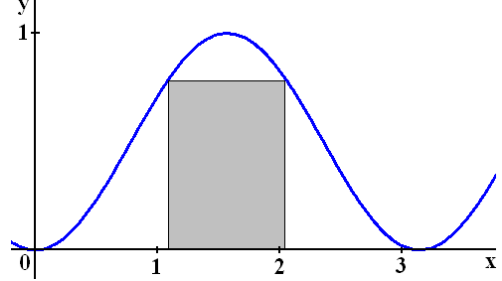




Karadeniz Teknik Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2008-2009 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 1. Arasınava Soruları
13 Kasım 2008 Perşembe

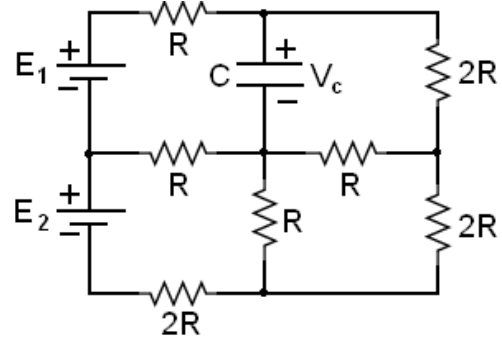


1. Bir koordinat düzlemine iki köşesi x ekseninde, diğer iki köşesi ise $f(x)=\sin^2(x)$ eğrisi üzerinde olan maksimum alana sahip bir dikdörtgen yerleştirilmek isteniyor. Bir başlangıç aralığı ve aralığı ikiye bölme yöntemini kullanarak dikdörtgenin kenarlarını $\varepsilon=10^{-3}$ mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)



Aralığı ikiye bölme yöntemi (Bisection method): Bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri zıt işaretli olacak şekilde bir $[a,b]$ aralığı seçilir. Sonra bu aralığın orta noktası $c = (a + b)/2$ hesaplanır ve $f(c)$ 'nin işaretine göre yeni aralık $[a,c]$ ya da $[c,b]$ olarak alınır.

2. Şekilde gösterilen elektrik devresinde $E_1=E_2=65$ volt olduğuna göre, C kondansatörü üzerinde oluşacak potansiyel farkının en yüksek değerini (V_c) Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile hesaplayınız. (25p)



Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü $M = [A | B]$ matrisinde A 'nın bulunduğu kısım birim matrise dönüştürülerek gerçekleştirilir.

3. $f(x)=\sin^2(x)$ fonksiyonu $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında $p(x)=x^2$ yaklaşım polinomu ile temsil edildiğinde ortaya çıkacak hatanın en yüksek değerini hesaplayınız. (25p)
Maksimum hata: Bir $f(x)$ serisinin ilk n terimi alındığında ortaya çıkacak maksimum hata aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$R_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} \right|$$

4. $f(x)=\sin^2(x)$ fonksiyonunu $[0, \pi/2]$ aralığında temsil eden $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ biçiminde bir kübik Hermit polinomu bulunuz. (25p)

Kübik Hermit polinomu: Bir $f(x)$ fonksiyonunu $[a,b]$ aralığında temsil edecek bir $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ kübik Hermite polinomu

$$f(a) = p(a) \quad f(b) = p(b)$$

$$f'(a) = p'(a) \quad f'(b) = p'(b)$$

denklemleri yardımıyla hesaplanır.



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2008-2009 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 2. Arasnav Soruları
30 Aralık 2008 Salı



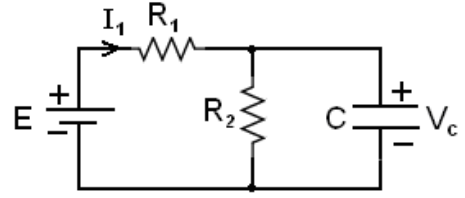
1. $f(x) = 3\sin^2(x)$ fonksiyonu için $[0, \pi]$ aralığında eşit aralıklı 7 nokta seçerek en küçük kareler yöntemi ile bir $p_3(x) = ax^2 + bx^3$ yaklaşım fonksiyonu belirleyiniz. (25p)

Hatırlatma: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktaya göre bir $p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ yaklaşım fonksiyonu, en küçük kareler yöntemine karşılık gelen aşağıdaki denklem sisteminin çözümünden elde edilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

2. Şekil 1'de E doğru gerilimi ile beslenen elektrik devresinde değişik zamanlarda ölçülen V_c potansiyeli aşağıdaki tabloda verilmiştir. $t=2.0$ sn'de I_1 akımının değerini geri yön sonlu farklar formülü ile hesaplayınız. $R_1=2K$, $R_2=3K$ ve $C=1mF$. (25p)

t (sn)	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
V_c (V)	3.4	5.8	7.6	8.8	9.7



Şekil 1

Hatırlatma: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki türevi, h aralıklı 5 nokta kullanan geri yön sonlu farklar formülü ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

3. $f(x) = 3\sin^2(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında x eksenine ile sınırladığı alanı $n=6$ eşit parçaya ayırarak sağ yönlü Riemann toplama formülü yardımıyla hesaplayınız. (25p)

Hatırlatma: Sağ yönlü Riemann toplama formülü ile bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında tümlevi, eşit aralıklı n sayıda nokta kullanarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \sum_{k=1}^n hf(x_k), \quad x_k = a + kh \quad \text{ve} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

4. Şekil 1'deki devrede V_c 'ye ait diferansiyel denklemi ve Picard iterasyonu ile bu denklemin çözümünü (V_c geriliminin kısa analitik ifadesini) E , $R_1=R_2=R$ ve C parametrelerine bağlı olarak bulunuz. (25p)

Hatırlatma: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin çözümü $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değeri kullanılarak aşağıda verilen Picard iterasyonu ile istenen bir terime kadar hesaplanabilir.

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))dt, \quad n \geq 0$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2008-2009 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı Soruları
28 Ocak 2009 Çarşamba

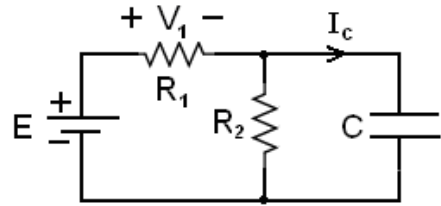


1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ denklemi ile verilen çembere $\ln(x/a)$ eğrisinin teğet olabilmesi için a değeri ne olmalıdır? Bir başlangıç değeri seçerek basit iterasyon yöntemi ve 10^{-2} mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri ve $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) iterasyon formülü kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakınsak bir çözüm için $|g'(x_0)| < 1$ olmalıdır.

