図 1 のように，単スリット S_0 を備えたついたて A，複スリット S_1 と S_2 を備えたついたて B，スクリーン C を平行に置き，単色光源から出た波長 λ の光を S_0 にあてた．光は S_0 で回折した後，S_1, S_2 で再び回折して，スクリーン上に明暗の縞（干渉縞）をつくった．S_1 および S_2 から等距離にあるスクリーン上の点を O とし，点 O から右に距離 x はなれたスクリーン上の点を P とする．S_1 と S_2 の間隔を $4d$，ついたて A とついたて B の距離を l，ついたて B とスクリーン C の距離を L，空気の屈折率を 1 として，以下の問いに答えなさい．ただし，$l \gg 4d$，$L \gg 4d$，および $L \gg x$ である．必要であれば $\alpha \ll 1$ のとき，$(1+\alpha)^{\beta} \fallingdotseq 1+\alpha\beta$ を用いてよい．

はじめ，ついたて A は図 1 のように，S_0 が S_1 および S_2 と等距離になる位置に置かれている．

(1) 点 P に明線が生じる条件および暗線が生じる条件をそれぞれ求めなさい．

(2) このときの明線と暗線の間隔 a を求めよ．

次に，図 2 のように，ついたて A を図の左方向に d だけ動かした．この状態で干渉縞を確認すると，図 1 の状態で点 O にあった明線が距離 Δx だけ移動していた．

(3) 明線が移動した距離 Δx を求めなさい．また，移動した方向は左右どちらか答えなさい．

(4) このときの明線と暗線の間隔 b を求めなさい．

最後に，図 3 のように，ついたて A からついたて B までの領域のうち，S_0 から左側の領域とついたて B からスクリーン C までの領域に，屈折率 n の透明な物体を置いた．この状態で干渉縞を確認すると，図 2 の操作で点 O から移動した明線が点 O の位置に戻っていた．

(5) S_0 から S_1 を通り点 P に届く経路および S_0 から S_2 を通り点 P に届く経路について，光路長をそれぞれ求めなさい．

(6) 透明な物体の屈折率 n を求めなさい．

(7) このときの明線と暗線の間隔 c を求めなさい．

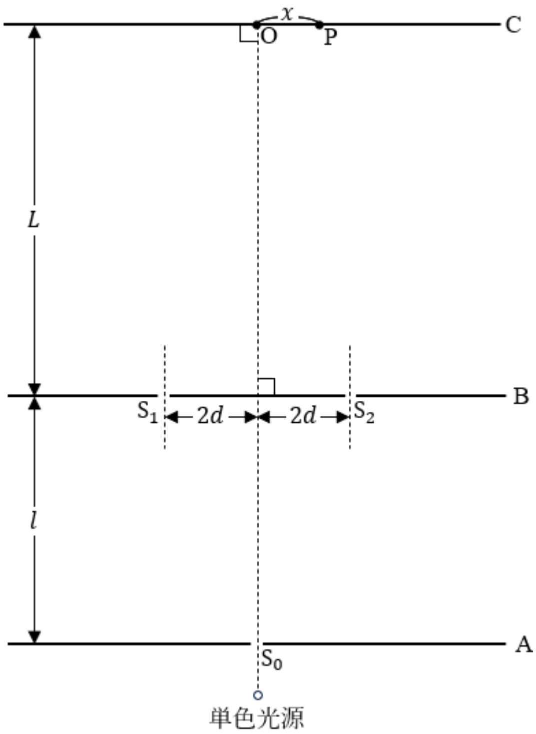
x
O
P
C
L
B
S_1
$2d$
$2d$
S_2
l
A
S_0
単色光源

