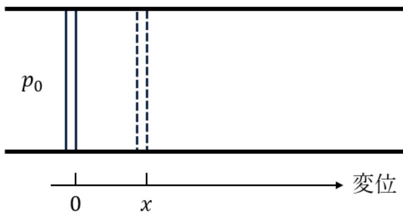
第 3 問



図のようにピストンを持つ気密なシリンダーを水平に保ち，内部に比熱比 γ の理想気体を入れて圧力 p_0 の大気中に置いた．ピストンのつりあいの位置を $x=0$ とし，ピストンの質量と底面積をそれぞれ m, S とする．またこのときのシリンダー内の気体の体積を V_0 とする．気体定数を R，ピストンとシリンダー間の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えよ．$|z| \ll 1$ の場合，近似式 $(1+z)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha z$ を用いよ．

(1) 気体の温度を一定に保ったままピストンを x だけ押した．このときのシリンダー内の気体の圧力 p_x を求めよ．押したときのピストンの位置は図中に点線で示してある．ただし，$|x| \leqq a \ll V_0/S$ とする．

(2) 時刻 $t=0$ において微小変位 $x=a\,(>0)$ からピストンを放したところ，ピストンは往復運動を始めた．シリンダー内の気体の温度が一定に保たれているとして，周期 T を求め，x を t の関数として表せ．

(3) シリンダー内の気体への熱の出入りがないとしたとき，(2) の場合（温度が一定）に比べてピストンの往復運動の周期は何倍になるか．

【解答】

(1) ボイルの法則より

$$p_x(V_0 - Sx) = p_0 V_0$$

$$p_x = \frac{V_0}{V_0 - Sx}\,p_0 = \left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right)^{-1} p_0$$

$|x| \ll V_0/S$ より $\frac{S|x|}{V_0} \ll 1$ であるので与えられた近似式より

$$p_x = \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right) p_0$$

(2) 時刻 t におけるピストンの速度を v，加速度を α とする．運動方程式より

$$m\alpha = p_0 S - p_x S$$

$$\alpha = -\frac{p_0 S^2}{mV_0}x$$

よって，角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{p_0 S^2}{mV_0}}$ の単振動をする．周期 T は,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{p_0 S^2}}$$

である．また，初期条件 $t=0$ で，$x=0,\ v=0$ であるので，

$$x(t)=a\cos\omega t=a\cos\sqrt{\frac{p_0S^2}{mV_0}}t$$

(3) ピストンの内部の気体分子の物質量を n，$x=0$ のときの気体の温度を T_0 とする．そこから微小だけ変位した位置 x にピストンがあるときの圧力，体積および温度の変化量をそれぞれ $\Delta p,\ \Delta V,\ \Delta T$ とすると，$\Delta V=-Sx$ である．このとき気体の状態方程式より

$$p_0V_0=nRT_0 \quad ①$$
$$(p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V)=nR(T_0+\Delta T) \quad ②$$

②において 2 次の微小量は無視できて

$$p_0V_0+\Delta pV_0+p_0\Delta V=nRT_0+nR\Delta T$$

①を用いて

$$\Delta pV_0+p_0\Delta V=nR\Delta T$$

$p_0V_0(=nRT_0)$ でさらに割って

$$\frac{\Delta p}{p_0}+\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{\Delta T}{T_0} \quad ③$$

一方で熱力学第一法則より

$$\begin{aligned}0&=\frac{nR\Delta T}{\gamma-1}+(p_0+\Delta p)\Delta V\\ \frac{nR\Delta T}{\gamma-1}&=-p_0\Delta V\end{aligned}$$

両辺を $p_0V_0(=nRT_0)$ で割って，

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\Delta T}{T_0}=-\frac{\Delta V}{V_0}$$
$$\frac{\Delta T}{T_0}=(1-\gamma)\frac{\Delta V}{V_0} \quad ④$$

③と④より

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p}{p_0}&=-\gamma\frac{\Delta V}{V_0}=-\frac{\gamma S}{V_0}x\\ p_0&=-\frac{\gamma p_0S}{V_0}x\end{aligned}$$

ここで，運動方程式は

$$\begin{aligned} m\alpha &= p_0S - (p_0 + \Delta p)S \\ &= -\Delta p S \\ \alpha &= -\frac{\gamma p_0 S^2}{mV_0}x \end{aligned}$$

よってピストンは角振動数 $\omega' = \sqrt{\gamma\frac{p_0S^2}{mV_0}} = \sqrt{\gamma}\,\omega$ で単振動を行う．したがって，周期 T' は

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}\omega} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}T$$

となり，周期は $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ 倍になる．