



Introdução ao Processamento Digital de Imagem MC920 / MO443

Prof. Hélio Pedrini

Instituto de Computação

UNICAMP

<http://www.ic.unicamp.br/~helio>

1º Semestre de 2023

1 Morfologia Matemática

- Fundamentos Matemáticos
- Operadores Morfológicos em Imagens Binárias
- Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas
- Aplicações

- A *morfologia matemática* consiste em uma metodologia para análise de imagens que permite a construção de operadores úteis para a descrição de objetos em imagens.
- A teoria de morfologia matemática foi formulada na década de 1960, por Georges Matheron, Jean Serra e seus colaboradores da Escola Nacional Superior de Minas de Paris, França.
- Originalmente desenvolvida para manipular imagens binárias, a morfologia matemática foi posteriormente estendida para tratar imagens em níveis de cinza.

- Os operadores morfológicos podem ser utilizados em um grande número de aplicações em processamento e análise de imagens, tais como:
 - ▶ extração de componentes conexos.
 - ▶ busca de padrões específicos na imagem.
 - ▶ delimitação do fecho convexo.
 - ▶ extração de bordas dos objetos.
 - ▶ afinamento de bordas e muitas outras.
- A análise de imagens por meio de operadores morfológicos tem beneficiado diversos domínios de conhecimento, podendo-se destacar:
 - ▶ medicina.
 - ▶ biologia.
 - ▶ metalurgia.
 - ▶ síntese e análise de textura.
 - ▶ microscopia.
 - ▶ automação industrial.

- A morfologia matemática utiliza a *teoria de conjuntos* para representar a forma dos objetos em uma imagem.
- Por convenção, objetos em uma imagem binária serão representados por pixels pretos (valor 1), enquanto o fundo será formado por pixels brancos (valor 0).
- Dessa forma, uma imagem binária pode ser considerada uma coleção de coordenadas discretas que correspondem aos pontos pertencentes aos objetos na imagem, expressa pelo conjunto $\{(x, y) | f(x, y) = 1\}$.
- Esse conjunto de pixels é definido no espaço bidimensional dos números inteiros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, normalmente denotado \mathbb{Z}^2 , em que cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional com coordenadas (x, y) dos pontos dos objetos com respeito a uma origem, adotada como o canto superior esquerdo da imagem.

- Por exemplo, dada a imagem binária de 6×5 pixels ilustrada a seguir, os pixels pertencentes aos objetos da imagem podem ser representados pelo conjunto $A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)\}$.

	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	1	0	
3	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	1	
y							

(a)

$$A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)\}$$

(b)

Figura: Representação de imagem por um conjunto de pixels pertencentes aos objetos. (a) imagem binária; (b) conjunto de pixels.

- Sejam A e B duas imagens binárias representadas pelos conjuntos no espaço \mathbb{Z}^2 com componentes $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$, respectivamente, ou seja, pares ordenados formados pelas coordenadas dos pixels dos objetos em A e B .
- Um conjunto A de coordenadas de pixels que satisfazem uma determinada condição é expresso como $A = \{a \mid \text{condição}\}$.
- A *união* de A e B , denotada $A \cup B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A , B ou ambos, expressa como

$$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ ou } c \in B\}$$

- A intersecção de dois conjuntos A e B , denotada $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos, denotada por

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \in B\}$$

- A *translação* de A pelo elemento p , denotada $A + p$, é definida como

$$A + p = \{a + p \mid a \in A\}$$

- A *reflexão* de A , denotada \hat{A} , é definida como

$$\hat{A} = \{-a \mid a \in A\}$$

- O *complemento* de A , denotado A^c , é o conjunto de todos os pixels que não pertencem a A , dado por

$$A^c = \{p \mid p \notin A\}$$

- A *diferença* entre A e B , denotada $A - B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A , mas não pertencem a B , expressa por

$$A - B = \{p \mid p \in (A \cap B^c)\}$$

- Um operador morfológico é um mapeamento entre o conjunto A que define a imagem e um conjunto B , chamado *elemento estruturante*, também definido em \mathbb{Z}^2 .
- O elemento estruturante é expresso com respeito a uma origem local.
- Alguns exemplos típicos de elementos estruturantes são mostrados a seguir, em que a origem é marcada com uma cruz (+). Os pontos pertencentes ao objeto são marcados com um círculo escuro.



(a)



(b)



(c)

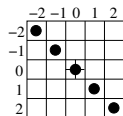


(d)

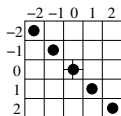
Figura: Exemplos de elementos estruturantes.

- Conforme pode ser observado na figura (d), a origem não é necessariamente um elemento de B .

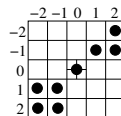
- A definição formal de operações morfológicas pode ser realizada por meio da álgebra de Minkowski, em homenagem ao matemático russo Hermann Minkowski (1864-1909).
- Tal álgebra é baseada nos conceitos da teoria de conjuntos, especialmente a união, a intersecção e a complementação.
- Caso o elemento estruturante B seja simétrico com respeito a sua origem, a reflexão não altera o conjunto de elementos, tal que $B = \hat{B}$.
- A figura a seguir ilustra os resultados da reflexão de um elemento estruturante simétrico B_1 e não simétrico B_2 .



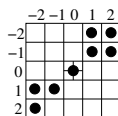
(a) B_1



(b) \hat{B}_1



(c) B_2



(d) \hat{B}_2

Figura: Reflexão de elemento estruturante com respeito à origem. (a)-(b) simétricos; (c)-(d) não simétricos.

- A *adição de Minkowski* entre A e B , denotada $A \oplus B$, é definida como

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A + b) \quad (1)$$

- Portanto, a adição $A \oplus B$ é obtida pela translação de A com relação a cada elemento de B , tomando-se a união de todas as translações resultantes.
- Algumas propriedades imediatas da adição de Minkowski são:
 - a) $A \oplus \{\overline{O}\} = A$, em que \overline{O} denota a origem $(0,0)$
 - b) $A \oplus \{p\} = A + p$, para qualquer elemento $p \in \mathbb{Z}^2$

- A partir da equação 1, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{b \in B} \left(\left[\bigcup_{a \in A} \{a\} \right] + b \right) = \\ &= \bigcup_{b \in B} \left(\bigcup_{a \in A} \{a + b\} \right) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (a + b) \end{aligned}$$

ou seja, a adição de Minkowski pode ser realizada pela adição de todos os elementos de A e B , tomando-se a união de todos os termos resultantes.

- Corolários imediatos estabelecem que a adição de Minkowski é comutativa e associativa:
 - a) $A \oplus B = B \oplus A$ (comutatividade)
 - b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (associatividade)

Exemplo: Adição de Minkowski

Dados os elementos $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ e $B = \{(0, 0), (1, 0)\}$, mostrados nas figuras (a) e (b), respectivamente, calcular a adição de Minkowski entre A e B .

A adição de Minkowski é dada pela união de todas as translações de A com respeito a cada elemento de B , a qual pode ser expressa como

$$A \oplus B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

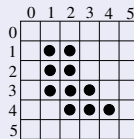
Esse resultado pode ser observado na figura (c).



