

JOHANN WOLFGANG GOETHE - UNIVERSITÄT

BACHELORARBEIT DER MATHEMATIK

BETREUER: PROF. DR. THEOBALD

ZWEITKORREKTOR: T. JÖRGENS

Minimal unzulässige Teilsysteme

von Willie Laszlo Laubenheimer

20. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	MAX FS und minimal unzulässige Teilsysteme	4
2.1	Motivation	4
2.2	Grundlagen	5
3	Das alternative Polyeder	9
3.1	Hauptsatz	9
3.2	Beweis des Hauptsatzes	11
4	Anwendung	14
4.1	Vorzeichenrestriktionen	14
4.2	Das regelmäßige n -Eck	18
4.3	Ausblick	26
5	Anhang	27
6	Literatur	28

1 Einleitung

Minimal unzulässige Teilsysteme sind Bestandteil der Optimierungstheorie und Hilfsmittel in der angewandten Optimierung. Angenommen ein Modellentwickler bestimmt ein System von linearen Ungleichungen ($Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$), welches sich als unzulässig herausstellt. Er möchte nun die minimale Anzahl an Ungleichungen entfernen, um ein maximal zulässiges System zu erhalten. Damit dieses Ziel erreicht werden kann, müssen die minimal unzulässigen Teilsysteme identifiziert werden. Minimal unzulässige Teilsysteme von $Ax \leq b$ sind Teilsysteme, die unzulässig sind, aber durch Entfernen einer beliebigen Ungleichung zulässig werden. Um also ein zulässiges System $A'x \leq b'$ zu erreichen, muss der Modellentwickler aus jedem minimal unzulässigen Teilsystem mindestens eine Ungleichung entfernen. Das Problem der *maximal zulässigen Teilsysteme*, welches wir in Kapitel 2 vorstellen, beschreibt diese Thematik.

Des Weiteren werden wir in Kapitel 2 die mathematischen Grundlagen und Anregungen für die Folgekapitel einführen. In Kapitel 3 stellen wir das 1995 veröffentlichte Theorem von Gleeson und Ryan [1] vor, welches erstmals eine Bijektion der minimal unzulässigen Teilsysteme mit den Ecken eines neu eingeführten alternativen Polyeders zeigt. Gleeson und Ryan verbesserten das Ergebnis von Van Loon [4], der in seiner Arbeit von 1981 minimal unzulässige Teilsysteme über Simplex Tableaus bestimmt. Er fügt dem System Schlupfvariablen hinzu, um das gewünschte Format $Ax + s = b$, $s \geq 0$ zu erhalten. Van Loon identifiziert mit seiner Methode zwar alle minimal unzulässigen Teilsysteme, aber berechnet unter Umständen dieselben mehrmals. Dies konnten Gleeson und Ryan mit ihrem Theorem verbessern. Um die Ecken des alternativen Polyeders aufzuzählen, benötigt man maximal $\binom{m}{n}$ zulässige Basen. Bei Van Loon's Methode benötigt man die Auflistung von $\binom{m+n}{m}$ Basen. In seiner Dissertation ([2]) von 2002 führt M. Pfetsch einen alternativen Beweis des Theorems von Gleeson und Ryan ein, welchen wir ebenfalls im dritten Kapitel vorstellen.

Anhand der zuvor gesammelten Informationen untersuchen wir in Kapitel 4 zuerst Systeme mit Vorzeicheneinschränkungen und führen dann eine Methode zur Analyse von minimal unzulässigen Teilsystemen im regelmäßigen n -Eck ein. Wir untersuchen die Klasse des regelmäßigen n -Ecks und implementieren einen Algorithmus zur Berechnung aller minimal unzulässigen Teilmengen dieser Klasse.

2 MAX FS und minimal unzulässige Teilsysteme

Für die grundlegende Theorie der linearen und ganzzahligen Optimierung empfehlen wir die Lektüre von [5], [6] und [13], da wir uns in dieser Arbeit nicht zu weit vom Thema entfernen wollen. Aus diesem Grund verzichten wir auch auf einige Beweise, geben aber Quellen an, wo diese nachzulesen sind.

Wir betrachten im folgenden Systeme der Form $Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Damit wir solche Systeme mithilfe von Computern bearbeiten können, nehmen wir implizit an, dass die Koeffizienten von A und Koordinaten von b , wenn notwendig, durch ihre endlichen Äquivalente (rational) repräsentiert werden. Des Weiteren kann jedes lineare Un-Gleichungssystem in die obige Form umgeformt werden, und somit erfordern die erzielten Ergebnisse keine Einschränkung auf einen speziellen Fall.

2.1 Motivation

Definition 2.1. Das System $\Sigma : \{Ax \leq b\}$ linearer Ungleichungen heißt unzulässig, falls kein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $Ax \leq b$ erfüllt wird.

Formulieren wir zunächst das Problem der *maximal zulässigen Teilsysteme*.

MAX FS: Gegeben ein unzulässiges System $\Sigma : \{Ax \leq b\}$, finde ein zulässiges Teilsystem von Σ , das so viele Ungleichungen wie möglich enthält.

Wenn man die minimal unzulässigen Teilsysteme von Σ gegeben hat, ist es möglich, das Problem, ein kardinalitätsmaximales zulässiges Teilsystem zu finden (MAX FS), als ein ganzzahliges Überdeckungsproblem zu formulieren.

Sei y_i , $i = 1, \dots, m$ eine Variable, dessen Wert 1 ist, wenn die i -te Ungleichung aus Σ entfernt werden soll und sonst 0. Sei a die Anzahl von minimal unzulässigen Teilsystemen in Σ und S_j , $j = 1, \dots, a$ die Indexmenge der Ungleichungen im j -ten minimal unzulässigen Teilsystem. Dann ist die Lösung des folgenden ganzzahligen Überdeckungsproblems die minimale Anzahl an Ungleichungen, die entfernt werden muss, um ein zulässiges System zu erhalten:

$$\min 1^T y$$

gemäß:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S_j} y_i &\geq 1, \quad j = 1, \dots, a. \\ y_i &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Warum MAX FS so interessant ist, zeigt unter anderem der breit gefächerte Anwendungsbereich, wie zum Beispiel "Telekommunikation, maschinelles Lernen, künstliche neuronale Netzwerke (Teil der künstlichen Intelligenzforschung), Bildverarbeitung, maschinelle

Sprachübersetzung und Computerbiologie.” [2] Eine etwas genauere Beschreibung der aufgeführten Anwendungsgebiete sowie Verbindungen zu anderen Gebieten ist zum Beispiel in [2] vorzufinden. MAX FS ist *NP*-hart [7], aber notwendigerweise möchte man in der Praxis möglichst gute Lösungen mit akzeptablem Rechenaufwand erzielen. Es gibt verschiedene Heuristiken für spezielle Fälle. Die meisten Algorithmen benutzen den ”branch-and-cut”-Ansatz, wie zum Beispiel in [14]. Dieser gilt als bewährte Methode zum optimalen Lösen von hart kombinatorischen Optimierungsproblemen. Da für MAX FS minimal unzulässige Teilsysteme ein elementarer Bestandteil sind, ist es sinnvoll, sie genauer zu betrachten.

2.2 Grundlagen

Sei von nun an $\Sigma : \{Ax \leq b\}$ ein unzulässiges System linearer Ungleichungen, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, sowie $\Sigma' : \{A'x \leq b'\}$ ein Teilsystem von Σ mit $A' \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b' \in \mathbb{R}^k$, $k \leq m$.

Definition 2.1. Ein Teilsystem Σ' von einem unzulässigen System Σ heißt *minimal unzulässiges Teilsystem*, wenn es unzulässig ist und jedes echte Teilsystem von Σ' zulässig ist.

Bemerkung. Mit Größe eines minimal unzulässigen Teilsystems bezeichnen wir die Anzahl an Ungleichungen, die dieses enthält. Also ist, nach obiger Einführung, k die Größe des minimal unzulässigen Teilsystems Σ' .

Definition 2.2. Der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen (Spalten) von A und wird mit $\text{rank}(A)$ bezeichnet.

Theorem 2.3. Wenn das System Σ' ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe k von Σ ist, dann gilt $\text{rank}(A') = k - 1$.

Beweis. zum Beispiel in [12]. □

Da der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $m \geq n$, maximal n ist, hat Theorem 2.3 durch Theorem 3.1 aus Kapitel 3 folgende Konsequenz.

Korollar 2.4. Jedes minimal unzulässige Teilsystem Σ' von Σ hat maximal Größe $n+1$.

Betrachten wir nun zur Veranschaulichung das folgende unzulässige System Σ aus [4].

Beispiel 1.

