【問 1】

(1) $2, 3, 4, \cdots, 13$ の 12 個の整数の中から異なる 2 個を無作為にとり出したとき，それら 2 個の整数が互いに素となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ のとき，$x^{20} + x = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $5^{n+5} > 11^n$ を満たす自然数 n は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．ただし，$\log_5 11 = 1.49$ とする．

【解答】

(1) 異なる 2 個を無作為に取り出す全事象は ${}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$ 通り．取り出した 2 個が互いに素とならない事象（余事象）を考えると，

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(12,10) & (12,9) & (12,8) & (12,6) & (12,4) & (12,3) & (12,2) \\
(10,8) & (10,6) & (10,5) & (10,4) & (10,2) & (9,6) & (9,3) \\
(8,6) & (8,4) & (8,2) & (6,4) & (6,3) & (6,2) & (4,2)
\end{array}$$

の 21 通りある．よって，

$$1 - \frac{21}{66} = \frac{15}{22}$$

(2) $x^2 + x + 1 = 0$ より $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$．これより $x^3 = 1$．

$$\begin{aligned}
x^{20} + x &= (x^3)^6 \cdot x^2 + x \\
&= x^2 + x \\
&= -1
\end{aligned}$$

(3) $5^{n+5} > 11^n$ の両辺に底 5 の対数をとって，

$$\begin{aligned}
&n + 5 > n \log_5 11 = 1.49n \\
&0.49n < 5 \\
&\quad n < \frac{500}{49} = 10.2\cdots
\end{aligned}$$

より自然数 n は 10 個.

【問 2】

不等式

$$\log_4(16-x^2-y^2) \geqq \frac{3}{2} + 2\log_{16}(2-x)$$

を満たす点 P$\,(x,\,y)$ の中で，x 座標と y 座標がともに整数であるものは $\boxed{\text{オ}}$ 個ある．このうち，x 座標が最小となる点は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である．

【解答】

まず，真数条件から

$$\begin{cases} 16-x^2-y^2>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2<16 & \cdots\cdots ① \\ x<2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

また，

$$2\log_{16}(2-x) = 2\cdot\frac{\log_4(2-x)}{\log_4 16} = \log_4(2-x)$$

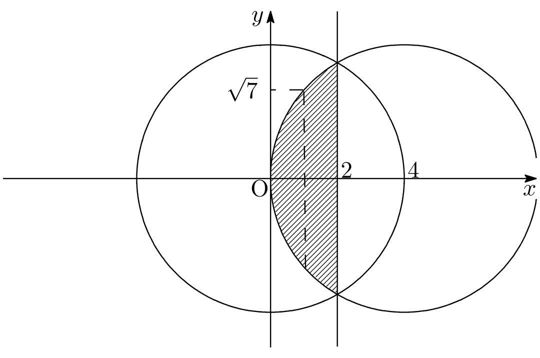
より，与えられた不等式は

$$\begin{aligned} \log_4(16-x^2-y^2) &\geqq \frac{3}{2} + \log_4(2-x) \\ \log_4\frac{16-x^2-y^2}{2-x} &\geqq \frac{3}{2} \\ \frac{16-x^2-y^2}{2-x} &\geqq 4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \\ 16-x^2-y^2 &\geqq 16-8x \\ x^2-8x-y^2 &\leqq 0 \\ (x-4)^2+y^2 &\leqq 16 \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

①, ②, ③ の共通部分を図示して右図斜線部を得る．境界は右側の円だけ含んでいる．$2<\sqrt{7}<3$ なので，領域にある格子点は

$$\begin{matrix} (0,0) & (1,0) & (1,1) \\ (1,-1) & (1,2) & (1,-2) \end{matrix}$$

の 6 つであり，x 座標が最小なのは $(0,\,0)$ である．



【問 3】

座標空間における 2 点 A$(2, -3, -1)$ と B$(3, 0, 1)$ を通る直線を l_1 とし，直線 l_1 に関して点 C$(1, 5, -2)$ と対称な点を D とすると，D の座標は $\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}\right)$ である．また，点 D を通り l_1 と平行な直線を l_2 とし，点 P が直線 l_2 上を，点 Q が xy 平面上の直線 $y = -x + 4$ 上をそれぞれ自由に動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ の最小値は $\boxed{\text{サ}}$ である．

【解答】

線分 CD の中点 M が AB 上にあり，CM $\perp$ AB を満たしているので，実数 k を用いて

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} & \cdots\cdots ① \\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と表せる．$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を消去する．まず，①, ③ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 3+2k \\ -11+6k \\ 4k \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ④$$

他方，②, ③ を用いて

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left((1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k-8 \\ 2k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 14k - 21 \end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \text{ より} \quad k = \frac{3}{2}$$

④ より D$(6, -2, 6)$.

ここで，点 P は D を通り l_1 に平行な直線上にあるので，実数 p を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + p\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せる．また，点 Q は xy 平面の直線 $y = -x + 4$ 上の点なので実数 q を用いて Q$(q, -q+4, 0)$ と表せる．いま，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} - p\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -p+q-6 \\ -3p-q+6 \\ -2p-6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= (-p+q-6)^2 + (-3p-q+6)^2 + (-2p-6)^2 \\ &= 14p^2 + 4qp + (2q^2 - 24q + 108) \\ &= 14\left(p + \frac{q}{7}\right)^2 + \frac{12}{7}(q-7)^2 + 24 \end{aligned}$$

以上より $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ の最小値は 24 である．

【問 4】

関数 $y=e^x\sin x$ は $x=a\,(0<a<\pi)$ において極値をとる．このとき，$a=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi$ である．また，曲線 $y=e^x\sin x\,(0\leqq x\leqq a)$ と直線 $x=a$ および x 軸によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は,

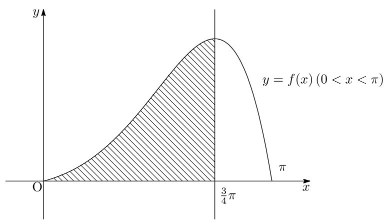
$$p=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\text{ として，}V=\frac{\boxed{タ}e^{p\pi}+\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$$

である.

