

真空中で図 1 のように、2 枚の薄い金属板 A, B を間隔  $d$  [m] はなして配置した平行平板コンデンサーの両端に起電力  $V$  [V] の電池とスイッチ S がつないである。  $d$  は金属板の大きさに対して十分に小さく、金属板の周辺部分の不均一さは無視できるとする。金属板 A は接地してあり、その電位は 0 [V] に保たれている。図 1 のように金属板 A の位置を原点 O として金属板に垂直な方向に  $x$  軸をとる。このコンデンサーの電気容量は  $C$  [F] である。次の問いに答えよ。

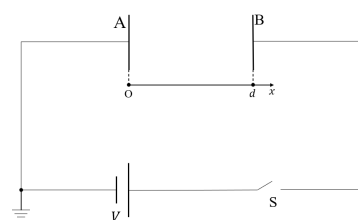


図 1

スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた。

- (1) このコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを答えよ。
- (2) 金属板 A, B 間の座標  $x$  における電位を図 2 に描け。
- (3) 金属板 A, B 間の座標  $x$  における電場の強さを図 3 に描け。

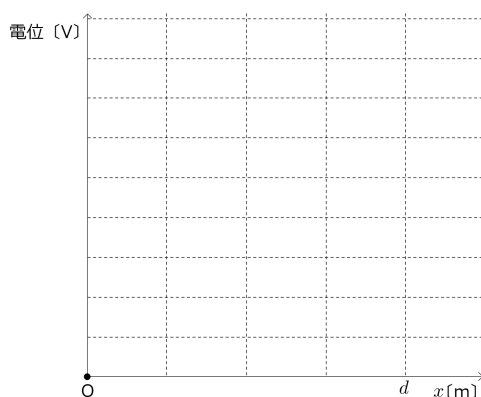


図 2

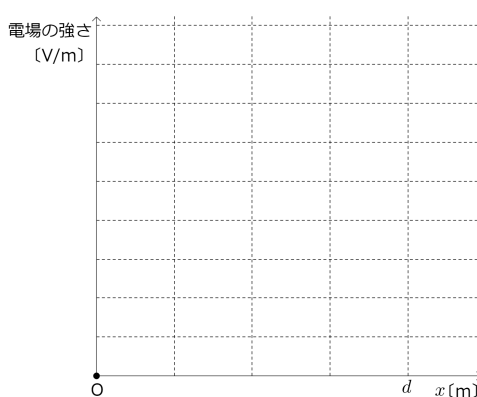


図 3

次にコンデンサーを完全に放電した。そして、スイッチ S を開いた状態で図 4 のように金属板 A, B の間に厚さ  $\frac{d}{2}$  [m] の金属板を A, B それぞれからの距離が等しくなるように挿入した。その後、スイッチ S を閉じて十分に時間をおいた。

- (4) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ。
- (5) 金属板 A, B 間の座標  $x$  における電位を図 2 に描き足せ。
- (6) 金属板 A, B 間の座標  $x$  における電場の強さを図 3 に描き足せ。

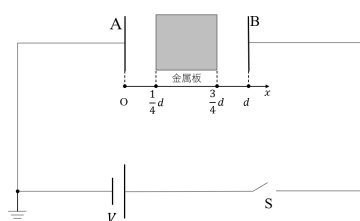


図 4

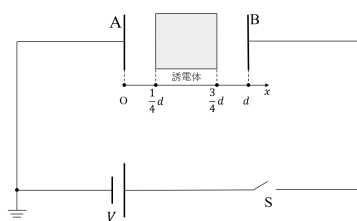


図 5

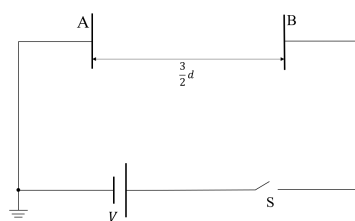


図 6

再びコンデンサーを完全に放電した。そして、スイッチ  $S$  を開いた状態で図 5 のように金属板  $A$ ,  $B$  の間に比誘電率が 2 で、厚さが  $\frac{d}{2}$  [m] の誘電体を  $A$ ,  $B$  それぞれからの距離が等しくなるように挿入した。その後、スイッチ  $S$  を閉じて十分に時間をおいた。

(7) このコンデンサーに蓄えられている電気量を答えよ。

(8) 金属板  $A$ ,  $B$  間の座標  $x$  における電位を図 2 に描き足せ。

(9) 金属板  $A$ ,  $B$  間の座標  $x$  における電場の強さを図 3 に描き足せ。

続いてスイッチ  $S$  を開いた後に、金属板  $A$ ,  $B$  間の距離を保ったまま誘電体を取り除いた。

(10) 誘電体を取り除くために要した仕事を答えよ。

その後、図 6 のように金属板  $A$ ,  $B$  の間隔を  $\frac{3}{2}d$  [m] に広げて十分に時間をおいた。

(11) このときの金属板  $A$ ,  $B$  間の電位差を答えよ。

### 【解答】

(1) 電気容量  $C$  [F] のコンデンサーの極板間電圧が  $V$  [V] となるので、蓄えられているエネルギーは  $\frac{1}{2}CV^2$  [J]。

