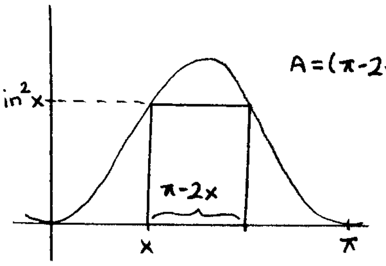
2008-2009 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 1. Arasınav Cevapları

Cevap 1:



$A=(\pi-2x)\sin^2 x$

A'nın maksimum değeri A'=0'da ortaya çıkar.

$$A'=-2\sin^2 x+2(\pi-2x)\sin x\cos x=0$$

$f(x)=2x+\tan x-\pi$ $\quad [a_0,b_0]=[0,1]$ olsun.

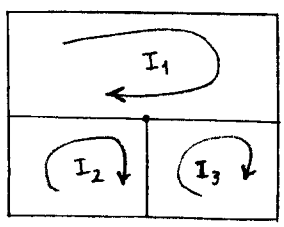
n	a_n	c_n	b_n	$f(c_n)$
0	0	0.5	1	-1.59
1	0.5	0.75	1	-0.708
2	0.75	0.875	1	-0.912
3	0.875	0.937	1	0.097
4	0.875	0.906	0.937	-0.052
5	0.906	0.921	0.937	0.020
6	0.906	0.913	0.921	-0.016
7	0.913	0.917	0.917	-0.0008

$\Rightarrow x=c_7=0.917$

Kenarlar $(\pi-2x,\sin^2 x)=(1.306,0.63)$

Cevap 2:

Kondansatör dolduğunda açık devre olur.



$$5I_1-I_2-I_3=E_1/R$$
$$-I_1+4I_2-I_3=E_2/R$$
$$-I_1-I_2+4I_3=0$$

$$\begin{bmatrix}5&-1&-1\\-1&4&-1\\-1&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_1/R\\E_2/R\\0\end{bmatrix}$$

$$M=[A\,|\,B]=\begin{bmatrix}5&-1&-1&E/R\\-1&4&-1&E/R\\-1&-1&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&4E/13R\\0&1&0&24E/65R\\0&0&1&11E/65R\end{bmatrix}$$

$$I=\frac{E}{65R}\begin{bmatrix}20\\24\\11\end{bmatrix}=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}20\\24\\11\end{bmatrix}$$

$$V_c=3RI_1-RI_3=60-11=\underline{\underline{49 \text{ volt}}}$$

Cevap 3:

$$R_n(x)=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)}\right|$$

$$f(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2}{45}x^6$$

$f(x)=\sin^2 x$
$f'(x)=\sin 2x$
$f''(x)=2\cos 2x$
$f'''(x)=-4\sin 2x$
$f^{(iv)}(x)=-8\cos 2x$
$f^{(v)}(x)=16\sin 2x$

n=2 olduğuna göre

$$R_n(x)=\left|\frac{-4\sin 2c}{3!}x^3\right|$$

$f'''(c)$ fonksiyonu $c=\pi/4$'de maksimum olur.

$$R_n(x)=\left|\frac{-4\cdot 1}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right|=\underline{\underline{20.64}}$$

Cevap 4:

$f(x)=\sin^2 x$ $\qquad f(0)=p(0)=0\Rightarrow d=0$

$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\qquad f'(0)=p'(0)=0\Rightarrow c=0$

$$f(\pi/2)=p(\pi/2)=1\Rightarrow a\frac{\pi^3}{8}+b\frac{\pi^2}{4}=1$$

$$f'(\pi/2)=p'(\pi/2)=0\Rightarrow 3a\frac{\pi^2}{4}+2b\frac{\pi}{2}=0$$

$$a=-\frac{16}{\pi^3}\quad b=\frac{12}{\pi^2}$$

$$p(x)=-\frac{16}{\pi^3}x^3+\frac{12}{\pi^2}x^2$$

$$=-0.516x^3+1.217x^2$$

2008-2009 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 2. Arasınav Cevapları

Cevap 1:

x	0	0.52 $(\pi/6)$	1.04 $(2\pi/6)$	1.56 $(3\pi/6)$	2.08 $(4\pi/6)$	2.6 $(5\pi/6)$	3.14 (π)	$\Sigma x_i = 10.94 \simeq 11$
$3\sin^2 x$	0	0.75	2.25	3	2.25	0.75	0	
x^2	0	0.27	1.09	2.46	4.38	6.84	9.85	$\Sigma x_i^2 = 24.89 \simeq 25$
$Y = 3\sin^2 x / x^2$	3	2.77	2.06	1.22	0.51	0.11	0	$\Sigma Y_i = 9.67$
$x \cdot Y$	0	1.44	2.14	1.9	1.06	0.28	0	$\Sigma x_i Y_i = 6.83$

$$p(x) = ax^2 + bx^3 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{6\cos 2x}{2} = 3$$

$$Y(x) = \frac{p(x)}{x^2} = a + bx$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.67 \\ 6.83 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3.08 \simeq 3 \\ b &= -1.084 \simeq -1 \end{aligned} \qquad p(x) = 3x^2 - x^3$$

Cevap 2:

$$V_c'(2.0) = \frac{3V_c(0.4) - 16V_c(0.8) + 36V_c(1.2) - 48V_c(1.6) + 25V_c(2.0)}{12h}$$

$$= \frac{3\times 3.4 - 16\times 5.8 + 36\times 7.6 - 48\times 8.8 + 25\times 9.7}{12\times 0.4}$$

$$= 2.31 \text{ V/sn}$$

$$I_{R_1}(2.0) = I_2(2.0) + I_c(2.0) = \frac{V_c(2.0)}{R_2} + C V_c'(2.0) = \frac{9.7}{3} + 1\times 2.31 = 5.54 \text{ mA}$$

Cevap 3:

$$I = \sum_{k=1}^{n} h f(x_k) = \frac{\pi}{6}\left(0.75 + 2.25 + 3 + 2.25 + 0.75 + 0\right) = 4.71$$

Analitik çözüm: $\displaystyle\int_0^{\pi} 3\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\frac{3}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2} = 4.71$

Cevap 4:

$$V_{R_1} + V_c = E$$

$$R_1 I_1 + V_c = E$$

$$R_1(I_c + I_2) + V_c = E$$

$$R_1\left(CV_c' + \frac{V_c}{R_2}\right) + V_c = E$$

$$R_1 C V_c' + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)V_c = E$$

$$RCV_c' + 2V_c = E$$

$$V_c' = \frac{1}{RC}(E - 2V_c)$$

Analitik çözüm:

$$V_c = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$

$$= \frac{E}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$$

$$V_{c0}(t) = 0$$

$$V_{c1}(t) = V_{c0}(t) + \int_0^t V_{c0}'(x, V_{c0}(x))\,dx = 0 + \int_0^t \frac{E}{RC}\,dx = \frac{Et}{RC}$$

$$V_{c2}(t) = \int_0^t \frac{1}{RC}\left(E - \frac{2Ex}{RC}\right)dx = \frac{Et}{RC} - \frac{2Et^2}{2(RC)^2}$$

$$V_{c3}(t) = \int_0^t \frac{1}{RC}\left(E - \frac{2Ex}{RC} + \frac{4Ex^2}{2(RC)^2}\right)dx = \frac{Et}{RC} - \frac{2Et^2}{2(RC)^2} + \frac{4Et^3}{6(RC)^3}$$

$$V_{cn}(t) = \frac{Et}{RC} - \frac{2Et^2}{2(RC)^2} + \frac{4Et^3}{6(RC)^3} - \frac{8Et^4}{24(RC)^4} + \cdots\cdots$$

$x = -\frac{2t}{RC}$ alınırsa

$$V_{cn}(x) = -\frac{E}{2}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

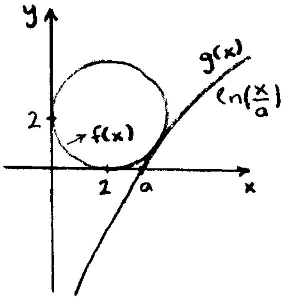
$$= \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{E}{2} - \frac{E}{2}e^x = \frac{E}{2}(1 - e^x)$$

$$V_{cn}(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$$

2008-2009 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme Final Sınavı Cevapları

Cevap 1:



Çemberin alt parça denklemi

$f(x) = 2 - \sqrt{4x - x^2}$

Teğet durumunda eğimler aynıdır.

$f'(x) = g'(x)$

$\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{1}{x}$

$x^2(x-2)^2 = 4x - x^2$

$x^3 - 4x^2 + 5x - 4 = 0$

Basit iterasyon yöntemini kullanabilmek için

$h(x) = x = \frac{1}{5}(4 + 4x^2 - x^3)$

elde edilir. $x_0 = 2$ için $|h'(x_0)| < 1$'dir.

x	h(x)	ε
2	2.40	0.40
2.40	2.64	0.24
2.64	2.69	0.05
2.69	2.69	0.00

$f(2.69) = g(2.69)$

$0.126 = \ln\frac{2.69}{a}$

$\underline{\underline{a = 2.37}}$

Cevap 2:

$V_c = \frac{1}{C}\int I_c(t)\,dt$

$= \frac{1}{C}\cdot\frac{h}{3}\left(f(0.4) + f(2.0) + 2f(1.2) + 4f(0.8) + 4f(1.6)\right)$

$= \frac{1}{10^{-3}}\cdot\frac{0.4}{3}\left(7.16 + 1.91 + 7.32 + 20.64 + 10.64\right).10^{-3}$

$= 6.35\,V$

$V_1 = R_1 I_1 = R_1(I_2 + I_c) = R_1\left(\frac{V_c}{R_2} + I_c\right)$

$= 2.\left(\frac{6.35}{3} + 1.91\right)$

$= 8.05\,V$

Cevap 3:

$y' = f(x,y) = xy - \cos x$

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad y(0) = 1,\ h = 0.2$

$y(0.2) = 1 + 0.2(0 - 1) = 0.8$

$y(0.4) = 0.8 + 0.2(0.2 \times 0.8 - \cos 0.2) = 0.63$

$y(0.6) = 0.63 + 0.2(0.4 \times 0.63 - \cos 0.4) = 0.49$

$y(0.8) = 0.49 + 0.2(0.6 \times 0.49 - \cos 0.6) = 0.38$

$y(1.0) = 0.38 + 0.2(0.8 \times 0.38 - \cos 0.8) = 0.30$

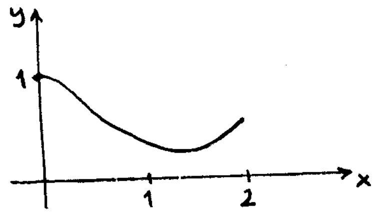
$y(1.2) = 0.25$

$y(1.4) = 0.23$

$y(1.6) = 0.26$

$y(1.8) = 0.30$

$y(2.0) = 0.45$



Cevap 4:

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7$

$(A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix}$

$(A - \lambda_2 I)V_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

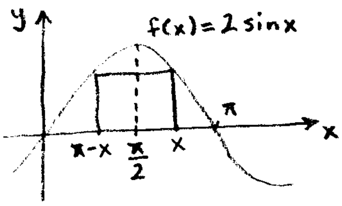
$t = 1$ için $p = [V_1\ V_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$A^{50} = pd^{50}p^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7^{50} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 7^{50} & -2 + 2.7^{50} \\ -1 + 7^{50} & 1 + 2.7^{50} \end{bmatrix}$

2009-2010 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 1. Arasınav Cevapları

Cevap 1:



$$x-(\pi-x)=2\sin x$$

$$2x-\pi=2\sin x$$

$$g(x)=x=\frac{\pi+2\sin x}{2}$$

$\frac{\pi}{2}<x_0<\pi$ olacaktır.

$x_0=\frac{3\pi}{4}$ alınabilir.