(a) A



(b) B



(c) $A \oplus B$

- A *subtração de Minkowski* entre A e B , denotada $A \ominus B$, é definida como

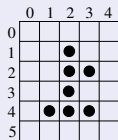
$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b) = \bigcap_{b \in \hat{B}} (A + b) \quad (2)$$

tal que $A \ominus B$ é a intersecção de todas as translações de A pelo elemento $-b \in B$ ou, equivalentemente, por $b \in \hat{B}$, em que \hat{B} é a reflexão de B .

Exemplo: Subtração de Minkowski

Dados os elementos $A = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$ e $B = \{(0, 0), (1, 0)\}$, mostrados nas figuras (a) e (b), respectivamente, a subtração de Minkowski é dada pela intersecção das translações resultantes entre A e cada elemento de \hat{B} .

Assim, $A \ominus B = \{(1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$. Esse resultado pode ser observado na figura (d).



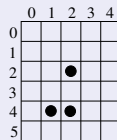
(a) A



(b) B



(c) \hat{B}



(d) $A \ominus B$

Figura: Subtração de Minkowski. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) reflexão do elemento estruturante; (d) resultado da subtração.

- Em contraste com a operação de adição de Minkowski, a subtração não é associativa. Relações correspondentes à associatividade para a operação de subtração são:
 - a) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$
 - b) $(A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B$
- Uma propriedade interessante é a dualidade existente entre a adição e a subtração de Minkowski, cujo resultado é análogo ao teorema de De Morgan¹, tal que:
 - a) $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$ (dualidade)
 - b) $(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$ (dualidade)

¹Na álgebra Booleana, o teorema de De Morgan estabelece que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ou $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

- Os próximos resultados estabelecem que, assim como a adição, a subtração de Minkowski é invariante com respeito à translação:
 - a) $A \ominus (B + p) = (A \ominus B) + p$
 - b) $(A + p) \ominus B = (A \ominus B) + p$
- Outras propriedades importantes da adição e subtração de Minkowski, relacionadas à distributividade dessas operações, são:
 - a) $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$
 - b) $(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$
 - c) $A \oplus (B \cap C) \subseteq (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$
 - d) $(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$
 - e) $A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$
 - f) $(A \cup B) \ominus C \supseteq (A \ominus C) \cup (B \ominus C)$
 - g) $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$
 - h) $A \ominus (B \cap C) \supseteq (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- A operação de *dilatação* entre o conjunto A e o elemento estruturante B é definida como a adição de Minkowski, ou seja

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A + b) \quad (3)$$

- Definições alternativas para a dilatação são

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a + b, \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B\} \quad (4)$$

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid ((B + p) \cap A) \neq \emptyset\} \quad (5)$$

- De acordo com a equação 5, o processo de dilatação entre A e B corresponde ao conjunto de todas as translações de B com os pontos da imagem em que há pelo menos um elemento não nulo (pixel com valor 1) em comum com o conjunto A .
- A translação do elemento estruturante na dilatação é similar ao mecanismo de convolução espacial discutido anteriormente, pois também envolve sucessivos deslocamentos dos elementos sobre a imagem A .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- A operação de *erosão* entre o conjunto A e o elemento estruturante B é definida como a subtração de Minkowski, ou seja

$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A - b) = \bigcap_{b \in \hat{B}} (A + b) \quad (6)$$

- Definições alternativas para a erosão são

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a - b, \forall b \in B, \exists a \in A\} \quad (7)$$

$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid B + p \subseteq A\} \quad (8)$$

- De acordo com a equação 8, a erosão de A por B é o conjunto de todos os elementos de B transladados por p que estão contidos em A .
- Entretanto, deve-se observar que o resultado da erosão de uma imagem pode não ser um subconjunto da imagem original, caso o elemento estruturante não contenha a origem.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- As propriedades da adição e subtração de Minkowski descritas anteriormente podem ser reescritas para a dilatação e erosão.
- As operações de dilatação e erosão são duais com relação à complementação e à reflexão:
 - a) $[\mathcal{D}(A, B)]^c = \mathcal{E}(A^c, \hat{B})$ (dualidade)
 - b) $[\mathcal{E}(A, B)]^c = \mathcal{D}(A^c, \hat{B})$ (dualidade)
- Outras propriedades úteis que relacionam as operações de dilatação e erosão são:
 - a) $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(B, A)$
 - b) $\mathcal{D}(A, B) = [\mathcal{E}(A^c, \hat{B})]^c$
 - c) $\mathcal{E}(A, B) = [\mathcal{D}(A^c, \hat{B})]^c$
 - d) $\mathcal{D}(A, B + p) = \mathcal{D}(A, B) + p$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- Os efeitos das operações de dilatação e erosão podem ser observados na figura a seguir.
- O elemento estruturante B utilizado para alterar a imagem é um disco circular, cuja origem localiza-se no centro do círculo. Portanto, o elemento estruturante e sua reflexão são iguais, pois B é simétrico com respeito à origem.
- As linhas tracejadas nas figuras (c) e (d) delimitam o contorno original do objeto na imagem e as linhas sólidas mostram o resultado após a dilatação e a erosão.

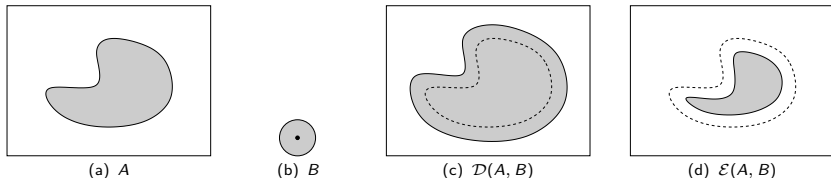


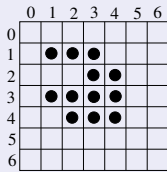
Figura: Interpretação geométrica das operações de dilatação e erosão.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Dilatação e Erosão

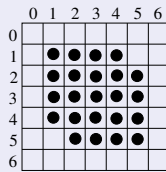
Dados os conjuntos A e B mostrados nas figuras (a) e (b), respectivamente, calcular os resultados da dilatação e da erosão de A por B .



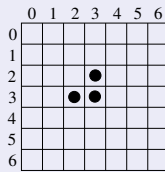
(a) A



(b) B



(c) $\mathcal{D}(A, B)$



(d) $\mathcal{E}(A, B)$

Figura: Operações de dilatação e erosão. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da dilatação; (d) resultado da erosão.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Dilatação e Erosão (continuação)

Os conjuntos A e B podem ser representados pelas coordenadas dos pixels dadas por

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

A operação de dilatação é realizada por meio da adição de Minkowski, ou seja, a união dos elementos de A transladados pelos elementos de B . O resultado de $\mathcal{D}(A, B)$, ilustrado na figura (c), é dado por

$$\mathcal{D}(A, B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

Uma forma mais simples de visualizar o resultado da dilatação consiste em mover a origem do elemento estruturante B sobre cada pixel dos objetos na imagem binária A e atribuir o valor 1 a cada posição da imagem que é sobreposta pelo elemento estruturante.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Dilatação e Erosão (continuação)

A operação de erosão pode ser realizada por meio da subtração de Minkowski, dada pelo conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante B transladado sobre cada ponto da imagem A está contido em A .

Esse processo consiste em mover a origem do elemento estruturante B sobre a imagem A , tal que, caso o elemento estruturante esteja totalmente contido em A , o pixel da imagem sob a origem de B pertencerá à erosão entre A e B .

O resultado de $\mathcal{E}(A, B)$ é mostrado na figura (d).