2. Şekil 1'de E doğru gerilimi ile beslenen elektrik devresinde değişik zamanlarda ölçülen I_c akımı aşağıdaki tabloda verilmiştir. $t = 2.0$ sn'de V_1 geriliminin değerini Simpson kuralı ile hesaplayınız. $R_1 = 2K$, $R_2 = 3K$ ve $C = 1mF$. (25p)

t (sn)	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4
I_c (mA)	7.16	5.16	3.66	2.66	1.91	1.35



Şekil 1

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında x eksenini ile sınırladığı alan, ilgili aralığı m eşit parçaya bölerek Simpson kuralı ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots)), \quad h = \frac{b - a}{m}$$

3. Euler yöntemini kullanarak $y' - xy + \cos x = 0$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ ve $h = 0.2$ ile $[0, 2]$ aralığındaki çözümünü grafiksel olarak gösteriniz. (25p)

Euler yöntemi: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y(0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{50} 'yi hesaplayınız. (25p)

Matris derecesi: Bir A matrisinin n . derecesi $A^n = p d^n p^{-1}$ ifadesi ile hesaplanır. Burada d ve p matrisleri sırasıyla özdeğerler ve özvektörler matrisidir. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ polinomunun kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerini ve her bir λ_i özdeğeri için $(A - \lambda_i I)V_i = 0$ denklem sisteminin çözümü de özvektörleri verir.

$$d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad p = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2009-2010 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 1. Ara Sınavı

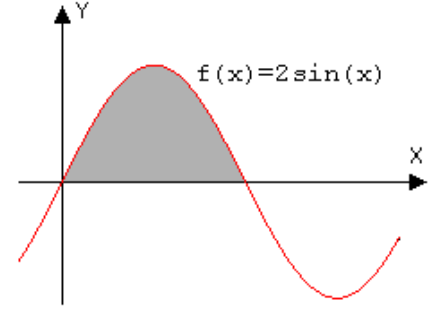


Tarih: 9 Kasım 2009 Pazartesi

Süre: 120 dakika

Sınav süresince cep telefonları kapalı tutulmalı ve sıranın üzerinde bırakılmamalıdır.

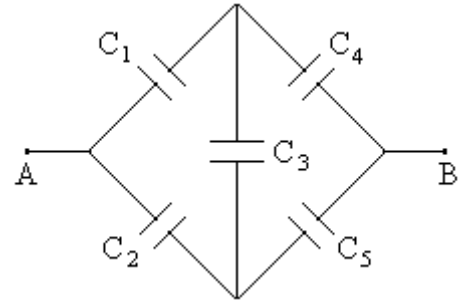
1. $f(x)=2\sin(x)$ fonksiyonunun ilk alternansının sınırladığı alana (yandaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir) yerleştirilebilecek en büyük karenin bir kenarının uzunluğunu, bir başlangıç noktası seçerek basit iterasyon yöntemi ve 0.05 mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)



Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0,1,2,\dots$) iterasyon for-

mülünde kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakınsak bir çözüm için $|g'(x_0)| < 1$ olmalıdır.

2. $C_1 = C_5 = 1F$, $C_2 = C_4 = 2F$ ve $C_3 = 3F$ kondansatörleri şekildeki gibi bağlanarak bir elektrik devresi oluşturuluyor. Bu devrede A ve B noktaları arasındaki eşdeğer kondansatörü (sığayı) Cramer yöntemi ile hesaplayınız. (25p)



Cramer kuralı: Bir 3. dereceden $AX = B$ denklem sistemi, $\det(A) \neq 0$ olmak üzere, Cramer kuralı ile aşağıdaki gibi çözülür.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ ise } X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, X_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

3. Aşağıda verilen denklem sistemini $M=[A|B]$ genişletilmiş matrisi (augmented matrix) üzerinden çözünüz. (25p)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

4. Seri bağlı bir RC elektrik devresinde kondansatörün dolma eğrisi $V_C = 20(1 - e^{-10t})$ olarak formüle edilmektedir. Bu eğri için 3. dereceden bir yaklaşım fonksiyonunu (polinom) Lagrange yöntemi ile hesaplayınız. Kondansatörün $t = 5RC$ sn sonra tam dolduğunu varsayabilirsiniz. (25p)

Lagrange yöntemi: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona $[x_0, x_n]$ aralığı için bir yaklaşım polinomu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2009-2010 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 2. Ara Sınavı



Tarih: 21 Aralık 2009 Pazartesi

Süre: 70 dakika

Sınav süresince cep telefonları kapalı tutulmalı ve sıranın üzerine bırakılmamalıdır.

1. $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için ($x > 1$) Pade yaklaşımı ile bir $R_{1,2}(x) = \frac{p_0 + p_1x}{1 + q_1x + q_2x^2}$ yaklaşım fonksiyonu hesaplayınız. (35p)

2. Bir koşucunun sabit bir noktadan harekete başlayarak koştuğu L mesafesi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu koşucunun $t = 2sn$, $t = 3.5sn$ ve $t = 5sn$ 'lerdeki hızını en az 2 nokta kullanan geri yön, merkezi ve ileri yön farklar (backward, central and forward differences) formüllerinin uygun olanı ile hesaplayınız. (30p)

t(sn)	0	1	2	3	4	5
L(m)	0.0	5.6	11.2	16.6	22.5	27.3

3. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = A\sqrt{Bx + x^2}$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (35p)

x	2	3	5	8	9	10
y	1.6	2.0	2.9	4.0	4.3	4.7

En küçük kareler yöntemi: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktadan geçen bir $g(x) = c_0k_0(x) + c_1k_1(x) + \dots$ fonksiyonunun (c_0, c_1, \dots katsayılar olmak üzere) genel hesabı aşağıdaki ifade ile yapılır.

$$\text{Genel formül: } \sum_{i=1}^n (g[x_i] - f[x_i]) \frac{\partial g[x_i]}{\partial c_0} = 0, \sum_{i=1}^n (g[x_i] - f[x_i]) \frac{\partial g[x_i]}{\partial c_1} = 0, \dots$$

Eğer $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ biçiminde ise yukarıdaki genel formülden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2009-2010 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Dönem Sonu Sınavı



Tarih: 6 Ocak 2010 Çarşamba

Süre: 120 dakika

Sınav süresince cep telefonları kapalı tutulmalı ve sıranın üzerine bırakılmamalıdır.

