

【問 1】

(1)  $2, 3, 4, \dots, 13$  の 12 個の整数の中から異なる 2 個を無作為にとり出したとき、それら 2 個の

整数が互いに素となる確率は  $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$  である.

(2)  $x^2 + x + 1 = 0$  のとき、 $x^{20} + x = \boxed{\text{ウ}}$  である.

(3)  $5^{n+5} > 11^n$  を満たす自然数  $n$  は  $\boxed{\text{エ}}$  個ある. ただし、 $\log_5 11 = 1.49$  とする.

---

【解答】

(1) 異なる 2 個を無作為に取り出す全事象は  ${}_{12}\text{C}_2 = 66$  通り. 取り出した 2 個が互いに素とならない事象 (余事象) を考えると,

$$\begin{array}{ccccccc} (12,10) & (12,9) & (12,8) & (12,6) & (12,4) & (12,3) & (12,2) \\ (10,8) & (10,6) & (10,5) & (10,4) & (10,2) & (9,6) & (9,3) \\ (8,6) & (8,4) & (8,2) & (6,4) & (6,3) & (6,2) & (4,2) \end{array}$$

の 21 通りある. よって,

$$1 - \frac{21}{66} = \frac{15}{22}$$

(2)  $x^2 + x + 1 = 0$  より  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ . これより  $x^3 = 1$ .

$$\begin{aligned} x^{20} + x &= (x^3)^6 \cdot x^2 + x \\ &= x^2 + x \\ &= -1 \end{aligned}$$

(3)  $5^{n+5} > 11^n$  の両辺に底 5 の対数をとって,

$$\begin{aligned} n + 5 &> n \log_5 11 = 1.49n \\ 0.49n &< 5 \\ n &< \frac{500}{49} = 10.2 \dots \end{aligned}$$

より自然数  $n$  は 10 個.