Controle Ótimo com Aplicações em Modelos Biológicos

Resumo dos capítulos do livro de Suzanne Lenhart e John T. Workman.

Lucas Machado Moschen

Escola de Matemática Aplicada

Fundação Getulio Vargas

Rio de Janeiro

2020

Conteúdo

Capítulo 1

Problemas Básicos de Controle Ótimo

1.1 Introdução

Procura-se nesse texto estudar o livro de Lenhart and Workman (2007) que estuda os problemas de controle ótimo. O texto terá a mesma estrutura do livro e servirá de guia em português de estudos sobre o tema.

Exemplo 1.1.1. Apresenta-se inicialmente um problema motivador que considera duas equações: uma representa a variação do peso da parte vegetativa, enquanto a outra representa o peso da parte reprodutiva. O crescimento das plantas é modelado pelo modelo de Cohen (1971). Nesse caso, o *controle* sobre o sistema é a fração da fotossíntese destinada para a parte vegetativa. Queremos *maximizar* o crescimento da parte reprodutiva, que garante o mantimento da espécie.

Sejam $x(t)$ a parte vegetativa e $y(t)$ a parte reprodutiva no tempo t. Nosso objetivo será maximizar o funcional 1.1 segundo a função $u(t)$ que representa a fração de fotossíntese para o crescimento vegetativo:

$$F(x,u,t) := \int_0^T \ln(y(t))dt, \tag{1.1}$$

onde T é o limite superior do intervalo de tempo considerado e tal que o modelo é um sistema de equações diferenciais com restrições:

$$\begin{cases} x'(t) = u(t)x(t) \\ y'(t) = (1 - u(t))y(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \\ x(0) > 0, \\ y(0) \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Um problema como esse é chamado de **problema de controle ótimo**, pois queremos encontrar uma função u, denominada controle, ótima, segundo um funcional objetivo. Nesse exemplo, podemos tirar conclusões interessantes sobre o sistema, como, por exemplo, como a planta distribui seu fotossintato. Outros problemas interessantes que surgem tem aplicações bem mundanas: qual a porcentagem da população deveria ser vacinada em uma epidemia, a fim de que se minimize o número de infectados e o custo de implementação? Qual a quantidade de remédio deve ser ministrado para que se minimize a carga viral e a quantidade administrada de remédio? Nesse caso a carga viral e a quantidade de remédio formariam o sistema. Em um problemas como esse, encontramos:

1. variáveis de **estado**: descrevem a dinâmica do sistema.

2. variáveis de **controle**: conduzem o estado segundo uma ação.

3. **funcional** [1] **objetivo**: Procuramos a função de controle de forma que esse funcional seja minimizado (ou maximizado). Ele representa o custo (ou ganho) ao se tomar uma atitude no sistema.

1.2 Preliminares

Alguns conceitos e teoremas básicos de análise que serão utilizados durante o texto e podem ser encontrados em diversos livros:

1. **Continuidade por partes:** Função contínua em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita deles, e igual a seu limite à esquerda ou à direita em cada ponto. Logo, podemos ter finitos saltos, mas não podemos ter pontos isolados.

2. **Diferenciável por partes:** Função contínua que é diferenciável em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita deles. Além disso, sua derivada é contínua sempre que definida.

[1]Funcional: Mapa entre um conjunto de funções ao conjunto dos números reais

3. **Convexidade:** A função k é convexa se $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ e para qualquer $a \leq t_1, t_2 \leq b$, $\alpha k(t_1) + (1-\alpha)k(t_2) \geq k(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$. A definição é equivalente para funções de duas ou mais variáveis. Ela será côncava se $-k$ for convexa.

4. **Lipschitz:** Função k em que existe c constante tal que $|k(t_1)-k(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|$, para todos os pontos do domínio de k.

5. **Teorema do Valor Médio:** Seja k contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $k(b) - k(a) = k'(x_0)(b-a)$.

6. **Teorema da Convergência Dominada:** Considere uma sequência $\{f_n\}$ dominada por uma função Lebesgue integrável g. Suponha que essa sequência converge ponto a ponto para uma função f. Então f é integrável e $\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$.

