最終更新日：2023 年 12 月 16 日

テスト演習

実施日：2023 年 12 月 16 日

第 1 問

一様な材質でできた薄い剛体円板の水平面上での運動を考えよう．本問を通して，摩擦や空気抵抗はすべて無視する．したがって，円板は並進運動のみを行い，回転することはない．

I　図 1 のように，質量が m, M で同じ大きさの 2 つの剛体円板の間に，ばね定数が k である厚みと質量の無視できるばねをはさみ，両側から力を加えてばねを l だけ縮ませた状態で，なめらかな水平面上に固定する．その後静かに固定を解いた．ばねの長さが自然長に戻ったときの質量 m の円板の速さ v を k, l, m, M を用いて表せ．

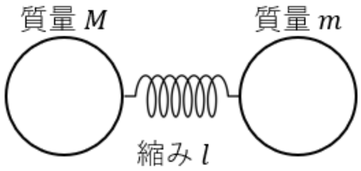

図 1

II　質量が m_{A}, m_{B} の剛体円板が A，B がある．静止している B に速さ v_0 で A が衝突した結果，それぞれの速さは v_{A}, v_{B} となり，それぞれの速度の向きは A の入射方向に対して θ, ϕ となった．ここで図 2 のように A の入射方向に x 軸，それと垂直な方向に y 軸をとる．

(1)　衝突前後の運動量保存則の式を，x 軸方向と y 軸方向に分けて書け．

(2)　2 つの剛体円板の大きさを無視し，はじめに B が静止していた位置を原点とし，$m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}}$ とする．このとき，衝突後の角度が $\theta = 30°$, $\phi = 60°$ になった．A が座標 $(9,\ 3\sqrt{3})$ に達したとき，B が達する点の座標を求めよ．

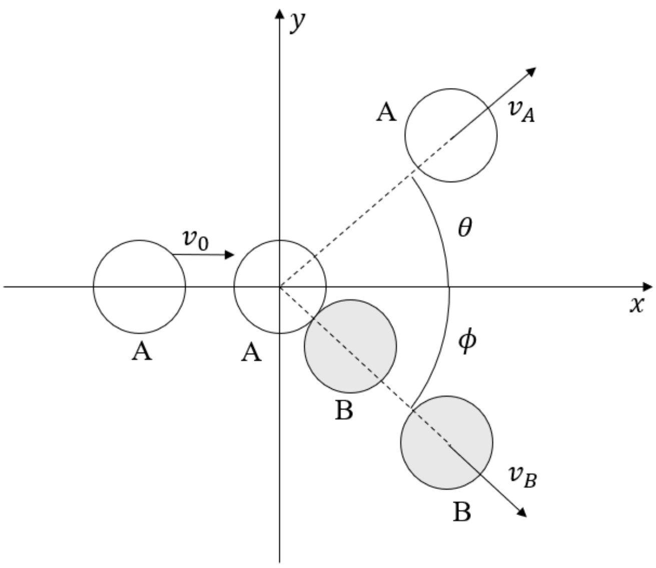

図 2

Ⅲ 同じ半径で同じ質量 m の 4 つの剛体円板 1，2，3，4 を，図 3 のように水平面上に配置して静止させる．円板 1 と 4 の中心を結ぶ直線を x 軸とし，それと垂直な方向 y 軸をとる．まず，x 軸負の方向から 4 つの円板と同じ質量で同じ半径の剛体円板 0 を速さ u_0 で衝突させる．その後の様子を次の 3 段階に分けて考えてみよう．ただし，それぞれの衝突はすべて弾性衝突であるとする．

（ⅰ） 剛体円板 0 と 1 の衝突

（ⅱ） 剛体円板 1 と 2，1 と 3 の同時衝突

（ⅲ） 剛体円板 2 と 4，3 と 4 の同時衝突

(1) （ⅰ）の衝突直後の剛体円板 1 の速さ u_1 を求めよ．ここではまだ，剛体円板 1 は 2，3 と衝突していないものとする．

(2) 次に（ⅱ）の衝突を考える．ここではまだ，剛体円板 2，3 は 4 と衝突していないものとする．円板 2 には 1 からの力積のみが作用するので，衝突直後，その速度の向きは円板 1，2 の中心を結ぶ直線に沿った向きとなる．衝突直後の円板 1 の速度の x 成分を v_1，円板 2 の速さを u_2 とする．対称性より，円板 2 と 3 の速度は x 軸に関して対称でその速さは等しくなることに注意して，速さの比 $\dfrac{|v_1|}{u_1}$，$\dfrac{u_2}{u_1}$ をそれぞれ求めよ．

