אופטימיזציה של תהליכים - אביב תש"פ

פתרון בחינת סמסטר 28.7.20

משך הבחינה 2 שעות.

מותר השימוש בכל חומר עזר.

מותר השימוש במחשבון אך לא ב Matlab או בכל תוכנה אחרת.

שאלה מס. 1 (40 נקודות)

נתון התהליך הסקלרי

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad , \quad x(0) = 0$$

א. מצאו את הכניסה $u(t)$ המעבירה את המערכת אל $x(T) = A$ תוך מינימיזציה של הקריטריון

$$J = \int_0^T u^2(t)dt$$

$$H = u^2 + \lambda u$$
$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0 \quad \to \quad \lambda = \text{constant}$$
$$0 = \partial H / \partial u = 2u + \lambda \quad \to \quad u = c \text{ (constant)}$$
$$x(T) = cT = A \quad \to \quad c = A / T$$

ב. הדרישה היא כמו בסעיף א' אלא שהקריטריון כעת הוא

$$J = \int_0^T (u(t) - B)^2 dt$$

$$H = (u - B)^2 + \lambda u$$
$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0 \quad \to \quad \lambda = \text{constant}$$
$$0 = \partial H / \partial u = 2(u - B) + \lambda \quad \to \quad u = c \to \quad c = A / T$$

Same result!

ג. הדרישה היא כמו בסעיף א' אלא שהקריטריון כעת הוא

$$J = \int_0^T e^{\alpha t} u^2(t)dt$$

$$H = e^{\alpha t} u^2 + \lambda u$$
$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0 \quad \to \quad \lambda = \text{constant}$$
$$0 = \partial H / \partial u = 2e^{\alpha t} u + \lambda \quad \to \quad u(t) = ce^{-\alpha t}$$
$$A = \int_0^T ce^{-\alpha t} dt = \tfrac{c}{\alpha}(1 - e^{-\alpha T}) \quad \to \quad c = \frac{\alpha A}{(1 - e^{-\alpha T})}$$

ד.מצאו את הכניסה $u(t)$ המעבירה את המערכת אל $x(T_f) = \beta T_f + \gamma$ (זמן הסיום איננו נתון) תוך מינימיזציה של הקריטריון

$$J=\int_0^{T_f} u^2(t)dt$$

$$u=c;\quad cT=\beta T+\gamma \to T=\frac{\gamma}{c-\beta}\to J=\frac{\gamma c^2}{c-\beta}$$

$$\frac{dJ}{dc}=\frac{2\gamma c(c-\beta)-\gamma c^2}{(c-\beta)^2}=\frac{\gamma c^2-2\gamma c\beta}{(c-\beta)^2}=\frac{\gamma c(c-2\beta)}{(c-\beta)^2}\to c=2\beta$$

שאלה מס. 2 (30 נקודות)

נתון התהליך

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \qquad x(0)=\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$$

ונתון כי הכניסה מוגבלת בתחום

$$1\ge u(t)\ge -1$$

א. דרוש להגיע אל הראשית $x_f=[0\quad 0]^T$ בזמן מינימלי. מצאו את הכניסה ואת זמן הסיום.

x(0) is above the switching line, therefore

$$u(t)=\begin{cases}-1 & t_s>t\ge 0\\ 1 & t_f>t\ge t_s\end{cases}$$

$$t_s=x_{20}+\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^{\;2}+x_{10}}=\sqrt{a}$$

$$t_f=x_{20}+2\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^{\;2}+x_{10}}=2\sqrt{a}$$

ב. כמו א' אלא שנקודת הסיום היא $(b>a)$ $x_f=[b\quad 0]^T$.

Same as going from -(b-a) to the origin

$$u(t)=\begin{cases}1 & t_s>t\ge 0\\ -1 & t_f>t\ge t_s\end{cases}$$

$$t_s=-x_{20}+\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^{\;2}-x_{10}}=\sqrt{b-a}$$

$$t_f=-x_{20}+2\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^{\;2}-x_{10}}=2\sqrt{b-a}$$

ג. כמו א' אלא שנקודת הסיום היא $x_f=[0\quad c]^T$.

First u=-1 then u=1.

