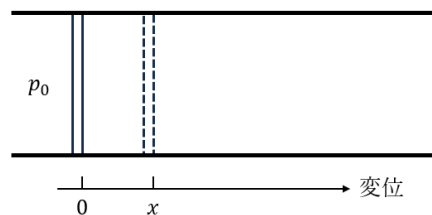


第3問

図のようにピストンを持つ気密なシリンダーを水平に保ち、内部に比熱比 γ の理想気体を入れて圧力 p_0 の大気中に置いた。ピストンのつりあいの位置を $x = 0$ とし、ピストンの質量と底面積をそれぞれ m, S とする。またこのときのシリンダー内の気体の体積を V_0 とする。気体定数を R 、ピストンとシリンダー間の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えよ。 $|z| \ll 1$ の場合、近似式 $(1+z)^\alpha \approx 1 + \alpha z$ を用いよ。



- (1) 気体の温度を一定に保ったままピストンを x だけ押した。このときのシリンダー内の気体の圧力 p_x を求めよ。押したときのピストンの位置は図中に点線で示してある。ただし、 $|x| \leq a \ll V_0/S$ とする。
- (2) 時刻 $t = 0$ において微小変位 $x = a (> 0)$ からピストンを放したところ、ピストンは往復運動を始めた。シリンダー内の気体の温度が一定に保たれているとして、周期 T を求め、 x を t の関数として表せ。
- (3) シリンダー内の気体への熱の出入りがなかったとき、(2) の場合（温度が一定）に比べてピストンの往復運動の周期は何倍になるか。

【解答】

- (1) ボイルの法則より

$$p_x(V_0 - Sx) = p_0 V_0$$

$$p_x = \frac{V_0}{V_0 - Sx} p_0 = \left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right)^{-1} p_0$$

$|x| \ll V_0/S$ より $\frac{S|x|}{V_0} \ll 1$ であるので与えられた近似式より

$$p_x = \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right) p_0$$

- (2) 時刻 t におけるピストンの速度を v 、加速度を α とする。運動方程式より

$$m\alpha = p_0 S - p_x S$$

$$\alpha = -\frac{p_0 S^2}{mV_0} x$$

よって、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{p_0 S^2}{mV_0}}$ の単振動をする。周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mV_0}{p_0 S^2}}$$

である。また、初期条件 $t = 0$ で、 $x = a$, $v = 0$ であるので、

$$x(t) = a \cos \omega t = a \cos \sqrt{\frac{p_0 S^2}{m V_0}} t$$

- (3) ピストンの内部の気体分子の物質量を n , $x = 0$ のときの気体の温度を T_0 とする。そこから微小だけ変位した位置 x にピストンがあるときの圧力、体積および温度の変化量をそれぞれ Δp , ΔV , ΔT とすると、 $\Delta V = -Sx$ である。このとき気体の状態方程式より

$$p_0 V_0 = n R T_0 \quad (1)$$

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = n R (T_0 + \Delta T) \quad (2)$$

②において2次の微小量は無視できて

$$p_0 V_0 + \Delta p V_0 + p_0 \Delta V = n R T_0 + n R \Delta T$$

①を用いて

$$\Delta p V_0 + p_0 \Delta V = n R \Delta T$$

$p_0 V_0 (= n R T_0)$ でさらに割って

$$\frac{\Delta p}{p_0} + \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \quad (3)$$

一方で熱力学第一法則より

$$0 = \frac{n R \Delta T}{\gamma - 1} + (p_0 + \Delta p) \Delta V$$

$$\frac{n R \Delta T}{\gamma - 1} = -p_0 \Delta V$$

両辺を $p_0 V_0 (= n R T_0)$ で割って、

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (1 - \gamma) \frac{\Delta V}{V_0} \quad (4)$$

③と④より

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\gamma S}{V_0} x$$

$$p_0 = -\frac{\gamma p_0 S}{V_0} x$$

ここで，運動方程式は

$$\begin{aligned} m\alpha &= p_0 S - (p_0 + \Delta p)S \\ &= -\Delta p S \\ \alpha &= -\frac{\gamma p_0 S^2}{mV_0}x \end{aligned}$$

よってピストンは角振動数 $\omega' = \sqrt{\gamma \frac{p_0 S^2}{mV_0}} = \sqrt{\gamma} \omega$ で単振動を行う．したがって，周期 T' は

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}\omega} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}T$$

となり，周期は $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ 倍になる．