Controle Ótimo com Aplicações em Modelos Biológicos

Resumo dos capítulos do livro de Suzanne Lenhart e John T. Workman.

Lucas Machado Moschen

Escola de Matemática Aplicada

Fundação Getulio Vargas

Rio de Janeiro

2020

Conteúdo

Capítulo 1

Problemas Básicos de Controle Ótimo

1.1 Introdução

Exemplo 1.1.1. Apresenta-se inicialmente uma motivação que considera duas equações, uma representa a variação do peso da parte vegetativa, enquanto a outra representa o peso da parte reprodutiva. O crescimento das plantas é modelado pelo modelo de Colen. Nesse caso, o controle é a fração da fotossíntese destinada para a parte vegetativa. Queremos maximizar o crescimento da parte reprodutiva, que garante o mantimento da espécie.

Dado que $x(t)$ representa a parte vegetativa e $y(t)$ a parte reprodutiva no tempo t, nosso objetivo será definido, então, maximizar o seguinte funcional segundo a função $u(t)$ que representa a fração de fotossíntese para o crescimento vegetativo:

$$F(x,u,t) := \int_0^T \ln(y(t))dt, \tag{1.1}$$

onde T é o limite superior do intervalo de tempo considerado e tal que o modelo é um sistema de equações diferenciais e as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x'(t) = u(t)x(t) \\ y'(t) = (1-u(t))y(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \\ x(0) > 0, \\ y(0) \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Motivacoes: destacar mais motivacoes e esclarecer mais possiveis significados.

Chamamos um problema como esse de **problema de controle ótimo**. Podemos obter uma série de conslusões ao variar os valores de T e como a planta se comporta ao longo do tempo.

Assim, em um sistema de equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais, equações discretas ou equações diferenciais estocásticas, entre outros, podemos adicionar uma variável de controle, onde, a partir dela, podemos maximizar um objetivo.

Desta maneira, em um sistema de controle há variáveis de estado, funções de controle, que afetam a dinâmica do sistema, e o funcional objetivo, que funciona como o cálculo do lucro. Nesse texto, o principal objetivo são sistemas com equações diferenciais ordinárias.

O objetivo dessa área de estudo, dentre outros, é a tomada de decições a partir de um sistema. Existem diversos exemplos: quantas pessoas devemos vacinar para garantir um custo mínimo e minimizar número de infectados; quantas pessoas devem ser colocadas em quarentena para garantir que a infecção se espalhe em menos pessoas; quanto remédio deve ser ingerido para minimizar a carga viral em um corpo; ccomo influenciar um sistema caótico para que ele deixe de ser caótico; entre outros.

Em um problemas como esse, encontramos:

1. variáveis de **estado**: descrevem a dinâmica do sistema.

2. variáveis de **controle**: conduzem o estado dada uma ação.

3. **funcional**: mapa entre um conjunto de funções ao conjunto dos números reais. Esse funcional tem um objetivo, como ser maximizado ou minimizado.

1.2 Preliminares

Alguns conceitos básicos de análise:

1. **Continuidade por partes:** Função contínua em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita de pontos, e igual a seu limite à esquerda ou à direita em cada ponto (não permite pontos isolados).

2. **Diferenciável por partes:** Função contínua que é diferenciável em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita de pontos. Além disso, sua derivada é contínua sempre que definida.

3. **Côncava:** Função $k(\dot{})$, tal que se $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ e para qualquer $a \leq t_1, t_2 \leq b$, $\alpha k(t_1) + (1-\alpha)k(t_2) \leq k(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$. A definição é equivalente para funções de duas ou mais variáveis.

4. **Lipschitz:** Função k em que existe c constante tal que $|k(t_1) - k(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|$, para todos os pontos do domínio de k.

5. **Teorema do Valor Médio:** Seja k contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal qe=ue $k(b) - k(a) = k'(x_0)(b - a)$.

6. **Teorema da Convergência Dominante:** Considere uma sequência $\{f_n\}$ dominada por uma função Lebesgue integrável g. Suponha que essa sequência converge ponto a ponto para uma função f. Então f é integrável e $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$.

Exercício 1.1. Se $k : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes em um intervalo$I$ limitado, k é Lipschitz.