Observação. *Se x é solução da equação diferencial $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, em que g é contínua nas três variáveis, então x é diferenciável sempre que u é contínua. Se u for contínua por partes, então x será diferenciável por partes.*

Exercício 1.2.1. Se $k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes em um intervalo I limitado, k é Lipschitz.

1.3 Condições necessárias para o problema básico

Considere $u(t)$ uma variável de controle e $x(t)$ variável de estado que satisfaz

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)). \tag{1.3}$$

Podemos ver a relação entre essas variáveis como $u(t) \mapsto x = x(u)$. O problema básico do controle ótimo é encontrar uma função de controle contínua por partes 1 $u(t)$ que maximize um dado funcional objetivo

$$J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \tag{1.4}$$

Nos problemas encontrados nesse texto, f e g são sempre continuamente diferenciáveis. Para isso, se $u^*(t)$ e $x^*(t) = x(u^*(t))$ são argumentos ótimos, podemos extrair condições necessárias para o problema. No capítulo 2, são discutidas as condições suficientes.

Função Adjunta: proposta similar aos multiplicadores de Lagrange para o cálculo multivariado. $\lambda : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável por partes e deve satisfazer algumas condições que serão derivadas posteriormente.

Assuma a existência de u^* e x^* em um problema de maximização. Nesse caso, $J(u) \leq J(u^*) < \infty$, para todo controle u. Seja $h(t)$ uma função contínua por partes e $\epsilon \in \mathbb{R}$. Então:

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t), u^\epsilon \mapsto x^\epsilon,$$

tal que x^ϵ satisfaz 1.3 sempre que u^ϵ é contínua. Consideramos $x^\epsilon(t_0) = x_0$.

Para todo t, quando $\epsilon \to 0$, temos que $u^\epsilon(t) \to u^*(t)$, pela própria definição. Além disso,

$$\left.\frac{\partial u^\epsilon(t)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = h(t).$$

Como a função g é continuamente diferenciável, também ocorre que, para todo t fixo,

$$x^\epsilon(t) \to x^*(t) \text{ e } \left.\frac{\partial}{\partial \epsilon} x^\epsilon(t)\right|_{\epsilon=0} \text{ existe.}$$

Observação. *Se for difícil enxergar isso, pense que*

$$x^\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x^\epsilon(s), u^\epsilon(s))ds$$

Seja $\lambda(t)$ a função adjunta (1.3) no intervalo $[t_0, t_1]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\lambda(t)x^\epsilon(t)]dt = \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\epsilon(t_0),$$

e, portanto, exceto em uma finidade de pontos,

$$\begin{aligned} J(u^\epsilon) = &\int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)x^\epsilon(t))]dt \\ &+ \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) \\ = &\int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)x^\epsilon(t) + \lambda(t)\overbrace{g(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))}^{(x^\epsilon)'(t)}]dt \\ &+ \lambda(t_0)x_0 - \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$0 = \left.\frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon},$$

pois $J(u^*)$ é máximo. Desta maneira, como o integrando é diferenciável por partes e o intervalo é compacto, pelo Teorema da Convergência Dominada (6), podemos mover o limite para dentro da integral. Em especial, podemos mover a própria derivada.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left[f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)x^\epsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))dt\right]\Big|_{\epsilon=0} \\
&- \lambda(t_1)\frac{\partial x^\epsilon}{\epsilon}(t_1)\Big|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left[(f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t))\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t)\Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t)\right]dt \\
&- \lambda(t_1)\frac{\partial x^\epsilon}{\epsilon}(t_1)\Big|_{\epsilon=0},
\end{aligned}
$$

onde os termos de $f_x, f_u, g_x, \mathrm{e} g_u$ são $(t, x^*(t), u^*(t))$. Para garantir que ocorra a igualdade citada acima, definimos

Definição 1.1 (Hamiltoniano)**.**

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$$

Para obter a igualdade acima para qualquer função h, precisamos que as condições abaixo sejam satisfeitas e, em particular estamos maximizando H com respeito a u em u^* e, então:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial H}{\partial u}\Big|_{u=u^*} = f_u + \lambda g_u = 0, & \text{(condição de otimalidade)} \\
\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x^*} = -\lambda' = -(f_x + \lambda g_x), & \text{(equação adjunta)} \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x' & \\
\lambda(t_1) = 0, & \text{(condição de transversalidade)}
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