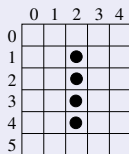
$$\mathcal{E}(A, B) = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Dilatação

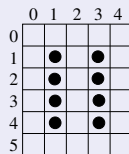
Calcular o resultado da dilatação para os conjuntos A e B mostrados nas figuras (a) e (b), respectivamente, em que a origem do elemento estruturante não pertence ao conjunto B .



(a) A



(b) B



(c) $\mathcal{D}(A, B)$

Figura: Dilatação. (a) imagem original; (b) elemento estruturante que não contém a origem; (c) resultado da dilatação.

Exemplo: Dilatação (continuação)

Os conjuntos A e B podem ser representados como

$$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

A translação de A por $(-1, 0)$ resulta em

$$A_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

enquanto a translação de A por $(1, 0)$ resulta em

$$A_2 = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

A dilatação de A por B é a união de A_1 com A_2 , cujo resultado, mostrado na figura (c), é dado por

$$\mathcal{D}(A, B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Dilatação (continuação)

Pode-se observar que os pixels dos objetos na imagem original não necessariamente pertencem à imagem resultante.

Novamente, a operação de dilatação pode ser vista como o deslocamento do elemento estruturante sobre a imagem.

Quando a origem do elemento estruturante é posicionada sobre um pixel do objeto na imagem, todos os pixels da imagem que correspondem aos pontos com valor 1 no elemento estruturante são marcados, recebendo o valor 1.

Após a varredura da imagem pelo elemento estruturante, a operação de dilatação está completa.

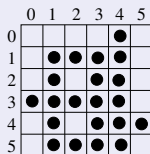
Em geral, o resultado de cada passo da dilatação não é atribuído à própria imagem A , ou seja, o resultado é armazenado em uma estrutura auxiliar que representa a imagem, inicialmente com todos os pontos atribuídos com o valor 0.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Erosão

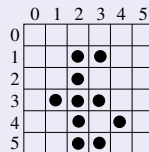
Calcular o resultado da erosão para os conjuntos A e B mostrados nas figuras (a) e (b), respectivamente, em que a origem do elemento estruturante não pertence ao conjunto B .



(a) A



(b) B



(c) $\mathcal{E}(A, B)$

Figura: Erosão. (a) imagem original; (b) elemento estruturante que não contém a origem; (c) resultado da erosão.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

Exemplo: Erosão (continuação)

Os conjuntos A e B podem ser representados como

$$\begin{aligned} A &= \{(0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), \\ &\quad (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4)\} \\ B &= \{(-1, 0), (1, 0)\} \end{aligned}$$

Exemplo: Erosão (continuação)

O resultado da erosão pode ser calculado como o conjunto de pixels, tal que o elemento estruturante B , transladado com respeito a cada um dos pixels dos objetos na imagem A , corresponde ao conjunto de pixels dos objetos em A .

Assim, os pixels que não correspondem ao padrão definido pelo elemento estruturante não pertencerão ao resultado. Entretanto, a origem do elemento estruturante não necessita corresponder a um pixel de valor igual a 1 na imagem.

Pode-se observar que o resultado da erosão, mostrado na figura (c), dado por

$$\mathcal{E}(A, B) = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 4)\}$$

não é um subconjunto da imagem original A .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- As propriedades de associatividade e distributividade descritas anteriormente, válidas para determinadas operações morfológicas, são úteis para reduzir o custo computacional envolvido na implementação das operações.
- A complexidade computacional está relacionada ao número de pontos no elemento estruturante B . A decomposição de B em subconjuntos mais simples pode causar grande redução no custo computacional.
- O elemento estruturante B formado por 3×3 pontos, por exemplo, pode ser decomposto em dois subconjuntos, B_1 e B_2 , cada um com 3×1 pontos, conforme ilustrado na figura a seguir.



(a) B



(b) B_1



(c) B_2

Figura: Decomposição do elemento estruturante B em dois subconjuntos B_1 e B_2 .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Dilatação e Erosão

- Em razão da simetria dos elementos estruturantes, os resultados obtidos pela aplicação das operações de dilatação ou erosão com o uso do elemento estruturante B são idênticos à aplicação sucessiva de B_1 e B_2 .
- Entretanto, a decomposição do elemento estruturante reduz significativamente o custo computacional, pois os conjuntos B_1 e B_2 combinados possuem menos pontos do que B .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Abertura e Fechamento

- A *abertura* de A por B , denotada $A \circ B$, é definida como

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (9)$$

- Uma outra formulação matemática para a abertura morfológica é

$$A \circ B = \bigcup \{(B + p) \mid B + p \subseteq A\} \quad (10)$$

ou seja, a abertura é definida como a união de todas as translações de B que estão contidas na imagem A .

- O *fechamento* de A por B , denotado $A \bullet B$, é definido como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (11)$$

o qual pode ser interpretado geometricamente como a união de todas as translações de B que não estão contidas em A .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Abertura e Fechamento

- A partir das equações 9 e 11, pode-se observar que a abertura de A por B é simplesmente a erosão de A por B , seguida de uma dilatação do resultado por B , enquanto o fechamento de A por B é a dilatação de A por B , seguida de uma erosão do resultado por B . Portanto,

$$A \circ B = \mathcal{D}(\mathcal{E}(A, B), B) \quad (12)$$

$$A \bullet B = \mathcal{E}(\mathcal{D}(A, B), B) \quad (13)$$

- A abertura e o fechamento são operações duais:

a) $(A \circ B)^c = A^c \bullet \hat{B}$ (dualidade)

b) $(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$ (dualidade)

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Abertura e Fechamento

- A abertura satisfaz as seguintes propriedades:
 - a) $(A \circ B) \subset A$
 - b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow (A_1 \circ B) \subset (A_2 \circ B)$
 - c) $(A \circ B) \circ B = A \circ B$
- O fechamento satisfaz as seguintes propriedades:
 - a) $(A \bullet B) \supset A$
 - b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow (A_1 \bullet B) \subset (A_2 \bullet B)$
 - c) $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Abertura e Fechamento

- A partir das propriedades descritas no item (c) para a abertura e o fechamento, ou seja, $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ e $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$, pode-se concluir que a aplicação múltipla da operação de abertura ou fechamento em uma imagem A com o uso de um mesmo elemento estruturante B produz o mesmo efeito que aplicar a operação uma única vez (propriedade de idempotência).
- Entretanto, esse fato não é verdadeiro quando operações de dilatação ou erosão são sucessivamente aplicadas em uma imagem.
- A abertura geralmente é utilizada para suavizar o contorno de objetos, eliminar conexões estreitas entre objetos e remover saliências ou protusões finas.
- O fechamento é utilizado para fundir separações estreitas entre objetos, eliminar pequenos buracos e preencher lacunas no contorno.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

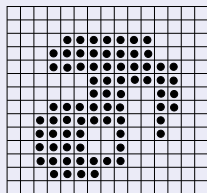
Abertura e Fechamento

Exemplo: Abertura e Fechamento

Ilustração dos operadores de abertura e fechamento em uma imagem.

Na abertura, as regiões da imagem que são menores ou mais estreitas que o elemento estruturante são removidas da imagem.

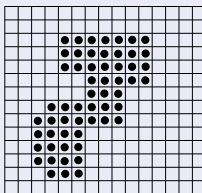
No fechamento, separações mais estreitas que o elemento estruturante são unidas e pequenos buracos são fechados.