1.3 Condições necessárias para o problema básico

Considete $u(t)$ uma variável de controle e $x(t)$ vari´avel de estado que satisfaz

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)). \tag{1.3}$$

Podemos ver a relação entre essas variáveis como $u(t) \mapsto x = x(u)$. O problema básico do controle ótimo é encontrar uma função de controle contínua por partes 1 $u(t)$ que maximize um dado funcional objetivo

$$J(u) := \int_{t_0}^{t_1} (f(t, x(t), u(t))dt \tag{1.4}$$

Nos problemas encontrados nesse texto, f e g são sempre continuamente diferenciáveis. Para isso, se $u^*(t)$ e $x^*(t)$ associado a a u são argumentos ótimos, podemos extrair condições necessárias para o problema. No capítulo enunciar capitulo, são discutidas as codições suficientes.

Função Adjunta: proposta similar aos multiplicadores de Lagrange para o cálculo multivariado. $\lambda : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes e deve satisfazer algumas condições.

Para isso, assumimos a existência u^* e x^*. Nesse caso, $J(u) \leq J(u^*) < \infty$, para todo controle u. Seja $h(t)$ uma função contínua por partes e $\epsilon \in \mathbb{R}$. Então:

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t), u^\epsilon \mapsto x^\epsilon, \tag{1.5}$$

tal que x^ϵ satisfaz 1.3 sempre que u^ϵ é contínua. Consideramos $x^\epsilon(t_0) = x_0$.

Para todo t, quando $\epsilon \to 0$, temos que $u^\epsilon(t) \to u^*(t)$. Além disso,

$$\left.\frac{\partial u^\epsilon(t)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = h(t).$$

Como a função g é continuamente diferenciável, também ocorre que

$$x^\epsilon(t) \to x^*(t) \text{ e}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon} x^\epsilon(t)\right|_{\epsilon=0}$$

existe. Seja $\lambda(t)$ a função adjunta. Pelo teorema fundamental do Cálculo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\lambda(t)x^\epsilon(t)]dt = \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0),$$

e, portanto, exceto em uma finidade de pontos,

$$\begin{aligned}
J(u^\epsilon) = & \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\epsilon(t))]dt \\
& + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) \\
= & \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)x^\epsilon(t) + \lambda(t) \overbrace{g(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))}^{(x^\epsilon)'(t)}]dt \\
& + \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1).
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$0 = \left.\frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon},$$

pois $J(u^*)$ é máximo. Desta maneira, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}
0 = & \left.\frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)\right|_{\epsilon=0} \\
= & \int_{t_0}^{t_1} [(f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t)) \left.\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t)\right|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t)]dt \\
& - \lambda(t_1) \left.\frac{\partial x^\epsilon}{\epsilon}(t_1)\right|_{\epsilon=0}.
\end{aligned}$$

Para garantir que ocorra a igualdade citada acima, definimos

Definição 1.1 (Hamiltoniano)**.**

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$$

Estamos maximizando H com respeito a u em u^* e, então:

$$\begin{cases}
\frac{\partial H}{\partial u}_{u=u^*} = f_u + \lambda g_u = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial x}_{x=x^*} = -\lambda' = -(f_x + \lambda g_x) \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' \\
\lambda(t_1) = 0
\end{cases} \tag{1.6}$$

1.3.1 Princípio Máximo de Pontryagin

Se u^* e x^* são controle ótimo, então existe $\lambda(t)$ diferenciável por partes tal que a função H, como definida anteriormente, pode ser maximizada em $u^*(t)$. A demonstração é mais simples para o caso de f e g côncavas em u e $\lambda(t) \geq 0$. A segunda derivada do Hamiltoniano indica o tipo de problema: Se for negativa, é um problema de maximização. **Observação:** A condição de maximizar H não sempre implica que $H_u = 0$.

1.3.2 Exercício 1.6 - Efeito Alle

Nesse efeito, consideramos um valor mínimo. O crescimento $x'(t) = rx(t)(\frac{x(t)}{x_{min}} - 1)(1 - \frac{x(t)}{x_{max}})$

Capítulo 2

Existência e Outras Propriedades

Observação: Se o funcional objetivo tiver valor mais ou menos infinito, dizemos que o problema não tem solução. Como assumimos a existência da solução, podemos obter um funcional que tem valor infinito, algo que não desejamos.