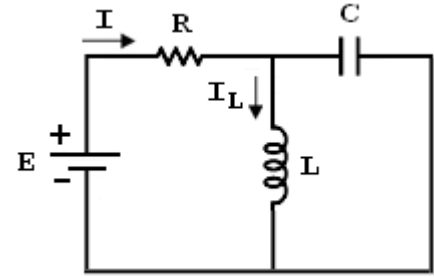
1. $x^2 + y^2 = 5$ çemberine $(-1, -2)$ ve $(2, -1)$ noktalarında teğet olan 3.dereceden bir polinomu $(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)$ Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile hesaplayınız.

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü $M = [A | B]$ matrisinde A 'nın bulunduğu kısım birim matrise dönüştürülerek gerçekleştirilir.

2. Sabit gerilim kaynağı ile beslenen şekildeki elektrik devresinde R direnci üzerinden geçen akımın değeri değişik zamanlar için ölçülerek aşağıdaki tabloda verilmiştir. $t = 25msn$ 'deki I_L akımını geri yön farklar formülü ile hesaplayınız. (25p)

$$E = 50V, R = 10\Omega, L = 1H, C = 20mF$$

$t (msn)$	5	10	15	20	25
$I (A)$	4.8	4.2	3.8	4.0	4.3



Geri yön farklar formülü (Backward difference formula): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki sayısal türevi 5 nokta kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

3. $t = 0$ anında harekete başlayan bir otomobilin $h = 10dk.$ aralıklarla hızı ölçülerek aşağıdaki tablo oluşturuluyor. $t = 80dk.$ sonunda otomobilin aldığı toplam yolu Simpson kuralı ile hesaplayınız. (25p)

$t (dk.)$	10	20	30	40	50	60	70	80
$V (km/h)$	65	80	75	70	80	90	85	80

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere, Simpson kuralı ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3}(f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$

4. Her bir noktasındaki türevi bu noktadan geçen ve merkezi $(0,0)$ noktasında bulunan çemberin çevre uzunluğuna eşit olan bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(0) = 0$ olarak verilmektedir. $h = 1$ olmak üzere $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ ve $f(4)$ değerlerini Euler yöntemi ile hesaplayınız. (25p)

Euler yöntemi: $y' = F(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y(0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ zamanlarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k)$$



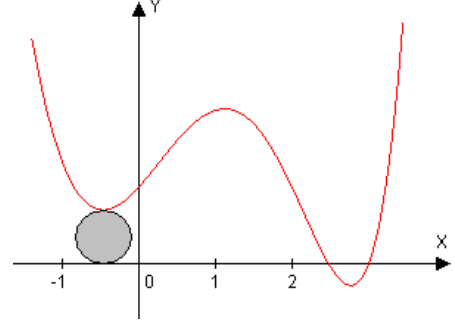
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2010-2011 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 1. Ara Sınavı



Tarih: 9 Kasım 2010 Salı

Süre: 120 dakika

1. Bir koordinat düzleminde hem x eksenine hem de $f(x) = 3^x - x^3$ eğrisinin tepe noktasına teğet şeklindeki gibi bir daire çiziliyor. Dairenin alanını bir başlangıç aralığı belirleyerek ve kiriş yöntemini kullanarak $\varepsilon = 10^{-2}$ mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

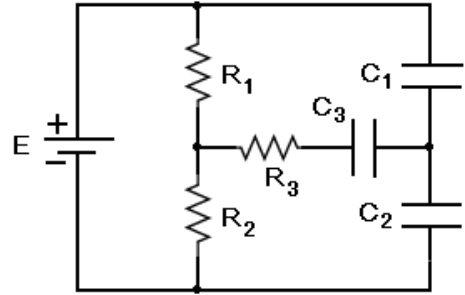


Kiriş yöntemi (Regula falsi method): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında bulunan kökünü iterasyon yardımıyla aralığı küçültürerek hesaplama yöntemidir. Aşağıdaki genel iterasyon ifadesi ile bir c noktası ($a < c < b$) belirlenerek $[a, b]$ aralığı $[a, c]$ yada $[c, b]$ aralığına küçültülür. $f(a)$ ve $f(b)$ karşıt işaretli değerler üretirler.

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

2. Şekilde gösterilen elektrik devresine $E = 30\text{ V}$ DC gerilim uygulandığında C_3 kondansatörü üzerinde oluşacak potansiyel farkının en yüksek değerini Dolittle parçalama yöntemi ile hesaplayınız. (25p)

$$\begin{aligned} R_1 &= 1K\Omega & C_1 &= 1F \\ R_2 &= 2K\Omega & C_2 &= 2F \\ R_3 &= 3K\Omega & C_3 &= 3F \end{aligned}$$



Dolittle parçalama yöntemi: Bir $AX = B$ denklem sisteminde $A = LU$ olacak biçimde L ve U matrisleri belirlenir. $AX = B$ sistemi $LY = B$ sistemine dönüştürülerek Y matrisi, ardından $UX = Y$ sisteminden de X matrisi hesaplanır. 3. dereceden bir denklem sisteminde L ve U matrisleri aşağıdaki biçime sahiptir.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

3. $f(x) = x \sin(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında $p(x) = x^2$ yaklaşım polinomu ile temsil edilirse ortaya çıkacak en büyük hatayı hesaplayınız. (25p)

Maksimum hata: Bir $f(x)$ serisinin ilk n terimi alındığında ortaya çıkacak maksimum hata aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$R_n(x, c) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} \right|$$

4. Bir $f(x)$ fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında temsil etmek üzere 3.dereceden Lagrange, Newton, Hermite ve Pade polinomları hesaplanıyor. Bu polinomların hangisi, genel olarak, hem aralık içerisindeki x noktalarında hem de aralık dışında a ve b 'ye yakın x noktalarında $f(x)$ fonksiyonunu en az hata ile temsil edebilme özelliğine sahiptir? Nedenini uygun bir fonksiyon üzerinde kısaca açıklayınız. (25p)



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2010-2011 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 2. Ara Sınavı



