1 Analisi di un problema di controllo per flusso di Stokes

Osservazione 1. Quando nelle stime che seguono comparirà una costante c, la si intenderà dipendente solo dai dati, e non dal controllo q, dalle variabili di stato $\mathbf{u}, p$, né da loro variazioni e nemmeno dai parametri di discretizzazione σ, h. Ciò varrà anche dove vi sia un utilizzo della disuguaglianza di Poincaré, dal momento che le costanti relative a ciascun Ω_q sono tutte controllate da quella relativa a quel dominio $\hat{\Omega}$ che li contiene tutti.

1.1 Definizione del problema

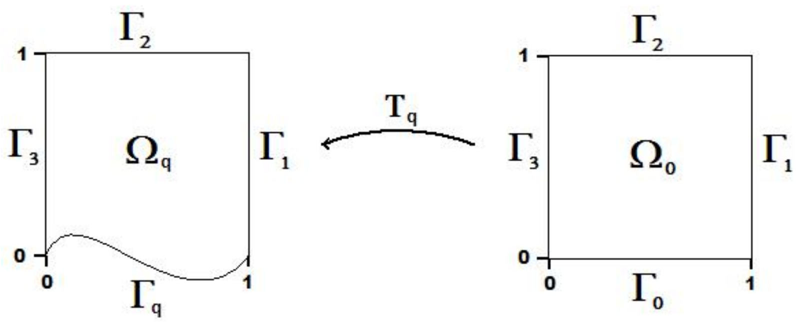

Figura 1: Dominio fisico e dominio di riferimento

Siano $q : I = (0,1) \to \mathbb{R}$, $\Omega_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \ , \ y \in (q(x), 1)\}$ e partizioniamo il bordo di Ω_q come indicato in Figura 1: $\partial\Omega_q = \Gamma_q \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.
Per evitare domini degeneri, fissiamo a priori $\varepsilon \in (0,1)$ e definiamo come insieme dei controlli $\overline{Q}^{ad} = \{q \in H^2(I) \cap H_0^1(I) \mid q(x) \leq 1 - \varepsilon \ \forall x \in I\}$.
Consideriamo il problema di Stokes in $\mathbf{u} = (u, v)$ e p

$$\begin{cases} \eta\mathbf{u} - div(\nu\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & in\ \Omega_q \\ div\ \mathbf{u} = 0 & in\ \Omega_q \\ \mathbf{u} = 0 & su\ \Gamma_q \\ \nu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} = \mathbf{g}_N & su\ \Gamma_1 \\ \partial_{\mathbf{n}}u = 0, \quad v = 0 & su\ \Gamma_2 \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_D & su\ \Gamma_3 \end{cases} \tag{1}$$

dove i dati $\eta, \nu, \mathbf{f}$ siano definiti su $\hat{\Omega} : \Omega_q \subseteq \hat{\Omega} \quad \forall q \in \overline{Q}^{ad}$.
Definendo $\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{g}_D$ come un rilevamento continuo di $\mathbf{g}_D$ su Ω_q e gli spazi

$$\widetilde{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_q)]^2 \colon \mathbf{v} = (v_x, v_y) = \mathbf{0} \text{ su } \Gamma_3 \cup \Gamma_q \text{ e } v_y = 0 \text{ su } \Gamma_2\}$$
$$\widetilde{P} = L^2(\Omega_q)$$

la formulazione debole del problema è

$$
\begin{gathered}
\text{Trovare } \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{g}_D \ , \ \hat{\mathbf{u}} \in V = [H^1_{\Gamma_3}(\Omega_q)]^2 \text{ e } p \in P = L^2(\Omega_q) \text{ tali che} \\
\begin{cases} a_q(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b_q(\mathbf{v}, p) = F_q(\mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in [H^1_{\Gamma_3}(\Omega_q)]^2 \\ b_q(\hat{\mathbf{u}}, \pi) = -b_q(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{g}_D, \pi) & \forall\ \pi \in L^2(\Omega_q) \end{cases} \\
\text{dove } a_q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_q} \eta \mathbf{u}\mathbf{v} + \nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\
b_q(\mathbf{v}, \pi) = -\int_{\Omega_q} \pi \ div\ \mathbf{v} \\
F_q(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_q} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - a_q(\widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{g}_D, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v}\, d\Gamma
\end{gathered} \tag{2}
$$