Teorema: $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt, s.a\, x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$. Ainda, $f, g \in C^1$ nos três argumentos e côncavos em x e u. Sob as condições apresentadas anteriormente, adicionadas a $\lambda(t) \geq 0$, então para todo u, $J(u^*) \geq J(u)$. A demonstração é basicamente mostrar que a diferença é maior do que 0.

Teorema 2: Seja $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, f é convexa em u existem constantes C_4 e C_1,C_2,$C_3 > 0$ e $\beta > 1$, tal que:

$$\begin{cases} g(t, x, u) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u \\ |g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \\ |g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|) \\ f(t, x, u) \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{cases}$$

Então $J(u^*)$ é maximizador do funcional. Em problemas de minimização, g seria côncava e a desigualdade de f é revertida.

Agora, temos que extender as condições necessárias para Lebesgue.

Unicidade: Implica diretamente da unicidade das soluções do sistema de otimização (intervalos de tempo curto). A volta não é sempre verdadeira.

2.0.1 Interpretação da Adjunta

Considere o funcional $V(x_0, t_0)$ a ser maximizado. Estabelecemos que $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(x_0+\epsilon, t_0) - V(x_0, t_0)}{\epsilon} = \lambda(t_0)$. Podemos relacionar, então, a função adjunta à variação marginal da função custo/lucro com respeito ao estado. É o valor adicional associado com um incremento adicional da variável de estado. Podemos aproximar:

$$V(x_0 + \epsilon, t_0) \approx V(x_0, t_0) + \epsilon\lambda(t_0).$$

Se $\epsilon = 1$, podemos ver que ao adicionar um unidade de valor, $\lambda(t_0)$ é o valor objetivo adicional.

2.0.2 Princípio da Otimalidade

Teorema 3: Considere u^* o controle ótimo associado ao estado x^* para o problema de já citado. Se $\hat{t}, t_1 < \hat{t} < t_1$, então as funções restritas ao intervalo $[\hat{t}, t_1]$ formam uma solução ótima para o problema com tempo inicial $\hat{t}$. Além disso, será único, desde que u^* seja. A demonstração ocorre por contradição. Note que nada pode ser dito sobre o intervalo $[t_0, \hat{t}]$, pois existem contra-exemplos.

Teorema 4: $H(t, x, u, \lambda)$ é contínua por partes e contínua Lipschitz em relação ao tempo no caminho ótimo.

Função Autônoma: Quando não existe dependência do tempo nas funções f e g.

Teorema 5: Se um problema de controle ótimo é autônomo, então o Hamiltoniano é uma função que não depende do tempo. Note que se $M(t) := H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$ é Lipschitz continua, sabemos que M é diferenciável em quase toda parte com respeito à medida de Lebesgue. A partir disso, e utilizando o princípio máximo, vemos que $M'(t) = 0$ em quase toda parte. Como M é contínua, ela é constante.

Princípio Máximo: O máximo de uma função é encontrado em uma das bordas.

Capítulo 3

Condições finais

3.0.1 Termo Payoff

Muitas vezes, também queremos maximizar o valor de uma função em um determinado tempo, em especial no final do intervalo. Nesse caso, o problema se torna:

$$\begin{cases} \max_u[\phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt] \\ x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

A função ϕ é conhecida como termo payoff. A única mudança na obtenção das condições necessárias é na condição do tempo final. Obtemos que $\lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1))$. (Mais uma vez, precisamos fazer com que $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon)-J(u^*)}{\epsilon} = 0$

3.0.2 Estados com Pontos Finais Fixados

Obs.: O funcional objetivo ser imaterial significa que não depende da condição final do estado.

Podemos deixar $x(t_0)$ livre e $x(t_1) = x_1$ fixado. Essa caso é similar com o anterior, com a mudança de que $\lambda(t_0) = -\phi'(x(t_0))$. Isso sugere que exista uma dualidade entre as condições de estado e adjunta.

Também podemos fixar os pontos inicial e final de estado. Notamos que estamos considerando a maximização sobre o conjunto de controles admissíveis, que respeitem as condições, inclusive sobre a variável de estado.

Teorema 1: Se $u^*(t)$ e $x^*(t)$ são ótimos para o problema com pontos inicial e final fixados, então existe uma função $\lambda(t)$ diferenciável por partes e uma contante λ_0 igual a 0 ou 1, onde $H = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$ e $\lambda'(t) = -H_x$.

