSIMETRÍA Y VÓRTICES

En este capítulo abordaremos la conexión que existe entre supersimetría y vórtices. En especial tocaremos la conexión entre la ecuación de Bogomolny y la condición de la existencia de una extensión supersimétrica del modelo; notada por Schaposnik y De Vega [schapo-devega] y clarificada más tarde por Witten y Olive [wittenolive].

### 5.1 ECUACIONES DE BOGOMOLNY Y SUPERSIMETRÍA

Ya hemos visto que existe un valor especial de la constante de acoplamiento  $\lambda$  para el cual las ecuaciones de movimiento de segundo orden se reducían a ecuaciones diferenciales de primer orden y para el cuál se conoce una solución exacta.

Estas ecuaciones de primer orden son las llamadas ecuaciones de Bogomolny, las cuales no sólo aparecen para el modelo abeliano de Higgs sino en muchas otras teorías. En [schapo-devega] se nota que este *fine-tuning* de la constante de acoplamiento permite una extensión supersimétrica del modelo abeliano de Higgs.

Como motivación, consideremos la versión supersimétrica de una teoría de campo escalar en dos dimensiones

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2}V(\phi)^2 - \frac{1}{2}V'(\phi)\bar{\psi}\psi \right], \quad (5.1.0.1)$$

donde  $\psi$  es un fermión de Majorana y  $V(\phi)$  es la función potencial de la teoría, que por ahora es arbitraria. En dos dimensiones las matrices gama se escriben como

$$\gamma^0 = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1.0.2)$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos se obtienen fácilmente y son

$$\square \phi = V(\phi)V'(\phi) + \frac{1}{2}V''(\phi)\bar{\psi}\psi \quad (5.1.0.3)$$

$$\not{\partial}\psi - V'(\phi)\psi = 0 \quad (5.1.0.4)$$

Esta acción es invariante (en el sentido que la variación de la acción es a lo mucho una derivada total) ante las siguientes transformaciones de supersimetría

$$\delta \phi = \bar{\epsilon}\psi \quad (5.1.0.5)$$

$$\delta \psi = (\not{\partial}\phi - V(\phi))\epsilon \quad (5.1.0.6)$$

$$\delta \bar{\psi} = -\bar{\epsilon}(\not{\partial}\psi + V(\phi)) \quad (5.1.0.7)$$

y por consiguiente, debido al teorema de Noether, la corriente conservada asociada es

$$J^\mu = -(\not{\partial}\phi + V(\phi))\gamma^\mu \psi, \quad (5.1.0.8)$$

y la supercarga asociada es

$$Q = - \int dx (\not{\partial}\phi + V(\phi))\gamma^0 \psi \quad (5.1.0.9)$$

Luego, escribiendo  $Q = (Q^+ \ Q^-)^T$  es fácil ver que

$$Q^+ = \int dx (\partial_0 \phi \psi^+ + (\partial_1 \phi + V(\phi)) \psi^-) \quad (5.1.0.10)$$

$$Q^- = \int dx (\partial_0 \phi \psi^- + (\partial_1 \phi - V(\phi)) \psi^+) \quad (5.1.0.11)$$

Estas cargas no cierran totalmente el álgebra supersimétrica, ya que se satisface  $Q_+^2 = P_+$ ,  $Q_-^2 = P_-$ , donde  $P_{\pm} = P_0 \pm P_1$  y

$$\{Q_+, Q_-\} = 2 \int dx V(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (5.1.0.12)$$

Recordemos que para el álgebra supersimétrica este último término se debe anular. Sin embargo, queda este término de superficie, el cuál también se puede escribir como

$$\{Q_+, Q_-\} = 2 \int dx H'(\phi), \quad (5.1.0.13)$$

donde  $H(\phi)$  es una función tal que  $H'(\phi) = V(\phi)$ . Entonces, el conmutador de las supercargas es la integral de una divergencia total la cuál debería anularse. Pero en un estado solitónico este término no es necesariamente nulo. Por ejemplo, considere  $V(\phi) = -\lambda(\phi^2 - a^2)$  de modo que el potencial es el típico potencial cuártico de Higgs  $\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2$ , el cuál tiene dos vacíos en  $\phi = \pm a$ . Llamando  $T$  al lado derecho de (5.1.0.13), vemos que para una configuración de *domain wall*  $\phi(-\infty) = -a$  y  $\phi(\infty) = a$

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( 2a^2 \lambda - \frac{2}{3} \lambda \phi^3 \right) = \frac{4\lambda a^3}{3}. \quad (5.1.0.14)$$

Es claro que  $T$  está relacionada con la carga topológica  $\int dx (\partial \phi / \partial x)$ . Esta nueva álgebra modificada  $\{Q_+, Q_-\} = T$  tiene muchas consecuencias interesantes. La primera es que permite establecer un límite sobre la masa de una partícula. Considere lo siguiente

$$\begin{aligned} (Q_+ \pm Q_-)^2 &= Q_+^2 + Q_-^2 \pm (Q_+ Q_- + Q_- Q_+) \\ &= P_+ + P_- \pm T \end{aligned} \quad (5.1.0.15)$$

Pero  $(Q_+ \pm Q_-)^2 \geq 0$ , entonces,  $P_+ + P_- \geq |T|$ . Para una sola partícula de masa  $M$  en reposo,  $P_0 = M$  y  $P_1 = 0$ , entonces  $P_+ = P_- = M$  y la ecuación anterior implica

$$M \geq |T|. \quad (5.1.0.16)$$

Ahora nos preguntamos cuando se satura esta desigualdad. Es claro, a partir de ecuación (5.1.0.15) que la desigualdad se satura para estados  $|\alpha\rangle$  tales que

$$(Q_+ \pm Q_-) |\alpha\rangle = 0. \quad (5.1.0.17)$$

Clásicamente, esta condición se satisface para todos los estados solitónicos de la teoría. Esto se puede ver fácilmente a partir de ecuaciones (5.1.0.10) y (5.1.0.11), que implican para una configuración estática  $\partial \phi / \partial t = 0$

$$(\partial_1 \phi + V(\phi)) \psi^- = 0 \quad \text{o} \quad (\partial_1 \phi - V(\phi)) \psi^+ = 0 \quad (5.1.0.18)$$

que no son más que las ecuaciones de Bogomolny para esta teoría. En efecto, la energía de una configuración estática es

$$M = \int dx \frac{1}{2} ((\partial_1 \phi)^2 + V^2(\phi)) \quad (5.1.0.19)$$

la cuál se puede escribir, mediante el argumento de Bogomolny, de la siguiente forma

$$M = \frac{1}{2} \int dx \left( (\partial_1 \phi)^2 \pm V(\phi)^2 \right) \mp T \quad (5.1.0.20)$$

del cuál se pueden derivar fácilmente ecuaciones (5.1.0.18) cuando se satura la desigualdad.

Otra cosa que podemos notar es que la transformación supersimétrica para el fermión  $\psi$  (5.1.0.6) se escribe, para una configuración estática, como sigue

$$\delta\psi = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi - V(\phi) & 0 \\ 0 & -\partial_1 \phi - V(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^+ \\ \epsilon^- \end{pmatrix}. \quad (5.1.0.21)$$

Haciendo  $\delta\psi = 0$  es otra forma de obtener las ecuaciones de Bogomolny sin necesidad de construir la corriente y luego las cargas. Además, para cada ecuación de Bogomolny está asociada una solución de la ecuación de Dirac

$$\psi_0 = (\not{\partial}\phi - V) \begin{pmatrix} \psi_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \psi_0 = (\not{\partial}\phi + V) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^- \end{pmatrix} \quad (5.1.0.22)$$

Uno puede entender la aparición de estos modos cero notando que un *domain wall* junto con  $\psi = 0$  resuelven las ecuaciones de movimiento (5.1.0.3) y (5.1.0.4) del modelo. Pero una transformación de supersimetría de esta solución seguirá siendo una solución, lo que significa que  $\delta\psi$  satisface la ecuación de Dirac.

