図 1 のように水平な床の上に質量 M，長さ L の台車が静止している．台車の上には大きさが無視できる質量 m の小球 A が乗っており，速度 $v_0\,(v_0 > 0)$ で運動している．この問いで使用する速度はすべて床に対する速度であり，右向きを正とする．また，摩擦や空気抵抗は無視できるものとする．

(1) 小球 A が台車両端の壁 P，Q に弾性衝突する場合，次の問いに答えよ．

(a) 小球 A が壁 P で最初に台車と衝突した直後の小球および台車の速度（それぞれ v_1 および V_1）を求めよ．

(b) 小球 A は，壁 P で最初に台車と衝突してから時間 T が経過した後に，壁 Q で再び台車と衝突した．このときの時間 T を求めよ．さらに，壁 Q に衝突した直後の小球および台車の速度（それぞれ v_2 および V_2）を求めよ．

(c) $M = m$ の場合，小球 A と壁 P の位置の時間変化を x-t グラフに実線と点線で示せ．ただし，位置は床に固定された座標 x で表し，小球 A が壁 P に最初に衝突した時刻を $t = 0$，位置を $x = 0$ として，$0 \leqq t \leqq 3T$ の範囲で示せ．

(d) $M = 2m$ の場合，台車が $3L$ の距離を進むのに要する時間を求めよ．

(2) 小球 A が台車両端の壁 P，Q に反発係数 $e\,(0 < e < 1)$ で非弾性衝突する場合，次の問いに答えよ．

(a) 小球 A が壁 P で最初に台車と衝突した直後の小球および台車の速度（それぞれ $v_1{}'$ および $V_1{}'$）を求めよ．

(b) その後，小球 A は壁 Q，P で台車と衝突をくり返した．2 つの壁で合計 n 回衝突した後の小球および台車の速度（それぞれ $v_n{}'$ および $V_n{}'$）を求めよ．

(c) 十分に時間が経過し，多数の衝突をくり返した後の小球と台車の運動の様子について説明せよ．

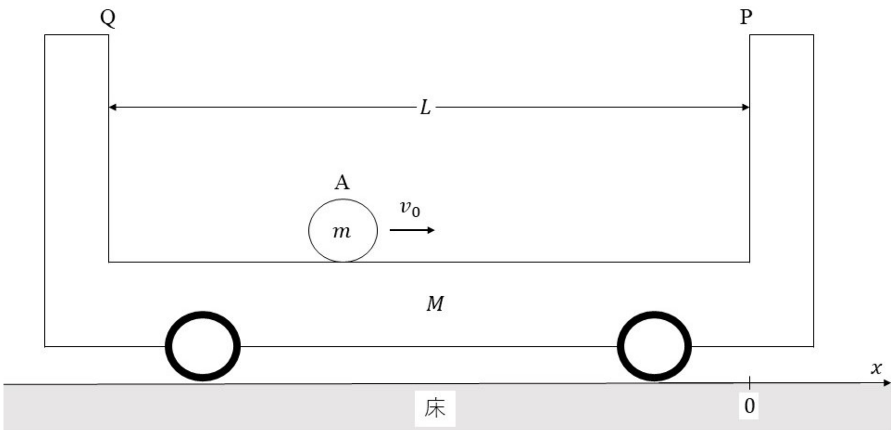

図 1

【解答】

(1)

（a） 反発係数の式より

$$v_0 = -(v_1 - V_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

運動量保存則から

$$mv_0 = mv_1 + MV_1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0, \quad V_1 = \frac{2m}{m+M}v_0$$

(b) 台車に対する小球 A の速度を u_1 とおくと

$$u_1 = v_1 - V_1 = -v_0$$

であり，台車上で P から Q までの変位 $-L$ を進むのに要する時間 T は $T = \dfrac{L}{v_0}$ となる．

さらに，壁 Q に衝突するときの反発係数と衝突後の運動量に注目して，

$$v_1 - V_1 = -(v_2 - V_2) \qquad \cdots\cdots ③$$
$$mv_1 + MV_1 = mv_2 - MV_2 \qquad \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$v_2 = v_0, \quad V_2 = 0$$

(c) (2) について,v_3, V_3 を考えると，それぞれ v_1, V_1 に一致する．したがって，m と M の関係式によらず台車に対する小球 A の相対速度の大きさは v_0 で不変であり，衝突の間隔は T で一定である．いま，$m = M$ より $v_1 = 0$, $V_1 = v_0$ となるので，衝突の度に速度を交換する．すなわち，小球 A と壁 P の位置の時間変化を x-t グラフに表して，図 1（右図）を得る．

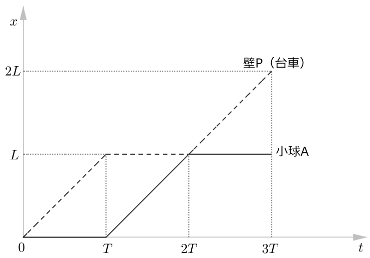

図 2

(d) $M = 2m$ とすると

$$v_1 = -\frac{1}{3}v_0, \quad V_1 = \frac{2}{3}v_0$$

である．小球 A が P で衝突してから Q で衝突した後に再び P で衝突するまでの時刻は $2T$ であり，その間に台車が進む距離は

$$\frac{2}{3}v_0 \cdot T = \frac{2}{3}L$$

である．また，小球が PQ 間を 4 往復するまでに時間は $8T$ かかり，その間に台車は $\dfrac{8}{3}L$ 進んでいる．残り $\dfrac{1}{3}L$ 動くまでの時刻は $\dfrac{(1/3)L}{(2/3)v_0} = \dfrac{1}{2}T$ となるので，求める時間は

$$8T + T = \frac{17L}{2v_0}$$

である．

(2)

（a） 反発係数の式および運動量保存則より

$$ev_0 = -(v_1' - V_1{}') \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$mv_0 = mv_1{}' + MV_1{}' \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤,⑥より

$$v_1{}' = \frac{m - eM}{m + M}v_0, \quad V_1{}' = \frac{(1 + e)M}{m + M}v_0$$

(b) 衝突によって運動量が変わることはないので,

$$mv_0 = mv_1{}' + MV_1{}' = \cdots = mv_n{}' + MV_n{}' \qquad \cdots\cdots ⑦$$

また，各衝突における反発係数の式は

$$e = -\frac{v_1{}' - V_1{}'}{v_0},\ e = -\frac{v_2{}' - V_2{}'}{v_1{}' - V_1{}'},\ \cdots,\ e = -\frac{v_n{}' - V_n{}'}{v_{n-1}{}' - V_{n-1}{}'}$$

これらの辺々をかけ合わせて

$$(-e)^n = \frac{v_n{}' - V_n{}'}{v_0} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦,⑧より

$$v_n{}' = \frac{m + (-e)^n M}{m + M}v_0, \quad V_n{}' = \frac{\bigl(1 + (-e)^n\bigr)m}{m + M}v_0$$

(c) $0 < e < 1$ ゆえ $\lim\limits_{n\to\infty}(-e)^n = 0$．したがって,

$$\lim_{n\to\infty} v_n{}' = \frac{m}{m + M}v_0, \quad \lim_{n\to\infty} V_n{}' = \frac{m}{m + M}v_0$$

以上より，十分時間の経過後,

小球は台車と一体となり，速度 $\dfrac{m}{m + M}v_0$ の等速直線運動を行う．