1.4 Princípio Máximo de Pontryagin

Teorema 1.1. *Se $u^*(t)$ e $x^*(t)$ são ótimos para o problema de controle ótimo, então existe $\lambda(t)$ adjunta diferenciável por partes tal que*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \tag{1.6}$$

para todas as funções de controle u e cada t, onde

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

e

$$\lambda'(t) = \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$$
$$\lambda(t_1) = 0$$

Já mostramos que $H_u = 0$ em u^* para cada t. De fato existe um ponto crítico em u^* e faltaria provar que ele é máximo. A demonstração para isso é complicada e é omitida do texto.

Teorema 1.2. *Suponha que f e g sejam continuamente diferenciáveis nos três argumentos e côncava em u. Suponha que u^* seja o controle ótimo associado ao estado x^* e que λ seja uma função diferenciável por partes não negativa. Suponha que $\forall t_0 \leq t \leq t_1$*

$$0 = H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Então vale 1.6.

Demonstração. Tome uma função u contínua por partes e $t \in [t_0, t_1]$. Então

$$\begin{aligned}
H(t,&x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \\
&= \left[f(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t) g(t, x^*(t), u^*(t))\right] \\
&\quad - \left[f(t, x^*(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, x^*(t), u(t))\right] \\
&= \left[f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))\right] \\
&\quad + \lambda(t)\left[g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))\right] \\
&\geq (u^*(t) - u(t)) f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)(u^*(t) - u(t)) g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \\
&= (u^*(t) - u(t)) H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade vem da concavidade de f e g e $\lambda(t) \geq 0$. □

Observação. *Convertemos o problema de encontrar uma função de controle que maximize um funcional para um problema de maximizar pontualmente o Hamiltoniano com respeito a um controle.*

Observação. *A concavidade de H nos fala sobre o tipo de problema que está sendo considerado: se a segunda derivada é negativa em u^*, tem-se um problema de maximização, enquanto se ela for positiva, o problema é de minimização.*

1.5 Exemplos

Exemplo 1.5.1.

$$\min_u \int_1^2 t u(t)^2 + t^2 x(t) dt$$
$$\text{sujeito a} x'(t) = -u(t), x(1) = 1$$

Primeiro definimos o Hamiltoniano

$$H = [tu(t)^2 + t^2 x(t)] + \lambda(-u(t))$$

Agora vamos observar as condições sobre o Hamiltoniano:

1. *Otimalidade*: $H_u = 0 \implies 2tu^*(t) - \lambda \implies u^*(t) = \dfrac{\lambda}{2t}$
2. *Equação adjunta*: $H_x = t^2 = -\lambda' \implies \lambda(t) = -\frac{1}{3}t^3 + C$
3. *Transversalidade*: $\lambda(2) = 0 \implies C = \frac{8}{3} \implies \lambda(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{8}{3}$.

Com essas condições, podemos ver que o controle ótimo é dado por

$$u^*(t) = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{8}{6}t^{-1}$$

Note que não provamos a existência de tal controle, o que está sendo feito é: supondo a existência de um controle ótimo, usamos os teoremas da seção 1.4 para encontrar a função adjunta e, assim, encontrar as funções ótimas que resolvem o problema. Além disso, podemos observar que as condições do Teorema 1.2 são satisfeitas.

Para encontrar o estado, resolvemos $x'(t) = -u(t)$ e temos:

$$x^*(t) = \frac{1}{18}t^3 - \frac{8}{6}\ln(t) + D,$$

tal que $x^*(1) = 1 = \frac{1}{18} + D$ e, portanto

$$x^*(t) = \frac{1}{18}t^3 - \frac{8}{6}\ln(t) + \frac{17}{18}$$

Exemplo 1.5.2 (Efeito Alle)**.** Formule um problema de controle ótimo para uma população com um termo de crescimento de efeito Allee, em que o controle é a proporção da população caçada. Escolha um funcional objetivo que maximize a receita da caça enquanto minimiza o seu custo. A receita é a integral da quantidade caçada no tempo. O custo tem formato quadrático.