(3) （ⅲ）の衝突直後の剛体円板 2，4 の速さをそれぞれ v_2，v_4 とし，また，2 の速度の向きと x 軸の向きとのなす角度を θ_2 とする．速さの比 $\dfrac{v_2}{u_2}$ と $\dfrac{v_4}{u_2}$，および $\tan\theta_2$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) すべての衝突が終わった後の剛体円板 1 の速度を w_1 とするとき，速さの比 $\dfrac{|w_1|}{u_2}$ を求めよ．

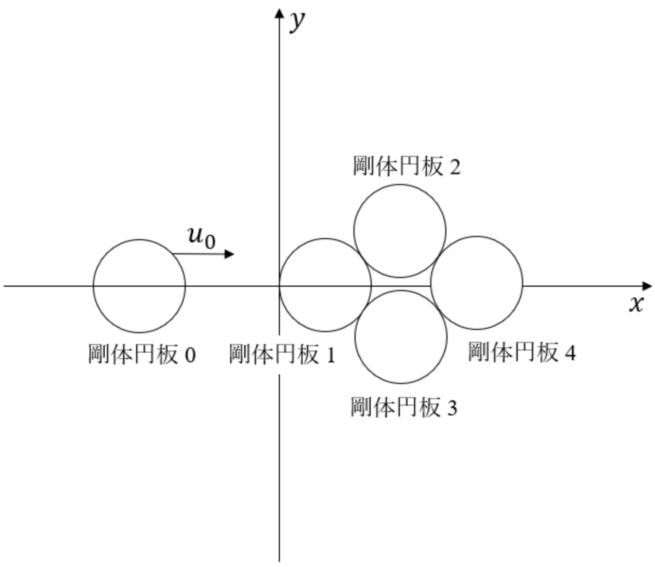

図 3

第2問

電場の中に置かれた正電荷を，電場から受ける力の向きに少しずつ移動させると，1本の線が得られる．この線に沿って正電荷の移動の向きに矢印をつけたものを電気力線という．電場の強さが E のところでは，電場に垂直な単位面積あたり E 本の割合で電気力線を描く．すなわち，電気力線は電場の様子を図で表現したものといえる．この電場の中に導体をおくと静電誘導が起こるが，その後十分に時間が経ち，電流が流れていない状態になると，以下のことが成り立つ．

(i) 導体内部の電場は0となり，導体全体は等電位になる．
(ii) 電気力線は，導体表面に垂直に出入りする．
(iii) 電荷は導体内部には現れず，その表面だけに分布する．

また，電荷分布と電気力線の関係として
「任意の閉じた曲面（閉曲面）の内部から外部に出る向きを正として，電気力線の本数は閉曲面内部の電荷の総和を q とするとき，$4\pi kq$ 本である．」
が成り立つ．これはガウスの法則と呼ばれ，k はクーロンの法則の比例定数である．

以上述べてきたことをもとに以下の設問に答えよ．

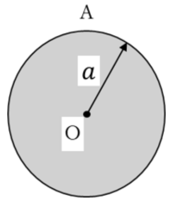

図1

I 図1のような半径 a の導体球Aの表面に，正の電荷 Q が一様に分布している場合を考える．

(1) 導体球Aの中心Oからの距離 r の位置における電場の強さ $E(r)$ を，$r > a$, $r < a$ のそれぞれに対して求めよ．

(2) 導体球Aの中心Oからの距離 r の位置における電位 $\phi(r)$ を，r の関数として求めよ．また，その様子を縦軸に ϕ，横軸に r をとってグラフに描け．ただし，電位 ϕ の基準の位置を無限遠にとること．

(3) 導体球Aと無限遠は1つのコンデンサーを形成していると考えることができる．前問(2)の結果から，このコンデンサーの電気容量 C_A を求めよ．

II 次に，内半径 $b\,(> a)$，外半径 $b+\delta$ の薄い中空導体球Bの中に，半径 a の導体球Aをその中心OがBの中心と一致するように配置する．以下の設問においても電荷分布の点Oに関する球対称性は保たれているものとする．

(1) 図2のようにAに正の電荷 Q を与え，Bを十分遠方で接地（アース）する．このとき，AB間の電位差 V_{AB} を求めよ．また，この系をコンデンサーと考えたときの電気容量 C_1 を求めよ．

(2) 次に，図3のように，Aに被覆された導線をつなぎ，Bにあけた小穴を通してBの外側の十分遠方まで導線を伸ばしてAを接地し，Bの正の電荷 Q を与える．この系のコンデンサーとしての電気容量 C_2 およびAB間の電位差 V'_{AB} を求めよ．このとき，導線は十分に細いので，小穴部分の導線表面に分布する電荷は無視でき，また被覆物の影響も無視できるものとしてよい．

