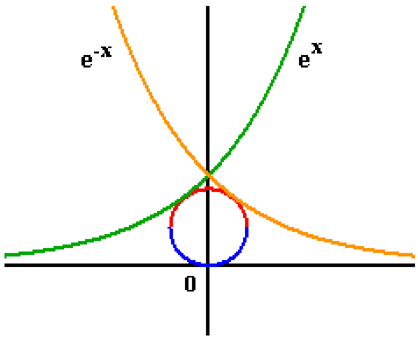
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2016-2017 Güz Yarıyılı

Sayısal Çözümleme Ara Sınav Soruları

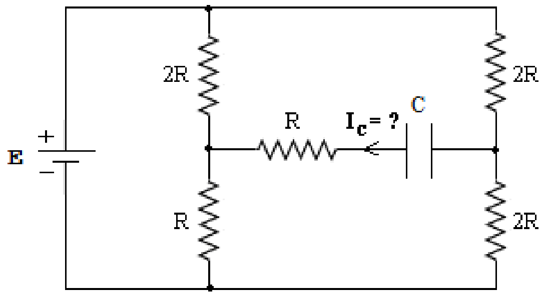
Tarih: 17 Kasım 2016 Perşembe **Süre:** 120 dakika

1. Koordinat düzleminde hem x eksenine hem de e^x ve e^{-x} fonksiyonlarına teğet şekildeki gibi bir çember çiziliyor. Bu çemberin yarıçapını $x_0 = 0$ başlangıç değeri ve basit iterasyon yöntemini kullanarak 10^{-2} mutlak hatası ile (noktadan sonra 3 hane kullanarak) hesaplayınız. (25p)



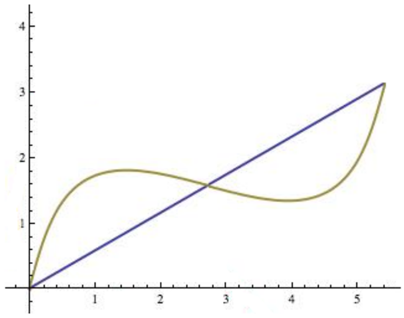
Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri ve $x_{k+1} = g(x_k)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ iterasyon formülü kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakınsak bir çözüm için $|g'(x_0)| < 1$ olmalıdır.

2. Şekilde gösterilen elektrik devresine E sabit gerilimi uygulanıyor. C kondansatörü <u>yarıya kadar dolduğu anda</u> üzerinden geçen akımı (I_C) üst üçgen matris yöntemi ile devre öğelerine bağlı olarak hesaplayınız. (25p)



Üst üçgen matris yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü, A matrisi üst üçgen matrise dönüştürülerek (ana köşegeni altında bulunan bütün elemanları 0 yapılarak) gerçekleştirilir.

3. Yandaki şekilde saatin tersi yönünde 30^0 döndürülerek çizilen sinüs işaretini $[0, \pi\sqrt{3}]$ aralığında temsil etmek üzere bir Hermite polinomu hesaplayınız. (25p)



Bilgi: Bu sinüs işaretini tanımlayan analitik ifade aşağıdaki gibi türetilebilir.

$$y\sqrt{3} - x = 2\sin((y + x\sqrt{3})/2)$$

Hermit polinomu: Bir $f(x)$ fonksiyonunu $[a,b]$ aralığında temsil eden $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ biçimindeki Hermite polinomu aşağıdaki denklemler yardımıyla hesaplanır.

$$f(a) = p(a) \qquad f(b) = p(b)$$
$$f'(a) = p'(a) \qquad f'(b) = p'(b)$$

4. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{b}{x}$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (25p)

x	1	2	4	5	6	8	10	12
y	29.5	14.0	5.5	3.5	2.0	-0.25	-2.0	-3.5

En küçük kareler yöntemi: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ gibi n nokta için ($c_0, c_1, \ldots$ katsayılar olmak üzere) bir $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ fonksiyonu yandaki denklem sistemi yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

2016-2017 Sayısal Çözümleme Ara Sınav Cevapları

******* Cevap 1 *******

e^x ve e^{-x} fonksiyonlarina teğet olan çemberin merkezi y ekseni üzerinde olmalıdır. Buradan çember denklemi