Affinché questo problema sia ben posto sono necessarie alcune condizioni sui dati, che qui riportiamo:[1]

- $\nu(x,y) \geq \nu_0 > 0 \ \ \forall (x,y) \in \hat{\Omega}$ per assicurare la coercività di a_q
- $\nu, \eta \in L^\infty(\hat{\Omega})$ per avere la continuità di a_q (quella di b_q non necessita di richieste sui dati)
- $\mathbf{f}^q \in H^{-1}(\hat{\Omega})$, $\mathbf{g}_D \in H^{1/2}(\Gamma_3)$, $\mathbf{g}_N \in L^2(\Gamma_1)$ per la continuità del funzionale a termine noto

Queste condizioni garantiscono anche, attraverso le classiche stime di stabilità, che $\|(\mathbf{u}, p)\|_{[H^1_0(\Omega_q)]^2 \times L^2(\Omega_q)}$ sia limitata da una costante dipendente dai dati, uniformemente rispetto a q. Inoltre permettono che sia ben definito l'operatore soluzione $\widetilde{S}(q)$, che associa ad ogni $q \in \overline{Q}^{ad}$ la corrispondente soluzione $(\mathbf{u}, p) = \widetilde{S}(q)$ del problema di stato.

Definito il problema di stato (1), fissiamo due costanti $\alpha, \beta > 0$ per penalizzare rispettivamente la derivata seconda di q e il vincolo di volume costante sotteso a q. Il problema di ottimizzazione di forma che vogliamo affrontare è il seguente:

$$
\begin{gathered}
\text{Minimizzare } J(q, \mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_q} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{\alpha}{2} \|q''\|^2_{L^2(I)} + \frac{\beta}{2} \left(\int_I q(x) dx - \overline{V} \right)^2 \\
\text{soggetto al vincolo (1)}
\end{gathered} \tag{3}
$$

Utilizzando l'operatore soluzione appena introdotto, possiamo considerare anche il funzionale di costo ridotto $j : \overline{Q}^{ad} \to \mathbb{R} : q \mapsto j(q) = J(q, \widetilde{S}(q))$.

Considerando $q_0 \equiv 0 \in \overline{Q}^{ad}$, possiamo affermare che una condizione necessaria affinché una $q \in \overline{Q}^{ad}$ sia soluzione ottima del problema è che sia $j(q) \leq j(q_0)$, il che implica

$$
\|q''\|^2_{L^2(I)} \leq \frac{2}{\alpha} \left[j(q_0) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_q} |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{\alpha}{2} \|q''\|_{L^2(I)} - \frac{\beta}{2} \left(\int_I q(x) dx - \overline{V} \right)^2 \right] \leq \frac{2}{\alpha} j(q_0)
$$

Poiché in $H^2(I) \cap H^1_0(I)$ la seminorma $H^2(I)$ è equivalente alla norma completa (Lemma 1.2 [KV]), ne risulta che possiamo considerare come insieme dei controlli ammissibili anche solo il sottoinsieme di $\overline{Q}^{ad}$ definito come

$$
Q^{ad} = \{ q \in \overline{Q}^{ad} \mid \|q\|_{H^2(I)} \leq C = \frac{2}{\alpha} j(q_0) \}
$$

[1] A q fissato, basterebbe che le condizioni fossero verificate relativamente ad Ω_q, ma per non dover dipendere dal controllo, consideriamo $\hat{\Omega}$.