A diferença é que a função adjunta não tem restrições. A demonstração utiliza uma técnica diferente da utilizada até então. A constante ajusta para problemas degenerados ou problema tem funcional objetivo imaterial.

Capítulo 4

Método Backward/Foward

Queremos agora resolver os problemas de controle ótimo numericalmente. A equação $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ deve ser satisfeita em u^* e pode ser de ajuda para encontrar u em função de x e λ. A partir disso, podemos utilizar um método como Runge-Kutta para resolver o sistema ótimo. Ele vai encontrar o controle ótimo se esse existir.

4.0.1 Algoritmo

1. Chute inicial para $\vec{u}$, sendo cada coordenada de u um valor no tempo discreto.
2. Resolva x Foward utilizando a condição inicial e utilizando sua equação diferencial.
3. Use a condição final de λ e resolva Backward de acordo com sua equação diferencial.
4. Atualize o vetor de controle.
5. Convergência.

É interessante utilizar uma combinação convexa entre o valor do controle anterior e o valor atual para acelerar a convergência.

Combinação Convexa: Combinação Linear de pontos, cuja soma dos coeficientes é positiva e a soma é 1.

O erro no algoritmo é em geral o relativo e ele deve ser menor do que uma tolerância aceitável. A condição que obtemos é que $\delta\|\vec{u}\| - \left\|\vec{u} - ol\vec{d}u\right\| \geq 0$

4.0.2 Runge-Kutta

$$\begin{cases} x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k1 = f(t, x(t)) \\ k2 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1) \\ k3 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2) \\ k4 = f(t + h, x(t) + hk_3) \end{cases}$$

O erro é da ordem de h^4.

Capítulo 5

Laboratórios

5.0.1 Laboratório 1

Nesse laboratório, o autor explora a utilização do MatLab como ferramenta, devido à facilidade de se trabalhar com essa linguagem matematicamente e pela quanlidade grafica dos resultados.

Além disso, ele resolve um problema de controle ótimo.

5.0.2 Laboratório 2

Aplicação em Biologia. Dada uma população com capacidade máxima (carrying capacity), queremos reduzí-la. Nesse caso, o controle é quantidade adicionada no tempo t. Assim, o problema se reduz a:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T (Ax(t)^2 + u(t)^2)dt \\ s.a. \;\; x'(t) = r(M - x(t)) - u(t)x(t), x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

5.0.3 Laboratório 3

Aplicação sobre Bactéria. Nesse laboratório, o tópico pe sobre o crescimento de uma bactéria quando um nutriente qímico é utilizado para acelerar a reprodução. Nosso problema, então:

$$\begin{cases} \max_u Cx(1) - \int_0^1 u(t)^2 dt \\ s.a. \;\; x'(t) = rx(t) + Au(t)x(t) - Bu(t)^2 e^{-x(t)}, \\ x(0) = x_0, A, B, C \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Como $\lambda(t) > 0 \forall t$, podemos obter a caracterização do controle como comumente fazemos.

Capítulo 6

Controles Limitados

Sabemos que, em geral, nossos problemas a serem resolvidos tem limitações no controle. Por exemplo, no uso de um químico, podemos indicar que o controle é necessariamente não negativo e tem, também, uma restrição legal, muitas vezes.

6.0.1 Condições Necessárias:

Esse problema será descrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)dt + \phi(x(t_1)) \\ s.a.\ x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \\ a \leq u(t) \leq b, a < b \end{aligned}$$

Seja u^* e x^* o par ótimo. Observe que a derivada do funcional objetivo pode não ser zero no controle ótimo, pois u^* pode estar nos limites do intervalo. Podemos avaliar o sinal da derivada, entretanto. Agora, dizemos que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. E, mais uma vez, reescrevemos o funcional e derivamos em relação a ϵ, no ponto 0, porém, nesse caso, essa derivada será menor ou igual a 0. Tomando a função adjunta com as restrições já utilizadas anteriormente, reduzo a inequação para $0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt$, que vale para todos os valores de h.