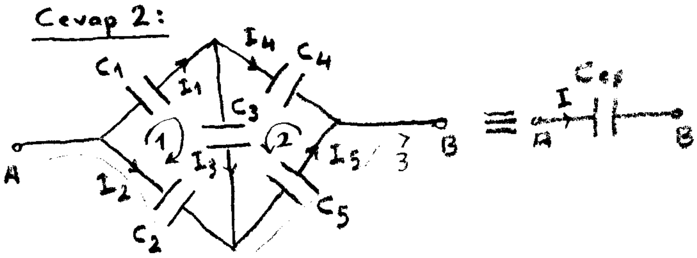
k	x_k	$g(x_k)$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	2.35	2.27	0.08
1	2.27	2.33	0.06
2	2.33	2.29	0.04
3	2.29	2.31	0.02
4	2.31	2.30	0.01

$\Rightarrow x=2.3$

Karenin bir kenarı

$2x-\pi=1.46$

Cevap 2:



I. yol: A-B uçlarına DC gerilim uygulanması

$C_1=C_5=1F$
$C_2=C_4=2F$
$C_3=3F$

$V=V_1+V_3+V_5 \quad (1)$

$I_4=I_1-I_3$

$C_4V_4'=C_1V_1'-C_3V_3$

$C_4V_4=C_1V_1-C_3V_3$

$C_4(V_3+V_5)=C_1V_1-C_3V_3$

$C_1V_1-(C_3+C_4)V_3-C_4V_5=0 \quad (2)$

$I_2=I_5-I_3$

$C_2V_2'=C_5V_5'-C_3V_3'$

$C_2V_2=C_5V_5-C_3V_3$

$C_2(V_1+V_3)=C_5V_5-C_3V_3$

$C_2V_1+(C_2+C_3)V_3-C_5V_5=0 \quad (3)$

(1), (2) ve (3) denklemlerinden,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -2\\ 2 & 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_3\\ V_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$D=27$
$D_1=15V$
$D_3=-3V$

$V_1=\frac{D_1}{D}=\frac{5V}{9}$

$V_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{V}{9}$

$I=C_{es}V'=I_1+I_2$

$C_{es}V'=C_1V_1'+C_2V_2'$

$C_{es}V=C_1V_1+C_2(V_1+V_3)$

$C_{es}V=(C_1+C_2)V_1+C_2V_3$

$C_{es}V=3.\frac{5V}{9}-2.\frac{V}{9}$

$C_{es}=\frac{13}{9}F$

II. yol: A-B uçlarına AC gerilim uygulanması

Kondansatör reaktansı dikkate alınmalıdır.

Örneğin, C_1 yerine $1/j\omega C_1$

1, 2 ve 3 çevreleri kullanılarak,

$$\frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)I_1+\frac{1}{j\omega C_3}I_2-\frac{1}{j\omega C_2}I_3=0$$

$$\frac{1}{j\omega C_3}I_1+\frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_5}\right)I_2+\frac{1}{j\omega C_5}I_3=0$$

$$-\frac{1}{j\omega C_2}I_1+\frac{1}{j\omega C_5}I_2+\frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_5}\right)I_3=V$$

$$\left(\frac{1}{j\omega}\right)^3\begin{bmatrix}11/6 & 1/3 & -1/2\\ 1/3 & 11/6 & 1\\ -1/2 & 1 & 3/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ V\end{bmatrix}$$

$$I_3=\frac{D_3}{D}=\frac{117V/36}{54/24}j\omega=\frac{13}{9}j\omega V$$

$$V=I_3.\frac{1}{j\omega C_{es}}\Rightarrow C_{es}=\frac{I_3}{j\omega V}=\frac{13}{9}F$$

Cevap 3:

$$M=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & -1 & -5 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_1-2x_3=-3$
$x_2+3x_3=4$

$x_3=t$ ise
$x_1=2t-3$
$x_2=4-3t$

$$X=\begin{bmatrix}2t-3\\ 4-3t\\ t\end{bmatrix}$$

Cevap 4:

$t=0.5$ sn'de dolar. ($e^{-t/RC}$'den)

$t=0,\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ sn zamanları için

$V_c(t)=0, 16, 19, 20$ V olacaktır.

(0,0), (1/6,16), (1/3,19), (1/2,20) noktaları için,

$$L_0=\frac{(x-1/6)(x-1/3)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/3)(0-1/2)}=-36x^3+36x^2-11x+1$$

$$L_1=\frac{1}{18}(6x^3-5x^2+x)$$

$$L_2=-\frac{1}{9}(12x^3-8x^2+x)$$

$$L_3=\frac{1}{2}(18x^3-9x^2+x)$$

$$p(x)=L_0y_0+L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3$$

2009-2010 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 2. Arasınav Cevapları

Cevap 1:

$f(x)=1/x$ fonksiyonunu $x_0=1$ noktasında Taylor serisine açılır (x^3 terimine kadar)

$f'(x)=-1/x^2 \Rightarrow f'(1)=-1$

$f''(x)=2/x^3 \Rightarrow f''(1)=2$

$f'''(x)=-6/x^3 \Rightarrow f'''(1)=-6$

$$f(x)=1-\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3+\cdots$$
$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$$
$$=4-6x+4x^2-x^3$$

$$f(x)Q(x)-P(x)=0 \Rightarrow (4-6x+4x^2-x^3)(1+q_1x+q_2x^2)-(p_0+p_1x)=0$$
$$4-p_0+(4q_1-6)x+(4q_2-6q_1+4)x^2+(-6q_2+4q_1-1)x^3+\cdots=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 4-p_0=0 \\ 4q_1-6=0 \\ 4q_2-6q_1+4=0 \\ -6q_2+4q_1-1=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p_0=4 \\ p_1=-2 \\ q_1=1 \\ q_2=1/2 \end{array} \Rightarrow R_{1,2}=\frac{4-2x}{1+x+\frac{x}{2}}=\frac{4-2x}{2+2x+1}$$

Cevap 2:

$$V(2)=\frac{L(4)-L(3)}{h}=\frac{22.5-16.6}{1}=5.9 \text{ m/sn}$$

$$V(3.5)=\frac{L(4)-L(3)}{2h}=\frac{22.5-16.6}{2.0,5}=5.9 \text{ m/sn}$$

$$V(5)=\frac{L(4)-L(3)}{h}=\frac{22.5-16.6}{1}=5.9 \text{ m/sn}$$

Cevap 3:

$g(x)=A\sqrt{Bx+x^2}$

$y^2=A^2(Bx+x^2)$

$y^2=A^2Bx+A^2x^2$

$\frac{y^2}{x}=K+Lx$

i	x_i	$Y_i=\frac{y^2}{x}$	x_i^2	x_iY_i
1	2	1.28	4	2.56
2	3	1.33	9	4.0
3	5	1.68	25	8.41
4	8	2.0	64	16.0
5	9	2.05	81	18.49
6	10	2.21	100	22.09
Σ	37	10.55	283	71.55

$6K+37L=10.55$

$37K+283L=71.55$

$K=1.071$

$L=0.113$

$A=\sqrt{L}=0.336$

$B=K/A^2=9.478$

$g(x)=0.336\sqrt{9.478x+x^2}$

2009-2010 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme Final Cevapları

Cevap 1:

$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$p'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$

$y = f(x) = -\sqrt{5-x^2}$

$y' = f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$

$(-1,-2)$ ve $(2,-1)$ noktaları için:

$$\left.\begin{aligned} p(-1) &= -2 \\ p(2) &= -1 \\ p'(-1) &= f'(-1) \\ p'(2) &= f'(2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - c_3 &= -2 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= -1 \\ c_1 - 2c_2 + 3c_3 &= -1/2 \\ c_1 + 4c_2 + 12c_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$M = [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 2 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -65/27 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/54 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{p(x) = \frac{1}{54}(5x^3 + 15x^2 - 12x - 130)}$$

Cevap 2:

$$\begin{aligned} I_L &= I - I_c \\ &= I - CV_c' \\ &= I - C(E - V_R)' \\ &= I - C(E - I.R)' \\ &= I + RCI' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'(25) &= \frac{3I(5) - 16I(10) + 36I(15) - 48I(20) + 25I(25)}{12h} \\ &= \frac{3\times4.8 - 16\times4.2 + 36\times3.8 - 48\times4.0 + 25\times4.3}{12\times5\times10^{-3}} \\ &= -\frac{25}{3} \text{ A/sn} \end{aligned}$$

$I_L(25) = 4.3 + 10\times20\times10^{-3}\times(-25/3) = \underline{2.63\text{ A}}$

Cevap 3:

$$\begin{aligned} L &= \frac{10}{3}(65 + 80 + 2(75+80+85) + 4(80+70+90)) \\ &= \frac{10}{3}(145 + 480 + 960) \\ &= \frac{15850}{3} \text{ km.dk/h} \\ &= \frac{15850}{3} \cdot \frac{1}{60} = \underline{88\text{ km}} \end{aligned}$$

Cevap 4:

$F(x,y) = 2\pi r = 2\pi\sqrt{x^2+y^2}$

$f(1) = f(0) + hF(0,0) = 0 + 1.0 = 0$

$f(2) = f(1) + hF(1,0) = 0 + 1.2\pi\sqrt{1^2+0^2} = 2\pi$

$f(3) = f(2) + hF(2,2\pi) = 2\pi + 1.2\pi\sqrt{4+4\pi^2} = 47.67$

$f(4) = 47{,}67 + 1.2\pi\sqrt{3^2+47{,}67^2} = \underline{347.63}$

2010-2011 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 1. Arasınav Cevapları

Cevap 1:

f(x) fonksiyonunun [-1,0] aralığındaki tepe noktasında eğimi 0 olduğundan

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3^x \ln 3 - 3x^2 = 0$$

Bu fonksiyon g(x) olarak alınırsa

$$c_n = \frac{a_n g(b_n) - b_n g(a_n)}{b_n - a_n}$$

k	a_k	c_k	b_k	$\varepsilon = \lvert c_{k+1} - c_k \rvert$
1	-1.0	-0.29	0.0	
2	-1.0	-0.41	-0.29	
3	-1.0	-0.45	-0.41	
4	-1.0	-0.46	-0.45	
5	-1.0	-0.46	-0.46	$\varepsilon < 0.01$

Tepe noktası $x_k = -0.46$

Dairenin yarıçapı r ile gösterilirse,

$2r = f(x_k)$ $\qquad S = \pi r^2$

$r = f(-0.46)/2 = 0.35$ $\qquad = 0.38$

Cevap 3:

$f(x) = x\sin x$ Maclaurin serisine açılırsa

$f'(x) = \sin x + x\cos x \qquad f'(0)=0$

$f''(x) = 2\cos x - x\sin x \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = -3\sin x - x\cos x$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$
$$= x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x^2 + R_n(x)$$

$$R_n(x,c) = \left| \frac{f'''(c)}{3!} x^3 \right|$$

[-1,1] aralığında $f'''(c)$'nin maksimum değerini hesaplamak için

$f^{(IV)}(c) = -4\cos c + c\sin c = 0$ denklemi düzenlenir. Bu denklemi kök bulma yöntemlerinden biriyle çözümlenirse $c > 1$ olduğu görülecektir. Öyleyse $c=1$ ve $x=1$ alınabilir.

$$R_n(1,1) = \left| \frac{-3.06}{3} \cdot 1^3 \right| = 0.51$$

Cevap 2:

Kondansatörler dolduğunda akım geçişi duracaktır. Dolayısıyla sürekli durumda akım sadece R_1 ve R_2 dirençleri üzerinden akacaktır.

Düğüm akımlarından

$$I_{C_2} = I_{C_1} + I_{C_3}$$
$$C_2 V_{C_2} = C_1 V_{C_1} + C_3 V_{C_3}$$
$$C_1 V_{C_1} - C_2 V_{C_2} + C_3 V_{C_3} = 0$$
$$V_{C_1} - 2V_{C_2} + 3V_{C_3} = 0 \qquad (1)$$

Çevre potansiyellerinden

$$V_{C_1} - V_{C_3} = V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 10 \qquad (2)$$

$$V_{C_2} + V_{C_3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 20 \qquad (3)$$

(1), (2) ve (3) nolu denklemlerden,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ V_{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$A = LU$ biçiminde iki çarpım matrisine ayrılırsa

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

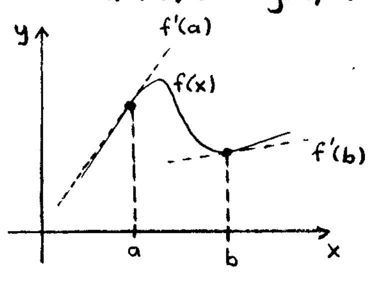
$LY = B$'den $\quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$

$UX = Y$'den $\quad X = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix}$ bulunur.

