Problema de Dominação Romana

Ieremies Romero

13 de setembro de 2022

Resumo

A Dominação Romana é um problema proposto por Stewart [12] em que desejamos defender o império romano dispondo de um certo número de legiões. Para isso, cada cidade deve ser assegurada de forma que uma legião alocada ou seja vizinha de outra que possua duas legiões. Assim, deseja-se minimizar a quantidade de legiões distribuídas sem abdicar da segurança do império.

Neste projeto, utilizaremos a técnica de Programação Linear Inteira (PLI) para modelar o problema. Objetivamos propor novos modelos de PLI para dominação romana e suas variantes, explorando técnicas como branch-cut, branch-price e ferramental moderno de PLI.

1 Introdução

1.1 Motivação histórica

Durante a Segunda Guerra Mundial, General Douglas MacArthur propôs uma estratégia de movimentação que consistia em avançar suas tropas de uma ilha para outra apenas quando ele poderia deixar para trás um número suficiente de tropas ([12]). Ele não foi o primeiro a utilizar dessa estratégia: segundo Stewart [12], referências históricas apontam que o Imperador Constantino, no quarto século A.C., aplicou estratégia similar para defender o Império Romano de invasões dos povos ditos "bárbaros".

aqui têm refs de refs

Para exemplificar o seu uso, considere o mapa do Império Romano simplificado na Figura 1. Nesse exemplo, o imperador possui 4 legiões para serem distribuídas pelo território e ele deseja fazê-lo de forma que todas as cidades sejam consideradas seguras. Uma região é dita segura, ou coberta, se há uma legião em seu território ou se está conectada a outra região com duas legiões.

Nos tempos atuais, os problemas de dominação ganharam novos propósitos: cobertura de serviços essenciais ou de emergência, QUE MAIS?...

1.2 Modelo matemático

Para um grafo $G = (V, E)$, dizemos que a **vizinhança aberta** $N(v)$ de um vértice v é definida como o conjunto de vértices adjacentes a v em G, ou seja, $N(v) = \{u | (u, v) \in E\}$.

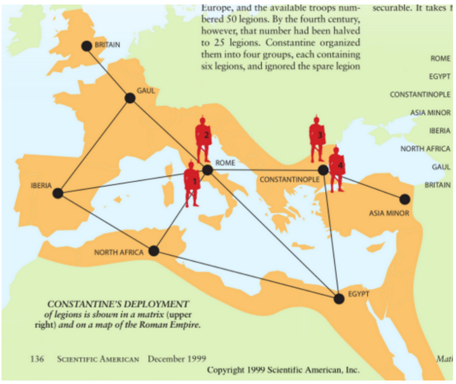

Figura 1: Representação do mapa do Império Romano usada como ilustração do problem, inspirada de Stewart [12].

Similarmente, dizemos que a **vizinhança fechada** $N[v]$ de um vértice v é a vizinhança aberta incluindo o próprio v, ou seja, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Para um conjunto de vértices s, a vizinhança aberta desse conjunto é a união das vizinhanças abertas de cada um dos seus vértices (o respectivo pode ser dito para a vizinhança fechada). Um **conjunto dominante** de um grafo G é um subconjunto de vértices D tal que a vizinhança fechada de D é o próprio conjunto V . Por sua vez, o **número de dominação** de um grafo G, dito $\gamma(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto dominante do grafo G.

O problema de dominação romana é definido em um grafo $G = (V, E)$ simples, finito e não-direcionado, no qual cada vértice representa uma cidade ou região do império e as arestas são as conexões entre elas [1]. Diremos que uma **função de dominação romana** é uma função $f : V \to z0, 1, 2\}$ na qual $f(v)$ indica a quantidade de legiões naquela região,de forma que, para qualquer v tal que $f(v) = 0$, deve existir u vizinho a v cujo $f(u) = 2$. Definimos o **número de dominação romana** total de um grafo G como o menor valor $f(v), \forall v \in V$, tal que f é uma função de dominação romana do grafo G.

1.3 Revisão bibliográfica

Após a descrição inicial do problema, ReVelle e Rosing [10] apresentaram o desenvolvimento inicial em teoria de grafos. Além disso, Cockayne et al. [1] apresentaram alguns resultados importantes de teoria de grafos sobre o problema, como limitantes e propriedades da função de dominação romana, os quais foram estendidos e aprimorados por Xing, Chen e Chen [13], Favaron et al. [5], Mobaraky e Sheikholeslami [9]. Algumas classes especiais de grafos podem ser resolvidas em tempo linear, mas, no caso geral, o problema é NP-difícil ([4, 8, 11]).

Ivanovic [6] utilizaram *Variable Neightborhood Search* (VNS) no mesmo problema, obtendo resultados interessantes para as instâncias propostas por Currò [2]. Essa metaheurística parte da ideia de que soluções ótimas são encontradas "próximas"de boas soluções, assim utilizando busca local e algumas técnicas, como perturbação, para escapar de mínimos

tá ruim isso

locais e intensificar a procura.

Já Khandelwal, Srivastava e Saran [7] utilizaram algoritmos genéticos no problema de dominação romana, uma ideia que toma de inspiração da evolução das espécies observadas na natureza. Partindo de um conjunto de soluções, realizamos "cruzamentos"das melhores para produzir novas gerações. A cada uma, induzimos "mutações"aleatórias que alteram certos pontos das soluções, espelhando a realidade e tentando evitar cair em mínimos locais.

