

数学 (理系方式)

(問題)

2023年度

〈R05174019〉

注 意 事 項

- 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
- 問題は4～8ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
- 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
- マーク解答用紙記入上の注意
 - 印刷されている受験番号が、自分の受験番号と一致していることを確認したうえで、氏名欄に氏名を記入すること。
 - 所定欄以外に受験番号・氏名を記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
 - マーク欄にははっきりとマークすること。また、訂正する場合は、消しゴムで丁寧に、消し残しがないようによく消すこと。

マークする時	● 良い	○ 悪い	○ 悪い
マークを消す時	○ 良い	○ 悪い	○ 悪い

- 分数形で解答する場合の分母、および根号の中の数値はできるだけ小さな自然数で答えること。
- 問1から問5までの「ア」、「イ」、「ウ」、…にはそれぞれ、-59, -58, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, 58, 59のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙のア、イ、ウ、…で示された欄にマークして答えること。

例1 アに3、イに-5、ウに30、エに-24、オに0と答えたいときは次のようにマークすること。

	—	十の位					一の位									
		1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○
イ	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
ウ	○	○	○	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
エ	●	○	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○
オ	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○

例2 「カ」 x^3 + 「キ」 x^2 + 「ク」 x + 「ケ」に $-x^3 + x^2 - 1$ と答えたいときは、「カ」に-1、「キ」に1、「ク」に0、「ケ」に-1を入れること。

- 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
- 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き解答用紙を裏返しにすること。
- いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。

$${}_{12}C_2 =$$

【問 1】

(1) 2, 3, 4, ..., 13 の 12 個の整数の中から異なる 2 個を無作為に取り出したとき,

それら 2 個の整数が互いに素となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ のとき, $x^{20} + x = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(3) $5^{n+5} > 11^n$ を満たす自然数 n は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある. ただし, $\log_5 11 = 1.49$ とする.

(1) ${}_{12}C_2 = 6 \cdot 11 = 66$

2 - 3, 5, 7, 9, 11, 13 ... 6

3 - 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, ~~14~~ ... 8

4 - 5, 6, 7, ——— 6

(余事象) ~~12~~ 12 とは 2, 2, 5, 7, 11, 13

12 - 10, 9, 8, 6, 4, 3, 2 ... 7

10 - 8, 6, 5, 4, 2 ... 4

9 - 6, 3 ... 2

8 - 6, 4, 2 ... 3

6 - 4, 3, 2 ... 3

4 - 2 ... 1

$$1 - \frac{\cancel{21}^7}{\cancel{66}^{22}} = \frac{15}{22}$$

(3) $5^{n+5} > 11^n$

$$n+5 > n \log_5 11 = 1.49n$$

$$0.49n < 5$$

$$n < \frac{5}{0.49} = 10.2...$$

よって, 10 個

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ より $x^3 - 1 = 0$ $\therefore x^3 = 1$.

$$x^{20} = (x^3)^6 \cdot x^2 = x^2$$

$$x^{20} + x + 1 = x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x^{20} + x = -1$$

$$(0,0) \quad \underbrace{\log_4 16}_2 \geq \frac{3}{2} + \underbrace{2 \log_{16} 2}_{\frac{1}{4}} = 2 \quad (OK)$$

【問2】
不等式

$$\log_4(16 - x^2 - y^2) \geq \frac{3}{2} + 2 \log_{16}(2 - x)$$

を満たす点 $P(x, y)$ の中で、 x 座標と y 座標がともに整数であるものは オ 個ある。
このうち、 x 座標が最小となる点は (カ, キ) である。

まず、

$$2\sqrt{3} = 3.4$$

$$16 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 16.$$

$$2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

$$\therefore \log_{16}(2-x) \geq \frac{\log_4(2-x)}{\log_4 16} = \log_4(2-x).$$

$$\log_4 \frac{16 - x^2 - y^2}{2 - x} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{16 - x^2 - y^2}{2 - x} \geq 4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