Seja s um ponto de continuidade de u^* com $a \leq u^*(s) < b$. Teremos que $f_u + \lambda g_u \leq 0$. Em contrapartida, se tivermos $a < u^*(s) \leq b$, concluiremos que $f_u + \lambda g_u \geq 0$. Os pontos que não há continuidade são irrelevantes. Sumariamente:

$$
\begin{aligned}
u^*(t) = a &\implies f_u + \lambda g_u \leq 0 \ at \ t \\
a < u^*(t) < b &\implies f_u + \lambda g_u = 0 \ at \ t \\
u^*(t) = b &\implies f_u + \lambda g_u \geq 0 \ at \ t \\
&\iff \\
f_u + \lambda g_u < 0 \ em \ t &\implies u^*(t) = a \\
f_u + \lambda g_u = 0 \ em \ t &\implies a < u^*(t) < b \\
f_u + \lambda g_u > 0 \ em \ t &\implies u^*(t) = b
\end{aligned}
$$

Capítulo 7

Laboratórios

7.0.1 Laboratório 4

É um reexame do primeiro laboratório. A primeira análise é de como o controle muda quando há uma restrição (o que faz sentido).

7.0.2 Laboratório 5 - Cancer

Queremos minimizar a densidade do tumor e os efeitos colaterais das drogas. É assumido que o tumor tenha um crescimento Gompertzian. O modelo utilizado no laboratório é Skiper's log-kill hipótese, que afirma que a morte de células devido às drofas é proporcional a população de tumor.

Considere $N(t)$ a densidade normalizada do tumor no tempo t. Assim:

$$N'(t) = rN(t)\ln(\frac{1}{N(t)} - u(t)\delta N(t)$$

r é a taxa de crescimento do tumor, δ a magnitude da dose e $u(t)$ descreve a ação da droga. É a força do efeito da droga. Escolhemos o funcional para ser

$$\min_u \int_0^T aN(t)^2 + u(t)$$

Além disso, $u(t) \geq 0$ e $N(0) = N_0$.

7.0.3 Laboratório 6 - Fish Harvesting

Suponha que em um tanque em $t = 0$ são adicionados peixes com massa média essencialmente 0. Além, descrevemos a massa do peixe segundo $f(t) = \frac{kt}{t+1}$. Note que $\lim f(t) = k$. Considere um intervalo $[0, T]$, com T pequeno suficiente para que não haja reprodução. Queremos:

$$\max_u \int_0^T A\frac{kt}{t+1}x(t)u(t) - u(t)^2 dt$$

$$\textit{subject to } x'(t) = -(m + u(t))x(t), x(0) = x_0, 0 \leq u(t) \leq M$$

M é um limite físico para a taxa de colheita. Note que para qualquer valor de $u(t) > 0$, a tax avai decrescer.

Como nos laboratórios anteriores, o valor T influencia o controle ótimo.

Capítulo 8

Optimal Control of Several Variables

Agora o problema se resume a:

$$max_{u_1,...,u_m} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))dt + \phi(x_1(t_1), ..., x_n(t_1))$$

$$subject\ to\ x_i'(t) = g_i(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}\ for\ i = 1, 2, ..., n$$

onde as função f e g_i são continuamente diferenciáveis em cada variável. Podemos usar a expressão em forma de vetores. Considere $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)]$ um vetor com funções diferenciáveis por partes. Definimos $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u})$. Se fizermos o mesmo processo anterior, vamos obter as condições:

$$x_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{(u)}), x_i(0) = x_{i0}\ for\ i = 1, ...n$$

$$\lambda_j'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(\vec{x}(t_1))\ for\ j = 1, ..., n$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_k}\ at\ u_k^*\ for\ k = 1, ..., m$$

Outros ajustes vistos nos capítulos anteriores ocorrem de mesma forma no caso multivariado. Inclusive se os limites das variáveis de controle estiverem presentes, o que altera as condições, também.

8.0.1 Problemas Linear Quadratic Regulator

Considere a equação diferencial do estado linear em x e u e o funcional objetivo na forma quadrática.

$$J(u) := \frac{1}{2}[x^T(T)Mx(t) + \int_0^T x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)dt]$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Onde $M, Q(t)$ são positivas semidefinidas e $R(t)$ é positiva definida para garantir invertibilidade. As três são simétricas. Observe que isso garante a diagonalização. Assim: $H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T(Ax + Bu)$.

Deste modo $u^* = -R^{-1}B^T\lambda$ e $\lambda' = -Qx - A^T\lambda, \lambda(T) = Mx(T)$. Se supormos que $\lambda = Sx$, chegamos que $S'x + Sx' = -Qx - A^T\lambda$. Com as devidas transformações. Obtermos que $-S'x = Qx + A^T Sx - SBR^{-1}B^T Sx$, com $S(T) = M$. Isso nos mostra que equação matricial Ricatti, que $S(t)$ deve satisfazer. Basta resolver o problema. Por fim $u^* = -R^{-1}B^T Sx$. Essa matriz é chamada de ganho.