O efeito Allee descreve um crescimento conforme a equação

$$x'(t) = rx(t)\left(\frac{x(t)}{x_{min}} - 1\right)\left(1 - \frac{x(t)}{x_{max}}\right) \tag{1.7}$$

Nessa equação, temos um limiar x_{min} e uma capacidade de carga do ambiente x_{max}. Se $x(0) > x_{min}$, a solução $x(t)$ se aproxima de x_{max}. Se ela começa abaixo, ela decairá para 0. Como o crescimento líquido é negativo em níveis populacionais baixos, a população não consegue se manter e morre. O crescimento per capita também não é monotonicamente decrescente e mostra

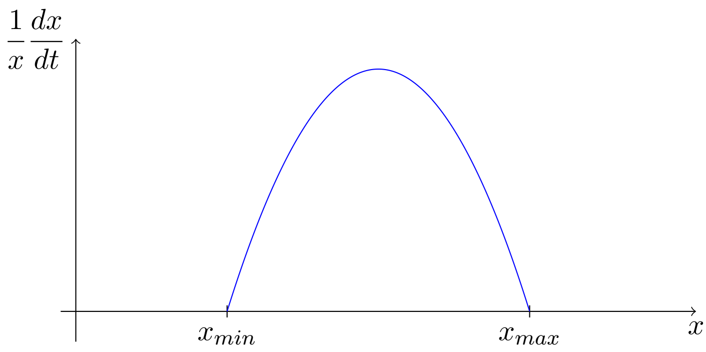

Figura 1.1: Efeito Allee

o efeito que chamamos de Allee, figura 1.1. Para entender mais sobre o efeito Allee, sugere-se Kot (2001).

Existe uma certa liberdade em como fazer essa modelagem. Mas uma possível proposta é a seguinte: Se $x(t)$ é o tamanho da população no tempo t e $u(t)$ é a proporção da população caçada, a variação da população é dada por

$$x'(t) = rx(t)\left(\frac{x(t)}{x_{min}} - 1\right)\left(1 - \frac{x(t)}{x_{max}}\right) - u(t)x(t)$$
$$x(0) = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

Para definir um objetivo, queremos maximizar a receita, que é dada por, se T for o final do período,

$$R(u) = \int_0^T u(t)x(t)dt$$

E queremos minimizar o custo da caça, que é assumido como quadrático:

$$C(u) = \int_0^T [u(t)x(t)]^2 dt$$

Queremos portanto

$$\max_u [R(u) - C(u)]$$

Capítulo 2

Existência e Outras Propriedades

Observação: Se o funcional objetivo tiver valor mais ou menos infinito, dizemos que o problema não tem solução. Como assumimos a existência da solução, podemos obter um funcional que tem valor infinito, algo que não desejamos.

Teorema: $J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt, s.a\; x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$. Ainda, $f, g \in C^1$ nos três argumentos e côncavos em x e u. Sob as condições apresentadas anteriormente, adicionadas a $\lambda(t) \geq 0$, então para todo u, $J(u^*) \geq J(u)$. A demonstração é basicamente mostrar que a diferença é maior do que 0.

Teorema 2: Seja $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R})$, f é convexa em u existem constantes C_4 e C_1,C_2,$C_3 > 0$ e $\beta > 1$, tal que:

$$\begin{cases} g(t, x, u) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u \\ |g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \\ |g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|) \\ f(t, x, u) \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{cases}$$

Então $J(u^*)$ é maximizador do funcional. Em problemas de minimização, g seria côncava e a desigualdade de f é revertida.

Agora, temos que extender as condições necessárias para Lebesgue.

Unicidade: Implica diretamente da unicidade das soluções do sistema de otimização (intervalos de tempo curto). A volta não é sempre verdadeira.

2.0.1 Interpretação da Adjunta

Considere o funcional $V(x_0, t_0)$ a ser maximizado. Estabelecemos que $\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(x_0+\epsilon, t_0) - V(x_0, t_0)}{\epsilon} = \lambda(t_0)$. Podemos relacionar, então, a função adjunta à variação marginal da função custo/lucro com respeito ao estado. É o valor adicional associado com um incremento adicional da variável de estado. Podemos aproximar:

$$V(x_0 + \epsilon, t_0) \approx V(x_0, t_0) + \epsilon\lambda(t_0).$$

Se $\epsilon = 1$, podemos ver que ao adicionar um unidade de valor, $\lambda(t_0)$ é o valor objetivo adicional.