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x & \leq & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

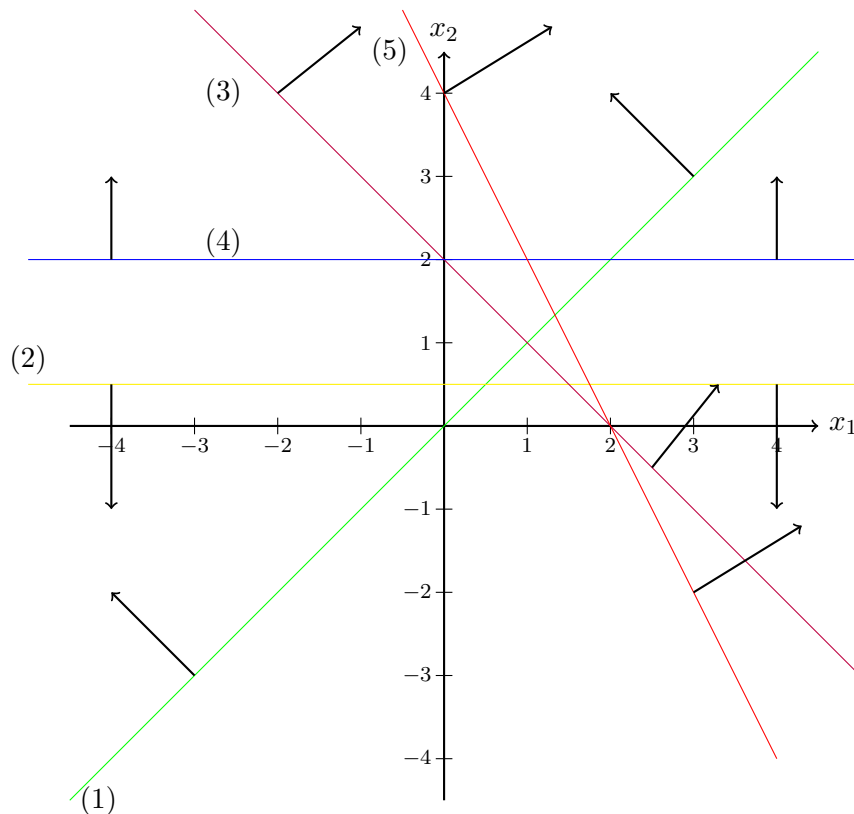


Abbildung 1. Grafische Darstellung des Systems aus Beispiel 1.

Bemerkung. Die Pfeile an den Geraden geben die Richtung des zulässigen Bereichs der Ungleichung an.

Man stellt fest, dass dieses System ohne Gleichung (2) zulässig wäre. Da bei der Definition aber gefordert wird, dass man einem minimal unzulässigen Teilsystem eine beliebige Ungleichung entfernen darf und das resultierende System zulässig sein muss, ist Σ kein minimal unzulässiges Teilsystem.

Die minimal unzulässigen Teilsysteme sind: (2,4), (1,2,5) und (1,2,3). (2,4) ist sehr schnell nachvollzogen. Guckt man sich zum Beispiel (1,2,3) an, so lassen sich die Bedingungen eines minimal unzulässigen Teilsystems schnell nachprüfen. Egal welche der Ungleichungen man entfernt, die anderen beiden bilden immer einen gemeinsamen zulässigen Bereich.

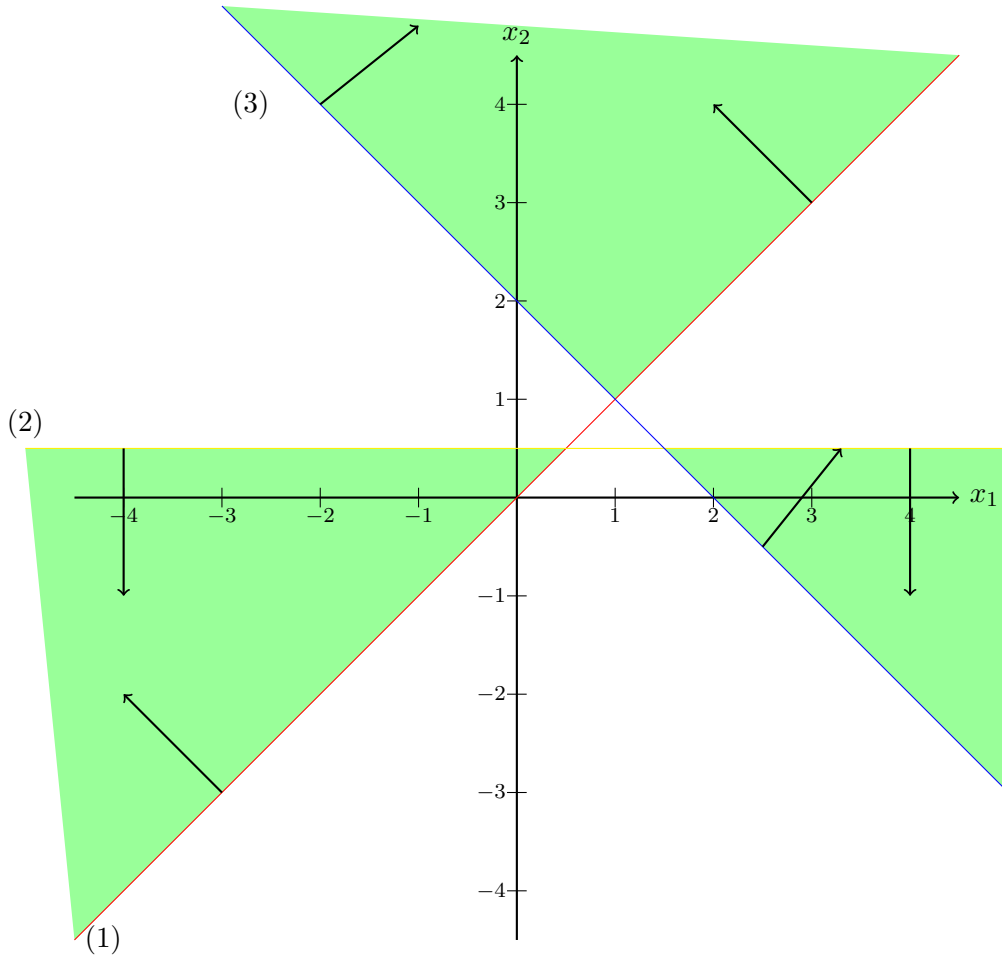


Abbildung 2. Grafische Darstellung der zulässigen Bereiche von (1,2), (1,3) und (2,3).

Bemerkung. Hier sind die grün markierten Flächen die jeweils zulässigen Bereiche der beiden Ungleichungen, die aus dem Entfernen einer beliebigen Ungleichung des minimal unzulässigen Teilsystems (1,2,3) resultieren.

Da in dieser Arbeit unzulässige Systeme durch Σ repräsentiert werden, bezeichnen wir mit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ Systeme der Form Σ , die nicht leer, also zulässig sind ($P \neq \emptyset$). Zudem bezeichnen wir mit $A^=(x)$ die Teilmatrix von P , dessen Zeilen für x aktiv in P sind. Das heißt, für den Punkt $x \in P$ besteht $A^=(x)$ aus den Zeilen von A , sodass $A^=(x)x = b^=(x)$ gilt, wobei $b^=(x)$ aus den entsprechenden Koordinaten von b besteht.

Bemerkung. Somit ist $x \in P \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Ecke von P , wenn $\text{rank}(A^=(x)) = n$ ist.

Definition 2.5. Ein Punkt $x \in P \neq \emptyset$ heißt Extrempunkt von P , wenn keine ungleichen Punkte $x_i \in P$, $x_i \neq x$, für $i = 1, \dots, l$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$ existieren, sodass $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i$.

Definition 2.6. Sei $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt im \mathbb{R}^n . Dann bezeichnet man $\{\lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ als Strahl.

Bemerkung. Zur einfachen Notation bezeichnen wir einen Strahl $\{\lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ lediglich mit y , benennen diesen dann aber explizit als Strahl.

Definition 2.7. Ein Strahl $y \in P \neq \emptyset$ heißt Extremstrahl von P , wenn keine ungleichen Strahlen $y_i \in P, y_i \neq y$ für $i = 1, \dots, l$ und $\lambda_i \geq 0$ existieren, sodass $y = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i$.

Definition 2.8. Ein Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt für alle $c \in C$, dass $\forall \lambda \geq 0 : \{\lambda c \mid \lambda \geq 0\} \in C$.

Definition 2.9. Der Träger eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{supp}(x)$, ist definiert als Indexmenge der Einträge von x , die ungleich Null sind.
Also $\text{supp}(x) = \{i : x_i \neq 0\}$.

3 Das alternative Polyeder

Wie zu Beginn erwähnt, haben Gleeson und Ryan 1995 erstmals eine Bijektion zwischen den minimal unzulässigen Teilsystemen Σ' von dem System Σ und den Ecken eines mit Σ verbundenem Polyeders hergestellt.

3.1 Hauptsatz

Ist ein unzulässiges System Σ gegeben, so berechnet sich das von Gleeson und Ryan eingeführte alternative Polyeder wie folgt:

$$P(\Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0, b^T y \leq -1, y \geq 0\}$$

Theorem 3.1. *Die Indizes der minimal unzulässigen Teilsysteme Σ' von Σ sind genau die Träger der Ecken des alternativen Polyeders $P(\Sigma)$.*

Beweis. Bevor wir dieses Theorem beweisen, benötigen wir noch folgende Lemmata und ein Korollar.

