第 3 問

n〔mol〕の単原子分子理想気体をピストンがついたシリンダーの中に封入して図のように体積 V と圧力 P を A → B → C → D → A と変化させる．A → B と C → D の変化はそれぞれ熱の出入りがないようにして状態の変化を行った．さらに，B → C の変化は圧力を一定に保って，また D → A の変化は体積を一定に保ってそれぞれ状態の変化を行った．状態 A，B，C，D の絶対温度をそれぞれ T_{A}，T_{B}，T_{C}，T_{D} とし，この気体の定積モル比熱を C_v，定圧モル比熱を C_p とする．また，ピストンとシリンダーの間に摩擦はないものとする．次の問いに答えよ．

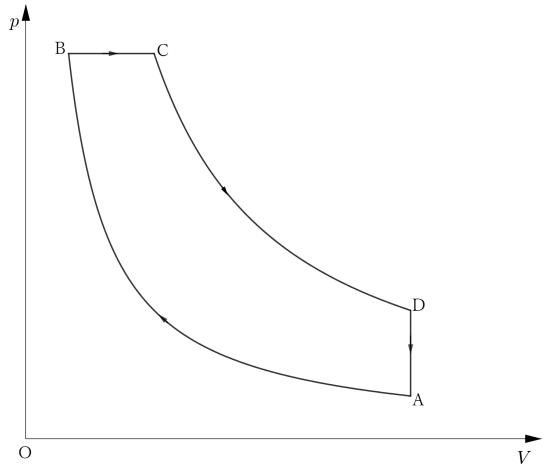

図 1

（1）各過程における気体の内部エネルギーの変化 ΔU_{AB}, ΔU_{BC}, ΔU_{CD}, ΔU_{DA} を求めよ．

（2）各過程における気体が吸収する熱量 Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD}, Q_{DA} を求めよ．

（3）各過程における気体がする仕事 W_{AB}, W_{BC}, W_{CD}, W_{DA} を求めよ．

（4）このサイクルを熱機関とみなした時の熱効率 e を求めよ．ただし定積モル比熱と定圧モル比熱との比を $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ として，γ と絶対温度を使って表せ．

【解答】

（1）内部エネルギーの変化を定積モル比熱を用いて表すと，

$$\Delta U_{\mathrm{AB}} = \underline{nC_v(T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{A}})}, \qquad \Delta U_{\mathrm{BC}} = \underline{nC_v(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}})},$$
$$\Delta U_{\mathrm{CD}} = \underline{nC_v(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{C}})}, \qquad \Delta U_{\mathrm{DA}} = \underline{nC_v(T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{D}})}.$$

（2）A→ B，C→ D は断熱変化なので，$Q_{\mathrm{AB}} = \underline{0}$, $Q_{\mathrm{CD}} = \underline{0}$．B→ C は定圧変化なので，$Q_{\mathrm{BC}} = \underline{nC_p(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}})}$．D→ A は定積変化なので，$Q_{\mathrm{DA}} = \underline{nC_v(T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{D}})}$.

（3）D→A は定積変化ゆえ，$W_{\mathrm{DA}} = \underline{0}$．また，熱力学第一法則より

$$W_{\mathrm{AB}} = Q_{\mathrm{AB}} - \Delta U_{\mathrm{AB}} = \underline{-nC_v(T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{A}})},$$
$$W_{\mathrm{BC}} = Q_{\mathrm{BC}} - \Delta U_{\mathrm{BC}} = \underline{n(C_p - C_v)(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}})},$$
$$W_{\mathrm{CD}} = Q_{\mathrm{CD}} - \Delta U_{\mathrm{CD}} = \underline{-nC_v(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{C}})}.$$

（4）A→ B，C→ D が断熱変化なので $T_{\mathrm{D}} > T_{\mathrm{A}}$, $T_{\mathrm{C}} > T_{\mathrm{B}}$ である．この熱サイクルにおいて吸熱する過程，すなわち（2）の解 Q が正の値をとるのは B→ C のみである．一方で，気体がする

正味の仕事 W は

$$\begin{aligned}
W &= W_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{BC}} + W_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{DA}} \\
&= Q_{\mathrm{BC}} - (\mathit{\Delta} U_{\mathrm{AB}} + \mathit{\Delta} U_{\mathrm{BC}} + \mathit{\Delta} U_{\mathrm{CD}}) \qquad (\because \text{熱力学第一法則}) \\
&= Q_{\mathrm{BC}} - nC_v(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}})
\end{aligned}$$

以上より熱効率 e は，$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ を用いて

$$\begin{aligned}
e &= \frac{W}{Q_{\mathrm{BC}}} = \frac{Q_{\mathrm{BC}} - nC_v(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}})}{Q_{\mathrm{BC}}} \\
&= 1 - \frac{C_v}{C_p} \cdot \frac{T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}}} \\
&= \underline{1 - \frac{T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{A}}}{\gamma(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}})}}
\end{aligned}$$