The parabula with u=1 that goes through [0;c] is

$$x_1(t)-\tfrac{1}{2}x_2^{\,2}(t)=x_{10}-\tfrac{1}{2}x_{20}^{\;2}=-\tfrac{1}{2}c^2$$

$$x_{10}+x_{20}t_s-\tfrac{1}{2}t_s^{\,2}-\tfrac{1}{2}\left(x_{20}-t_s\right)^2=a-t_s^{\,2}=-\tfrac{1}{2}c^2$$

$$\to t_s=\sqrt{a+\tfrac{1}{2}c^2}$$

$$-t_s+(t_f-t_s)=c$$

$$\to t_f=2t_s+c=2\sqrt{a+\tfrac{1}{2}c^2}+c$$

שאלה מס. 3 (30 נקודות)

נתונה המערכת

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ונתון הקריטריון

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + Ru^2(t)]dt$$

א. עבור

$$Q = q\begin{bmatrix} q_1 & q_{12} \\ q_{12} & q_2 \end{bmatrix}$$

מצאו את חוק הבקרה האופטימלי במונחי הפרמטר $\alpha = \sqrt{q/R}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 2p_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_2 \\ p_{12}p_2 & p_2^2 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} q_1 & q_{12} \\ q_{12} & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{12} = \sqrt{q_1}\sqrt{rq}$$

$$p_2 = \sqrt{r(2p_{12} + qq_2)} = \sqrt{r(2\sqrt{q_1}\sqrt{rq} + qq_2)}$$

$$p_1 = \frac{1}{r}p_{12}p_2 - qq_{12} = \sqrt{q_1}\sqrt{q}\sqrt{(2\sqrt{q_1}\sqrt{rq} + qq_{12})} - qq_{12}$$

$$F = \frac{1}{r}B^T P = \frac{1}{r}[p_{12} \quad p_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{q_1}\alpha & \sqrt{2\sqrt{q_1}\alpha + \alpha^2 q_2} \end{bmatrix}$$

ב. בסעיף זה $q = 3, R = 1$. נתון כי $\|x(0)\| = 2$. מהו המחיר האופטימלי המינימלי האפשרי?

$$\text{Option G:} \quad Q = q\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad r = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\sqrt{\sqrt{2\sqrt{3}+3}} - 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2\sqrt{3}+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4037 & 1.7321 \\ 1.7321 & 2.5425 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - P| = \lambda^2 - 3.9461\lambda + 0.5688 = 0 \quad \to \quad \lambda_{\min} = 0.1498, \ \lambda_{\max} = 3.7963$$

$$J_{opt} = x_0^T P x_0 \quad \to \quad J_{\min} = \lambda_{\min}\|x_0\|^2 = 0.1498 \cdot 4 = 0.5993$$

ג. נתון משוב המצב

$$u(t) = -[f_1 \quad f_2]x(t)$$

האם יתכן שזהו המשוב האופטימלי עבור ערכים מסוימים של R ו- Q (לאו דווקא המבנה שבסעיף א').
התשובה חייבת להיות מגובה בחישוב מפורט.

Since multiplying Q and R by a constant does not change the feedback we can assume without loss of generality that R=1. Then

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \quad , \quad P>0 \quad \to \quad p_1>\frac{f_1^2}{f_2} \quad (1)$$

$$Q=-\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 2p_{12} \end{bmatrix}+\frac{1}{r}\begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_2 \\ p_{12}p_2 & p_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1^2 & f_1f_2-p_1 \\ f_1f_2-p_1 & f_2^2-2f_1 \end{bmatrix}$$

$Q>0 \quad \to \quad f_2^2-2f_1>0 \quad (2)$ independent of p_1!

$$f_1^2(f_2^2-2f_1)-(f_1f_2-p_1)^2>0 \to \quad f_1\left(f_2+\sqrt{f_2^2-2f_1}\right)>p_1>f_1\left(f_2-\sqrt{f_2^2-2f_1}\right) \quad (3)$$

Numerical values of G : $\quad f_1=f_2=3$

$p_1>3 \quad (1)$

$9-6>0 \quad (2)$

$3\left(3+\sqrt{3}\right)>p_1>3\left(3-\sqrt{3}\right) \quad (3) \quad \to \quad 14.1962>p_1>3.8038$

Possible!

