Математические основы обработки цифровых сигналов

Масюков Андрей Вадимович

Тверь, 2010 г.

Оглавление

1 Введение

1.1 Цифровой сигнал. Дискретизация и квантование.

цифровой сигнал = дискретизация + квантование.

Задачи:

1. сигнал-помеха(фильтр)
2. аппроксимация(сжатие)

Гармонический анализ

1. (фурье)-> ДПФ
2. ДПФ-дискретное преобразование фурье
3. БПФ-быстрое преобразование фурье

1.2 Элементы функционального анализа

Функция f непрерывна на $[a, b]$, то есть $f \in C[a, b]$, если

$$\lim_{x \to y} f(x) = f(y) \tag{1.1}$$

для всех $y \in [a, b]$. По определению предела, формула (1.1) означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех x в интервале $|x - y| < \delta$. Пространство $C[a, b]$ является банаховым, то есть линейным, нормированным и полным. Линейность означает, что любая линейная комбинация элементов пространства тоже принадлежит этому пространству. Норма в $C[a, b]$ определяется как

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{1.2}$$

Понятие нормы необходимо для определения сходимости в функциональном пространстве. (Например, сходимость итераций численного решения.) В силу определения (1.2), сходимость $f_n \to f$ в $C[a, b]$ при $n \to \infty$ означает равномерную сходимость $f_n(x) \underset{x \in [a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$.

Полнота пространства означает сходимость любой фундаментальной последовательности (последовательности Коши). По определению, последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что для любых $n > m$ и $k > m$ выполняется $\|f_n - f_k\| < \varepsilon$.

Пространство непрервных на всей числовой оси функций обозначают $C(\mathbb{R})$ или просто C. С нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \tag{1.3}$$

оно является банаховым. Просранство непрерывно дифференцируемых функций C^1 с нормой

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(|f(x)| + \left|\frac{df}{dx}\right| \right) \tag{1.4}$$

тоже банахово.

Можно привести пример

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \arctan\frac{x}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(x) \tag{1.5}$$

сходимости непрерывных функций к разрывной функции. Это не противоречит полноте C, так как здесь нет равномерной сходимости, то есть сходимости в C. Однако пример (1.5) показывает, что максимальные нормы (1.2), (1.3), (1.4) не всегда удобны.

Пространство L_1 абсолютно интегрируемых (по Лебегу) функций с интегральной нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \tag{1.6}$$

также является банаховым. Равенство $\|f\|_1 = 0$ означает, что $f(x) = 0$ почти везде, то есть для всех $x \in \mathbb{R}$ за исключением, возможно, точек множества меры ноль. Для функций, имющих конечное число точек разрыва, интеграл Лебега равен интегралу Римана (то есть пределу интегральных сумм Дарбу).

Для эффективного сжатия информации необходимы ортогональные базисы, то есть понятие скалярного произведения (inner product). Пространство L_2 функций с абсолютно интегрируемым квадратом является гильбертовым, то есть банаховым пристранством со скалярным произведением

$$(f,g) \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\,dx, \tag{1.7}$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. То есть рассматриваются как вещественнозначное $L_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, так и комплекснозначное $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Норма в L_2 равна

$$\|f\|_2 \stackrel{def}{=} \sqrt{(f,f)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Для упражнения докажите, что приведенные выше определения удовлетворяют аксиомам нормы и скалярного произведения, а также неравенство Коши-Шварца-Буняковского

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x)\, dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \ dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx. \tag{1.9}$$

В нулевом прибижении параграф готов. Возможны опечатки и последующее расширенее. Но, главное, он принял нормальный вид математического текста.

Сможете продолжить дальше в таком духе?

$$\begin{gathered} f \in C[a,b] \Leftrightarrow \lim_{x\to y} f(x) = f(y) \forall y \in [a,b] \Leftrightarrow \\ \forall y \in [a,b] \ \forall > 0 \ \exists \delta\colon |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \end{gathered} \tag{1.10}$$

Банахово пространство, то есть линейное, нормированное и полное.

$$\begin{aligned} f_1 \in C[a,b], f_2 \in C[a,b] \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \in C[a,b] \ \forall \alpha, \beta \in R \\ \|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{aligned} \tag{1.11}$$

