

---

---

# Controle Ótimo com Aplicações em Modelos Biológicos

---

---

Resumo dos capítulos do livro de Suzanne Lenhart e John T. Workman.

Lucas Machado Moschen

Orientadora: Maria Soledad Arona

*Escola de Matemática Aplicada*

*Fundação Getúlio Vargas*

Rio de Janeiro

2020

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>TODO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Problemas Básicos de Controle Ótimo</b>	<b>6</b>
3.1	Preliminares . . . . .	6
3.2	Condições necessárias para o problema básico . . . . .	7
3.3	Princípio máximo de Pontryagin . . . . .	9
3.4	Exemplos . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Existência e Outras Propriedades</b>	<b>13</b>
4.1	Existência e unicidade . . . . .	13
4.2	Interpretação da Adjunta . . . . .	15
4.3	Princípio da otimalidade . . . . .	15
4.4	Problema autônomo e o hamiltoniano . . . . .	16
4.5	Exemplos . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Condições Finais do Estado</b>	<b>18</b>
5.1	Termos payoff . . . . .	18
5.2	Estados com pontos de fronteira fixos . . . . .	18
5.3	Exemplos . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Método Forward-Backward Sweep</b>	<b>22</b>
6.1	Algoritmo . . . . .	22
6.2	Runge-Kutta . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Laboratórios 1, 2 e 3</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>Controles Limitados</b>	<b>26</b>
8.1	Condições Necessárias . . . . .	26
8.2	Soluções Numéricas . . . . .	28
8.3	Exemplos . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Laboratórios 4, 5 e 6</b>	<b>31</b>

<b>10 Controle Ótimo com Várias Variáveis</b>	<b>32</b>
10.1 Condições Necessárias . . . . .	32
10.2 Problemas de Regulador Linear Quadrático . . . . .	34
10.3 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta . . . . .	35
10.4 Restrições Isoperimétricas . . . . .	36
10.5 Soluções Numéricas . . . . .	36
<b>11 Laboratórios 7, 8, 9 e 10</b>	<b>37</b>
<b>12 Linear Dependence on the Control</b>	<b>39</b>
12.1 Controles Bang-Bang . . . . .	39
12.2 Controles Singulares . . . . .	41
<b>13 Problemas com Tempo Final Livre</b>	<b>44</b>
13.1 Condições Necessárias . . . . .	44
13.2 Controle Ótimo Temporal . . . . .	45
13.3 Exemplos . . . . .	45
<b>14 Forward-Backward Sweep Adaptado</b>	<b>47</b>
14.1 Método da Secante . . . . .	47
14.2 Um Estado com Pontos Finais Fixos . . . . .	47
14.3 Termos de Payoff não Lineares . . . . .	48
14.4 Tempo Final Livre . . . . .	49
14.5 Shots Múltiplos . . . . .	49
<b>15 Laboratórios 11, 12 e 13</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## TODO

- Revisar exemplos do Capítulo 12: adicionar  $+1$  talvez.
- HIV model (lab 8) apresenta função adjunta negativa. Já conferi os resultados nos códigos do livro, mas eles também não negativos lá.
- Em 6, a referência de Hackbusch (1978) não foi compreendida.
- Não consegui provar que  $\lambda(t) \geq 0$  no Laboratório 2.

## Capítulo 2

# Introdução

Nesse texto, estudam-se alguns problemas que envolvam encontrar um controle ótimo, e toma como referência o livro de Lenhart and Workman (2007). O texto terá formato de notas com a mesma estrutura do livro e servirá de guia introdutório sobre o tema na língua portuguesa. Essa área da matemática aplicada envolve estudos de otimização e de equações diferenciais e pode ser ilustrada através de diversos exemplos e aplicações da ciência.

Inicialmente, será apresentado um problema motivador que considera duas equações diferenciais: uma representa a variação do peso da parte vegetativa de uma planta, enquanto a outra representa o peso da parte reprodutiva. O crescimento das plantas é modelado segundo o modelo de Cohen (1971). Nesse caso, o *controle* sobre o sistema é a fração da fotossíntese destinada para a parte vegetativa. Queremos *maximizar* o crescimento da parte reprodutiva, que garante o mantimento da espécie.

Sejam  $x(t)$  a parte vegetativa e  $y(t)$  a parte reprodutiva no tempo  $t$ . Nosso objetivo será maximizar o funcional 2.1 segundo a função  $u(t)$  que representa a fração de fotossíntese para o crescimento vegetativo:

$$F(x, u, t) := \int_0^T \ln(y(t)) dt, \quad (2.1)$$

onde  $T$  é o limite superior do intervalo de tempo considerado e tal que o modelo é um sistema de equações diferenciais com restrições:

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(t)x(t) \\ y'(t) &= (1 - u(t))y(t) \\ 0 &\leq u(t) \leq 1 \\ x(0) &> 0, \\ y(0) &\geq 0 \end{aligned}$$

Um problema como esse é chamado de **problema de controle ótimo**, pois queremos encontrar uma função  $u$ , denominada controle, ótima, se-

gundo um funcional objetivo. Nesse exemplo, podemos tirar conclusões interessantes sobre o sistema, como, por exemplo, como a planta distribui seu fotossintato. Outros problemas interessantes que surgem tem aplicações bem mundanas: qual a porcentagem da população deveria ser vacinada em uma epidemia, a fim de que se minimize o número de infectados e o custo de implementação? Qual a quantidade de remédio deve ser ministrado para que se minimize a carga viral e a quantidade administrada de remédio? Nesse caso a carga viral e a quantidade de remédio formariam o sistema. Em um problemas como esse, encontramos:

1. variáveis de **estado**: descrevem a dinâmica do sistema.
2. variáveis de **controle**: conduzem o estado segundo uma ação.
3. **funcional** <sup>1</sup> **objetivo**: Procuramos a função de controle de forma que esse funcional seja minimizado (ou maximizado). Ele representa o custo (ou ganho) ao se tomar uma atitude no sistema.

O texto terá como foco problemas que envolvam sistemas de equações diferenciais ordinárias. Além disso, ao longo do texto, treze laboratórios são desenvolvidos. Nesses laboratórios, uma aplicação biológica é estudada a fim de apresentar conceitos dos capítulos que a precedem. Todos os laboratórios estão em formato **jupyter-notebook** e escritos na linguagem de programação *Python*. A escolha dessa linguagem se deu a sua fácil interpretação humana e interesse particular.

---

<sup>1</sup>Funcional: Mapa entre um conjunto de funções ao conjunto dos números reais

## Capítulo 3

# Problemas Básicos de Controle Ótimo

### 3.1 Preliminares

Nessa seção alguns conceitos e teoremas básicos importantes para o decorrer do texto serão apresentados. Eles podem ser encontrados em diversos livros além dessas notas.

1. **Continuidade por partes:** Uma função é contínua por partes quando é contínua em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita, e é igual a seu limite à esquerda ou à direita em cada ponto. Logo, podemos ter finitos saltos, mas não podemos ter pontos isolados.
2. **Diferenciável por partes:** Uma função é diferenciável por partes quando ela é contínua em toda parte e diferenciável em cada ponto em que é definida, exceto em uma quantidade finita. Além disso, sua derivada é contínua sempre que definida.
3. **Convexidade:** A função  $f$  é convexa se  $\forall \alpha \in [0, 1]$  e para quaisquer  $a \leq t_1, t_2 \leq b$ , tem-se que  $\alpha f(t_1) + (1 - \alpha)f(t_2) \geq f(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2)$ . A definição é equivalente para funções de duas ou mais variáveis. Ela será côncava se  $-f$  for convexa.
4. **Lipschitz:** A função  $f$  é  $L$ -Lipschitz se existe uma constante  $L$  tal que, para todos os pontos de seu domínio,  $|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|$ .
5. **Teorema do Valor Médio:** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ . Então existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

6. **Teorema da Convergência Dominada:** Considere uma sequência de funções  $\{f_n\}$  dominada por uma função Lebesgue integrável  $g$ . Suponha que essa sequência converge ponto a ponto para uma função  $f$ . Então  $f$  é Lebesgue integrável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

**Observação.** Se  $x$  é solução da equação diferencial  $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ , em que  $g$  é contínua nas três variáveis, então  $x$  é diferenciável sempre que  $u$  é contínua. Se  $u$  for contínua por partes, então  $x$  será diferenciável por partes.

**Exercício 3.1.1.** Se  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável por partes em um intervalo  $I$  limitado,  $f$  é Lipschitz em  $I$ .

### 3.2 Condições necessárias para o problema básico

Considere  $u(t)$  uma variável de controle e  $x(t)$  variável de estado que satisfaz

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)). \quad (3.1)$$

A relação entre essas variáveis pode ser vista como uma função  $u(t) \mapsto x = x(u)$ . O problema básico do controle ótimo é encontrar uma função de controle contínua por partes (3.1.1)  $u(t)$  que maximize o funcional objetivo

$$J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.2)$$

Nos problemas encontrados nesse texto,  $f$  e  $g$  são sempre continuamente diferenciáveis. Para isso, se  $u^*(t)$  e  $x^*(t) = x(u^*(t))$  são argumentos ótimos e, assumindo sua existência, podemos extrair condições necessárias para o problema. No capítulo 4, são discutidas as condições suficientes.

**Definição 3.2.1** (Função Adjunta). Uma proposta similar aos multiplicadores de Lagrange para o cálculo multivariado. Uma função  $\lambda : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável por partes que deve satisfazer algumas condições que serão derivadas posteriormente.

Assuma a existência de  $u^*$  e  $x^*$  em um problema de maximização, isto é,  $J(u) \leq J(u^*) < \infty$  para todo controle  $u$ . Seja  $h(t)$  uma função contínua por partes e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Então:

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t), u^\epsilon \mapsto x^\epsilon,$$

tal que  $x^\epsilon$  satisfaz 3.1 sempre que  $u^\epsilon$  é contínua. Consideramos  $x^\epsilon(t_0) = x_0$ .



Para todo  $t$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos que  $u^\epsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ , pela própria definição. Além disso,

$$\left. \frac{\partial u^\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = h(t).$$

Como a função  $g$  é continuamente diferenciável, também ocorre que, para todo  $t$  fixo,

$$x^\epsilon(t) \rightarrow x^*(t) \text{ e } \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} x^\epsilon(t) \right|_{\epsilon=0} \text{ existe.}$$

**Observação.** *Se for difícil enxergar isso, note que*

$$x^\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s, x^\epsilon(s), u^\epsilon(s)) ds$$

Seja  $\lambda(t)$  função adjunta (3.2.1) no intervalo  $[t_0, t_1]$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t) x^\epsilon(t)] dt = \lambda(t_1) x^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0) x^\epsilon(t_0),$$

e, portanto, exceto em uma finidade de pontos,

$$\begin{aligned} J(u^\epsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \frac{d}{dt} (\lambda(t) x^\epsilon(t))] dt \\ &\quad + \lambda(t_0) x_0 - \lambda(t_1) x^\epsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t) x^\epsilon(t) + \lambda(t) \overbrace{g(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))}^{(x^\epsilon)'(t)}] dt \\ &\quad + \lambda(t_0) x_0 - \lambda(t_1) x^\epsilon(t_1). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon},$$

pois  $J(u^*)$  é máximo. Desta maneira, como o integrando é diferenciável por partes e o intervalo é compacto, pelo Teorema da Convergência Dominada (3.1.6), podemos mover o limite para dentro da integral. Em especial,

podemos mover a própria derivada.

