媒質境界での音波（疎密波）の反射波と透過波の位相変化

1.　波動方程式

媒質中を位相速度 c で x 軸に沿って進む 1 次元の疎密波を考える。媒質の変位 ξ は波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1}$$

に従い、その解は任意の関数 f, g を用いて

$$\xi(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

と表される。ここで、$f(ct-x)$ は x 軸を正方向に、$g(ct+x)$ は負方向に進む波を表す。

また、音波においては媒質の圧力変化を δP とすれば、圧力変化と変位の間には、

$$\delta P = -\rho c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{2}$$

の関係が成立する。ここで、ρ は平衡状態での媒質の密度である。

2.　疎密波における境界条件

媒質 $1(x<0)$ と媒質 $2(x>0)$ が $x=0$ を境界として接しているものとする。（図 1）$x=0$ での疎密波に対する境界条件は

i) 変位は $x=0$ において連続である

ii) 圧力変化は $x=0$ において連続である　（圧力変化が連続でなければ、境界面が移動する）

で与えられる。音波のような疎密波においては、横波の場合と異なり $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ が境界において連続とならないことに注意する。

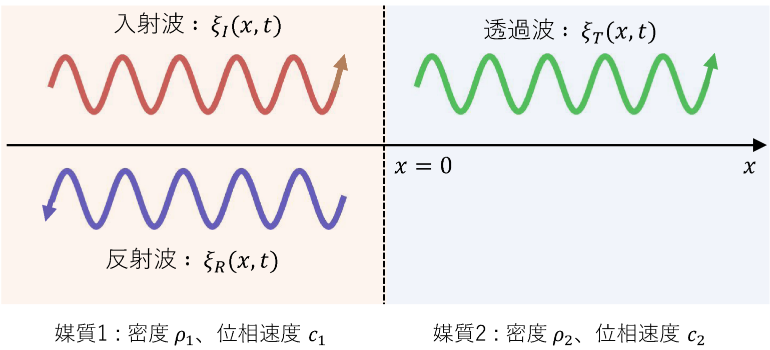

図 1　媒質境界における入射波、反射波、透過波

3.　入射波、反射波、透過波の振幅と位相変化

時刻 t、位置 x での入射波の変位 ξ_I を平面波と仮定し、媒質 1 での位相速度を c_1 として

$$\xi_I(x,t) = A_I \exp\left[i\omega_I\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \tag{3}$$

と表したとする。ここで、$A_I(>0)$ は入射波の振幅、ω_Iはその角振動数である。反射波は進行方向が逆であるため c_I を $-c_I$ に置き換えて、反射波の変位 ξ_R は

$$\xi_R(x,t) = A_R \exp\left[i\left\{\omega_R\left(t+\frac{x}{c_1}\right)+\delta_R\right\}\right] \tag{4}$$

と表される。ここで、$A_R(>0)$ は反射波の振幅、ω_R は角振動数、δ_R は反射時の位相変化である。透過波は進行方向が入射波と等しく、媒質 2 における位相速度を c_2 として、透過波の変位 ξ_T は

$$\xi_T(x,t) = A_T \exp\left[i\left\{\omega_T\left(t-\frac{x}{c_2}\right)+\delta_T\right\}\right] \tag{5}$$

となる。ここで、$A_T(>0)$ は透過波の振幅、ω_T は角振動数、δ_T は透過時の位相変化である。

境界条件 i), ii) を適用して、反射波、透過波の振幅、位相を定めることを考える。
まず、境界条件 i) より、$x=0$ において変位は連続であるので

$$\xi_I(0,t)+\xi_R(0,t)=\xi_T(0,t)$$

より

$$A_I\exp(i\omega_I t)+A_R\exp\left[i\left(\omega_R t+\delta_R\right)\right]=A_T\exp\left[i\left(\omega_T t+\delta_T\right)\right] \tag{6}$$

を得る。この関係式が任意のすべての時刻 t において成立するためには、

$$\omega_I=\omega_R=\omega_T\equiv\omega \tag{7}$$

でなければならず、角振動数は媒質によらず一定値 ω となることがわかる。したがって、式 (6) は

$$A_I+A_R\exp(i\delta_R)=A_T\exp(i\delta_T)$$

となり, 両辺の実部、虚部を比較して

$$A_I+A_R\cos\delta_R=A_T\cos\delta_T \tag{8}$$

$$A_R\sin\delta_R=A_T\sin\delta_T \tag{9}$$

を得る。

次に、境界条件 ii) は、境界での圧力変化が連続であることを要請しているので、式 (2) より、$x=0$ において

$$\rho_1 c_1^2\left(\frac{\partial\xi_I}{\partial x}+\frac{\partial\xi_R}{\partial x}\right)=\rho_2 c_2^2\frac{\partial\xi_T}{\partial x}\quad \text{at } x=0 \tag{10}$$