## 5.2 EL MODELO SUPERSIMÉTRICO $N = 1$ EN $2 + 1$

Comencemos introduciendo una versión supersimétrica del modelo abeliano de Higgs. Definimos la métrica como  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$ . El campo de Higgs  $\phi$  junto con el higgsino  $\psi$  y un campo auxiliar  $F$  son componentes del supercampo escalar complejo  $\Phi(y, \theta)$ , que en  $2 + 1$  se escribe como

$$\Phi(y; \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta F(y) \quad (5.2.0.1)$$

$$\Phi^\dagger(y; \bar{\theta}) = \phi^*(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - \bar{\theta}\bar{\theta}F(y), \quad (5.2.0.2)$$

donde  $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$  y  $\theta^2 = \theta\theta$ . En  $2 + 1$  un supercampo escalar  $N = 1$  no puede ser quiral [Alexandre2003]. Definimos la superderivada covariante como

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu, \quad \overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \quad (5.2.0.3)$$

son las superderivadas covariantes en la variable  $x^\mu$ . Para algunas cuentas necesitaremos escribirlas en términos de  $y^\mu$  como

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad (5.2.0.4)$$

El campo de gauge  $A_\mu(x)$  abeliano junto con el fotino  $\lambda(x)$  se acomodan en el supercampo vectorial  $V$ , que escrito en el gauge de Wess-Zumino es

$$V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}^2\theta\lambda(x) \quad (5.2.0.5)$$

Finalmente, también introducimos un supercampo escalar real, necesario para implementar el mecanismo de ruptura de simetría de Fayet-Illiopoulos [Fayet-Illiopoulos], que se escribe como

$$S(x; \theta) = N(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \frac{1}{2}\theta^2 D(y) \quad (5.2.0.6)$$

y el supercampo spinorial lo escribimos como

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^2 \mathcal{D}_\alpha V_{WZ} = -i\lambda_\alpha(y) + i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) + \theta^2(\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(y))_\alpha \quad (5.2.0.7)$$

El lagrangiano supersimétrico para el modelo abeliano de Higgs  $\mathcal{N} = 1$ , escrito en el formalismo de superespacio, tiene la forma

$$L_{\mathcal{N}=1} = \int d^2\theta \left( \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha + \sqrt{2\lambda} S \Phi^\dagger \Phi \right) + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left( \Phi^\dagger e^{V_{WZ}} \Phi + S^\dagger S + \eta S \right) \quad (5.2.0.8)$$

donde  $\eta$  es el parámetro de Fayet-Iliopoulos. Escribiendo el lagrangiano en términos de sus componentes bosónicos y fermiónicos nos da

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{N}=1} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu N \partial_\mu N + \frac{1}{2} (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi + \frac{1}{2} D^2 + \sqrt{2\lambda} D |\Phi|^2 \\ & \eta D + \frac{1}{2} |F|^2 + \sqrt{2\lambda} N (F^* \Phi + F \Phi^*) + \frac{i}{2} \lambda \not{\partial} \bar{\lambda} + \frac{i}{2} \chi \not{\partial} \bar{\chi} + \frac{i}{2} \psi \not{D} \bar{\psi} - \\ & \sqrt{2\lambda} N \bar{\psi} \psi + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \lambda \Phi - \bar{\lambda} \psi \Phi^*) - \sqrt{2\lambda} (\bar{\psi} \chi \Phi + \bar{\chi} \psi \Phi^*) \end{aligned} \quad (5.2.0.9)$$

Podemos eliminar los campos auxiliares  $F$  y  $D$  insertando en el lagrangiano anterior sus ecuaciones de movimiento correspondientes

$$F = -2\sqrt{2\lambda} N \Phi, \quad (5.2.0.10)$$

$$D = -\sqrt{2\lambda} |\Phi|^2 - \eta. \quad (5.2.0.11)$$

El rompimiento de la simetría se da cuanto el término  $D$  se anula para cierto valor del campo  $\phi_0$ . Tal valor se halla fácilmente como

$$\phi_0^2 = -\frac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}. \quad (5.2.0.12)$$

Reemplazando los campos auxiliares en el lagrangiano (5.2.0.9) obtenemos

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{N}=1} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu N \partial_\mu N + \frac{1}{2} (D^\mu)^* D_\mu \Phi - 4\lambda N^2 |\Phi|^2 - \lambda (|\Phi|^2 - \phi_0^2)^2 \\ & + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda + \frac{i}{2} \bar{\chi} \not{\partial} \chi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \not{D} \psi - \sqrt{2\lambda} N \bar{\psi} \psi \\ & + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \lambda \Phi - \bar{\lambda} \psi \Phi^*) - \sqrt{2\lambda} (\bar{\psi} \chi \Phi + \bar{\chi} \psi \Phi^*) \end{aligned} \quad (5.2.0.13)$$

Nótese que este lagrangiano se reduce al lagrangiano del modelo abeliano de Higgs si "apagamos" los campos fermiónicos, es decir, anulamos los campos  $\lambda, \psi$  y  $\chi$ , y si hacemos también  $N = 0$ . Incluso aparece el típico término del potencial cuártico sin necesidad de agregar algún superpotencial, ya que este nace de pedir la ruptura de la simetría a través del término de Fayet-Iliopoulos junto con el término  $D$ .

Ahora nos gustaría hacer que el lagrangiano anterior posea una supersimetría extendida  $\mathcal{N} = 2$ . Para ver como podemos hacer esto, daremos un repaso brevísimo sobre ciertos aspectos de teorías de gauge supersimétricas  $\mathcal{N} = 2$  en tres dimensiones.

### 5.2.1 Aspectos generales de teorías $\mathcal{N} = 2$ en 3d

En tres dimensiones existen 4 cargas supersimétricas [Csaba-Martone, Aharony-Hanany-Seiberg-Strassler, Gates-Grisaru-Roczek], a diferencia de las 8 supercargas en cuatro dimensiones. Estas se obtienen a partir de una reducción de dimensión del álgebra  $\mathcal{N} = 1$  en 4d:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0, \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\sigma^i)_{\alpha\beta} P_i + 2i\epsilon_{\alpha\beta} Z \quad (5.2.1.1)$$

donde  $\sigma^{i=0,1,2} = (i\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)$  y  $Z$  es la carga central y corresponde a la componente  $P_3$  del momento en 4d. Una diferencia con las matrices gamma en 4d es que estas son todas reales. En cuatro dimensiones, los espinores transformaban en la representación fundamental del grupo de Lorentz  $SL(2, \mathbb{C})$ . En tres dimensiones, el grupo de Lorentz es  $SL(2, \mathbb{R})$  que posee 3 generadores (2 boosts y una rotación), y los espinores forman spinores de Majorana de dos componentes reales.

Las coordenadas en el superspacio ahora son  $z = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_\beta)$ , donde  $\mu = 0, 1, 2$  y  $\theta_{\alpha, \beta}$  son variables de Grassmann reales. En 4d, los supercampos quirales se escriben de igual forma que (5.2.0.1), con la diferencia que en 3d el espinor de Weyl  $\psi$  se descompone en dos fermiones de Majorana reales.

El supercampo vectorial  $\mathcal{N} = 2$  en 3d se escribe como

$$V = i\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma + i\theta\sigma^i\bar{\theta}A_i + i\theta^2\bar{\theta}\lambda - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2D, \quad (5.2.1.2)$$

donde se ha separado explícitamente el campo de gauge en 3d  $A_i$  del campo de gauge escalar que surge de la reducción dimensional  $\sigma \sim A_3$ . Nótese que a diferencia del supercampo vectorial de la teoría 3d  $\mathcal{N} = 1$  de la sección anterior, en  $\mathcal{N} = 2$  el supercampo contiene un campo escalar real  $\sigma$  que puede adquirir un valor de expectación de vacío distinto de cero que puede romper la simetría de gauge de la teoría. Sin embargo, en 3d no es el único campo escalar que puede adquirir un valor de expectación distinto de cero. En tres dimensiones el dual de Hodge del tensor de campo electromagnético,  $\star F$ , es una 1-forma. Esta 1-forma la podemos escribir como el diferencial de algún campo escalar  $\gamma$

$$\star F = d\gamma. \quad (5.2.1.3)$$

Este campo escalar se conoce como el fotón dual y es análogo al campo de gauge  $A$  cuando  $F = dA$  (con la diferencia que  $A$  es una 1-forma y por lo tanto,  $F$  es una 2-forma). Debido a la regla de cuantización de Dirac,  $\gamma$  debe ser una función periódica y entonces tomar valores en  $S^1$ . Uno puede combinar ambos campos escalares ( $\sigma$  y  $\gamma$ ) en un sólo campo escalar