Burada $V_{C_3} = 5\,V$ olacaktır.

Cevap 4:

Hermite polinomları bir f(x) fonksiyonunu verilen bir [a,b] içinde ve dışında temsil edebilir. x=a ve x=b noktalarında f(x)'in değişim yönü de gözönüne alındığından bir 3. dereceden p(x) polinomunun f(x)'e yaklaşması mümkün olacaktır. Örneğin, aşağıdaki değişime sahip bir



f(x)'e yaklaşan bir Hermite p(x) hesaplanırsa x=a ve x=b noktalarındaki değişim yönleri aynı olacaktır.

$f'(a) = p'(a) \quad f'(b) = p'(b)$

2010-2011 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme 2. Arasınav Cevapları

Cevap 1:

$g(x) = ax + \log(bx^3)$
$= ax + \log b + \log x^3$
$g(x) - \log x^3 = ax + \log b$
$Y_i = c_0 + c_1 x$

Burada $a = c_1$
$b = 10^{c_0}$

x_i	y_i	Y_i	x_i^2	x_iY_i
1	2.5	2.5	1	2.5
2	8.4	7.5	4	15.0
4	22.3	20.5	16	82
5	29.7	27.6	25	138
7	44.6	42.0	49	294
8	52.2	49.5	64	396
10	67.6	64.6	100	646
37		214.2	259	1573.5

$$\begin{bmatrix} 7 & 37 \\ 37 & 259 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 214.2 \\ 1573.5 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = \frac{214.2 \times 259 - 1573.5 \times 37}{259 \times 7 - 37 \times 37} = -6.175 \cong -6$$

$$c_1 = \frac{1573.5 \times 7 - 214.2 \times 37}{259 \times 7 - 37 \times 37} = 6.95 \cong 7$$

$$g(x) = 7x + \log(10^{-6} x^3)$$

Cevap 2:

$$V_c'(10) = \frac{3 \times 0 - 16 \times 5.6 + 36 \times 11.2 - 48 \times 16.6 + 25 \times 22.5}{12 \times 2}$$
$$= 3{,}3 \text{ V/ms}$$

$$V_L(10) = E - I_c(10).R - V_c(10)$$
$$= E - RC\,V_c'(10) - V_c(10)$$
$$= 50 - 2 \times 4 \times 3.3 - 22{,}5$$
$$= 1.1 \text{ V}$$

Cevap 3:

$$I_M = h(y_1 + y_3 + y_5) = 2(6 + 6 + 12) = 48 \text{ br}^2$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_6 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(8 + 0 + 2(6 + 4 + 6 + 12 + 12)\right)$$
$$= 44 \text{ br}^2$$

Taralı alanın her bir parçası yamuk ile daha iyi temsil edilebildiğinden I_T değeri gerçeğe daha yakın olacaktır.

Cevap 4:

$$h = \frac{2-0}{2} = 1$$

$$I = 24\int_0^2 g(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(g(0) + 4g(1) + g(2)\right).24$$

$$g(x) = \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy \qquad f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}$$

$$g(0) = \int_0^2 f(0,y)\,dy \qquad k = \frac{2-0}{2} = 1$$
$$\cong \frac{k}{3}\left(f(0,0) + 4f(0,1) + f(0,2)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right)$$
$$= 1.48$$

$$g(1) = \int_0^{\sqrt{3}} f(1,y)\,dy \qquad k = \frac{\sqrt{3}-0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cong \frac{k}{3}\left(f(1,0) + 4f(1,\sqrt{3}/2) + f(1,\sqrt{3})\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{3}{4} + 0\right)$$
$$= 1.11$$

$$g(2) = \int_0^0 f(2,y)\,dy = 0$$

$$I = \frac{1}{3}\left(1.48 + 4 \times 1.11 + 0\right) = 47.36 \text{ br}^2$$

Analitik olarak,

$$I = \frac{4\pi abc}{3} = \frac{4 \times 3.14 \times 2 \times 2 \times 3}{3} = 50.24 \text{ br}^2$$

2010-2011 Güz Yarıyılı Sayısal Çözümleme Final Cevapları

Cevap 1:

$e^x \ln x = 1$ eşitliğini sağlayacak x değeri $e^{-x} - \ln x$ fonksiyonunun köküne karşılık gelir. Basit iterasyon yöntemi için $g(x)$'i hesaplayalım.

$$e^{-x} - \ln x = 0 \Rightarrow g(x) = e^{e^{-x}}$$

Başlangıç değeri $x_0 = 2$ olsun.

x_n	x_{n+1}	$\varepsilon = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
2	1.144	0.856
1.144	1.375	0.231
1.375	1.287	0.088
1.287	1.317	0.03
1.317	1.307	0.01
1.307	1.310	0.003
1.310	1.309	0.001

$$x = x_7 = 1.309$$

Cevap 2:

$x^2 + y^2 = 10$ denkleminden

$$y = \sqrt{10 - x^2} = (10 - x^2)^{1/2}$$

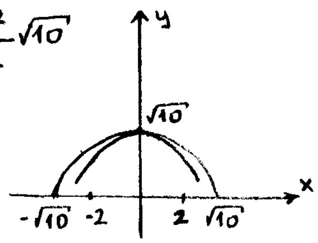
$$y' = -x(10 - x^2)^{-1/2}$$

$$y'' = -(10 - x^2)^{-1/2} - x^2(10 - x^2)^{-3/2}$$

$$y''' = -x(10 - x^2)^{-3/2} - 2x(10 - x^2)^{-3/2} - 3x^3(10 - x^2)^{-5/2}$$

$$y^{iv} = -(10 - x^2)^{-3/2} - 2(10 - x^2)^{-3/2} - \dots$$

$$R_{2,2}(x) = \frac{20 - 3x^2}{20 - 2x^2}\sqrt{10}$$



$y(0) = \sqrt{10}$ $\quad y'(0) = 0$ $\quad y''(0) = -1/\sqrt{10}$

$y'''(0) = 0$ $\quad y^{iv}(0) = -1{,}2/\sqrt{10}$

$$f(x) = \sqrt{10} - \frac{x^2}{2\sqrt{10}} - \frac{x^4}{24\sqrt{10}}$$

$$f(x) \approx \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_0 + P_1 x + P_2 x^2}{1 + q_1 x + q_2 x^2}$$

$$P_2(x) - f(x) Q_2(x) = 0$$

$P_0 - \sqrt{10} = 0 \Rightarrow \underline{P_1 = \sqrt{10}}$ $\qquad -\frac{q_1}{2\sqrt{10}} = 0 \Rightarrow \underline{q_1 = 0}$

$P_1 - q_1\sqrt{10} = 0 \Rightarrow \underline{P_2 = 0}$ $\qquad \frac{q_2}{2\sqrt{10}} + \frac{1{,}2}{24\sqrt{10}} = 0$

$P_2 - q_2\sqrt{10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} = 0$

$\underline{P_2 = -3\sqrt{10}/20}$ $\qquad \underline{q_2 = -1/10}$

Cevap 3:

$f(x) = 0$ denklemini çözen bir yöntemi kullanarak (yada Cevap 1'deki çözümden) e^{-x} ile $\ln(x)$ fonksiyonlarının kesişim noktası $x = 1.309$'dur.

[0,1] aralığı 8, [1, 1.309] aralığı 2 parçaya bölünsün.

[0,1] aralığında $f_1(x) = e^{-x}$

[1, 1,309] " $f_2(x) = e^{-x} - \ln(x)$

$$I = I_1 + I_2 = 0.67 \text{ br}^2$$

$$I_1 = \frac{h}{3}\left(f_1(0) + f_1(8h) + 2(f_1(2h) + \dots) + 4(f_1(h) + \dots)\right)$$

$$= \frac{1/8}{3}\left(1 + 0.36 + 2(0.77 + 0.6 + 0.47) + 4(0.88 + 0.68 + 0.53 + 0.41)\right)$$

$$= \frac{1}{24}(1.36 + 2.1{,}84 + 4.2{,}5)$$

$$= 0.62 \text{ br}^2$$

$$I_2 = \frac{h}{3}\left(f_2(1) + f_2(1 + 2h) + 4f_2(1 + h)\right)$$

$$= \frac{(1.309 - 1)/2}{3}(0.36 + 0 + 4.0{,}17)$$

$$= \frac{0.309}{6} \cdot 1{,}04$$

$$= 0.05 \text{ br}^2$$

Cevap 4:

$$E = R.I_L + L I_L'$$

$$I_L' = \frac{1}{L}(E - R I_L)$$

$$h = 2 \text{ ms} = 2.10^{-3} \text{ sn}$$

I. yol:

$$I_L(h) = I_L(0) - h.I_L'(0, I_L(0))$$

$$= 0 + h.\frac{1}{L}(E - R.0) = \frac{hE}{L} = \frac{2.10^{-3}.30}{0.2} = 0.3 \text{ A}$$

$$I_L(2h) = I_L(h) + h.I_L'(h, I_L(h))$$

$$= 0{,}3 + 2.10^{-3}.\frac{1}{0.2}(30 - 10.0{,}3) = 0.57 \text{ A}$$

$$I_L(3h) = 0.81 \text{ A}$$

$$I_L(4h) = 1.02 \text{ A}$$

$$I_L(5h) = 1.21 \text{ A}$$

$$V_L(5h) = E - R.I_L(5h)$$

$$= 30 - 10.1{,}21$$

$$\underline{= 17{,}9 \text{ V}}$$

II. yol:

$$V_L = L I_L' = L\left(\frac{E - V_L}{R}\right)' = -\frac{L}{R}V_L'$$

$$V_L' = -\frac{R}{L}V_L = -50 V_L$$

$$V_L(h) = V_L(0) + h.V_L'(0, V_L(0))$$

$$= 30 + 0{,}02.(-50.30)$$

$$= 27.0 \text{ V}$$

$V_L(2h) = 24.3$ V

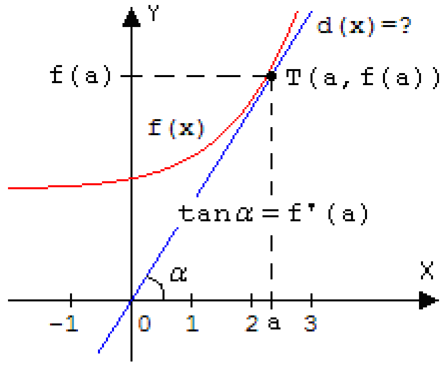
$V_L(3h) = 21.87$ V

$V_L(4h) = 19.7$ V

$V_L(5h) = 17.7$ V

2011-2012 Sayısal Çözümleme 1. Arasınav Cevapları

******* Cevap 1 *******



$d(x)$ doğrusunun $f(x)=\sqrt{e^x+5}$ fonksiyonuna $x=a$ noktasında teğet olduğunu varsayalım. Bu durumda, doğrunun eğimi

$$\tan\alpha = f'(a) = \frac{f(a)}{a}$$

olacaktır. $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarında x yerine a yazılırsa,

$$\frac{e^a}{2\sqrt{e^a+5}} = \frac{\sqrt{e^a+5}}{a}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $g(a)=a=2+10e^{-a}$ ifadesine ulaşılır. Basit iterasyon yöntemi göre $a_0=3$ olmak üzere $a_{k+1}=g(a_k)$ ifadesi kullanılarak a değeri hesaplanacaktır.

k	a_k	a_{k+1}	$\varepsilon = \lvert a_{k+1}-a_k \rvert$	k	a_k	a_{k+1}	$\varepsilon = \lvert a_{k+1}-a_k \rvert$
0	3	2.497	0.503	6	2.712	2.663	0.049
1	2.497	2.822	0.325	7	2.663	2.696	0.033
2	2.822	2.594	0.228	8	2.696	2.674	0.022
3	2.594	2.746	0.152	9	2.674	2.689	0.015
4	2.746	2.641	0.105	10	2.689	2.679	0.01
5	2.641	2.712	0.071	11	2.679	2.686	0.004

$a=2.686$ bulunur. Dolayısıyla, teğet doğrusunun denklemi

$$d(x) = f'(a)*x = \frac{e^a}{2\sqrt{e^a+5}}x = \frac{e^{2.686}}{2\sqrt{e^{2.686}+5}}x = 1.654x$$

olacaktır.