2 Metodologia

2.1 Programação linear

- Definição de PL

Programação Linear é uma técnica de optimização de problemas a partir da modelagem dos mesmos por meio de programas lineares. Nestes, definimos uma função objetivo, a qual queremos maximizar ou minimizar com suas variáveis sujeitas a um conjunto de restrições lineares (equações ou inequações lineares). Todo programa linear pode ser escrito em sua forma canônica: citar um bom livro

$$\begin{aligned} \text{maximize } & cx \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Perceba que maximizar uma função é o mesmo que minimizar a mesma com sinal oposto.

Para resolver esse tipo de programa, conhecemos o algoritmo *simplex* que, apesar de ser exponencial , no caso médio possui comportamento polinomial. impreciso

Para alguns problemas, como o de dominação romana, não faz sentido falar em soluções fracionárias, afinal não conseguimos "alocar meia legião". Para isso, restringimos as variáveis aos inteiros, fazendo assim um **Programa Linear Inteiro**. cite um bom livro

O que a princípio pode parecer uma pequena alteração, torna o problema computacionalmente ainda mais complexo.

- Definição de PLI
- atual modelo para dominação romana
- citar a ideia do "ferramental moderno de PLI"

3 Objetivos

Os algoritmos e modelos propostos serão comparados com as instâncias presentes na literatura, como em Currò [2] e, se necessário novas instâncias poderão ser geradas.

Os resultados dos experimentos computacionais serão comparados utilizando técnicas como *Performance Profile* demonstrado por Dolan e Moré [3].

Referências

[1] Ernie J Cockayne et al. "Roman domination in graphs". Em: *Discrete Mathematics* 278.1-3 (mar. de 2004), pp. 11–22. ISSN: 0012-365X. DOI: 10.1016/j.disc.2003.06.004. (Acedido em 15/07/2022).

[2] Vincenzo Currò. "The Roman Domination Problem on Grid Graphs". Em: (2014), p. 96.

[3] Elizabeth D. Dolan e Jorge J. Moré. "Benchmarking optimization software with performance profiles". Em: *Mathematical Programming* 91.2 (1 de jan. de 2002), pp. 201–213. ISSN: 0025-5610, 1436-4646. DOI: 10.1007/s101070100263. (Acedido em 10/06/2022).

[4] Paul Andrew Dreyer. "Applications and variations of domination in graphs". Tese de doutoramento. Ann Arbor, United States, 2000. 178 pp. ISBN: 9780599993846. URL: https://www.proquest.com/docview/304623075/abstract/392C1D0079F84EE6PQ/1 (acedido em 15/07/2022).

[5] O. Favaron et al. "On the Roman domination number of a graph". Em: *Discrete Mathematics* 309.10 (mai. de 2009), pp. 3447–3451. ISSN: 0012-365X. DOI: 10.1016/j.disc.2008.09.043. (Acedido em 15/07/2022).

[6] Marija Ivanovic. "Improved mixed integer linear programing formulations for roman domination problem". Em: *Publications de l'Institut Mathematique* 99.113 (2016), pp. 51–58. ISSN: 0350-1302, 1820-7405. DOI: 10.2298/pim1613051i. (Acedido em 15/07/2022).

[7] Aditi Khandelwal, Kamal Srivastava e Gur Saran. "On Roman Domination of Graphs Using a Genetic Algorithm". Em: *Computational Methods and Data Engineering*. Ed. por Vijendra Singh et al. Advances in Intelligent Systems and Computing. Singapore: Springer, 2021, pp. 133–147. ISBN: 9789811568763. DOI: 10.1007/978-981-15-6876-3_11.

[8] Aneta Klobucar e Ivona Puljic. "Some results for Roman domination number on Cardinal product of paths and cycles". Em: *Kragujevac Journal of Mathematics* 38.1 (2014), pp. 83–94. ISSN: 1450-9628. DOI: 10.5937/kgjmath1401083k. pmid: 1450-96281401083K. (Acedido em 15/07/2022).

[9] B.P. Mobaraky e Seyed Sheikholeslami. "Bounds on Roman Domination Numbers of Graphs". Em: *Matematichki Vesnik* 60 (1 de jan. de 2008).

[10] Charles S. ReVelle e Kenneth E. Rosing. "Defendens Imperium Romanum: A Classical Problem in Military Strategy". Em: *The American Mathematical Monthly* 107.7 (1 de ago. de 2000), pp. 585–594. ISSN: 0002-9890, 1930-0972. DOI: 10.1080/00029890.2000.12005243. (Acedido em 15/07/2022).

[11] Weiping Shang e Xiaodong Hu. "The Roman Domination Problem in Unit Disk Graphs". Em: *Computational {{Science}} – {{ICCS}} 2007*. Ed. por Yong Shi et al. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, pp. 305–312. ISBN: 978-3-540-72588-6. DOI: 10.1007/978-3-540-72588-6_51.

[12] Ian Stewart. “Defend the Roman Empire!” Em: *Scientific American* 281.6 (dez. de 1999), pp. 136–138. ISSN: 0036-8733. DOI: 10.1038/scientificamerican1299-136. URL: https://www.scientificamerican.com/article/defend-the-roman-empire (acedido em 15/07/2022).

[13] Hua-Ming Xing, Xin Chen e Xue-Gang Chen. “A note on Roman domination in graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 306.24 (28 de dez. de 2006), pp. 3338–3340. ISSN: 0012-365X. DOI: 10.1016/j.disc.2006.06.018. (Acedido em 15/07/2022).