Lemma 3.2. *Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix und b ein reeller m -dimensionaler Vektor. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$;*
2. *es existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \geq 0$, $A^T y = 0$ und $b^T y < 0$.*

Beweis. Um dieses alternative Farkas Lemma zu beweisen, schauen wir uns folgende äquivalente Aussage an:

Das System $Ax \leq b$ hat genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn kein $y \in \mathbb{R}^m$ existiert, das $y \geq 0$, $A^T y = 0$ und $b^T y < 0$ erfüllt. Stelle nun x aus den positiven und negativen Komponenten dar, $x = x^+ + x^-$, also für $x_i = 0$ gilt $x_i^+ = x_i^- = 0$, für $x_i > 0$ gilt $x_i^+ = x_i$, $x_i^- = 0$ und für $x_i < 0$: $x_i^+ = 0$, $x_i^- = |x_i|$. Somit wird folgende Äquivalenz klar.

$$\begin{aligned}
 & \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \\
 \Leftrightarrow & \exists x^+, x^- \geq 0 : Ax^+ - Ax^- \leq b \\
 \Leftrightarrow & \exists x^+, x^-, y \geq 0 : Ax^+ - Ax^- + y = b \\
 \\
 \Leftrightarrow & \exists \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \geq 0 : (A \mid -A \mid I) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} = b
 \end{aligned}$$

Das Anwenden des Farkas Lemma, zum Beispiel in [13] nachzuschlagen, zeigt dieses alternative Farkas Lemma. \square

Lemma 3.3. *Sei $K = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0, y \geq 0\}$ und sei S die Menge der Extremstrahlen $y \in K$, welche $b^T y < 0$ erfüllen. Dann ist S gleich der Menge von Extrempunkten von $P(\Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0, b^T y \leq -1, y \geq 0\}$.*

Beweis. Da $y \in S$ Extremstrahl und $b^T y < 0$, sowie $y \geq 0$, lassen sich alle $y \in S$ durch λ (Definition 2.6) so skalieren, dass $b^T y = -1$, $\forall y \in S$ gilt. Betrachten wir zunächst den von S erzeugten Kegel $K(S) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i, y_1, \dots, y_l \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0\}$. Dass $K(S)$ Definition 2.8 erfüllt, also ein Kegel ist und $y \in S$ in $K(S)$ ebenfalls Definition 2.7 erfüllt, ist in der Konstruktion von $K(S)$ abzulesen. Setze zum Beispiel für $y \in S$ in $K(S)$ $y_1 = y$ und $\lambda_1 = 1$, sowie die restlichen $\lambda_i = 0$. Da y_1 Extremstrahl von K ist und $K(S)$ durch Elemente aus K erzeugt wird, ist y_1 in $K(S)$ ebenfalls extrem. Des Weiteren wird $K(S)$ von den Extremstrahlen von S erzeugt, die $b^T y < 0$ erfüllen, und somit gilt $P(\Sigma) \subseteq K(S)$. Denn für jedes $y \in P(\Sigma)$ gibt es ein Element in $K(S)$, das die gleichen Bedingungen bezüglich A und b erfüllt, und somit auch $y \in K(S)$.

Wir zeigen nun, dass die Extremstrahlen von $K(S)$ genau die Extrempunkte von $P(\Sigma)$ sind, denn nach obigen Feststellungen ist dies zur Aussage von Lemma 3.3 äquivalent. Bemerke, dass wir die Extremstrahlen y von $K(S)$ so skalieren können, dass $b^T y = -1$ gilt. Sei $y \in K(S)$ Extremstrahl, aber angenommen y sei kein Extrempunkt von $P(\Sigma)$. Also lässt sich y in $P(\Sigma)$ als Konvexkombination von Punkten aus $P(\Sigma)$ darstellen, $y = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i$, $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $y_i \in P(\Sigma)$, $y \neq y_i$, $i = 1, \dots, l$. Da aber $P(\Sigma) \subseteq K(S)$ gilt, ist y als nichttriviale Kombination von Punkten aus $K(S)$ dargestellt worden, und das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass y Extremstrahl in $K(S)$ ist. Also ist y Extrempunkt in $P(\Sigma)$. Sei nun y Extrempunkt von $P(\Sigma)$. Angenommen y sei kein Extremstrahl von $K(S)$. Somit existieren $y_i \in K(S)$, $y \neq y_i$, $i = 1, \dots, l$ und $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, sodass $y = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i$. Da alle $y_i \in K(S)$ gilt $A^T y_i = 0$, sowie $y_i \geq 0$. Insbesondere können wir die Elemente von $K(S)$ durch λ so skalieren, dass $b^T y_i = -1$. Also sind alle $y_i \in P(\Sigma)$, $i = 1, \dots, l$. Nach obiger Annahme ist y Extrempunkt von $P(\Sigma)$ und ziehen wir die eben gezeigte Darstellung von y aus Punkten von $K(S)$ hinzu, ergibt sich folgende Gleichung: $-1 = b^T y = b^T \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^l \lambda_i b^T y_i = -\sum_{i=1}^l \lambda_i$. Also gilt $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$, und wir haben den Extrempunkt y von $P(\Sigma)$ als nichttriviale Konvexkombination von Punkten aus $P(\Sigma)$ dargestellt. Somit kann y nicht Extrempunkt in $P(\Sigma)$ sein. Dieser Widerspruch führt dazu, dass y extrem in $K(S)$ sein muss. \square

Korollar 3.4. *Sei Σ' eine minimal unzulässiges Teilsystem der Größe k vom System Σ . Dann gilt:*

$$\exists y' \in \mathbb{R}^k, \text{ sodass } y' > 0, (A')^T y' = 0 \text{ und } (b')^T y' < 0.$$

Beweis. Nach Lemma 3.2 existiert schon ein solches $y' \geq 0$. Also bleibt $y' > 0$ zu zeigen. Angenommen es gilt $y'_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$. Da die transponierte Matrix $(A')^T$ betrachtet wird $[(A')^T y' = 0]$, gleicht dies dem Streichen einer Zeile von A' . Nach Lemma 3.2 ist dann Σ' aber immer noch unzulässig. Das steht im Widerspruch zur Minimalität des Teilsystems Σ' . \square

Theorem 3.5. Wenn $P \neq \emptyset$ und $\text{rank}(A) = n$, dann gilt:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{e \in E} \lambda_e x_e + \sum_{j \in J} \mu_j r_j, \sum_{e \in E} \lambda_e = 1, \lambda_e \geq 0 \text{ für } e \in E, \mu_j \geq 0, \text{ für } j \in J\},$$

wobei $(x_e)_{e \in E}$ die Menge der Extrempunkte von P sind und $(r_j)_{j \in J}$ die Menge der Extremstrahlen von P .

Beweis. (Minkowski-Theorem) siehe zum Beispiel in [3]. □

Nun können wir Theorem 3.1 beweisen.

3.2 Beweis des Hauptsatzes

Im folgenden Beweis stellen wir die Beweise von Gleeson und Ryan aus [1] und von M. Pfetsch aus [2] vor. Einige Teile des folgenden Beweises sind mit (1) und (2) gekennzeichnet. Steht zu Beginn eines Absatzes (1), so ist der ganze Absatz der Vorgehensweise von Gleeson und Ryan zuzuordnen und analog mit (2) M. Pfetsch. Nicht gekennzeichnete Absätze sind Vorgehensweisen, die in beiden Beweisen analog vorzufinden sind. Zum besseren Verständnis empfehlen wir zuerst einheitlich einer Kennzeichnung zu folgen.

Beweis von Theorem 3.1. Betrachten wir zuerst ein minimal unzulässiges Teilsystem Σ' der Größe k von Σ . Durch Vertauschen der Zeilen i und j von A und Koordinate i und j von b aus Σ , mit $i \neq j$ resultiert das gleiche System Σ , denn es wurden lediglich die i -te und j -te Bedingung vertauscht und nicht geändert. Somit können wir annehmen, dass Σ' aus den ersten k Zeilen von Σ besteht. Nach Korollar 3.4 existiert ein $y' \in \mathbb{R}^k$, mit $y' > 0$, für das $(A')^T y' = 0$ und $(b')^T y' < 0$, mit $A' \in \mathbb{R}^{k \times n}$ und $b' \in \mathbb{R}^k$ gilt. Also indexiert der Träger von $y = (y', 0) \in \mathbb{R}^m$ das minimal unzulässige Teilsystem Σ' .

(1) Nach Lemma 3.3 reicht es nun zu zeigen, dass y ein Extremstrahl von $K = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y = 0, y \geq 0\}$ mit $b^T y < 0$ existiert, der Σ' indexiert. Dass $y \in K$ und $b^T y < 0$ gilt, ist nach Konstruktion von $y = (y', 0)$ offensichtlich. Nehmen wir an, dass y kein Extremstrahl von K ist, dann lässt sich y als Positivkombination von Elementen $y_i \in K$, $y \neq y_i, i = 1, \dots, L$ darstellen. Da jeder Extremstrahl von K nicht durch eine Positivkombination anderer, ungleicher Elemente von K dargestellt werden kann, können wir annehmen, dass alle y_i Extremstrahlen von K sind. Elemente, die kein Extremstrahl sind, können durch andere Elemente dargestellt werden. Führen wir das immer weiter, so kommen wir zum obigen Ergebnis. Des Weiteren ist $b^T y < 0$, und somit gilt dies auch für mindestens ein y_i , zum Beispiel für y_1 . Also $y = \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i, \lambda_i > 0, y_i \in K, y \neq y_i, i = 1, \dots, l$, wobei $|l| \leq |L|$ und mit den eben beschriebenen Eigenschaften. Außerdem ist $\lambda_i > 0$, da wir Extremstrahlen y_j mit $\lambda_j = 0$ in dieser Darstellung außer acht lassen können.

(2) Wir möchten nun zeigen, dass eine Ecke von $P(\Sigma)$ existiert, die das gleiche minimal unzulässige Teilsystem Σ' indexiert, also dessen Träger genau $\{1, \dots, k\}$ ist. Da durch Multiplikation des Vektors y mit einem Skalar echt größer Null die oben beschriebenen Eigenschaften nicht verändert werden, können wir annehmen, dass O.B.d.A $b^T y = -1$ gilt und somit $y \in P(\Sigma)$. Also lässt sich y als Konvexkombination von Extrempunkten und

Positivkombination von Extremstrahlen von $P(\Sigma)$ darstellen. Die Bedingungen von Theorem 3.5 sind durch Lemma 3.2 und somit auch die Existenz einer Ecke nach Konstruktion von $P(\Sigma)$ erfüllt, aber es muss kein Extremstrahl in $P(\Sigma)$ existieren.

$$y = \sum_{i=1}^e \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^t \mu_j r_j, \sum_{i=1}^e \lambda_i, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, e, \mu_j > 0, r_j \geq 0, j = 1, \dots, t$$

Des Weiteren stellen wir ein spezielles $y \in P(\Sigma)$ dar und nicht ganz $P(\Sigma)$, also genügen alle $\mu_j, \lambda_i > 0$.

