第 2 問

気体を容器に封入したとき，気体分子は容器の壁面と繰り返し衝突をしている．図 1 のように，1 辺の長さが L〔m〕の立方体の容器に分子 1 個の質量が m〔kg〕の単原子分子理想気体が N 個入っている．この気体から z 軸に垂直な壁面 A が受ける圧力を考える．容器内の気体の温度は T〔K〕で一定であり，分子どうしの衝突は無視する．アボガドロ定数を N_{A}〔mol^{-1}〕，気体定数を R〔J/(mol · K)〕，重力加速度の大きさを g〔$\mathrm{m/s^2}$〕とする．次の文章中の $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{セ}}$ に適切な数式または数値を入れよ．

(1) 初めに重力が作用していない場合について考える．ある 1 個の分子の z 軸方向の速度の成分を v_z〔m/s〕とすると，分子が壁面 A と弾性衝突したときに壁面 A が分子から受ける力積は $\boxed{\text{ア}}$〔N · s〕である．分子が壁面 A と衝突から次に壁面 A と衝突するまでの時間は $\boxed{\text{イ}}$〔s〕であるため，分子は時間 Δt〔s〕の間に，壁面 A と $\boxed{\text{ウ}}$ 回衝突する．したがって，時間 Δt の間に壁面 A が受ける力積は $\boxed{\text{エ}}$〔N · s〕となり，1 個の分子によって壁面 A が受ける力 f は $\boxed{\text{オ}}\times {v_z}^2$〔N〕と z 軸における速度成分の 2 乗 ${v_z}^2$ を用いて表せる．N 個の分子によって壁面 A が受ける力 F〔N〕については，すべての分子は不規則に運動しており，速度成分の 2 乗平均はどの成分についても等しいので，N 個の分子の速度の 2 乗平均 $\overline{v^2}$〔$\mathrm{m^2/s^2}$〕を用いて $\boxed{\text{カ}}$ と表せる．以上から，圧力は $\boxed{\text{キ}}$〔$\mathrm{N/m^2}$〕となる．また，状態方程式から $\overline{v^2}$ は m, N_A, R, T を用いて $\boxed{\text{ク}}$ となり，気体の内部エネルギー U〔J〕は N, N_A, R, T を用いて $\boxed{\text{ケ}}$ となることがわかる．

(2) z 軸の負の向きに一様な重力が作用する場合，容器内の気体の密度と圧力に勾配が生じる．図 2 のように，容器の底からはかった高さを z〔m〕とし，高さ z における気体の圧力を $P(z)$〔$\mathrm{N/m^2}$〕，密度を $d(z)$〔$\mathrm{kg/m^3}$〕とする．z から Δz だけ高いところを $(z+\Delta z)$〔m〕とし，高さ z における厚さ Δz，断面積 L^2 の気柱について考えると，高さ $(z+\Delta z)$ における気体の圧力 $P(z+\Delta z)$〔N/m^2〕は，気柱内における気体の密度の勾配が無視できるほど Δz が小さいとき，$P(z), d(z), \Delta z$ などを用いて $\boxed{\text{コ}}$ と近似できる．また，容器内の気体は単原子分子理想気体であるため，$d(z)$ は $P(z)$ と T などを用いて $\boxed{\text{サ}}$ と表せる．以上から，気体 1 mol あたりの質量が 4.0×10^{-3} kg/mol，温度が 300 K であるとき，$P(z+\Delta z)$ が $P(z)$ と比べて 0.010% だけ小さくなるような高さの差は，$R=8.3$〔J/(mol · K)〕，$g=9.8$〔$\mathrm{m/s^2}$〕とすると，有効数字 2 桁で $\boxed{\text{シ}}$ m と見積もることができる．また，容器の底における気体の圧力と密度をそれぞれ $P(0)$〔$\mathrm{N/m^2}$〕，$d(0)$〔$\mathrm{kg/m^3}$〕，高さ L における気体の圧力と密度をそれぞれ $P(L)$〔$\mathrm{N/m^2}$〕，$d(L)$〔$\mathrm{kg/m^3}$〕とすると，$P(0)$ と $P(L)$ との差は N, m, g, L を用いて $\boxed{\text{ス}}$ となり，$d(0)$ と $d(L)$ との差は $N_{\mathrm{A}}, m, g, L, R, T$ を用いて $\boxed{\text{セ}}$ となる．