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [f(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)x^\epsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))] dt \Big|_{\epsilon=0} \\
&\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[ (f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t)) \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt \\
&\quad - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon=0},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os termos de  $f_x, f_u, g_x$ , e  $g_u$  são  $(t, x^*(t), u^*(t))$ . Para garantir que ocorra a igualdade citada acima para qualquer função  $h$ , definimos

**Definição 3.2.2** (Hamiltoniano).

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u)$$

Assim precisamos que as condições abaixo sejam satisfeitas e, em particular estamos maximizando  $H$  com respeito a  $u$  em  $u^*$  e, então:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u^*} = f_u + \lambda g_u = 0, & \text{(condição de otimalidade)} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = -\lambda' = -(f_x + \lambda g_x), & \text{(equação adjunta)} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x', & \text{(equação diferencial)} \\ \lambda(t_1) = 0. & \text{(condição de transversalidade)} \end{array} \right. \tag{3.4}$$

### 3.3 Princípio máximo de Pontryagin

**Teorema 3.3.1.** *Se  $u^*(t)$  e  $x^*(t)$  são funções ótimas para o problema de controle ótimo, então existe a adjunta  $\lambda(t)$  diferenciável por partes tal que*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \tag{3.5}$$

para todas as funções de controle  $u$  e cada  $t$ , onde

$$H = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

e

$$\lambda'(t) = \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$$

$$\lambda(t_1) = 0$$

Já mostramos que  $H_u = 0$  em  $u^*$  para cada  $t$ . De fato existe um ponto crítico em  $u^*$  e faltaria provar que ele é máximo. A demonstração para isso é complicada e é omitida do texto.

**Teorema 3.3.2.** *Sejam  $f$  e  $g$  sejam continuamente diferenciáveis nos três argumentos e côncavas em  $u$ . Suponha que  $u^*$  seja o controle ótimo associado ao estado  $x^*$  e que  $\lambda$  seja uma função diferenciável por partes não negativa. Se  $\forall t \in [t_0, t_1]$*

$$0 = H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

Então vale 3.5.

*Demonstração.* Tome uma função  $u$  contínua por partes e  $t \in [t_0, t_1]$ . Então

$$\begin{aligned} & H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u^*(t))] \\ &\quad - [f(t, x^*(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x^*(t), u(t))] \\ &= [f(t, x^*(t), u^*(t)) - f(t, x^*(t), u(t))] \\ &\quad + \lambda(t) [g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x^*(t), u(t))] \\ &\geq (u^*(t) - u(t))f_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)(u^*(t) - u(t))g_u(t, x^*(t), u^*(t)) \\ &= (u^*(t) - u(t))H_u(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0, \end{aligned}$$

onde a desigualdade vem da concavidade de  $f$  e  $g$  e  $\lambda(t) \geq 0$ .  $\square$

**Observação.** *Convertemos o problema de encontrar uma função de controle que maximize um funcional para um problema de maximizar pontualmente o Hamiltoniano com respeito a um controle.*

**Observação.** *A concavidade de  $H$  nos fala sobre o tipo de problema que está sendo considerado: se a segunda derivada é negativa em  $u^*$ , tem-se um problema de maximização, enquanto se ela for positiva, o problema é de minimização.*

### 3.4 Exemplos

**Exemplo 3.4.1.**

$$\min_u \int_1^2 tu(t)^2 + t^2 x(t) dt$$

sujeito a  $x'(t) = -u(t)$ ,  $x(1) = 1$

Primeiro definimos o Hamiltoniano

$$H = [tu(t)^2 + t^2 x(t)] + \lambda(t)(-u(t))$$

Agora vamos observar as condições sobre o Hamiltoniano:

1. *Otimidade*:  $H_u = 0 \implies 2tu^*(t) - \lambda \implies u^*(t) = \frac{\lambda(t)}{2t}$
2. *Equação adjunta*:  $H_x = t^2 = -\lambda' \implies \lambda(t) = -\frac{1}{3}t^3 + C$
3. *Transversalidade*:  $\lambda(2) = 0 \implies C = \frac{8}{3} \implies \lambda(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{8}{3}$ .

Com essas condições, podemos ver que o controle ótimo é dado por

$$u^*(t) = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{8}{6}t^{-1}$$

Note que não provamos a existência de tal controle, o que está sendo feito é: supondo a existência de um controle ótimo, usamos os teoremas da seção 3.3 para encontrar a função adjunta e, assim, encontrar as funções ótimas que resolvem o problema. Além disso, podemos observar que as condições do Teorema 3.3.2 são satisfeitas. Para encontrar o estado, resolvemos  $x'(t) = -u(t)$  e obtemos:

$$x^*(t) = \frac{1}{18}t^3 - \frac{8}{6}\ln(t) + D,$$

tal que  $x^*(1) = 1 = \frac{1}{18} + D$  e, portanto

$$x^*(t) = \frac{1}{18}t^3 - \frac{8}{6}\ln(t) + \frac{17}{18}$$

**Exemplo 3.4.2** (Efeito Allee). Formule um problema de controle ótimo para uma população com um termo de crescimento de efeito Allee, em que o controle é a proporção da população caçada. Escolha um funcional objetivo que maximize a receita da caça enquanto minimiza o seu custo. A receita é a integral da quantidade caçada no tempo. O custo tem formato quadrático.

O efeito Allee descreve um crescimento conforme a equação

$$x'(t) = rx(t) \left( \frac{x(t)}{x_{min}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{x(t)}{x_{max}} \right) \quad (3.6)$$

Nessa equação, temos um limiar  $x_{min}$  e uma capacidade de carga do ambiente  $x_{max}$ . Se  $x(0) > x_{min}$ , a solução  $x(t)$  se aproxima de  $x_{max}$ . Se ela começa abaixo, ela decairá para 0. Como o crescimento líquido é negativo em níveis populacionais baixos, a população não consegue se manter e morre. O crescimento per capita também não é monotonicamente decrescente e mostra o efeito que chamamos de Allee, figura 3.1. Para entender mais sobre o esse efeito, sugere-se Kot (2001).

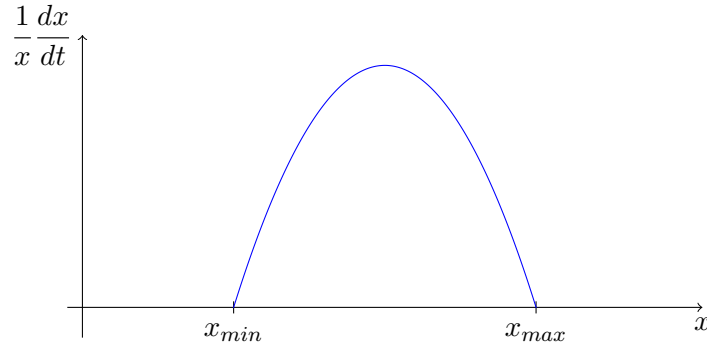


Figura 3.1: Efeito Allee

Existe uma certa liberdade em como fazer modelar o problema. Uma possível proposta é a seguinte: Se  $x(t)$  é o tamanho da população no tempo  $t$  e  $u(t)$  é a proporção da população caçada, a variação da população é dada por

$$x'(t) = rx(t) \left( \frac{x(t)}{x_{min}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{x(t)}{x_{max}} \right) - u(t)x(t)$$

$$x(0) = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

Para definir um objetivo, queremos maximizar a receita, que é dada por, se  $T$  for o final do período,

$$R(u) = \int_0^T u(t)x(t)dt$$

E queremos minimizar o custo da caça, que é assumido como quadrático:

$$C(u) = \int_0^T [u(t)x(t)]^2 dt$$

Queremos portanto

$$\max_u [R(u) - C(u)]$$

## Capítulo 4

# Existência e Outras Propriedades

Após desenvolver as condições necessárias para resolver o problema de controle ótimo inicial, alguns problemas podem surgir. Como assumimos a existência de controle ótimo, podemos encontrar uma função de controle mesmo quando não haja. Também pode ser obtido um uma função que possua funcional com valor infinito, algo que não é desejado. Portanto, se o funcional objetivo tiver valor mais ou menos infinito, fizemos que o problema não tem solução.

### 4.1 Existência e unicidade

**Teorema 4.1.1.** *Seja*

$$J(u) := \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0.$$

*Suponha que  $f(t, x, u)$  e  $g(t, x, u)$  sejam continuamente diferenciáveis nos três argumentos e côncavos no segundo e terceiro argumentos. Suponha que  $u^*$  é um controle, com estado associado  $x^*$ , e  $\lambda$  uma função diferenciável por partes, tal que  $t_0 \leq t \leq t_1$ :*

$$f_u + \lambda g_u = 0, \tag{4.1a}$$

$$\lambda' = -(f_x + \lambda g_x), \tag{4.1b}$$

$$\lambda(t_1) = 0, \tag{4.1c}$$

$$\lambda(t) \geq 0. \tag{4.1d}$$

*Então, para todos os controles  $u$ ,  $J(u^*) \geq J(u)$ .*

*Demonstração.* Seja  $u$  um controle qualquer. Assim, usando a concavidade de  $f$ ,

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*) - f(t, x, u) dt \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} (x^*(t) - x(t)) f_x(t, x^*, u^*) \\ &\quad + (u^*(t) - u(t)) f_u(t, x^*, u^*) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aplicando 4.1a e 4.1b ao último termo de 4.2,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (x^*(t) - x(t)) (-\lambda(t) g_x(t, x^*, u^*) - \lambda'(t)) \\ &\quad + (u^*(t) - u(t)) (-\lambda(t) g_u(t, x^*, u^*)) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes, com  $\lambda(t_1) = 0$  e  $x(t_0) = x^*(t_0)$ , vemos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} -\lambda'(t) (x^*(t) - x(t)) dt &= -\cancel{(x^*(t) - x(t)) \lambda(t)} \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) (x^*(t) - x(t))' dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) (g(t, x^*(t), u^*(t)) - g(t, x(t), u(t))) dt \end{aligned}$$

Substituindo e usando tanto a concavidade de  $g$  quanto 4.1d,

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &\geq \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) [g(t, x^*, u^*) - g(t, x, u) - \\ &\quad (x^* - x) g_x(t, x^*, u^*) - (u^* - u) g_u(t, x^*, u^*)] dt \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

Falta garantir que  $J(u^*)$  seja finito. Para isso, algumas restrições sobre  $f$  e/ou  $g$  são necessárias. O próximo teorema é um exemplo sobre isso.

**Teorema 4.1.2.** *Seja  $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R})$ . Suponha que  $f$  é uma função convexa em  $u$ , e existam constantes  $C_4$  e  $C_1, C_2, C_3 > 0$  e  $\beta > 1$ , tal que,  $\forall t \in [t_0, t_1], x, x_1, u \in \mathbb{R}$ .*

$$\begin{cases} g(t, x, u) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u \\ |g(t, x, u)| \leq C_1(1 + |x| + |u|) \\ |g(t, x_1, u) - g(t, x, u)| \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|) \\ f(t, x, u) \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{cases}$$

*Então existe um controle ótimo  $u^*$  maximizando  $J(u)$  com  $J(u^*)$  finito.*

Em problemas de minimização,  $g$  seria côncava e a desigualdade de  $f$  é revertida. Podemos estender as condições necessárias para funções de controle Lebesgue integráveis, mas isso não é feito aqui. Alguns resultados de existência de controle ótimo podem ser encontrados em Filippov (1962).

**Unicidade:** Unicidade de soluções do sistema de otimalidade implica unicidade do controle ótimo, quando ele existir. Em geral, podemos provar a unicidade de soluções do sistema de otimalidade em intervalos de tempo curtos. A volta nem sempre é verdadeira, isto é, unicidade do controle ótimo não garante a unicidade do sistema.

Os exemplos e laboratórios satisfazem as condições de existência e unicidade para intervalos de tempo pequenos. Portanto, resolver através das condições necessárias já é suficiente.

## 4.2 Interpretação da Adjunta

Defina

$$V(x_0, t_0) := \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$$

sujeito a  $x'(t) = g(t, x, u), x(t_0) = x_0$ .

Estabelecemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(x_0 + \epsilon, t_0) - V(x_0, t_0)}{\epsilon} = \lambda(t_0).$$

Podemos relacionar, então, a função adjunta à variação marginal da função custo/lucro com respeito ao estado. Na verdade, essa aproximação é válida para todo tempo  $t$  (Kamien and Schwartz, 2012, 136-139). Podemos aproximar:

$$V(x_0 + \epsilon, t_0) \approx V(x_0, t_0) + \epsilon \lambda(t_0).$$

Com  $\epsilon = 1$ , podemos ver que ao adicionar uma unidade à condição inicial,  $\lambda(t_0)$  será adicionado ao lucro resultante. portanto é o valor adicional associado ao incremento unitário no estado.

## 4.3 Princípio da otimalidade

É um resultado importante sobre otimização de um sistema sobre um subintervalo do intervalo original e, em particular, como o controle ótimo nesse subintervalo se relaciona com o controle no intervalo inteiro.

**Teorema 4.3.1.** *Considere  $u^*$  o controle ótimo associado ao estado  $x^*$  para o problema*

$$\max_u J(u) = \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$$



sujeito a  $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Seja  $\hat{t} \in (t_0, t_1)$  fixo. Então as funções  $u^*$  e  $x^*$  restritas ao intervalo  $[\hat{t}, t_1]$ , indicadas por  $\hat{u}^*$  e  $\hat{x}^*$ , formam uma solução ótima para o problema

$$\max_u \hat{J}(u) = \max_u \int_{\hat{t}}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$$

sujeito a  $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$ ,  $x(\hat{t}) = x^*(\hat{t})$ .

Além disso, se  $u^*$  é controle ótimo único, então  $\hat{u}^*$  é também.

*Demonstração.* Esta prova se dá por contradição. Suponha que  $\hat{u}^*$  não seja ótimo, isto é, exista uma função de controle  $\hat{u}_1$  no intervalo  $[\hat{t}, t_1]$  tal que  $\hat{J}(\hat{u}_1) > \hat{J}(\hat{u}^*)$ . Defina

$$u_1(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [t_0, \hat{t}] \\ \hat{u}_1(t), & t \in [\hat{t}, t_1] \end{cases}$$

Seja  $x_1$  o estado associado a  $u_1$ . Assim

$$\begin{aligned} J(u_1) - J(u^*) &= \left( \int_{t_0}^{\hat{t}} f(t, x_1, u_1) dt + \hat{J}(\hat{u}_1) \right) - \left( \int_{t_0}^{\hat{t}} f(t, x^*, u^*) dt + \hat{J}(\hat{u}^*) \right) \\ &= \hat{J}(\hat{u}_1) - \hat{J}(\hat{u}^*) > 0 \end{aligned}$$

dado que os controles são iguais no intervalo  $[t_0, \hat{t}]$ . Isso contradiz a hipótese inicial de que  $u^*$  é controle ótimo.  $\square$

**Observação.** Nada pode ser dito sobre o intervalo  $[t_0, \hat{t}]$ . Em particular sabemos que o controle ótimo não será, necessariamente, o controle do problema restrito a esse intervalo, como veremos nos Exemplos.

## 4.4 Problema autônomo e o hamiltoniano

Os seguintes teoremas são menos utilizados, mas são importantes de ser notadas. A demonstração não é descrita no texto.

**Teorema 4.4.1.** *O Hamiltoniano é uma função contínua Lipschitz do tempo  $t$  no caminho ótimo  $(u^*, x^*)$ .*

**Definição 4.4.1** (Autônomo). Se um problema de controle ótimo não tem dependência explícita do tempo, ele é dito autônomo. Isso significa que  $f$  e  $g$ , em nossa notação, são funções apenas de  $x$  e  $u$ .

**Teorema 4.4.2.** *Se um problema de controle ótimo é autônomo, então o Hamiltoniano é uma função constante do tempo ao longo da solução ótima.*

## 4.5 Exemplos

**Exemplo 4.5.1.** Queremos resolver o problema

$$\min_u \int_{t_0}^{t_1} x(t) + \frac{1}{2}u(t)^2 dt$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = x(t) + u(t), x(0) = \frac{1}{2}e^2 - 1$$

no intervalo  $[0, 2]$  e, posteriormente, no intervalo  $[1, 2]$ .

Observe inicialmente que  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis e convexos no segundo e terceiro argumentos, dado que o problema é de minimização. Vamos então conferir as condições necessárias e, então, saberemos que  $J(u^*) \leq J(u)$  para toda função de controle  $u$ , pelo teorema de existência.

O Hamiltoniano é

$$H = x + \frac{1}{2}u^2 + x\lambda + u\lambda$$

A equação adjunta é dada por

$$\lambda' = -H_x = -1 - \lambda, \lambda(2) = 0 \implies \lambda(t) = e^{2-t} - 1 \geq 0,$$

A condição de otimalidade é dada por

$$H_u = u + \lambda = 0 \implies u^*(t) = -\lambda(t) = 1 - e^{2-t}$$

E, portanto

$$x'(t) - x(t) = 1 - e^{2-t} \implies x(t) = Ce^t + \frac{1}{2}e^{2-t} - 1$$

Usando a condição inicial

$$\frac{1}{2}e^2 - 1 = C + \frac{1}{2}e^2 - 1 \implies x^*(t) = \frac{1}{2}e^{2-t} - 1$$

Considerando o intervalo em  $[1, 2]$ , vemos que  $\hat{u}^* = u^*$  em  $[1, 2]$ . Se fôssemos resolver fazendo as contas, veja que todos os passos poderiam ser repetidos, com exceção de que  $x(1) = \frac{1}{2}e - 1$ , o que não mudaria a solução.

**Exemplo 4.5.2.** Considere o problema acima, mas no intervalo  $[0, 1]$ .

O Hamiltoniano é o mesmo e  $u^*(t) = -\lambda(t)$ . Mas a condição de transversalidade é diferente:  $\lambda(1) = 0 \implies \lambda(t) = e^{1-t} - 1$  e  $u^*(t) = 1 - e^{1-t}$ . Ao usarmos a equação do estado, obteremos que

$$x^*(t) = \frac{1}{2}e^{1-t} - 1 + \frac{1}{2}(e^2 - e)e^t$$

Note que a solução é diferente da anterior restrita a  $[0, 1]$ .

## Capítulo 5

# Condições Finais do Estado

### 5.1 Termos payoff

Em muitos problemas também queremos maximizar o valor de uma função em um determinado ponto no tempo, como, por exemplo, no final do intervalo. Reformulamos o problema de controle ótimo da seguinte forma:

$$\max_u \left[ \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \right]$$

sujeito a  $x' = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$

O termo  $\phi(x(t_1))$  é chamado de termo *payoff*. Assim o funcional objetivo se torna

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1))$$

A única mudança em relação ao cálculos do Capítulo 3 é a condição de transversalidade.

$$\lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1)).$$

### 5.2 Estados com pontos de fronteira fixos

Considere o problema

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1))$$

sujeito a  $x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_1) = x_1$

Diferente do problema que estávamos estudando, fixamos o estado no ponto final. Entretanto, o argumento utilizado no Capítulo 3 pode ser replicado aqui. As condições necessárias serão as mesmas, exceto pela condição

de transversalidade. Especificamente,

$$\lambda(t_0) = \phi'(x^*(t_0))$$

Isso sugere que exista uma dualidade entre as condições de fronteira do estado e da adjunta. Importante observar que a maximização é realizada sobre os controles *admissíveis*, no sentido que respeite todas as restrições definidas, inclusive as variáveis de estado.

Também podemos fixar os pontos inicial e final de estado. Porém, nesse caso, uma mudança nas condições necessárias é realizada no seguinte teorema.

**Teorema 5.2.1.** *Se  $u^*(t)$  e  $x^*(t)$  são ótimos para o problema com pontos inicial e final fixados, então existe uma função  $\lambda(t)$  diferenciável por partes e uma constante  $\lambda_0$  igual a 0 ou 1, tal que*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

para todos os controles admissíveis  $u$  no tempo  $t$  e o Hamiltoniano é

$$H = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t))$$

e

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t))}{\partial x}.$$

A diferença das condições apresentadas no capítulo 3 é que a função adjunta não tem restrições de fronteira. Note que essa liberdade ganhada será preenchida com as condições sobre o estado. A demonstração para esse teorema utiliza uma técnica diferente da utilizada até então e pode ser obtida em (Kamien and Schwartz, 2012, 147-153). A constante  $\lambda_0$  ajusta para problemas degenerados ou problemas onde o funcional objetivo é imaterial.

**Definição 5.2.1.** O funcional objetivo ser imaterial significa que não depende da condição final do estado.

### 5.3 Exemplos

**Exemplo 5.3.1.**

$$\begin{aligned} & \min_u \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 dt + 5x(1)^2 \\ & \text{sujeito a } x'(t) = x(t) + u(t), x(0) = 1 \end{aligned}$$

Observe que nesse exemplo estamos lidando com o termo *payoff*  $5x(1)^2$ , onde  $\phi(x) = 5x^2$ . Nesse caso

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda(x + u)$$

A condição de otimalidade,

$$0 = H_u = u^* + \lambda \implies u^*(t) = -\lambda(t)$$

A equação adjunta,

$$\lambda'(t) = -H_x = -\lambda \implies \lambda(t) = Ce^{-t}$$

A condição de transversalidade,

$$\lambda(1) = \phi'(x^*(1)) = 10x^*(1)$$

Sabemos que  $u^*(t) = -Ce^{-t}$ . Usando a equação do estado,

$$x' = x - Ce^{-t} \implies x^*(t) = \frac{C}{2}e^{-t} + De^t$$

Agora, utilizando as condições de fronteira,

$$\lambda(1) = Ce^{-1} = 10x^*(1) = 10 \left( \frac{C}{2}e^{-1} + De \right)$$

$$x(0) = \frac{C}{2} + D = 1 \implies D = 1 - \frac{C}{2}$$

Obtemos a equação

$$e^{-1} = 5e^{-1} + 10e \frac{D}{C} \implies -\frac{4}{10}e^{-2} = \frac{D}{C} \implies 1 - \frac{C}{2} = -\frac{2}{5}Ce^{-2}$$

Assim

$$C = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}e^{-2}} = \frac{10}{5 - 4e^{-2}} \implies D = 1 - \frac{5}{5 - 4e^{-2}} = \frac{-4e^{-2}}{5 - 4e^{-2}}$$

Concluimos, portanto, que

$$u^*(t) = -\frac{10}{5 - 4e^{-2}}e^{-t} \text{ e } x^*(t) = \frac{5}{5 - 4e^{-2}}e^{-t} - \frac{4e^{-2}}{5 - 4e^{-2}}e^t$$

**Exemplo 5.3.2.**

$$\min_u \int_0^1 u(t)dt$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = u(t)^2, x(0) = 0, x(1) = 0$$

Observe que  $x(t) = \int_0^t u(s)^2 ds$  e, como  $x(1) = 0$ , temos que  $u \equiv 0$  é o único controle admissível. Portanto ele será o único controle ótimo. Agora, vamos examinar as condições necessárias, para fazer o *sanity check*.

$$H = \lambda_0 u + u^2 \lambda$$

Assim

$$0 = H_u = \lambda_0 + 2u\lambda \implies u^*(t) = -\frac{\lambda_0}{2\lambda(t)}$$

Pela equação adjunta,  $H_x = 0 \implies \lambda \equiv C$ , para alguma constante  $C$ . Isto é,  $u^*(t) = -\lambda_0/2C$ . Usando a equação do estado, obtemos que

$$x^*(t) = \lambda_0^2 \frac{t}{4C^2} + D$$

tal que  $D = 0$  e  $\frac{\lambda_0^2}{4C^2} = 0 \implies \lambda_0 = 0$ . Checamos então que o Teorema é satisfeito com  $\lambda_0 = 0$  e  $u^* \equiv 0$ , como já era esperado.