Nun haben wir in (1)/(2) y aus Extremstrahlen von K [in (1)] / y aus Extrempunkten und Extremstrahlen von $P(\Sigma)$ [in (2)] dargestellt. Die folgende Feststellung gilt in beiden Teilen analog. Da in beiden Darstellungen von y für alle $i = 1, \dots, l/e$, $y_i \geq 0$ und $\lambda_i > 0$ gilt, muss auch für alle $\text{supp}(y_i) \subset \text{supp}(y)$ gelten. Weiterhin muss sogar $\text{supp}(y_i) = \text{supp}(y)$ sein, denn andernfalls kommt man analog zum Vorgehen in Beweis von Korollar 3.4, angewandt auf die obigen Darstellungen von y , zum Widerspruch zur Minimalität von Σ' , denn Lemma 3.2 muss für beide Seiten der Gleichung gelten.

(1) Somit gilt für den Extremstrahl y_1 : $\text{supp}(y_1) = \{1, \dots, k\}$. Ist unsere Annahme, y sei kein Extremstrahl von K , falsch, so gilt Theorem 3.1 mit Lemma 3.3 direkt.

(2) Somit gilt für den Extrempunkt y_1 : $\text{supp}(y_1) = \{1, \dots, k\}$, und da jeder Extrempunkt eine Ecke ist, und umgekehrt, indexiert eine Ecke von $P(\Sigma)$ das minimal unzulässige Teilsystem Σ' . Sei nun y eine Ecke von $P(\Sigma)$. Für $y \in P(\Sigma)$ gilt: $A^T y = 0, b^T y \leq -1$ und $y \geq 0$. Somit ist nach Lemma 3.2 das von $\text{supp}(y)$ indexierte Teilsystem Σ' von Σ unzulässig.

(1) Durch Lemma 3.3 bleibt noch zu zeigen, dass der Träger eines Extremstrahles von K , der $b^T y < 0$ erfüllt, ein minimal unzulässiges Teilsystem indexiert. Sei dazu y Extremstrahl von K und $b^T y < 0$. Da nun $A^T y = 0, b^T y < 0$ und $y \geq 0$, ist das vom Träger von y indexierte Teilsystem Σ' von Σ durch Lemma 3.2 unzulässig.

Angenommen Σ' ist nicht minimal unzulässiges Teilsystem von Σ . Da Σ' unzulässig, aber nicht minimal unzulässig ist, existiert ein minimal unzulässiges Teilsystem Σ'' von Σ , das ein echtes Teilsystem von Σ' ist. Somit hat Σ'' mindestens eine Ungleichung weniger als Σ' . Durch das eben Gezeigte wissen wir, dass

- (1) ein Extremstrahl $u \in K$ mit $b^T u < 0$ existiert, dessen Träger die Reihen von Σ'' indexiert. Da $\Sigma'' \subset \Sigma'$ gilt $\text{supp}(u) \subset \text{supp}(y)$ und weil u ein Strahl ist, können wir ihn so skalieren, dass $y - u \geq 0$ gilt. Außerdem hat $y - u$ mindestens einen Eintrag echt größer Null, da $\text{supp}(u) \subset \text{supp}(y)$. Zudem ist $A^T(y - u) = A^T y - A^T u = 0$ und $b^T(y - u) = b^T y - b^T u < 0$, also ist $y - u \in K$. Folglich ist y als nicht triviale Kombination von zwei Elementen aus K darstellbar: $y = \lambda_1(y - u) + \lambda_2(u)$, mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und da $\text{supp}(u) \subset \text{supp}(y)$ gilt ist $y \neq y - u \neq u$ und $y \neq u$. Also kann y nicht extrem in K sein.
- (2) eine Ecke $x \in P(\Sigma)$ existiert, deren Träger die Reihen von Σ'' indexiert. Dann gilt $\text{supp}(x) \subset \text{supp}(y)$, und x erfüllt mindestens eine Ungleichung mehr mit Gleichheit als y . Da x eine Ecke von $P(\Sigma)$ ist, kann also y keine Ecke von $P(\Sigma)$ sein.

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, und somit ist Σ' minimal unzulässiges Teilsystem von Σ . □

Beispiel 2. Wir wenden nun Theorem 3.1 auf das System Σ aus Beispiel 1 an. Zuerst stellen wir das alternative Polyeder auf:

$P(\Sigma) = \{y \in \mathbb{Q}^5 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} y = 0, (0 \ 1 \ -2 \ -2 \ -4)y \leq -1, y \geq 0\}$. Die

Ecken von $P(\Sigma)$ sind: $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach Theorem 3.1 indexieren

nun die Träger von y_1, y_2 und y_3 die minimal unzulässigen Teilsysteme. Also sind $\text{supp } y_1 = (2, 4) = \Sigma'_1$, $\text{supp } y_2 = (1, 2, 5) = \Sigma'_2$ und $\text{supp } y_3 = (1, 2, 3) = \Sigma'_3$ die minimal unzulässigen Teilsysteme von Σ .

4 Anwendung

4.1 Vorzeichenrestriktionen

Wir haben bis jetzt Systeme der Form $\Sigma = \{Ax \leq b\}$ und das zugehörige alternative Polyeder $P(\Sigma) = \{y' \in \mathbb{R}^m \mid A^T y' = 0, b^T y' \leq -1, y' \geq 0\}$ betrachtet. Nun möchten wir Systeme der Form $\Delta = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$ genauer betrachten. Zuerst überführen wir es in die Form von Σ : $\Delta^* = \{A^* x \leq b^*\}$, mit $A^* = \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}$ und $b^* = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$, wobei I die $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Also ist das alternative Polyeder zu Δ^* :

$$\begin{aligned} P(\Delta^*) &= \{y \in \mathbb{R}^{m^*} \mid (A^*)^T y = 0, (b^*)^T y \leq -1, y \geq 0\} \\ &= \{(y^*, y^{**}) \in \mathbb{R}^{m^*} \mid A^T y^* + (-I)^T y^{**} = 0, b^T y^* \leq -1, y^*, y^{**} \geq 0\}, \end{aligned}$$

mit $m^* = m + n$, $y = (y^*, y^{**})$, $y^* \in \mathbb{R}^m$ und $y^{**} \in \mathbb{R}^n$.

Satz 4.1. *Die Ecken von $P(\Delta^*)$ indexieren die minimal unzulässigen Teilsysteme in folgendem Sinne:*

1. *Sind die letzten n Koordinaten einer Ecke 0, dann liegt die Unzulässigkeit bereits bezüglich der Zeilen von A (des Systems Σ) vor.*
2. *Sind die letzten n Koordinaten einer Ecke ungleich 0, dann existiert maximal eine weitere Koordinate der Ecke y , die ungleich 0 ist, und y indexiert ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe 1 in Δ .*

Beweis. Zu 1: Da auch für Δ^* das Theorem 3.1 gilt, indexieren die Ecken von $P(\Delta^*)$ die minimal unzulässigen Teilsysteme von Δ^* . Das Einsetzen von $y = (y^*, 0)$ in $P(\Delta^*)$ zeigt Aussage 1.

Zu 2: Nach Korollar 2.4 hat jedes minimal unzulässige Teilsystem in Δ die maximale Größe $n + 1$. Nun hat y schon n Koordinaten ungleich 0. Also kann maximal eine weitere Koordinate von y ungleich 0 sein. Nehmen wir an, dass ein $y_i^* \in y$ mit $y_i^* \neq 0$ existiert, dann ist die Bedingung i zusammen mit allen Einschränkungen auf x unzulässig. Da das Teilsystem weiterhin ein minimal unzulässiges Teilsystem ist, wird es (unter anderem) durch Entfernen der Bedingung i zulässig. Somit ist i ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe 1 in Δ . \square

Betrachten wir nun Systeme mit speziellen Vorzeicheneinschränkungen.

Sei Θ ein System wie Σ , allerdings mit $J \leq n$ beliebig eingeschränkten Vorzeichen. Analog zur obigen Konstruktion bilden wir $\Theta^* = \{A^* x \leq b^*\}$, mit

$A^* = \begin{bmatrix} A \\ I^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+J) \times n}$ und $b^* = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+J}$, wobei I^* wie folgt konstruiert wird: die j -te Zeile, $j \in J$, der Einheitsmatrix I wird mit (-1) multipliziert, falls die Einschränkung $x_j \geq 0$.

Somit lässt sich Satz 4.1 wie folgt erweitern.

Satz 4.2. *Die Ecken von $P(\Theta^*)$ indexieren die minimal unzulässigen Teilsysteme in folgendem Sinne:*

1. *Sind die letzten J Koordinaten einer Ecke 0, dann liegt die Unzulässigkeit bereits bezüglich der Zeilen von A (des Systems Σ) vor.*
2. *Sind die letzten J Koordinaten einer Ecke ungleich 0, dann existieren $k \geq 0$, wobei $k + J \leq n + 1$, weitere Koordinaten von y , die ungleich 0 sind. Sie indexieren ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe k in Θ .*

Beweis. 1. Analog zu Beweis von 1. in Satz 4.1

2. Seien die letzten J Koordinaten von der Ecke $y \in P(\Theta^*)$ ungleich 0. Für $k = 0$ wird kein minimal unzulässiges Teilsystem indexiert und $k = n$ ist in Satz 4.1 enthalten. Sei nun $0 < k < n$. Also sind k Koordinaten von y^* ungleich 0. Durch Theorem 3.1 indexiert y nun ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe $k + J$. Entfernen wir von diesem Teilsystem eine beliebige Bedingung i , O.B.d.A. $i \in k$, so wird das resultierende Teilsystem zulässig. Analog zum letzten Teil des Beweises von 2. in Satz 4.1 folgt, dass k ein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ ist. \square

Der Fall, dass genau eine Einschränkung auf x zusammen mit genau einer Bedingung durch $P(\Theta^*)$ indexiert wird, muss gesondert betrachtet werden.