(2)  $A$  の電位が  $0$  V,  $B$  の電位が  $V$  [V] で,  $AB$  間は一様な電場であるから, 電位と位置のグラフは直線となる (図 1)。

(3)  $AB$  間の電場は一様であり,  $V = Ed$  より  $E = \frac{V}{d}$  [V/m] で一定である (図 2)。

(4) コンデンサー間に金属板を挿入すると, コンデンサーの極板間隔が小さくなると見なすことができる。また, 極板間隔  $d$  が半分になると, コンデンサーの容量  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$  は 2 倍になるので,  $2C$  [F] となる。  $AB$  間の電位差は  $V$  なので, 蓄えられている電気量  $Q_2$  は,

$$Q_2 = 2C \cdot V = 2CV$$

(5) 挿入した金属板の内部は等電位で, 電場の強さは  $0$  である。  $A$  の電位が  $0$  V,  $B$  の電位が  $V$  [V] であるので, 中央の金属板の電位は  $\frac{1}{2}$  [V]。 図示したものは図 1。

(6) 極板と金属板の間の電場の強さ  $E$  は,

$$E = \frac{V/2}{d/4} = \frac{2V}{d} [\text{V/m}]$$

である. 金属板内の電場は 0 であることと合わせて図示して図 2.

(7) AB 間の電位差は  $V$  である. 誘電体は容量が  $\epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d/2} = 4C$  であるコンデンサーとみなせる. 極板と誘電体の間も容量  $4C$  のコンデンサーである. よって, 電気容量  $4C$  のコンデンサーが 3 つ直列接続されている合成容量  $C_3$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_3} &= \frac{1}{4C} + \frac{1}{4C} + \frac{1}{4C} = \frac{3}{4C} \\ \therefore C_3 &= \frac{4}{3}C \end{aligned}$$

よって, 蓄えられている電気量  $Q_3$  は

$$Q_3 = \frac{4}{3}C \cdot V = \frac{4}{3}CV [\text{C}]$$

(8) 極板 A と誘電体の左端の電位差を  $V_l [\text{V}]$  とすると,

$$V_l = \frac{Q_3}{4C} = \frac{1}{3}V [\text{V}]$$

同様に, 極板 B と誘電体の右端の電位差を  $V_r = \frac{1}{3} [\text{V}]$ . また, 誘電体の両端間の電位差  $V_c$  は,

$$V_c = \frac{Q_3}{4C} = \frac{1}{3}V [\text{V}]$$

(9) それぞれの電位の強さ  $E_l, E_c, E_r$  は,

$$\begin{aligned} E_l &= E_r = \frac{V/3}{d/4} = \frac{4V}{3d} \\ E_c &= \frac{2V}{3d} \end{aligned}$$

(10) スイッチを開いても電荷は保存される. 誘電体が挿入されていたとき, 蓄えられていた電気量  $Q_3 = \frac{4}{3}CV [\text{C}]$  であり, 容量は  $C_3 = \frac{4}{3}C [\text{F}]$  であったので, 蓄えられていた静電エネルギー  $U$  は

$$U = \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{2}{3}CV^2 [\text{J}]$$

ここで, 誘電体を取り除いた後の電気容量は  $C [\text{F}]$  なので静電エネルギー  $U'$  は

$$U' = \frac{Q_3^2}{2C} = \frac{8}{9}CV^2 [\text{J}]$$

となる. よって, 誘電体を取り除くのに要した仕事  $W$  は静電エネルギーの増加分にあたり,

$$W = U' - U = \frac{2}{9}CV^2 [\text{J}]$$

- (11) 極板間隔を  $\frac{3}{2}$  倍に広げると電気容量は  $\frac{2}{3}$  倍になる．電荷が保存されるので，AB 間の電位差  $V_4$  は

$$V_4 = \frac{Q_3}{(2/3)C} = 2V \text{ [V]}$$

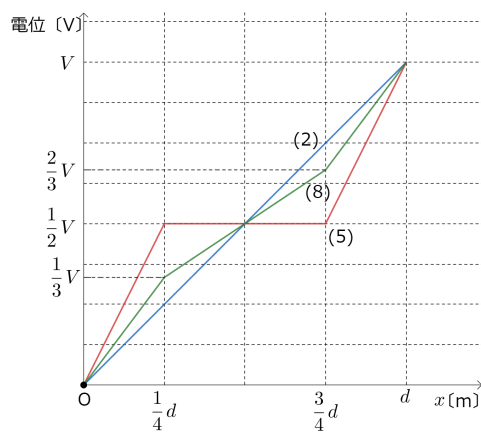


図 1

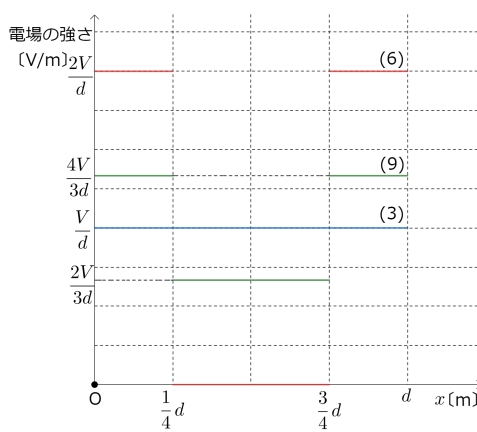


図 2