2.0.2 Princípio da Otimalidade

Teorema 3: Considere u^* o controle ótimo associado ao estado x^* para o problema de já citado. Se $\hat{t}, t_1 < \hat{t} < t_1$, então as funções restritas ao intervalo $[\hat{t}, t_1]$ formam uma solução ótima para o problema com tempo inicial $\hat{t}$. Além disso, será único, desde que u^* seja. A demonstração ocorre por contradição. Note que nada pode ser dito sobre o intervalo $[t_0, \hat{t}]$, pois existem contra-exemplos.

Teorema 4: $H(t, x, u, \lambda)$ é contínua por partes e contínua Lipschitz em relação ao tempo no caminho ótimo.

Função Autônoma: Quando não existe dependência do tempo nas funções f e g.

Teorema 5: Se um problema de controle ótimo é autônomo, então o Hamiltoniano é uma função que não depende do tempo. Note que se $M(t) := H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$ é Lipschitz continua, sabemos que M é diferenciável em quase toda parte com respeito à medida de Lebesgue. A partir disso, e utilizando o princípio máximo, vemos que $M'(t) = 0$ em quase toda parte. Como M é contínua, ela é constante.

Princípio Máximo: O máximo de uma função é encontrado em uma das bordas.

Capítulo 3

Condições finais

3.0.1 Termo Payoff

Muitas vezes, também queremos maximizar o valor de uma função em um determinado tempo, em especial no final do intervalo. Nesse caso, o problema se torna:

$$\begin{cases} \max_u[\phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt] \\ x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

A função ϕ é conhecida como termo payoff. A única mudança na obtenção das condições necessárias é na condição do tempo final. Obtemos que $\lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1))$. (Mais uma vez, precisamos fazer com que $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(u^\epsilon)-J(u^*)}{\epsilon} = 0$

3.0.2 Estados com Pontos Finais Fixados

Obs.: O funcional objetivo ser imaterial significa que não depende da condição final do estado.

Podemos deixar $x(t_0)$ livre e $x(t_1) = x_1$ fixado. Essa caso é similar com o anterior, com a mudança de que $\lambda(t_0) = -\phi'(x(t_0))$. Isso sugere que exista uma dualidade entre as condições de estado e adjunta.

Também podemos fixar os pontos inicial e final de estado. Notamos que estamos considerando a maximização sobre o conjunto de controles admissíveis, que respeitem as condições, inclusive sobre a variável de estado.

Teorema 1: Se $u^*(t)$ e $x^*(t)$ são ótimos para o problema com pontos inicial e final fixados, então existe uma função $\lambda(t)$ diferenciável por partes e uma contante λ_0 igual a 0 ou 1, onde $H = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$ e $\lambda'(t) = -H_x$.

A diferença é que a função adjunta não tem restrições. A demonstração utiliza uma técnica diferente da utilizada até então. A constante ajusta para problemas degenerados ou problema tem funcional objetivo imaterial.

Capítulo 4

Método Backward/Forward

Queremos agora resolver os problemas de controle ótimo numericalmente. A equação $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ deve ser satisfeita em u^* e pode ser de ajuda para encontrar u em função de x e λ. A partir disso, podemos utilizar um método como Runge-Kutta para resolver o sistema ótimo. Ele vai encontrar o controle ótimo se esse existir.

4.0.1 Algoritmo

1. Chute inicial para $\vec{u}$, sendo cada coordenada de u um valor no tempo discreto.

2. Resolva x Foward utilizando a condição inicial e utilizando sua equação diferencial.

3. Use a condição final de λ e resolva Backward de acordo com sua equação diferencial.

4. Atualize o vetor de controle.

5. Convergência.

É interessante utilizar uma combinação convexa entre o valor do controle anterior e o valor atual para acelerar a convergência.

Combinação Convexa: Combinação Linear de pontos, cuja soma dos coeficientes é positiva e a soma é 1.