8.0.2 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta

Quando temos uma equação diferencial de ordem mais alta, podemos definir um sistema com as derivadas, onde $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), ..., x_{n+1}(t) = x^{(n)}(t)$. A partir disso, podemos resolver com o Princípio Máximo de Pontryagin.

8.0.3 Limites Isoperimétricos

Além dos limites inferior e superior que podemos colocar no controle, também podemos querer que o exista limites na integral do controle. Exemplo: Para medicar uma pessoa, podemos querer que a quantidade total de remédia seja um valor B. Assim, a restrição é do tipo $\int_0^T u(t)dt = B$. De forma geral, podemos ter $\int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t))dt = B$, sendo h continuamente diferenciável, como restrição. Desta maneira, não podemos usar o Princípio Máximo de Pontryagin. Para isso, introduzimos $z(t) = \int_{t_0}^{t} h(s, x(s), u(s))ds$. Desta maneira, nosso problema terá duas variáveis de estado.

8.0.4 Soluções Numéricas

Agora, para cada controle, um valor inicial para o controle é dado. Depois as variáveis de estado são resolvidas simultaneamente. Por fim, as adjuntas.

Capítulo 9

Linear Dependence on the Control

Vamos considerar problemas especiais em que o problema é linear no controle $u(t)$.

9.0.1 Controle Bang-Bang

Considere o problema de controle ótimo.

$$max_u \int_{t_0}^{t_1} f_1(t,x) + u(t)f_2(t,x)dt$$
$$s.a.\ \ x'(t) = g_1(t,x) + u(t)g_2(t,x), x(0) = x_0$$
$$a \leq u(t) \leq b$$

Assim $H(t,x,u,\lambda) = f_1(t,x) + \lambda g_1(t,x) + u(t)(f_2(t,x) + \lambda g_2(t,x))$, linear em $u(t)$. Observe a derivada parcial em relação a u não carrega informação sobre $u(t)$. Assim definimos $\psi(t) := f_2(t,x(t)) + \lambda(t)g_2(t,x(t))$, muitas vezes chamada de função de troca. Se $\psi = 0$ não pode ser obtido em um intervalo de tempo, mas ocorre apenas em pontos finitos, o controle é dito "Bing Bang", porque só varia entre os valores mínimo e máximo de $u(t)$. Os valores de $u(t)$ nesses pontos não são de interesse, portanto.

Em contrapartida, se $\psi(t) \equiv 0$ em um intervalo de tempo, dizemos que u^* é singular nesse intervalo. Esse caso será explorado na próxima sessão.

Para resolver esse tipo de problema, primeiro precisamos verificar se de fato o problema é Bang-Bang. Numericamente, o problema é apenas em verificar a positividade ou negatividade da função de troca.

9.0.2 Controles Singulares

O livro explora um exemplo inicial:

$$max_u \int_0^2 (x(t) - t^2)^2 dt$$

$$s.a. \quad x'(t) = u(t), x(0) = 1$$

$$0 \leq u(t) \leq 4$$

Calculamos o Hamiltoniano e encontramos $u^*(t)$ em função da adjunta. Para sair dessa hipótese, precisamos fazer uma análise mais minunciosa. Ela começa em provar que $x(t) \geq t^2 \rightarrow \lambda'(t) \leq 0 \wedge \lambda(t) \geq 0$. Então, basta encontrar os valores de t em que essa função é positiva ou igual a 0. Dessa forma, teremos descrito o controle e estado ótimos.

No caso numérico, podemos ter que analisar quando nossa função de troca vai ser maior, igual ou menor que zero. Porém, a igualdade a 0 é complicada computacionalmente. Nesse sentido, estabelecemos um intervalo. No exemplo 17.4 do livro, quando o controle é Bang-Bang, houve convergência. Já o contrário não ocorreu. Como a função de troca é identicamente zero, problemas singulares são frequentemente instáveis.

Pesquisa tem sido feita nesse sentido. A condição de Legendre-Clebsch é um exemplo. É uma condição de segunda ordem, porque envolve ordem de derivadas mais altas.

Bibliografia