Per gli studi di regolarità, richiediamo anche che

$$\exists d_1, d_2 > 0 \text{ tali che } \|q''\|_{L^\infty(I)} \leq d_1,\ |q'(0)| \leq d_2 \tag{4}$$

1.2 Esistenza

Per mostrare l'esistenza di una soluzione del problema (3), cominciamo con l'osservare che

$$J(q, \mathbf{u}, p) \geq 0,\ Q^{ad} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} :\ \overline{j} := \inf_{q\in Q^{ad}} j(q) = \lim_{n\in\mathbb{N}} j(q_n)$$

La limitatezza di Q^{ad} garantisce che, a meno di sottosuccessioni, $q_n \rightharpoonup \overline{q}$ in $H^2(I)$; inoltre, dal momento che Q^{ad} è anche convesso e chiuso, $\overline{q} \in Q^{ad}$.
La dimostrazione del Teorema 2.1 [GKM00], poi, a partire dall'uniforme limitatezza di $\widetilde{S}(q_n)$ in $[H^1(\hat{\Omega})]^2 \times L^2(\hat{\Omega})$, ci assicura che $\widetilde{S}(q_n)$ converga debolmente ad una coppia $(\overline{\mathbf{u}}, \overline{p})$ che sia proprio $\widetilde{S}(\overline{q})$.
Per poter passare al limite nel funzionale, poiché la successione è minimizzante, è sufficiente che $J(q, \mathbf{u}, p)$ sia debolmente semicontinuo inferiormente su $H^2(I) \times [H_0^1(\Omega_q)]^2 \times L^2(\Omega_q)$: ciò è garantito dalla debole semicontinuità inferiore delle norme, dal Teorema 1.2 [GKM00] e dal Teorema della Convergenza Dominata (quest'ultimo per passare al limite nel termine di penalizzazione del volume).

1.3 Trasformazione da Ω_q a Ω_0

Consideriamo come dominio di rifermento $\Omega_0 = (0,1)^2$, che corrisponde a prendere $q \equiv 0$: è così possibile definire una mappa

$$T_q : \Omega_0 \to \Omega_q : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + (1-y)q(x) \end{pmatrix}$$

Per le espressioni delle altre grandezze legate a questa mappa ($V_q = T_q - \mathbb{1}, DT_q, \gamma_q = det(DT_q), A_q = \gamma_q DT_q^{-1} DT_q^{-T}$) si vedano le definizioni a pagina 6 di [KV].

<u>NB</u> Indichiamo con apice $\cdot^q$ la composizione con la mappa T_q, mentre, qualora non vi siano dubbi sulla q utilizzata, indichiamo con $\widetilde{\cdot}$ la composizione con T_q^{-1}; in altre parole, data una qualsiasi $\varphi : \Omega_q \to \mathbb{R}$, definiamo $\varphi^q = \varphi \circ T_q : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, mentre sarà ad esempio $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \circ T_q^{-1}$ quando $\mathbf{u}$ sarà la soluzione del problema trasformato.
Inoltre, con $(\cdot,\cdot)$ intendiamo il prodotto scalare in $[L^2(\Omega_0)]^d$ (con d che si può evincere dal contesto) e con $(\cdot,\cdot)_I$ e $(\cdot,\cdot)_{\Omega_q}$ rispettivamente quello in $L^2(I)$ e quello in $L^2(\Omega_q)$.

Possiamo dunque trasformare il nostro problema variazionale di partenza utilizzando spazi che non dipendono più da q, in quanto definiti su Ω_0:[2]

[2]Nel caso *fully Dirichlet* la dipendenza da q rimane comunque, in quanto nella formulazione iniziale bisogna utilizzare $L_0^2(\Omega_q)$, che nella trasformata diventa $L^2_{\gamma_q^2}(\Omega_0)$, ossia il complemento ortogonale di $span\{\gamma_q^2\}$ in $L^2(\Omega_0)$.

