第 1 問

図 1 のように，質量 $2M$ の物体 A と質量 M の物体 B が，ばね定数 k の質量の無視できるばねによってつながれて，なめらかで水平な床の上で静止していた．また，物体 A はかたい壁に接していた．床の上を左向きに進んできた物体 C が，物体 A に完全に弾性衝突して，跳ね返された．麦向きを正の向きと定めると，衝突直後の物体 C の速度は $+u_1\,(u_1 > 0)$，物体 A の速度は $-v_1\,(v_1 > 0)$ であった．その後，物体 B と物体 C が再び衝突することはなかった．

I まず，衝突前から物体 A が壁から離れるまでの運動を考える．

(1) 衝突前の物体 C の速度を $u_0\,(u_0 < 0)$ を u_1 と v_1 を用いて表せ．

(2) ばねが最も縮んだときの自然長からの縮み $x\,(x > 0)$ を求めよ．

(3) 衝突してからばねの長さが自然長に戻るまでの時間 T を求めよ．

II ばねの長さが自然長に戻ると，その直後に物体 A が壁から離れた．

(1) やがて，ばねの長さは最大値に達し，そのとき物体 A と物体 B の速度は等しくなった．その速度 v_2 を求めよ．

(2) ばねの長さが最大値に達したときの自然長からの伸び $y\,(y > 0)$ を求めよ．

(3) その後ばねが縮んで，長さが再び自然長に戻ったとき，物体 A の速度は最大値 V に達した．V を求めよ．

III 物体 A が壁から離れた後，物体 B と物体 C の間隔は，ばねが伸び縮みを繰り返すたびに広がっていった．このことからわかる u_1 と v_1 の関係を，不等式で表せ．

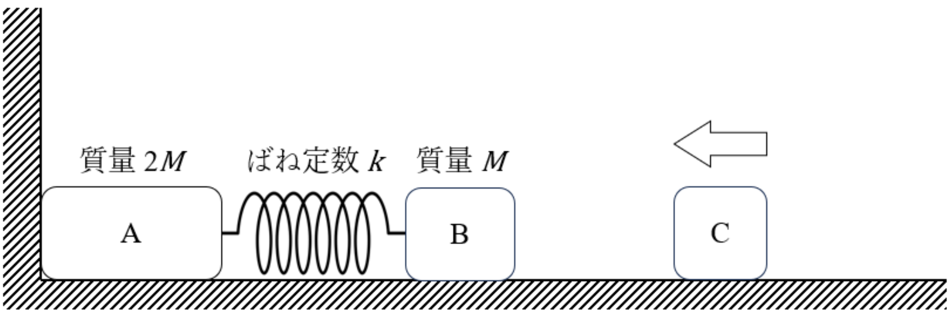

図 1

【解答】

I (1) 完全弾性衝突なので相対速度が変わらない.

$$u_0 = -(u_1 + v_1)$$

(2) エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}M{v_1}^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \therefore\ x = v_1\sqrt{\frac{M}{k}}$$

(3) ばねの単振動の半周期分経ってはじめて自然長に戻るので

$$T = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

II (1) 運動量保存則より

$$Mv_1 = (M + 2M)v_2 \qquad \therefore\ v_2 = \frac{v_1}{3}$$

(2) エネルギー保存則より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M{v_1}^2 &= \frac{1}{2}(M+2M){v_2}^2 + \frac{1}{2}ky^2\\ ky^2 &= \frac{2}{3}M{v_1}^2\\ \therefore\ y &= v_1\sqrt{\frac{2M}{3k}}\end{aligned}$$

(3) B の速度を v として

$$\begin{aligned}\text{運動量保存則：}\quad & Mv_1 = Mv + 2MV\\ \text{エネルギー保存則：}\quad & \frac{1}{2}M{v_1}^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot 2MV^2\end{aligned}$$

より

$$V = \frac{2}{3}v_1$$

III A と B を一体としてみたとき，その重心速度は v_2 で一定である．これが u_1 より小さいことが条件である.

$$v_2 > u_1 \qquad \therefore\ v_1 > 3u_1$$