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

olarak yazılabilir. Çemberin teğet noktalarını içeren üst yarısının denklemi

$$y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$$

olacaktır. Türevi alındğında

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

bulunur. $y = e^{-x}$ fonksiyonunun teğet noktası $x = a$ ise bu noktadaki türev ve fonksiyonun aldığı değer çember denklemindekilerle aynı olmalıdır.

$$-\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}} = -e^{-a} \quad => \quad r = a\sqrt{1+e^{2a}} \quad (1)$$

$$r + \sqrt{r^2 - a^2} = e^{-a} \quad (2)$$

Burada (1) no'lu denklemden çekilen r değeri (2) no'lu denklemde kullanılırsa

$$a\sqrt{1+e^{2a}} + ae^a = e^{-a}$$

$$a\sqrt{1+e^{2a}} = e^{-a} - ae^a$$

ve denklemin her iki tarafının karesi alınırsa

$$a^2(1+e^{2a}) = e^{-2a} - 2a + a^2e^{2a}$$

$$e^{-2a} = 2a + a^2$$

$$a = \frac{e^{-2a}}{a+2}$$

bulunur. Bu ifadeye $a_0 = 0$ başlangıç değeri ile basit iterasyon yöntemi uygulandığında, aşağıdaki tabloda gösterilen işlem adımları yardımıyla a değeri hesaplanır.

k	a_k	a_{k+1}	$\varepsilon = \lvert a_{k+1} - a_k \rvert$
0	0.0	0.5	0.5
1	0.5	0.147	0.353
2	0.147	0.346	0.199
3	0.346	0.212	0.134
4	0.212	0.295	0.083
5	0.295	0.241	0.054
6	0.241	0.275	0.034
7	0.275	0.253	0.022
8	0.253	0.267	0.014
9	0.267	0.258	0.009

Bu değer (1) no'lu ifadede yerine yazılarak

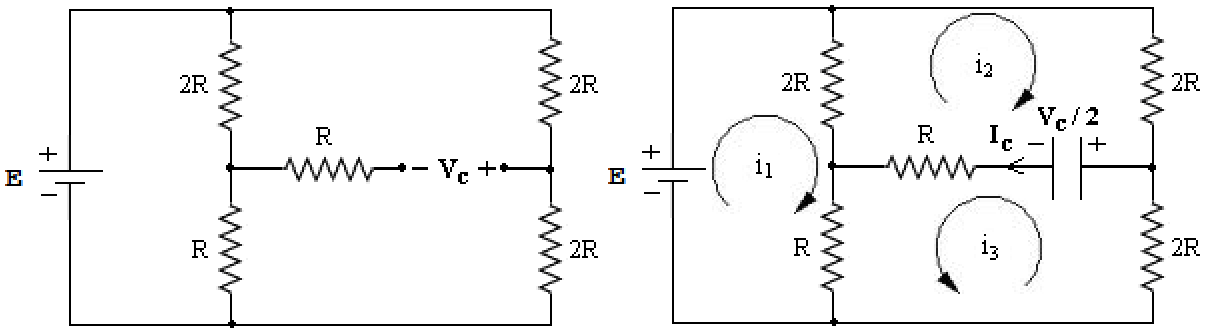
$$r = 0.258\sqrt{1+e^{2*0.258}}$$

$$r = 0.421$$

bulunur.

******* Cevap 2 *******

Aşağıdaki ilk devre sürekli durumu (kondansatörün dolduğu anı), ikinci devre ise kondansatorün yarısına kadar dolduğu zamanı göstermektedir



İlk devreden $V_C = \dfrac{2R}{3R}E - \dfrac{2R}{4R}E = \dfrac{E}{6}$ olacaktır.

İkinci devrede $V_C = E/12$ olduğu ana ait çevre denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} 3Ri_1 - 2Ri_2 + Ri_3 &= E \\ -2Ri_1 + 5Ri_2 + Ri_3 &= -E/12 \\ Ri_1 + Ri_2 + 4Ri_3 &= -E/12 \end{aligned} \quad => \quad \begin{bmatrix} 3R & -2R & R \\ -24R & 60R & 12R \\ 12R & 12R & 48R \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ -E \\ -E \end{bmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile

$$M=[A|B]=\begin{bmatrix} 3R & -2R & R & E \\ -24R & 60R & 12R & -E \\ 12R & 12R & 48R & -E \end{bmatrix}=...=\begin{bmatrix} 3R & -2R & R & E \\ 0 & 44R & 20R & 7E \\ 0 & 0 & 384R/11 & -90E/11 \end{bmatrix}$$

üst matrisine dönüştürülür. Buradan

$$i_3=-15E/64R$$

$$i_2=17E/64R$$

$$i_1=113E/192R$$

$$i_C=i_2+i_3=E/32R$$

bulunur.