$$\begin{aligned}
&\text{Trovare } (\mathbf{u},p) \in V \times P, \text{ tale che}\\
&\begin{cases} a(q)(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(q)(\mathbf{v},p) = F(q)(\mathbf{v}) & \forall\, \mathbf{v} \in V \\ b(q)(\mathbf{u},\pi) = G(q)(\pi) & \forall\, \pi \in P \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dove } a(q)(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \eta^q \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\gamma_q + \nu^q\, tr(\nabla\mathbf{u}A_q\nabla\mathbf{v}^T)\\
b(q)(\mathbf{v},\pi) &= -\int_{\Omega_0} \pi\; tr(\nabla\mathbf{v}DT_q^{-1})\gamma_q\\
F(q)(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\;\gamma_q - a(q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D,\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_N\cdot\mathbf{v}\, d\Gamma\\
G(q)(\pi) &= -b(q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D,\mathbf{v})\\
V &= \{\mathbf{v}\in[H^1(\Omega_0)]^2 \colon \mathbf{v}=(v_x,v_y)=\mathbf{0} \text{ su } \Gamma_3\cup\Gamma_0 \text{ e } v_y = 0 \text{ su } \Gamma_2\}\\
P &= L^2(\Omega_0)
\end{aligned} \tag{5}$$

Risulterà utile anche la definizione del seguente spazio (il corrispettivo discreto sarà analogo):

$$V_{b(q)} = \{\mathbf{v}\in V\colon b(q)(\mathbf{v},\pi) = 0 \quad \forall q\in Q^{ad}\}$$

Osservazione 2 (Rilevamento). Con $\mathcal{R}\mathbf{g}_D$ indichiamo un rilevamento continuo del dato di Dirichlet sul dominio Ω_0. Notiamo che non è necessario trasformare $\mathbf{g}_D$ per riportarlo nel dominio di riferimento, dal momento che è definito sul bordo Γ_3, su cui la mappa T_q è uguale all'identità. Ovviamente, a priori $\mathcal{R}\mathbf{g}_D \neq \widetilde{\mathcal{R}}\mathbf{g}_D\circ T_q$, ma ciò non importa, in quanto non utilizzeremo mai la forma del rilevamento.

Per la buona positura del problema possiamo rifarci ancora alla teoria dei problemi di punto-sella ed affermare che sono sufficienti le richieste fatte per il problema non trasformato, dal momento che A_q è in $[L^\infty(\Omega_0)]^{2\times 2}$, simmetrica, definita positiva e il minimo autovalore è limitato inferiormente da $\overline{\lambda} = 2\left(1+\frac{1+(d_1+d_2)^2}{\varepsilon}+\sqrt{\left(1+\frac{1+(d_1+d_2)^2}{\varepsilon}\right)^2-4}\right)^{-1}$: in effetti, il problema trasformato (5) è semplicemente una riscrittura del problema (2). Queste ipotesi si traducono nelle seguenti disuguaglianze, valide $\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega_0), \forall\pi\in L^2(\Omega_0)$

$$a(q)(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \nu_0\overline{\lambda}\|\nabla\mathbf{v}\|^2 =: \alpha_c\|\nabla\mathbf{v}\|^2 \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
|a(q)(\mathbf{u},\mathbf{v})| &\leq (\|\eta\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}\|\gamma_q\|_\infty + \|\nu\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}\|A_q\|_\infty)\|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\| \leq\\
&\leq (\|\eta\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}(1+d_1+d_2) + \|\nu\|_{L^\infty(\hat{\Omega})}\frac{1}{\overline{\lambda}})\|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\| =: M\|\nabla\mathbf{u}\|\|\nabla\mathbf{v}\|
\end{aligned} \tag{6b}$$

$$|b(q)(\mathbf{v},\pi)| \leq \|\gamma_q DT_q^{-T}\|_\infty\|\nabla\mathbf{v}\|\|\pi\| \leq (1+d_1+d_2)\|\nabla\mathbf{v}\|\|\pi\| =: M_b\|\nabla\mathbf{v}\|\|\pi\| \tag{6c}$$