$$\tilde{\phi} = \sigma + i\gamma. \quad (5.2.1.4)$$

Definamos  $\mathcal{J} = d\gamma$ . Como  $d^2 = 0$ , entonces queda claro que  $d\mathcal{J} = 0$ . Este resultado no es más que una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell; por lo tanto, podemos considerar a  $\mathcal{J}$  como una corriente conservada. Esta corriente conservada está asociada a alguna simetría global de la teoría. Claramente, esta simetría es  $U(1)_1$  debido a como definimos el tensor de campos. En SUSY, corrientes conservadas se pueden integrar dentro de un supercampo  $\Sigma$  que es lineal, es decir, que satisface  $\mathcal{D}^2\Sigma = \bar{\mathcal{D}}^2\Sigma = 0$ . Un supercampo que satisface las restricciones anteriores tiene [Bertolini] la siguiente expansión en componentes

$$\begin{aligned} \Sigma = -\frac{i}{2}\bar{\mathcal{D}}^\alpha\mathcal{D}_\alpha V = \sigma + \theta\bar{\lambda} + \bar{\theta}\lambda + \frac{1}{2}\theta\sigma^i\bar{\theta}\partial_i\gamma + i\theta\bar{\theta}D + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta\sigma^i\partial_i\lambda - \\ \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}\sigma^i\partial_i\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\sigma. \end{aligned} \quad (5.2.1.5)$$

Ahora, a partir de estos supercampos nos gustaría construir lagrangianos en 3d con supersimetría  $\mathcal{N} = 2$ . A partir del supercampo vectorial (5.2.1.2) podemos definir el supercampo electromagnético  $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha V$  y con esto construir la parte electromagnética de la teoría

$$L_{YM} = \int d^2\theta W_\alpha W^\alpha \quad (5.2.1.6)$$

$$= -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + D_i\sigma D^i\sigma + D^2 + \bar{\lambda}\sigma^i D_i\lambda \quad (5.2.1.7)$$

Alternativamente, uno puede usar el supercampo lineal  $\Sigma$  para construir una acción análoga a la anterior

$$L_{YM} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Sigma^2 \quad (5.2.1.8)$$

De hecho ambos lagrangianos son iguales.

En 3d, la acción de Yang-Mills(en el caso no abeliano) (5.2.1.6) no es la única combinación que es invariante de gauge que se puede agregar a la acción. De hecho uno puede agregar un término de Chern-Simons que en una teoría abeliana se escribe como

$$L_{CS} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Sigma V. \quad (5.2.1.9)$$

Aunque no estudiaremos teorías con términos de Chern-Simons, creemos que vale la pena mencionarlos por su mero interés. Referimos a [Seiberg-Intrilligator] para una *review* excelente. A parte de estos términos también podemos agregar términos de Fayet-Iliopoulos como pasa en 4d.

Para agregar materia y dinámica a la teoría debemos acoplar los supercampos escalares con el supercampo vectorial. Para campos quirales el lagrangiano se escribe como

$$L = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} Q e^V Q^\dagger \quad (5.2.1.10)$$

donde  $Q = \phi_Q + \theta\psi + \theta^2 F$  es el campo quiral. Escrito en componentes, el lagrangiano es

$$L = |D_i \phi_Q|^2 + \sigma^2 |\phi_Q|^2 + D|\phi_Q|^2 + i\bar{\psi}\sigma^i D_i \psi - i\sigma\bar{\psi}\psi + i(\phi_Q^\dagger \bar{\lambda}\psi - \bar{\psi}\lambda\phi_Q) + |F|^2 \quad (5.2.1.11)$$

Con todos estos elementos escribamos el lagrangiano más general de una teoría en 3d con supersimetría  $\mathcal{N} = 2$  (sin término de Chern-Simons):

$$L_{\mathcal{N}=2} = \int d^2\theta W_\alpha W^\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} Q e^{2gV} Q + \eta \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V \quad (5.2.1.12)$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + i\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda + \frac{1}{2} D^2 + g\eta D + gD|\phi_Q|^2 + D^\mu \phi_Q^\dagger D_\mu \phi_Q + i\bar{\psi}\not{D}\psi + g^2 \sigma^2 |\phi_Q|^2 + g\sigma\bar{\psi}\psi + \sqrt{2}g(\bar{\lambda}\psi\phi_Q^\dagger - \bar{\psi}\lambda\phi_Q) + |F|^2 \quad (5.2.1.13)$$

Este lagrangiano no es más que la reducción dimensional de un lagrangiano  $\mathcal{N} = 1$  en 4d. La reducción de dimensión se obtiene al hacer que los campos no dependan de alguna de las coordenadas y cierta componente del campo de gauge se transforma en un campo escalar real. En este caso, hicimos que los campos no dependan de  $x^2$  y la componente  $A_2 \rightarrow \sigma$ .

Eliminando los campos auxiliares, obtenemos la forma final para el lagrangiano  $\mathcal{N} = 2$  en 3d:

$$L_{\mathcal{N}=2} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + i\bar{\lambda}\not{\partial}\lambda + D^\mu \phi_Q^\dagger D_\mu \phi_Q + \frac{g^2}{2} (|\phi|^2 + \eta)^2 + i\bar{\psi}\not{D}\psi + g^2 \sigma^2 |\phi_Q|^2 + g\sigma\bar{\psi}\psi + \sqrt{2}g(\bar{\lambda}\psi\phi_Q^\dagger - \bar{\psi}\lambda\phi_Q) \quad (5.2.1.14)$$

donde hemos reescalado el supercampo vectorial  $V \rightarrow 2gV$  donde  $g$  es el equivalente a la carga eléctrica  $e$ . La acción (5.2.1.14) ya ha sido derivada por ejemplo en [Ivanov91] partiendo de una acción  $\mathcal{N} = 2$  supersimétrica y luego escribiéndola en términos de supercampos  $\mathcal{N} = 1$ . Este procedimiento es el inverso a lo que queremos llegar. Para obtener una condición sobre la constante de acoplamiento  $\lambda$  debemos partir de una acción  $\mathcal{N} = 1$  y llegar a una acción  $\mathcal{N} = 2$ .

5.2.2 De  $\mathcal{N} = 1$  a  $\mathcal{N} = 2$ 

Ahora que tenemos la forma general de los lagrangianos  $\mathcal{N} = 1$  y  $\mathcal{N} = 2$ , podemos plantearnos que condiciones deben satisfacer los parámetros del lagrangiano  $\mathcal{N} = 1$  para que podamos extender esta simetría a  $\mathcal{N} = 2$ . Primero para poder extender la supersimetría  $\mathcal{N} = 1$  a  $\mathcal{N} = 2$  debemos doblar el número de generadores de supersimetría. Esto significa aumentar el número de campos presentes en la teoría. Contemos el número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos de los campos. Tanto  $S, \Phi$  como  $\Gamma_\alpha$  tiene 1 grado de libertad fermiónico y bosónicos. En efecto,  $\Phi$  tiene al campos escalar  $\phi$  y al fermión  $\psi_\alpha$ ; de igual manera, el supercampo vectorial  $\Gamma_\alpha$  tiene al fermión  $\rho_\alpha$  y a  $A_\mu$  que en 3d aporta sólo un grado de libertad (polarización); lo mismo con el supercampo escalar  $S$ . Por lo tanto, en una teoría  $\mathcal{N} = 2$ , podemos construir un supercampo que contenga todos estos grados de libertad. Con este fin, vamos a juntar los fermiones  $\chi$  y  $\rho$  en un sólo fermión de Dirac

$$\Sigma = \chi - i\rho. \quad (5.2.2.1)$$

Ahora, queremos encontrar un campo escalar que contenga a  $\Sigma$  como su grado de libertad fermiónico. Es fácil ver que tal campo es [Alexandre2003]

$$\Lambda = S + iD^\alpha \Gamma_\alpha = N + \theta \Sigma + \frac{1}{2} \theta^2 D + i\theta \sigma^\mu \sigma^\nu \theta \partial_\mu A_\nu \quad (5.2.2.2)$$