Satz 4.3. *Sei eine Ecke $y \in P(\Theta^*)$ wie folgt: Für genau ein $j \in J$ gilt $y_j \neq 0$ und für genau ein $i \in m$ gilt $y_i \neq 0$. Des Weiteren seien $y_l = 0, \forall l \in (m + J)$ mit $i \neq l \neq j$. Dann ist die Bedingung i ein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ .*

Beweis. Nach obiger Konstruktion und mit Theorem 3.1 indexiert die Ecke y ein minimal unzulässiges Teilsystem (i, j) von Θ^* . Da wir in Θ alle J Einschränkungen betrachten, ist das Teilsystem i in Θ unzulässig. Durch Entfernen von i , betrachten wir in Θ nur die Einschränkungen auf x , welche den trivialen zulässigen Bereich ergeben. Somit ist i ein minimal unzulässiges Teilsystem von dem ursprünglichen System Θ . \square

Durch folgenden Satz identifizieren wir die minimal unzulässigen Teilsysteme, die unter anderem aus dem System der Form Σ , also ohne Vorzeicheneinschränkung bekannt sind und in Θ ebenfalls minimal unzulässig sind.

Satz 4.4. *Seien die letzten J Koordinaten einer Ecke $y \in P(\Theta^*)$ null und sei L die Indexmenge der Koordinaten, die ungleich Null sind ($|L| \leq m$). Weiterhin sei $I \neq L$ die Indexmenge eines minimal unzulässigen Teilsystems der Größe k von Θ . Dann gilt: Existiert mindestens ein $r \subsetneq L$ mit $|r| = k$, sodass $r = I$, dann wird durch y kein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ indexiert. Existiert kein solches r für die Indexmengen I der minimal unzulässigen Teilsysteme von Θ , dann indexiert y ein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ .*

Beweis. Nach Theorem 3.1 indexiert y ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe $|L|$ in Θ^* . Existiert nun eine Teilmenge $r \subsetneq L$ mit $|r| = k$, sodass $r = I$, dann ist dies ein Widerspruch zur Minimalität von dem von y indexierten Teilsystem. Existiert aber keine solche Teilmenge r , für alle Indexmengen I der minimal unzulässigen Teilsysteme von Θ , dann ist kein echtes Teilsystem des von y indexierten Systems bezüglich der Einschränkung unzulässig, und somit ist das von y indexierte System minimal unzulässiges Teilsystem von Θ . \square

Bemerkung. Satz 4.4 setzt die Kenntnis aller minimal unzulässigen Teilsysteme, die durch Ecken von $P(\Theta^*)$, welche nicht $y_j = 0, \forall j \in J$ erfüllen, voraus. Schauen wir uns nun die erzielten Ergebnisse anhand des Systems Σ aus Beispiel 1 an, wobei wir Satz 4.4 wegen der Übersichtlichkeit des Systems Σ trotzdem anwenden können.

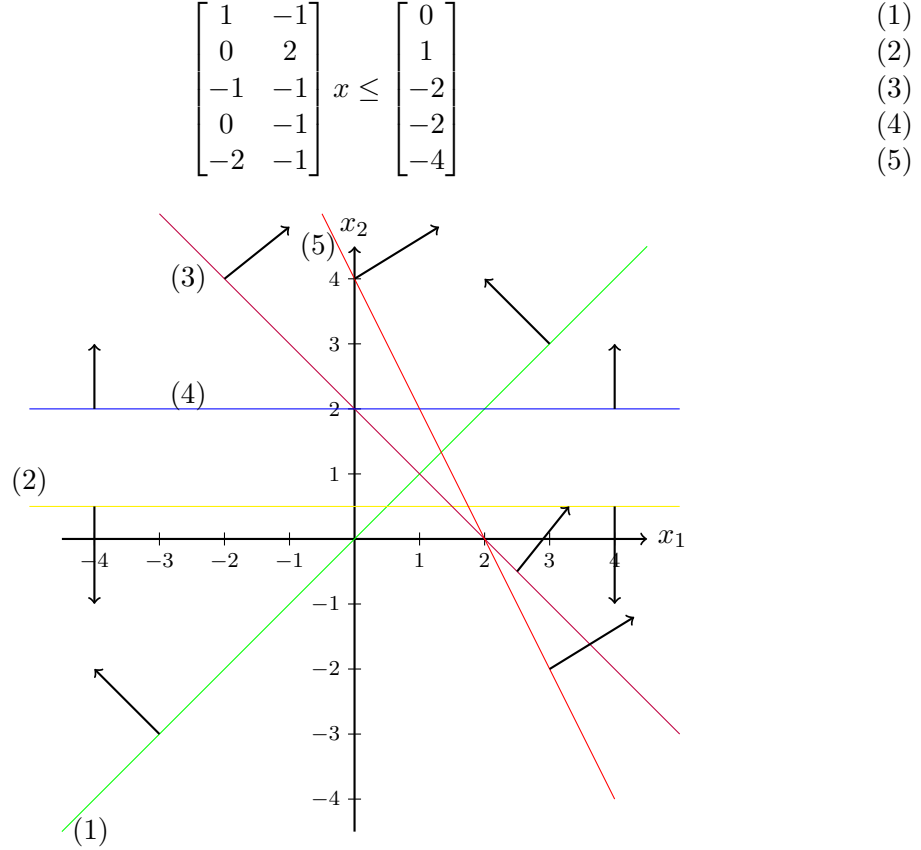


Abbildung 3. Analog zu Abbildung 1.

Beispiel 3. Zuerst untersuchen wir das System $\Delta_1 = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$. Die indexierten minimal unzulässigen Teilsysteme von $P(\Delta_1^*)$ sind folgende: (2,4), (1,2,5), (1,2,3). Somit ist jede Ecke von $P(\Delta_1^*)$ an Koordinate 6 und 7 gleich 0, und nach Satz 4.1 gilt die Unzulässigkeit bereits in $\Sigma_1 = \{Ax \leq b\}$. Nach Satz 4.4 sind (2,4), (1,2,5) und (1,2,3) auch minimal unzulässige Teilsysteme von Δ_1 .

Betrachten wir nun das System $\Delta_2 = \{Ax \leq b, x \leq 0\}$. A^* aus Δ_2^* besteht nun nicht aus $-I$ in den letzten n Zeilen, sondern aus I . Somit indexieren die Ecken von $P(\Delta_2^*)$ folgende minimal unzulässige Teilsysteme: (2,4), (1,2,5), (1,2,3), (4,7), (1,5,7), (1,3,7), (3,6,7), (2,3,6), (5,6,7), (2,5,6).

Nach Satz 4.1 gilt die Unzulässigkeit von (2,4), (1,2,5) und (1,2,3) bereits in Σ_1 . Durch Satz 4.2 und Satz 4.3 sind (3), (4) und (5) minimal unzulässige Teilsysteme des von Δ_2 . Nach Satz 4.4 existiert kein weiteres minimal unzulässiges Teilsystem von Δ_2 .

Sei nun $\Theta_1 = \{Ax \leq b, x_2 \leq 0\}$. $P(\Theta_1^*)$ indexiert $(2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,3)$, $(4,6)$, $(1,5,6)$ und $(1,3,6)$. Nach Satz 4.2-4.4 sind die minimal unzulässigen Teilsysteme von Θ_1 (4) , $(1,3)$ und $(1,5)$, denn es existieren Teilsysteme von den indexierten Ecken mit $y_6 = 0$, die in den von Satz 4.2 und 4.3 identifizierten minimal unzulässigen Teilmengen von Θ_1 enthalten sind. (Satz 4.4).

Für $\Theta_2 = \{Ax \leq b, x_1 \leq 0\}$ werden $(2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,3)$, $(2,5,6)$ und $(2,3,6)$ indexiert. Somit sind die minimal unzulässigen Teilsysteme von Θ_2 $(2,5)$, $(2,4)$ und $(2,3)$, denn auch hier sind Teilsysteme von den indexierten Ecken mit $y_6 = 0$ analog zum vorigen Beispiel in anderen, bereits indexierten, minimal unzulässigen Teilsystemen von Θ_2 enthalten.

Nun untersuchen wir zwei unterschiedliche Einschränkungen. Sei $\Theta_3 = \{Ax \leq b, x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$. $(2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,3)$, $(4,7)$, $(1,5,7)$ und $(1,3,7)$ werden von $P(\Theta_3^*)$ indexiert. Somit hat Θ_3 nur ein minimal unzulässiges Teilsystem und zwar (4) [wegen $(4,7)$]. $(2,4)$ ist wegen Satz 4.4 kein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ_3 . Da $(1,5)$ als Teilsystem von $(1,2,5)$ mit Bedingung (7) wegen $(1,5,7)$ unzulässig ist, indexiert $(1,2,5)$ kein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ_3 (und $(1,3)$ analog). Bedingung (1) hat mit der Einschränkung lediglich den Punkt $(0,0)$ gemeinsam. Würde die Bedingung leicht oberhalb des Nullpunktes verlaufen, wäre es ebenfalls ein minimal unzulässiges Teilsystem von Θ_3 .

Wir sehen, dass die Sätze 4.1 - 4.4 nicht alle möglichen Szenarien abdecken und verweisen auf den Ausblick. Hiermit schließen wir dieses Unterkapitel ab.

4.2 Das regelmäßige n -Eck

Betrachten wir nun eine etwas allgemeinere geometrische Form, das regelmäßige n -Eck.

Definition 4.5. Ein regelmäßiges n -Eck im \mathbb{R}^2 hat n gleich lange Seiten $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ und die Innenwinkel $w_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, der n Seiten sind gleich groß (sowie die Winkel zweier benachbarter Seiten).