******* Cevap 2 *******

90^0'lik açı ile kesişen iki doğrunun eğimleri arasında $m_1 * m_2 = -1$ ilişkisi vardır $(m_1 = -1/m_2)$.

$f(x)=x^2$ ile kesişen 3.dereceden polinom $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ biçiminde alınarak aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\begin{aligned} p(-1) &= f(-1) \\ p(2) &= f(2) \\ p'(-1) &= -1/f'(-1) \\ p'(2) &= -1/f'(2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_0-c_1+c_2-c_3 &= 1 \\ c_0+2c_1+4c_2+8c_3 &= 4 \\ c_1-2c_2+3c_3 &= 1/2 \\ c_1+4c_2+12c_3 &= -1/4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Buradan, Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi uygulandığında

$$M = [A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 666/324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 459/324 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 54/324 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -63/324 \end{bmatrix}$$

$p(x)$ polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$p(x) = \frac{1}{324}(666+459x+54x^2-63x^3)$$

***** **Cevap 3** *****

Newton yöntemindeki $a_k \ (k = 0,1,2,...,n)$ katsayılarını hesaplayalım.

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$				
0	1	3.94					
1	2	6.33	2.39				
2	3	7.77	1.44	-0.475			
3	4	8.65	0.88	-0.28	0.065		
4	5	9.18	0.53	-0.175	0.035	-0.0075	
5	6	9.59	0.41	-0.06	0.038	0.00075	0.00165

$a_0 = 3.94$, $a_1 = 2.39$, $a_2 = -0.475$, $a_3 = 0.065$, $a_4 = -0.0075$, $a_5 = 0.003$

Bu katsayılar

$$V_c(t) = P_n(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)(t-t_1) + ... + a_n(t-t_0)(t-t_1)...(t-t_{n-1})$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$V_C(t) = P_5(t) = 3.94 + 2.39(t-1) - 0.475(t-1)(t-2) + 0.065(t-1)(t-2)(t-3)$$
$$- 0.0075(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 0.003(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)$$

elde edilir. $t = 4.5sn$ için

$$V_C(4.5) = 3.94 + 2.39(3.5) - 0.475(3.5)(2.5) + 0.065(3.5)(2.5)(1.5)$$
$$- 0.0075(3.5)(2.5)(1.5)(0.5) + 0.00165(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)(-0.5)$$

$$V_C(4.5) = 3.94 + 8.365 - 4.156 + 0.853 - 0.049 - 0.005$$

$$V_C(4.5) = 8.948V$$

bulunur. $R_1 = 1K\Omega$ direcinden geçen akım

$$I_1(4.5) = \frac{E - V_C(4.5)}{R_1} = \frac{30 - 8.948}{1K} = 21.052mA$$

***** **Cevap 4** *****

$V_C(t) = 10(1 - e^{-t})$ fonksiyonunu Maclaurin serisine açalım.

$$V_C(t) = 10(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} - ...)$$

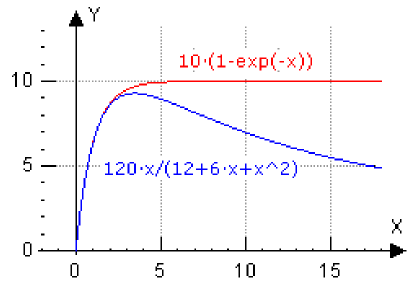
Pade polinomu $R_{2,2}(t)$ hesaplanacağı için $P_2(t) - Q_2(t)V_C(t) = 0$ eşitliğinde $V_C(t)$ fonksiyonunun t^4 terimine kadar kullanılması yeterlidir.

$$p_0 + p_1 t + p_2 t^2 - (1 + q_1 t + q_2 t^2) * 10(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24}) = 0$$

$$p_0 + (p_1 - 10)t + (p_2 - 10q_1 + 5)t^2 + (5q_1 - 10q_2 - \frac{5}{3})t^3 + (-\frac{5q_1}{3} + 5q_2 + \frac{5}{12})t^4 + ... = 0$$

Buradan,

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 - 10 &= 0 \\ p_2 - 10q_1 + 5 &= 0 \\ 5q_1 - 10q_2 - \frac{5}{3} &= 0 \\ -\frac{5q_1}{3} + 5q_2 + \frac{5}{12} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= 10 \\ p_2 &= 0 \\ q_1 &= \frac{1}{2} \\ q_2 &= \frac{1}{12} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$



$$R_{2,2}(t) = \frac{P_2(t)}{Q_2(t)} = \frac{120t}{12 + 6t + t^2}$$

hesaplanır.

2011-2012 Sayısal Çözümleme 2. Arasınav Cevapları

******* Cevap 1 *******

$g(x) = (ax)^{x/b}$ fonksiyonunun önce doğal logaritmasını alalım.

$$\ln(g(x)) = (x/b)*\ln(ax) = (x/b)*(\ln(a)+\ln(x))$$

Eşitliğin her iki tarafı x ile bölünür, $C = \ln(a)/b$, $D = 1/b$ ve $X = \ln(x)$ dönüşümleri yapılırsa,

$$\ln(g(x))/x = C + D*\ln(x)$$

$$h(x) = C + D\ln(x) = C + DX_i$$

Şimdi minimum hata ifadelerinde $h(x)$ fonksiyonunun C ve D katsayılarına göre kısmi türevlerini hesaplayalım.

$$\sum_{i=1}^{n}(f[x_i]-g[x_i])\frac{\partial g[x_i]}{\partial C}=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}(f[x_i]-g[x_i])\frac{\partial g[x_i]}{\partial D}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-h[x_i])\frac{\partial h[x_i]}{\partial C}=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}(Y_i-h[x_i])\frac{\partial h[x_i]}{\partial D}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-C-DX_i))*1=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}(Y_i-C-DX_i)*X_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(C+DX_i)=\sum_{i=1}^{n}Y_i \qquad \sum_{i=1}^{n}(C*X_i+D*X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}Y_i*X_i$$

Buradan,

i	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i*X_i
1	2	2	0.69	0.34	0.47	0.23
2	3	4	1.10	0.46	1.21	0.50
3	4	7	1.38	0.48	1.90	0.66
4	5	15	1.61	0.54	2.60	0.87
5	6	32	1.80	0.57	3.24	1.02
6	7	71	1.94	0.60	3.76	1.16
7	8	162	2.08	0.63	4.32	1.31
$\sum$	35	293	10.6	3.62	17.5	5.75

Denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix}7 & 10.6\\10.6 & 17.5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.62\\5.75\end{bmatrix} \Rightarrow C=0.236 \text{ ve } D=0.185$$

Gerçek katsayılara dönersek,

$b = 1/D = 5.4$ ve $a = e^{b*C} = 3.57$

bulunur.

$$g(x) = (3.57x)^{x/5.4}$$

******* Cevap 2 *******

$f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini, verilen 3 noktadan geçen bir parabol hesaplayarak yada sayısal türev yardımıyla bulabiliriz.

Parabol yardımıyla:

Parabol hesabı:

$$\begin{vmatrix}x^2 & x & y & 1\\4 & 2 & 2 & 1\\9 & 3 & 1 & 1\\16 & 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(3x^2-17x+26)=0$$

Sayısal türev yardımıyla:

$$f'(2.5)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{1-2}{3-2}=-1$$

$$f'(3.5)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{3-1}{4-3}=2$$

Ortalama değerden ,

Buradan, $f'(x)=\frac{1}{2}(6x-17)$ ve $f''(x)=3$

$x=3$ noktasında,

$$f'(3)=\frac{1}{2}(6*3-17)=\frac{1}{2} \text{ ve } f''(3)=3$$

$$f'(3)=\frac{f'(2.5)+f(3.5)}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f''(3)=\frac{f'(3.5)-f(2.5)}{3.5-2.5}=\frac{2-(-1)}{1}=3$$

Eğrilik çemberinin yarıçapı

$$r[3]=\frac{(1+(f'(3))^2)^{3/2}}{f''(3)}=\frac{(1+(1/2)^2)^{3/2}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

Ve merkez noktaları

$$a[3]=3-\frac{f'[3]+f'[3]^3}{f''[3]}=3-\frac{1/2+(1/2)^3}{3}=\frac{67}{24}$$

$$b[3]=f[3]+\frac{1+f'[3]^2}{f''[3]}=1-\frac{1+(1/2)^2}{3}=\frac{7}{12}$$

$x=3$ noktasındaki fonksiyon eğriliği $K=1/r[3]=\frac{4\sqrt{3}}{5}$

Çemberin denklemi: $(x-67/24)^2+(y-7/12)^2=75/144$

******* Cevap 3 *******

Endüktans gerilimi: $V_L=L\frac{dI_L}{dt}=L\frac{dI_C}{dt}=LC\frac{d^2V_C}{dt^2}$

R_2 direncinin akımı: $I_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{V_C+V_L}{R_2}=\frac{V_C+LCV_C''}{R_2}$

$f(x_m)=f(x_0+mh)=f[x_0]+mh\frac{f'[x_0]}{1!}+(mh)^2\frac{f''[x_0]}{2!}+(mh)^3\frac{f'''[x_0]}{3!}+\ldots$ serisinde

$m=-1,-2,-3$ değerleri için $f(x_m)$ hesaplanır ve a,b,c katsayıları ile çarpılırsa,

$$a/\quad f(x_{-1})=f(x_0)-h\frac{f'(x_0)}{1!}+h^2\frac{f''(x_0)}{2!}-h^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+\ldots$$

$$b/\quad f(x_{-2})=f(x_0)-2h\frac{f'(x_0)}{1!}+4h^2\frac{f''(x_0)}{2!}-8h^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+\ldots$$

$$c/\quad f(x_{-3})=f(x_0)-3h\frac{f'(x_0)}{1!}+9h^2\frac{f''(x_0)}{2!}-27h^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+\ldots$$

Denklemleri taraf tarafa toplayalım ve $f'(x_0)$ ile $f'''(x_0)$ terimlerini yok edelim.

$$af(x_{-1})+bf(x_{-2})+cf(x_{-3})=(a+b+c)f(x_0)-(a+2b+3c)h\frac{f'(x_0)}{1!}+$$

$$(a+4b+9c)h^2\frac{f''(x_0)}{2!}-(a+8b+27c)h^3\frac{f'''(x_0)}{3!}+\ldots$$

Bu eşitlikten türetilen $a+2b+3c=0$ ve $a+8b+27c=0$ denklemleri $b=k_1a$ ve $c=k_2a$ alınarak çözümlenirse, $k_1=-4/5$ ve $k_2=1/5$ bulunur. Buradan $a=5$ alınırsa $b=-4$ ve $c=1$ hesaplanır.

$$f''(x_0)=\frac{-y_{-3}+4y_{-2}-5y_{-1}+2y_0}{h^2}$$

Bu formül yardımıyla,

$$V_C^{''} = \frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{-V_C(2)+4V_C(4)-5V_C(6)+2V_C(8)}{h^2}$$

$$V_C^{''} = \frac{-8.6+4*20.7-5*30.0+2*36.5}{2^2} = \frac{-2.8}{4} = -0.7\mu V/s^2 \text{ -}$$

Buradan $I_2(8) = \dfrac{V_C + LCV_C^{''}}{R_2} = \dfrac{36.5+0.1*60*(-0.7)}{150} = 215mA$ hesaplanır.