El término cinético para este campo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^2\theta D^\alpha \Lambda D_\alpha \bar{\Lambda} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\Sigma} \not{\partial} \Sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N + \frac{D^2}{2} + \\ & \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{\Sigma} \sigma^\mu \Sigma), \end{aligned} \quad (5.2.2.3)$$

donde el último término es un término de borde y puede desecharse. El penúltimo término puede eliminarse si se impone la condición de gauge  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Esta condición de gauge no es arbitraria, de hecho, es equivalente a pedir que el supercampo vectorial satisfaga  $D^\alpha \Gamma_\alpha = 0$ , de modo que pueda contener una corriente conservada. Esta condición de gauge fue encontrada en [Alexandre[5]] y también la vimos en la sección anterior cuando construimos el campo lineal  $\Sigma$ . Entonces,  $A_\mu$  tiene el rol de una corriente topológica conservada. Entonces, eliminando el término de borde y aplicando la condición de gauge en (5.2.2.3) llegamos a una expresión para el lagrangiano  $\mathcal{N} = 2$  en términos de los supercampos  $\mathcal{N} = 1$

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{N}=2, \text{gauge}} = & \int d^2\theta D^\alpha \Lambda D_\alpha \bar{\Lambda} \\ = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\Sigma} \not{\partial} \Sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N + \frac{D^2}{2} \end{aligned} \quad (5.2.2.4)$$

Incluimos materia en la teoría de forma usual mediante un supercampo escalar complejo  $\mathcal{N} = 1$ ,  $Q$ :

$$Q = \phi + \theta \psi + \frac{1}{2} \theta^2 F. \quad (5.2.2.5)$$

El término cinético para este campo es claramente

$$D^\alpha Q D_\alpha \bar{Q}|_{\theta^2} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + |F|^2 + \text{términos de borde}, \quad (5.2.2.6)$$

El acoplamiento de  $Q$  con el supercampo vectorial se obtiene a partir de los siguientes términos

$$D^\alpha Q \Gamma_\alpha \bar{Q}|_{\theta^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\phi}\psi\lambda - \bar{A}_\mu \partial^\mu \phi + i\bar{\psi}\not{A}\psi) \quad (5.2.2.7)$$

$$SQ\bar{Q}|_{\theta^2} = \frac{1}{2}(D|\phi|^2 - \phi\bar{\psi}\chi - \bar{\phi}\psi\chi + N\phi\bar{F} + N\bar{\phi}F - N\bar{\psi}\psi) \quad (5.2.2.8)$$

$$Q\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha\bar{Q}|_{\theta^2} = -|\phi|^2 A^\mu A_\mu, \quad (5.2.2.9)$$

de modo que el lagrangiano para la materia es

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{N}=2, \text{materia}} &= \frac{1}{2} \int d^2\theta [(D^\alpha - ig\Gamma^\alpha)Q(D_\alpha + ig\Gamma_\alpha)\bar{Q} + 2gSQ\bar{Q}] \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\not{D}\psi + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi - \frac{g}{2}(\phi\bar{\psi}\Sigma + \bar{\phi}\psi\Sigma) - \frac{g}{2}N\bar{\psi}\psi \\ &\quad + \frac{g}{2}D|\phi|^2 + \frac{1}{2}|F|^2 + \frac{g}{2}N(\phi\bar{F} + \bar{\phi}F), \end{aligned} \quad (5.2.2.10)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento y  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ . Este lagrangiano lo derivamos en la sección anterior a partir de una reducción dimensional de una teoría  $\mathcal{N} = 1$  en 4d. En esa sección, no elevamos un lagrangiano  $\mathcal{N} = 1$  a  $\mathcal{N} = 2$  por lo que no se obtuvo ninguna condición sobre la constante de acoplamiento.

Para obtener el potencial cuártico del modelo de Higgs abeliano, eliminemos los campos auxiliares

$$\bar{F} + gN\bar{\phi} = 0 \quad (5.2.2.11)$$

$$D + \frac{g}{2}\phi\bar{\phi} = 0 \quad (5.2.2.12)$$

de modo que los términos en (5.2.2.10) que contienen campos auxiliares se convierten en

$$(L_{\mathcal{N}=2, \text{gauge}} + L_{\mathcal{N}=2, \text{materia}})_{\text{aux.}} = \frac{1}{2}D^2 + \frac{g}{2}D|\phi|^2 + \frac{1}{2}|F|^2 + \frac{g}{2}N(\bar{\phi}F + \bar{F}\phi) \quad (5.2.2.13)$$

$$= -\frac{g^2}{2}N^2|\phi|^2 - \frac{g^2}{8}|\phi|^4. \quad (5.2.2.14)$$

Agreguemos también un término de Fayet-Iliopoulos de la forma

$$L_{\text{F.I.}} = -\frac{g^2}{2}\phi_0^2 \int d^2\theta (\Lambda + \bar{\Lambda}) = -\frac{g}{2}\phi_0^2 D. \quad (5.2.2.15)$$

donde  $\phi_0$  es una constante real. La adición de este término al lagrangiano modifica la ecuación de movimiento para  $D$  como

$$D + \frac{g}{2}|\phi|^2 - \frac{g}{2}\phi_0^2 = 0 \quad (5.2.2.16)$$

de modo que el potencial cuártico se obtiene al eliminar los campos auxiliares

$$(L_{\mathcal{N}=2, \text{gauge}} + L_{\mathcal{N}=2, \text{materia}} + L_{\text{F.I.}})_{\text{aux.}} = -\frac{g^2}{2}N^2|\phi|^2 - \frac{g^2}{8}(|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \quad (5.2.2.17)$$

Es fácil ver que la constante de acoplamiento de Higgs es  $\lambda = \frac{g^2}{8}$ , la cual fue encontrada por [Schaposnik] como una condición de consistencia para pasar de  $\mathcal{N} = 1$  a  $\mathcal{N} = 2$ .



### Parte III

## MODELOS MODIFICADOS

En esta parte vamos a analizar formas en que podemos modificar el modelo abeliano de Higgs para obtener nuevos comportamientos y tal vez nuevas soluciones analíticas.



La existencia y analiticidad de los vórtices abelianos en el plano fueron estudiados extensivamente por Taubes y Jaffe en [TaubesJaffe]. En capítulo 2 analizamos los resultados más importantes de estos papers. Modelos modificados han sido propuestos una multitud de veces, por ejemplo, Lohe [Lohe43] admite otros tipos de potenciales y modifica el término cinético del campo de modo que el truco de Bogomolny se pueda aplicar también. Veremos más adelante en este capítulo que esta condición es muy usada para constreñir la forma de los factores que modifican los términos cinéticos y el potencial.

En este capítulo vamos a presentar un modelo modificado propuesto por Contatto [Contatto2017] que admite vórtices estáticos. Contatto se vale de un análisis de ecuaciones diferenciales para hallar todos los posibles casos integrables de una familia de modelos modificados. A su vez, también se presenta una solución explícita.

Otra forma de modificar el modelo que exploraremos en este capítulo es agregar impurezas del tipo eléctrico y magnético. Tales impurezas fueron estudiadas por primera vez por Tong y Wong [TongWong2014] basándose en resultados parecidos en teorías supersimétricas en 2+1. Las cinco ecuaciones vorticiales que estudiamos en capítulo 2 son generalizadas por Gudnason y Ross en [GudnRoss2021] de modo que se puedan incluir impurezas del tipo Tong-Wong. Estudiaremos que bajo ciertas condiciones estas generalizaciones siguen siendo integrables.

### 6.1 EL MODELO MODIFICADO

En esta sección describiremos una familia de modelos modificados propuestos por Contatto. El lagrangiano del modelo es el siguiente

$$L = \int d^2x \Omega \left( -\frac{G(|\phi|)^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \overline{D_\mu \phi} D^\mu \phi - V(|\phi|) \right) \quad (6.1.0.1)$$

Este lagrangiano está definido en una variedad suave  $\mathbb{R} \times \Sigma$  con métrica  $ds^2 = dt^2 - \Omega(dx^2 + dy^2)$ . Donde  $G$  es una función continua de  $|\phi|$  en su dominio de definición y  $\Omega = \Omega(x, y)$  es un factor conforme para la métrica de  $\Sigma$ .