**Exemplo 5.3.3.** Seja  $x(t)$  o número de células de câncer no tempo  $t$  que apresenta crescimento exponencial  $\alpha$ , e seja  $u(t)$  a concentração de drogas aplicada para o tratamento. Queremos minimizar o número de células tumorais ao final do tratamento e os efeitos negativos acumulados do tratamento no corpo. Assim, o problema é resumido em

$$\min_u x(T) + \int_0^T u(t)^2 dt$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = \alpha x(t) - u(t), x(0) = x_0 > 0$$

Esse é um simples modelo, não realístico, com objetivo ilustrativo apenas. O termo *payoff* é  $x(T)$  e, portanto,  $\phi(x) = x$ . Podemos calcular as condições necessárias.

$$H = u^2 + \lambda(\alpha x - u)$$

$$0 = H_u = 2u - \lambda \implies u^* = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\alpha\lambda \implies \lambda(t) = Ce^{-\alpha t}$$

$$\lambda(T) = \phi'(x^*(T)) = 1 \implies \lambda(t) = e^{\alpha(T-t)}$$

Portanto o controle ótimo é

$$u^*(t) = \frac{1}{2}e^{\alpha(T-t)},$$

Observando a equação do estado, temos que

$$x' - x = -\frac{1}{2}e^{\alpha(T-t)} \implies x^*(t) = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha T} \frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{4\alpha}$$

Com esse método, podemos obter a quantidade de droga a ser utilizada a cada tempo  $t$  e também saberemos a quantidade de células cancerosas. Todavia é importante notar que esse é um modelo simplificado que não leva em consideração diversos fatores importantes ao processo.

## Capítulo 6

# Método Forward-Backward Sweep

Após desenvolvermos as condições necessárias, o problema se torna em resolver duas equações diferenciais,  $x'$  e  $\lambda'$ , e encontrar a caracterização de  $u$ . Nem sempre podemos calcular analiticamente o resultado e, por isso, precisamos de métodos numéricos que aproximem, com o grau de precisão que desejarmos, o controle ótimo  $u^*$  e o estado associado  $x^*$ . Para isso tomamos uma partição  $P = \{t_0 = b_1, b_2, \dots, b_{N+1} = t_1\}$ , usualmente com pontos igualmente espaçados, tal que a aproximação será dada por  $u_i \approx u(b_i)$ . Sabemos que a solução deve satisfazer as condições necessárias apresentadas no capítulo 3.

Em geral, a equação  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  pode ser manipulada de forma a encontrar  $u$  em função de  $x$  e de  $\lambda$ , para então termos a expressão de  $u^*$ . A partir disso, podemos utilizar um método de integração de equações diferenciais, como o Runge-Kutta para resolver o sistema ótimo. Ele vai encontrar o controle ótimo quando esse existir.

### 6.1 Algoritmo

O método apresentado a seguir é bem intuitivo e é conhecido como *Forward-Backward Sweep*. Sejam  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{N+1})$  e  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1})$  vetores que aproximam as funções estado e adjunta, respectivamente, nos pontos da partição  $P$ . Informações sobre convergência e estabilidade podem ser encontradas em Hackbusch (1978).

**Passo 1:** Chute inicial para  $\vec{u}$ .

**Passo 2:** Usando a condição inicial  $x(t_0)$  e os valores de  $\vec{u}$ , encontra-se  $\vec{x}$  passo a frente através da equação diferencial.

**Passo 3:** Usando a condição de transversalidade  $\lambda(t_1) = 0$  e os valores  $\vec{u}$  e  $\vec{x}$ , resolva  $\vec{\lambda}$  para trás de acordo com a equação adjunta.

**Passo 4:** Atualize o vetor de controle com os novos valores de  $\vec{x}$  e  $\vec{\lambda}$  através da equação  $H_u = 0$ .

**Passo 5:** Confira a convergência. Se dois passos subjacentes não estão suficientemente próximos, repita a partir do segundo passo.

O chute inicial em geral não repercute diferença no resultado do algoritmo. Chutes mais próximos do controle ótimo resultam em convergência mais rápida. Para os passos 2 e 3, o método de integração Runge-Kutta é suficiente. Para o passo 4, frequentemente é necessário usar uma combinação convexa<sup>1</sup> entre dois controles sequenciais para acelerar a convergência do algoritmo.

Muitos tipos de teste de convergência existem. O exemplo mais comum é

$$\|\vec{u} - \text{old } \vec{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{N+1} |u_i - \text{old } u_i| < \epsilon$$

Nesse texto, usaremos o erro relativo com tolerância  $\epsilon$ ,

$$\frac{\|\vec{u} - \text{old } \vec{u}\|_1}{\|\vec{u}\|_1} \leq \epsilon$$

Ou, de outra forma, queremos que

$$\epsilon \|\vec{u}\| - \|\vec{u} - \text{old } \vec{u}\| \geq 0$$

Vamos fazer esse requerimento para todas as variáveis, não apenas para o controle.

Ao longo do texto esse algoritmo será utilizado para fazer as experimentações através dos Laboratórios escritos em formato notebook.

## 6.2 Runge-Kutta

Esse método é suficiente para muitos problemas comuns, com exceção de problemas mais complicados, como os *problemas stiff*. Seja a equação diferencial

$$x'(t) = f(t, x), x(0) = x_0.$$

O método pode ser resumido pelas seguintes equações, dado um passo  $h$ .

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

---

<sup>1</sup>**Combinação Convexa:** Combinação linear de pontos, tal que os coeficientes são não negativos e somam 1.



$$\begin{cases} k1 = f(t, x(t)) \\ k2 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k1) \\ k3 = f(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k2) \\ k4 = f(t + h, x(t) + hk3) \end{cases}$$

Quando temos o valor  $x(T) = x_T$ , isto é, o valor final, e queremos integrar até o valor inicial, trocamos o sinal de  $h$  e, assim, podemos resolver o passo Backward. O erro é da ordem de  $h^4$ . Para uma descrição mais precisa, recomendam-se livros de Análise Numérica.

## Capítulo 7

# Laboratórios 1, 2 e 3

Nesse capítulo serão realizados os laboratórios 1, 2 e 3. Os laboratórios tratam de aplicações simplificadas de situações reais que envolvem conceitos de biologia. Eles são auto-contidos se a teoria dos capítulos anteriores for conhecida.

### **Lab 1:** Exemplo Introdutório

O algoritmo apresentado no capítulo 6 é apresentado na linguagem Python e cada passo é explicado. Um simples exemplo do problema de controle ótimo é desenvolvido.

### **Lab 2:** Mofo e Fungicida

Modelo simplificado do crescimento de um mofo contra a ação de um fungicida, que serve de controle para o aumento do mofo, dado que este é um efeito indesejado e deve, portanto, ser minimizado.

### **Lab 3:** Bactéria

Uma bactéria tem seu crescimento acelerado por um químico, mas simultaneamente é criado um subproduto tóxico a ela. Queremos que no final do experimento, tenhamos o máximo dessa bactéria, mas sem usar muito químico.

## Capítulo 8

# Controles Limitados

Muitos problemas reais de controle ótimo apresentam um controle limitado, dado que em geral o controle indica uma medida a ser tomada e ela possui limitações práticas. Por exemplo, se o controle for a quantidade de um químico, no Laboratório 3 do Capítulo 7, não podemos adicionar uma quantidade negativa desse químico, o que nos leva a restringir  $u(t) \geq 0$  e também não temos uma quantidade infinita do químico disponível e talvez seja tão limitada que devemos impor  $u(t) \leq C$ .

### 8.1 Condições Necessárias

Considere o problema

$$\begin{aligned} \max_u J(u) &= \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1)) \\ \text{sujeito a } x'(t) &= g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \\ a &\leq u(t) \leq b, a < b \end{aligned}$$

Seja  $u^*$  e  $x^*$  o par ótimo. Seja  $h(t)$  uma função contínua por partes tal que exista  $\epsilon_0$ , de forma que  $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ ,  $u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t)$  é admissível sob os limites inferior e superior. Devido aos limites, o funcional pode não ser zero no controle ótimo, dado que esse pode estar nos limites. Seja  $x^\epsilon(t)$  a variável do estado correspondente. Da mesma forma que fizemos no capítulo 3, seja  $\lambda(t)$  uma função diferenciável por partes e, assim

$$\begin{aligned} J(u^\epsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\epsilon, u^\epsilon) + \lambda(t)g(t, x^\epsilon, u^\epsilon) + x^\epsilon \lambda'(t)] dt \\ &\quad - \lambda(t_0)x_0 + \lambda(t_1)x^\epsilon(t_1) + \phi(x(t_1)) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Como  $J(u^*)$  é máximo, temos que

$$0 \geq \left. \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon} \quad (8.2)$$

Como já fizemos, tome a variável  $\lambda(t)$  de forma que

$$\lambda'(t) = -[f_x(t, x^*, u^*) + \lambda(t)g_x(t, x^*, u^*)], \lambda(t_1) = \phi'(x^*(t_1))$$

Então 8.1 e 8.2 se reduzem a

$$0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt,$$

E essa desigualdade vale para toda função  $h$ . Seja  $s$  um ponto de continuidade tal que  $a \leq u^*(s) < b$ . Suponha que  $f_u + \lambda g_u > 0$  em  $s$ . Pela continuidade de  $u^*$  em  $s$ , vale que  $f_u + \lambda g_u$  é contínua em  $s$  e, portanto, deve ser positiva em uma vizinhança do ponto. Podemos tomar esse intervalo menor para que tenhamos  $u^* < b$ . Seja  $I$  o maior intervalo fechado com essas características e defina

$$M = \max\{u^*(t) : t \in I\}$$

Seja

$$h(t) = \begin{cases} b - M > 0, & \text{se } t \in I, \\ 0, & \text{se } t \notin I \end{cases}$$

Portanto  $a \leq u^* + \epsilon h \leq b$  quando  $\epsilon \in [0, 1]$ . Mas

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt = \int_I (f_u + \lambda g_u)(b - M) dt > 0,$$

uma contradição. Portanto  $f_u + \lambda g_u \leq 0$ .

De forma similar, se  $s$  é um ponto onde  $u^*$  é contínua e  $a < u^*(s) \leq b$ , teremos que em  $s$ ,  $f_u + \lambda g_u \geq 0$ . E assim,

$$\begin{aligned} u^*(t) = a &\implies f_u + \lambda g_u \leq 0 \text{ em } t, \\ a < u^*(t) < b &\implies f_u + \lambda g_u = 0 \text{ em } t, \\ u^*(t) = b &\implies f_u + \lambda g_u \geq 0 \text{ em } t, \end{aligned}$$

De forma equivalente

$$f_u + \lambda g_u > 0 \text{ em } t \implies u^*(t) \neq a, \quad (8.3)$$

$$f_u + \lambda g_u \neq 0 \text{ em } t \implies u^*(t) = a \text{ ou } u^*(t) = b, \quad (8.4)$$

$$f_u + \lambda g_u < 0 \text{ em } t \implies u^*(t) \neq b, \quad (8.5)$$

De 8.3 e 8.4, vemos que  $f_u + \lambda g_u > 0 \implies u^*(t) = b$ . De 8.4 e 8.5, vemos que  $f_u + \lambda g_u < 0 \implies u^*(t) = a$ . E, por fim, se  $f_u + \lambda g_u = 0 \implies a \leq u^*(t) \leq b$ . Para os pontos em que  $u^*$  não é contínua, não precisamos

nos preocupar, pois não afetam o funcional objetivo. Portanto, temos que, dado o Hamiltoniano  $H$ ,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, x(t_0) = x_0 \\ \lambda'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \lambda(t_1) = \phi'(x(t_1)) \\ \begin{cases} u^* = a & \text{se } H_u < 0 \\ a \leq u^* \leq b & \text{se } H_u = 0 \\ u^* = b & \text{se } H_u > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Em um problema de minimização, as desigualdades da primeira e terceira linhas são revertidas. As condições de transversalidade são todas equivalentes ao caso não limitado, isto é, a dualidade do estado e adjunta é a mesma.