******* Cevap 3 *******

Grafikte, üzerinde sinüs işaretinin salınım yaptığı doğrunun denklemi

$$d(x)=tan30^o * x=\frac{x\sqrt{3}}{3}$$

ile verilir. x ekseni üzerindeki $\pi\sqrt{3}$ noktasının $d(x)$ doğrusu üzerindeki izdüşümü $(\pi\sqrt{3},\pi)$ noktasında bulunur. Bu noktanın orijine uzaklığı $\sqrt{(\pi\sqrt{3})^2+\pi^2}=2\pi$ olduğundan sinüs işaretinin bir periyodu temsil edilmek istenmektedir.

I.yol: Hermite yönteminin gerektirdiği (0,0) ve $(\pi\sqrt{3},\pi)$ noktalarındaki türev değerlerini hesaplamak için, sinüs işaretinin x ekseni üzerindeki salınımını kullanabiliriz. Eğimi $m=tan\alpha$ olan bir doğru parçası saatin tersi yönünde 30^o döndürüldüğünde yeni eğimi $m=\tan(\alpha+30^o)$ olacaktır. x ekseni üzerindeki sinüs fonksiyonunun türevleri

$$\mathrm{m}_1=(\sin(0))'=\cos(0)=1=tan45^o$$

$$\mathrm{m}_2=(\sin(2\pi))'=\cos(2\pi)=1=tan45^o$$

olarak hesaplanır. Bu iki eğimi (0,0) ve $(\pi\sqrt{3},\pi)$ noktalarına taşıdığımızda

$$m_3=m_4=tan(45^o+30^o)$$

$$=\frac{tan45^o+tan30^o}{1-tan45^o * tan30^o}$$

$$=\frac{\sqrt{3}/3+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}*1}=2+\sqrt{3}$$

değeri elde edilir.

II. yol: Bu değer 30^o döndürülen sinüs işaretinin analitik ifadesi yardımıyla da hesaplanabilir;

$$y\sqrt{3}-x=2\sin((y+x\sqrt{3})/2)$$

ifadesinin türevi alındığında

$$y'\sqrt{3}-1=2((y'+\sqrt{3})/2)\cos((y+x\sqrt{3})/2)$$

bulunur. (0,0) veya $(\pi\sqrt{3},\pi)$ noktalarından biri (örneğin, ilk nokta) kullanıldığında

$$y'\sqrt{3}-1=2((y'+\sqrt{3})/2)\cos(0)$$

$$y'\sqrt{3}-1=y'+\sqrt{3}$$

$$y'=(\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1)$$

$$y'=2+\sqrt{3}$$

hesaplanır.

Hermite yöntemi ile

$$f(0)=0$$

$$f(\pi\sqrt{3})=\pi$$

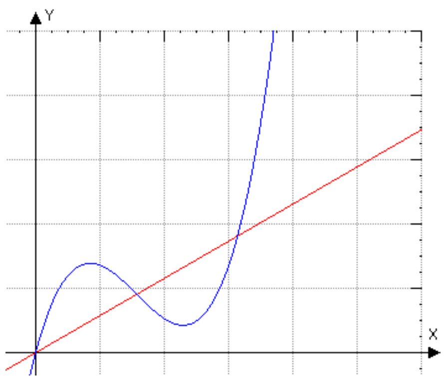
$$f(0)'=2+\sqrt{3}$$

$$f(\pi\sqrt{3})'=2+\sqrt{3}$$

değerleri kullanıldığında

$$p(x)=(2+\sqrt{3})x-\frac{(6+2\sqrt{3})}{\pi}x^2+\frac{(4+4/\sqrt{3})}{\pi^2}x^3$$

bulunacaktır.