El potencial considerado es

$$V(|\phi|) = \frac{1}{8G(|\phi|)^2} (1 - |\phi|^2)^2, \quad (6.1.0.2)$$

el cuál difiere del potencial cuártico del modelo abeliano de Higgs por un factor de  $G(|\phi|)$  en el denominador. El truco de Bogomolnyi puede ser aplicado a este caso. Para ver esto, consideremos el funcional de energía

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x \Omega \left( \frac{G(|\phi|)^2}{\Omega^2} B^2 + \overline{D_i \phi} D_i \phi + \frac{1}{4G(|\phi|)^2} (1 - |\phi|^2)^2 \right) \quad (6.1.0.3)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2x \Omega \left[ \left( \frac{G(|\phi|)}{\Omega} B - \frac{1}{2G(|\phi|)} (1 - |\phi|^2) \right)^2 + \overline{D_i \phi} D_i \phi + \frac{B}{\Omega} (1 - |\phi|^2) \right] \quad (6.1.0.4)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2x \Omega \left[ \left( \frac{G(|\phi|)}{\Omega} B - \frac{1}{2G(|\phi|)} (1 - |\phi|^2) \right)^2 + 4|D_{\bar{z}} \phi|^2 \right] + \int d^2x B + \int B |\phi|^2 d^2x \quad (6.1.0.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2x \Omega \left[ \left( \frac{G(|\phi|)}{\Omega} B - \frac{1}{2G(|\phi|)} (1 - |\phi|^2) \right)^2 + 4|D_{\bar{z}} \phi|^2 \right] + \pi N \quad (6.1.0.6)$$

Donde hemos asumido que todos los términos en el funcional se pueden integrar, lo cual se cumple para todos los casos considerados.

Las ecuaciones de Bogomolnyi modificadas se derivan de ecuación (6.1.0.6) cuando  $E = \pi N$ :

$$D_{\bar{z}} \phi \equiv \partial_{\bar{z}} \phi - i a_{\bar{z}} \phi = 0 \quad (6.1.0.7)$$

$$B = \frac{\Omega}{2G(|\phi|)^2} (1 - |\phi|^2). \quad (6.1.0.8)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el capítulo 2, eliminamos  $a_{\bar{z}}$  de la primera ecuación y reemplazando en la segunda, nos lleva a la ecuación de Taubes modificada

$$\Delta h + \frac{\Omega}{G(e^{h/2})^2} (1 - e^h) = 0, \quad (6.1.0.9)$$

donde  $h = \log |\phi|^2$  y  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  es el Laplaciano. Resolviendo (6.1.0.9) e imponiendo las condiciones de borde usuales  $|\phi| \rightarrow 1$  y  $D_i \phi \rightarrow 0$ , se obtienen soluciones vorticiales topológicas definidas en una superficie  $\Sigma$  con curvatura gaussiana  $K_\Sigma$ .

Notemos que la ecuación (6.1.0.9) está incompleta, ya que en general una solución vorticial  $\phi$  tiene ceros justamente en los centros de los vórtices. Esto implica que la solución tendrá singularidades logarítmicas para  $h$  y el laplaciano aplicado a  $h$  generará funciones delta. Esto ya lo habíamos notado para los vórtices de Taubes ( $G = 1$ ) en el capítulo 2.

A partir de ahora, tomaremos  $G(e^{h/2})^2 = e^{(q+1)h/2}$ , para un  $q \in \mathbb{R}$ , y estudiaremos que valores de  $q$  hacen que la ecuación (6.1.0.9) sea integrable. También vamos a imponer dos condiciones sobre el campo de Higgs. Primero, vamos a requerir que el campo  $\phi$  sea no nulo excepto en  $N$  puntos finitos  $\{z_i\}$ , los cuáles representan la posición del centro del vórtice. Y segundo, en una vecindad de  $z_i$ , existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que

$$\phi \approx (z - z_i)^{n_i} \psi_i(z, \bar{z}), \quad (6.1.0.10)$$

donde  $\phi_i$  es una función continua y diferenciable en todo punto excepto posiblemente en  $z_i$ .

Estas condiciones ya las habíamos presentado cuando discutimos los Teoremas de Taubes en Capítulo 2. Por lo tanto, estas condiciones son las más naturales que podemos pensar para buscar generalizaciones del modelo abeliano de Higgs.

## 6.2 CASOS INTEGRABLES

En [Contatto2017] se muestra que a partir de un análisis de Painlevé, el cuál es un método de analizar la integrabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, que en espacio plano  $\Omega = 1$  existen tres modelos integrables. Estos son los casos  $q = 1/3$ ,  $q = 0$  y  $q = -1/3$ . Los dos primeros casos ya habían sido estudiados por Dunajski en [Dunajski2012] y corresponden a los vórtices sinh-Gordon y a los vórtices de Tzitzeica, mientras que el último caso fue recientemente estudiado por Contatto.

En esta sección presentaremos estos tres casos.

## 6.2.1 Los vórtices sinh-Gordon

Tomando  $\Omega = 1$  y  $q = 0$ , la ecuación (6.1.0.9) se transforma en

$$\Delta \frac{h}{2} = \sinh \frac{h}{2} \quad (6.2.1.1)$$

Esta ecuación fue estudiada en el contexto de los vórtices abelianos de Taubes (Cuadro 1). Los vórtices de Taubes o hiperbólicos eran descritos por la siguiente ecuación

$$\Delta h + \Omega - \Omega e^h = 0, \quad (6.2.1.2)$$

donde  $\Omega$  es el factor conforme usual de la métrica  $g = \Omega dz d\bar{z}$  en una superficie de Riemann  $\Sigma$ . Tomando  $\Omega = e^{-h/2}$ , la ecuación de Taubes (6.2.1.2) se reduce a la ecuación de sinh-Gordon (6.2.1.1). Esto nos provee de una interpretación de la métrica  $g$  como un vórtice aislado.

Una solución simple para (6.2.1.1) es

$$\frac{h}{2} = -\tanh^{-1} \left[ \exp \left( \frac{(z - z_0)e^{-i\alpha}}{2} + \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)e^{i\alpha}}{2} \right) \right], \quad (6.2.1.3)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real. Esta solución luce muy similar a la solución de *domain wall* para el modelo seno-Gordon. De hecho, esta solución es una continuación analítica de dicha solución. Imponiendo  $\alpha = 0$  y  $z_0 = 0$  se tiene que la métrica en  $\Sigma$  es

$$g = \tanh(x/2)^{-2} (dx^2 + dy^2). \quad (6.2.1.4)$$

Para darnos una idea de como luce esta superficie, expandamos el factor conforme alrededor de  $x = 0$ . Esto nos da

$$\frac{1}{4} \frac{dx^2 + dy^2}{x^2}, \quad (6.2.1.5)$$

que no es más que la métrica del semiplano de Poincaré.

La expansión de  $h$  alrededor del cero es

$$h \approx 4 \log |x| + \dots \quad (6.2.1.6)$$

Entonces, podríamos pensar que la solución se trata de una solución de dos vórtices. Sin embargo, esto no es así, pues para eso debemos comprobar que la integral de  $B$  devuelva el valor de  $2\pi$ . Sin embargo, esto no sucede pues la integral en la dirección  $y$  no converge debido a la métrica (6.2.1.5).

Para poder encontrar una solución, vamos a reducirnos a encontrar soluciones con simetría esférica de la forma  $h = h(r)$ , con  $r = |z|$ . La ecuación de Taubes sinh-Gordon se reduce a

$$h_{rr} + \frac{2}{r} h_r = \sinh \frac{h}{2} \quad (6.2.1.7)$$

Gracias al comportamiento (6.1.0.10), podemos expandir  $h(r)$  alrededor de  $r = 0$  como

$$h(r) \sim 2N \ln r + a - \frac{\Omega(0)}{4} r^2 + O(r^4). \quad (6.2.1.8)$$

Donde consideramos  $z_i = 0$  sin pérdida de generalidad. Se debe resaltar que la expansión (6.2.1.8) tiene sentido sólo cuando la métrica es suave y completa geodésicamente, en particular, se requiere que  $\Omega(0)$  esté bien definida. Además, la expansión anterior se puede obtener también a partir de la ecuación de Taubes para soluciones esféricamente simétricas en el límite  $r \rightarrow 0$ , dada por

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{2} e^u \quad (6.2.1.9)$$

donde  $-2u = h$ .

Además de tener este comportamiento asintótico cerca de  $r = 0$ ,  $h(r)$  debe tender a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . Para  $r \rightarrow \infty$ , aproximamos  $\sinh \frac{h}{2} \approx \frac{h}{2}$  y la ecuación diferencial (6.2.1.7) se reduce a la ecuación de Bessel modificada de orden cero. Por lo tanto, la solución asintótica para  $h(r)$  es

$$u \sim 4\lambda K_0(r), \quad \text{para } r \rightarrow \infty \quad (6.2.1.10)$$

para alguna constante  $\lambda$  a determinar.