Полнота означает:

$$f_n \to f \text{ в } C[a,b] \Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightrightarrows 0, n \to \infty \ g \in L \ x \in [a,b] \tag{1.12}$$

Фундаментальная последовательность (Коши):

$$\forall \varepsilon \quad \exists N\colon \forall N_1, N_2 > N \quad \|f_{N_1} - f_{N_2}\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \in C[a,b] \tag{1.13}$$

сходится.
Например

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \arctan \frac{x}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} sign(x) \tag{1.14}$$

нет левосторонней сходимости.

$$f \in L_1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \tag{1.15}$$

$\|f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$

$\|\lambda f\| = |\lambda| \ \|f\|, \forall \lambda \in R$

$\|f_1 + f_2\| \leqslant ||f_1|| + ||f_2||$

Интеграл Лебега для полноты.

$$\int\limits_0^1 D(x)\,dx = 0 \tag{1.16}$$

$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ “почти везде“

$$\boxed{L_2(R)}$$

$$f \in L_1 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty \tag{1.17}$$

$f \in L_2 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty$

$\|f\|_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$

Гильбертово пространство $=$ Банахово $+$ скалярное произведение

$$(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\,dx \tag{1.18}$$

$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$

$|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)\,dx|^2 \ \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx$

Доказательство .

$$Im_f = Im_g = 0$$
$$0 \le (f+\lambda g, f+\lambda g) = (f,f) + \lambda^2(g,g) + 2\lambda(f,g)$$
$$0 \ge D = (f,g)^2 - (f,f)(g,g)$$
$$z = x + iy \qquad\qquad x, y \in R$$
$$argArg \qquad\qquad Imz = |z|\sin\arg z$$
$$z = |z|e^{i\arg z}$$
$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$
$$\boxed{\cos\phi = \tfrac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\ \sin\phi = \tfrac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} - e^{i(\arg z + 2\pi k)/3}, k = 0, 1, 2, ...$$

□

1.3 Комплексные числа.

$z = x + iy \; x, y \in R$

$y = Im\, z$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Здесь должен быть график

Фаза $\Rightarrow arg\, z$

Arg означает однозначная, а arg неоднозначная.

$x = Rez$

$Rez = |z| \cos \arg z$

$Im\, z = |z| \, \sin \arg z$

$z = |z| e^{i \arg z}$

Формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.19}$$

-где i мнимая единица.

$e^{i\pi} = -1$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

функция: число $\to$ число
оператор: функция $\to$ функция
функционал: функция $\to$ число
носитель $\sup f = \{x \colon f(x) \notin 0\}$
Функция называется финитной, если носитель конечен $\Leftrightarrow \sup f \in [a, b]$

1.4 Преобразование Фурье и свертка

Преобразование Фурье

$$F[f](\omega) \equiv \widehat{f}(\omega) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} \, dx \tag{1.20}$$

где $\widehat{f}(\omega)$ - спектор, F - оператора Фурье.

Обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\widehat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega x}\,dx \tag{1.21}$$

Свойства преобразования Фурье

$$F[f(x+a)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)e^{i\omega x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{i\omega(x'-a)}\,dx' = e^{i\omega a}\widehat{f}(\omega) \tag{1.22}$$

$$F[f(\frac{x}{c})] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{x}{c})e^{i\omega x}\,dx = |c|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{i\omega x' c}\,dx' = |c|\widehat{f}(\omega c) \tag{1.23}$$

$$F[f'] = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)i\omega e^{i\omega x}\,dx = -i\omega\widehat{f}(\omega) \tag{1.24}$$

$$F[f''] = -\omega^2\widehat{f}(\omega) \tag{1.25}$$

$$\widehat{f}'(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)ixe^{i\omega x}\,dx \tag{1.26}$$

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')\,dx' \tag{1.27}$$

Определение 1 (Свертка). *Сверткой функций f и x называется функция*

$$y(t) = f*x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t')x(t-t')\,dt' \tag{1.28}$$

Три свойства свертки:

Теорема 1 (Коммутативность свертки).

$$f*g = g*f \tag{1.29}$$

Доказательство .

$$f*g = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')\,dt' =$$

делаем замену $(t') = t - t''$, $(t - t') = t''$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t'')f(t-t'')\,dt'' = g * f$$

$y_i = \sum\limits_k f_k x_{j-k}$ замена $f_k = j - p,\ x_{j-k} = p$ □

Теорема 2 (Ассоциативность свертки).

$$(x * f) * g = x * (f * g) \tag{1.30}$$

Доказательство .