が満たされなければならない。ここで、ρ_1,ρ_2 は媒質 1、2 の密度である。式 (7) に注意して、式 (3)、(4)、(5) を式 (10) へ代入して整理すれば

$$\rho_1 c_1\left(A_I-A_R\exp(i\delta_R)\right)=\rho_2 c_2 A_T\exp(i\delta_T)$$

となり、両辺の実部、虚部を比較して

$$\rho_1 c_1\left(A_I-A_R\cos\delta_R\right)=\rho_2 c_2 A_T\cos\delta_T \tag{11}$$

$$-\rho_1 c_1 A_R\sin\delta_R=\rho_2 c_2 A_T\sin\delta_T \tag{12}$$

を得る。

反射波の振幅は、式 (8) と式 (11) から $A_T\cos\delta_T$ を消去して

$$A_R=\frac{\rho_1 c_1-\rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1+\rho_2 c_2)\cos\delta_R}A_I \tag{13}$$

となり、透過波の振幅は、式 (8) と式 (11) から $A_R \cos\delta_R$ を消去して

$$A_T = \frac{2\rho_1 c_1}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)\cos\delta_T} A_I \tag{14}$$

と求まる。

反射波の位相変化 δ_R は、式 (9) と式 (12) から $A_T \sin\delta_T$ を消去して、

$$(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)\sin\delta_R = 0$$

を満たし、$\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 > 0$ であるので反射波の位相変化 δ_T は、0 または π となることがわかる。式 (13) において $A_R > 0,\ A_I > 0$ であることを踏まえれば、反射による位相の変化は

$$\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2 \text{ のとき } \delta_R = 0 \tag{15}$$

$$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2 \text{ のとき } \delta_R = \pi \tag{16}$$

と定まる。

同様に、透過波の位相変化 δ_T は、式 (9) と式 (12) から $A_R \sin\delta_R$ を消去して、

$$(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)\sin\delta_T = 0$$

を満たし、$\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 > 0$ であるので透過波の位相変化 δ_R は 0 または π となるが、式 (14) において $A_T > 0, \mathrm{A}_I > 0,\ \rho_1 c_1 > 0$ であるので $\delta_T = \pi$ は許されず、透過波による位相変化は

$$\delta_T = 0 \text{（透過波の位相は変化しない）} \tag{17}$$

と定まる。

（例）　水面に垂直に入射した音波の場合（図 2）

媒質 1　:　空気　$\rho_1 \simeq 1.3\,\mathrm{kg/m^3},\ c_1 \simeq 340\,\mathrm{m/s}$

媒質 2　:　水　$\rho_2 \simeq 10^3\,\mathrm{kg/m^3},\ c_2 \simeq 1.5 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$

となり、$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$ であるので（変位の）反射波の位相は π 変化する。また、このときの反射率は式 (13) より

$$R = |\frac{A_R}{A_I}| = \frac{|\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2|}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = 0.994$$

透過率は式 (14) より

$$T = |\frac{A_T}{A_I}| = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = 0.006$$

となり、水面で音波はほぼ全反射する。また、このときの $x = 0$ での変位は、式 (5) より

$$\xi(0,t) = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} A_I \exp(i\omega t) = 0.006 A_I \exp(i\omega t)$$

となり変位は入射波の振幅に比べて、非常に小さい（完全に固定されない)。このことから図 2 に示す水を張った気柱における音の共鳴においては、水面は近似的に壁とみなせて反射音は固定端反射していると近似できる。

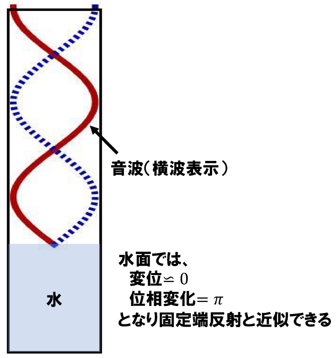

図 2　気柱の共鳴における水面での音波の反射

水面に垂直に入射した音波の場合における変位の入射波、反射波、透過波は以下のように表される。

$$\xi_I(x,t) = A_I \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \tag{18}$$

$$\xi_R(x,t) = A_R \exp\left[i\left\{\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right) + \pi\right\}\right] \tag{19}$$

$$\xi_T(x,t) = A_T \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right] \tag{20}$$

対応する圧力変化は、式 (2) より

$$\delta P_I(x,t) = i\omega\rho_1 c_1 A_I \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\delta P_R(x,t) &= -i\omega\rho_1 c_1 A_R \exp\left[i\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right) + \pi\right] \\ &= i\omega\rho_1 c_1 A_R \exp\left[i\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

$$\delta P_T(x,t) = i\omega\rho_2 c_2 A_T \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right] \tag{23}$$

と求まる。境界 $x = 0$ においては、入射波、反射波、透過波の位相は一致しており、媒質境界において位相の変化はない。このことから圧力変化は、水面において自由端反射に対応した反射をすることがわかる。