

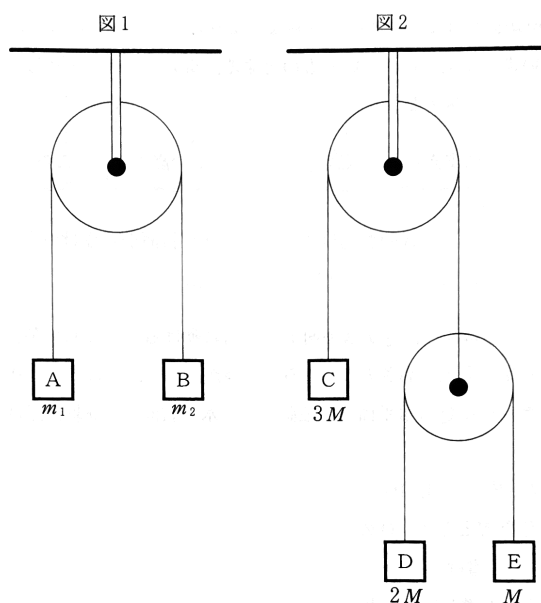
滑車と糸の質量は無視できるものとし、重力加速度を g とする。

[A] 図 1 のように、なめらかに回る定滑車に伸縮しない糸をかけて、糸の一方に質量 m_1 のおもり A, 他方に質量 m_2 のおもり B をつけて静かに放した。

- (1) $m_1 > m_2$ のとき、おもり A が下降する加速度の大きさを求めよ。
- (2) 糸に働く張力の大きさを求めよ。
- (3) $m_1 + m_2 = \text{一定}$ として、糸の張力を最大にする m_1 と m_2 の関係を求めよ。

[B] 次に、図 2 のように定滑車の一方に質量 $3M$ のおもり C を、他方に動滑車をつり下げて、動滑車には質量 $2M$ のおもり D と質量 M のおもり E をつり下げた。C, D, E を同時に静かに放した。

- (4) おもり C, D, E の加速度の大きさを求めよ。
- (5) おもり D, E 間の糸に働く張力の大きさを求めよ。
- (6) おもり D, E はそのままでおもり C を C' に換えると、 C' , D, E を同時に静かに放しても、おもりは静止したまま動かなかった。このときのおもり C' の質量を求めよ。



【解答】

[A]

(1) T を糸の張力とし、 a をおもり A が下降する加速する加速度の大きさとする。おもり A, B について運動方程式

$$m_1 a = m_1 g - T \quad \dots\dots ①$$

$$m_2 a = T - m_2 g \quad \dots\dots ②$$

①, ②より

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

(2) ①と (1) の結果から,

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

である.

(3) $m_1 = m_2 = m$ (定数) とおく. このとき, (2) の結果から,

$$T = \frac{2m_1(m - m_1)}{m_1 + m_2}g$$

となる. これより, T は $m_1 = \frac{m}{2}$ のとき最大である. すなわち, $m_1 = m_2$.

[B]

(4) C が糸からうける張力を T_1 , D が糸からうける張力を T_2 とする. また, α, β, γ をそれぞれ, C, D, E の加速度とし, すべて鉛直下向きを正とする. このとき, 運動方程式

$$3M\alpha = 3Mg - T_1 \quad \dots\dots ③$$

$$2M\beta = 2Mg - T_2 \quad \dots\dots ④$$

$$M\gamma = Mg - T_3 \quad \dots\dots ⑤$$

加えて動滑車は糸を介しておもり C とつながっているので, 加速度は $-\alpha$ であり, 運動方程式より

$$0 = 2T_2 - T_1 \quad \dots\dots ⑥$$

また, D と E も動滑車を間にして糸でつながっているので, 動滑車に対する相対加速度の和はゼロベクトルとなるので,

$$(\beta - (-\alpha)) + (\gamma - (-\alpha)) = 0$$

$$\therefore 2\alpha + \beta + \gamma = 0$$

となり, 両辺に M を乗じて

$$2M\alpha + M\beta + M\gamma = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

を得る. いま, ③, ④, ⑤を⑦に代入して

$$2(Mg - \frac{1}{3}T_1) + (Mg - \frac{1}{2}T_2) + (Mg - T_2) = 0$$

$$\therefore 4T_1 + 9T_2 = 24Mg \quad \dots\dots ⑧$$

⑥, ⑧を連立して解くと

$$T_1 = \frac{48}{17}Mg, \quad T_2 = \frac{24}{17}Mg$$

であり, ③, ④, ⑤より

$$\alpha = \frac{1}{17}g, \beta = \frac{5}{17}g, \gamma = -\frac{7}{17}g$$

以上より, C, D, E の加速度の大きさはそれぞれ $\frac{1}{17}g, \frac{5}{17}g, \frac{7}{17}g$.

(5) (4) の過程より $T_2 = \frac{24}{17}Mg$.

(6) C が静止しているということは, 動滑車も静止している. すなわち, 定滑車とみなすことができる. よって, D, E の運動は [A] で $m_1 = 2M, m_2 = M$ としたときの運動に一致する. したがって D がうける張力の大きさ S_2 は

$$S_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{4}{3}Mg$$

さらに, 動滑車にはたらく力のつりあいより, C' がうける張力の大きさは $\frac{8}{3}Mg$ である. よって, C' の運動方程式より

$$\begin{aligned} M' \cdot 0 &= M'g - \frac{8}{3}Mg \\ \therefore M' &= \frac{8}{3}M \end{aligned}$$