Projeto 1 - MO420

Ieremies V. F. Romero

12 de novembro de 2022

1 Problema

Neste projeto, estudaremos o problema conhecido como *Travelling Sales Man with Drone* (TSP-D). Assim como no TSP clássico, temos um digrafo $G = (V, A)$ e queremos visitar todos os nós. Porém, neste caso, dispomos de um caminhão e um drone que pode auxiliar nas visitas. O drone deve partir e voltar para o caminhão após cada visita e esta deve respeitar o limite de distância D do drone. O caminhão parte do nó s e deve terminar, com o drone, no nó t. Nosso objetivo é minimizar a soma dos custos do caminhão (c_{ij}) e do drone (d_{ij}).

Assim, uma solução para o problema é composta de um caminho de s a t descrito por $P = (V_P, A_P)$ e de um conjunto de arcos B. $V_P \subseteq V$ é o conjunto de nós do caminho P e $A_P \subseteq A$ o conjunto de arcos que o compõe. Já o conjunto $B \subseteq V \setminus V_p \times V_P$ é um conjunto que se $(i,j) \in B$, então $(i,j) \notin A_P$ (e $(j,i) \notin A$) e $d_{ij} + d_{ji} \leq D$. Além disso, para cada nó $i \in V \setminus V_P$ há exatamente um par $(i,j) \in B$, para algum $j \in V_P$.

2 Formulação Inteira

Seja $V' = V \setminus \{s,t\}$. Usaremos 2 variáveis binárias:

- x_{ij} é igual a 1 se, e somente se, o caminhão percorre a aresta $(i,j) \in A$.
- y_{ij} é igual a 1 se, e somente se, o drone percorre a aresta $(i,j) \in A$.

Além disso, usaremos as variáveis u_i para atribuir um peso ao nó i para evitar ciclos do caminhão.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} & x_{ij} c_{ij} + y_{ij} d_{ij} && && (1)\\
\text{sujeito a} \qquad \sum_{i \in V'} x_{si} &= \sum_{i \in V'} x_{it} = 1 && && (2)\\
\sum_{i \in V'} x_{is} &= \sum_{i \in V'} x_{ti} = 0 && && (3)\\
\sum_{j \in V', j \neq i} x_{ji} &= \sum_{j \in V', j \neq i} x_{ij} && \forall i \in V' && (4)\\
a_i + c_{ij} &\leq a_j + M(1 - x_{ij}) && \forall i, j \in V && (5)\\
y_{ij} &= y_{ji} && \forall i, j \in V && (6)\\
\sum_{k \in V', k \neq i} x_{ki} &\geq y_{ij} && \forall i, j \in V' && (7)\\
\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} + y_{ij} &\geq 1 && \forall i \in V && (8)\\
y_{ij} c_{ij} + y_{ji} c_{ji} &\leq D && \forall i, j \in V && (9)\\
x_{ij} y_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i, j \in V && (10)\\
a_i &\in \mathbb{R}_+ && \forall i \in V && (11)
\end{aligned}
$$

Nossa função objetivo é bem direta: soma dos custos do caminhão e do drone. Restrição 2 e 3 garantem que o caminhão irá partir de s e chegar em t. Restrição 4 garante a manutenção de fluxo enquanto restrição 5 evita ciclos. Restrição 6 garante que toda viagem do drone irá voltar para o nó que partiu e restrição 7 garante que ele só partirá de um nó visitado pelo caminhão. Restrição 8 garante que todos os nós serão visitados, ou pelo caminhão ou pelo drone. Restrição 9 força que as viagens do drone respeitem seu limite de distância. Por fim, restrições 10 e 11 definem o domínio das variáveis.

Suponha uma solução (x, y) do programa linear inteiro acima. Diremos que $P = (V_P, A_P)$, tal que A_P é composto dos arcos cujo x_{ij} é igual a 1 e V_P os nós incidentes dos ditos arcos (incluindo s e t). Pelas restrições $2-5$, esse é um conjunto de arcos sem ciclos que partem de s e terminam em t, compondo assim um caminho de s a t.