******* Cevap 4 *******

P uzunluğunu sayısal olarak hesaplamak için $f(\theta) = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$ fonksiyonunun $[a,b]=[0,\pi/2]$ aralığında θ değerlerini hesaplayalım $(h=\pi/6)$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(\theta)$	b	$\sqrt{a^2/4+3b^2/4}$	$\sqrt{3a^2/4+b^2/4}$	a

Yamuk kuralı:

$$P_Y = 4*I = 4*\frac{h}{2}(f[a]+2f[a+h]+2f[a+2h]+...+2f[b-h]+f[b])$$

$$P_Y = 2*h(f[0]+2f[\pi/6]+2f[\pi/3]+f[\pi/2])$$

$$P_Y = 2*\frac{\pi}{6}(b+2(\sqrt{a^2+3b^2})/2+2(\sqrt{3a^2+b^2})/2+a)$$

$$P_Y = \frac{\pi}{3}(a+b+\sqrt{a^2+3b^2}+\sqrt{3a^2+b^2})$$

Simpson kuralı:

$$P_S = 4*I = 4*\frac{h}{3}(f[a]+f[b]+2(f[a+2h]+f[a+4h]+...)+4(f[a+h]+f[a+3h]+...))$$

$$P_S = 4*\frac{h}{3}(f[0]+f[\pi/2]+2f[\pi/3]+4f[\pi/6])$$

$$P_S = 4*\frac{\pi/6}{3}(b+a+2(\sqrt{3a^2+b^2})/2+4(\sqrt{a^2+3b^2})/2)$$

$$P_S = \frac{2\pi}{9}(a+b+\sqrt{3a^2+b^2}+2\sqrt{a^2+3b^2})$$

$a=b=r$ için elips bir çembere dönüşür: $P_G = 2\pi r$

Yamuk kuralı: $P_Y = \dfrac{\pi}{3}(r+r+\sqrt{r^2+3r^2}+\sqrt{3r^2+r^2}) = 2\pi r$

Simpson kuralı: $P_S = \dfrac{2\pi}{9}(r+r+\sqrt{3r^2+r^2}+2\sqrt{r^2+3r^2}) = \dfrac{16\pi r}{9}$

Yapılan hata:

Yamuk kuralı: $\varepsilon_Y = \dfrac{P_G - P_Y}{P_Y}*100 = \%0$

Simpson kuralı: $\varepsilon_S = \dfrac{P_G - P_S}{P_S}*100 = \dfrac{2\pi r - 16\pi r/9}{16\pi r/9}*100 = \%12.5$

2011-2012 Sayısal Çözümleme Final Sınavı Cevapları

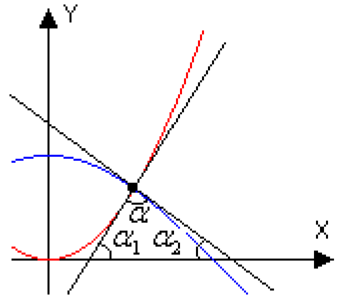
******* Cevap 1 *******

İki fonksiyonun kesişme açısı, teğet doğruları arasındaki açıdır. Önce foksiyonların kesişme noktasını bulalım.

$$x^2 = \cos x \Rightarrow f(x) = x^2 - \cos x$$

$f(x)$ 'in kökü kesişme noktasını verecektir. Bu kök $f(0) = -1 < 0$ ve $f(\pi/2) = \pi^2/4 > 0$ olduğundan $[0, \pi/2]$ arasındadır. İkiye bölme yöntemi ile kesişme noktası

k	a_k	c_k	b_k	$\varepsilon = \lvert c_{k+1} - c_k \rvert$
0	0	$\pi/4$	$\pi/2$	
1	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	0.392
2	$\pi/4$	$5\pi/16$	$3\pi/8$	0.196
3	$\pi/4$	$9\pi/32$	$5\pi/16$	0.0.98
4	$\pi/4$	$17\pi/64$	$9\pi/32$	0.049
5	$\pi/4$	$33\pi/128$	$17\pi/64$	0.024
6	$33\pi/128$	$67\pi/256$	$17\pi/64$	0.012
7	$67\pi/256$	$135\pi/512$	$17\pi/64$	0.006



$x = 135\pi/512 = 0.83$ olarak bulunur.

$f_1(x) = x^2$ ve $f_2(x) = \cos x$ fonksiyonlarının bu noktadaki eğim açıları:

$$f_1'(x) = 2x \Rightarrow f_1'(0.83) = 1.66 \Rightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}(1.66) = 58.9^0$$

$$f_2'(x) = -\sin x \Rightarrow f_2'(0.83) = -0.73 \Rightarrow \alpha_2 = 180^0 - \tan^{-1}(-0.73) = 180^0 - 143.9^0 = 36.1^0$$

Buradan kesişme açısı: $\alpha = 180^0 - (\alpha_1 + \alpha_2) = 180^0 - 95^0 = 85^0$ olacaktır.

******* Cevap 2 *******

$t = 0$ anında kondansatör $0\ V$ potansiyeline sahip olacağından kısa devre olacağı kabul edilir. Bu durumda R_1 direncinden geçen akım kondansatörden geçen akıma eşit olacaktır.

$$I_1 = I_C \Rightarrow \frac{E}{R_1} = 0.2 \Rightarrow \frac{30}{R_1} = 0.2 \Rightarrow R_1 = 150\Omega$$

$t = 10sn$ anında kondansatör tamamen dolmuş görünüyor; $I_C = 0$. Dolayısıyla, kondansatör potansiyeli

$$V_C = V_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} * R_2 = \frac{30}{150 + 300} * 300 = \frac{30}{450} * 300 = 20\ V$$

Kondansatörün akım-gerilin ilişkisi ve Simpson kuralı kullanılırsa,

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^{10} I_C\, dt = \frac{1}{C} * \frac{h}{3}(I_C(0) + 4I_C(2) + 2I_C(4) + 4I_C(6) + 2I_C(8) + I_C(10))$$

$$V_C = \frac{1}{C} * \frac{2}{3}(200 + 4*74 + 2*27 + 4*10 + 2*4 + 0)$$

$$20 = \frac{1}{C} * \frac{2}{3} * 598 \Rightarrow C = \frac{598}{30} \cong 20\mu F \text{ bulunur.}$$

***** **Cevap 3** *****

Soruda verilen bilgilere göre $|OT| = |AT|$ olduğuna göre, iki nokta arasındaki uzaklık ifadesiyle

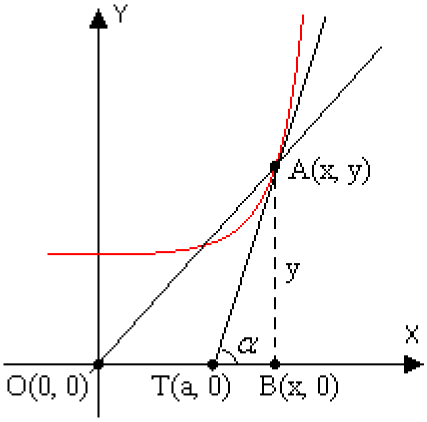
$$\sqrt{(0-a)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

$$a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$a = \frac{x^2+y^2}{2x}$$ bulunur.

$|AT|$ teğet doğrusunun eğimi

$$y' = \tan\alpha = \frac{|AB|}{|TB|} = \frac{y}{x-a} = \frac{y}{x - \dfrac{x^2+y^2}{2x}} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$



olacaktır. Bu diferansiyel denklem Euler yöntemi ile çözülürse,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 1 * f(0,1) = 1 + 1 * \frac{2*0*1}{0^2 - 1^2} = 1 + 0 = 1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + 1 * f(1,1) = 1 + 1 * \frac{2*1*1}{1^2 - 1^2} = \infty$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = \infty + 1 * f(2, \infty) = \infty$$

bulunur.

***** **Cevap 4** *****

e^x ve $\sin x$ fonksiyonlarının $x = 0$ noktasında Taylor serisi açılımları aşağıdaki gibidir.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots \qquad\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots$$

$x = I$ birim matrisi için,

$$\sin I = I - \frac{I^3}{3!} + \frac{I^5}{5!} - \frac{I^7}{7!} + \ \ldots = I - \frac{I}{3!} + \frac{I}{5!} - \frac{I}{7!} + \ \ldots = I\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ \ldots\right) = I\sin 1$$

$$e^{\sin I} = 1 + \sin I + \frac{(\sin I)^2}{2!} + \frac{(\sin I)^3}{3!} + \ \ldots = I + I\sin 1 + \frac{(I\sin 1)^2}{2!} + \frac{(I\sin 1)^3}{3!} + \ \ldots$$

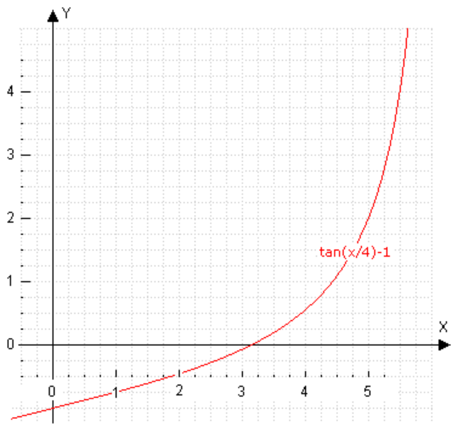
$$= I + I\sin 1 + \frac{I(\sin 1)^2}{2!} + \frac{I(\sin 1)^3}{3!} + \ \ldots = I\left(1 + \sin 1 + \frac{(\sin 1)^2}{2!} + \frac{(\sin 1)^3}{3!} + \ \ldots\right)$$

$$= Ie^{\sin 1}$$

2012-2013 Sayısal Çözümleme Arasınav Cevapları

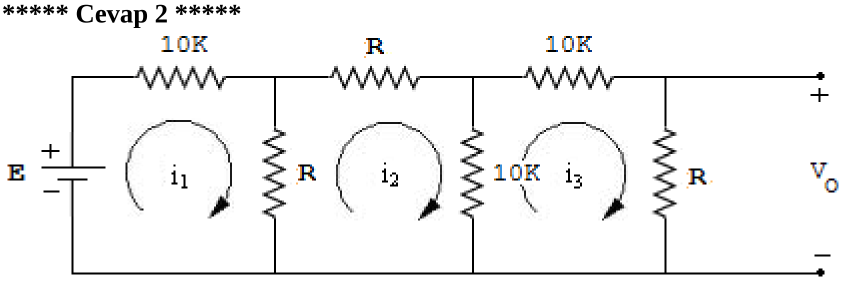
******* Cevap 1 *******

π sayısını hesaplayabilmek için kökü π olan bir fonksiyondan yararlanılabilir. Örneğin, $f(x) = \tan(x/4) - 1$ böyle bir fonksiyondur. $[3,4]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu grafikte de görüldüğü gibi ($f(3) = -0.0684$ ve $f(4) = 0.5574$) zıt işaretli değerler aldığından kiriş yöntemi bu aralıkta kullanılabilir. $a_0 = 3.0$ ve $b_0 = 4.0$ başlangıç değerleri ile kiriş yöntemi iterasyonları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.



k	a_k	c_k	b_k	$\varepsilon = \lvert c_k - a_k \rvert$
0	3.0	3.1093	4.0	0.1093
1	3.1093	3.1341	4.0	0.0248
2	3.1341	3.1398	4.0	0.0057
3	3.1398	3.1412	4.0	0.0014
4	3.1412	3.1415	4.0	0.0003
5	3.1415	3.1415	4.0	0.0000

******* Cevap 2 *******



Şekilde gösterilen çevreler için gerilim denklemleri yazalırsa,

$$
\begin{aligned}
&(R+10)i_1 - Ri_2 = E \\
&-Ri_1 + (2R+10)i_2 - 10i_3 \\
&-10i_2 + (R+20)i_3 = 0
\end{aligned}
\quad => \quad
\begin{bmatrix} R+10 & -R & 0 \\ -R & 2R+10 & -10 \\ 0 & -10 & R+20 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$V_0 = Ri_3$ olduğundan yukarıdaki denklem sisteminde sadece i_3 akımının hesaplanması yeterlidir. Cramer kuralı ile

$$
|A| = \begin{vmatrix} R+10 & -R & 0 \\ -R & 2R+10 & -10 \\ 0 & -10 & R+20 \end{vmatrix} = R^3 + 50R^2 + 600R + 1000
$$

$$
|A_3| = \begin{vmatrix} R+10 & -R & E \\ -R & 2R+10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 10ER \quad => \quad i_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{10ER}{R^3 + 50R^2 + 600R + 1000}
$$

olarak hesaplanır. Buradan

$V_0 = Ri_3 = \dfrac{10ER^2}{R^3 + 50R^2 + 600R + 1000}$ geriliminin en yüksek değeri $\dfrac{dV_0}{dR} = 0$ eşitliğinden hesaplanacak R ile belirlenir.

$\dfrac{dV_0}{dR} = 0 \; => \; R^3 - 600R - 2000 = 0$ denklemi yine kiriş yöntemiyle çözülürse

k	a_k	c_k	b_k	$\varepsilon = \lvert c_k - a_k \rvert$
0	0.0	6.6	30.0	-

1	6.6	17.1	30.0	-
2	17.1	23.6	30.0	-
3	23.6	25.5	30.0	-
4	25.5	25.9	30.0	-
5	25.9	26.0	30.0	-
6	26.0	26.0	30.0	0.0

$R = 26.0K$ bulunur.