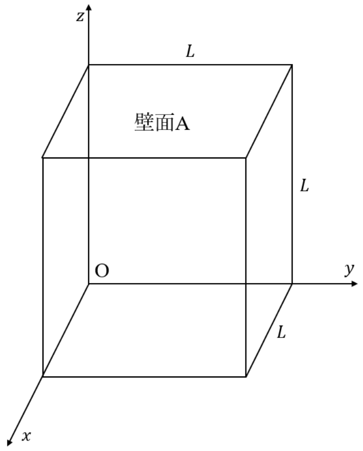

図 1

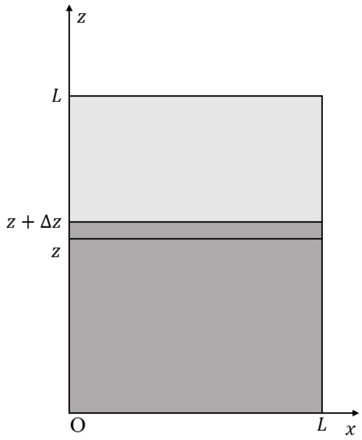

図 2

【解答】

(ア)：$2mv_z$　(イ)：$\dfrac{2L}{v_z}$　(ウ)：$\dfrac{v_z\mathit{\Delta} t}{2L}$　(エ)：$\dfrac{m{v_z}^2\mathit{\Delta} t}{L}$　(オ)：$\dfrac{m}{L}$

(カ)：$\dfrac{mN\overline{v^2}}{3L}$　(キ)：$\dfrac{mN\overline{v^2}}{3L^3}$　(ク)：$\dfrac{3RT}{mN_A}$　(ケ)：$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{N}{N_A}RT$

(コ)：$P(z)-P(z+\mathit{\Delta} z)=d(z)g\mathit{\Delta} z$　(サ)：$d(z)=\dfrac{mN_AP(z)}{RT}$

(シ)：6.4　(ス)：$\dfrac{Nmg}{L^2}$　(セ)：$\dfrac{N_ANm^2g}{L^2RT}$

【解説】

(1) 分子が壁面 A との衝突時に受ける力積は $(-mv_z)-(mv_z)=-2mv_z$〔N·s〕 であるので，壁面 A が受ける力積はその反作用力によるものであり，$\underline{2mv_z}$〔N·s〕 である．

分子は z 軸方向に 2L 進む度に壁面 A と衝突するため，$\frac{2L}{v_z}$〔s〕 に 1 回衝突する．すなわち，単位時間あたり $\frac{v_z}{2L}$ 回衝突する．よって，$\mathit{\Delta} t$〔s〕の間に$\underline{\frac{v_z\mathit{\Delta} t}{2L}}$〔回〕衝突する．

衝突の度に壁面 A は $2mv_z$ の力積を受けるので，$\mathit{\Delta} t$ の間に壁面 A が受ける力積は

$$2mv_z\times\frac{v_z\mathit{\Delta} t}{2L}=\underline{\frac{m{v_z}^2\mathit{\Delta} t}{L}}\ \text{〔N·s〕}$$

である．時刻 $\mathit{\Delta} t$ の間に壁面 A が力 f を受けるとすると，その力積は $f\mathit{\Delta} t$ と表せるので，

$$f\mathit{\Delta} t=\frac{m{v_z}^2\mathit{\Delta} t}{L}$$

$$\therefore\ f=\underline{\frac{m{v_z}^2}{L}}\ \text{〔N〕}$$

となる．

N 個の気体分子から壁面 A から受ける力 F は各気体分子に対する f の総和である．${v_z}^2$ の平均値 $\overline{{v_z}^2}$ を用いて，

$$F = Nf = \frac{mN}{L} \times \overline{{v_z}^2}〔\mathrm{N}〕$$

である．また，$\overline{v^2} = \overline{{v_x}^2} + \overline{{v_y}^2} + \overline{{v_z}^2}$，$\overline{{v_x}^2} = \overline{{v_y}^2} = \overline{{v_z}^2}$ より，$\overline{{v_z}^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$ であるから，

$$F = \underline{\frac{mN\overline{v^2}}{3L}}$$

さらに，壁面 A の面積は L^2〔m^2〕なので，圧力を P とすると，

$$F = PL^2$$
$$\therefore P = \underline{\frac{mN\overline{v^2}}{3L^3}}〔\mathrm{N/m^2}〕$$