******* Cevap 4 *******

$g(x) = \frac{x}{a} + \frac{b}{x}$ fonksiyonu $G(x) = xg(x) = Ax^2 + b$ biçimine dönüştürülmelidir ($A = 1/a$).

x	$y = f(x)$	$Y = x * y$	x^2	x^4	$x^2 * Y$
1	29.5	29.5	1	1	29.5
2	14.0	28.0	4	16	112.0
4	5.5	22.0	16	256	352.0
5	3.5	17.5	25	625	437.5
6	2.0	12.0	36	1296	432.0
8	-0.25	-2.0	64	4096	-128.0
10	-2.0	-20.0	100	10000	-2000
12	-3.5	-42.0	144	20736	-6048
		-45.0	390	37026	-6813

Tablodaki verileri kullanarak,

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 390 \\ 390 & 37026 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.0 \\ -6813 \end{bmatrix}$$

$b = 30$ ve $a = 1/A = 1/-0.5 = 2$ bulunur.

Buradan $g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{30}{x}$ olacaktır.

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2016-2017 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı

Tarih: 5 Ocak 2017 Perşembe **Süre:** 120 dakika

1. Ardışık tek sayıların karelerinin toplamı için Newton polinom yaklaşımını kullanarak genel bir formül, $f(n)$, hesaplayınız. (25p)

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

Newton polinomu: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona ait Newton yaklaşım polinomu $[x_0, x_n]$ aralığı için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Burada, a_k $(k = 0,1,2, \dots, n)$ katsayıları sonlu farklar tablosu oluşturularak belirlenir.

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

2. Aşağıdaki tabloda 5 noktası verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları ile $h(x)$ fonksiyonu arasında $f(x) * g(x) = \int h(x)dx$ eşitliği bulunmaktadır.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	5	10	18	K
$g(x)$	20	12	8	4	1

$h(x)$ fonksiyonunun köklerinden birinin $x = 3$ noktasında olabilmesi için $f(5) = K$ değerini aşağıda verilen formüllerden uygun olan(lar)ını seçerek hesaplayınız. (25p)

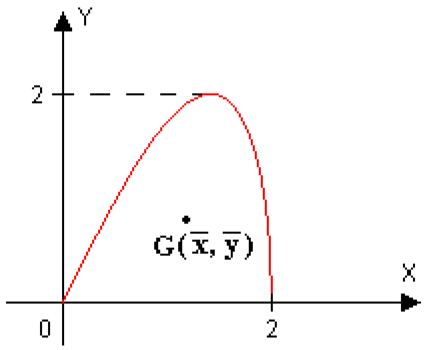
Geri, merkezi ve ileri yön farklar formülleri:

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

$$f'(x_0) = \frac{f[x_0 - 2h] - 8f[x_0 - h] + 8f[x_0 + h] - f[x_0 + 2h]}{12h}$$

$$f'(x_0) = \frac{-25f[x_0] + 48f[x_0 + h] - 36f[x_0 + 2h] + 16f[x_0 + 3h] - 3f[x_0 + 4h]}{12h}$$

3. Yandaki şekilde, $G(\overline{x}, \overline{y})$ noktası $x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ eğrisinin x ekseni ile sınırladığı bölgenin ağırlık merkezini göstermektedir. Simpson kuralını $h = 1/4$ ile kullanarak $\overline{x}$ ve $\overline{y}$ değerlerini hesaplayınız. (25p)



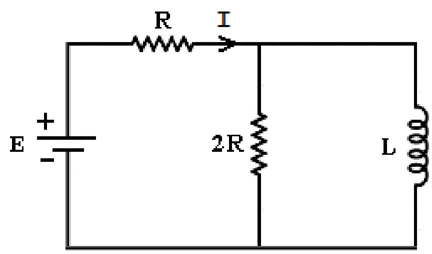
Hatırlatma: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında x ekseni ile sınırladığı bölgenin ağırlık merkezi, $G(\overline{x}, \overline{y})$, aşağıdaki ifadelerle hesaplanır.

$$\overline{x} = \frac{S_y}{S} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \overline{y} = \frac{S_x}{S} = \frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}$$

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal entegrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3}(f[a] + 4(f[a+h] + f[a+3h] + \cdots) + 2(f[a+2h] + f[a+4h] + \cdots) + f[b])$$

4. Şekilde gösterilen, E sabit geriliminin uygulandığı elektrik devresinde ana koldan geçen akımın analitik ifadesini devre öğelerine bağlı olarak Picard iterasyonu ile hesaplayınız. (25p)



Picard İterasyonu: $y' = F(x, y)$ diferansiyel denkleminin çözümü $y_0 = f(x_0)$ başlangıç değerini kullanarak aşağıda verilen Picard iterasyonu ile her-hangi bir terime kadar hesaplanabilir.