図 1

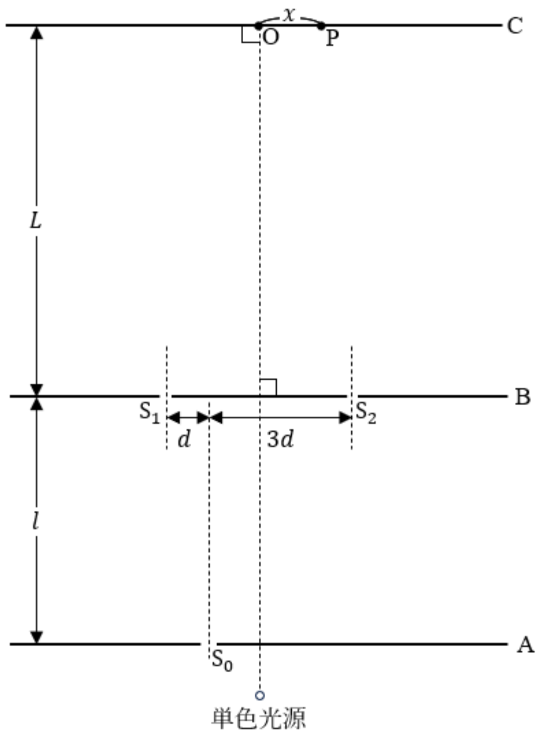
x
O
P
C
L
B
S_1
d
$3d$
S_2
l
A
S_0
単色光源

図 2

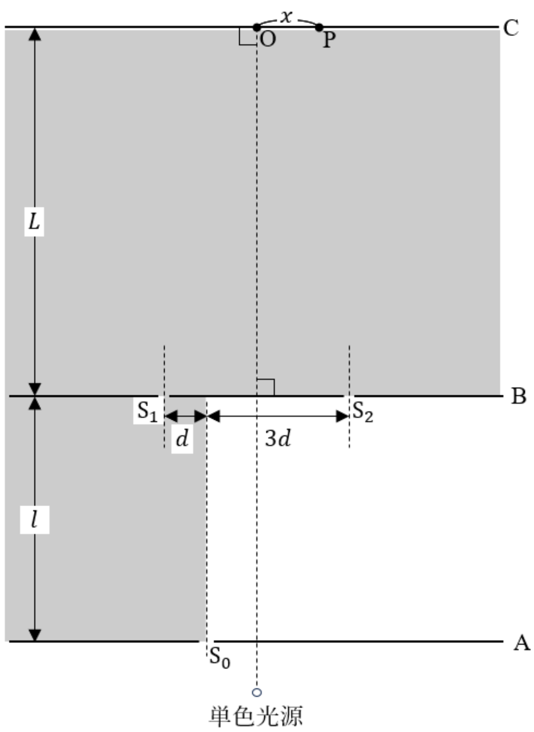
x
O
P
C
L
B
S_1
d
$3d$
S_2
l
A
S_0
単色光源

図 3

【解答】

2 種類の経路 $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}_1 \to P$，$\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}_2 \to P$ の長さの差は，S_1P と S_2P の差に一致する．

$$\mathrm{S}_1P = \sqrt{L^2 + (2d+x)^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{2d+x}{L}\right)^2}$$
$$\mathrm{S}_2P = \sqrt{L^2 + (2d-x)^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{2d-x}{L}\right)^2}$$

ここで，$2d + x \ll L$ より与えられた近似式から

$$\mathrm{S}_1P - \mathrm{S}_2P \fallingdotseq \frac{4d}{L}x$$

となるので，

$$\begin{cases} \text{明線条件}：\dfrac{4d}{L}x = m\lambda & (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \\ \text{暗線条件}：\dfrac{4d}{L}x = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda & (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \end{cases}$$

(2)　同じ m に対して，明線と暗線の位置はそれぞれ $x,\ x+a$ と書き表せるので，

$$\begin{cases} \dfrac{4d}{L}x = m\lambda \\ \dfrac{4d}{L}(x+a) = (m + \dfrac{1}{2})\lambda \end{cases}$$
$$\frac{4d}{L}a = \frac{\lambda}{2}$$
$$\therefore a = \frac{L\lambda}{8d}$$

(3)　$\mathrm{S}_0\mathrm{S}_1 = \sqrt{l^2 + d^2}$，$\mathrm{S}_0\mathrm{S}_2 = \sqrt{l^2 + 3d^2}$ となるので，$\frac{9d^2}{l^2} \ll 1$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_0\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_0\mathrm{S}_2 &= \sqrt{l^2 + d^2} - \sqrt{l^2 + 3d^2} \\ &\fallingdotseq l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{9d^2}{l^2}\right) - l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}\right) \\ &= \frac{4d^2}{l} \end{aligned}$$

となり，$\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}_1 \to P$，$\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}_2 \to P$ の経路差は

$$(\mathrm{S}_0\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_1P) - (\mathrm{S}_0\mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_2P) \fallingdotseq \frac{4d}{L}x - \frac{4d^2}{l}$$

よって，明線条件は

$$\frac{4d}{L}x - \frac{4d^2}{l} = m\lambda \quad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

以上より同じ m に対する明線の位置 x を考えると，明線の変位 Δx は

$$\begin{aligned}\frac{4d}{L}(x+\Delta x)-\frac{4d^2}{l}&=\frac{4d}{L}x\\ \frac{4d}{L}\Delta x&=\frac{4d^2}{l}\\ \Delta x&=\frac{Ld}{l}\end{aligned}$$

であり，Δx は正なので移動方向は右で，その距離が $\dfrac{Ld}{l}$ である．

(4)　(3) と同様に暗線も Δx だけ移動する．よって，明線と暗線の間隔は変わらないので，$b=a=\frac{L\lambda}{8d}$.

(5)　屈折率 n 中では光路長は経路長の n 倍となるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{S_0}\to\mathrm{S_1}\to P: n\mathrm{S_0S_1}+n\mathrm{S_1}P &\fallingdotseq nl\left(1+\frac{d^2}{2l^2}\right)+nL\left(1+\frac{1}{2}\frac{(2d+x)^2}{L^2}\right)\\ \mathrm{S_0}\to\mathrm{S_2}\to P: \mathrm{S_0S_2}+n\mathrm{S_2}P &\fallingdotseq l\left(1+\frac{9d^2}{2l^2}\right)+nL\left(1+\frac{1}{2}\frac{(2d-x)^2}{L^2}\right)\end{aligned}$$

(6)　$x=0$ としたときの光路長の差が 0 となるので，

$$\begin{aligned}nl\left(1+\frac{d^2}{2l^2}\right)+nL\left(1+\frac{1}{2}\frac{4d^2}{L^2}\right)&=l\left(1+\frac{9d^2}{2l^2}\right)+nL\left(1+\frac{1}{2}\frac{4d^2}{L^2}\right)\\ n\frac{2l^2+d^2}{2l}&=\frac{2l^2+9d^2}{2l}\\ \therefore n&=\frac{2l^2+9d^2}{2l^2+d^2}\end{aligned}$$

(7)　(3)，(4) より明線と暗線の間隔はついたて A とついたて B の間の光路長の差によらない．よって，$\mathrm{S_1}P$ と $\mathrm{S_2}P$ の間の光路長の差についてのみ考えればよく，それは

$$n\mathrm{S_1P}-n\mathrm{S_2P}=\frac{4nd}{L}x$$

である．(2)，(4) と同様にして明線と暗線の間隔 c は，

$$\begin{aligned}\frac{4nd}{L}(x+c)-\frac{4nd}{L}x&=\frac{\lambda}{2}\\ c&=\frac{L\lambda}{8nd}=\frac{L\lambda(2l^2+d^2)}{8d(2l^2+9d^2)}\end{aligned}$$