******* Cevap 3 *******

$f(x^2 + x + 1) = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x - 5$ olarak verildiğine göre $f(x)$ 3. erecen bir polinomdur. Bu nedenle 4 nokta belirlenmesi yeterlidir.

k	$x = k^2 + k + 1$	$f[x]$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	1	-5			
1	3	-3	1		
2	7	121	31	5	
3	13	1327	201	17	1

$$f(x) = -5 + 1*(x-1) + 5*(x-1)*(x-3) + 1*(x-1)*(x-3)*(x-7)$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 12$$

******* Cevap 4 *******

$0/0$ belirsizliği pay ve paydanın ayrı ayrı türevlerinin alınmasını gerektirir.

$$f(0) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(x)}{1} = 1 \qquad f(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$$

$$f'(0) = \frac{\cos(x)*x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x) - x*\sin(x) - \cos(x)}{2x} = -\frac{\sin(x)}{2} = 0$$

$$f'(\pi) = \frac{\cos(x)*x - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(\pi)*\pi - \sin(\pi)}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$$

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$p'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$$

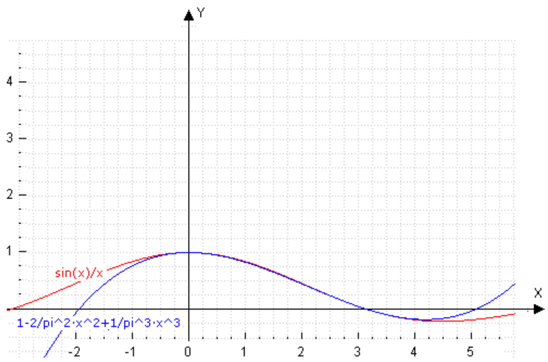
$$p(0) = f(0) = c_0 = 1$$

$$p'(0) = f'(0) = c_1 = 0$$

$$p(\pi) = f(\pi) \;=>\; c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + c_3\pi^3 = 0$$

$$p'(\pi) = f'(\pi) \;=>\; c_1 + 2c_2\pi + 3c_3\pi^2 = -1/\pi$$

$$\begin{matrix} 1 + c_2\pi^2 + c_3\pi^3 = 0 \\ 2c_2\pi + 3c_3\pi^2 = -1/\pi \end{matrix} \quad => \quad \begin{matrix} c_2 = -2/\pi^2 \\ c_3 = 1/\pi^3 \end{matrix}$$



2012-2013 Sayısal Çözümleme Final Cevapları

******* Cevap 1 *******

Geliştirme matrisini yazalım ve indirgeyelim.

$$M = [A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -8 & -11 \\ -5 & 4 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 13/2 & -13/2 & -13/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 & 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = rank(M) < 3$ olduğundan sonsuz sayıda çözüm vardır.

$x_3 = t$ ise $x_1 = 2t - 3$, $x_2 = t - 1$

******* Cevap 2 *******

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} (ak + b) = a\frac{x(x+1)}{2} + bx$$

$$g(x) = x\left(\frac{a(x+1)}{2} + b\right), \quad X = (x+1)/2 \text{ için}$$

$$Y(x) = \frac{g(x)}{x} = aX + b \text{ elde edilir.}$$

Yanda doldurulan tablo yardımıyla,

x	y	X	X^2	Y	$X*Y$
1	0	1	1	0	0
3	2	2	4	2/3	4/3
5	17	3	9	17/5	51/5
6	23	7/2	49/4	23/6	161/12
8	50	9/2	81/4	25/2	225/4
10	78	11/2	121/4	34/5	187/5
11	102	6	36	102/11	612/11
12	123	13/2	169/4	123/12	1599/24
		32	155	46.72	240.86

$$\begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 32 & 155 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46.72 \\ 240.86 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{46.72*155 - 240.86*32}{155*8 - 32*32} = \frac{-465.12}{216} = -2.157$$

$$a = \frac{240.86*8 - 46.72*32}{155*8 - 32*32} = \frac{431.84}{216} = 1.999$$

a ve b değerleri yardımıyla

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} (1.999k - 2.157)$$

******* Cevap 3 *******

Kondansatör üzerindeki gerilim,

$$V_C = \frac{1}{C}\int I_3(t)dt = \frac{1}{C} * \frac{h}{3}(I_3(1) + I_3(5) + 2I_3(3) + 4(I_3(2) + I_3(4)))$$

$$V_C = \frac{1}{80*10^{-6}} * \frac{10^{-3}}{3}(534 + 85 + 2*235 + 4(342 + 127))*10^{-3} = 12.354\ V$$

Bobin üzerindeki gerilim,

$$V_L = L\frac{dI_3(t)}{dt} = L*\frac{1}{12h}(3I_3(1) - 16I_3(2) + 36I_3(3) - 48I_3(4) + 25I_3(5))$$

$$V_L = 10*10^{-3} * \frac{1}{12*10^{-3}}(3*534 - 16*342 + 36*235 - 48*127 + 25*85)*10^{-3} = 0.515\ V$$

R_3 üzerindeki gerilim,

$$V_{R_3} = R_3 * I_3(5) = 60*85*10^{-3} = 5.10\ V$$

R_2 üzerindeki gerilim,

$$V_{R_2} = V_{R_3} + V_C + V_L = 12.354 + 0.515 + 5.10 = 17.969\ V$$

R_2 üzerinden geçen akım,

$$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{17.969}{60} = 299\ mA$$

R_1 üzerinden geçen akım,

$$I_{R_1} = I_{R_2} + I_{R_3} = 85 + 299 = 384\ mA$$

Buradan $R_1 = \dfrac{E - V_{R_2}}{I_{R_1}} = \dfrac{40 - 17.969}{384*10^{-3}} = 57.37\ \Omega$ bulunur.

******* Cevap 4 *******

Teğet doğruları arasında 90^0 'lik açı olduğundan $f\ '(x) * g\ '(x) = -1$ olmalıdır. Buradan

$(-\sin x - 1) * g\ '(x) = -1$ => $g\ '(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$

$x_0 = 0$ için $g(x_0) = y_0 = 0$

$x_1 = h = \pi / 3$ için

$$k_1 = h\, f(x_0, y_0) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin 0} = \frac{\pi}{3}$$

$$k_2 = h\, f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/6)} = \frac{2\pi}{9}$$

$$k_3 = h\, f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/6)} = \frac{2\pi}{9}$$

$$k_4 = h\, f(x_0 + h, y_0 + k_3) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3(2+\sqrt{3})}$$

$$g(x_1) = y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.733$$

$x_2 = 2h = 2\pi / 3$ için

$$k_1 = h\, f(x_1, y_1) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3(2+\sqrt{3})}$$

$$k_2 = h\, f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{6}$$

$$k_3 = h\, f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{6}$$

$$k_4 = h\, f(x_1 + h, y_1 + k_3) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(2\pi/3)} = \frac{2\pi}{3(2+\sqrt{3})}$$

$$g(x_2) = y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.316$$

$x_3 = 3h = \pi$ için

$$k_1 = h\, f(x_2, y_2) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(2\pi/3)} = \frac{2\pi}{3(2+\sqrt{3})}$$

$$k_2 = h\, f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(5\pi/6)} = \frac{2\pi}{9}$$

$$k_3 = h\, f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(5\pi/6)} = \frac{2\pi}{9}$$

$$k_4 = h\, f(x_2 + h, y_2 + k_3) = \frac{\pi}{3} * \frac{1}{1+\sin(\pi)} = \frac{\pi}{6}$$

$$g(x_3) = y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.962$$

$g(x)$ için bilinen ve hesaplanan noktalar: $(0,0)$, (1.04, 0.733), (2.09, 2.316), (3.14, 2.962)

2013-2014 Sayısal Çözümleme Arasınav Cevapları

******* Cevap 1 *******

x sabit nokta olduğu için $f(x)=x$ => $(a-\sin x)e^x = x$

x teğet noktası olduğu için $f'(x)=1$ =>

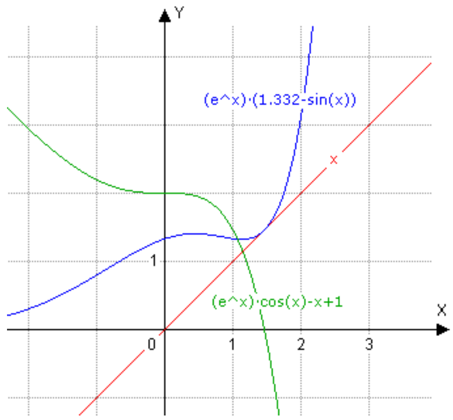
$(a-\sin x)e^x - e^x \cos x = 1$

Bu iki denklem yardımıyla

$g(x)=e^x \cos x - x + 1$

bulunur. $g(x)$ fonksiyonu, (yeşil renkli) grafikte de görüldüğü gibi $[0,2]$ aralığında ($g(0)=2$ ve $g(2)=-4.07$) zıt işaretli değerler aldığından kiriş yöntemi bu aralıkta uygulanabilir. $a_0=0$ ve $b_0=2.0$ başlangıç değerleri ile kiriş yöntemi iterasyonları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

k	a_k	c_k	b_k	$\varepsilon = \lvert c_k - a_k \rvert$
0	0.0	0.658	2.0	0.658
1	0.658	1.080	2.0	0.422
2	1.080	1.303	2.0	0.223
3	1.303	1.401	2.0	0.098
4	1.401	1.440	2.0	0.039
5	1.440	1.454	2.0	0.014
6	1.454	1.460	2.0	0.006
7	1.460	1.462	2.0	0.002



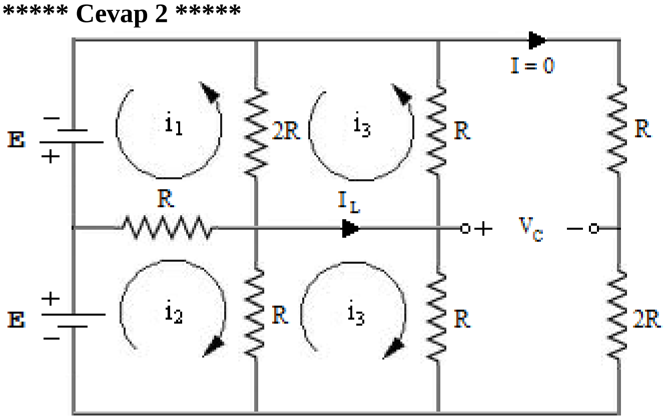
$x=1.462$ değeri fonksiyonun sabit noktasıdır. Bu değer fonksiyonda yerine yazılarak a değeri hesaplanabilir.

$f(1.462)=1.462$

$(a-\sin 1.462)e^{1.462} = 1.462$

$a=1.332$

******* Cevap 2 *******



Devrenin sürekli durumu için L elemanı kısa devre C elemanı ise açık devre yapılmalıdır. Bu durumda seri bağlı duruma gelen R ve $2R$ dirençlerinin uçları arasındaki gerilim 0 V olacağından üzerlerinden geçecek akım $I=0$ A hesaplanacaktır. Ayrıca, diğer koldaki iki R direnci de aynı V_C gerilimini göreceğinden bu dirençleri kapsayan çevrelerin her ikisi de I_3 ile isimlendirilebilir. Şekilde gösterilen çevreler için gerilim denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} 3Ri_1 + Ri_2 - 2Ri_3 &= E \\ Ri_1 + 2Ri_2 - Ri_3 &= E \\ -Ri_2 + 2Ri_3 &= 0 \end{aligned} \quad => \quad \begin{bmatrix} 3R & R & -2R \\ R & 2R & -R \\ 0 & -R & 2R \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$M = \begin{bmatrix} 3R & R & -2R & E \\ R & 2R & -R & E \\ 0 & -R & 2R & 0 \end{bmatrix} = \ldots\ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3E/9R \\ 0 & 1 & 0 & 4E/9R \\ 0 & 0 & 1 & 2E/9R \end{bmatrix}$$

$I_3 = 2E/9R$ bulunur. Sonuç olarak, endüktans akımı ile kondansatör gerilimi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$I_L = 2I_3 = 4E/9R$ ve $V_C = RI_3 = 2E/9$

***** **Cevap 3** *****

$f(t) = E(1 - e^{-t/RC})$ ifadesi doğrusal bir fonksiyon ile temsil edilmek istenmektedir. $f(t)$ seriye açıldığında,

$f(t) = \frac{E}{RC} t + R_1(t)$ ve $R_1(t) = \frac{f''(t)}{2!} t^2$

$f''(t) = -\frac{E}{(RC)^2} e^{-t/RC}$ fonksiyonu en büyük değerini $t = 0$'da aldığından $f''(0) = -\frac{E}{(RC)^2}$ olur.