Seja B o conjunto de arcos tal que y_{ij} é igual a 1. Pela restrição 8, todo nó i que não possua uma aresta do caminhão partindo dele, ou seja, que não está em V_P, tem ao menos uma aresta (i, j) em B. Pelas restrições 6 e 7, tal j faz parte do caminho do caminhão. É importante notar que, no ótimo, tendo em vista que os custos dos arcos são positivos, um nó (não visitado pelo caminhão) não será visitado mais de uma vez pelo drone. Por fim, pela restrição 9, $d_{ij} + d_{ji} \leq D$. Assim, qualquer solução para o programa linear será uma solução para o problema

Suponha uma solução (P, B) e $P = (V_P, A_P)$ do problema proposto. Para toda aresta (i, j) em A_P, $x_{ij} = 1$, ou zero, caso contrário. Como P descreve um caminho de s a t, restrições $2-5$ são atendidas. Da forma como B é construído, restrição 6 é atendida. Como todo nó i não visitado pelo caminho possui uma aresta (i, j) partindo dele em B, onde j pertence ao caminho, restrições 7 e 8 são satisfeitas. Por fim, também direitamente pela forma como foi construído, os arcos em B respeitam a restrição 9. Assim, qualquer solução para o problema também é uma solução para o programa linear acima.

Portanto, pelos argumentos apresentados acima e pelo fato das funções objetivo e custo serem as mesmas, dizemos que esta formulação de PLI formula o problema proposto.

3 Relaxação Lagrangiana

Rescrevendo restrição 8 da formulação da seção anterior, temos:

$$1 - \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} + y_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in V$$

Utilizando a ideia de **relaxação lagrangiana**, iremos introduzir tal restrição na função objetivo usando coeficientes de lagrange μ_i para cada nó $i \in V$, o que nos deixa com o PLI:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} c_{ij} + y_{ij} d_{ij} + \sum_{i \in V} \mu_i (1 - \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} + y_{ij}) \\ &\text{sujeito às retrições 2-7, 9-11} \end{aligned}$$

A ideia é que, sendo $\mu_i \geq 0$, quando a restrição 8 for violada, a função objetivo irá aumentar, causando assim um incentivo (proporcional a μ_i) à relaxação satisfazê-la. Assim, nosso objetivo é encontrar um bom valor para μ_i.

Para tal, utilizamos o **método do subgradientes**. Assim, iniciamos nosso gradiente como $\mu_i^0 = 0$ para todo $i \in V$ e, a cada iteração, atualizamos $\mu_i^{k+1} = max\{\mu_i^k + \pi_k(1 - \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} + y_{ij}), 0\}$. Assim, a cada iteração, tomamos um passo na direção oposta ao subgradiente da restrição dualizada. A dificuldade recai em determinar o tamanho do passo π_k.

4 Resultados

Para esse projeto, foram utilizadas as instâncias disponibilizadas pelo professor. Os experimentos foram realizados num LG Gram equipado com um Intel Core i5 de 8ª geração, quad-core, 1.6GHz, 8GB de memória ram. A máquina estava equipada com Linux Manjaro e foi utilizado o solver Gurobi versão 9.5.2.

Nas tabelas abaixo encontram-se os resultados do experimento. A coluna número de nós se refere a quantidade de nós visitados na árvore de branch-and-bound. Utilizamos como tempo limite 300 segundos.

Percebemos que o modelo conseguiu resolver muito bem instâncias com menos de 30 vértices, razoavelmente a maioria das instância entre 50 e 100 mas falhou em achar qualquer solução para insâncias maiores que 500 vértices.

Instância	Nº de nós	Tempo (s)	Objetivo	Limitante	GAP
$10 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	1	0.04	1695.0	1695.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	82	0.11	2217.0	2217.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	1	0.01	2036.0	2036.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	1	0.03	1695.0	1695.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	77	0.04	2468.0	2468.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	1	0.01	2805.0	2805.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	1	0.02	2447.0	2447.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	1	0.01	2607.0	2607.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	1	0.02	2205.0	2205.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	1	0.01	1953.0	1953.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	1	0.04	2173.0	2173.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	122	0.07	2582.0	2582.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	1	0.02	2818.0	2818.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	1	0.04	1441.0	1441.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	1	0.04	1777.0	1777.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	1	0.03	2719.0	2719.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	1	0.02	1632.0	1632.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	79	0.07	1854.0	1854.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	1	0.04	2043.0	2043.0	0.0000%
$10 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	1	0.03	1559.0	1559.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	1249	0.39	4652.0	4652.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	4842	2.96	4201.0	4201.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	1249	0.29	4652.0	4652.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	4403	1.48	4354.0	4354.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	1	0.22	4077.0	4077.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	612	0.27	3952.0	3952.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	8993	5.52	3635.0	3635.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	1143	0.34	4239.0	4239.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	1249	0.32	4652.0	4652.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	851	0.23	3853.0	3853.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	6010	1.79	4212.0	4212.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	190	0.24	4418.0	4418.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	4515	2.95	3086.0	3086.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	8640	3.17	3935.0	3935.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	1914	0.40	4514.0	4514.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	1249	0.36	4652.0	4652.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	87	0.17	4210.0	4210.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	5657	2.11	3702.0	3702.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	191	0.22	3948.0	3948.0	0.0000%
$30 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	1	0.15	4596.0	4596.0	0.0000%

