ある媒質中を x 軸の正の向きに速さ v で減衰することなく進行している連続波を考える．この波の振幅を A，周期を T とすると，x 軸上の原点 O での媒質の変位は時刻 t の関数として $y = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ で表される．これを入射波として $x = L\,(L > 0)$ の位置で固定端反射させる．反射による波の減衰は無視できるとする．

(1) 入射波の振動数 f と波長 λ を v と T で表せ.

(2) $x < L$ における入射波を，v と T を用いて t の関数として表せ.

(3) (2) の結果を用いて，反射波を x および t の関数として表せ.

(4) 入射波と反射波が重なりあって波形の進行しないように観測される波，つまり定在波（定常波）ができることを，式を使って説明せよ.

(5) $\lambda = \dfrac{4}{5}L$ の場合について，(4) の定在波が最大振幅になるときの波形の概略を描け.

【解答】

(1)　$f=\dfrac{1}{T}, \lambda=vT.$

(2)　位置 x における入射波は，波が原点から伝わるのにかかる時間 $\dfrac{x}{v}$ だけ原点の振動より遅れる．よって，時刻 t における位置 x での入射波の変位 y_1 は，時刻 $t-\dfrac{x}{v}$ における原点の変位に等しい．

$$y_1=A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

(3)　反射波が原点から固定端を通り位置 x に伝わるまでに $2L-x$ だけ移動するので，要する時間は $\frac{2L-x}{v}$ である．

　また，固定端反射によって位相は π だけずれる．

　時刻 t における位置 x での反射波の変位 y_2 は，時刻 $t-\frac{2L-x}{v}$ における原点の変位を π だけ位相をずらしたもの．

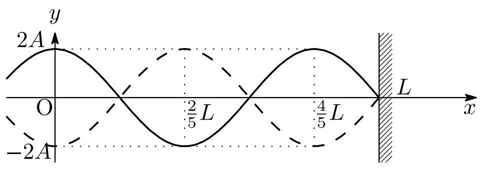
$$y_2=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2Lx}{v}\right)+\pi\right)=-A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2Lx}{v}\right)$$

(4)　（2），（3）より重ね合わせの理により，位置 x における媒質の変位は y は

$$\begin{aligned}
y=y_1+y_2&=A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)-A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2Lx}{v}\right)\\
&=2A\cos\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}+t-\frac{2L-x}{v}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}-t+\frac{2L-x}{v}\right)\right)\\
&=2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)
\end{aligned}$$

となる．位置 x において，$2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)$ は時刻 t によらないので，その位置における振幅を表し，$\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)$ は時刻 t にのみ依存した振動を表す．したがって，波形の進行しない定在波である．

（5）　固定端は定在波の節となる．また，節と腹の間隔は $\frac{\lambda}{4}=\frac{L}{5}$．（4）の結果から定在波の振幅の最大値は $2A$ なので下図を得る．



〔別解〕（4）の結果を用いる．

　定在波の振幅は $\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)=\pm1$ のときに最大となる．このとき，

$$\begin{aligned}
y&=\pm2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)=\pm2A\sin2\pi\frac{L-x}{\lambda}\\
&=\pm2A\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{5\pi x}{2L}\right)\\
&=\pm2A\cos\frac{5\pi}{2L}x
\end{aligned}$$

となり同様の結果が得られる．