O erro no algoritmo é em geral o relativo e ele deve ser menor do que uma tolerância aceitável. A condição que obtemos é que $\delta\|\vec{u}\| - \left\|\vec{u} - o\vec{ldu}\right\| \geq 0$

4.0.2 Runge-Kutta

$$\begin{cases} x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k1 = f(t, x(t)) \\ k2 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1) \\ k3 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2) \\ k4 = f(t + h, x(t) + hk_3) \end{cases}$$

O erro é da ordem de h^4.

Capítulo 5

Laboratórios

5.0.1 Laboratório 1

Nesse laboratório, o autor explora a utilização do MatLab como ferramenta, devido à facilidade de se trabalhar com essa linguagem matematicamente e pela quanlidade grafica dos resultados.

Além disso, ele resolve um problema de controle ótimo.

5.0.2 Laboratório 2

Aplicação em Biologia. Dada uma população com capacidade máxima (carrying capacity), queremos reduzí-la. Nesse caso, o controle é quantidade adicionada no tempo t. Assim, o problema se reduz a:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T (Ax(t)^2 + u(t)^2)dt \\ s.a. \;\; x'(t) = r(M - x(t)) - u(t)x(t), x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

5.0.3 Laboratório 3

Aplicação sobre Bactéria. Nesse laboratório, o tópico pe sobre o crescimento de uma bactéria quando um nutriente qímico é utilizado para acelerar a reprodução. Nosso problema, então:

$$\begin{cases} \max_u Cx(1) - \int_0^1 u(t)^2 dt \\ s.a. \;\; x'(t) = rx(t) + Au(t)x(t) - Bu(t)^2 e^{-x(t)}, \\ x(0) = x_0, A, B, C \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Como $\lambda(t) > 0 \forall t$, podemos obter a caracterização do controle como comumente fazemos.

Capítulo 6

Controles Limitados

Sabemos que, em geral, nossos problemas a serem resolvidos tem limitações no controle. Por exemplo, no uso de um químico, podemos indicar que o controle é necessariamente não negativo e tem, também, uma restrição legal, muitas vezes.

6.0.1 Condições Necessárias:

Esse problema será descrito da seguinte forma

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)dt + \phi(x(t_1))$$
$$s.a.\ x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0,$$
$$a \leq u(t) \leq b, a < b$$

Seja u^* e x^* o par ótimo. Observe que a derivada do funcional objetivo pode não ser zero no controle ótimo, pois u^* pode estar nos limites do intervalo. Podemos avaliar o sinal da derivada, entretanto. Agora, dizemos que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. E, mais uma vez, reescrevemos o funcional e derivamos em relação a ϵ, no ponto 0, porém, nesse caso, essa derivada será menor ou igual a 0. Tomando a função adjunta com as restrições já utilizadas anteriormente, reduzo a inequação para $0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt$, que vale para todos os valores de h.

Seja s um ponto de continuidade de u^* com $a \leq u^*(s) < b$. Teremos que $f_u + \lambda g_u \leq 0$. Em contrapartida, se tivermos $a < u^*(s) \leq b$, concluiremos que $f_u + \lambda g_u \geq 0$. Os pontos que não há continuidade são irrelevantes. Sumariamente:

$$\begin{aligned}
u^*(t) = a &\implies f_u + \lambda g_u \leq 0 \ at \ t \\
a < u^*(t) < b &\implies f_u + \lambda g_u = 0 \ at \ t \\
u^*(t) = b &\implies f_u + \lambda g_u \geq 0 \ at \ t \\
&\iff \\
f_u + \lambda g_u < 0 \ em \ t &\implies u^*(t) = a \\
f_u + \lambda g_u = 0 \ em \ t &\implies a < u^*(t) < b \\
f_u + \lambda g_u > 0 \ em \ t &\implies u^*(t) = b
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Laboratórios

7.0.1 Laboratório 4

É um reexame do primeiro laboratório. A primeira análise é de como o controle muda quando há uma restrição (o que faz sentido).