$$\begin{aligned}
|F(q)(\mathbf{v})| &\leq \|\gamma_q\|_\infty\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\hat{\Omega})]^2}\|\mathbf{v}\| + Mc_{\mathcal{R}}\|\mathbf{g}_D\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)}\|\nabla\mathbf{v}\| + \|\mathbf{g}_N\|_{[H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2}c_{tr}\|\nabla\mathbf{v}\| \leq\\
&\leq [c_{\hat{\Omega}}(1+d_1+d_2)\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\hat{\Omega})]^2} + Mc_{\mathcal{R}}\|\mathbf{g}_D\|_{H^{1/2}(\Gamma_3)} + \|\mathbf{g}_N\|_{[H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2}c_{tr}]\|\nabla\mathbf{v}\| =\\
&=: M_F\|\nabla\mathbf{v}\|
\end{aligned} \tag{6d}$$

$$|G(q)(\pi)| \leq M_b c_{\mathcal{R}}\|\mathbf{g}_D\|_{[H^{1/2}(\Gamma_3)]^2}\|\pi\| \tag{6e}$$

Risulta così definito l'operatore $S: Q^{ad}\to V\times P$, che ad ogni $q\in Q^{ad}$ associa la soluzione $(\mathbf{u},p) = S(q)$ del problema (5).

Inoltre, possiamo ridefinire anche il funzionale di costo ridotto come $j(q) = J(q, S(q) \circ T_q^{-1})$.

Con le assunzioni sull'insieme dei controlli ammissibili fatte nel paragrafo 1.1, possiamo dimostrare un risultato utile:

Lemma 1.1. *Siano $k \in \{0, 1\}$ fissato, $\varphi \in H^k(\Omega_0)$ e $q \in Q^{ad}$. Si ha che*

$$\varphi \circ T_q^{-1} \in H^k(\Omega_q), \quad c_1 \|\varphi \circ T_q^{-1}\|_{H^k(\Omega_q)} \leq \|\varphi\|_{H^k(\Omega_0)} \leq c_2 \|\varphi \circ T_q^{-1}\|_{H^k(\Omega_q)}$$

Vale anche il viceversa, ossia $\widetilde{\varphi} \in H^k(\Omega_q) \Rightarrow \widetilde{\varphi} \circ T_q \in H^k(\Omega_0)$, con analoghe disuguaglianze. Se, inoltre, $q \in H^3(I)$, si ha un risultato analogo anche con $k = 2$.

2 Stime a priori dell'errore

Innanzitutto, riportiamo dei risultati di differenziabilità per l'operatore soluzione e il funzionale di costo ridotto, che ci saranno utili per le stime degli errori di discretizzazione.

Teorema 2.1. *L'operatore soluzione S è due volte continuamente differenziabile secondo Fréchet e le sue variazioni prima e seconda rispetto a $\delta q, \tau q \in Q^{ad}$ sono definite come segue:*

1. *$(\delta \mathbf{u}, \delta p) = S'(q)(\delta q) \in V \times P$ è soluzione del problema*

$$\begin{cases} a(q)(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(q)(\mathbf{v}, \delta p) = \dot{F}(q, \delta q)(\mathbf{v}) - \dot{a}(q, \delta q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{v}, p) & \forall\ \mathbf{v} \in V \\ b(q)(\delta \mathbf{u}, \pi) = \dot{G}(q, \delta q)(\pi) - \dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{u}, \pi) & \forall\ \pi \in P \end{cases} \tag{7}$$

2. *$(\tau\delta \mathbf{u}, \tau\delta p) = S''(q)(\delta q, \tau q) \in V \times P$ è soluzione del problema*

$$\begin{cases} a(q)(\tau\delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(q)(\mathbf{v}, \tau\delta p) = \\ \quad = \ddot{F}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{v}) - \ddot{a}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ddot{b}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{v}, p) + & \forall\ \mathbf{v} \in V \\ \quad - \dot{a}(q, \delta q)(\tau\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{v}, \tau p) - \dot{a}(q, \tau q)(\delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \dot{b}(q, \tau q)(\mathbf{v}, \delta p) & \\ b(q)(\tau\delta\mathbf{u}, \pi) = \ddot{G}(q, \delta q, \tau q)(\pi) - \ddot{b}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{u}, \pi) + & \forall\ \pi \in P \\ \quad - \dot{b}(q, \delta q)(\tau\mathbf{u}, \pi) - \dot{b}(q, \tau q)(\delta\mathbf{u}, \pi) & \end{cases} \tag{8}$$

   dove $(\tau\mathbf{u}, \tau p) = S'(q)(\tau q)$.