Bemerkung. Der Innenwinkel bezeichnet hier den Winkel zwischen den Orthogonalen (vom Mittelpunkt ausgehend und orthogonal zur Seite) zweier benachbarter Seiten. O.B.d.A. setzen wir den Mittelpunkt in den Ursprung. Es gilt $w_i = 360/n$.

Diese Form lässt sich ebenfalls als ein System $Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^2$ interpretieren. Betrachten wir eine Seite aus der Definition als Gleichung, so lässt sich daraus auch eine Ungleichung des Systems $Ax \leq b$ bilden. Wir nehmen an, dass der zulässige Bereich jeder Bedingung, vom Mittelpunkt des n -Ecks ausgehend, nach außen gerichtet ist. Jede Seite aus der obigen Definition kann resultierend als Strecke zwischen den Schnittpunkten dreier Gleichungen aus $Ax = b$ gewonnen werden.

Somit können wir ein regelmäßiges n -Eck als unzulässiges System in der bekannten Form Σ betrachten und untersuchen.

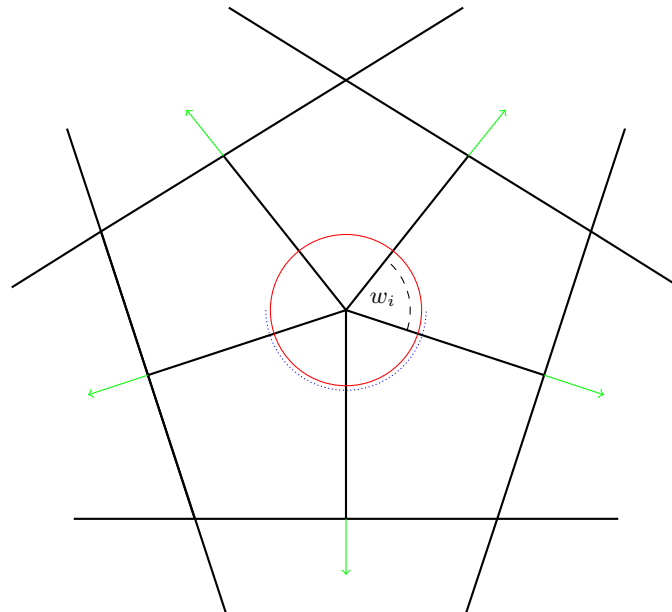


Abbildung 4. $n = 5$ ($w_i = 72^\circ$)

Hier zeigen die grünen Pfeile die zulässige Richtung der jeweiligen Ungleichung. Die blauen Punkte sind eine Kennzeichnung der roten Sphäre. Im Folgenden wollen wir auf die rot eingezeichnete Sphäre und die Kennzeichnung genauer eingehen und nehmen für ihren Radius O.B.d.A. $r = 1$ an.

Definition 4.6. Kennzeichnet man, vom Schnittpunkt der Orthogonalen mit der Sphäre ausgehend, ein Intervall auf der Sphäre in beide Richtungen $\pi/2$, so lässt sich der zulässige Bereich der zugehörigen Ungleichung durch die Kennzeichnung des Intervalls der Größe π auf der Sphäre ablesen. Kennzeichnet man die Sphäre für alle Ungleichungen im System, so nennen wir die daraus resultierende gekennzeichnete Sphäre die Sphäre der zulässigen Bereiche.

Bemerkung. Wichtig für diese Definition ist, dass der Mittelpunkt der Sphäre in einem für alle Bedingungen unzulässigen Punkt liegt. Zudem entsteht die Sphäre nicht durch die Kennzeichnung, sondern wir setzen die Sphäre fest in den Raum (Mittelpunkt im Ursprung). Dann kennzeichnen wir die zulässigen Bereiche auf der Sphäre. Die Wahl der Kennzeichnung ist dabei beliebig (Farben, unterschiedliche Linienarten, Nummerierung der Linienarten, etc.). Zur Vereinfachung der Notation benennen wir im Folgenden die Sphäre der zulässigen Bereiche lediglich mit Sphäre.

Betrachtet man nun die Sphäre eines Systems Σ , $x \in \mathbb{R}^2$, so lassen sich einige uns bekannte Zustände darauf ablesen.

Definition 4.7. Ein System der Größe k ist zulässig, falls auf der zugehörigen Sphäre mindestens ein Punkt existiert, der von k zulässigen Bereichen überdeckt wird. Das ist genau dann der Fall, wenn es mindestens einen Punkt gibt, der nicht gekennzeichnet beziehungsweise unbelegt ist.

Somit lassen sich auch Aussagen über die Unzulässigkeit herleiten.

Definition 4.8. Ein System der Größe k ist unzulässig, falls kein Punkt auf der Sphäre existiert, der von k gekennzeichneten Bereichen überdeckt wird. Das ist genau dann der Fall, wenn kein Punkt auf der Sphäre existiert, der nicht gekennzeichnet beziehungsweise unbelegt ist.

Definition 4.9. Ein unzulässiges System der Größe k ist ein minimal unzulässiges Teilsystem, wenn für jeden gekennzeichneten Bereich auf der Sphäre mindestens ein Punkt existiert, den genau $k - 1$ zulässige Bereiche überdecken, also genau dann, wenn durch Entfernen eines beliebigen zulässigen Bereiches ein freier/nicht überdeckter Punkt auf der Sphäre entsteht.

Betrachten wir nun noch einmal die Innenwinkel, für die gilt: $w_i = 360/n \Leftrightarrow nw_i = 360 \Leftrightarrow \frac{n}{2}w_i = 180$. Für gerade n ist $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl und für ungerade n nicht. Das motiviert folgende Sätze.

Satz 4.10. Für gerade n existieren im regelmäßigen n -Eck minimal unzulässige Teilsysteme der Größe 2. Die Anzahl der minimal unzulässigen Teilsysteme mit Größe 2 ist genau $\frac{n}{2}$.

Beweis. Wie oben angemerkt gilt für die Innenwinkel: $\frac{n}{2}w_i = 180$. Da $\frac{n}{2}$ für gerade n eine ganze Zahl ist, existieren also zwei Ungleichungen, deren Orthogonalen durch den Mittelpunkt des n -Ecks im 180° Winkel zueinander stehen. Da jeder Innenwinkel w_i gleich groß ist, folgt daraus, dass die an w_i beiden anliegenden Ungleichungen jeweils

gegenüberliegende Ungleichungen mit derselben Eigenschaft haben. Führt man dies fort, folgt schließlich, dass für jede Ungleichung des Systems eine gegenüberliegende Ungleichung mit derselben (180°) Eigenschaft existiert. Zeichnet man nun von einer beliebigen Ungleichung den zulässigen Bereich auf der Sphäre ein, folgt durch diese Eigenschaft, dass immer eine Ungleichung existiert, sodass durch Hinzufügen dieser Ungleichung auf der Sphäre die komplette Sphäre abgedeckt ist, es aber keine Überschneidungen gibt. Durch Definition 4.8 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Dies ist möglich, weil jede Ungleichung auf der Sphäre genau π kennzeichnet, und bei zwei genau gegenüberliegenden Ungleichungen wird der Umfang von 2π genau abgedeckt. Somit sind die Bedingungen für ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe $k = 2$ erfüllt. Es gibt nur solche minimal unzulässigen Teilsysteme der Größe 2.

Satz 4.11. *Für ungerade n existieren keine minimal unzulässigen Teilsysteme der Größe 2.*

Beweis. Für ungerade n ist $\frac{n}{2}$ keine ganze Zahl. Es gibt somit keine ganzzahlige Kombination der Innenwinkel zu 180° . Also existieren auch keine zwei Orthogonalen von zwei Ungleichungen vom Mittelpunkt des n -Ecks ausgehend, die im 180° Winkel zueinander stehen, und es existiert bei beliebigem ungeradem n und zwei beliebigen Ungleichungen aus dem n -Eck resultierenden System auf der Sphäre immer ein freier Punkt. Somit sind für n ungerade nach 4.7 zwei beliebige Ungleichungen immer zulässig. \square

Betrachtet man minimal unzulässige Teilsysteme der Größe 4, stellt man fest, man hat auf der Sphäre, die selber nur den Umfang 2π hat, 4 Intervalle der Größe π zu verteilen, sodass Definition 4.7 nicht eintritt, aber Definition 4.9 eingehalten wird. Da man doppelt soviel π zu verteilen hat als mindestens zum Überdecken der Sphäre benötigt werden, kann folgender Satz motiviert werden.

Satz 4.12. *In dem regelmäßigen n -Eck, wie oben eingeführt, existiert kein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe $k \geq 4$.*

Beweis. Nehmen wir $k = 4$ an. Also versuchen wir 4 Intervalle der Größe π auf der Sphäre der zulässigen Bereiche zu verteilen, sodass für jeden zulässigen Bereich von den Bedingungen 1,2,3 und 4 (diese Nummerierung gilt im Allgemeinen nicht im zugrundeliegenden System Σ) jeweils mindestens 1 Punkt existiert, der von 3 zulässigen Bereichen überdeckt wird. Weiterhin darf kein Punkt auf der Sphäre mit 4 Überdeckungen existieren (\Leftrightarrow es existiert kein nicht überdeckter Punkt). Versuchen wir nun ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe 4 zu konstruieren. Betrachten wir dazu eine beliebige Ungleichung des Systems auf der Sphäre, so gilt für den zulässigen Bereich der zweiten Ungleichung, dass sie sich mit der ersten überdecken muss. Sei die Überdeckung $\varepsilon_1\pi$, mit $0 < \varepsilon_1 < 1$, groß. Also existiert ein Bereich $\varepsilon_1\pi$ lang, der frei ist. Für den dritten zulässigen Bereich gilt nun:

Fall 1. Er überdeckt den freien Bereich $\varepsilon_1\pi$ komplett. Dann ist das System minimal unzulässig und $k = 3$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Fall 2. Er überdeckt den freien Bereich $\varepsilon_1\pi$ gar nicht, damit dann aber den Überdeckungs-

bereich $\varepsilon_1\pi$ komplett. Also müsste der vierte zulässige Bereich den freien Bereich $\varepsilon_1\pi$ komplett überdecken und durch Entfernen von dem vorigen dritten würde kein freier Punkt resultieren, was im Widerspruch zur Minimalität des unzulässigen Systems steht.