7.0.2 Laboratório 5 - Cancer

Queremos minimizar a densidade do tumor e os efeitos colaterais das drogas. É assumido que o tumor tenha um crescimento Gompertzian. O modelo utilizado no laboratório é Skiper's log-kill hipótese, que afirma que a morte de células devido às drofas é proporcional a população de tumor.

Considere $N(t)$ a densidade normalizada do tumor no tempo t. Assim:

$$N'(t) = rN(t)\ln(\frac{1}{N(t)} - u(t)\delta N(t)$$

r é a taxa de crescimento do tumor, δ a magnitude da dose e $u(t)$ descreve a ação da droga. É a força do efeito da droga. Escolhemos o funcional para ser

$$\min_u \int_0^T aN(t)^2 + u(t)$$

Além disso, $u(t) \geq 0$ e $N(0) = N_0$.

7.0.3 Laboratório 6 - Fish Harvesting

Suponha que em um tanque em $t = 0$ são adicionados peixes com massa média essencialmente 0. Além, descrevemos a massa do peixe segundo $f(t) = \frac{kt}{t+1}$. Note que $\lim f(t) = k$. Considere um intervalo $[0, T]$, com T pequeno suficiente para que não haja reprodução. Queremos:

$$\max_u \int_0^T A\frac{kt}{t+1}x(t)u(t) - u(t)^2 dt$$

$$\textit{subject to } x'(t) = -(m + u(t))x(t), x(0) = x_0, 0 \leq u(t) \leq M$$

M é um limite físico para a taxa de colheita. Note que para qualquer valor de $u(t) > 0$, a tax avai decrescer.

Como nos laboratórios anteriores, o valor T influencia o controle ótimo.

Capítulo 8

Optimal Control of Several Variables

Agora o problema se resume a:

$$max_{u_1,...,u_m} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))dt + \phi(x_1(t_1), ..., x_n(t_1))$$

$$subject\ to\ x_i'(t) = g_i(t, x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t))$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}\ for\ i = 1, 2, ..., n$$

onde as função f e g_i são continuamente diferenciáveis em cada variável. Podemos usar a expressão em forma de vetores. Considere $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)]$ um vetor com funções diferenciáveis por partes. Definimos $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u})$. Se fizermos o mesmo processo anterior, vamos obter as condições:

$$x_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{(u)}), x_i(0) = x_{i0}\ for\ i = 1, ...n$$

$$\lambda_j'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(\vec{x}(t_1))\ for\ j = 1, ..., n$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_k}\ at\ u_k^*\ for\ k = 1, ..., m$$

Outros ajustes vistos nos capítulos anteriores ocorrem de mesma forma no caso multivariado. Inclusive se os limites das variáveis de controle estiverem presentes, o que altera as condições, também.

8.0.1 Problemas Linear Quadratic Regulator

Considere a equação diferencial do estado linear em x e u e o funcional objetivo na forma quadrática.

$$J(u) := \frac{1}{2}[x^T(T)Mx(t) + \int_0^T x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)dt]$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Onde $M, Q(t)$ são positivas semidefinidas e $R(t)$ é positiva definida para garantir invertibilidade. As três são simétricas. Observe que isso garante a diagonalização. Assim: $H = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru + \lambda^T(Ax + Bu)$.

Deste modo $u^* = -R^{-1}B^T\lambda$ e $\lambda' = -Qx - A^T\lambda, \lambda(T) = Mx(T)$. Se supormos que $\lambda = Sx$, chegamos que $S'x + Sx' = -Qx - A^T\lambda$. Com as devidas transformações. Obtermos que $-S'x = Qx + A^T Sx - SBR^{-1}B^T Sx$, com $S(T) = M$. Isso nos mostra que equação matricial Ricatti, que $S(t)$ deve satisfazer. Basta resolver o problema. Por fim $u^* = -R^{-1}B^T Sx$. Essa matriz é chamada de ganho.

8.0.2 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta

Quando temos uma equação diferencial de ordem mais alta, podemos definir um sistema com as derivadas, onde $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), ..., x_{n+1}(t) = x^{(n)}(t)$. A partir disso, podemos resolver com o Princípio Máximo de Pontryagin.