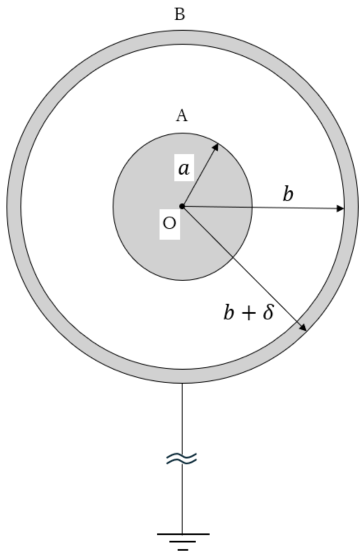

図 2

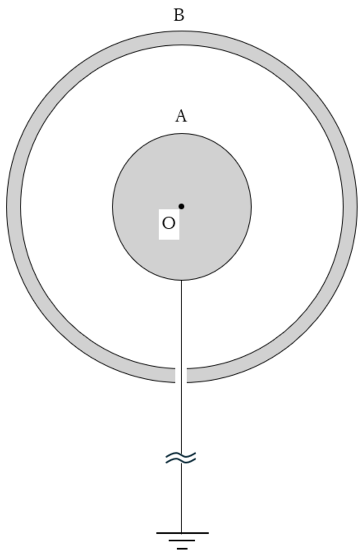

図 3

第3問

円筒部分と漏斗部分からなる同形の 2 つの容器 A と B の漏斗部分の先どうしをコックのついた細管でつないで，内部に単原子分子理想気体と液体を封入する．容器 A，B はともに容積が V_0 であり，液体の体積は V_1 ($V_1 < V_0$) で温度によらず一定である．液体の蒸気圧は無視できるものとする．細管は十分に細く，細管部分の体積は無視できる．細管内に液体が入っているときは，容器 A，B 内の気体は混ざらない．

はじめ，液体がすべて容器 A に入っている状態でコックを閉じ，容器 A を上に，容器 B を下にして鉛直に立てて置いた（図 1(a)；以下，状態 (a) と呼ぶ）．このとき，容器 A，B 内の気体はどちらも圧力が P_0 で絶対温度（以下，単に温度という）が T_0 であった．コックを開くと液体は少量ずつ容器 B 内に落下していき，液体がほぼすべて落下してもまだ細管内に液体が残って容器 A，B 内の気体が分けられている状態（図 1(b)；以下，状態 (b) と呼ぶ）になった．その後，細管内の液体も容器 B 内に落下して容器 A，B 内の気体が混合されて，容器 A，B 内の気体は圧力，温度とも一様の状態（図 1(c)；以下，状態 (c) と呼ぶ）になった．なお，状態 (b)，(c) のおいて，液体の上面は水平になっていた．液体の落下には十分に時間がかかり，状態 (a) から (b) への変化において，気体は十分ゆっくり変化する（準静的な変化をする）ものとする．以下の設問に答えよ．

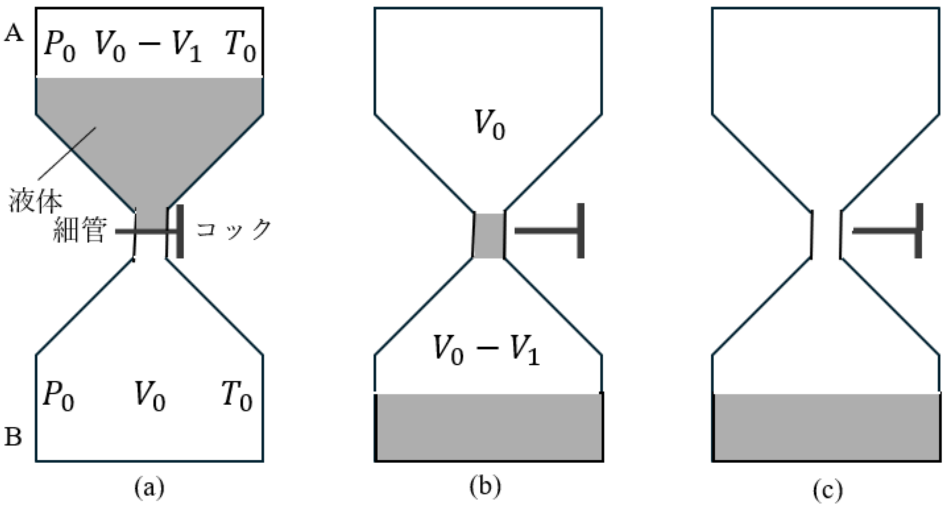

図 1

I まず，容器内の気体の温度がつねに一定に保たれる場合を考える．

(1) 状態 (a) において，容器 A，B 内の気体の物質量をそれぞれ n_A, n_B とする．n_A と n_B の比を V_0 と V_1 を用いて表せ．