$$Y_0(x) = y_0$$

$$Y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y_n(t))\,dt, \qquad n \geq 0$$

2016-2017 Sayısal Çözümleme Final Cevapları

******* Cevap 1 *******

$f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ fonksiyonuna uygun bir polinomu hesaplarken $n = 1,2, \dots ,6$ değerlerine ait $(1,1), (2,10), (3,35), (4,54), (5,165), (6,286)$ noktalarını kullanabiliriz. Polinomu belirlerken kullanılması gereken nokta sayısı, sonlu farklar tablosunda sadece 0 değerlerinden oluşan bir sütunun ortaya çıkmasına bağlıdır. Böyle bir sütunu oluşturacak biçimde nokta sayısı artırılabilir. Newton yönteminin uygulanmasında ihtiyaç duyulan a_k $(k = 0,1,2, \dots , n)$ katsayılarının hesabı aşağıda gösterilmiştir. $f^{(4)}(n)$ sütunu 0 değerlerine sahip olduğundan polinomun derecesinin 3 olacağına dikkat ediniz. Burada, 6 yerine 5 noktanın kullanımı ile de aynı polinom bulunabilir.

n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	...
1	1				
2	10	9			
3	35	25	8		
4	54	49	12	4/3	
5	165	81	16	4/3	0
6	286	121	20	4/3	0

Bu katsayılar ($a_0 = 1$, $a_1 = 9$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4/3$) ile

$$f(n) = 1 + 9(x-1) + 8(x-1)(x-2) + (4/3)(x-1)(x-2)(x-3) = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

polinomu hesaplanır.

******* Cevap 2 *******

Fonksiyonlar arasındaki ilişkiden

$$f(x) * g(x) = \int h(x)dx$$
$$f(x)' * g(x) + f(x) * g(x)' = h(x)$$

eşitliği türetilebilir. $h(3) = 0$ olarak verildiği için $x = 3$ noktasındaki türevlerden yararlanabiliriz. Merkezi farklar formülü ile

$$f(3)' = \frac{f[1] - 8f[2] + 8f[4] - f[5]}{12h} = \frac{2 - 8 * 5 + 8 * 18 - K}{12 * 1} = \frac{106 - K}{12}$$

$$g(3)' = \frac{g[1] - 8g[2] + 8g[4] - g[5]}{12h} = \frac{20 - 8 * 12 + 8 * 4 - 1}{12 * 1} = -\frac{15}{4}$$

türevleri hesaplanır. Yukarıdaki eşitlik yardımı ile

$$f(3)' * g(3) + f(3) * g(3)' = h(3)$$
$$\frac{106 - K}{12} * 8 - \frac{15}{4} * 10 = 0$$
$$106 - K = \frac{12}{8} * \frac{15}{4} * 10 = \frac{225}{4}$$
$$K = 49.75$$

bulunur.

******* Cevap 3 *******

Fonksiyonun analitik ifadesinden

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$
$$y = f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

yazılabilir. Ağırlık merkezinin hesabında S, S_x ve S_y değerlerine ihtiyaç vardır. Bu değerlerin hesabı, $h = 1/4$ olduğundan [0,2] aralığı için 9 nokta kullanılarak aşağıda gösterilmiştir.

x	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$5/4$	$6/4$	$7/4$	$8/4$
$f(x)$	0	$\sqrt{63}/16$	$\sqrt{15}/4$	$\sqrt{495}/16$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{975}/16$	$\sqrt{63}/4$	$\sqrt{735}/16$	0

$xf(x)$	0	$\sqrt{63}/64$	$\sqrt{15}/8$	$\sqrt{4455}/64$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{24375}/64$	$\sqrt{567}/8$	$\sqrt{36015}/64$	0
$[f(x)]^2$	0	$63/256$	$15/16$	$495/256$	3	$975/256$	$63/16$	$735/256$	0

$$S = \frac{h}{3}(f[0] + 4(f[1/4] + f[3/4] + \cdots) + 2(f[2/4] + f[4/4] + \cdots) + f[8/4])$$
$$S = \frac{1/4}{3}(0 + 4(\sqrt{63}/16 + \sqrt{495}/16 + \sqrt{975}/16 + \sqrt{735}/16) + 2(\sqrt{15}/4 + \sqrt{3} + \sqrt{63}/4) + 0)$$
S =2.625