Buradan, $R_2(t)$'nin mutlak değeri üzerinden

$$R_1(t) = \frac{f''(t)}{2!} t^2 = \frac{E}{2(RC)^2} x^2 = \frac{E}{8}$$

$x = RC/2$ bulunur.

***** **Cevap 4** *****

Bir $f(x)$ fonksiyonunun maximum ve minimum noktalarında $f'(x) = 0$ değerini alır. Bu nedenle, $g(x) = f'(x)$ fonksiyonunun dört bilinen noktası $(-1,0), (1,0), (2,0)$ ve $(4,0)$ olacaktır. 4 kökü bulunan $g(x)$ fonksiyonu 4. dereceden bir fonksiyon olacağından Lagrange yaklaşımını uygulamak için 5. bir noktaya daha ihtiyaç vardır. Bu nokta herhangi bir diğer nokta olarak seçilebilir; örneğin $(3,2)$.

$(-1,0), (1,0), (2,0), (3,2), (4,0)$ noktalar kümesine Lagrange yaklaşımının uygulanmasında $L_3(x)$ fonksiyonunun hesaplanması yeterlidir.

$$P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$

$$P_4(x) = y_3 L_3(x) = 2.\frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8)$$

$$f(x) = \int g(x)dx = \int P_4(x)dx = -\frac{1}{120}(6x^5 - 45x^4 + 70x^3 + 90x^2 - 240x)$$

2013-2014 Sayısal Çözümleme Final Cevapları

******* Cevap 1 *******

Lagrange yaklaşımıyla 2. dereceden bir polinom hesaplayabilmek için $f(x)$ fonksiyonunun 3 noktasının bilinmesi gerekir. Bu noktaları $f^{-1}(x)$ yardımıyla $[-2,2]$ aralığında olacak şekilde belirleyebiliriz.

$f^{-1}(-1) = 2.(-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -2$

$f^{-1}(0) = 2.0^3 - 0^2 + 1 = 1$

$f^{-1}(1) = 2.1^3 - 1^2 + 1 = 2$

Böylece $(-2,-1)$, $(1,0)$ ve $(2,1)$ noktaları bulunur. Langrange yaklaşımının uygulanmasıyla

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$P_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-2-1)(-2-2)}(-1) + \frac{(x+2)(x-2)}{(1+2)(1-2)}0 + \frac{(x+2)(x-1)}{(2+2)(2-1)}2$$

$$P_2(x) = -\frac{x^2-3x+2}{12} - 0 + \frac{x^2+x-2}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{5x^2+9x-14}{12}$$

ve buradan $c_0 = 5/12$, $c_1 = 3/4$ ve $c_0 = -7/6$ bulunur.

******* Cevap 2 *******

$f(x) = x^2$ fonksiyonunu ilk önce $[-n,n]$ aralığında temsil edelim.

x	y	x^2	$x*y$
$-n$	n^2	n^2	$-n^3$
$-n+1$	$(-n+1)^2$	$(-n+1)^2$	$(-n+1)^3$
…	…	…	…
-1	1	1	-1
0	0	0	0
1	1	1	1
…	…		
$n-1$	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$(n-1)^3$
n	n^2	n^2	n^3
0	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	0

Tablodaki verileri kullanarak,

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2n+1 & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_0 = \dfrac{n(n+1)}{3}$ ve $c_1 = 0$ bulunur.

Buradan $P_1(x) = c_0 + c_1 x = \dfrac{n(n+1)}{3}$ ve $n = \infty$ için $P_1(x) = \infty$ (yani, $y = \infty$ doğrusu) olacaktır.

******* Cevap 3 *******

R direnci üzerindeki potansiyel farkı $V_R = R.i = RCV_C^{'}$ ile hesaplanır.

V_R 'yi kullanarak V_C tablosunu oluşturalım ve geri yön farklar formülü ile $V_C^{'}$ hesaplayalım.

$t(ms)$	1	2	3	4	5
$V_C(V)$	$E-43.0$	$E-30.8$	$E-22.2$	$E-15.9$	$E-11.3$

$t_0 = 5ms$ olmak üzere,

$$V_C^{'}(t_0) = \frac{3V_C[t_0-4h]-16V_C[t_0-3h]+36V_C[t_0-2h]-48V_C[t_0-h]+25V_C[t_0]}{12h}$$

$$V_C^{'}(t_0) = \frac{3(E-43.0)-16(E-30.8)+36(E-22.2)-48(E-15.9)+25(E-11.3)}{12.10^{-3}}$$

$$V_C^{'}(t_0) = 3775\ V/sn$$

Buradan $R = \dfrac{V_R(t_0)}{CV_C^{'}(t_0)} = \dfrac{11.3}{30.10^{-6}.3775} = 99.8\ \Omega$ bulunur.

<u>Diğer bir çözüm</u>: $I_C = CV_C^{'} = C(E-V_R)^{'} = -CV_R^{'} = -C(-V_C^{'}) = CV_C^{'} = 30.10^{-6}.3775 = 0.113A$ üzerinden $R = V_R / I_C = 11.3/0.113 = 100\ \Omega$ olarak hesaplanır.

******* Cevap 4 *******

Eğrilik çemberinin merkezini $(a(x), b(x))$ ve çemberin $y = f(x)$ fonksiyonuna teğet olduğu noktayı (x, y) ile temsil edelim. Çemberinin merkezini (x, y) noktasına birleştiren doğru parçası ile (x, y) noktasındaki teğet doğrusu arasında 90^0 'lik açı bulunur. Bu nedenle, bu iki doğrunun eğimleri çarpımı -1 olacaktır.

$$d'(x) * f'(x) = -1$$

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{d'(x)} = -\frac{1}{\frac{b(x)-y}{a(x)-x}} = -\frac{a(x)-x}{b(x)-y} = \frac{x^3}{x^2-y}$$

$$y'' = \frac{3x^2(x^2-y)-x^3(2x-y')}{(x^2-y)^2} = \frac{3x^2(x^2-y)-x^3(2x-\frac{x^3}{x^2-y})}{(x^2-y)^2} = \frac{2x^6-4x^4y+3x^2y^2}{(x^2-y)^3}$$

$$y''' == \frac{(12x^5-16x^3y-4x^4y'+6xy^2+6x^2y\,y')(x^2-y)-3(2x^6-4x^4y+3x^2y^2)(2x-y')}{(x^2-y)^2}$$

$$d_1 = y'(x_0, y_0) = \frac{x_0^3}{x_0^2-y_0} = \frac{0^2}{0^2-1} = 0$$

$$d_2 = y''(x_0, y_0) = 0$$

$$d_3 = y'''(x_0, y_0) = 0$$

Buradan,

$y_1 = y_0 + d_1h + \dfrac{d_2}{2!}h^2 + \dfrac{d_3}{3!}h^3 = 1$ bulunur.

2014-2015 Sayısal Çözümleme Arasınav Cevapları

******* Cevap 1 *******

Aranan doğru $f_1(x)$'e $x = a$'da ve $f_2(x)$'e $x = b$'de teğet ise, bu iki fonksiyon yardımıyla doğrunun denklemi

$$d(x) = f_1(a) + f_1^{'}(a)(x-a) = f_2(b) + f_2^{'}(b)(x-b)$$

$$d(x) = e^{-a} - e^{-a}(x-a) = -b^2 - 2b(x-b)$$

$$d(x) = e^{-a}(1+a) - e^{-a}x = b^2 - 2bx$$

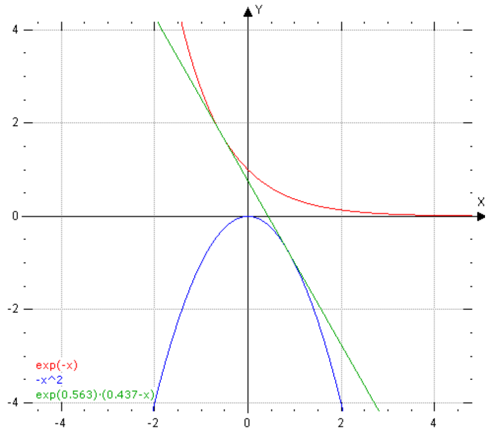
biçiminde yazılır ve buradan

$$e^{-a}(1+a) = b^2 \text{ ve } -e^{-a} = -2b$$

$$e^{-a} = 4(1+a) \Rightarrow g(a) = (e^{-a} - 4)/4$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadeye $a_0 = 0$ başlangıç değeri ile basit iterasyon yöntemi uygulandığında, aşağıdaki tabloda gösterilen işlem adımları yardımıyla a değeri belirlenebilecektir.

k	a_k	a_{k+1}	$\varepsilon = \lvert a_{k+1} - a_k \rvert$
0	0.0	-0.750	0.750
1	-0.750	-0.470	0.280
2	-0.470	-0.599	0.129
3	-0.599	-0.544	0.055
4	-0.544	-0.569	0.024
5	--0.569	-0.558	0.010
6	-0.558	-0.563	0.005

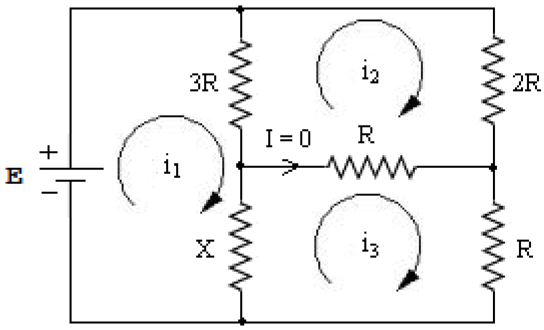


$a = -0.563$ değeri kullanıldığında teğet doğrusunun denklemi

$$d(x) = e^{0.563}(0.437 - x)$$

olarak hesaplanır.

******* Cevap 2 *******



Şekilde gösterilen çevreler için gerilim denklemleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} (3R+X)i_1 - 3Ri_2 - Xi_3 &= E \\ -3Ri_1 + 6Ri_2 - Ri_3 &= 0 \\ -Xi_1 - Ri_2 + (2R+X)Ri_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3R+X & -3R & -X \\ -3R & 6R & -R \\ -X & -R & 2R+X \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3R+X & E & -X \\ -3R & 0 & -R \\ -X & 0 & 2R+X \end{vmatrix} = ER(6R+4X) \text{ ve } |A_3| = \begin{vmatrix} 3R+X & -3R & E \\ -3R & 6R & 0 \\ -X & -R & O \end{vmatrix} = ER(3R+6X)$$

Burada $i_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$ ve $i_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|}$ ile hesaplanacağından dolayı, $I = 0$ koşulu $i_2 = i_3$ olmasını gerektirir.

Bunun sonucu olarak $|A_2| = |A_3|$ eşitliğinden,

$ER(6R+4X) = ER(3R+6X) \Rightarrow X = 3R/2$ bulunur.

Alternatif Çözüm: $i_2 = i_3$ olduğundan iki çevre içindeki gerilimler karşılıklı olarak eşitlenebilir.

$$3R(i_1 - i_2) = 2Ri_2$$

$$X(i_1 - i_3) = Ri_3$$

Bu iki denklemin oranından $X = 3R/2$ bulunur.

******* Cevap 3 *******

$f(x) = 1/x$ fonksiyonuna ait iki eğri parçasının birbirine en yakın olduğu noktalar $(-1,-1)$ ve $(1,1)$ noktalarıdır. Bu noktaları matematiksel olarak da hesaplanabilir. Örneğin, $x > 0$ eğrisi üzerindeki noktayı $(x, 1/x)$, diğerini ise $(x-a, 1/(x-a))$ seçelim. Bu iki noktanın minimum uzaklığı için $d'(x) = 0$ olmalıdır.