## 8.2 Soluções Numéricas

Uma mudança no algoritmo é necessária para calcular a solução numérica. As equações estado e adjunta não são alteradas, pois não dependem dos limites de  $u^*$  e apenas a sua caracterização. Além disso, o chute inicial deve ser entre os limites do controle. As mudanças necessárias podem ser visualizadas na seção de exemplos.

## 8.3 Exemplos

### Exemplo 8.3.1.

$$\begin{aligned} \max_u x(4) - \int_0^4 u(t)^2 dt \\ \text{sujeito a } x'(t) = x(t) + u(t), x(0) = 0, \\ u(t) \leq 5 \end{aligned}$$

O Hamiltoniano é dado por  $H = -u^2 + \lambda x + \lambda u$ . A equação adjunta é dada por

$$\lambda'(t) = -H_x = -\lambda \implies \lambda(t) = Ke^{-t}$$

Como  $\lambda(4) = \phi'(x^*(4)) = 1$ , temos que  $Ke^{-4} = 1 \implies K = e^4$ . Assim

$$\lambda(t) = e^{4-t}.$$

Além disso,  $H_u = -2u + \lambda$ . Como o controle não tem limite inferior, temos que  $H_u < 0$  não pode ocorrer.

Se  $H_u > 0 \implies u^*(t) = 5 \implies \lambda - 10 > 0 \implies e^{4-t} > 10 \implies t < 4 - \log 10$

Se  $H_u = 0 \implies u^*(t) = \frac{1}{2}e^{4-t} \leq 5$ . Portanto  $t \geq 4 - \log 10$ .  
Consequentemente,

$$u^* = \begin{cases} 5 & \text{quando } 0 \leq t < 4 - \log 10 \\ \frac{1}{2}e^{4-t} & \text{quando } 4 - \log 10 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Agora vamos encontrar o estado associado.

$$x'(t) = x(t) + 5 \implies x(t) = 5e^t - 5, t \in [0, 4 - \log 10]$$

$$x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}e^{4-t} \implies x(t) = -\frac{1}{4}e^{4-t} + ke^t, t \in [4 - \log 10, 4]$$

para alguma constante  $k$  de forma que  $x^*$  seja contínua, isto é, as expressões concordem. Isso ocorre quando  $k = 5 - 25e^{-4}$ .

**Exemplo 8.3.2.** Considere o simples exemplo

$$\begin{aligned} & \min_u \int_0^4 u(t)^2 + x(t) dt \\ & \text{sujeito a } x'(t) = u(t), x(0) = 0, x(4) = 1 \\ & u(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Vamos visualizar a diferença entre a solução com limites e sem limites. Para problemas com limites, é importante que não apenas truncemos o resultado.

No exemplo, o Hamiltoniano é dado por  $H = \lambda_0(u^2 + x) + \lambda u$ . A função adjunta é dada por

$$\lambda'(t) = -H_x = -\lambda_0 \implies \lambda(t) = k - \lambda_0 t,$$

para alguma constante  $k$  e  $\lambda_0 = 0$  ou  $\lambda_0 = 1$ . A condição de otimalidade é

$$H_u = 2\lambda_0 u + \lambda,$$

$$H_u > 0 \implies u^*(t) = 0 \implies 0 < \lambda = k - t \implies t < k,$$

Considere  $\lambda_0 = 1$ .

$$H_u = 0 \implies 0 \leq u^*(t) = -\frac{\lambda}{2} = \frac{t-k}{2} \implies t \geq k$$

Portanto

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{quando } 0 \leq t < k, \\ \frac{t-k}{2} & \text{quando } k \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Agora precisamos encontrar o valor de  $k$ . Para isso, precisamos utilizar as condições de estado inicial e de fronteira. Considere os casos:

**Caso 1:**  $k \leq 0$ . Assim  $x'(t) = u = \frac{t-k}{2} \implies x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{kt}{2} + c$ , tal que  $c = 0$  e  $x(4) = 4 - 2k = 1 \implies k = 3/2$ , um absurdo.

**Caso 2:**  $k \geq 4$ . Assim  $u^* \equiv 0$ . Então  $x^* \equiv c$ , o que também é um absurdo.

**Caso 3:** Então  $0 < k < 4$ . Nesse caso  $x'(t) = 0 \implies x \equiv c = 0$  em  $[0, k]$ . Em  $[k, 4]$ ,  $x'(t) = \frac{t-k}{2}$  e, portanto,

$$x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{kt}{2} + c,$$

para alguma constante  $c$ . Pela continuidade de  $x$ ,  $c = \frac{k^2}{4}$ , pois  $x(k) = 0$ . Por fim,  $1 = x(4) = 4 - 2k + k^2/4$ . A solução é portanto  $k = 2$  ou  $6$ . Como  $k < 4 \implies k = 2$ . Concluimos então que

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{quando } 0 \leq t < 2, \\ \frac{t-2}{2} & \text{quando } 2 \leq t \leq 4 \end{cases} \text{ e } x^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{quando } 0 \leq t < 2, \\ \frac{(t-2)^2}{4} & \text{quando } 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Agora, vamos procurar o controle ótimo  $\hat{u}$  sem restrição. Nesse caso

$$\hat{u}(t) = \frac{t-k}{2} \implies \hat{x}(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{kt}{2} + c$$

tal que  $x(0) = c = 0$  e  $x(4) = 4 - 2k = 1 \implies k = 3/2$ . Assim, se só truncássemos a solução, teríamos

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{quando } 0 \leq t < 3/2, \\ \frac{2t-3}{4} & \text{quando } 3/2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Em conclusão, para encontrar controle ótimo com restrição, devemos considerá-los nas contas.

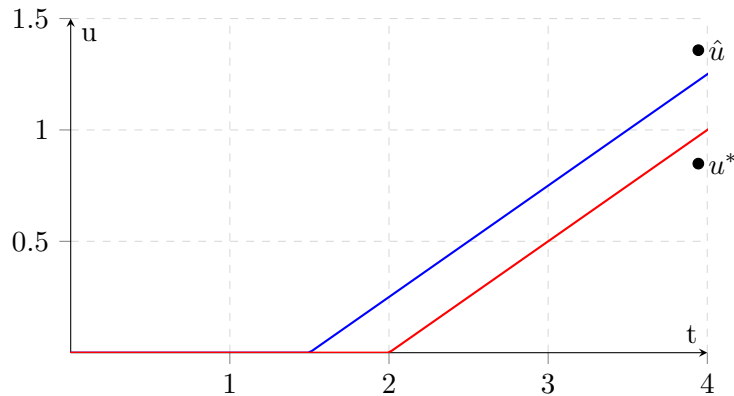


Figura 8.1: Controles ótimo e com truncagem

## Capítulo 9

# Laboratórios 4, 5 e 6

Nesse capítulo serão realizados os laboratórios 4, 5 e 6. Mais algumas aplicações em biologia são desenvolvidas.

### **Lab 4:** Caso limitado

É um reexame do problema do primeiro laboratório. A diferença agora é a presença de limites inferior e superior.

### **Lab 5:** Câncer

Modelo do tratamento de células cancerosas por quimioterapia, com objetivo de minimizar os efeitos negativos do uso das drogas, mas também minimizar a densidade dessas células no corpo. É simplificado, porém apresenta dois componentes importantes: o crescimento Gompertzian e a hipótese de Skipper para a morte das células segundo o uso das drogas.

### **Lab 6:** Colheita de peixe

Uma população de peixes é inserida em um tanque e é deixada para ser caçada, com morte natural, mas sem taxa de nascimento. Queremos maximizar a massa de peixes caçada, enquanto minimizamos o gasto com a colheita. Restrições são consideradas.



## Capítulo 10

# Controle Ótimo com Várias Variáveis

Até agora nos preocupamos apenas com problemas com uma variável de estado e uma variável de controle. Nesse capítulo vamos estudar as condições necessárias para um problema com mais de uma variável de cada tipo.

### 10.1 Condições Necessárias

Faremos uma extensão natural dos problemas desenvolvidos até então. Seja o problema com  $n$  variáveis de estado,  $m$  variáveis de controle e uma função *payoff*  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \max_{u_1, \dots, u_m} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) dt + \phi(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \\ \text{sujeito a } x'_i(t) = g_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ x_i(t_0) = x_{i0} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

onde as função  $f$  e  $g_i$  são continuamente diferenciáveis em cada variável. Em notação vetorial, seja  $\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u})$  e  $\vec{x}_0$  os vetores, respectivamente, do estado, do controle, das funções derivada do estado e da condição inicial. Podemos escrever o problema, portanto, como

$$\begin{aligned} \max_{\vec{u}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt + \phi(\vec{x}(t_1)) \\ \text{sujeito a } \vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Seja  $\vec{u}^*$  o vetor de funções controle ótimo e  $\vec{x}^*$  o vetor de estados correspondente. Seja  $\vec{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$  um vetor com funções diferenciáveis por partes, que serão as funções adjuntas. Defina o Hamiltoniano

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t) \cdot \vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u}),$$

onde  $\cdot$  é o produto escalar de vetores. Pelo mesmo argumento apresentado no capítulo 3, encontramos que  $\vec{u}^*$  maximiza a função  $\vec{u} \mapsto H(t, \vec{x}^*, \vec{u}, \vec{\lambda})$  e satisfaz

$$x'_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, \vec{x}, \vec{u}), x_i(0) = x_{i0} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

$$\lambda'_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(\vec{x}(t_1)) \text{ para } j = 1, \dots, n$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_k} \text{ em } u_k^* \text{ para } k = 1, \dots, m$$

Modificações nesse problema repercutem no caso multivariado, com extensões similares. A dualidade entre  $x_i$  e  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, n$  é ainda observada e quando impomos limites sobre os controles, para cada controle, as condições de otimalidade são idênticas ao caso unidimensional.

**Exemplo 10.1.1.**

$$\begin{aligned} & \min_u \int_0^1 x_2(t) + u(t)^2 dt \\ & \text{sujeito a } x'_1(t) = x_2(t), x_1(0) = 0, x_1(1) = 1, \\ & \quad x'_2(t) = u(t), x_2(0) = 0, \\ & \quad a \leq u(t) \leq b \end{aligned}$$

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  variáveis adjuntas e defina

$$H = x_2 + u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

As equações adjuntas são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda'_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \implies \lambda_1(t) \equiv C \\ \lambda'_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 \implies \lambda_2(t) = -(1 + C)t + D, \\ \text{como } \lambda_2(1) &= 0 \implies D = 1 + C \implies \lambda_2(t) = -(1 + C)(t - 1) \end{aligned}$$

Usando as condições de otimalidade, obtemos

$$H_u = 2u + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} H_u > 0 &\implies u^*(t) = a \implies -\frac{1}{2}\lambda_2 < a \\ H_u < 0 &\implies u^*(t) = b \implies -\frac{1}{2}\lambda_2 > b \\ H_u = 0 &\implies a \leq u^*(t) = -\frac{1}{2}\lambda_2(t) \leq b \end{aligned}$$

Portanto,

$$u^*(t) = \begin{cases} a & t < \frac{2}{1+C}a + 1 \\ \frac{1+C}{2}(t-1) & t \in \left[\frac{2}{1+C}a + 1, \frac{2}{1+C}b + 1\right] \\ b & t > \frac{2}{1+C}b + 1 \end{cases}$$

Para encontrar o valor de  $C$ , algumas contas complicadas precisam ser feitas e não o são no texto. Precisa-se integrar a equação  $x'_2 = u$ , assegurando a continuidade de  $x_2$  e considerando a sua condição inicial. Após integramos a equação  $x'_1 = x_2$  e usamos as condições de continuidade em  $x_1$ , inicial e final.