$\boxed{?}$

□

Теорема 3 (Дистрибутивность свертки).

$$(x * f) + g = x * f + x * g) \tag{1.31}$$

Определение 2 (Передаточная функция фильтра f). $y = f * x$ *,если непрерывный случай*

$$T(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1.32}$$

дискретный случай

$$T(\phi) = \sum_k f_k e^{-i\phi k} \tag{1.33}$$

Определение 3 (Передаточная функция комплексно значная).

$$|T| - (AFC)$$

arg T - ФЧХ(фазовая частотная характеристика).

Определение 4 (f - симметричный(нульфазовый)фильтр).

$$f(-t) = f(t) \tag{1.34}$$

$f_{-k} = f_k$.

Определение 5 (f - причинный фильтр). *Если* $f(t) = 0 t < 0$ *и* $f_k = 0 k < 0$.

Определение 6 (f - финитный фильтр).

$$f(t) = 0 \text{ при } \forall |j| > I(FIR)$$

$$f_k = 0 \text{ при } k < 0.$$

Упражнения:

1. Доказать ассоциативность: $f*(g*h) = (f*g)*h$
2. Доказать дистрибутивность:$(f_1+f_2)*g = (f_1*g)+(f_2*g)$, если (f_1*g) и (f_2*g) существуют

Таблица для запоминания

$$\begin{aligned}
F[f] &= \widehat{f} \\
F[f(x+a)] &= e^{iwa}\widehat{f}(\omega) \\
F[f(\frac{x}{c})] &= |c|\widehat{f}(c\omega) \\
F[f'] &= -i\omega\widehat{f}(\omega) \\
F[xf(x)] &= -i\tilde{f} \\
F[f*g] &= \hat{f}-\hat{g}
\end{aligned}$$

1.5 Ряд Фурье

Ряд Фурье - представление произвольной функции f с периодом τ в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k cos(2\pi\frac{k}{\tau}x + \theta_k) \tag{1.35}$$

Этот ряд может быть также переписан в виде

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{i2\pi\frac{k}{\tau}x} \tag{1.36}$$

где

A_k - амплитуда k-го гармонического колебания,

$2\pi\frac{k}{\tau} = k\omega$ - круговая частота гармонического колебания,

θ_k - начальная фаза k-го полебания,

$\hat{f}_k$- k-я комплексная амплитуда.

2 Глава 2

2.1 Обобщенные функции, обобщенное преобразование Фурье

Определение 1 (Простравнство Шварца)**.** *Функция y принадлежит пространству Шварца $\mathfrak{L}$, если $y \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ и $x^p \ y^{(k)}(x) \to 0$ при $\ x \to \pm\infty\ $ для всех целых неотрицательных p и k.*

$$y \in Z \Leftrightarrow \varphi \in e^{\infty}(R) \tag{2.1}$$

$x^p \ y^{(k)}(x) \to 0, \ x \to \pm\infty \ \forall p > 0, \ \forall k = 0, 1, 2...$

Пример 1. $e^{-x^2} \in \mathfrak{L}$

Теорема 1. $Y \in \mathfrak{L} \Rightarrow$

1. $y \in \mathfrak{L}$
2. $x\varphi(x) \in \mathfrak{L}$
3. $F[y] \in \mathfrak{L}$

Определение 2 (сходимость в $\mathfrak{L}$)**.**

$$\phi_k \to \mathfrak{L}, \quad k \to \infty \Leftrightarrow x^p \phi_k^{(j)}(x) \rightrightarrows x^p \phi^{(j)}(x), \tag{2.2}$$

$\forall p, j = 0, 1, 2, ...$

Теорема 2. *Если $\phi_k \to \phi$ в $\mathfrak{L}$, то*

1. *можно переход к lim под знаком произведения $\phi_k' \to \phi'$*
2. *если умножить на x ,то $\phi_k x \to \phi x$*
3. *$F[\phi_k] \to F[\phi]$ можно переходить к преобразованию Фурье под знаком предела.*