Tarih: 20 Aralık 2010 Pazartesi

Süre: 120 dakika

1. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = ax + \log(bx^3)$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (25p)

x	1	2	4	5	7	8	10
y	2.5	8.4	22.3	29.7	44.6	52.2	67.6

En küçük kareler yöntemi: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktadan geçen bir $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ fonksiyonu (c_0, c_1, \dots katsayılar olmak üzere) aşağıdaki denklem sistemi yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

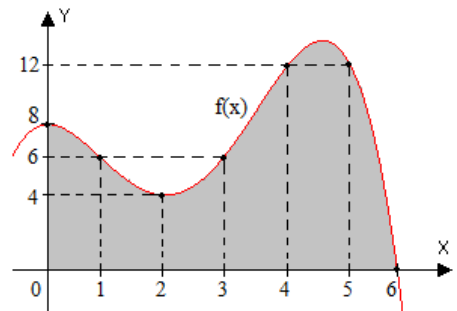
2. 50 V 'luk DC gerilim kaynağı ile beslenen seri bağlı bir RLC devresinde C 'nin üzerindeki potansiyel farkı 2ms aralıklarla ölçülerek aşağıdaki tablo hazırlanıyor. Buna göre, $t = 10ms$ sonunda L 'nin uçlarında ölçülecek gerilimi 5 nokta seçerek geri yön farklar (backward difference) formülü ile hesaplayınız ($R = 2K\Omega, L = 3mH, C = 4mF$). (25p)

$t(ms)$	2	4	6	8	10
$V_C(V)$	0.0	5.6	11.2	16.6	22.5

Geri yön farklar formülü (backward difference formula): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi 5 nokta kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

3. Yandaki şekilde çeşitli x değerleri için gösterilen bir $f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı taralı bölgenin alanını orta nokta (midpoint) ve yamuk (trapezoidal) yöntemleri ile hesaplayınız. Bu iki yöntemden hangisinin gerçeğe daha yakın bir değer üreteceğini ve nedenini açıklayınız. (25p)



4. $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ elipsoidinin hacmi $V = 8 \iiint_D z ds = 8 * 3 * \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2}} \right) dy dx$ iki

katlı integrali ile hesaplanmaktadır. Bu integrali x ve y eksenlerini 2 eşit parçaya ayırarak Simpson kuralı ile sayısal olarak hesaplayınız. (25p)

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere, Simpson kuralı ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2010-2011 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı



Tarih: 13 Ocak 2011 Perşembe

Süre: 120 dakika

1. $e^x \ln(x) = 1$ eşitliğini sağlayan x değerini, bir başlangıç değeri seçerek basit iterasyon yöntemi ve $\varepsilon = 10^{-3}$ mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri ve $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) iterasyon formülü kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakınsak bir çözüm için $|g'(x_0)| < 1$ olmalıdır.

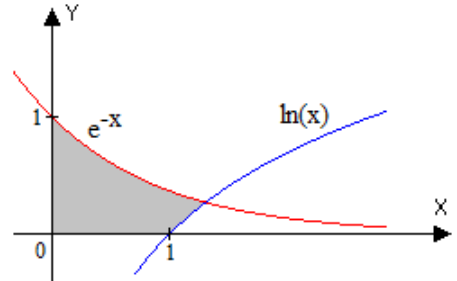
2. $x^2 + y^2 - 10 = 0$ çemberinin üst yarısını $[-2, 2]$ aralığında temsil edecek bir $R_{2,2}(x)$ fonksiyonunu Pade yaklaşımını kullanarak hesaplayınız ve grafik üzerinde gösteriniz. (25p)

Pade yaklaşımı: Matematiksel fonksiyonları verilen bir aralık içerisinde $P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ gibi iki polinomun oranı biçiminde temsil etmek mümkündür. Bu yaklaşımda $[a, b]$ aralığı için temsil edilmek istenen bir $f(x)$ fonksiyonu $x_0 = (a + b)/2$ noktasında x^{n+m} terimine kadar Taylor serisine açılır ve $P_n(x) - f(x)Q_m(x) = 0$ ifadesi ile $P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ polinomları hesaplanır.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$f(x) \approx R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n}{1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_mx^m}$$

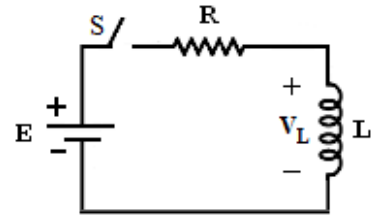
3. Yandaki şekilde gösterilen x ve y eksenleri ile e^{-x} ve $\ln(x)$ fonksiyonlarının sınırladığı taralı alanı 10 parça üzerinden Simpson kuralı ile hesaplayınız. (25p)



Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal entegrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere, Simpson kuralı ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$

4. Yanda gösterilen seri RL devresinde S anahtarı $t = 0$ anında kapatılıyor. $h = 2ms$ olmak üzere $t = 10ms$ sonunda L üzerindeki gerilimi (V_L) Euler yöntemi ile hesaplayınız. ($E = 30V, R = 10\Omega, L = 0.2H$). (25p)



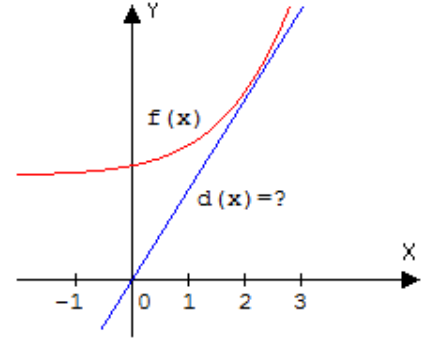
Euler yöntemi: $y' = F(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y(0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k)$$



1. $f(x) = \sqrt{e^x + 5}$ fonksiyonuna $(0,0)$ noktasından geçecek şekilde bir teğet doğrusu çizilmek isteniyor. Bu doğrunun denklemini, $d(x)$, $x_0 = 3$ başlangıç değerini kullanarak basit iterasyon yöntemi ve $\varepsilon = 10^{-2}$ mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

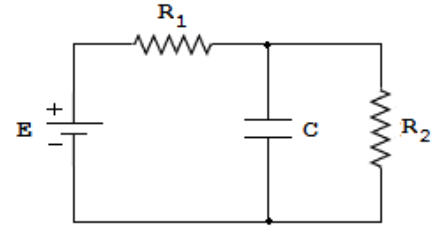
Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0,1,2,\dots$) iterasyon formülünde kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakın-sak bir çözüm için $|g(x_0)| < 1$ olmalıdır.