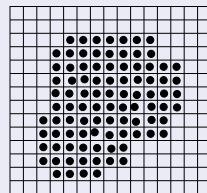
(a) A



(b) B



(c) $A \circ B$



(d) $A \bullet B$

Figura: Operações de abertura e fechamento. (a) imagem original; (b) elemento estruturante; (c) resultado da abertura; (d) resultado do fechamento.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Transformada Acerto-ou-Erro

- A transformada *acerto-ou-erro* (do inglês, *hit-or-miss*) é uma operação que permite a identificação de configurações específicas de pixels em uma imagem, tais como cantos ou junções em contornos de objetos, pixels isolados na imagem ou pequenos segmentos de retas.
- Dada uma imagem A e dois elementos estruturantes disjuntos B_1 e B_2 , a transformada acerto-ou-erro é definida como

$$A \circledast (B_1, B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2) = \mathcal{E}(A, B_1) \cap \mathcal{E}(A^c, B_2) \quad (14)$$

- Portanto, o conjunto $A \circledast B$ contém todos os pontos nos quais, simultaneamente, B_1 coincide com um subconjunto de pixels em A , e B_2 em A^c .
- A notação pode ser generalizada fazendo-se $B = (B_1, B_2)$, em que B_1 é o conjunto formado por elementos de B associados a um objeto e B_2 é o conjunto de elementos associados ao complemento do objeto (fundo da imagem).

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Transformada Acerto-ou-Erro

- O resultado da transformada acerto-ou-erro consiste na localização de todos os pixels que coincidem com o conjunto B_1 (*acerto*) e que não coincidem com o conjunto B_2 (*erro*).
- Embora o termo *acerto-ou-erro* seja mais frequentemente utilizado, um nome mais apropriado para essa transformada seria *acerto-e-erro*, o que é evidenciado pela intersecção (\cap) existente na equação 14.
- Os elementos estruturantes mostrados na figura a seguir podem ser utilizados para identificar cantos superiores esquerdos em objetos.



(a) B_1



(b) B_2

Figura: Elementos estruturantes para detecção de cantos superiores esquerdos em objetos.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Transformada Acerto-ou-Erro

- O elemento estruturante B_1 permite a localização de pixels do objeto que possuam vizinhos ao sul e a leste da origem (*acertos*), enquanto B_2 permite a localização de pixels do objeto que não possuam vizinhos nas posições norte, nordeste, noroeste, oeste e sudoeste da origem (*erros*).
- O ponto localizado a sudeste da origem é marcado com \times em ambos os elementos estruturantes, indicando que o ponto pode assumir tanto o valor 0 quanto o valor 1.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Transformada Acerto-ou-Erro

Exemplo: Transformada Acerto-ou-Erro

A figura a seguir mostra um exemplo de aplicação da transformada acerto-ou-erro para detectar cantos em objetos da imagem.

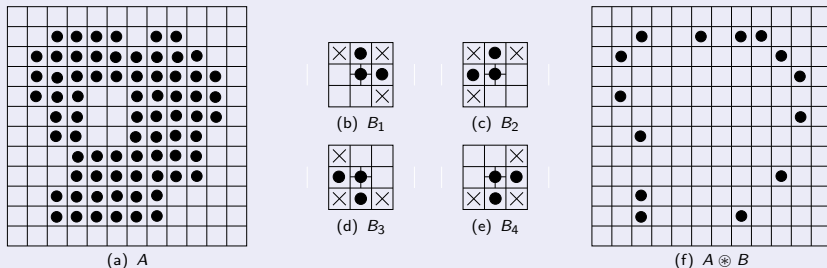


Figura: Transformada acerto-ou-erro. (a) imagem original; (b)-(e) elementos estruturantes; (f) resultado da detecção de cantos na imagem.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Transformada Acerto-ou-Erro

Exemplo: Transformada Acerto-ou-Erro (continuação)

Os elementos estruturantes B_1 a B_4 representam os padrões de *acerto* da transformada. Quatro outros elementos estruturantes disjuntos devem ser utilizados na aplicação da transformada.

A transformada é executada quatro vezes sobre a imagem binária utilizando cada um dos elementos estruturantes que representam os cantos dos objetos.

Nos elementos estruturantes B_1 a B_4 , as posições marcadas com círculos escuros representam os pixels dos objetos (valor 1), as posições vazias representam o fundo da imagem (valor 0) e as posições marcadas com \times representam pontos que podem assumir valor 0 ou 1.

A origem de B_1 a B_4 localiza-se no centro de cada elemento estruturante.

Aplicações da Morfologia Matemática em Imagens Binárias

- A partir dos conceitos apresentados nas seções anteriores, várias aplicações práticas da morfologia matemática podem ser consideradas para a análise de imagens.
- Alguns exemplos incluem a extração de componentes conexos em imagens binárias, delimitação do fecho convexo, extração de bordas dos objetos, preenchimento de regiões, extração do esqueleto de um objeto, afinamento e espessamento de contornos, além de vários outros usos na descrição de formas de objetos.
- A escolha adequada dos elementos estruturantes é de fundamental importância para a construção dos operadores.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Bordas

- A borda de um conjunto A , denotada $E(A)$, pode ser obtida pela erosão de A por B , seguida da diferença de conjuntos entre A e sua erosão, ou seja

$$E(A) = A - (A \ominus B) \quad (15)$$

em que B é um elemento estruturante adequado. A equação 15 é chamada de *gradiente interno*.

- Outra forma de extrair a borda de um objeto é baseada no operador de dilatação

$$E(A) = (A \oplus B) - A \quad (16)$$

A equação 16 é chamada de *gradiente externo*, cujo resultado é complementar ao gradiente interno.

- A soma entre o gradiente externo e interno é chamada de *gradiente morfológico*, dado por

$$E(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B) \quad (17)$$

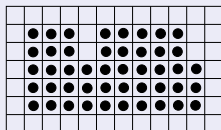
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Bordas

Exemplo: Extração de Bordas

Dada a imagem A mostrada na figura (a), aplicar o operador gradiente interno para extração de bordas utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).

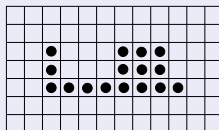
O operador apresentado na equação 15 é definido pela diferença entre a imagem original e sua erosão. O resultado da erosão é mostrado na figura (c), enquanto o resultado final da extração da borda do objeto é mostrado na figura (d).



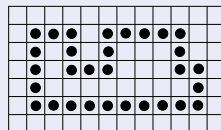
(a) A



(b) B



(c) $A \ominus B$



(d) $E(A) = A - (A \ominus B)$

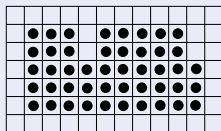
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Bordas

Exemplo: Extração de Bordas

Dada a imagem A mostrada na figura (a), aplicar o operador gradiente interno para extração de bordas utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).

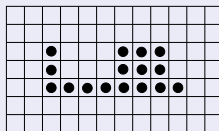
O operador apresentado na equação 15 é definido pela diferença entre a imagem original e sua erosão. O resultado da erosão é mostrado na figura (c), enquanto o resultado final da extração da borda do objeto é mostrado na figura (d).



