第 2 問

図 1 のように，電荷の蓄えられていない静電容量 C のコンデンサーと，自己インダクタンス L のコイルを上下につけた長方形の回路 pqrs を，十分長い辺 pq が鉛直に，他の辺 ps が水平になるように固定した．この回路に，辺 ps と同じ長さ l で質量 M の導体棒 XY を接触させた．ここで，導体棒は水平を保ったまま，両方の長辺と接触しながらなめらかに動き，接触点での電気抵抗は無視できるものとする．なお，回路全体には，面 pqrs と垂直に紙面の表から裏へ向かって，一定で一様な磁束密度 B の磁場が加えられている．

導体棒をこの回路上で静止させ，時刻 $t=0$ で静かにはなすと，導体棒は下方に運動を始めた．$t=0$ での辺 pq 上の X の位置を原点として，鉛直下向きに x 軸をとり，時刻 $t\,(t>0)$ での，導体棒の座標を x，鉛直下向きの速度と加速度を v と a，また，重力加速度の大きさを g とする．ただし，$t=0$ では回路や導体棒に電流は流れておらず，また，この回路から漏れる電場や磁場，回路と導体棒の電気抵抗，および空気抵抗は，すべて無視できるものとする．

また，図 1 のようにコンデンサーに流れる電流を I'，コイルに流れる電流を I とする．ただし，I' と I はそれぞれ図 1 の矢印の向きを正とする．

(1) 導体棒とコンデンサーからなる閉じた経路 (X→Y→s→p→X) について考える．

(a) 時刻 t でのコンデンサーの s 側の電極の電荷を Q とするとき，Q の導体棒の速度 v とその他必要なものを用いて表せ．

(b) 時刻 t から微小な時間 Δt の間に Q と v がそれぞれ ΔQ，Δv だけ変化したとすると，電流 I' は $I'=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ であり，導体棒の加速度は $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ である．I' を a と B およびその他必要なものを用いて表せ．

(2) 導体棒とコイルからなる閉じた経路 (X→Y→r→q→X) について考える．時刻 t から微小な時間 Δt の間に I と x がそれぞれ ΔI，Δx だけ変化したとする．導体棒の速度は $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ であること，および $t=0$ では $I=0$，$x=0$ であることを使って，I と x とその他必要なものを用いて表せ．

(3) 導体棒にはたらくすべての力を考え，導体棒の運動方程式を I' および I とその他必要なものを用いて表せ．

(4)（3）で求めた運動方程式に（1）と（2）で求めた I' と I の結果を代入すると，導体棒は単振動をすることがわかる．その各振動数 ω と振動の中心の座標 x_0 を M, g, B, l, C, L の中から必要なものを用いて表せ．

(5) I のとる最小値と最大値を M, g, B, l, C, L の中から必要なものを用いて表せ．

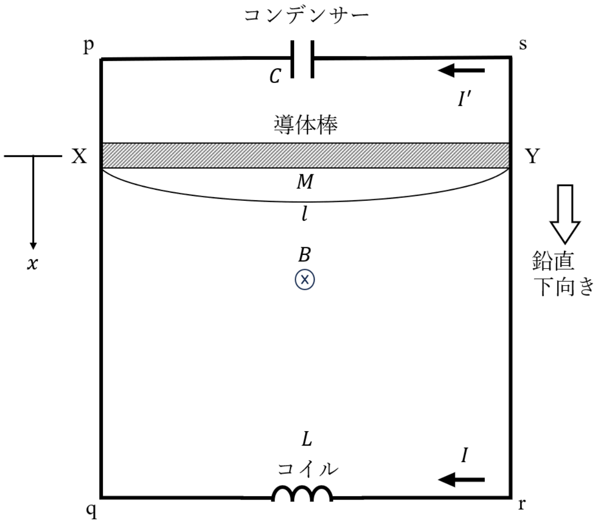
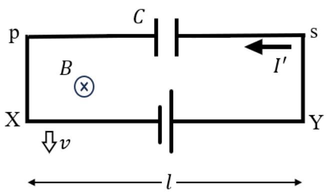


図 1

【解答】

(1)（a）レンツの法則より，X→Y の向きに誘導電流が流れるので，コンデンサーの s 側極板の電荷 Q は正である．また，時刻 t における誘導起電力の大きさは lvB である．



$$Q = +C(lvB) = ClvB$$

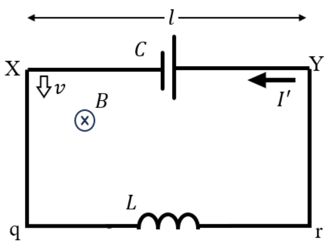
(b)（a）と同様に考えると，

$$Q + \Delta Q = Cl(v + \Delta v)B$$
$$\Delta Q = ClB\Delta v$$

であるので，

$$I' = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{ClB\Delta v}{\Delta t} = ClBa$$

(2) Δt の間に流れる電流 I が ΔI だけ変化したとき，コイルに生じる誘導起電力は $-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ である．キルヒホッフの法則より



$$lvB - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$
$$lB\frac{\Delta x}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$
$$\therefore \ \frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{lB}{L}$$

$\frac{\Delta I}{\Delta x}$ が定数ということは，I は x の一次式で表されるということである．時刻 $t=0$ において $x=0,\ I=0$ なので

$$I=\frac{lB}{L}x$$

(3) 導体棒には X→Y の向きに電流 $(I+I')$ が流れているので, 電流が磁場から受ける力 $l(I+I')B$ が鉛直上向きにはたらく．運動方程式より

$$Ma=Mg-l(I+I')B$$

(4)（3）の運動方程式に（1）（b）と（2）の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} Ma&=Mg-l\left(\frac{lB}{L}x\right)B-l(ClBa)B\\ (M+Cl^2B^2)a&=Mg-\frac{l^2B^2}{L}x\\ \therefore\ a&=-\frac{l^2B^2}{L(M+Cl^2B^2)}\left(x-\frac{MgL}{l^2B^2}\right)\end{aligned}$$

が得られる．これより導体棒は角振動数 $\omega=\frac{lB}{\sqrt{L(M+Cl^2B^2)}}$ で単振動をし，振動中心の座標 x_0 は $x_0=\frac{MgL}{l^2B^2}$ である。

(5) $t=0$ で $x=0$ であるから，単振動の振幅は x_0 である．よって，導体棒の動く範囲は $0\leqq x\leqq 2x_0$ である．コイルを流れる電流 I の最大値と最小値を $I_{\min}$，$I_{\max}$ とすると

$$\begin{aligned} I_{\min}&=0\\ I_{\max}&=\frac{lB}{L}\cdot\frac{2MgL}{l^2B^2}=\frac{2Mg}{lB}\end{aligned}$$