2. $f(x) = x^2$ fonksiyonu ile $x = -1$ ve $x = 2$ noktalarında 90° 'lik açı ile kesişen 3. dereceden bir polinomu Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile hesaplayınız. (25p)

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü $M = [A | B]$ matrisinde A 'nın bulunduğu kısım birim matrise dönüştürülerek gerçekleştirilir.

3. Şekilde gösterilen elektrik devresine $E = 30\text{ V}$ DC gerilim uygulanıyor ve C kondansatörü üzerinde oluşan potansiyel farkı 1 sn aralıklarla ölçülerek aşağıdaki tablo hazırlanıyor. $t = 4.5\text{ sn}$ 'de $R_1 = 1\text{ K}\Omega$ direncinden geçen akımı Newton polinom yaklaşımını kullanarak hesaplayınız. (25p)



$t(\text{sn})$	1	2	3	4	5	6
$V_C(\text{V})$	3.94	6.33	7.77	8.65	9.18	9.59

Newton polinomu: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona $[x_0, x_n]$ aralığı için Newton yaklaşım polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Burada, a_k ($k = 0,1,2,\dots,n$) katsayıları sonlu farklar tablosu oluşturularak belirlenir.

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

4. Soru 3'deki elektrik devresinde C kondansatörü üzerindeki gerilimin (V_C) zamana göre bir değişimi aşağıda veriliyor. Bu fonksiyon için Pade polinomu $R_{2,2}(x)$ 'yi hesaplayınız. (25p)

$$V_C(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right) = 10(1 - e^{-t})$$

Pade polinomu: Bu yaklaşımda $[a,b]$ aralığı için temsil edilmek istenen bir $f(x)$ fonksiyonu x^{n+m} terimine kadar Maclaurin serisine açılır ve $P_n(x) - Q_m(x)f(x) = 0$ ifadesi ile $P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ polinomları hesaplanır.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$f(x) \approx R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n}{1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_mx^m}$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2011-2012 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme 2. Ara Sınavı



Tarih: 14 Aralık 2011 Çarşamba

Süre: 120 dakika

1. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = (ax)^{x/b}$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (25p)

x	2	3	4	5	6	7	8
y	2	4	7	15	32	71	162

En küçük kareler yöntemi: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktayı en az hata ile temsil edebilecek bir $g(x) = c_0 k_0(x) + c_1 k_1(x) + \dots$ fonksiyonu (c_0, c_1, \dots katsayılar olmak üzere) aşağıdaki ifadeler yardımıyla hesaplanır.

$$\sum_{i=1}^n (f[x_i] - g[x_i]) \frac{\partial g[x_i]}{\partial c_0} = 0, \quad \sum_{i=1}^n (f[x_i] - g[x_i]) \frac{\partial g[x_i]}{\partial c_1} = 0, \dots$$

2. (2,2), (3,1) ve (4,3) noktalarından geçen bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik çemberinin denklemini yaklaşık olarak hesaplayınız. (25p)

Eğrilik çemberi: Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir x noktası için

Eğrilik çemberi yarıçapı
$$r[x] = \frac{(1 + (f'[x])^2)^{3/2}}{f''[x]}$$

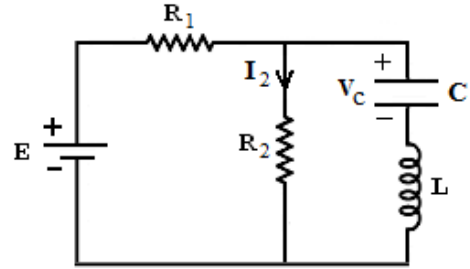
Çember merkez apsisi
$$a[x] = x - \frac{f'[x] + f'[x]^3}{f''[x]}$$

Çember merkez ordinatı
$$b[x] = f[x] + \frac{1 + f'[x]^2}{f''[x]}$$

3. Bir DC gerilim kaynağı ile beslenen yandaki elektrik devresinde C kondansatörü üzerinde $2ms$ aralıklarla ölçülen potansiyel farkı aşağıdaki tabloda veriliyor. $t = 8ms$ 'de R_2 direncinden geçen akımı (I_2) 4 noktalı bir geri yön farklar formülü türeterek hesaplayınız. (25p)

($R_2 = 150\Omega, L = 100mH, C = 60\mu F$)

$t(ms)$	2	4	6	8	10
$V_C(V)$	8.6	20.7	30.0	36.5	41.0



Sayısal Türev: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_m = x_0 + mh$ noktasında Taylor serisine açılımı

$$f(x_m) = f(x_0 + mh) = f[x_0] + mh \frac{f'[x_0]}{1!} + (mh)^2 \frac{f''[x_0]}{2!} + (mh)^3 \frac{f'''[x_0]}{3!} + \dots$$

4. $x = a \cos \theta$ ve $y = b \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) parametrik denklemleri ile temsil edilen bir elipsin

çevre uzunluğu $P = 4 \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}) d\theta$ integrali ile hesaplanmaktadır. P

uzunluğunu yamuk ve Simpson kurallarını $h = \pi/6$ ile uygulayarak a ve b cinsinden hesaplayınız. Bu kurallarla $a = b = r$ için yapılan hesaplamada ortaya çıkacak hatayı % olarak belirleyiniz. (25p)

Yamuk ve Simpson kuralları: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal entegrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere, yamuk ve Simpson kuralları ile sırasıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{2} (f[a] + 2f[a+h] + 2f[a+2h] + \dots + 2f[b-h] + f[b])$$

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a+2h] + f[a+4h] + \dots) + 4(f[a+h] + f[a+3h] + \dots))$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2011-2012 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı



Tarih: 13 Ocak 2012 Cuma

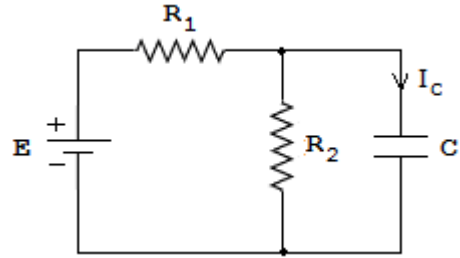
Süre: 120 dakika

1. x^2 ile $\cos(x)$ fonksiyonlarının koordinat düzleminin I. bölgesindeki kesişme açısını, ikiye bölme yöntemini kullanarak $\varepsilon = 10^{-2}$ hatası ile hesaplayınız. (25p)

İkiye bölme yöntemi: Bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri zıt işaretli olacak şekilde bir $[a, b]$ aralığı seçilerek, aralığın orta noktası $c = (a + b)/2$ hesaplanır ve $f(c)$ 'nin işaretine göre yeni iterasyon aralığı $[a, c]$ ya da $[c, b]$ olarak belirlenir.