## 10.2 Problemas de Regulador Linear Quadrático

Nessa seção será desenvolvido um caso especial de sistemas de controle ótimo, em que as equações diferenciais são lineares em  $x$  e  $u$  e o funcional objetivo é quadrático. Assim descrevemos o problema da seguinte forma:

$$J(u) := \frac{1}{2}[x^T(T)Mx(T) + \int_0^T x^T(t)Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)dt]$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Além disso  $M, Q(t)$  são positivas semidefinidas e  $R(t)$  é positiva definida para garantir invertibilidade, para todo  $t$  em  $[0, T]$ . As três matrizes são simétricas. Observe que isso garante a diagonalização. O Hamiltoniano é, portanto,

$$H = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu).$$

Derivação de expressões matriciais é uma ferramenta poderosa, pois simplifica a notação, mas é importante que se conheça o processo. A simetria das matrizes é utilizada nesse passo. A equação de otimalidade é dada por

$$H_u = Ru + B^T \lambda = 0 \implies u^* = -R^{-1}B^T \lambda,$$

enquanto a equação adjunta é dada por

$$\lambda' = -H_x = -Qx - A^T \lambda, \lambda(T) = Mx(T)$$

Para resolvermos esse problema, utilizaremos o método *sweep*. Para isso, vamos encontrar uma matriz  $S(t)$  de forma que  $\lambda(t) = S(t)x(t)$ . Assim

$$\lambda'(t) = S'(t)x(t) + S(t)(Ax + Bu) = -Qx - A^T(Sx)$$

Obtemos, portanto, utilizando a condição de otimalidade,

$$\begin{aligned} -S'x &= Qx + A^T Sx + SAx - SBR^{-1}B^T Sx \\ &= (Q + A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S)x \end{aligned}$$

Temos, portanto, a equação matricial de *Ricatti*

$$-S' = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q, S(T) = M$$

Esse controle é um tipo de controle *feedback*, pois é uma função linear do estado apenas. A matriz  $R^{-1}B^T S$  é chamada de *gain*. O interessante dessa solução é que eliminamos a necessidade da função adjunta.

### Exemplo 10.2.1.

$$\begin{aligned} \min_u \frac{1}{2} \int_0^T x(t)^2 + u(t)^2 dt \\ \text{sujeito a } x'(t) = u(t), x(0) = x_0 \end{aligned}$$

Nesse caso  $M = A = 0$  e  $B = R = Q = 1$ . Pela equação de Ricatti,

$$-S' = -S^2 + 1, S(T) = 0 \implies S(t) = \frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}},$$

tal que  $S(T) = \frac{1 - Ce^{2T}}{1 + Ce^{2T}} = 0 \implies C = e^{-2T}$ , isto é,

$$S(t) = \frac{1 - e^{2(t-T)}}{1 + e^{2(t-T)}}$$

Temos que  $u^*(t) = -R^{-1}B^T Sx = -Sx$  e  $x'(t) = -Sx$ , e

$$x^*(t) = x_0 e^{-\int S dt}$$

Exemplo carece de revisão.

## 10.3 Equações Diferenciais de Ordem mais Alta

Quando temos uma equação diferencial de ordem mais alta relacionada ao estado, podemos definir um sistema de equações diferenciais, de forma que  $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), \dots, x_{n+1}(t) = x^{(n)}(t)$ . A partir dessa transformação, podemos resolver o problema com o Princípio Máximo de Pontryagin.

## 10.4 Restrições Isoperimétricas

Ao invés de tomar limites inferior e superior com relação ao controle, podemos restringir a integral sobre uma função do controle, assim, podemos ter o seguinte problema, sendo  $f, g, h$  funções continuamente diferenciáveis nas três variáveis.

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1)) \\ & \text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \\ & \int_{t_0}^{t_1} h(t, x(t), u(t)) dt = B, \\ & a \leq u(t) \leq b \end{aligned}$$

Esse tipo de restrição é conhecido como *restrição isoperimétrica*. De fato não podemos lidar de forma direta com esse problema pelo Princípio Máximo de Pontryagin. Entretanto, podemos introduzir uma segunda variável  $z(t)$  tal que

$$z(t) = \int_{t_0}^t h(s, x(s), u(s)) ds$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} z'(t) &= h(t, x(t), u(t)), \\ z(t_0) &= 0, \\ z(t_1) &= B \end{aligned}$$

A partir disso, podemos resolver através do método estudado até então.

**Exemplo 10.4.1.** Inserir exemplo.

## 10.5 Soluções Numéricas

O método para resolver esses sistemas numericamente é basicamente o mesmo. Primeiro, fazemos um chute inicial para cada controle. Depois resolvemos simultaneamente os estados para frente no tempo. Então resolvemos todas as adjuntas simultaneamente para trás no tempo. Cada controle é então atualizado segundo sua caracterização. Esse processo ocorre iterativamente até atingir convergência desejada. Usaremos o método Runge-Kutta para sistemas na integração. O método de Runge-Kutta vetorial precisa resolver  $\vec{k}_1$  inicialmente, ou seja,  $k_1^i$  para cada estado  $x_i$ , para então resolver  $\vec{k}_2$ .

## Capítulo 11

### Laboratórios 7, 8, 9 e 10

Nesse capítulo serão realizados os laboratórios 7, 8, 9 e 10. Mais algumas aplicações em biologia são desenvolvidas.

#### Lab 7: Modelo para Epidemia

Nesse laboratório, um simples modelo compartimental SEIR é desenvolvido segundo a figura 11.1. Um controle de vacinação é visualizado como efeito. É uma simplificação que permite tirar conclusões similares às aquelas obtidas pela comunidade científica.

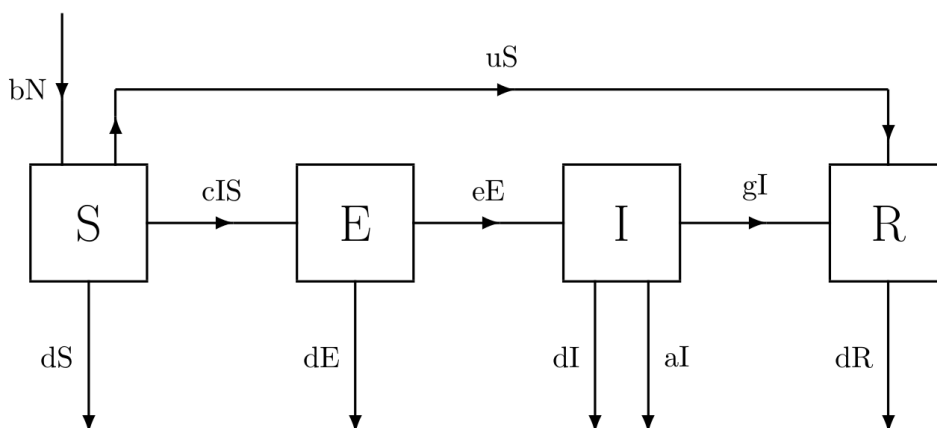


Figura 11.1: O gráfico de fluxo do modelo é explicado aqui.

#### Lab 8: Tratamento HIV

Nesse laboratório é estudado a estratégia de tratamento de quimioterapia de inibidores da transcrição reversa para o HIV, considerando o sistema imunológico do indivíduo, em especial as células CD4+ T que são as mais afetadas no processo. A ideia desse controle é inibir a infecciosidade dos vírus livres em infectar células suscetíveis.

**Lab 9:** População de Ursos

A população de ursos em um parque genérico com proximidade a áreas habitadas por humanos é considerada, de forma que essas regiões são compartilhadas, o que permite encontros indesejados entre ursos e humanos. A caça de ursos tanto na floresta quanto no parque são levados em consideração como forma de controle.

**Lab 10:** Modelo de Glucose

Alguns sistemas de equações diferenciais são sensíveis a mudanças nos parâmetros. Isso pode até levar a falta de convergência, dentre outros problemas. Neste laboratório, examinamos um problema mal condicionado. O modelo considerado tem o objetivo de melhorar a habilidade do teste GTT para detectar pré-diabetes e diabetes menos severas. O modelo considera a concentração de glucose no sangue e a concentração hormonal líquida.

## Capítulo 12

# Linear Dependence on the Control

Nesse capítulo vamos considerar problemas em que o Hamiltoniano é linear em  $u$  e, portanto  $H_u = 0$  não poderá ser resolvido para  $u$ . A solução ótima envolve em geral descontinuidades em  $u^*$ .

### 12.1 Controles Bang-Bang

Considere o problema de controle ótimo.

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f_1(t, x) + u(t)f_2(t, x)dt \\ & \text{sujeito a } x'(t) = g_1(t, x) + u(t)g_2(t, x), x(0) = x_0 \\ & \quad a \leq u(t) \leq b \end{aligned}$$

Podemos escrever o Hamiltoniano como

$$H(t, x, u, \lambda) = f_1(t, x) + \lambda g_1(t, x) + u(t)(f_2(t, x) + \lambda g_2(t, x)).$$

A condição de otimalidade dada por

$$\frac{\partial H}{\partial u} = f_2(t, x) + \lambda(t)g_2(t, x),$$

não carrega informação sobre  $u(t)$ . Assim definimos  $\psi(t) := f_2(t, x(t)) + \lambda(t)g_2(t, x(t))$ , muitas vezes chamada de função de troca. A caracterização de  $u^*$  é

$$u^*(t) = \begin{cases} a & \text{se } \psi(t) < 0, \\ ? & \text{se } \psi(t) = 0, \\ b & \text{se } \psi(t) > 0. \end{cases}$$



Se  $\psi = 0$  não pode ser mantido em um intervalo de tempo, mas ocorre apenas em pontos finitos, o controle é dito **Bang Bang**, porque só varia entre os valores mínimo e máximo de  $u(t)$ . Os valores de  $u(t)$  nesses pontos não são de interesse, portanto. Se  $\psi(t) \equiv 0$  em um intervalo de tempo, dizemos que  $u^*$  é **singular** nesse intervalo. Esse caso será explorado na próxima sessão.

O método *forward-backward sweep* pode ser empregado nesse caso. Primeiro precisamos provar que o problema é de fato bang-bang, isto é  $\phi = 0$  não ocorre em um intervalo. Caso isso seja verdadeiro, basta fazermos, em código *Python*,

```
u = lambda t,x,adjoint: a if psi(t, x, adjoint) < 0 else b
```

**Exemplo 12.1.1.**

$$\begin{aligned} & \max_u \int_0^2 e^t(1-u(t))dt \\ & \text{sujeito a } x'(t) = u(t)x(t), x(0) = 1 \\ & 0 \leq u(t) \leq 1. \end{aligned}$$

Esperamos que  $u \equiv 0$  para maximizar a expressão.

O Hamiltoniano é

$$H = e^t(1-u) + \lambda ux$$

A equação adjunta e a condição de transversalidade são

$$\lambda'(t) = -H_x = -\lambda(t)u(t), \lambda(2) = 0,$$

e

$$\psi(t) = H_u = -e^t + \lambda(t)x(t)$$

Suponha que  $\phi \equiv 0$  em um intervalo  $I \subset (0, 2)$ . Portanto, diferenciando,

$$e^t = \lambda x \implies e^t = \lambda'(t)x(t) + \lambda(t)x'(t) = -\lambda(t)u(t)x(t) + \lambda(t)u(t)x(t) = 0,$$

o que é impossível. Portanto provamos que o problema é bang-bang.

$$u^* = 0 \implies x' = \lambda' = 0 \implies x, \lambda \text{ constantes.}$$

$$u^* = 1 \implies \lambda' = -\lambda \implies \lambda(t) = Ce^{-t}$$

Agora temos que determinar os intervalos. Como  $\lambda(2) = 0$ , qualquer um dos casos acima implicaria  $\lambda(t) \equiv 0$  em algum intervalo que incluía  $t = 2$ . Se  $u^* = 1$  nesse intervalo, teremos que  $C = 0$  e, para garantir a continuidade de  $\lambda$  em  $[0, 2]$ , teremos que  $\lambda \equiv 0$ . Se  $u^* = 0$  nesse intervalo, seja  $I = (a, b) \subset [0, 2)$  o maior intervalo tal que  $u^* = 1$ . Como  $\lambda(b) = 0 \implies C = 0$  a única possibilidade que garante continuidade. Concluimos que  $\lambda \equiv 0$ . Nesse sentido

$$\psi(t) = -e^t < 0 \implies u^* \equiv 0 \text{ e } x^* \equiv 1$$

## 12.2 Controles Singulares

Consideremos dois exemplos simples para motivar o tópico.