(2) 状態 (b) において，容器 A，B 内の気体の圧力をそれぞれ P_A, P_B とする．P_A と P_B の比を V_0 と V_1 を用いて表せ．

(3) 状態 (a) から状態 (b) に変化する間の，容器 A，B 内のそれぞれの気体の状態変化の様子を，縦軸に体積 V，横軸に圧力 P を取ったグラフ (P–V グラフ) 上に描け．ただし，圧力 P_0,

P_{A}，P_{B} を縦軸に明記し，また，容器 A 内の気体の変化は実線で，容器 B 内の気体の変化は破線で示せ．

(4)　状態 (a) から状態 (b) に変化する間に，容器 A 内の気体が吸収した熱量を Q_{A}，容器 B 内の気体が吸収した熱量を Q_{B} とする．$|Q_{\mathrm{A}}|$ と $|Q_{\mathrm{B}}|$ の大小関係を答えよ．また，設問 I (3) で描いたグラフの中で，面積の値が $|Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}|$ のエネルギー量と等しくなる領域を，斜線で塗りつぶして示せ．

(5)　状態 (c) において，容器内の気体の圧力を求めよ．

II 次に，装置全体を断熱材で包み，容器内の気体および液体が外部と熱のやり取りをしない場合を考える．液体の熱容量を C，状態 (a) から (b) に変化する間の液体の落下による重力の位置エネルギー減少量を E，気体定数を R とする．容器の熱容量は無視できるものとする．

(1)　状態 (a) から (b) に変化する間について述べた次の文章中の空欄 $\boxed{\text{(ア)}}$ ～ $\boxed{\text{(エ)}}$ に当てはまる最も適切な式を，以下の選択肢①～⑫から選んで答えよ．

液体の落下による重力の位置エネルギー減少量 E の一部は，いったん液体の落下の運動エネルギーになるが，液体分子どうしの衝突や液体分子と容器の壁との衝突などによりすべて熱エネルギーに変わるものとする．その熱量を Q とする．さらにそのうち，容器 A，B 内の気体に伝わる熱量を Q_{A}, Q_{B} とする．また，状態 (a) から (b) に変化する間の，容器 A，B 内の気体および液体の内部エネルギー変化量をそれぞれ ΔU_{A}, ΔU_{B}, ΔU_{L}，容器 A，B 内の気体が外部にした仕事をそれぞれ W_{A}，W_{B} とする．

容器 A，B 内の気体および液体について，それぞれエネルギー保存則（熱力学第一法則）を表す式を立てると，

$$\text{容器 A}:\quad Q_{\mathrm{A}} = \boxed{\text{(ア)}}$$

$$\text{容器 B}:\quad Q_{\mathrm{B}} = \boxed{\text{(イ)}}$$

$$\text{液体}:\quad Q-(Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}) = \Delta U_{\mathrm{L}}$$

となる．一方，容器内の液体と気体の全体についてエネルギー保存則を表す式を立てると，

$$E = \boxed{\text{(ウ)}}$$

となる．つまり，$E - Q = \boxed{\text{エ}}$ が成り立つ．

【選択肢】

① $\Delta U_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{A}}$　② $\Delta U_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{A}}$　③ $\Delta U_{\mathrm{B}} + W_{\mathrm{B}}$　④ $\Delta U_{\mathrm{B}} - W_{\mathrm{B}}$

⑤ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}}$　⑥ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{L}}$　⑦ $\Delta W_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{B}}$　⑧ $\Delta - (W_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{B}})$

⑨ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}} + W_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{B}}$　⑩ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}} - W_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{B}}$

⑪ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{L}} + W_{\mathrm{A}} + W_{\mathrm{B}}$　⑫ $\Delta U_{\mathrm{A}} + U_{\mathrm{B}} + U_{\mathrm{L}} - W_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{B}}$

(2)　状態 (a) から (b) に変化する間の，容器 A 内の気体の圧力変化を ΔP_{A}，容器 B 内の気体の圧力変化を ΔP_{B} とする．ΔP_{B} を ΔP_{A}, V_0, V_1, E, ΔU_{L} を用いて表せ．

(3)　状態 (c) における容器内の気体の温度を，n_{A}, n_{B}, C, R, E, T_0 を用いて表せ．