2. Şekilde gösterilen elektrik devresine $E = 30\text{ V}$ DC gerilim uygulanıyor ve C kondansatöründen akım (I_C) 2 sn aralıklarla ölçülerek aşağıdaki tablo hazırlanıyor.

$t(\text{sn})$	0	2	4	6	8	10
$I_C(\text{mA})$	200	74	27	10	4	0



$R_2 = 300\Omega$ olduğuna göre aşağıda verilen yöntem-

lerden uygun olanını kullanarak R_1 ve C değerlerini hesaplayınız. (25p)

Geri yön farklar formülü (backward difference formula): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi 5 nokta kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{-12f[x_0 - 5h] + 75f[x_0 - 4h] - 200f[x_0 - 3h] + 300f[x_0 - 2h] - 300f[x_0 - h] + 137f[x_0]}{60h}$$

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3}(f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$

3. Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir noktası $A(x, y)$ 'den çizilen teğet doğrusunun x eksenini kestiği nokta $T(a, 0)$ ve orijin noktası $O(0, 0)$ arasında $|OT| = |AT|$ ilişkisi bulunmaktadır. $f(0) = 1$ ve $h = 1$ olmak üzere $x = 3$ için oluşturulacak AOT üçgeninin alanını Euler yöntemi ile hesaplayınız. (25p)

Euler yöntemi: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y(0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

4. $f(x) = e^{\sin(x)}$ bir fonksiyon ve I birim matris olmak üzere $f(I)$ matrisini sonlu sayıda eleman kullanarak hesaplayınız. (25p)

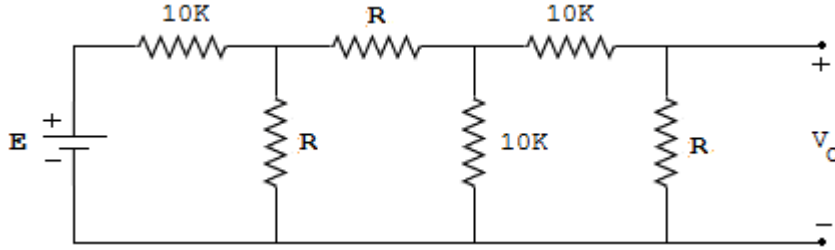


1. Matematik sabiti Pi ($\pi = 3.14159265 \dots$) sayısını kiriş yöntemini kullanarak $\varepsilon = 10^{-4}$ mutlak hatasıyla hesaplayınız. (25p)

Kiriş yöntemi (Regula falsi method): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında bulunan kökünü iterasyon yardımıyla aralığı küçülterek hesaplama yöntemidir. Aşağıdaki genel iterasyon ifadesi ile bir c noktası ($a < c < b$) belirlenerek $[a, b]$ aralığı $[a, c]$ yada $[c, b]$ aralığına küçültülür. $f(a)$ ve $f(b)$ karşıt işaretli değerler üretirler.

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

2. Aşağıda verilen elektrik devresinde V_o çıkış gerilimi en yüksek yapacak R değerini Cramer kuralı ile hesaplayınız. (25p)



Cramer kuralı: Bir 3. dereceden $AX = B$ denklem sistemi, $\det(A) \neq 0$ olmak üzere, Cramer kuralı ile aşağıdaki gibi çözülür.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ ise } X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad X_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

3. $f(x^2 + x + 1) = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x - 5$ olarak verildiğine göre Newton polinom yaklaşımını kullanarak $f(x)$ fonksiyonunu hesaplayınız. (25p)

Newton polinomu: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona $[x_0, x_n]$ aralığı için Newton yaklaşım polinomu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Burada, a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) katsayıları sonlu farklar tablosu oluşturularak belirlenir.

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında temsil edecek 3. dereceden bir polinomu Hermite yaklaşımı ile hesaplayınız. (25p)

Hermite polinomu: Bir $f(x)$ fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında temsil edecek bir

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ Hermite polinomu}$$

$$f(a) = p(a) \quad f(b) = p(b)$$

$$f'(a) = p'(a) \quad f'(b) = p'(b)$$

denklemleri yardımıyla hesaplanır.



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2012-2013 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı



Tarih: 9 Ocak 2013 Çarşamba

Süre: 120 dakika

1. Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile çözünüz. (25p)

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 = -3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -11$$

$$-5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 11$$

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü $M = [A | B]$ matrisinde A 'nın bulunduğu kısım birim matrise dönüştürülerek gerçekleştirilir.

2. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = \sum_{k=1}^x (ak + b)$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (25p)

x	1	3	5	6	8	10	11	12
y	0	2	17	23	50	78	102	123

En küçük kareler yöntemi:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n

nokta için $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$

biçimindeki bir fonksiyonun katsayı-

ları (c_0, c_1, c_2) yandaki denklem sistemi yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

3. Şekilde gösterilen elektrik devresine $E = 40$ V DC gerilim uygulanıyor ve I_3 akımı 1ms aralıklarla ölçülerek aşağıdaki tablo hazırlanıyor.

$t(ms)$	1	2	3	4	5
$I_3(mA)$	534	342	235	127	85

$R_2 = R_3 = 60\Omega, C = 80\mu F, L = 10mH$ olduğuna

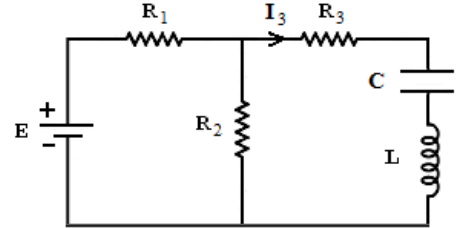
göre aşağıda verilen yöntemler yardımıyla R_1 direncinin değerini hesaplayınız. (25p)

Geri yön farklar formülü (backward difference formula): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi geriden 4 nokta kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$



4. $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi bir x noktasındaki teğetlerinin daima 90° 'lık açı ile kesiştiği iki fonksiyondur. $f(x) = \cos x - x$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında grafiğini Runge Kutta yöntemini kullanarak çiziniz ($h = \pi/3$ ve $g(0) = 0$). (25p)