**Exemplo 12.2.1.**

$$\max_u \int_0^2 (x(t) - t^2)^2 dt \text{ sujeito a } x'(t) = u(t), x(0) = 10 \leq u(t) \leq 4$$

Primeiro vamos calcular as condições necessárias,

$$H = (x - t^2)^2 + \lambda u$$

$$\lambda'(t) = -H_x = -2(x - t^2), \lambda(2) = 0$$

$$\phi(t) = H_u = \lambda(t)$$

Se  $\phi \equiv 0$  em algum intervalo, então

$$0 \equiv \lambda'(t) = -2(x - t^2) \equiv x(t) = t^2,$$

então nesse intervalo  $u = x' = 2t$ . Consequentemente,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{quando } \lambda > 0, \\ 2t & \text{quando } \lambda = 0, \\ 4 & \text{quando } \lambda < 0. \end{cases}$$

Vamos provar que  $x^*(t) \geq t^2$  no intervalo  $[0, 2]$  na Proposição 12.2.1. Com isso demonstrado, temos que  $\lambda' \leq 0$  em  $[0, 2]$ . Como  $\lambda(2) = 0$ , devemos ter que  $\lambda \geq 0$  em  $[0, 2]$ . Portanto existe  $k \in [0, 2]$  tal que  $\lambda > 0$  em  $[0, k)$  e  $\lambda = 0$  em  $[k, 2]$ .

Suponha que  $k = 0$ . Então  $\lambda \equiv \lambda' \equiv 0$ . Mas  $x^*(0) > 0^2$ , então  $\lambda'(0) < 0$ , contradição.

Suponha que  $k = 2$ . Então  $u^* \equiv 0 \implies x^* \equiv 1$ . Isso contradiz  $x^*(2) \geq 2^2$ . Portanto  $0 < k < 2$  e

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < k, \\ 2t & \text{se } k < t \leq 2, \end{cases} \quad x^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < k, \\ t^2 + (1 - k^2) & \text{se } k \leq t < 2, \end{cases} \quad (12.1)$$

dado que  $x^*$  é contínua. Precisamos encontrar  $k$ .

Note que  $\lambda \equiv 0$  em  $[k, 2]$ . Assim, nesse intervalo,

$$0 = \lambda'(t) = -2(1 - k^2) \implies k = 1.$$

**Proposição 12.2.1.**

$$x^*(t) \geq t^2, \forall t \in [0, 2]$$

*Demonstração.* Suponha que  $x(t) < t^2$  para algum  $t$ . Como  $x(t) > t^2$  em  $t = 0$ , existe  $t_0 \in (0, 2)$  tal que  $x(t_0) \leq t_0^2$  e  $u(t_0) = x'(t_0) < 2t_0$ . Portanto  $u(t_0) = 0$  e  $\lambda(t_0) > 0$ .

Seja  $t_1 := \inf\{t : \lambda(t) = 0, t \in (t_0, 2]\}$ . Como esse conjunto é fechado (tome uma sequência nele e veja que o limite dela precisa estar nela), o valor de  $t_1$  pertence a ele, isto é,  $\lambda(t_1) = 0, t_1 > t_0$ . Portanto  $\lambda(t) > 0$  em  $[t_0, t_1)$ . Portanto  $u^*(t) = 0, t \in [t_0, t_1)$ . Assim  $x'(t) = x^*(t), t \in [t_0, t_1)$ . Como  $x^*(t_0) \leq t_0^2$ , então  $x^*(t) \leq t^2$ . Pela equação adjunta,  $\lambda'(t) \geq 0$  em  $[t_0, t_1)$ . Mas se  $\lambda(t_0) > 0, \lambda(t_1) = 0$  é impossível. Com essa contradição concluímos que  $x^*(t) \geq t^2, t \in [0, 2]$ .  $\square$

Se não fôssemos capazes de encontrar os intervalos onde  $u$  é definido, precisaríamos utilizar um método numérico sobre 12.1. Porém, numericamente, não é possível obter  $\lambda = 0$ . Para isso, poderíamos considerar que  $u^*(t) = 2t$  quanto  $|\lambda| < \epsilon = 0.00001$ , por exemplo. Entretanto, problemas singulares tendem a ser instáveis de forma geral.

Pesquisadores a partir de comportamentos de controles ótimos singulares, desenvolveram condições necessárias adicionais. A mais notável é a condição generalizada de Legendre-Clebsch (Tsykin (1970), Grossmann (1984), Krener (1977)). É uma condição de *segunda ordem* e envolve derivadas de ordem mais alta do Hamiltoniano.

**Exemplo 12.2.2.** Reservar marinhas proibidas são tema de discussão entre aqueles que enfatizam os benefícios de conservação e aqueles que enfatizam a redução da produção pesqueira. Neubert investigou o papel dessas reservas para maximizar o rendimento segundo uma estratégia de caça.

A equação diferencial parcial da densidade de estoque relativa a capacidade de carga  $w(x, t)$  é

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + w(x, t)(1 - w(x, t)) - u(x)w(x, t),$$

Suponha que a densidade é estável no tempo. Assim,

$$0 = w''(x) + w(x)(1 - w(x)) - u(x)w(x),$$

tal que  $w(0) = w(l) = 0$ , isto é, as regiões de fronteira são inabitadas. Assumimos que  $0 \leq u(x) \leq 1$  é o controle de colheita.

Primeiro convertamos a equação em um sistema de primeira ordem:

$$\begin{aligned} w'(x) &= v(x), w(0) = w(l) = 0, \\ v'(x) &= u(x)w(x) - w(x)(1 - w(x)), \end{aligned}$$

Queremos maximizar o retorno em  $[0, l]$ .

$$J(u) = \int_0^l u(x)w(x)dx$$

Vamos ter a restrição adicional que  $w(x) > 0$  no interior do domínio.

Primeiro vamos encontrar as condições necessárias do problema.

$$\begin{aligned} H &= uw + \lambda_1 v + \lambda_2(uw - w(1 - w)), \\ \lambda'_1 &= -H_w = -u - \lambda_2(u - 1 + 2w), \\ \lambda'_2 &= -H_v = -\lambda_1, \lambda_2(0) = \lambda_2(l) = 0, \\ \psi &= H_u = w(1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

Se  $\psi \equiv 0$  em algum intervalo, temos que  $\lambda_2 \equiv -1 \implies \lambda'_2 = 0 \implies \lambda_1 = 0$  nesse intervalo. Assim

$$-u + u - 1 + 2w = 0 \implies w^* = \frac{1}{2}$$

Assim  $w' = v = v' = 0 = u^* - (1 - w^*)$  e  $u^* = \frac{1}{2}$ . Concluimos que

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda_2 > -1, \\ 1/2 & \text{se } \lambda_2 = -1, \\ 0 & \text{se } \lambda_2 < -1 \end{cases} \quad (12.2)$$

As condições necessárias devem ser resolvidas numericamente. A partir de resultados numéricos, existe pelo menos um intervalo onde o controle ótimo é zero, o que significa uma região marítima proibida.

## Capítulo 13

# Problemas com Tempo Final Livre

Em alguns problemas reais, não temos um tempo fixo para procurar um controle ótimo, mas também queremos encontrar o tempo ótimo que devemos permanecer com o tratamento. Precisamos refazer as condições necessárias, dada que temos mais variáveis desconhecidas.

### 13.1 Condições Necessárias

Sejam  $f$  e  $g$  funções continuamente diferenciáveis e considere o problema

$$\max_{u, T} J(u, T) = \max_{u, T} \int_{t_0}^T f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(T, x(T))$$

sujeito a  $x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$ .

Seja  $(u^*, T^*)$  um par ótimo, de forma que  $u^*$  esteja definida em  $[t_0, T^*]$  e  $J(u, T) \leq J(u^*, T^*) < \infty$ , para todos os controles  $u$  e tempos  $T$ . Seja  $x^*$  o estado correspondente. Seja  $h$  uma função contínua por partes e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , de forma que  $u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t)$  é um controle. Assim

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^*, T^*) - J(u^\epsilon, T^*)}{\epsilon}.$$

Pelo mesmo argumento dos Capítulos 3 e 5, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= H_u \text{ em } u^* \\ \lambda' &= -H_x = -f_x - \lambda g_x \\ \lambda(T^*) &= \phi_x(T^*, x(T^*)), \end{aligned}$$

Mas isso não nos dá informação sobre  $T^*$ . Por isso, seja  $\delta \leq t_0 - T^*$ , tal que  $T^* + \delta$  seja um tempo admissível. Primeiro, assumamos que  $u^*$  é contínua

à esquerda em  $T^*$ . Se não o for, mude seu valor nesse ponto se necessário. Então, seja  $u^*(t) = u^*(T)$ ,  $t > T^*$ . Portanto,

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^*, T^* + \delta) - J(u^*, T^*)}{\delta}.$$

equivalentemente, dado que  $u^*$  é contínua em  $T^*$  e  $x^*$  é diferenciável, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra do produto, temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{T^*}^{T^* + \delta} f(t, x^*, u^*) dt \\ &\quad + \frac{\phi(T^* + \delta, x^*(T^* + \delta)) - \phi(T^*, x^*(T^*))}{\delta} \\ &= f(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*)) + \phi_t(T^*, x^*(T^*)) + \phi_x(T^*, x^*(T^*)) \frac{dx^*}{dt}(T^*) \\ &= f(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*)) + \phi_t(T^*, x^*(T^*)) + \lambda(T^*) g(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*)) \\ &= H(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*)) + \phi_t(T^*, x^*(T^*)) \end{aligned}$$

Deveria ficar claro que as mesmas condições necessárias vem com a presença de limites nos controles, ou quando existem mais de uma variável de estado e controle. O que não fica claro, observando as contas já feitas no Capítulo 5, é como esse problema é afetado quando os pontos inicial e final são fixados. De fato, as mesmas condições necessárias aparecem.

## 13.2 Controle Ótimo Temporal

A ideia é a seguinte: mover as variáveis de estado de uma posição inicial para uma posição final específica em um período mínimo de tempo. Como isso parece se relacionar com nosso problema? Note que  $T = \int_0^T 1 dt$ . Então, podemos reformular como

$$\begin{aligned} &\min_{u, T} \int_0^T 1 dt, \\ &\text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, x(T) = x_1, \\ &\quad a \leq u(t) \leq b, \end{aligned}$$

## 13.3 Exemplos

### Exemplo 13.3.1.

$$\begin{aligned} &\min_{u, T} x(T) + \int_0^T u(t)^2 dt \\ &\text{sujeito a } x'(t) = \alpha x(t) - u(t), x(0) = x_0, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Podemos formar as condições necessárias

$$\begin{aligned} H &= u^2 + \alpha x \lambda - u \lambda, \\ 0 &= H_u = 2u - \lambda \implies u^* = \lambda/2, \\ \lambda' &= -H_x = -\alpha \lambda \implies \lambda(t) = K e^{-\alpha t} \lambda(T^*) = \phi_x(x^*(T^*)) = 1, \end{aligned}$$

Usando essas condições, concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= e^{\alpha(T^*-t)} \\ u^*(t) &= \frac{1}{2} e^{\alpha(T^*-t)} \\ x^*(t) &= x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha T^*} \frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{4\alpha} \end{aligned}$$

Por fim, a condição sobre  $T^*$ , dado que  $\phi_t = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= H(T^*, x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*)) \\ &= \frac{1}{4} + \alpha x_0 e^{\alpha T^*} + \frac{1 - e^{2\alpha T^*}}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \alpha x_0 e^{\alpha T^*} - \frac{e^{2\alpha T^*}}{4} \end{aligned}$$

Assim  $\log(4\alpha x_0) + \alpha T^* = 2\alpha T^* \implies T^* = \frac{1}{\alpha} \log 4\alpha x_0$ . Isso faz sentido se  $\alpha x_0 > 1/4$ .