理想気体の状態方程式より

$$PL^3 = \frac{N}{N_A}RT$$
$$\frac{1}{3}mN\overline{v^2} = \frac{N}{N_A}RT$$
$$\therefore \overline{v^2} = \underline{\frac{3RT}{mN_A}}〔\mathrm{m^2/s^2}〕$$

内部エネルギー U〔J〕は N 個の気体分子の運動エネルギーの総和であり，

$$U = N \times \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$
$$= \underline{\frac{3}{2}\frac{N}{N_A}RT}〔\mathrm{J}〕$$

である．

（2） 高さ z における厚さ Δz の気柱にはたらく力のつりあいを考える．この気柱の気体の密度は $d(z)$〔$\mathrm{kg/m^3}$〕と見なせるので，気体の質量は $d(z) \times L^2\Delta z$〔kg〕である．よって力のつりあいは右図より，

$$P(z+\Delta z)L^2 + d(z)L^2\Delta z g = P(z)L^2$$
$$\therefore\ \underline{P(z) - P(z+\Delta z) = d(z)g\Delta z}$$

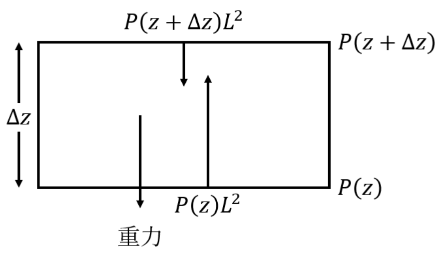

図 3

厚さ Δz の気柱内の気体分子の数を ΔN とすると，理想気体の状態方程式より

$$P(z)L^2\Delta z = \frac{\Delta}{N_A}RT \qquad ①$$

また，気体分子 1 個あたりの質量が m〔kg〕なので，気柱内の気体分子の質量について

$$m\Delta N = d(z)L^2\Delta z \qquad ②$$

①と②から，ΔN を消去して整理すると

$$\underline{d(z) = \frac{mN_A P(z)}{RT}}\text{〔kg/m}^3\text{〕}$$

ここで，$P(z+\Delta z)$ が $P(z)$ に比べ，0.010% だけ小さいということは,

$$\frac{P(z+\Delta z)-P(z)}{P(z)} = -0.00010$$

が成り立っている．求めた $P(z)-P(z+\Delta z)$ および $d(z)$ を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{d(z)g\Delta z}{P(z)} &= 1.0\times10^{-4}\\ \frac{mN_A g\Delta z}{RT} &= 1.0\times10^{-4}\\ \therefore\ \Delta z &= \frac{RT}{mN_A g}\times1.0\times10^{-4}\end{aligned}$$

mN_A〔kg/mol〕は気体 1mol あたりの質量であるから

$$\begin{aligned}\therefore\ \Delta z &= \frac{8.3\times300}{4.0\times10^{-3}\times9.8}\times1.0\times10^{-4}\\ &= 6.35\cdots\\ &= \underline{6.4\text{〔m〕}}\end{aligned}$$

立方体容器全体 (3 で $\Delta z = L$ としたもの) の力のつりあいを考える．気体分子は N 個あるので，はたらく重力は $N\times mg$ であるから

$$\begin{aligned}P(L)L^2 + Nmg &= P(0)L^2\\ \therefore\ P(0)-P(L) &= \underline{\frac{Nmg}{L^2}}\end{aligned}$$

$d(z) = \frac{mN_A}{RT}P(z)$ より，両辺に $\frac{mN_A}{RT}$ を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{mN_A}{RT}P(0) - \frac{mN_A}{RT}P(L) &= \frac{mN_A}{RT}\frac{Nmg}{L^2}\\ \therefore\ d(0)-d(L) &= \underline{\frac{N_A N m^2 g}{L^2RT}}\end{aligned}$$