dove i punti indicano la derivazione secondo Fréchet operata sui soli coefficienti del funzionale o della forma, ossia:

$$\begin{aligned} \dot{F}(q, \delta q)(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} [\gamma'_{q,\delta q}\mathbf{f}^q \cdot \mathbf{v} + \gamma_q \nabla\mathbf{f}^q V_{\delta q} \cdot \mathbf{v}] - \dot{a}(q, \delta q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \mathbf{v}) \\ \dot{G}(q, \delta q)(\pi) &= -\dot{b}(q, \delta q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \pi) \\ \dot{a}(q, \delta q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \left(\gamma_q \nabla\eta^q \cdot V_{\delta q} + \eta^q \gamma'_{q,\delta q}\right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \\ &\quad + \nabla\nu^q \cdot V_{\delta q} tr(\nabla\mathbf{u} A_q \nabla\mathbf{v}^T) + \nu^q tr(\nabla\mathbf{u} A'_{q,\delta q} \nabla\mathbf{v}^T)] \\ \dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{v}, \pi) &= -\int_{\Omega_0} \pi \nabla\mathbf{v} \cdot cof(DV_{\delta q}) \\ \ddot{F}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} [\gamma''_{q,\delta q \tau q}\mathbf{f}^q \cdot \mathbf{v} + \gamma'_{q,\delta q}\nabla\mathbf{f}^q V_{\tau q} \cdot \mathbf{v} + \gamma'_{q,\tau q}\nabla\mathbf{f}^q V_{\delta q} \cdot \mathbf{v} + \\ &\quad + \gamma_q(\widetilde{\nabla^2}\mathbf{f}^q V_{\tau q} + \nabla\mathbf{f}^q DV_{\tau q}) V_{\delta q} \cdot \mathbf{v}] - \ddot{a}(q, \delta q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \mathbf{v}) \\ \ddot{G}(q, \delta q, \tau q)(\pi) &= -\ddot{b}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{v}, \pi) = 0 \\ \ddot{a}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \{[\gamma'_{q,\tau q}\nabla\eta^q \cdot V_{\delta q} + (\nabla^2\eta^q V_{\tau q} + DV_{\tau q}^T \nabla\eta^q) \cdot V_{\delta q}\gamma_q + \\ &\quad + \eta^q \gamma''_{q,\delta q,\tau q})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \gamma'_{q,\delta q}\nabla\eta^q \cdot V_{\tau q}]\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \\ &\quad + (\nabla^2\nu^q\, V_{\delta q} + DV_{\tau q}^T \nabla\nu^q) \cdot V_{\delta q}\, tr(\nabla\mathbf{u} A_q \nabla\mathbf{v}^T) + \\ &\quad + \nabla\nu^q \cdot V_{\delta q}\, tr(\nabla\mathbf{u} A'_{q,\tau q} \nabla\mathbf{v}^T) + \nu^q\, tr(\nabla\mathbf{u} A''_{q,\delta q,\tau q} \nabla\mathbf{v}^T) \\ &\quad + \nabla\nu^q \cdot V_{\tau q}\, tr(\nabla\mathbf{u} A'_{q,\delta q} \nabla\mathbf{v}^T)\} \\ \ddot{b}(q, \delta q, \tau q)(\mathbf{v}, \pi) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il teorema delle funzioni implicite nella formulazione del Teorema 3.3 di [KV], con $X = H^2(I) \cap H_0^1(I), Y = V \times P, Z = Y^*$, che sono tutti spazi Hilbert, $X^{ad} = int(Q^{ad}), F : X^{ad} \times Y \to Z : (q, \mathbf{u}, p) \mapsto \begin{pmatrix} a(q)(\mathbf{u}, \cdot) + b(q)(\cdot, p) - F(q)(\cdot) \\ b(q)(\mathbf{u}, \cdot) - G(q)(\cdot) \end{pmatrix}$.
Da un calcolo diretto delle derivate si trovano i problemi differenziali di cui nella tesi, la cui buona positura, discussa nella successiva Proposizione 2.2, permette di affermare la doppia differenziabilità dell'operatore S.
Si noti che il termine di bordo dovuto al dato di Neumann scompare: esso, infatti, non dipende da q. □