Fall 3. Er überdeckt den Überdeckungsbereich $\varepsilon_1\pi$ nur teilweise, sprich $\varepsilon_2\pi$ lang, mit $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Also existiert ein freier Bereich $\varepsilon_2\pi$ lang, den der vierte zulässige Bereich nun komplett abdecken muss. Entweder deckt der vierte zulässige Bereich sogar den ganzen Bereich $\varepsilon_1\pi$ ab, was analog zu Fall 2 zum Widerspruch führt, oder er deckt nur $\varepsilon_2\pi + R$ ab, wobei $0 < R < \varepsilon_1\pi - \varepsilon_2\pi$. Durch Entfernen von dem ersten zulässigen Bereich, also der ersten Ungleichung im Teilsystem, würde auf der Sphäre kein freier Punkt entstehen, und somit wäre das resultierende System nach Definition 4.8 unzulässig. Das steht im Widerspruch zur Minimalität des unzulässigen Teilsystems (Definition 4.9). $\forall k > 4$ kommt man analog zu einem Widerspruch. \square

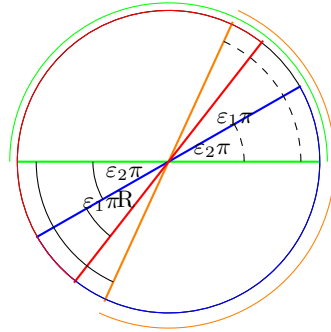


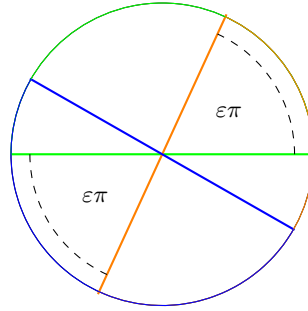
Abbildung 5.

Ein Beispiel für Fall 3, mit grün = 1, orange = 2, blau = 3 und rot = 4.

Die gestrichelten Winkel zeigen überdeckte Bereiche und die durchgezogenen Winkel nicht überdeckte Bereiche. Zum besseren Verständnis haben wir zwei Kennzeichnungen leicht über die Sphäre gesetzt. Mit Satz 4.12 haben wir das allgemeine Korollar 2.4 in unserer speziellen Klasse bewiesen.

Wie im Fall 1 angedeutet existieren für gerade $n \geq 6$ und für ungerade $n \geq 3$ immer minimal unzulässige Teilsysteme der Größe drei. Dies ist dadurch zu begründen, dass 3π für die oben genannten Größen immer gemäß den Definitionen 4.7-4.9 auf der Sphäre mit Umfang 2π zu verteilen sind. Betrachtet man einen festen zulässigen Bereich auf der Sphäre und setzt den zweiten mit einer Überdeckung von $\varepsilon\pi$, $0 < \varepsilon < 1$ fest, so muss der dritte den freien Bereich $\varepsilon\pi$ komplett überdecken. Das solche zulässigen Bereiche für gerade $n \geq 6$ und für ungerade $n \geq 3$ immer existieren, lässt sich über die Innenwinkeleigenschaft $w_i = \frac{360}{n}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ herleiten.

Im Fall $n = 4$ ist in jeder Teilmenge der Größe 3 von den 4 Bedingungen immer ein minimal unzulässiges Teilsystem der Größe 2 enthalten, sodass für gerade n erst ab $n \geq 6$ minimal unzulässige Teilsysteme mit $k = 3$ existieren.

Abbildung 6. $k = 3$

Da die Schnittpunkte der Orthogonalen der drei Bedingungen, die durch den Mittelpunkt des n -Ecks verläuft, mit der Sphäre für minimal unzulässige Teilsysteme ($k = 3$) jeweils zu den anderen beiden Schnittpunkten eine Entfernung echt kleiner π und eine echt größer π haben muss, lässt sich ein Algorithmus entwickeln, um die minimal unzulässigen Teilsysteme der Größe 3 zu berechnen. Da die Innenwinkel w_i in Grad angegeben werden, geben wir den Algorithmus ebenfalls in Grad an.

Algorithmus zur Berechnung der minimal unzulässigen Teilsysteme im regelmäßigen n -Eck 4.13. Eingabe: n

1. Zuerst nummerieren wir die Bedingungen mit $1, 2, 3, \dots, n$, sodass Bedingung i und $i + 1$ zwei aneinander liegende Seiten des n -Ecks repräsentieren. Zudem speichern wir zwei leere Listen, IIS2 und IIS3, ab.
 2. Nun berechnen wir $w_i = \frac{360}{n}$ und ordnen i die Zahl $S_i = (i - 1)w_i$ zu.
 3. Wenn n ungerade ist, überspringe 4.
 4. for $i \leq \frac{n}{2}$ füge IIS2 das Tupel $(i, i + \frac{n}{2})$ hinzu.
 5. for $2 \leq i \leq n$
 if $S_i < 180$
 for $j > i$
 if $180 < S_j < 180 + S_i$
 for $0 \leq l \leq n - 1$ füge IIS3 die Tripel $(1 + l, i + l, j + l)$ hinzu
 (falls ein Element $> n$, so subtrahiere n), $i = i + 1$
 6. Überprüfe Liste IIS3 auf Tripel mit gleichen Zahlenkombinationen und lösche alle gleichen Tripel außer einen. Sortiere und reihe die Elemente der Tripel der Größe nach.
- Ausgabe: Die Listen IIS2 und IIS3.

Gehen wir den Algorithmus anhand eines Beispiels durch.

Beispiel 4. Algorithmus 4.13 mit $n = 10$.

Schritt 1 ist nötig zur Verknüpfung der minimal unzulässigen Teilsysteme mit dem System $Ax \leq b$.

In Schritt 2 berechnen wir $w_i = \frac{360}{10} = 36$ und berechnen $S_i = (i - 1)w_i$:

$S_1 = 0, S_2 = 36, S_3 = 72, S_4 = 108, S_5 = 144, S_6 = 180, S_7 = 216, S_8 = 252, S_9 = 288, S_{10} = 324$.

Da $n = 10$ gerade ist, erstellen wir direkt die Liste IIS2=[(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10)], welche die minimal unzulässigen Teilsysteme der Größe 2 enthält.

Nun ist in Schritt 5 $S_2 = 36 < 180$, aber es existiert kein j , sodass $180 < S_j < 216$ erfüllt ist, also setzen wir $i = 3$. $S_3 = 72 < 180$ und für $j = 7$ ist $180 < S_7 = 216 < 252$ erfüllt. Somit fügen wir IIS3 die Tripel (1,3,7), (2,4,8), (3,5,9), (4,6,10), (5,7,1), (6,8,2), (7,9,3), (8,10,4), (9,1,5), (10,2,6) hinzu.

Nun ist $i = 4$ und für $j = 7, 8$ wird $180 < S_j < 288$ erfüllt. Also fügen wir IIS3 folgende Tripel hinzu: (1,4,7), (2,5,8), (3,6,9), (4,7,10), (5,8,1), (6,9,2), (7,10,3), (8,1,4), (9,2,5), (10,3,6), für $j = 7$ und (1,4,8), (2,5,9), (3,6,10), ..., (8,1,5), (9,2,6), (10,3,7). Dabei fällt auf, dass, bis auf die Reihenfolge, für $i = 4$ und $j = 7, 8$ die gleichen Tripel hinzugefügt werden. Da es bei den minimal unzulässigen Teilsystemen aber nicht auf die Reihenfolge ankommt, löschen wir in 6 die mehrfachen Tripel.

Nun ist $i = 5$ und für $j = 7, 8, 9$ ist $180 < S_j < 324$ erfüllt. Es entstehen aber keine neuen minimal unzulässigen Teilsysteme, da (1, 5, 7) und (1, 5, 9) schon in anderer Reihenfolge in den Tripel von $i = 3$ und $j = 7$ auftauchen und wir in Schritt 5 Zykel der Länge n erzeugen. Für das Tripel (1, 5, 8) gilt das gleiche, da es in anderer Reihenfolge in Schritt 5 für $i = 4$ und $j = 7, 8$ schon erzeugt wird.

Nun ist $i = 6$ und $180 = S_6 < 180$ wird nicht mehr erfüllt. Durch die Nummerierung in Schritt 1 und die Berechnung von S_i in Schritt 2 gilt auch für keine folgenden $S_i < 180, i \geq 6$.

Wir haben Schritt 6 schon erledigt und die minimal unzulässigen Teilsysteme nach ihrer Größe getrennt.

IIS2 = [(1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10)]

IIS3 = [(1,3,7), (1,4,7), (1,4,8), (1,5,7), (1,5,8), (1,5,9), (2,4,8), (2,5,8), (2,5,9), (2,6,8), (2,6,9), (2,6,10), (3,5,9), (3,6,9), (3,6,10), (3,7,9), (3,7,10), (4,6,10), (4,7,10), (4,8,10)]

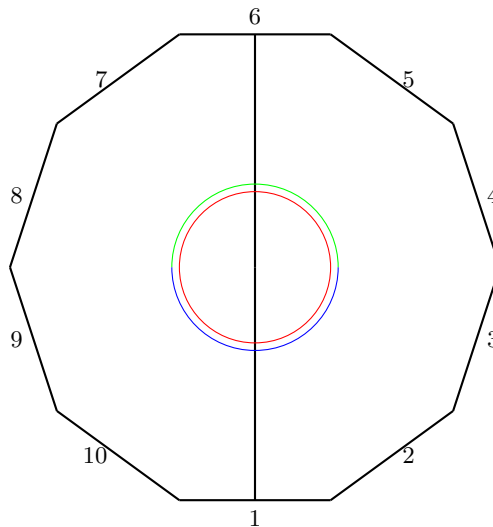


Abbildung 7. Ein regelmäßiges 10-Eck

Die Sphäre der zulässigen Bereiche ist rot und die Kennzeichnungen der Sphäre von Bedingung 1 und 6 sind leicht versetzt.