בהצלחה!

<u>הערות נוספות והרחבה</u>

פרק זה כולל חקירה נוספת <u>אשר לא נדרשה בבחינה עצמה</u>.

שאלה 1

סעיף א': אפשר היה (כפי שאני עשיתי בפתרון) להישאר עם בעיית בקרה אופטימלית שנפתרת דרך ההמילטוניאן או להציב $u(t)=\dot{x}(t)$ ואז מתקבלת בעיית בולצה (בסעיפים א-ג למעשה אוילר - לגרנג').

סעיף ב': למה התוצאה של סעיף ב' זהה לזו של סעיף א'?

$$J=\int_0^T (u(t)-B)^2dt=\int_0^T u^2(t)dt-2B\int_0^T u(t)dt+B^2\int_0^T 1\cdot dt$$

$$=\int_0^T u^2(t)dt-2B\left(x(T)-x(0)\right)+B^2T$$

כלומר הכניסה האופטימלית לא תלויה ב B בגלל שהמצב בסיום נתון. אם הוא היה חופשי התוצאות היו שונות.

סעיף ד': ראשית זו בעיה כמעט זהה לבעיית הרדיפה שנפתרה בכתה וגם שם התקבל שהרודף צריך לנוע במהירות כפולה מהמטרה.

איך יראה הפתרון של סעיף ד' אם הולכים "לפי הספר" דרך תנאי הטרנסברסליות?

$$H = u^2 + \lambda u$$
$$\bar{\theta} = \mu\left(x_f - (\beta T_f + \gamma)\right)$$
$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \text{constant}$$
$$0 = \partial H / \partial u = 2u + \lambda \quad \rightarrow \quad u = -\tfrac{\lambda}{2} \text{ (constant)}$$
$$\lambda(T_f) = \partial \bar{\theta} / \partial x_f \quad \rightarrow \quad \lambda = \mu$$
$$\partial \bar{\theta} / \partial T_f = -H(T_f) \quad \rightarrow \quad -\mu\beta = -(u^2 + \lambda u) \quad \rightarrow \quad \lambda\beta = \tfrac{\lambda^2}{4} - \tfrac{\lambda^2}{2} = -\tfrac{\lambda^2}{4}$$

$\lambda = 0$ is the solution if $\text{sgn}(\gamma) = -\text{sgn}(\beta)$. This means u=0 and the manifold includes x=0 at a certin positive T_f. This was not the case in all options of this test.

$$\beta = -\tfrac{\lambda}{4} \quad \rightarrow \quad \lambda = -4\beta \quad \rightarrow \quad u = 2\beta$$

שאלה 2 :

סעיף א' : זו בעיה סטנדרטית שפתרונה ניתן בכתה ויש נוסחאות לזמני המיתוג. לא היה צורך להמציא את הגלגל מחדש, לרשום מגילות ולהשקיע בכך זמן יקר.

סעיף ג' : למה בניגוד לסעיף ב' כאן לא ניתן לבצע הזזת ראשית פשוטה?

הסבר פיזיקלי – מדובר על תזוזת גוף קשיח חופשי. ברור שאפשר תזוזה זה עניין של הגדרה לעומת זאת אפס מהירות הוא דבר פיזיקלי.

הסבר מתימטי :

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\left(x - \begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}x \qquad \rightarrow \quad \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\left(x - \begin{bmatrix}0\\c\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}c\\0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}c\\0\end{bmatrix}$$

מתוך שיקולים לוגיים-גיאומטריים אפשר להראות (הוכיחו!) כי הפתרון של סעיף זה שקול לזה של מעבר מ $\tilde{x}(0) = [a \quad c]^T$ אל הראשית כאשר הזמנים t_s ו $(t_f - t_s)$ מתחלפים.

$\tilde{x}(0)$ is above the switching line, therefore

$$u(t) = \begin{cases} -1 & t_s > t \ge 0 \\ 1 & t_f > t \ge t_s \end{cases}$$
$$t_s = x_{20} + \sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} = c + \sqrt{\tfrac{1}{2}c^2 + a}$$
$$t_f = x_{20} + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} = c + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}c^2 + a}$$
$$t_f - t_s = \sqrt{\tfrac{1}{2}c^2 + a}$$