$$S_y = \frac{h}{3}(g[0] + 4(g[1/4] + g[3/4] + \cdots) + 2(g[2/4] + g[4/4] + \cdots) + g[8/4])$$
$$S_y = \frac{\frac{1}{4}}{3}(0 + 4(\sqrt{63}/64 + \sqrt{4455}/64 + \sqrt{24375}/64 + \sqrt{36015}/64) + 2(\sqrt{15}/8 + \sqrt{3} + \sqrt{567}/8) + 0)$$
$S_y = 3.035$

$$S_x = \frac{h}{3}(h[0] + 4(h[1/4] + h[3/4] + \cdots) + 2(h[2/4] + h[4/4] + \cdots) + h[8/4])$$
$$S_x = \frac{1/4}{3}(0 + 4(63/256 + 495/256 + 975/256 + 735/256) + 2(15/16 + 3 + 63/16) + 0)$$
$S_x = 4.265$

Buradan ağırlık merkezinin koordinatı

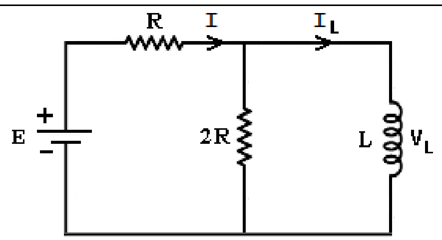
$$\overline{x} = \frac{S_y}{S} = \frac{3.056}{2.625} = 1.164$$

$$\overline{y} = \frac{S_x}{2S} = \frac{4.265}{2 * 2.625} = 0.812$$

olacaktır.

******* Cevap 4 *******

Şekildeki devreye bağlı olarak aşağıdaki 3 denklem yazılabilir.



$V_L = L\, I_L'$ (1)
$V_L = E - RI$ (2)
$V_L = 2R(I - I_L)$ (3)

(2) ve (3) no'lu denklemlerden

$$E - RI = 2R(I - I_L)$$
$$I_L = \frac{3I}{2} - \frac{E}{2R}$$

elde edilir. (1) ve (2) no'lu denklemler ile

$$E - RI = L\, I_L' = L\left(\frac{3I}{2} - \frac{E}{2R}\right)' = \frac{3L}{2}I'$$

yazılarak

$$I' = \frac{2}{3L}(E - RI)$$

bulunur. Başlangıç değeri, bobin elemanı açık devre olduğundan $I(0) = E/3R$ olacaktır. Picard iterasyonu ile

$$F(t, I) = \frac{2}{3L}(E - RI)$$

$I_0(t) = E/3R$

$$I_1(t) = y_0 + \int_0^t F(t, I_0(x))\,dx = \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}(E - RI_0(x))\,dx = \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}\left(E - R\frac{E}{3R}\right)dx = \frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}t$$

$$I_2(t) = y_0 + \int_0^t F(t, I_1(x))\,dx = \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}(E - RI_1(x))\,dx = \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}\left(E - R\left(\frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}x\right)\right)dx$$

$$= \frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}t - \frac{8ER}{54L^2}t^2$$

$$I_3(t) = y_0 + \int_0^t F(t, I_2(x))\,dx = \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}(E - RI_2(x))\,dx$$

$$= \frac{E}{3R} + \int_0^t \frac{2}{3L}\left(E - R\left(\frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}x - \frac{8ER}{54L^2}x^2\right)\right)dx = \frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}t - \frac{8ER}{54L^2}t^2 + \frac{16ER^2}{486L^3}t^3$$

$$I_n(t) = \frac{E}{3R} + \frac{4E}{9L}t - \frac{8ER}{54L^2}t^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2E}{3R}\frac{1}{n!}\left(\frac{2R}{3L}t\right)^n$$

$$I_n(t) = \frac{E}{3R} + \frac{2E}{3R}\left[\frac{2R}{3L}t - \frac{4R^2}{18L^2}t^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\left(\frac{2R}{3L}t\right)^n\right]$$

bulunur. $x = 2R/3L$ ile

$$I_n(t) = \frac{E}{3R} + \frac{2E}{3R}\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$I(t) = \lim_{n\to\infty} I_n(t) = \frac{E}{3R} + \frac{2E}{3R}(1 - e^{-x})$$

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{2}{3}e^{-x}\right)$$

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{2R}{3L}t}\right)$$

ifadesine ulaşılır.