Runge-Kutta yöntemi: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_k + h, y_k + k_3)$$

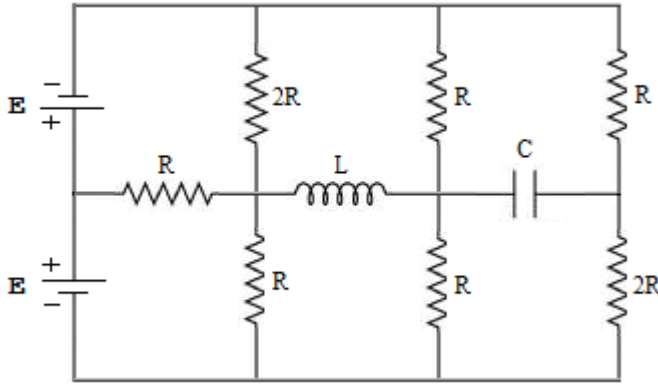


1. $f(x) = e^x(a - \sin x)$ fonksiyonuna ait bir sabit noktanın aynı zamanda teğet noktası olabilmesini sağlayan a değerini kiriş yöntemini kullanarak $\varepsilon = 10^{-2}$ mutlak hatasıyla hesaplayınız. (25p)

Kiriş yöntemi (Regula falsi method): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında bulunan kökünü iterasyon yardımıyla aralığı küçültürerek hesaplama yöntemidir. Aşağıdaki genel iterasyon ifadesi ile bir c noktası ($a < c < b$) belirlenerek $[a, b]$ aralığı $[a, c]$ yada $[c, b]$ aralığına küçültülür. $f(a)$ ve $f(b)$ karşıt işaretli değerler üretirler.

$$c_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

2. Aşağıda verilen elektrik devresinin sürekli durumu için L elemanından geçen akımı ve C elemanının gerilimini Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile hesaplayınız. (25p)



Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi: $AX = B$ biçimindeki bir denklem sisteminin çözümü $M = [A | B]$ matrisinde A 'nın bulunduğu kısım birim matrise dönüştürülerek gerçekleştirilir.

3. E doğru gerilim kaynağı ile beslenen seri bağlı bir RC elektrik devresinde kondansatör üzerindeki gerilimin değişimi $E(1 - e^{-t/RC})$ ifadesi ile verilmektedir. $[0, x]$ zaman aralığında kondansatör uçlarındaki gerilimin doğrusal olarak değiştiği varsayıldığında ortaya çıkacak hata $E/8$ değerini aşmadığına göre x değerini R ve C 'ye bağlı olarak hesaplayınız. (25p)

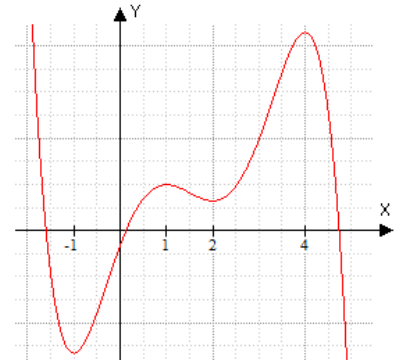
Maksimum hata: Bir $f(x)$ serisinin ilk n terimi alındığında ortaya çıkacak maksimum hata aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$R_n(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} \right|$$

4. Yanda verilen grafikte görüldüğü üzere $-1, 1, 2$ ve 4 noktalarında maksimum veya minimum değerlere sahip bir $f(x)$ fonksiyonunu Lagrange polinom yaklaşımı kullanarak hesaplayınız. Maksimum veya minimum değerlerin hangi büyüklükte olduğu önemli değildir. (25p)

Lagrange yaklaşımı: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona $[x_0, x_n]$ aralığı için bir yaklaşım polinomu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$





Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2013-2014 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı



Tarih: 6 Ocak 2014 Pazartesi

Süre: 120 dakika

1. Tersi $f^{-1}(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında $c_0 + c_1x + c_2x^2$ polinomu ile temsil edilmek isteniyor. Lagrange yaklaşımını kullanarak c_0 , c_1 ve c_2 katsayılarını hesaplayınız. (25p)

Lagrange yaklaşımı: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ noktaları bilinen bir fonksiyona $[x_0, x_n]$ aralığı için bir yaklaşım polinomu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

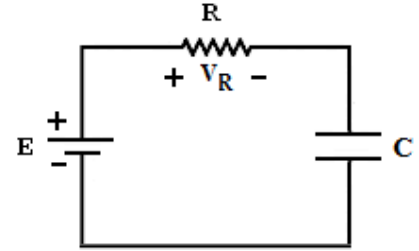
2. $f(x) = x^2$ fonksiyonu, sonsuz sayıda noktası kullanılarak doğrusallaştırılmak isteniyor. En küçük kareler yöntemi ile bu doğrusalı belirleyiniz. (25p)

En küçük kareler yöntemi: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktadan geçen bir $g(x) = c_0k_0(x) + c_1k_1(x) + \dots$ fonksiyonu (c_0, c_1, \dots katsayılar olmak üzere) aşağıdaki denklem sistemi yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

3. Şekilde gösterilen elektrik devresine sabit E gerilimi uygulanıyor ve R üzerindeki potansiyel farkı (V_R) $1ms$ aralıklarla ölçülerek aşağıdaki tablo hazırlanıyor.

$t(ms)$	1	2	3	4	5
$V_R(V)$	43.0	30.8	22.2	15.9	11.3



$C = 30\mu F$ olduğuna göre aşağıda verilen yöntemler yardımıyla R direncinin değerini hesaplayınız. (25p)

Geri yön farklar formülü (backward difference formula): Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi geriden 4 nokta kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f'(x_0) = \frac{3f[x_0 - 4h] - 16f[x_0 - 3h] + 36f[x_0 - 2h] - 48f[x_0 - h] + 25f[x_0]}{12h}$$

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3}(f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$

4. Bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir x noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi noktası $a(x) = x - x^3$ ve $b(x) = x^2$ ile verilmektedir. $f(0) = 1$ olduğuna göre $f(1)$ değerini Taylor serisi metodu ile hesaplayınız ($h = 1$ ve $n = 3$ alınız). (25p)