Instância	Nº de nós	Tempo (s)	Objetivo	Limitante	GAP
$50 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	60061	300.00	4331.0	3914.0	9.6283%
$50 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	33752	73.74	3292.0	3292.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	2068	2.02	5493.0	5493.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	1200	1.18	5548.0	5548.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	2849	2.21	5500.0	5500.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	8976	4.80	5733.0	5733.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	4251	2.41	5500.0	5500.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	43682	121.19	5077.0	5077.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	64511	150.57	4319.0	4319.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	37110	81.93	5249.0	5249.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	53495	123.06	5606.0	5606.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	2865	2.84	5972.0	5972.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	1334	2.60	5452.0	5452.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	83125	300.01	4641.0	4276.0	7.8647%
$50 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	1216	2.36	5394.0	5394.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	2959	1.98	5479.0	5479.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	1137	1.77	5493.0	5493.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	1052	1.35	5537.0	5537.0	0.0000%
$50 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	88652	300.01	3620.0	3287.0	9.1989%
$50 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	60654	300.01	3378.0	3035.0	10.1539%
$100 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	15187	300.01	6302.0	5030.0	20.1841%
$100 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	193219	300.01	7739.0	7651.0	1.1371%
$100 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	29662	300.01	7031.0	6738.0	4.1673%
$100 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	70020	162.75	7719.0	7719.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	16539	300.01	5993.0	5115.0	14.6504%
$100 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	22401	300.02	5151.0	3733.0	27.5286%
$100 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	34861	67.79	7301.0	7301.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	28719	300.00	6489.0	5732.0	11.6659%
$100 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	130330	300.01	7637.0	7487.0	1.9641%
$100 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	16081	26.59	7938.0	7938.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	105445	126.71	7208.0	7208.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	14676	300.01	6327.0	5300.0	16.2320%
$100 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	30079	300.00	7578.0	7147.0	5.6875%
$100 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	34745	52.22	6657.0	6657.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	45534	300.00	7258.0	7060.0	2.7280%
$100 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	13695	300.01	4821.0	3685.0	23.5636%
$100 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	24348	300.01	7141.0	6731.0	5.7415%
$100 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	51760	98.92	7002.0	7002.0	0.0000%
$100 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	39069	300.01	5479.0	4998.0	8.7790%
$100 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	22900	300.01	4821.0	3826.0	20.6389%

Instância	Nº de nós	Tempo (s)	Objetivo	Limitante	GAP
$500 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	3226	300.01	-	6597.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	9870	300.01	-	15840.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	5187	300.09	-	8960.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	3750	300.20	-	8760.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	9233	300.01	-	16098.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	5207	300.01	-	13743.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	3835	300.01	-	5980.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	3081	300.21	-	6332.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	5369	300.01	-	8631.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	4630	300.02	-	13556.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	3726	300.01	-	5994.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	4854	300.12	-	13775.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	10265	300.01	-	16105.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	5291	300.05	-	13702.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	5194	300.06	-	13779.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	3809	300.01	-	6094.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	9087	300.00	-	16077.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	4192	300.01	-	8837.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	10426	300.00	-	15686.0	-
$500 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	3139	300.01	-	8873.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.25$	1	300.04	-	11615.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.1$	1	300.01	-	7840.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 0.5$	1	300.02	-	17260.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.1$	1	300.04	-	7730.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.5$	1	300.07	-	17652.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 1.0$	3015	300.03	-	22710.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.1$	1	300.02	-	8227.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 1.0$	3399	300.03	-	22272.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 4 - 0.2 - 1.0$	2508	300.04	-	22280.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.25$	1	300.05	-	11660.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.5$	1	300.04	-	17484.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 2 - 0.2 - 0.1$	1	300.01	-	7712.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.25$	1	300.02	-	11845.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.5$	1	300.02	-	17664.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.1$	1	300.01	-	7859.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 1.0$	2681	300.06	-	22697.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 1.0$	2793	300.03	-	22656.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 3 - 0.2 - 0.25$	1	300.11	-	11776.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 1 - 0.2 - 0.5$	1	300.03	-	17415.0	-
$1000 - 1000 - 1000 - 5 - 0.2 - 0.25$	1	300.06	-	12046.0	-