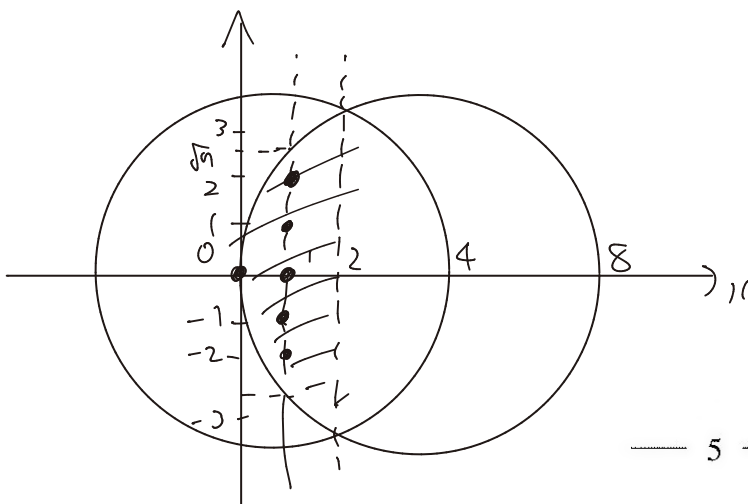
$$16 - x^2 - y^2 \geq 16 - 8x$$

$$x^2 - 8x + y^2 \leq 0$$

$$(x - 4)^2 + y^2 \leq 16$$

$$\underline{67}$$

$$x_{\min} \rightarrow \underline{(0, 0)}$$



$$\vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

【問3】

座標空間における2点A(2, -3, -1)とB(3, 0, 1)を通る直線を l_1 とし、直線 l_1 に関して点C(1, 5, -2)と対称な点をDとすると、Dの座標は(, ,)である。また、点Dを通り l_1 と平行な直線を l_2 とし、点Pが直線 l_2 上を、点Qがxy平面上の直線 $y = -x + 4$ 上をそれぞれ自由に動くとき、 $|\vec{PQ}|^2$ の最小値は である。

CDの中点MがAB上でCM⊥AB

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OB}, (\vec{OM} - \vec{OC}) \cdot \vec{AB} = 0.$$

∴ A, B, M が同一直線上.

$$\vec{OM} = (1-k)\vec{OA} + k\vec{OB}$$

$$= (1-k) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k+2 \\ 3k-3 \\ 2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k-8 \\ 2k+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{OM} - \vec{OC}) \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k-8 \\ 2k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (k+1) + (9k-24) + (4k+2)$$

$$= 14k - 21 = 0$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OM} - \frac{1}{2}\vec{OC}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} q \\ q+4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{OQ}|^2 = q^2 + (q+4)^2 = 2q^2 + 8q + 16$$

$$\vec{OP} = \vec{OB} + p\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p+6 \\ 3p-2 \\ 2p+6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PQ}|^2 = |\vec{OP} - \vec{OQ}|^2 = \left| \begin{pmatrix} p-q+6 \\ 3p+q-6 \\ 2p+6 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{6}{7}(q^2 - 14q + 49) - \frac{6 \cdot 14}{7} = (p^2 + q^2 + 36 - 2pq + 12p - 12q) \\ & + (9p^2 + q^2 + 36 + 6pq - 36p - 12q) \\ & + (4p^2 + 24p + 36) \end{aligned}$$

$$= 14p^2 + (4q)p + (2q^2 - 24q + 36 \cdot 3)$$

$$= 2 \{ 7p^2 + 2q p + (q^2 - 12q + 54) \}$$

$$= 2 \left\{ 7 \left(p + \frac{1}{7}q \right)^2 + \left(\frac{6}{7}q^2 - 12q + 54 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}|^2 &= 2 \left\{ 7 \left(p + \frac{1}{7}q \right)^2 + \frac{6}{7}(q^2 - 14q) + 54 \right\} \\ &= 2 \left\{ 7 \left(p + \frac{1}{7}q \right)^2 + \frac{6}{7}(q-7)^2 + 12 \right\} \\ &= 2 \left\{ 7 \left(p + \frac{1}{7}q \right)^2 + \frac{6}{7}(q-7)^2 \right\} + 24 \end{aligned}$$

【問 4】

関数 $y = e^x \sin x$ は $x = a$ ($0 < a < \pi$) において極値をとる。このとき、 $a = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi$ である。また、曲線 $y = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq a$) と直線 $x = \boxed{a}$ および x 軸によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は、

$$p = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ として、 } V = \frac{\boxed{\text{タ}} e^{p\pi} + \boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi$$

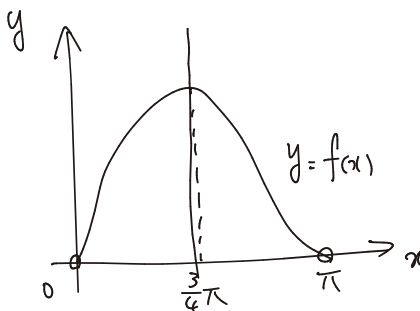
である。

$$f(x) = e^x \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x (\sin x + \cos x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

x	0	$\frac{3}{4}\pi$	π
f'		+ 0 -	
f	0	$\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	0

$$a = \frac{3}{4}\pi$$



$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \pi f(x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} \cos 2x dx \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} (e^{\frac{3}{2}\pi} - 1)$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{2x} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^t \cos t \frac{dt}{2}$$