### Exemplo 13.3.2.

$$\begin{aligned} &\min_{u, T} \int_0^T 1 dt \\ &\text{sujeito a } x'(t) = x(t)u(t) - \frac{1}{2}u(t)^2, x(0) = x_0 \in (0, 1), x(T) = 1. \end{aligned}$$

Escrevemos o Hamiltoniano  $H = 1 + xu\lambda - \frac{1}{2}u^2\lambda$ . Assim, escrevemos as condições necessárias,

$$\lambda' = -H_x = -\lambda u \implies \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t u(s)ds\right),$$

para alguma constante  $C$ . Se  $C = 0 \implies H \equiv 1$  o que contradiz o Hamiltoniano ser 0 em  $T^*$ . Portanto  $C \neq 0$ . A condição de otimalidade nos dá que

$$0 = H_u = \lambda(x - u) \implies u^* = x^*$$

Fazendo a substituição na equação de estado, obtemos que

$$x' = \frac{1}{2}x^2 \implies x^*(t) = \frac{2x_0}{2 - x_0 t} = u^*(t)$$

A condição  $x(T^*) = 1 \implies T^* = 2/x_0 - 2$ .

## Capítulo 14

# Forward-Backward Sweep Adaptado

Esse método pode lidar com problemas mais complicados de controle ótimo. Esse capítulo tem associado o notebook `Chapter21-examples.ipynb`.

### 14.1 Método da Secante

Um algoritmo de análise numérica para encontrar as raízes de uma função contínua  $f$  em  $[a, b]$  de forma que exista uma raiz no intervalo. Sejam os pontos  $x_0, x_1 \in [a, b]$  de forma que  $f(x_0)f(x_1) < 0$ . Considere a reta que passa pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$ . A sua equação é dada por

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ela cruza o eixo  $x$  quando  $y = 0$  e, portanto,

$$x = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Essa expressão determina nossa iteração para o método, isto é,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

A convergência é dada quando  $x_0$  e  $x_1$  são suficientemente próximas da raiz,  $f$  seja de classe  $C^2$  e a raiz seja simples.

### 14.2 Um Estado com Pontos Finais Fixos

Considere o problema de controle ótimo



$$\begin{aligned} & \max_{\vec{u}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt \\ & \text{sujeito a } \vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, x_n(t_1) = x_{n1}, \\ & a_j \leq u_j(t) \leq b_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Observe que  $x_n$  é o único estado com os pontos inicial e final fixos. Nossos métodos numéricos não podem lidar com esse problema e por isso, precisamos desenvolver uma maneira. Suponha que fazemos um chute  $\lambda_n(t_1) = \theta$ . resolvemos o problema com essa condição. Assumindo convergência, vamos obter uma aproximação  $\tilde{x}_{n1}$ . Podemos considerar  $\theta \mapsto \tilde{x}_{n1}$  e, assim, nosso problema se torna em encontrar  $\theta$  que nos leve a  $x_{n1}$ . Assim, defina

$$V(\theta) = \tilde{x}_{n1} - x_{n1}$$

Estamos procurando os zeros de  $V$ . Assim, adaptaremos o código *forward-backward sweep* com o código do método da secante.

Esse método é baseado em duas hipóteses críticas: *forward backward sweep* converge para os valores de  $\theta$  e  $V$  é uma função bem definida. Para problemas bem comportados, em geral, ambos são verdadeiros. A escolha de  $x_0$  e  $x_1$  também podem ser mais ou menos importantes dependendo do problema.

### 14.3 Termos de Payoff não Lineares

Uma alteração sutil do método acima pode ser usado para resolver problemas de controle ótimo com termos *payoff* não lineares. Considere o problema

$$\begin{aligned} & \max_{\vec{u}} \phi(x_n(t_1)) \int_{t_0}^{t_1} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt \\ & \text{sujeito a } \vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \\ & a_j \leq u_j(t) \leq b_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Se  $\phi$  é linear, isto é,  $\phi' \equiv c$ , o método anterior pode ser usado. Entretanto, para outras funções  $\phi$ ,  $\lambda_n(t_1)$  dependerá de  $x_n^*(t_1)$ . Nesses casos, o método *forward-backward sweep* não pode ser usado, mas a versão adaptada pode.

Como antes, fazemos um chute para  $\lambda_n(t_1) = \theta$ . Então usamos o método padrão para resolver o problema. Isso nos dará o valor para o  $n$ -ésimo estado em  $t_1$ , escrito  $\tilde{x}_{n1}$ . Queremos que  $\phi'(\tilde{x}_{n1}) = \theta$ . Então definimos

$$V(\theta) = \phi'(\tilde{x}_{n1}) - \theta$$

Então o problema se torna encontrar as raízes da função  $V$ .

## 14.4 Tempo Final Livre

Por fim, vamos aplicar o método para problemas não autônomos que tem tempo final livre. Considere o problema

$$\begin{aligned} & \max_{\vec{u}} \int_{t_0}^{t_1} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt \\ & \text{sujeito a } \vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \\ & a_j \leq u_j(t) \leq b_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Agora, façamos um chute para  $T^* = \theta > t_0$ . Resolvemos novamente o problema com esse valor de  $T^*$  e calculamos a estimativa do Hamiltoniano no tempo final, que podemos denotar por  $\tilde{H}(\theta)$ . Se considerarmos a função  $V(\theta) = \tilde{H}(\theta)$ . Como queremos que  $H(T^*) = 0$ , podemos usar o método secante para procurar os zeros de  $V$ . Note que o problema deve ser não autônomo, pois, se não o fosse, o Hamiltoniano seria 0 para todo  $t$ .

## 14.5 Shots Múltiplos

Até o momento, utilizamos o método adaptado para problemas com particularidades individuais, mas não expandimos para combinações delas. Isso pode ser feito empregando o método várias vezes, ou fazendo o que chamamos de *shots múltiplos*.

Quando temos um problema com duas dessas restrições até então mencionadas, nós colocamos de lado uma delas e faz um chute apropriado. Assim, reduzimos o problema para apenas uma restrição e resolvemos como fizemos até então. Assim conseguimos, utilizando duas vezes o método, resolver o problema. Tendo três elementos, podemos reduzir para dois elementos e assim por diante. Dessa forma, conseguimos resolver problemas desse tipo. Como forma de exemplo, vamos analisar um problema com dois estados, ambos com pontos finais fixados. Considere

$$\begin{aligned} & \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t), u(t)) dt \\ & \text{sujeito a } x_1'(t) = g_1(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_1(t_0) = x_{10}, x_1(t_1) = x_{11}, \\ & x_2'(t) = g_2(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_2(t_0) = x_{20}, x_2(t_1) = x_{21} \end{aligned}$$

Suponha que cheguemos no seguinte sistema

$$\begin{aligned}
x'_1(t) &= g_1(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_1(t_0) = x_{10}, x_1(t_1) = x_{11}, \\
x'_2(t) &= g_2(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_2(t_0) = x_{20}, x_2(t_1) = x_{21}, \\
\lambda'_1(t) &= h_1(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t)), \\
\lambda'_2(t) &= h_2(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t)), \\
u(t) &= k(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)).
\end{aligned}$$

Ponha  $\lambda_1(t_1) = \theta_1$  e ignore  $x_1(t_1) = x_{11}$ . Então teremos

$$\begin{aligned}
x'_1(t) &= g_1(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_1(t_0) = x_{10}, \\
x'_2(t) &= g_2(t, x_1(t), x_2(t), u(t)), x_2(t_0) = x_{20}, x_2(t_1) = x_{21}, \\
\lambda'_1(t) &= h_1(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t)), \lambda_1(t_1) = \theta_1 \\
\lambda'_2(t) &= h_2(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), u(t)), \\
u(t) &= k(t, x_1(t), x_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)).
\end{aligned}$$

Com o sistema acima, podemos resolver o problema com o método estudado no capítulo. Até encontrarmos  $\theta_2$  de forma que  $x_2(t_1) = x_{21}$ . Fazemos isso para vários valores de  $\theta_1$ . Para cada valor de  $\theta_1$ , obtemos uma estimativa para  $x_1(t_1)$ . Assim, encontramos, através de um método para encontrar raízes, encontramos  $\theta_1$  de forma que  $x_1(t_1) = x_{11}$ .

## Capítulo 15

# Laboratórios 11, 12 e 13

Nesse capítulo serão realizados os laboratórios 11, 12 e 13. Mais algumas aplicações em biologia são desenvolvidas.

### Lab 11: Extração de Madeira

Uma fazenda de extração de madeira é considerada e produz madeira. Essa quantidade de madeira é vendida para o mercado que paga um valor. Esse valor pode ser reinvestido na fazenda em terras e trabalho ou pode ser dado como lucro e, então, investido com uma taxa de juros. A decisão do fazendeiro é o quanto reinvestir e quando reinvestir do dinheiro ganhado. Esse é um problema Bang Bang em que se utiliza o algoritmo *Forward-Backward Sweep* desenvolvido até então.

### Lab 12: Reator Biológico

Algumas bactérias são capazes de degradar o contaminante em solos contaminados. Um método para limpar essas áreas é, portanto, favorecer o aumento do nível de bactérias através da injeção de nutrientes necessárias para o metabolismo e crescimento da colônia. Nesse laboratório vamos abordar uma simplificação desse problema em um sistema controlado, como um reator biológico.

### Lab 13: Modelo Predador Presa

Modelo simples com predador e presa com uma restrição isoperimétrica. Queremos estudar a situação onde a presa é uma peste que deve ser combatida por um pesticida, que servirá de controle. Mas esse pesticida também afeta o predador, o qual não queremos que aconteça. Esse modelo permite o estudo do método estudado no capítulo 14.

# Bibliografia

- D. Cohen. Maximizing final yield when growth is limited by time or by limiting resources. *Journal of Theoretical Biology*, 33(2):299 – 307, 1971. ISSN 0022-5193. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(71\)90068-3](https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90068-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519371900683>.
- A. Filippov. On certain questions in the theory of optimal control. *Journal of The Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1, 01 1962. doi: 10.1137/0301006.
- C. H. Grossmann. Cesari, I., optimization — theory and applications. problems with ordinary differential equations. berlin-heidelberg-new york, springer-verlag 1983. xiv, 542 s., 82 abb., dm 178,-. us \$ 76.80. isbn 3-540-90676-2 (applications of mathematics 17). *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 64(12):542–542, 1984. doi: <https://doi.org/10.1002/zamm.19840641215>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.19840641215>.
- W. Hackbusch. A numerical method for solving parabolic equations with opposite orientations. *Computing*, 20:229–240, 08 1978. doi: 10.1007/BF02251947.
- M. Kamien and N. Schwartz. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN 9780486488561. URL <https://books.google.com.br/books?id=0IoGUn8wjDQC>.
- M. Kot. *Elements of Mathematical Ecology*. Elements of Mathematical Ecology. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521001502. URL [https://books.google.sm/books?id=7\\_IRlnNON7oC](https://books.google.sm/books?id=7_IRlnNON7oC).
- A. J. Krener. The high order maximal principle and its application to singular extremals. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15 (2):256–293, 1977. doi: <https://doi.org/10.1137/0315019>. URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0315019?mobileUi=0>.

- S. Lenhart and J. Workman. Optimal control applied to biological models. 01 2007.
- Y. Tsypkin. Applied optimal control: Optimization, estimation, and control: Arthur e. bryson, jr. and yu-chi ho: Blaisdell publishing company (a division of ginn and company), waltham, mass. (1969), 481 pp. *Automatica*, 6, 1970.