$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{(x-(x-a))^2 + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x-a})^2}\right) = 0$$

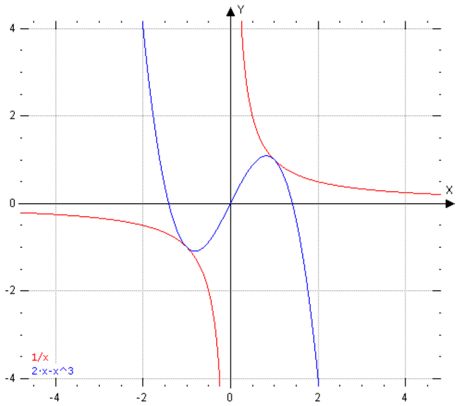
$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a\sqrt{1 + (\frac{1}{x(x-a)})^2}\right) = 0 \Rightarrow x = a/2$$

$d(x)$ denkleminde x yerine $a/2$ yazılırsa a değerine bağlı minimum uzaklık için de $d'(a) = 0$ olmalıdır.

$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{(\frac{a}{2} - (\frac{a}{2} - a))^2 + (\frac{2}{a} - \frac{1}{a/2 - a})^2}\right) = 0$$

$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2 + (\frac{4}{a})^2}\right) = 0 \Rightarrow a = \mp 2$$

Buradan $x = a/2 = \mp 2/2 = \mp 1$ bulunur.



$(-1,-1)$ ve $(1,1)$ noktaları yardımıyla Hermite polinomu için

$$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1$$
$$p(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = -1$$
$$p'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = -1$$
$$p'(-1) = 3a_3 - 2a_2 + a_1 = -1$$

denklemleri yazılarak $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$ ve $p(x) = 2x - x^3$ hesaplanır.

******* Cevap 4 *******

Önce $g(x) = \dfrac{ax^2}{bx+c}$ fonksiyonu $\dfrac{x^2}{g(x)} = \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = Bx + C$ biçiminde bir polinoma dönüştürülür. $1^2/0 = \infty$ değerini üreten $(1,0)$ noktasını hesaplamalarda kullanabilmek için $h(x) = g(x) + 1$ gibi bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyon yardımıyla B ve C değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

x	y	x^2	$h = y+1$	$H = x^2/h$	$x*H$
1	0	1	1	1	1
3	2	9	3	3	9
5	8	25	9	2.77	13.85
6	20	36	21	1.71	10.26
8	38	64	39	1.64	13.12
10	75	100	76	1.31	13.1
11	120	121	121	1	11
12	180	144	181	0.79	9.48
56		500		13.22	80.81

$$\begin{bmatrix} 8 & 56 \\ 56 & 500 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.22 \\ 80.81 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} C = (13.22*500 - 80.81*56)/(8*500 - 56*56) = 2.41 \\ B = (8*80.81 - 56*13.22)/(8*500 - 56*56) = -0.10 \end{array}$$

Bu değerler sonucunda $g(x)$ fonksiyonu

$$g(x) = h(x) - 1 = \frac{100x^2}{241 - 10x} - 1$$

biçiminde olacaktır.

2014-2015 Sayısal Çözümleme Final Cevapları

******* Cevap 1 *******

$f_1(x) = e^x$ fonksiyonu x ekseni boyunca a birim kaydırıldığında

$f_1(x-a) = e^{x-a}$ fonksiyonuna dönüşür. Buradan

$$f_1(x-a) = f_2(x) \;=>\; e^{x-a} = \ln(x) \qquad (1)$$

$$f_1'(x-a) = f_2'(x) \;=>\; e^{x-a} = 1/x \qquad (2)$$

denklemleri kullanılarak

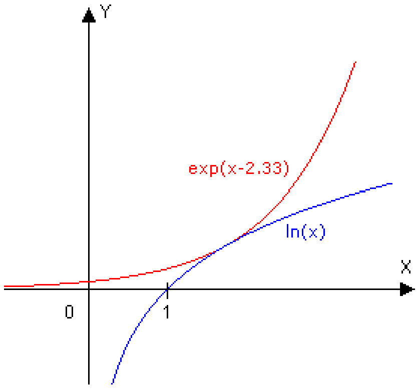
$$g(x) = x\ln(x) - 1 = 0$$

eşitliği elde edilir. Newton-Raphson yöntemi uygulanırsa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x\ln(x)-1}{\ln(x)+1} = \frac{1+x}{1+\ln(x)}$$

iterasyon ifadesine ulaşılır. $x_0 = 1$ başlangıç değeri ile, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi $x_5 = 1.76322$ değeri hesaplanır.

k	x_k	x_{k+1}	$\varepsilon = \lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	1.0	2.0	. . . . .
1	2.0	1.771848	. . . . .
2	1.771848	1.763236	. . . . .
3	1.763236	1.763222	. . . . .
4	1.763222	1.763222	. . . . .



(1) nolu eşitlik yardımıyla,

$$a = x + \ln(x)$$

ve buradan $x = 1.76322$ için

$$a = 1.76322 + \ln(1.76322)$$

$$a = 2.33$$

bulunur.

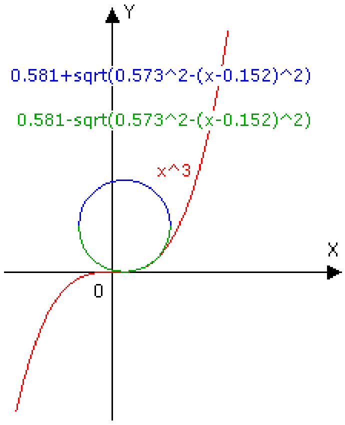
******* Cevap 2 *******

Eğrilik çemberinin yarıçapı ve merkezi noktası

$$r[x] = \frac{(1+(f'[x])^2)^{3/2}}{f''[x]} = \frac{(1+(3x^2)^2)^{3/2}}{6x} = \frac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}$$

$$a[x] = x - \frac{f'[x]}{f''[x]} - \frac{f'[x]^3}{f''[x]} = x - \frac{3x^2}{6x} - \frac{(3x^2)^3}{6x} = \frac{3x^2 - 27x^6}{6x}$$

$$b[x] = f[x] + \frac{1}{f''[x]} + \frac{f'[x]^2}{f''[x]} = x^3 + \frac{1}{6x} + \frac{(3x^2)^2}{6x} = \frac{1+15x^4}{6x}$$



ile hesaplanır. Bu ifadelerden $r[x]$ en küçük değerini

$$r'[x] = 0$$

$$6x * \frac{3}{2} * (1+9x^4) * (1+9x^4)^{1/2} - 6 * (1+9x^4)^{3/2} = 0$$

$$54x^4 - (1+9x^4) = 0 \;=>\; x = (1/63)^{1/4} = 0.355$$

noktasında alacaktır. Buradan eğrilik çemberinin denklemi

$$r[0.355] = \frac{(1+9*(0.355)^4)^{3/2}}{6*0.355} = 0.573$$

$$a[0.355] = \frac{3*(0.355)^2 - 27*(0.355)^6}{6*0.355} = 0.152$$

$$b[0.355] = \frac{1+15*(0.355)^4}{6*0.355} = 0.581$$

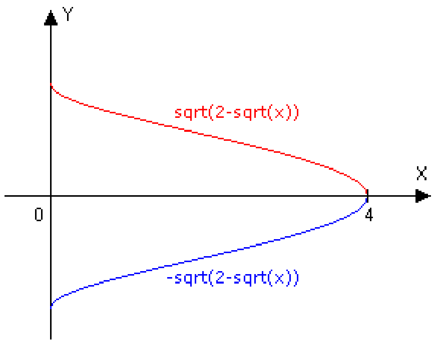
değerleri kullanılırsa

$$(x-0.152)^2 + (y-0.581)^2 = 0.573^2$$

olarak bulunur.

******* Cevap 3 *******

$y = \pm\sqrt{2-\sqrt{x}}$ eğrisi şekilde gösterildiği gibi y ekseni ile kapalı bir alan meydana getirir. Burada $h = (4-0)/8 = 0.5$ alınarak toplam taban alanı



$$I = 2*\frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + y_4 + ...) + 4(y_1 + y_3 + ...) + y_8)$$

$$I = \frac{2*0.5}{3}(\sqrt{2} + 2(\sqrt{2-\sqrt{1}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})$$

$$+ 4(\sqrt{2-\sqrt{0.5}} + \sqrt{2-\sqrt{1.5}} + \sqrt{2-\sqrt{2.5}} + \sqrt{2-\sqrt{3.5}}) + 0)$$

$$I = 6.025$$

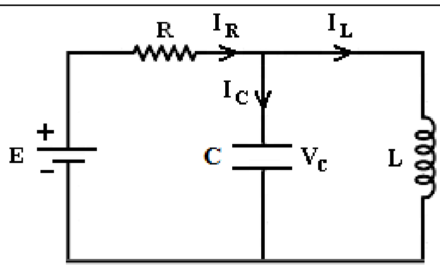
olarak bulunur.

Prizmanın hacmi

$$V = I.h = 6.025*10$$
$$V = 60.25$$

olacaktır.

******* Cevap 4 *******



a) E gerilim kaynağını içeren çevre üzerinden

$$E = V_R + V_C = (I_C + I_L)R + V_C = (CV_C' + \frac{1}{L}\int V_C dt)R + V_C$$

denklemi yazılır ve türev alınırsa,

$$0 = (CV_C'' + \frac{1}{L}V_C)R + V_C'$$

$$RCV_C'' + V_C' + \frac{R}{L}V_C = 0$$

elde edilir.

b) $t = 0$ anında kondansatör kısa devre olacağından,

$I_C(0) = E/R$ ve $V_C(0) = 0$

bulunur.

c) V_C'ye bağlı diferansiyel denklemde $V_C' = I_C / C$ dönüşümü yapılırsa,

$$V_C' = I_C / C$$

$$I_C' = -\frac{V_C}{L} - \frac{I_C}{RC}$$

gibi birinci mertebeden iki diferansiyel denklem elde edilir. Euler yöntemi yardımıyla $I_C(t)$ ve $V_C(t)$ değerlerini hesaplayalım.

$$V_C(h) = V_C(0) + hV_C'(V_C(0), I_C(0), t) = 0 + h\frac{I_C(0)}{C} = \frac{hE}{RC}$$

$$I_C(h) = I_C(0) + hI_C'(V_C(0), I_C(0), t) = \frac{E}{R} + h(-\frac{V_C(0)}{L} - \frac{I_C(0)}{RC}) = \frac{E}{R}(1 - \frac{h}{RC})$$

$$V_C(2h) = V_C(h) + hV_C'(V_C(h), I_C(h), t) = \frac{hE}{RC} + h\frac{I_C(h)}{C} = \frac{hE}{RC}(2 - \frac{h}{RC})$$

$$I_C(2h) = I_C(h) + hI_C'(V_C(h), I_C(h), t) = \frac{E}{R}(1 - \frac{h}{RC}) + h(-\frac{V_C(0)}{L} - \frac{I_C(0)}{RC})$$

$$= \frac{E}{R}(1 - \frac{2h}{RC} + \frac{h^2}{(RC)^2} - \frac{h^2}{LC})$$

d) Devredeki eleman değerleri iki diferansiyel denklem içerisinde kullanılırsa ($I_C(0) = 0.44$, $V_C(0) = 0$),

$$V_C'(t) = 5.10^5 I_C(t)$$

$$I_C'(t) = -10V_C(t) - 5.10^3 I_C(t)$$

elde edilir. Buradan,

$$V_C(h) = V_C(0) + hV_C'(V_C(0), I_C(0), t) = 0 + 50*10^{-6}*5*10^5*\frac{44}{100} = 11\ V$$

$$I_C(h) = I_C(0) + h\,I_C'(V_C(0), I_C(0), t) = \frac{44}{100} + 50*10^{-6}(-10*0 - 5*10^3*0.44) = 0.33\ A$$

$$V_C(2h) = V_C(h) + hV_C'(V_C(h), I_C(h), t) = 11 + 50*10^{-6}*5*10^5*0.33 = 19.25\ V$$

$$I_C(2h) = I_C(h) + h\,I_C'(V_C(h), I_C(h), t) = 0.33 + 50*10^{-6}*(-10*11 - 5*10^3*0.33) = 0.242\ A$$

bulunur.