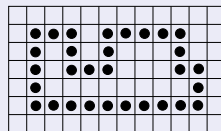
(a) A



(b) B



(c) $A \ominus B$



(d) $E(A) = A - (A \ominus B)$

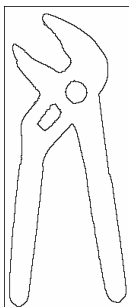
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Bordas

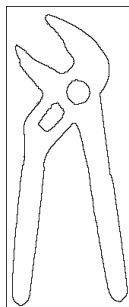
- Ilustração do operador de extração de bordas em uma imagem binária com o uso de um elemento estruturante de 3×3 pixels, em que todos os valores são iguais a 1 e a origem está localizada no centro do quadrado.
- Os três tipos de gradiente, ou seja, interno, externo e morfológico, são ilustrados nas figuras (b) a (d).



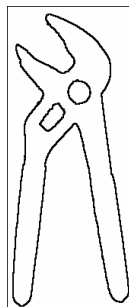
(a)



(b)



(c)



(d)

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Preenchimento de Regiões

- O preenchimento de regiões pode ser realizado por meio do operador de dilatação e das operações de complementação e intersecções de conjuntos.
- Assumindo que exista uma borda conectada por vizinhança-8, inicia-se o processo com um pixel interno à borda, denotado por p , chamado de *ponto semente*. A região é então dilatada, seguida da intersecção desse resultado com o complemento da borda, dada por

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

em que $X_0 = p$.

- A intersecção previne que os pontos ultrapassem a borda.
- O processo é repetido até que não haja mudança entre duas iterações consecutivas, ou seja, $X_k = X_{k-1}$. A união dos conjuntos X_k e A contém a região de preenchimento e a borda da região.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Preenchimento de Regiões

Exemplo: Preenchimento de Regiões

Operador de preenchimento de regiões é aplicado na imagem A , mostrada na figura (a), utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels, mostrado em (b).

A partir de um ponto semente interno à região a ser preenchida, o operador dado pela equação 18 é iterativamente aplicado aos pixels da imagem.

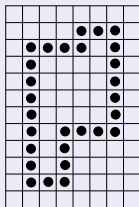
A figura (c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações.

Resultados intermediários do preenchimento da região são apresentados nas figuras (d) a (g), enquanto o resultado final do preenchimento é mostrado em (h).

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Preenchimento de Regiões

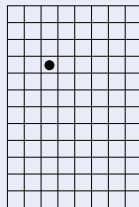
Exemplo: Preenchimento de Regiões (continuação)



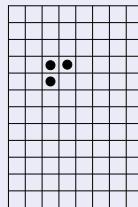
(a) A



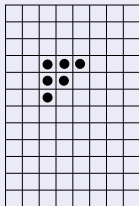
(b) B



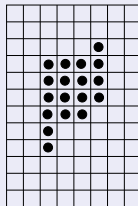
(c) $X_0 = p$



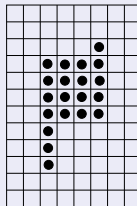
(d) X_1



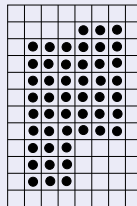
(e) X_2



(f) X_5



(g) X_6



(h) $X_6 \cup A$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Componentes Conexos

- A extração de componentes conexos depende do critério de vizinhança adotado entre os pixels.
- Assume-se que exista um ponto semente p conhecido pertencente ao componente conexo na imagem A .
- A extração do componente conexo pode ser realizada por meio de um processo iterativo dado por

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

em que $X_0 = p$ e B é um elemento estruturante adequado. Se $X_k = X_{k-1}$, então o algoritmo convergiu e o resultado é o conjunto dos pontos conectados.

- A equação 19 é similar à equação 18, a única diferença é a utilização do conjunto A em vez de seu complemento, uma vez que todos os elementos procurados estão rotulados com o valor 1.
- A intersecção do resultado em cada passo iterativo com o conjunto A elimina as dilatações centradas em elementos rotulados com o valor 0.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Componentes Conexos

Exemplo:

Dada a imagem A mostrada na figura (a), aplicar o operador de extração de componentes conexos utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).

A partir de um ponto semente pertencente ao componente conexo, a equação 19 é iterativamente aplicada aos pixels do objeto.

A forma do elemento estruturante B assume que os pixels dos componentes estão conectados por vizinhança-8.

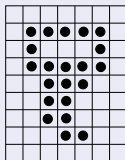
A figura (c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações.

Resultados intermediários são apresentados nas figuras (d) e (e), enquanto o resultado final da extração do componente conexo é mostrado em (f).

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração de Componentes Conexos

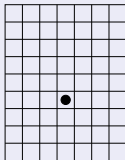
Exemplo (continuação):



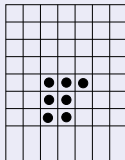
(a) A



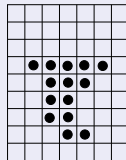
(b) B



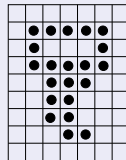
(c) $X_0 = p$



(d) X_1



(e) X_2



(f) X_6

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Fecho Convexo

- Conforme descrito anteriormente, o fecho convexo de um objeto R corresponde ao menor polígono convexo que contém R .
- Sejam B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, quatro elementos estruturantes. O processo consiste em implementar a equação

$$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B_i) \cup A \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

tal que $X_0^i = A$. Seja $D_i = X_c^i$, em que X_c^i indica a convergência no sentido de que $X_k^i = X_{k-1}^i$.

- Então, o fecho convexo de A é dado por

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^4 D_i \quad (21)$$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Fecho Convexo

- Em outras palavras, a operação consiste na aplicação iterativa da transformada acerto-ou-erro de A com B_1 .
- Quando não houver mudança entre duas iterações consecutivas, realiza-se a união com A e o resultado é chamado D_1 .
- A operação é repetida com B_2 até que não ocorram mais mudanças e assim por diante. A união dos quatro D^i resultantes forma o fecho convexo de A .

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Fecho Convexo

Exemplo:

Dada a imagem A mostrada na figura (a), aplicar o operador de fecho convexo utilizando os elementos estruturantes B_1 a B_4 , mostrados nas figuras (b) a (e).

Iniciando com $X_0^1 = A$, o resultado após quatro iterações da equação 20 é mostrado na figura (f).

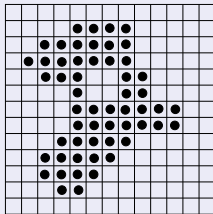
Em seguida, iniciando com $X_0^2 = A$, novamente a equação 20 é aplicada, resultando no conjunto mostrado na figura (g).

Apenas duas iterações são necessárias para a convergência do operador. Os próximos resultados são obtidos de maneira similar, utilizando os outros elementos estruturantes. A união dos conjuntos formados em (f) a (i) resulta no fecho convexo, mostrado em (j).