【解答】

$f(x)=e^x\sin x$ とする．$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，以下のような増減表と図を得る．極値をとる x の値 a は $a=\dfrac{3}{4}\pi$ である.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}$	$\searrow$	0



また，上図の斜線部を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V は,

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\pi\bigl(f(x)\bigr)^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}e^{2x}\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}e^{2x}\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}e^{2x}\cos 2x\,dx\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}=\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{3}{2}\pi}-1\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}e^{2x}\cos 2x\,dx&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}e^t\cos t\,dt=\frac{\pi}{4}\Bigl[e^t(\cos t+\sin t)\Bigr]_0^{\frac{3}{2}\pi}\\&=\frac{\pi}{8}\left(-e^{\frac{3}{2}\pi}-1\right)\end{aligned}$$

$$\therefore V=\frac{3e^{\frac{3}{2}\pi}-1}{8}\pi$$

以上より $p=\dfrac{3}{2}$ として $V=\dfrac{3e^{p\pi}-1}{8}\pi$ である.

【問 5】

座標空間に点 C $(0,\ 1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S がある．点 P $(0,\ 0,\ 3)$ から S に引いた接線と xy 平面との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = t|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ と表すとき，$t = \boxed{テ}$ である．点 Q は楕円上にあり，この楕円を

$$\frac{(x+b)^2}{a} + \frac{(y+d)^2}{c} = 1$$

とするとき，

$$a = \boxed{ト},\ b = \boxed{ナ},\ c = \boxed{ニ},\ d = \boxed{ヌ}$$

である．

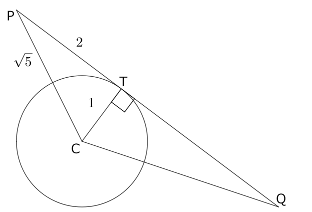
　また，点 P に点光源があるとき，球面 S で光が当たる部分を点 R が動く．ただし，球面 S は光を通さない．このとき，線分 PR が通過してできる図形の体積は，

$$2\pi \cdot \frac{\boxed{ネ} + \boxed{ノ} + \sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$$

である．

【解答】

　3 点 C, P, Q を含む平面による断面を右図に示す．$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = \sqrt{5}$ であるので, 直線 PQ と球 S の接点を T とすると, 右図より $|\overrightarrow{\mathrm{PT}}| = 2$ である．また, 3 点 H, P, Q は同一直線上にあるので, 実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と表すことができる．これより $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = k|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$.
また，CH $\perp$ PQ より，



$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$$

$$= 2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| \qquad \cdots\cdots ①$$

　ここで，Q $(x,\ y,\ 0)$ とおいて ① に代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 \end{pmatrix} = 2\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 \end{pmatrix}\right|$$

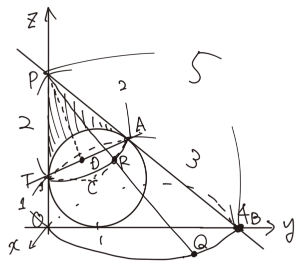
$$y + 6 = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 9}$$

$y+6 \geqq 0$ のもとで両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} y^2+12y+36 &= 4x^2+4y^2+36 \\ 4x^2+3(y^2-4y) &= 0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

これは $y+6 \geqq 0$ を自動的に満たす.

右図を参照して，線分 AT を直径とする円のうち，その円を含む平面と直線 PD が直交するような円を E とする．また，円 E を含む平面 α で球 S で切って球 S を 2 つに分けたときに中心 C を含まないほうの立体を S' とする．このとき，線分 PR の通過領域 K は,



円 E を底面，P を頂点とする直円錐 $\tilde{K}$ から立体 S' を除いた部分

である.

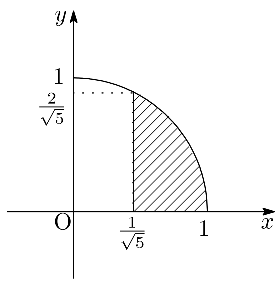
ここで，B (0, 4, 0), T (0, 0, 1) であり，yz 平面上において P から球 S の断面に接線を引いたときの接線の長さは等しいので，PA $=2$ である．また，A の座標，円 E の半径 r および $\tilde{K}$ の高さ h を求めると，$\tilde{K}$ の体積 V_1 がわかる.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\8\\9\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{TA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix},\quad \therefore r=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{TA}}|=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{TA}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix},\qquad \therefore h=|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore V_1=\frac{1}{3}\pi r^2 h=2\pi\cdot\frac{8\sqrt{5}}{75}$$

他方，PC $=\sqrt{5}$，PD $=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ より CD $=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である．S' は右図の斜線部を x 軸のまわりに回転させた立体に等しい．その体積 V_2 は



$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1}\pi(1-x^2)\,dx=\left[\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{1} \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{7\sqrt{5}}{75}\right) \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned} V=V_1-V_2 &= 2\pi\cdot\frac{8\sqrt{5}}{75}-2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{7\sqrt{5}}{75}\right) \\ &= 2\pi\cdot\frac{-5+3\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$