Определение 3 (обобщенная функция)**.** *Это линейный непрерывный функционал на пространстве Шварца($\mathfrak{L}$).*

$$\mathfrak{L}' : \mathfrak{L} \to R$$

или

$$\mathfrak{L}\colon \mathfrak{L} \to C,$$

$$(f, \phi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx \tag{2.3}$$

$f \in \mathfrak{L}'$ $\quad\phi \in \mathfrak{L}$ *непрерывность - если* $\phi_k \to \phi$ $\quad$ *в* $\mathfrak{L} \Rightarrow (f,\ \phi_k) \to (f, \phi)\ \forall f \in \mathfrak{L}'$.

Теорема 3. *Если*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|\,dx}{1+x^p} < +\infty, \tag{2.4}$$

где p-степень x $(\exists p) \in N$
такие функции - функции локальные непрерывного роста $\Rightarrow f \in Z'$.

Определение 4 (слабая сходимость в пространстве Z' обобщенной функции)**.**

$$f_k \to f \qquad \text{в } Z' \Leftrightarrow (f_k, \phi) \to (f, \phi) \tag{2.5}$$

если выполняется $\forall \phi \in Z$.

Определение 5.

$$f \in Z' \quad, f = 0 text]a, b[\Leftrightarrow (f, \phi) = 0 \tag{2.6}$$

$\forall \phi \in Z\colon \phi(x) = 0 \qquad, \forall x[a, b] \Rightarrow$
вырезаем поведение функции на этом интервале

$$supp f = R\{U]a, b[\colon f = 0 text]a, b[\}\ f \in Z'. \tag{2.7}$$

формулы

$$\boxed{\delta(cx) = \tfrac{1}{|c|}\delta(x)}$$

$$\boxed{(f(c(x-x_0)), \phi(x)) = \tfrac{1}{|c|}(f(x, \phi\tfrac{x+x_0}{c}))}$$

$$\boxed{(xf(x), \phi(x)) = (f(x), x\phi(x))}$$

$$\boxed{x\delta'(x) = -\delta(x)}\ \forall \phi \in Z.$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi p)}$$

Определение 6 (Обобщенное произведение)**.**

$$\boxed{(f', \phi) = -(f, \phi')}\ f \in Z', \phi \in Z. \tag{2.8}$$

Теорема 4.
$$f_k \to f text Z' \Rightarrow f'_k \to f' \tag{2.9}$$
в Z' функции все обобщенные - бесконечно дифференцированные.

Доказательство . $(f'_k, \phi) = -(f_k, \phi') \to -(f, \phi') = (f', \phi),\ \forall \phi \in Z.$ □

Определение 7. *Сумма бесконечного ряда - предел последовательности частичной суммы этого ряда.*

Определение 8 (Обобщенное произведение Фурье)**.**
$$\boxed{(F[f], u) = (f, F[\phi])} \tag{2.10}$$
выполняется для $f \in Z', \phi \in Z$.

Теорема 5.
$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f, \tag{2.11}$$
$\forall f \in Z'$.

Доказательство . Надо рассмотреть скалярное произведение
$$\forall \phi \in Z\ (F^{-1}[F[f]], u) = (F[f], F^{-1}[\phi]) = (f, F[F^{-1}[\phi]]) = (f, \phi). \tag{2.12}$$
□

Формулы
$$\boxed{\delta(x) = F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega}$$
$$\boxed{\frac{2\sin\Omega x}{x} \to_{x', \Omega \to = \infty} 2\pi\delta(x)}$$

Свойства

Преобразование Фурье от произведения $F[f'(x)](x) =$ рассмотрим скалярное произведение

$(F[f'(x)](\omega), \phi(\omega)) = (f'(x), F[\phi(\omega)](x)) = (f'(x)$
$, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\phi(\omega) d\omega) = -(f(x)$
$, (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\phi(\omega) d\omega)') = -(f(x)$
$, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) i\omega e^{i\omega x} d\omega) =$
$-(f(x), F[i\omega\phi(\omega)](x)) = -(F[f(x)](\omega), i\omega$
$\phi(\omega)) = (-i\omega F[f(x)(\omega), \phi(\omega)]) \Rightarrow$