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Fecho Convexo

Exemplo (continuação):



(a) $A = X_0^1$



(b) B_1



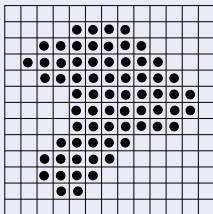
(c) B_2



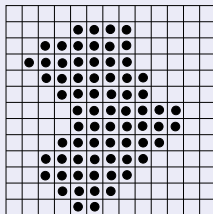
(d) B_3



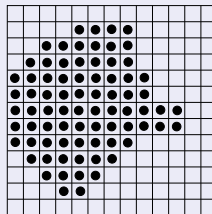
(e) B_4



(f) $X_4^1 = D_1$



(g) $X_5^2 = D_2$

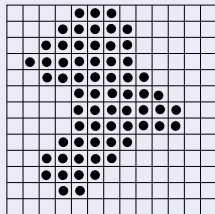


(h) $X_4^3 = D_3$

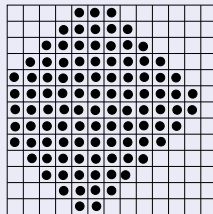
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Fecho Convexo

Exemplo (continuação):



(i) $X_2^4 = D_4$



(j) $F(A) = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

- O afinamento de um conjunto A por um elemento estruturante B , denotado $A \otimes B$, é definido como

$$A \otimes B = A - (A * B) = A \cap (A * B)^c \quad (22)$$

em que B é um par de conjuntos disjuntos definido como $B = (B_1, B_2)$.

- O espessamento de um conjunto A por um elemento estruturante B , denotado $A \odot B$, é definido como

$$A \odot B = A \cup (A * B) \quad (23)$$

em que B é definido da mesma forma como no operador afinamento.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

- Os operadores de afinamento e espessamento são duais, ou seja, a aplicação do espessamento (afinamento) sobre os pixels do objeto é equivalente à aplicação do afinamento (espessamento) sobre os pixels do fundo da imagem.
- A dualidade pode ser expressa como
 - $(A \odot B)^c = A^c \otimes B$ (dualidade)
 - $(A \otimes B)^c = A^c \odot B$ (dualidade)

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

- Os operadores de afinamento e espessamento normalmente são utilizados sequencialmente. Seja B uma sequência de elementos estruturantes expressa como

$$\{B\} = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\} \quad (24)$$

- O afinamento sequencial pode ser definido como

$$A \otimes B = (((A \otimes B_1) \otimes B_2) \dots) \otimes B_n \quad (25)$$

- Analogamente, o espessamento sequencial pode ser definido como

$$A \odot \{B\} = (((A \odot B_1) \odot B_2) \dots) \odot B_n \quad (26)$$

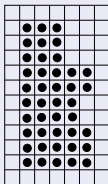
- Há várias sequências de elementos estruturantes $\{B\}$ que são úteis na prática. Algumas delas são definidas pela rotação de um dos elementos estruturantes para formar os demais.

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

Exemplo (Afinamento):

Aplicação do operador de afinamento de bordas na imagem A com os elementos estruturantes B_1 a B_8 , com tamanhos 3×3 pixels.



(a) A



(b) B_1



(c) B_2



(d) B_3



(e) B_4



(f) B_5



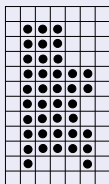
(g) B_6



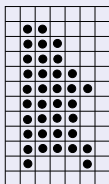
(h) B_7



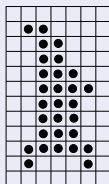
(i) B_8



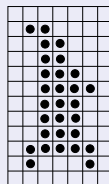
(j) após B_1



(k) após B_2



(l) após B_3

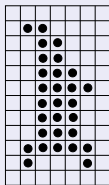


(m) após B_4

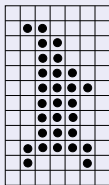
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

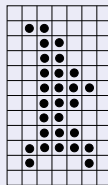
Exemplo: (continuação)



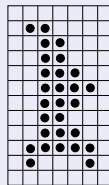
(n) após B_5



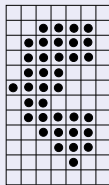
(o) após B_6



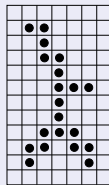
(p) após B_7



(q) após B_8



(r) após B_1



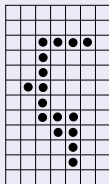
(s) $A \otimes B$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

Exemplo: (Espessamento)

Aplicação do operador de espessamento de bordas na imagem A com os elementos estruturantes B_1 a B_8 , com tamanhos 3×3 pixels.



(a) A



(b) B_1



(c) B_2



(d) B_3



(e) B_4



(f) B_5



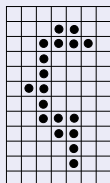
(g) B_6



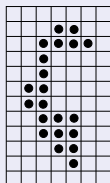
(h) B_7



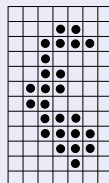
(i) B_8



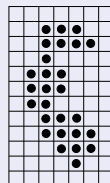
(j) após B_1



(k) após B_2



(l) após B_3

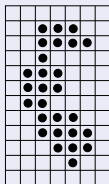


(m) após B_4

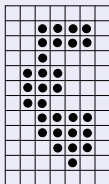
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Afinamento e Espessamento

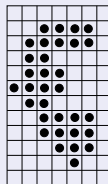
Exemplo: (continuação)



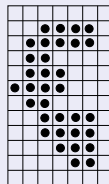
(n) após B_5



(o) após B_6



(p) após B_7



(q) após B_8

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração do Esqueleto de Objetos

- O esqueleto de uma região A pode ser expresso em termos de erosão e abertura.
- Denotando o esqueleto de A por $S(A)$, pode-se mostrar que

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^n S_k(A) \quad (27)$$

em que

$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^n \{(A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B]\} \quad (28)$$

sendo que B é um elemento estruturante, enquanto $(A \ominus kB)$ indica k sucessivas erosões de A , ou seja

$$A \ominus kB = ((\dots(A \ominus B) \ominus B)\dots) \ominus B \quad (29)$$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração do Esqueleto de Objetos

- O valor de n corresponde ao último passo iterativo antes que a erosão de A se transforme no conjunto vazio, ou seja

$$n = \max \{k \mid (A \ominus kB) \neq \emptyset\} \quad (30)$$

- De acordo com as equações 27 e 28, o esqueleto de A , $S(A)$ pode ser obtido pela união dos subconjuntos de esqueletos $S_k(A)$.
- Pode-se mostrar também que o conjunto A pode ser reconstruído a partir desses subconjuntos como

$$A = \bigcup_{k=0}^n (S_k(A) \oplus kB) \quad (31)$$

sendo que $S_k(A) \oplus kB$ denota k dilatações sucessivas de $S_k(A)$, ou seja

$$S_k(A) \oplus kB = ((\dots(S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus \dots) \oplus B \quad (32)$$

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração do Esqueleto de Objetos

Exemplo:

Dada a imagem A mostrada na figura (a), encontrar o esqueleto do objeto utilizando os elementos estruturantes B , com tamanho 3×3 pixels, mostrado em (b).

As figuras (c) e (d) mostram os resultados da aplicação do operador definido nas equações 27 a 30, inicialmente com $k = 0$.

Como quatro erosões de A resultariam no conjunto vazio, então, nesse caso, $n = 3$.

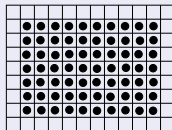
As figuras (e) a (g), (h) a (j) e (k) a (m) ilustram os resultados do operador para as próximas iterações.

Os resultados parciais do esqueleto, mostrados nas figuras (d), (g), (j) e (m), dados pelos conjuntos S_0 a S_3 , respectivamente, são unidos para formar o esqueleto final do objeto, mostrado na figura (n).

