最終更新日：2023 年 11 月 29 日

テスト演習

実施日：2023 年 12 月 2 日

第1問

図1のように，質量 $2M$ の物体 A と質量 M の物体 B が，ばね定数 k の質量の無視できるばねによってつながれて，なめらかで水平な床の上で静止していた．また，物体 A はかたい壁に接していた．床の上を左向きに進んできた物体 C が，物体 A に完全に弾性衝突して，跳ね返された．麦向きを正の向きと定めると，衝突直後の物体 C の速度は $+u_1\,(u_1 > 0)$，物体 A の速度は $-v_1\,(v_1 > 0)$ であった．その後，物体 B と物体 C が再び衝突することはなかった．

I まず，衝突前から物体 A が壁から離れるまでの運動を考える．

(1)　衝突前の物体 C の速度を $u_0\,(u_0 < 0)$ を u_1 と v_1 を用いて表せ．

(2)　ばねが最も縮んだときの自然長からの縮み $x\,(x > 0)$ を求めよ．

(3)　衝突してからばねの長さが自然長に戻るまでの時間 T を求めよ．

II ばねの長さが自然長に戻ると，その直後に物体 A が壁から離れた．

(1)　やがて，ばねの長さは最大値に達し，そのとき物体 A と物体 B の速度は等しくなった．その速度 v_2 を求めよ．

(2)　ばねの長さが最大値に達したときの自然長からの伸び $y\,(y > 0)$ を求めよ．

(3)　その後ばねが縮んで，長さが再び自然長に戻ったとき，物体 A の速度は最大値 V に達した．V を求めよ．

III 物体 A が壁から離れた後，物体 B と物体 C の間隔は，ばねが伸び縮みを繰り返すたびに広がっていった．このことからわかる u_1 と v_1 の関係を，不等式で表せ．

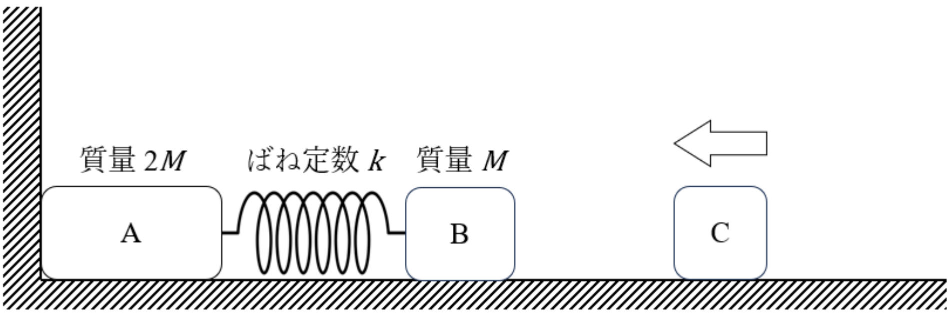


図1

＜計算用紙＞

第2問

図1のように，電荷の蓄えられていない静電容量 C のコンデンサーと，自己インダクタンス L のコイルを上下につけた長方形の回路 pqrs を，十分長い辺 pq が鉛直に，他の辺 ps が水平になるように固定した．この回路に，辺 ps と同じ長さ l で質量 M の導体棒 XY を接触させた．ここで，導体棒は水平を保ったまま，両方の長辺と接触しながらなめらかに動き，接触点での電気抵抗は無視できるものとする．なお，回路全体には，面 pqrs と垂直に紙面の表から裏へ向かって，一定で一様な磁束密度 B の磁場が加えられている．

導体棒をこの回路上で静止させ，時刻 $t=0$ で静かにはなすと，導体棒は下方に運動を始めた．$t=0$ での辺 pq 上の X の位置を原点として，鉛直下向きに x 軸をとり，時刻 $t\,(t>0)$ での，導体棒の座標を x，鉛直下向きの速度と加速度を v と a，また，重力加速度の大きさを g とする．ただし，$t=0$ では回路や導体棒に電流は流れておらず，また，この回路から漏れる電場や磁場，回路と導体棒の電気抵抗，および空気抵抗は，すべて無視できるものとする．