Haciendo el cambio de variables  $w = -2 \ln w$  y  $r = r\rho$ , la ecuación (6.2.1.9) cambia a

$$w_{\rho\rho} = \frac{(w_{\rho})^2}{w} - \frac{w_{\rho}}{\rho} + w^3 - \frac{1}{w}, \quad (6.2.1.11)$$

la cual es una ecuación diferencial que pertenece a una familia de ecuaciones diferenciales bien estudiadas. Esta en particular es la ecuación de Painlevé III con parámetros  $(0, 0, 1, -1)$  [Dunajski2012]. El comportamiento asintótico de  $h(r)$  en  $r = 0$  y  $r \rightarrow \infty$  junto con ciertas fórmulas que conectan ambos regímenes determinan completamente las constantes de la solución.

Se encuentra que el comportamiento asintótico para  $h = 2u$  es de la forma

$$h(r) \sim 4\sigma \ln r + 4 \ln \beta + \frac{1}{\beta^2} r, \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (6.2.1.12)$$

$$\sim -8\lambda K_0(r) \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (6.2.1.13)$$

con las fórmulas de conexión

$$\sigma(\lambda) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\pi\lambda), \quad \beta(\lambda) = 2^{-3\sigma} \frac{\Gamma((1-\sigma)/2)}{\Gamma((1+\sigma)/2)}, \quad (6.2.1.14)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler. Este comportamiento es sólo válido para  $0 \leq \lambda \leq \pi^{-1}$ . Comparando esta expansión asintótica con (6.2.1.8) vemos que esta solución tiene  $N = 2\sigma$ . Como  $N$  debe ser un entero es fácil comprobar que en el rango de  $\lambda$ , la única posibilidad es  $N = 1$ . Por lo que existe una solución de 1-vórtice con  $\sigma = 1/2$  y

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \quad \beta = 2^{-3/2} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \quad (6.2.1.15)$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, ambas constantes quedan determinadas.

Según [Speight], podemos dar una interpretación de los vórtices como partículas, que vistas desde una gran distancia, tienen un comportamiento de partícula puntual. En este esquema, la constante  $8\lambda$  nos indica la fuerza del vórtice. Entonces, en el caso discutido, la fuerza del vórtices es aproximadamente

$$8 \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sim 1,80 \quad (6.2.1.16)$$

En comparación con los vórtices en espacio plano, cuyo valor de  $\lambda$  no se puede calcular analíticamente, este valor fue encontrado numéricamente, dando un valor de 1,68.

### 6.2.2 Vórtices de Tzitzeica

Tomemos ahora  $\Omega = 1$  y  $q = -1/3$ . En este caso (6.1.0.9) se transforma en la ecuación de Tzitzeica

$$\Delta u + \frac{1}{3}(e^{-2u} - e^u) = 0, \quad u = \frac{h}{3}. \quad (6.2.2.1)$$

De forma similar a la sección anterior, vamos a asumir  $u = u(r)$  y reducir la ecuación diferencial parcial (6.2.2.1) a la ecuación diferencial ordinaria siguiente

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{3}(e^{-2u} - e^u) = 0. \quad (6.2.2.2)$$

Esta ecuación también se puede reducir a una ecuación de Painlevé III con el siguiente cambio

$$u(r) = \ln w - \frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{4} \ln \frac{27}{4}, \quad r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rho^{2/3} \quad (6.2.2.3)$$

La ecuación de Painlevé III resultante es

$$w_{\rho\rho} = \frac{(w_\rho)^2}{w} - \frac{w_\rho}{\rho} + \frac{w^2}{\rho} - \frac{1}{w}, \quad (6.2.2.4)$$

la cuál tiene parámetros  $(1, 0, 0, -1)$ . Fórmulas de conexión asintóticas ya han sido obtenidas por [Kitaev89=Dunajski2012-10]. En nuestro caso, se encuentra que

$$h(r) = 3u \sim \left( \frac{9p}{\pi} - 6 \right) \log r + \beta \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (6.2.2.5)$$

$$\sim \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left( \cos p + \frac{1}{2} \right) K_0(r) \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (6.2.2.6)$$

donde  $0 < p < \pi$  parametriza las soluciones,

$$\beta = 3 \ln \left( 3^{-3p/\pi} \frac{9p^2}{2\pi^2} \frac{\Gamma(1-p/2\pi)\Gamma(1-p/\pi)}{\Gamma(1+p/2\pi)\Gamma(1+p/\pi)} \right) - \left( \frac{9p}{2\pi} - 3 \right) \ln 12. \quad (6.2.2.7)$$

De nuevo, comparando con la expansión asintótica (6.2.1.8) obtenemos una expresión para  $N$  en función de  $p$  dada por

$$2N = \frac{9p}{\pi} - 6. \quad (6.2.2.8)$$

El rango de  $p$  reduce las posibilidades a sólo  $N = 1$ , en cuyo caso  $p = 8\pi/9$ . De esta forma, el coeficiente de  $K_0(r)$  en la expansión asintótica (6.2.2.6) determina la fuerza del vórtice de Tzitzeica

$$\left| \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left( \cos(8\pi/9) + \frac{1}{2} \right) \right| \sim 1.45. \quad (6.2.2.9)$$

6.2.3 Vórtices con  $q = -1/3$ 

Ahora consideremos el caso  $\Omega = 1$  y  $q = -1/3$ . La ecuación de Taubes modificada es ahora,

$$\Delta u + \frac{1}{3}(e^{-2u} - e^u) = 0 \quad (6.2.3.1)$$

que es idéntica al del caso  $q = 1/3$ , con la cautela que ahora  $u = -h/3$ . Por lo tanto, podemos usar las expresiones asintóticas (6.2.2.5) y (6.2.2.6) para  $u$

$$h(r) = -3u \sim \left(\frac{9p}{\pi} - 6\right) \log r + \beta \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (6.2.3.2)$$

$$\sim \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left(\cos p + \frac{1}{2}\right) K_0(r) \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \quad (6.2.3.3)$$

La única diferencia es el cambio de signo en los coeficientes. Análogamente a (6.2.2.8), tenemos que los valores de  $N$  y  $p$  están relacionados de la siguiente manera

$$2N = 6 - \frac{9p}{\pi}. \quad (6.2.3.4)$$

Ahora, en el rango de  $p$  existen dos posibles valores para  $N$ . Estos son  $N = 1$  y  $N = 2$ , y para los cuales  $p = 4\pi/9$  y  $p = 2\pi/9$ . Con estos valores de  $p$  podemos hallar la fuerza de los vórtices para  $N = 1$  y  $N = 2$ :

$$\left| \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left(\cos(4\pi/9) + \frac{1}{2}\right) \right| \sim 2,23, \quad (6.2.3.5)$$

$$\left| \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left(\cos(2\pi/9) + \frac{1}{2}\right) \right| \sim 4,19. \quad (6.2.3.6)$$

## 6.3 NOTAS DE CIERRE

Resta calcular que efectivamente, las soluciones halladas representan soluciones vorticiales topológicas. Para comprobarlo, debemos calcular el campo magnético y asegurarnos que  $\int_{\Sigma} d^2x B = 2\pi N$ . Para todos los casos se cumple que  $\Sigma = \mathbb{R}^2$  y que el campo magnético está dado por

$$B = -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right), \quad (6.3.0.1)$$

entonces,

$$\int_{\Sigma} d^2x B = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) r dr d\theta = -(2\pi) \frac{1}{2} \left[ r \frac{dh}{dr} \right]_{r=0}^{\infty} \quad (6.3.0.2)$$

Ahora, nos especializamos en cada caso estudiado. Para los vórtices sinh-Gordon, usemos los comportamientos asintóticos (6.2.1.12) y (6.2.1.13). En el límite superior debemos calcular la derivada de  $K_0(r)$ , que nos da  $K_1(r)$ . Esta función decae exponencialmente en el infinito, por lo que,  $r^n K_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  para toda potencia positiva  $n$ . Por lo tanto, el límite superior se anula.