8.0.3 Limites Isoperimétricos

Além dos limites inferior e superior que podemos colocar no controle, também podemos querer que o exista limites na integral do controle. Exemplo: Para medicar uma pessoa, podemos querer que a quantidade total de remédia seja um valor B. Assim, a restrição é do tipo $\int_0^T u(t)dt = B$. De forma geral, podemos ter $\int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t))dt = B$, sendo h continuamente diferenciável, como restrição. Desta maneira, não podemos usar o Princípio Máximo de Pontryagin. Para isso, introduzimos $z(t) = \int_{t_0}^{t} h(s, x(s), u(s))ds$. Desta maneira, nosso problema terá duas variáveis de estado.

8.0.4 Soluções Numéricas

Agora, para cada controle, um valor inicial para o controle é dado. Depois as variáveis de estado são resolvidas simultaneamente. Por fim, as adjuntas.

Capítulo 9

Linear Dependence on the Control

Vamos considerar problemas especiais em que o problema é linear no controle $u(t)$.

9.0.1 Controle Bang-Bang

Considere o problema de controle ótimo.

$$max_u \int_{t_0}^{t_1} f_1(t,x) + u(t)f_2(t,x)dt$$
$$s.a. \;\; x'(t) = g_1(t,x) + u(t)g_2(t,x), x(0) = x_0$$
$$a \leq u(t) \leq b$$

Assim $H(t,x,u,\lambda) = f_1(t,x) + \lambda g_1(t,x) + u(t)(f_2(t,x) + \lambda g_2(t,x))$, linear em $u(t)$. Observe a derivada parcial em relação a u não carrega informação sobre $u(t)$. Assim definimos $\psi(t) := f_2(t,x(t)) + \lambda(t)g_2(t,x(t))$, muitas vezes chamada de função de troca. Se $\psi = 0$ não pode ser obtido em um intervalo de tempo, mas ocorre apenas em pontos finitos, o controle é dito "Bing Bang", porque só varia entre os valores mínimo e máximo de $u(t)$. Os valores de $u(t)$ nesses pontos não são de interesse, portanto.

Em contrapartida, se $\psi(t) \equiv 0$ em um intervalo de tempo, dizemos que u^* é singular nesse intervalo. Esse caso será explorado na próxima sessão.

Para resolver esse tipo de problema, primeiro precisamos verificar se de fato o problema é Bang-Bang. Numericamente, o problema é apenas em verificar a positividade ou negatividade da função de troca.

9.0.2 Controles Singulares

O livro explora um exemplo inicial:

$$max_u \int_0^2 (x(t) - t^2)^2 dt$$

$$s.a. \quad x'(t) = u(t), x(0) = 1$$

$$0 \leq u(t) \leq 4$$

Calculamos o Hamiltoniano e encontramos $u^*(t)$ em função da adjunta. Para sair dessa hipótese, precisamos fazer uma análise mais minunciosa. Ela começa em provar que $x(t) \geq t^2 \rightarrow \lambda'(t) \leq 0 \wedge \lambda(t) \geq 0$. Então, basta encontrar os valores de t em que essa função é positiva ou igual a 0. Dessa forma, teremos descrito o controle e estado ótimos.

No caso numérico, podemos ter que analisar quando nossa função de troca vai ser maior, igual ou menor que zero. Porém, a igualdade a 0 é complicada computacionalmente. Nesse sentido, estabelecemos um intervalo. No exemplo 17.4 do livro, quando o controle é Bang-Bang, houve convergência. Já o contrário não ocorreu. Como a função de troca é identicamente zero, problemas singulares são frequentemente instáveis.

Pesquisa tem sido feita nesse sentido. A condição de Legendre-Clebsch é um exemplo. É uma condição de segunda ordem, porque envolve ordem de derivadas mais altas.

Bibliografia

D. Cohen. Maximizing final yield when growth is limited by time or by limiting resources. *Journal of Theoretical Biology*, 33(2):299 – 307, 1971. ISSN 0022-5193. doi: https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90068-3. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519371900683`.

M. Kot. *Elements of Mathematical Ecology*. Elements of Mathematical Ecology. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521001502. URL `https://books.google.sm/books?id=7_IRlnNON7oC`.

S. Lenhart and J. Workman. Optimal control applied to biological models. 01 2007.