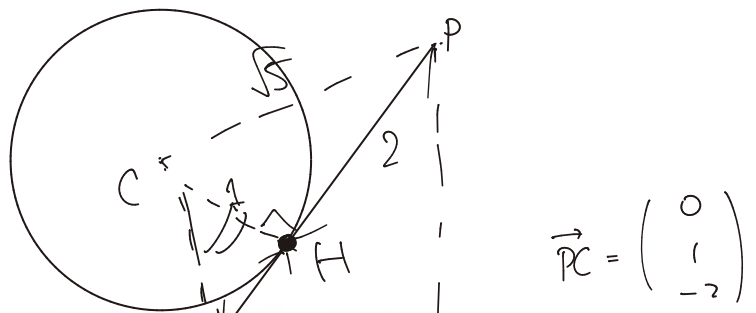
$$\begin{aligned} 2x = t \quad 2dx = dt \\ \frac{0}{2\pi} = 1 \quad \frac{3}{2\pi} = 1 \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} e^t \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{8} [e^t (\cos t + \sin t)]_0^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} (-e^{\frac{3}{2}\pi} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= e^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) + \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{3e^{\frac{3}{2}\pi} - 1}{8} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^x \cos x)' &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ +) (e^x \sin x)' &= e^x \cos x + e^x \sin x \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \right)' = e^x \cos x$$

$$p = \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad V = \frac{3e^{p\pi} - 1}{8} \pi$$



【問 5】

座標空間に点 $C(0, 1, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S がある．点 $P(0, 0, 3)$ から S に引いた接線と xy 平面との交点を Q とする． $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = t|\overrightarrow{PQ}|$ と表すとき、 $t = \boxed{\text{テ}}$ である．点 Q は楕円上にあり、この楕円を

$$\frac{(x+b)^2}{a} + \frac{(y+d)^2}{c} = 1$$

とすると、

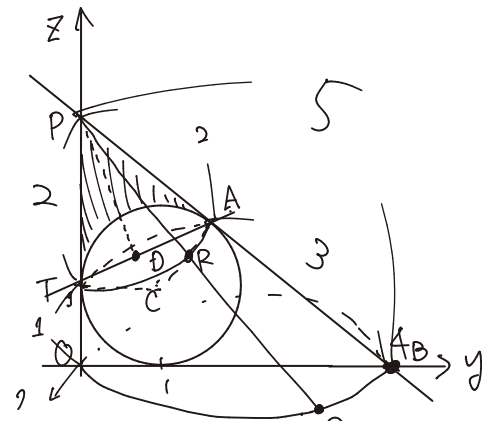
$$a = \boxed{\text{ト}}, b = \boxed{\text{ナ}}, c = \boxed{\text{ニ}}, d = \boxed{\text{ヌ}}$$

である．

また、点 P に点光源があるとき、球面 S で光が当たる部分を点 R が動く．ただし、球面 S は光を通さない．このとき、線分 PR が通過してできる図形の体積は、

$$2\pi \cdot \frac{\boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である．



【以下余白】

接線 PH と、 $|\overrightarrow{PH}| = 2$ (上の図)
 $\overrightarrow{PH} = r\overrightarrow{PQ}$ ($r \geq 1$)

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$|\overrightarrow{CH}| = 1.$$

$$(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PC}) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0.$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= r|\overrightarrow{PQ}|^2$$

$$= r|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|$$

$$= \underline{\underline{2}}|\overrightarrow{PQ}|$$

$$Q(x, y, 0)$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 \end{pmatrix} = y + 6.$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = x^2 + y^2 + 9.$$

$$\therefore y + 6 \geq 0 \text{ かつ}$$

$$(y + 6)^2 = 4(x^2 + y^2 + 9)$$

$$y^2 + 12y + 36$$

$$4x^2 + 3(y^2 - 4y) = 0$$

$$4x^2 + 3(y - 2)^2 = 3 \cdot 2^2$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

求めたいのは、



球の部分 \rightarrow \overrightarrow{AB}

を引いた部分の体積。

$$\overrightarrow{OA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OT} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \therefore \frac{1}{2}|\overrightarrow{TA}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \sqrt{4+81} = \frac{2}{5}$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PT} + \frac{1}{2}\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{PB}| = \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$(\text{直円錐の体積}) = \pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3} = 2\pi \cdot \frac{8\sqrt{5}}{75}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{PC}| - |\overrightarrow{PB}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(\text{球の部分}) = (\text{右図の斜線部分を x 軸まわりに回転させた部分})$$

$$= \int_{1/\sqrt{5}}^1 \pi(1-x^2)dx = \left[\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right) \right]_{1/\sqrt{5}}^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \pi\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{14\sqrt{5}}{75} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7\sqrt{5}}{75}\right) = \frac{14\sqrt{5}}{75}$$

$$V = 2\pi \cdot \left\{ \frac{8\sqrt{5}}{75} - \frac{1}{3} + \frac{7\sqrt{5}}{75} \right\} = 2\pi \cdot \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{3} \right\}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{15}$$