また，図1のようにコンデンサーに流れる電流を I'，コイルに流れる電流を I とする．ただし，I' と I はそれぞれ図1の矢印の向きを正とする．

(1) 導体棒とコンデンサーからなる閉じた経路 (X→Y→s→p→X) について考える．

(a) 時刻 t でのコンデンサーの s 側の電極の電荷を Q とするとき，Q の導体棒の速度 v とその他必要なものを用いて表せ．

(b) 時刻 t から微小な時間 Δt の間に Q と v がそれぞれ ΔQ，Δv だけ変化したとすると，電流 I' は $I'=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ であり，導体棒の加速度は $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ である．I' を a と B およびその他必要なものを用いて表せ．

(2) 導体棒とコイルからなる閉じた経路 (X→Y→r→q→X) について考える．時刻 t から微小な時間 Δt の間に I と x がそれぞれ ΔI，Δx だけ変化したとする．導体棒の速度は $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ であること，および $t=0$ では $I=0$，$x=0$ であることを使って，I と x とその他必要なものを用いて表せ．

(3) 導体棒にはたらくすべての力を考え，導体棒の運動方程式を I' および I とその他必要なものを用いて表せ．

(4)（3）で求めた運動方程式に（1）と（2）で求めた I' と I の結果を代入すると，導体棒は単振動をすることがわかる．その各振動数 ω と振動の中心の座標 x_0 を M, g, B, l, C, L の中から必要なものを用いて表せ．

(5) I のとる最小値と最大値を M, g, B, l, C, L の中から必要なものを用いて表せ．

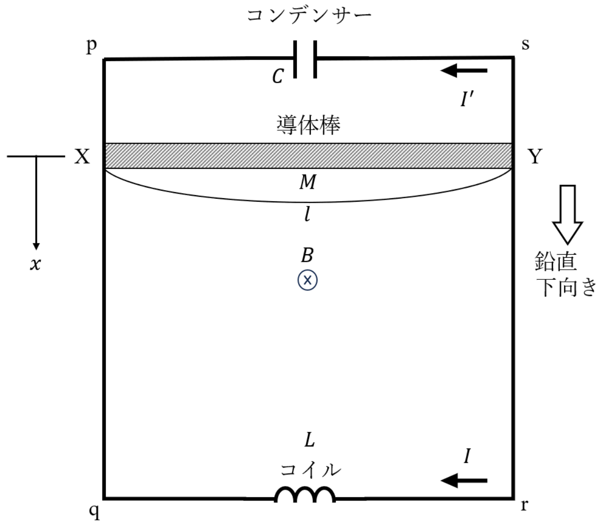
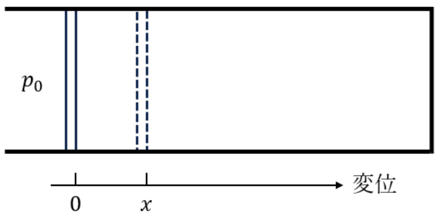


図１

第 3 問



図のようにピストンを持つ気密なシリンダーを水平に保ち，内部に比熱比 γ の理想気体を入れて圧力 p_0 の大気中に置いた．ピストンのつりあいの位置を $x=0$ とし，ピストンの質量と底面積をそれぞれ m, S とする．またこのときのシリンダー内の気体の体積を V_0 とする．気体定数を R，ピストンとシリンダー間の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えよ．$|z| \ll 1$ の場合，近似式 $(1+z)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha z$ を用いよ．

(1) 気体の温度を一定に保ったままピストンを x だけ押した．このときのシリンダー内の気体の圧力 p_x を求めよ．押したときのピストンの位置は図中に点線で示してある．ただし，$|x| \leqq a \ll V_0/S$ とする．

(2) 時刻 $t=0$ において微小変位 $x=a\,(>0)$ からピストンを放したところ，ピストンは往復運動を始めた．シリンダー内の気体の温度が一定に保たれているとして，周期 T を求め，x を t の関数として表せ．

(3) シリンダー内の気体への熱の出入りがないとしたとき，(2) の場合（温度が一定）に比べてピストンの往復運動の周期は何倍になるか．

＜計算用紙＞