Теорема 6. $F[f'](\omega) = -i\omega F[f](\omega)$ *получим*

Теорема 7. $F[x^p f(x)] = \boxed{?}$

Теорема 8. $F[x^p f(\frac{x-a}{c})] = \boxed{?}$

Главные формулы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x')\delta(x-x')\,dx' = \phi(x)$$

- интеграл Дюамеля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,dx = 2\pi\delta(y)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2\pi p)$$

- формула суммирования Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2\,dx = frac12\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 d\omega$$

- равенство Парсеваля

Определение 9 (Свертка обобщенной функции)**.**

$$(f*g,\phi) = (f(x)g(y),\phi(x+y)) = (f(x),(g(y),\phi(x+y))) \tag{2.13}$$

$$(f*g,\phi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')\,dx')\phi(x)\,dx =$$

[*делаем замену* $(x-x') = y$ $(x) = y + x'$]

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(y)\phi(y+x')\,dx'\,dy = (f(x)g(y),\phi(x+y)) \boxed{?}$$

Лемма 1 (Шварца)**.** $g \in Z', \phi \in Z(R^2) \Rightarrow (g(y), u(x,y)) \in Z$

Доказательство . $\boxed{?}$ следует из следующей теоремы. □

Теорема 9. *Если*

$$f \in Z', g \in Z' \Rightarrow f*g \in Z'. \tag{2.14}$$

Теорема 10 (о свертке). *$f \in Z', g \in Z'$ и $g-$ финитна $\Rightarrow$ финитная функция - это функция с конечным носителем.*

$$\Rightarrow \boxed{F[f*g] = F[f][g]} \tag{2.15}$$

Доказательство . Надо вычислить преобразование фурье свертки.

$$(F[f*g], \phi) =_{\forall \phi \in Z} (f*g, F[\phi]) =$$

$$[\text{ по определению свертки }]$$

$$= (f(x), (g(y), F[\phi](x+y))) = (f(x), g(y), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) e^{i\xi(x+y)} d\xi) =$$

$$= (f(x), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{i\xi(x+y)} \phi(\xi) d\xi\, dy) =$$

$$(f, F[\phi(\xi) F[g](\xi)]) = (F[f], \phi F[g]) =$$

т.к. g - финитна, то $F[g] = C^{\infty}$ а такую функцию можно переименовать в скалярное произведение из левой в правую $= (F[f]F[g], \phi)$ □

Теорема 11 (Отсчетов). *Если наша функция*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \tag{2.16}$$

представляет интеграл фурье и это преобразование имеет конечный носитель $\widehat{f}(\omega) = 0$ при $|\omega| > \frac{\pi}{\Delta}$ - частота Найквиста

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\delta) \frac{\sin \pi(x-k\delta)/\delta}{(x-k\delta)} = f(x)_{x \in R}} \tag{2.17}$$

Определение 10 (Дискретная свертка).

$$y_k = (f*x)_k \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j x_{k-j}, \ k \in Z \tag{2.18}$$

$$x \in L_2 \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty.$$

Пусть x_j −символ Кронекера

$$(f * x)_k = \sum_j f_j x_{k-j} = f_k$$

Определение 11 (Передаточная функция)**.**

$$T(\phi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{ij\phi} \tag{2.19}$$

$$-\pi \le \phi \le \pi$$
$$T(\phi + 2\pi) = T(\phi).$$

Теорема 12.

$$x_j = e^{-ij\phi} \Rightarrow (f * x)_k = x_k T(\phi) \tag{2.20}$$

Доказательство .

$$(f * x)_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{-i\phi(k-j)} = e^{-i\phi(k-j)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{ij\phi} = x_k T(\phi).$$

□

Теорема 13.

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \tag{2.21}$$

Определение 12 (Дискретное преобразование фурье)**.**

$$\widehat{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{i2\pi jk/n} \tag{2.22}$$

$k = 0, 1, 2, ...$ n*- длина сигнала.*
$\widehat{f}_{k+n} = \widehat{f}_k$.

Теорема 14.