Taylor serisi metodu: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

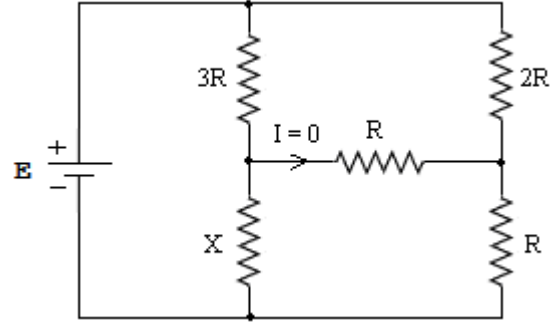
$$y_{k+1} = y_k + d_1h + \frac{d_2}{2!}h^2 + \frac{d_3}{3!}h^3 + \dots + \frac{d_n}{n!}h^n, \quad d_n = y^{(n)}(x_k, y_k)$$



1. $f_1(x) = e^{-x}$ ile $f_2(x) = -x^2$ fonksiyonlarının her ikisine de teğet olan doğrunun denklemini $x_0 = 0$ başlangıç değeri ve basit iterasyon yöntemini kullanarak 10^{-2} mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

Basit iterasyon yöntemi: Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür. $x = x_0$ başlangıç değeri ve $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) iterasyon formülü kullanılarak sabit nokta hesaplanır. Yakınsak bir çözüm için $|g'(x_0)| < 1$ olmalıdır.

2. Şekilde gösterilen elektrik devresine uygulanan E geriliminden bağımsız olarak R direncinden geçen akımın $I = 0$ A olması isteniyor. Bunu sağlayacak X direncinin değerini Cramer yöntemi ile R cinsinden hesaplayınız. (25p)



Cramer kuralı: Bir 3. dereceden $AX = B$ denklem sistemi, $\det(A) \neq 0$ olmak üzere, Cramer kuralı ile aşağıdaki gibi çözülür.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ ise } X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad X_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

3. $f(x) = 1/x$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir ve bunun sonucu olarak iki parçalı bir grafiğe sahiptir. Bu iki parçayı en yakın noktalarından birbirine bağlayan 3. dereceden bir polinomu Hermite yöntemi ile hesaplayınız. (25p)

Hermite polinomu: Bir $f(x)$ fonksiyonunu $[a, b]$ aralığında temsil edecek bir $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ kübik Hermite polinomu

$$f(a) = p(a) \quad f(b) = p(b)$$

$$f'(a) = p'(a) \quad f'(b) = p'(b)$$

denklemleri yardımıyla hesaplanır.

4. Aşağıda verilen noktalar için en küçük kareler yöntemi ile $g(x) = \frac{ax^2}{bx + c}$ biçiminde bir fonksiyon hesaplayınız. (25p)

x	1	3	5	6	8	10	11	12
y	0	2	8	20	38	75	120	180

En küçük kareler yöntemi:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ gibi n noktadan geçen bir

$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ fonksiyonu

(c_0, c_1, \dots katsayılar olmak üzere) yandaki denklem sistemi yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$



Karadeniz Teknik Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
2014-2015 Güz Yarıyılı
Sayısal Çözümleme Final Sınavı



Tarih: 2 Ocak 2014 Cuma

Süre: 120 dakika

1. $f_1(x) = e^x$ fonksiyonunun $f_2(x) = \ln(x)$ fonksiyonuna teğet yapılabilmesi için x eksenini boyunca ne kadar (kaç birim) kaydırılması gerektiğini $x_0 = 1$ başlangıç değerini kullanarak Newton-Raphson yöntemi ve $\varepsilon = 10^{-5}$ mutlak hatası ile hesaplayınız. (25p)

Newton-Raphson yöntemi: Bu yöntemde bir $f(x)$ fonksiyonu için $x = x_0$ başlangıç değeri ile aşağıda verilen iterasyon formülü kullanılarak hesaplama yapılır.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. $y = x^3$ eğrisine çizilebilecek en küçük eğrilik çemberinin denklemini belirleyiniz. (25p)

Eğrilik çemberi ve yarıçapı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $p[x] = \{x, f(x)\}$ noktası için

$$\text{Eğrilik yarıçapı: } r[x] = \frac{(1 + (f'[x])^2)^{3/2}}{f''[x]}$$

Çemberin merkezi: $\vec{c}[x] = p[x] + r[x]\vec{n}[x] = \{a[x], b[x]\}$

$$a[x] = x - \frac{f'[x]}{f''[x]} - \frac{f'[x]^3}{f''[x]} \quad b[x] = f[x] + \frac{1}{f''[x]} + \frac{f'[x]^2}{f''[x]}$$

3. $y^2 + \sqrt{x} = 2$ eğrisinin y eksenine oluşturduğu kapalı alanı taban kabul eden 10 br yüksekliğindeki bir prizmanın hacmini 8 parça üzerinden Simpson kuralını kullanarak hesaplayınız. (25p)

Simpson kuralı: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sayısal integrali, seçilen noktalar arasındaki uzaklık h birim olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \frac{h}{3} (f[a] + f[b] + 2(f[a + 2h] + f[a + 4h] + \dots) + 4(f[a + h] + f[a + 3h] + \dots))$$

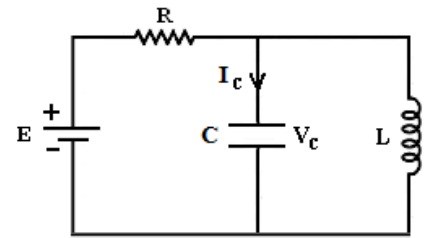
4. Şekilde gösterilen elektrik devresine E sabit gerilimi uygulanıyor. Devre elemanlarını göz önüne alarak, aşağıda a , b , c veya a , b , d şıklarıyla verilen soruları cevaplayınız. (25p)

a) Devrenin V_C 'ye bağlı diferansiyel denklemini çıkarınız.

b) $I_C(0)$ ve $V_C(0)$ başlangıç değerlerini belirleyiniz.

c) $t = h$ ve $t = 2h$ için $I_C(t)$ ve $V_C(t)$ değerlerini Euler yöntemi ile hesaplayınız.

d) $h = 50 \mu sn$ için $E = 44 V$, $R = 100 \Omega$, $C = 2 \mu F$, $L = 100 mH$ elemanlarıyla $I_C(t)$ ve $V_C(t)$ 'nin $t = 100 \mu sn$ 'deki değerlerini hesaplayınız.



Euler yöntemi: $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değerini kullanarak $x_{k+1} = x_k + h$ noktalarında $y(x_k)$ değerleri aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$