Para el límite inferior, calculamos

$$r \frac{dh}{dr} = r \left( 4\sigma \frac{1}{r} + \frac{1}{\beta^2} \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 4\sigma. \quad (6.3.0.3)$$



Como  $\sigma = 1/2$ , entonces, el límite es 2. Finalmente, la integral (6.3.0.2) es

$$\int_{\Sigma} d^2x B = 2\pi, \quad (6.3.0.4)$$

lo que indica que la solución es un vórtice  $N = 1$ .

Podemos hacer el mismo análisis para los vórtices de Tzitzeica. Ahora, debemos usar las fórmulas asintóticas (6.2.2.5) y (6.2.2.6). Siguiendo la lógica del análisis anterior, es fácil ver que

$$\int_{\Sigma} d^2x B = (2\pi) \frac{1}{2} \left( \frac{9p}{\pi} - 6 \right) = 2\pi, \quad (6.3.0.5)$$

donde usamos  $p = 8\pi/9$ . Por lo tanto, la solución también representa un vórtice  $N = 1$  como se esperaba.

El último caso es similar al anterior. La integral del campo magnético da

$$\int_{\Sigma} d^2x B = 2\pi \frac{1}{2} \left( 6 - \frac{9p}{\pi} \right) = 2\pi N \quad (6.3.0.6)$$

donde  $N = 1, 2$  de acuerdo con el valor de  $p$ .

Otro aspecto importante, que simplemente mencionaremos, que podemos discutir acerca de estos vórtices es la construcción de soluciones multi-vorticiales con  $N > 1$ . Esto se puede hacer mediante el mecanismo explicado al final de la sección 3.5. La llamada propiedad de transitividad, básicamente, nos dice que podemos construir nuevas soluciones vorticiales a partir de otras deformando la métrica original. En [Contatto-Dorigoni] este proceso se muestra de forma explícita y se obtienen soluciones multi-vorticiales para los vórtices sinh-Gordon y los de Tzitzeica.



## AÑADIENDO IMPUREZAS

El estudio de vórtices en presencia de impurezas ha ganado mucha atención en los últimos años. Como ejemplo tenemos el trabajo de Wong y Tong [WongTong] que estudia vórtices BPS en presencia de impurezas magnéticas y eléctricas. Este trabajo también ha motivado el estudio de vórtices en teorías abelianas de gauge producto, las cuales pueden ser relacionadas con vórtices abelianos en presencia de impurezas magnéticas. También, teoremas de existencia de vórtices y anti-vórtices en tales modelos han sido probados en [Ashcroft-Krusch-16,17].

En este capítulo exploraremos el trabajo de Wong y Tong, así como recientes investigaciones por parte de Gudnason y Ross [GudnasonRoss], los cuales generalizan los cinco vórtices exóticos de Manton agregando impurezas del tipo Wong-Tong. Además, queremos introducir el trabajo de Ashcroft y Krusch acerca de soluciones vorticiales con simetría esférica en presencia de impurezas magnéticas para  $\lambda \neq 1$ .

### 7.1 IMPUREZAS MAGNÉTICAS

Consideremos una deformación del lagrangiano (2.2.0.1) propuesta por [WongTong] para que incluya impurezas magnéticas

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{D}_\mu\phi D^\mu\phi - \frac{\lambda}{8}(m^2 + \sigma - |\phi|^2)^2 + \frac{\mu}{2}\sigma B, \quad (7.1.0.1)$$

donde  $\sigma$  es un término de fuente estático y fijo de campo magnético  $B$ . A su vez,  $\mu$  es otra constante de acoplamiento que caracteriza la fuerza del campo magnético. Las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, en esta sección estamos interesados en soluciones que mantengan una estructura BPS.

Para obtener tales soluciones podemos aplicar el argumento de Bogomolny. Para esto debemos mirar al funcional de energía correspondiente, dado por

$$V_{\lambda,\mu} = \frac{1}{2} \int \left( B^2 + \overline{D}_i\phi D_i\phi + \frac{\lambda}{4}(m^2 + \sigma - |\phi|^2)^2 - \mu\sigma B \right) d^2x. \quad (7.1.0.2)$$

Es fácil ver que el integrando de (7.1.0.2) se puede describir como

$$\begin{aligned} \left( B - \frac{1}{2}(m^2 + \sigma - |\phi|^2) \right)^2 &+ \overline{(D_1\phi + iD_2\phi)}(D_1\phi + iD_2\phi) + Bm^2 - i(\partial_1(\overline{\phi}D_2\phi) - \partial_2(\overline{\phi}D_1\phi)) \\ &\frac{\lambda-1}{4}(m^2 + \sigma - |\phi|^2)^2 - (\mu-1)\sigma B. \end{aligned} \quad (7.1.0.3)$$

A partir de la ecuación anterior es sencillo encontrar el comportamiento crítico. Este ocurre cuando  $\lambda = 1$  y  $\mu = 1$ .

Integrando (7.1.0.3) encontramos que el funcional de energía está acotado por abajo

$$V_{\lambda,\mu} \geq \pi N m^2 + \frac{\lambda-1}{8} \int (m^2 + \sigma - |\phi|^2)^2 d^2x - \frac{\mu-1}{2} \int \sigma B d^2x. \quad (7.1.0.4)$$

Claramente, cuando el comportamiento es crítico, obtenemos la desigualdad original de Bogomolny, la cuál se satura cuando

$$D_1\phi + iD_2\phi = 0, \quad (7.1.0.5)$$

$$B - \frac{1}{2}(m^2 + \sigma - |\phi|^2) = 0. \quad (7.1.0.6)$$

Campos  $\phi$  que satisfacen las ecuaciones de Bogomolny describen un objeto con masa  $M = 2\pi Nm^2$ , donde  $N = \frac{1}{2\pi} \int B d^2x$  es la carga vorticial o el *winding number* o la carga topológica.

Nos podemos preguntar acerca de la existencia de soluciones a las ecuaciones (7.1.0.5)-(7.1.0.6), y si las hay, cuántas son. Varios argumentos sobre la existencia de un espacio de módulos  $2N$ -dimensional se presentan en [WongTong]. Alguno de ellos son: el teorema indicial introducido por E. Weinberg en [EWeingberg79] no es afectado por la introducción de la fuente  $\sigma(x)$ . Es posible relacionar la existencia de soluciones de (7.1.0.5)-(7.1.0.6) con la existencia de soluciones vorticiales en teorías donde el grupo de gauge es un grupo producto. Además, también se presenta una descripción de la dinámica de los vórtices usando D-branas.

## 7.2 VÓRTICES EXÓTICOS CON IMPUREZAS

Pasando a un espacio con métrica compleja  $ds_0^2 = \Omega_0(z, \bar{z})dzd\bar{z}$ , donde  $z = x^1 + ix^2$  y  $\bar{z} = x^1 - ix^2$ , y aplicando la generalización de Manton, reescribimos las ecuaciones de Bogomolny con impurezas (7.1.0.5) y (7.1.0.6) como

$$\partial_{\bar{z}}\phi - iA_{\bar{z}}\phi = 0 \quad (7.2.0.1)$$

$$\partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z = \frac{\Omega_0}{2}(C_0 + \sigma(z, \bar{z}) - C|\phi|^2). \quad (7.2.0.2)$$

En [WongTong] se estudia el caso  $(C_0, C) = (-1, -1)$ , es decir, el caso de los vórtices hiperbólicos (ver Cuadro 1). En esta sección estudiaremos todos los casos integrables en presencia de una impureza tipo delta de Dirac.

La ecuación de Taubes con impurezas se escribe como

$$-\frac{\Delta h}{\Omega_0} + Ce^{2h} - C_0 + \sigma(z, \bar{z}) = -\frac{2\pi}{\Omega_0} \sum_{r=1}^N \delta(z - Z_r), \quad (7.2.0.3)$$

donde se ha incluido el término de las delta que obviamos en Capítulo 3. Los puntos  $\{Z_r\}$  representan la posición de los centros de los vórtices. Vamos a tomar al factor conforme  $\Omega_0$  de la siguiente forma

$$\Omega_0 = \frac{4}{(1 - C_0|z|^2)^2}, \quad (7.2.0.4)$$

de modo que, la superficie de Riemann con métrica  $ds_0^2$ ,  $M_0$ , tiene curvatura gaussiana constante  $K_0 = C_0$ . Vamos a hacer la siguiente sustitución

$$h = u + \log\left(\frac{1}{2}(1 - C_0|z|^2)\right), \quad (7.2.0.5)$$

tal que

$$\Delta h = \Delta u - C_0\Omega_0. \quad (7.2.0.6)$$

Reemplazando la ecuación anterior en (7.2.0.3) la transforma en

$$\Delta u = Ce^{2u} + \Omega_0 \sigma + 2\pi \sum_{r=1}^N \delta(z - Z_r). \quad (7.2.0.7)$$

Este procedimiento es análogo a lo discutido en Sección 3.5. Ahora,  $C$  es igual a la curvatura  $K$  de una superficie de Riemann  $M$  con métrica reescalada  $ds^2 = e^{2u} ds_0^2$ .