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k e^{-i2\pi jk/n} \tag{2.23}$$

Определение 13 (Циклическая свертка)**.** *Для выборки из n элементов*

$$(f * x)_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_{(j+n) mod_n} x_{(k-j) mod_n} \tag{2.24}$$

$k = 0, 1, 2, ...$

Теорема 15.

$$DFT[f * x] = DFT[f]DFT[x]. \tag{2.25}$$

Доказательство . подствновкой $\boxed{?}$ $\square$

3 Глава 3

3.1 Адаптивный фильтр, сигнал и помеха, винеревские фильтры

Определение 1 (Взаимная ковариация(корреляция))**.**

$$C_{u,v}(h) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(x+h)\,dx$$

нормированная ковариация - если это разделим на норму этих векторов.

автоковариация -

$$A_u(h) = C_{u,u}(h) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^* u(x+h)\,dx.$$

Теорема 1. *вычислим преобразование фурье от взаимной ковариации*

$$F[C_{u,v}(h)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_{u,v}(h)e^{i\omega h}dh = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^x(x)v(x+h)\,dxe^{i\omega h}dh =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^*(x)v(y)\,dxe^{i\omega(y-x)}\,dy = \widetilde{v}(\omega)(\widetilde{u}(\omega))^*.$$

Определение 2 (Стационарный случайный процесс U(t))**.** *M - математическое ожидание*

$$M[u(t)] = 0,\ M[u^*(t)u(t+h)] = a(h)$$

не зависит от t

Эргодичность - усреднение по реализации совпадает с усредднением по аргументу(взаим.ков.)

$$M[u^*(t)u(t+h)] = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{b} u^*(t)u(t+h)\,dt.$$

Определение 3 (Белый шум).

$$A_R(t,h) = M[u(t)u^*(t+h)] = A_R(h)$$

$$n(t) = \Leftrightarrow A_R(h) = 0 \ \forall h \notin 0$$

Окрашенный шум = фильтр * белый шум
* - свернуть с ...

Определение 4 (Винеревский формирующий фильтр). *u,v - даны сигналы f - ?*

$f * v \approx v$- к фильтру применим и получим v
МНК(LSM) берем норму и минимизируем по фильтру f

$$\boxed{\|f * u\| \to \min_f}$$

...

Теорема 2. *"Оптимальный фильтр"при котором сигнал u(t) и шум n(t) не коррелированный.*

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{|\widehat{u}(\omega)|^2}{|\widehat{u}(\omega)|^2 + |\widehat{n}(\omega)|^2}.$$

3.2 Минимально-фазовые фильтры. Обратные фильтры

Определение 5 (Z - преобразование). *если есть $\{f_k\},\ k \in Z$*

$Z[]f$ превращение

$Z[f](z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} f_k Z^k,\ z \in C$

$Z[f] = 0$ - характеристическое уравнение для f.

Теорема 3.

$$Z[f * g] = Z[f]g[z]$$

Доказательство .

$$\sum_k (f * g)_k z^k = \sum_k (\sum_j f_j g_{k-j}) z^k = \sum_k (\sum_j f_j g_{k-j}) z^{k-j} z^j =$$

$$= \sum_k (\sum_j f_j z^j) g_{k-j} z^{k-j} = Z[f]g[z].$$

□

Теорема 4. *Фильтр длины n+1 равен свертке n (двухточный фильтр) "диполей".*

Доказательство . Рассмотрим

$$Z[f] = \sum_{k=0}^{n} f_k Z^k = f_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$

если возмем фильтр $Z[(-z_j, 1)] = -z_j + 1Z \Rightarrow f$ через корни характеричтического многочлена выражается как $f = f_n(-z_1, 1) * (-z_2, 1) * ... * (-z_n, 1)$ □

Определение 6. *Диполь (a.b) называется min-фазовым, если* $|a| > |b|$.

Фильтр называется min-фазовым, если он свертка минимально - фазовых диполей.

Теорема 5 (Робинсона). *Если* $|T_f(\phi)| = |T_g(\phi)|$

рассмотрим 2 фильтра f и g , у них одинаковые амплитудные спектры

f - мин-фазовый

оба фильтра причинные, т.е. нумерация с 0 $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{l} |f_k|^2 \geq \sum\limits_{k=0}^{l} |g_k|^2 \ \forall l$

Теорема 6 (Колмагорова). *Если f - причинный, мин-фазовый фильтр, то аргумент его передаточной функции выражается через*

$$argT_f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |T(\phi')| \frac{\phi' - \phi}{2} d\phi'$$