Prüfen wir unser Ergebnis obligatorisch mit Theorem 3.1 nach. Das System Σ eines regelmäßigen n -Ecks ist zum Beispiel:

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.73 & 1 \\ -3.06 & 1 \\ -3.06 & -1 \\ -0.73 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0.73 & -1 \\ 3.06 & -1 \\ 3.06 & 1 \\ 0.73 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -3.08 \\ -3.81 \\ -9.91 \\ -9.91 \\ -3.81 \\ -3.08 \\ -3.81 \\ -9.91 \\ -9.91 \\ -3.81 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Ecken des alternativen Polyeders $P(\Sigma)$ sind:

$$\begin{pmatrix} 0.0894 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1174 \\ 0 \\ 0 \\ 0.028 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1001 \\ 0 \\ 0.0239 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1451 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0726 \\ 0.0726 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.077 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0385 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0385 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0239 \\ 0 \\ 0.1001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.0894 \\ 0 \\ 0.028 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1174 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1174 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0894 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.124 \\ 0.0239 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0726 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1451 \\ 0 \\ 0.0726 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.0617 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1003 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0386 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1003 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0617 \\ 0 \\ 0.0386 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0729 \\ 0 \\ 0.0277 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0451 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0451 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0729 \\ 0 \\ 0.0277 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0277 \\ 0 \\ 0.0729 \\ 0 \\ 0.0451 \\ 0.0451 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0385 \\ 0 \\ 0 \\ 0.077 \\ 0 \\ 0.0385 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0386 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1003 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0617 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0239 \\ 0 \\ 0 \\ 0.124 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0386 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0617 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1003 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0451 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0277 \\ 0 \\ 0.0729 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.028 \\ 0 \\ 0.0894 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1174 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1623 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1623 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1312 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1312 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0505 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0505 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0505 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0505 \\ 0 \\ 0.1312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1312 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es werden 5 minimal unzulässige Teilsysteme der Größe 2 und 20 der Größe 3 durch die Ecken des alternativen Polyeders indexiert. Es lässt sich schnell nachprüfen, dass die minimal unzulässigen Teilsysteme mit den aus Beispiel 5 berechneten übereinstimmen.

Wir haben in der folgenden Abbildung Algorithmus 4.13 als Funktion $\text{IISC}(n)$ in `sagemath` implementiert, bei der für $n \geq 2$ alle minimal unzulässigen Teilsysteme ausgegeben

werden. Dies geschieht in Form zweier Listen. Die Listen entsprechen denen aus Algorithmus 4.13, und zusätzlich wird bei $\text{IISC}(n)$ jeweils die Anzahl der minimal unzulässigen Teilsysteme der Größe 2 und 3 ausgegeben.

```

def IISC(n):
    IIS2 = []
    IIS3 = []
    IIS = []
    w = 360/n
    S = []
    for b in range(n):
        S.append(b*w)
    if n % 2:
        IIS2=['empty']
    else:
        IIS2 = [[a+1,a+1+(n/2)] for a in range((n/2))]
    for i in range(1,n):
        if 0<S[i]<180:
            for j in range(i+1,n):
                if 180<S[j]:
                    if S[j]<(180+S[i]):
                        for l in range(n):
                            IIS.append([1+l, i+1+l, j+1+l])
    for k in range(len(IIS)):
        for g in range(3):
            if IIS[k][g]>n:
                IIS[k][g]=IIS[k][g]-n
    for r in range(len(IIS)):
        IIS[r].sort()
        IIS.sort()
    for p in range(len(IIS)):
        for t in range(len(IIS)):
            if p!=t:
                if IIS[p]==IIS[t]:
                    for h in range(3):
                        IIS[t][h]=0
    IIS.sort()
    for f in range(len(IIS)):
        if IIS[f][0]!=IIS[f][1]:
            IIS3.append(IIS[f])
    return 'IIS2 = ', IIS2, 'IIS3 = ', IIS3, '#IIS2 ', len(IIS2), '#IIS3 ', len(IIS3)

```

Abbildung 8. Algorithmus 4.13 in sagemath implementiert.

Zuletzt noch eine Tabelle, die mithilfe von Algorithmus 4.13 berechnet wurde.

Tabelle 1: Minimal unzulässige Teilsysteme im regelmäßigen n -Eck.

n	#	t	n	#	t	n	#	t	n	#	t
10	25	0.0044	30	925	13.37	50	4625	414	60	8150	2196
11	55	0.0228	31	1240	22.45	51	5525	839	61	9455	2431
12	46	0.0321	32	1136	18.14	55	6930	1677	81	22140	9561
13	91	0.0759	33	1496	31.25	56	6580	1557	101	42925	17909

Abbildung 9. Ergebnisse von Algorithmus 4.13

Bemerkung. In der obigen Abbildung steht # für die Anzahl der minimal unzulässigen Teilsysteme und t für die benötigte Rechenzeit von Algorithmus 4.13, angegeben in Sekunden.

Abbildung 9. bestätigt das exponentielle Wachstum der minimal unzulässigen Teilsysteme in Abhängigkeit von den Nebenbedingungen.

4.3 Ausblick

Zuerst haben wir in diesem Kapitel Systeme mit Vorzeicheneinschränkungen untersucht. Wir haben die Vorzeicheneinschränkung in die uns bekannte Form überführt und dann Aussagen über die mit Theorem 3.1 indexierten minimal unzulässige Teilsysteme bewiesen. Wie sich am Ende des Beispiels 3 zeigt decken unsere erzielten Ergebnisse nicht alle möglichen Fälle ab. Es erscheint diesbezüglich sinnvoll, mithilfe des Ansatzes in Satz 4.4 und am Ende von Beispiel 3 weitere Aussagen über die Ecken des alternativen Polyeders $P(\Theta^*)$ im Bezug auf das System Θ zu verifizieren.

Danach haben wir die spezielle Klasse, das regelmäßige n -Eck im \mathbb{R}^2 , als unzulässiges System eingeführt und analysiert. Zunächst haben wir die Sphäre der zulässigen Bereiche definiert und die uns bekannten Definitionen übertragen. Anhand der Informationen über die Sphäre erlangt man schnell Klarheit über die Struktur dieser Klasse. Wir haben dadurch den Algorithmus 4.13 entwickelt. Er beruht essentiell auf der Eigenschaft der Innenwinkel des betrachteten Systems. Systeme mit ähnlichen Strukturen können mithilfe der Sphäre schnell analysiert und ihre minimal unzulässigen Teilmengen algorithmisch berechnet werden.

Ein wichtiger Grund minimal unzulässige Teilsysteme genauer zu studieren ist, wie in der Einleitung erwähnt, das MAX FS Problem. Solange nicht $P = NP$ gilt, wird es attraktiv bleiben, immer effizientere Algorithmen zum Lösen von MAX FS zu entwickeln. Es können somit auch andere spezielle Systeme/Klassen in Bezug auf Strukturen innerhalb der minimal unzulässigen Teilsysteme interessant sein.

5 Anhang

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Wörtlich übernommene Sätze oder Satzteile sind als Zitat belegt, andere Anlehnungen, hinsichtlich Aussage und Umfang, unter Quellenangabe kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht. Sie wurde nicht, auch nicht auszugsweise, für eine andere Prüfungs- oder Studienleistung verwendet.

Frankfurt am Main, den 20.03.2017

6 Literatur

- [1] J. Gleeson and J. Ryan, ORSA J. Computing 2 (1), pp. 61–63, 1990.
- [2] M. Pfetsch, The maximum feasible subsystem problem and vertex - facet incidences of polyhedra, Dissertation, TU Berlin, 2003.
- [3] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, New York, 1988.
- [4] J. N. M. van Loon, Irreducibly inconsistent systems of linear inequalities, Eur. J. Oper. Res. 8, pp. 282–288, 1981.
- [5] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, New York, 1986.
- [6] T. Theobald, Skriptum Einführung in die Optimierung, Goethe-Universität Frankfurt, 2015.
- [7] N. Chakravarti, Some results concerning post-infeasibility analysis, Eur. J. Oper. Res. 73, pp. 139–143, 1994.
- [8] O. L. Mangasarian, Minimum-support solutions of polyhedral concave programs, Optimization 45, no. 1–4, pp. 149–162, 1999.
- [9] T. Theobald and S. Ilman, Einführung in die computerorientierte Mathematik mit Sage, Springer Spektrum, Frankfurt am Main, 2015.
- [10] R. Jeroslow and J. Wang, Dynamic Programming, Integral Polyhedra and Horn Clause knowledge bases, ORSA J. Computing 1 (1), pp. 7–19, 1989.
- [11] F. Glover and H.J. Greenberg, Logical Testing for Rule-Base Management, Annals of Operations Research 12, pp. 199–215, 1988.
- [12] T. S. Motzkin, Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen, PhD thesis, Basel, 1933.
- [13] D. Jungnickel, Optimierungsmethoden-Eine Einführung, Springer-Verlag, Augsburg, 2008.
- [14] M. Pfetsch, Branch-and-Cut for the maximum feasible subsystem problem, SIAM J. Optim. Vol. 19 No. 1, pp. 21–38, 2008.