Existen tres casos en la cuál la ecuación (7.2.0.7) se reduce a la ecuación de Liouville.

1. Está el caso trivial  $\sigma = 0$ . En este caso ecuación (7.2.0.7) es igual a la ecuación de Taubes modificada por Manton (3.4.0.6), y la solución está dada por (3.5.1.5).
2. El segundo caso es cuando la impureza es del tipo delta

$$\sigma = \frac{2\pi}{\Omega_0} \sum_{j=1}^K \alpha_j \delta(z - Z_{N+j}), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (7.2.0.8)$$

ya que de esta forma ecuación (7.2.0.7) se convierte en

$$\Delta u = Ce^{2u} + 2\pi \sum_{j=1}^K \alpha_j \delta(z - Z_{N+j}) + 2\pi \sum_{r=1}^N \delta(z - Z_r), \quad (7.2.0.9)$$

### 7.3 IMPUREZAS COMO VÓRTICES CONGELADOS

En la sección anterior enunciamos que existe una relación entre los vórtices abelianos con impurezas magnéticas y vórtices en una teoría de gauge abeliana producto. En esta sección desarrollamos esta idea introducida por Wong-Tong.

Consideremos una teoría con el grupo de gauge producto  $\hat{U}(1) \times \tilde{U}(1)$ . Introduzcamos dos campos escalares cargados:  $q$  lleva la carga  $(+1, -1)$  y  $p$  lleva la carga  $(0, +1)$ . El lagrangiano correspondiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + |D_\mu q|^2 + |D_\mu p|^2 + \frac{\hat{\lambda}}{4} (|q|^2 - \hat{m}^2)^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4} (-|q|^2 + |p|^2 - \tilde{m}^2)^2, \quad (7.3.0.1)$$

donde  $D_\mu q = \partial_\mu q - i\hat{A}q$  y  $D_\mu p = \partial_\mu p - i\tilde{A}p$ . El objetivo es mostrar que esta acción se reduce en algún límite al lagrangiano con impurezas (7.1.0.1).

Asumiremos de aquí en adelante que  $\hat{m}^2 > 0$  y  $\tilde{m}^2 > -\hat{m}^2$ . El vacío de la teoría se encuentra cuando  $|p|^2 = \hat{m}^2 + \tilde{m}^2$  y  $|q|^2 = \hat{m}^2$ , y rompe ambos grupos de gauge espontáneamente. Por lo tanto, la teoría presenta dos tipos de vórtices asociados a cada grupo de gauge. Podemos derivar a partir del argumento de Bogmolny, las respectivas ecuaciones BPS:

$$\hat{B} = \frac{1}{2} (|q|^2 - \hat{m}^2), \quad D_1 q + iD_2 q = 0 \quad (7.3.0.2)$$

y

$$\tilde{B} = \frac{1}{2} (-|q|^2 + |p|^2 - \tilde{m}^2), \quad D_1 p + iD_2 p = 0 \quad (7.3.0.3)$$

Soluciones a estas ecuaciones son vórtices BPS que tienen una masa igual a

$$M = \int d^2x (\hat{B} \hat{m}^2 + \tilde{B} \tilde{m}^2) = 2\pi \hat{k} \hat{m}^2 + 2\pi \tilde{k} \tilde{m}^2, \quad (7.3.0.4)$$

donde  $\hat{k}$  y  $\tilde{k}$  son los flujos de campo para  $\hat{U}(1)$  y  $\tilde{U}(1)$  respectivamente. Estos no son en general lo mismo que el *winding number* o la carga topológica, ya que para calcular estos hay que hacer una integral en la variedad del grupo de gauge. Para teorías con un sólo grupo de gauge, efectivamente, ambas nociones coinciden. Sin embargo, para este caso, el campo  $q$  tiene carga perteneciente a  $\hat{U}(1) \times \tilde{U}(1)$ , por lo que su carga topológica es  $\hat{N} = \hat{k} - \tilde{k}$ . Mientras que para el campo  $p$  su carga topológica es simplemente  $\tilde{N} = \tilde{k}$ . La masa del vórtice es entonces,

$$M = 2\pi\hat{N}m^2 + 2\pi\tilde{N}(\hat{m}^2 + \tilde{m}^2) \quad (7.3.0.5)$$

## Parte IV

## APÉNDICES





## APÉNDICE A

En este apéndice calcularemos la variación de la acción de Yang-Mills para el Capítulo 3.

## A.1 VARIACIÓN DE LA ACCIÓN DE YANG-MILLS

Para derivar las ecuaciones de campo a partir de la acción, consideremos una pequeña deformación del campo de gauge  $A_\mu \rightarrow A_\mu + t a_\mu$ . Donde  $a_\mu$  es un cuadrivector que depende de la posición. Para determinar los puntos críticos de la acción podemos usar la derivación funcional, sin embargo, en este apéndice usaremos un método análogo. Los puntos críticos se pueden calcular con la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} (YM(A + ta))_{t=0} = 0, \quad (A.1.0.1)$$

donde  $YM(A)$  es la acción de Yang-Mills. Usaremos este método ya que es fácilmente generalizable para otros campos de gauge. El tensor de campo cambia ante la variación de  $A$  como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(A + ta) &= \partial_\mu(A_\nu + ta_\nu) - \partial_\nu(A_\mu + ta_\mu) + [A_\mu + ta_\mu, A_\nu + ta_\nu] \\ &= F_{\mu\nu} + t(\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [A_\mu, a_\nu] + [a_\mu, A_\nu]) + t^2[a_\mu, a_\nu] \\ &= F_{\mu\nu} + t(D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu) + t^2[a_\mu, a_\nu] \end{aligned}$$

La acción de Yang-Mills contiene este término al cuadrado. Sin embargo, sólo los términos lineales en  $t$  que queden después de la derivación y luego de hacer  $t = 0$ , contribuirán al cálculo. Es fácil ver que el único término que queda es

$$\frac{d}{dt} (YM(A + ta))_{t=0} = -\frac{1}{8} \int 2F_{\mu\nu}(D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu) \quad (A.1.0.2)$$

Usando la antisimetría de  $F_{\mu\nu}$ , podemos sacar un factor de 2 extra:  $F_{\mu\nu}D_\nu a_\mu = -F_{\mu\nu}D_\mu a_\nu$ . Tenemos entonces,

$$\frac{d}{dt} (YM(A + ta))_{t=0} = -\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu}D_\mu a_\nu = 0 \quad (A.1.0.3)$$

Usando integración por partes y tirando los términos de borde tenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} (YM(A + ta))_{t=0} = -\frac{1}{2} \int D_\mu F_{\mu\nu} a_\nu = 0 \quad (A.1.0.4)$$

Para que esta última ecuación se satisfaga para todo  $a_\mu$ , se debe cumplir que

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (A.1.0.5)$$

Estas no son más que las ecuaciones de Yang-Mills.

A.2 TRAZA DE  $F_{\mu\nu}^2$ 

Queremos demostrar que  $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \text{Tr}(\star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu})$ . Hagámoslo directamente

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}) \\ &= \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu\gamma\delta}^{\mu\nu\alpha\beta}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}) = \frac{1}{4}2!\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta})\end{aligned}$$

donde  $\delta_{\nu_1\cdots\nu_n}^{\mu_1\cdots\mu_n}$  es la función delta de Dirichlet generalizada. Satisface que

$$\delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \delta_{\gamma}^{\alpha} & \delta_{\delta}^{\alpha} \\ \delta_{\gamma}^{\beta} & \delta_{\delta}^{\beta} \end{vmatrix} = \delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\star F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}(\delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta})\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}) \\ &= \frac{1}{2}(\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) - \text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\beta\alpha})) \\ &= \text{Tr}(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

Donde en pasar a la tercera línea usamos la antisimetría de  $F_{\mu\nu}$ .