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração do Esqueleto de Objetos

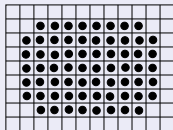
Exemplo: (continuação)



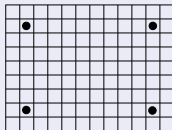
(a) A



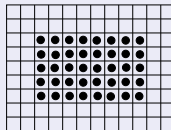
(b) B



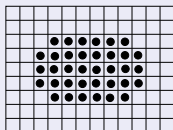
(c) $A \odot B$



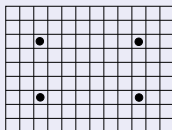
(d) $S_0(A) = A - (A \odot B)$



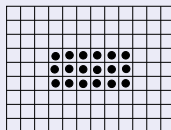
(e) $A \ominus B$



(f) $(A \ominus B) \odot B$



(g) $S_1(A) = (A \ominus B) - ((A \ominus B) \odot B)$

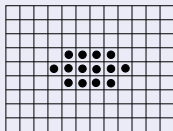


(h) $A \ominus 2B$

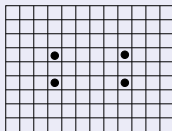
Operadores Morfológicos em Imagens Binárias

Extração do Esqueleto de Objetos

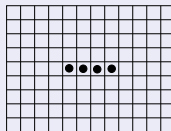
Exemplo: (continuação)



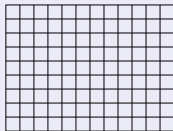
(i) $(A \ominus 2B) \circ B$



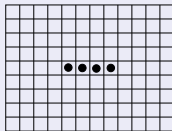
(j) $S_2(A) = (A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$



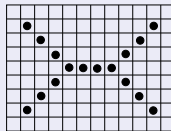
(k) $A \ominus 3B$



(l) $(A \ominus 3B) \circ B$



(m) $S_3(A) = (A \ominus 3B) - ((A \ominus 3B) \circ B)$



(n) $S(A) = S_0(A) \cup S_1(A) \cup S_2(A) \cup S_3(A)$

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

- As operações morfológicas de dilatação, erosão, abertura e fechamento discutidas para imagens binárias possuem extensões para imagens monocromáticas.
- Em vez de apenas valores iguais a 0 ou 1, os pixels podem agora assumir valores em um intervalo $[L_{\min}, L_{\max}]$.
- Não apenas a imagem de entrada, mas o elemento estruturante também pode assumir intensidades de níveis de cinza.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Dilatação e Erosão

- A dilatação de uma imagem monocromática f por um elemento estruturante b é definida como

$$(f \oplus b)(x, y) = \max \{f(x - m, y - n) + b(m, n)\} \quad (33)$$

em que $(m, n) \in b$, tal que $(m, n) = (0, 0)$ é a origem do elemento estruturante b .

- Na dilatação, aplica-se a translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição transladada, os valores do elemento estruturante são somados aos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor máximo.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Dilatação e Erosão

- A erosão de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante b é definida como

$$(f \ominus b)(x, y) = \min \{f(x - m, y - n) - b(m, n)\} \quad (34)$$

- De maneira análoga à dilatação, a erosão consiste na translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição transladada, os valores do elemento estruturante são subtraídos dos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor mínimo.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Dilatação e Erosão

Exemplo:

Dada a imagem f mostrada na figura (a), aplicar os operadores de dilatação e erosão com o elemento estruturante mostrado na figura (b).

A origem do elemento estruturante é marcada com um quadrado.

20	23	26	28	32	25	25	17
17	19	19	35	28	34	33	28
34	36	27	33	37	44	40	41
32	27	18	16	21	26	28	32
34	27	25	23	24	35	37	29

(a) f

1	2	1
2	3	2
1	2	1

(b) b

25	28	36	37	36	36	35	34
37	38	37	38	45	46	45	43
38	39	38	39	46	47	46	44
37	38	37	38	45	46	45	43
37	36	29	27	37	39	50	39

(c) $f \oplus b$

15	16	17	18	23	22	15	14
14	15	16	17	24	23	16	15
15	16	15	14	15	20	25	26
25	16	14	13	14	19	24	26
25	17	15	14	19	24	26	26

(d) $f \ominus b$

Figura: Dilatação e erosão de uma imagem em tons de cinza. (a) imagem original f ; (b) elemento estruturante; (c) resultado da dilatação; (d) resultado da erosão.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Dilatação e Erosão

Exemplo: (continuação)

A aplicação do operador de dilatação em uma imagem em tons de cinza é realizada pelo deslocamento do elemento estruturante sobre a imagem e tomando-se o máximo entre os valores do elemento estruturante adicionados com as correspondentes intensidades na imagem.

Quando a origem do elemento estruturante está posicionada sobre o pixel com intensidade igual a 16, por exemplo, o valor resultante da dilatação é o máximo entre $\{27 + 1, 33 + 2, 37 + 1, 18 + 2, 16 + 3, 21 + 2, 25 + 1, 23 + 2, 24 + 1\}$, ou seja, 38. O resultado da dilatação é mostrado na figura (c).

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Dilatação e Erosão

Exemplo: (continuação)

A erosão é realizada de forma similar à dilatação, agora tomando-se o mínimo entre os valores de intensidade subtraídos dos valores do elemento estruturante.

Quando a origem do elemento estruturante está posicionada sobre o pixel com intensidade igual a 16, o valor resultante da erosão é o mínimo entre $\{27 - 1, 33 - 2, 37 - 1, 18 - 2, 16 - 3, 21 - 2, 25 - 1, 23 - 2, 24 - 1\}$, ou seja, 13. O resultado da erosão é mostrado na figura (d).

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Abertura e Fechamento

- As operações de abertura e fechamento em imagens em tons de cinza possuem as mesmas expressões daquelas definidas para imagens binárias, exceto que as operações de dilatação e erosão envolvidas são definidas para imagens em tons de cinza.
- Dessa forma, como anteriormente, a abertura da imagem f pelo elemento estruturante b é dada por

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b \quad (35)$$

- O fechamento da imagem f pelo elemento estruturante b é definido como a dilatação de f por b , seguida pela erosão do resultado por b

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b \quad (36)$$

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

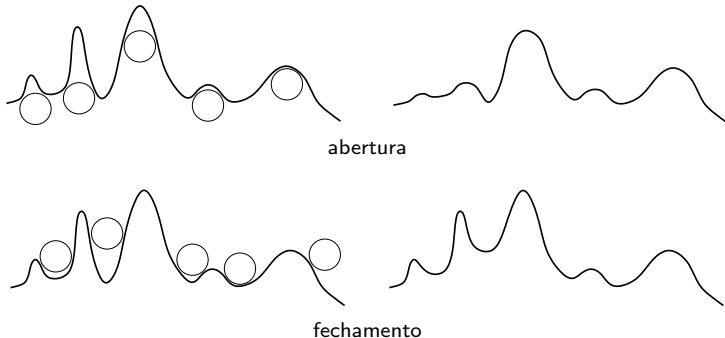
Abertura e Fechamento

- O efeito dos operadores de abertura e fechamento pode ser observado pelo uso de um modelo geométrico.
- Dada uma imagem em tons de cinza f , as posições (x, y) representam as coordenadas dos pixels, enquanto os valores $z = f(x, y)$ representam as intensidades de cinza dos pixels.
- Seja b um elemento estruturante representado por um círculo com origem em seu centro.
- A abertura de f por b pode ser interpretada geometricamente como o deslocamento do elemento b sobre todo o domínio da imagem f . Quando o centro do círculo está posicionado abaixo de um pixel da imagem, o valor resultante da operação de abertura é dado pelo ponto mais alto (máximo) alcançado por qualquer ponto do círculo.
- O fechamento, por sua vez, pode ser modelado pelo deslocamento do elemento estruturante sobre o topo da superfície e tomando-se o ponto mais baixo (mínimo) do círculo.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Abertura e Fechamento

- A figura a seguir ilustra o processo de abertura e fechamento em uma seção transversal (unidimensional) de uma imagem em tons de cinza.
- A abertura pode ser vista como um processo de *suavização*, eliminando pequenos detalhes da imagem, enquanto o fechamento remove detalhes que são menores que o elemento estruturante.



Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Realce de Contraste

- A diferença entre uma imagem e o resultado de sua abertura é chamada de transformada *top-hat*, dada por

$$TH(f) = f - (f \circ b) \quad (37)$$

- Uma função similar, conhecida como transformada *bottom-hat*, é definida como a diferença entre o resultado do fechamento e a imagem original, dada por

$$BH(f) = (f \bullet b) - f \quad (38)$$

- As transformadas *top-hat* e *bottom-hat* podem ser combinadas para realçar o contraste por meio da adição do resultado da transformada *top-hat* à imagem original, seguida da subtração do resultado da transformada *bottom-hat*, ou seja

$$g = f + TH(f) - BH(f) \quad (39)$$

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Realce de Contraste

- Uma outra forma de aumentar o contraste de uma imagem utiliza as operações de dilatação e erosão.
- O efeito de borramento de uma imagem pode ser reduzido por meio da operação de realce do contraste definida como

$$g = \begin{cases} \mathcal{E}(f, b), & \text{se } f - \mathcal{E}(f, b) < \mathcal{D}(f, b) - f \\ \mathcal{D}(f, b), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (40)$$

- Portanto, o valor de cada ponto da imagem f será substituído pelo valor da dilatação ou da erosão de f , aquele que estiver mais próximo do valor original de f .

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Realce de Contraste

- Uma ilustração da aplicação do operador de realce de contraste definido na equação 39 é apresentada na figura a seguir.

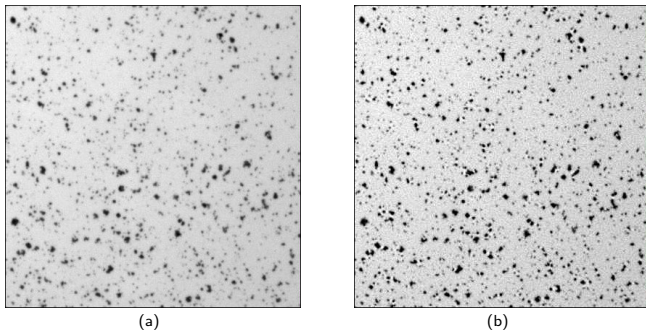


Figura: Realce de contraste. (a) imagem original; (b) imagem após aplicação do operador de realce de contraste.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Granulometria

- Uma outra aplicação de interesse prático da morfologia matemática é a estimativa da distribuição dos tamanhos de objetos (por exemplo, partículas) em uma imagem, cujo estudo é conhecido como *granulometria*.
- Para objetos com formas regulares, operações sucessivas de abertura morfológica com elementos estruturantes de tamanhos gradualmente maiores podem ser utilizadas para indiretamente medir o tamanho dos objetos.
- A diferença entre a imagem e sua abertura é calculada, o tamanho do elemento estruturante é aumentado e o processo é repetido até que a operação de abertura remova todos os objetos.

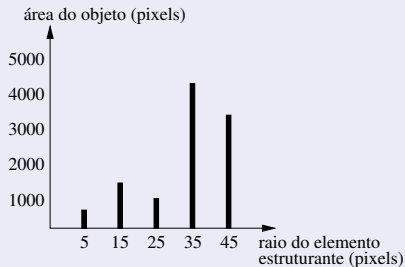
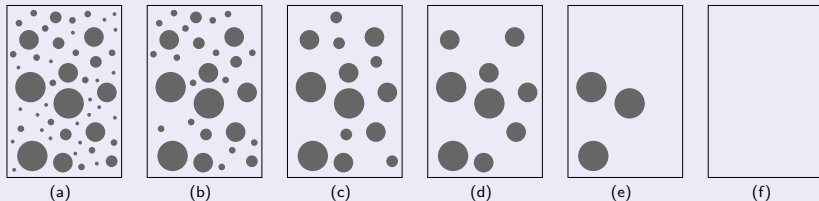
Exemplo:

A figura (a) apresenta uma imagem composta por objetos de diferentes tamanhos. Um elemento estruturante circular é utilizado para medir a área dos objetos. As figuras (b) a (f) mostram os resultados da aplicação de sucessivas aberturas por elementos estruturantes com raios entre 5 a 35 pixels. A abertura da imagem por um elemento estruturante de raio 20 remove apenas os objetos menores, enquanto a abertura por elemento de raio 35 elimina todos os objetos da imagem. A figura (g) ilustra a distribuição dos tamanhos dos objetos da imagem.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Granulometria

Exemplo: (continuação)



(g)

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Atenuação de Ruído

- A combinação das operações morfológicas de abertura e fechamento pode reduzir o efeito de ruído sal-e-pimenta em uma imagem.
- Essas operações podem remover pontos isolados claros e escuros presentes nas imagens, os quais podem ser resultantes de um processo de geração de ruído.
- Entretanto, pontos importantes de objetos na imagem podem também ser suprimidos por essas operações, causando uma degradação ou suavização da imagem.

Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Atenuação de Ruído

Exemplo:

Aplicar as operações morfológicas de abertura e fechamento na imagem A , mostrada na figura (a), corrompida por ruído sal-e-pimenta.

A abertura da imagem A por um elemento B de 3×3 pontos, cuja origem está localizada no centro de B , é utilizada para atenuar os pontos isolados brancos da imagem, embora a imagem possa sofrer alguma degradação.

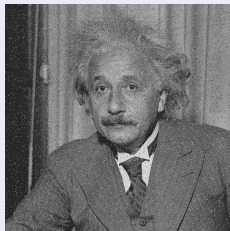
De forma similar, a operação de fechamento, também com o uso de um elemento estruturante B de 3×3 pontos, pode ser utilizada para remover pontos pretos isolados. Os resultados das operações de abertura e fechamento, separadamente, na imagem A são mostrados nas figuras (b) e (c), respectivamente.

O resultado da combinação das operações de abertura e fechamento na imagem é mostrado na figura (d).

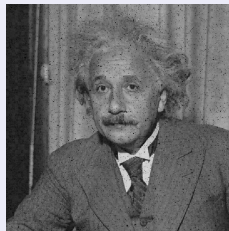
Operadores Morfológicos em Imagens Monocromáticas

Atenuação de Ruído

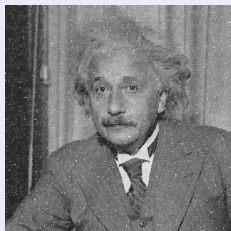
Exemplo: (continuação)



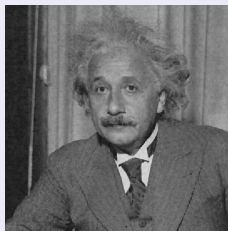
(a) imagem corrompida



(b) abertura



(c) fechamento



(d) combinação