Dal teorema precedente segue che anche j è due volte Fréchet-differenziabile con continuità, con la seguente forma e le seguenti derivate (si noti che A_q e le sue derivate sono matrici simmetriche)

1. $j(q) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}\, A_q, \nabla \mathbf{u}) + \frac{\alpha}{2}\|q''\|_I^2 + \frac{\beta}{2}\left(\int_I q(x)dx \ - \ \overline{V}\right)^2$
2. $$j'(q)(\delta q) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u}) + (\nabla \delta \mathbf{u}\, A_q, \nabla \mathbf{u}) + \alpha(\delta q'', q'')_I + \\ + \beta\left(\int_I q(x)dx - \overline{V}\right)\int_I \delta q(x)dx$$
3. $$j''(q)(\delta q, \tau q) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}\, A''_{q,\delta q,\tau_q}, \nabla \mathbf{u}) + (\nabla \tau \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q} + \nabla \delta \mathbf{u}\, A'_{q,\tau q}, \nabla \mathbf{u}) + \\ + (\nabla \delta \mathbf{u}\, A_q, \nabla \tau \mathbf{u}) + (\nabla \tau \delta \mathbf{u}\, A_q, \nabla \mathbf{u}) + \\ + \alpha(\delta q'', \tau q'')_I + \beta \int_I \delta q(x)dx \int_I \tau q(x)dx$$

dove abbiamo utilizzato le abbreviazioni $\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \tau\mathbf{u}, \tau\delta\mathbf{u}$ come nel teorema precedente.

Osservazione 3. La mappa T_q scelta porta ad avere $\gamma'_{q,\delta q} = \gamma_{\delta q} = 1 - \delta q$ e dunque $\gamma''_{q,\delta q,\tau q} = 0$. Nelle espressioni precedenti, tuttavia, questi termini sono lasciati non esplicitati, affinché siano validi anche in seguito ad un cambio di mappa.

$$\eta^q, \nu^q \in W^{k,\infty}(\Omega_0) \quad \mathbf{f}^q \in [W^{k,\infty}(\Omega_0)]^2$$

Per concludere i risultati preliminari, nella seguente proposizione raccogliamo i risultati di continuità di tutti i termini forzanti, mostrando che le costanti di continuità non dipendono da $q, \delta q$ e dunque, in seguito, non dipenderanno dalla discretizzazione.

Proposizione 2.2. *Nell'ipotesi che i dati soddisfino i requisiti di regolarità*

$$\eta, \nu \in W^{1,\infty}(\hat{\Omega}), \quad \mathbf{f} \in [H^1(\hat{\Omega})]^2$$

si ha che $\forall\ q \in Q^{ad}, \delta q \in H^2(I) \cap H_0^1(I), \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \pi \in P$

$$\dot{a}(q, \delta q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \le \dot{M}\|\delta q\|_{H^2(I)}\|\nabla \mathbf{u}\|\|\nabla \mathbf{v}\| \tag{10a}$$
$$\dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{v}, \pi) \le c\|\delta q\|_{H^2(I)}\|\nabla \mathbf{v}\|\|\pi\| \tag{10b}$$
$$\dot{F}(q, \delta q)(\mathbf{v}) \le \left(c\|\mathbf{f}\|_{[H^1(\hat{\Omega})]^2}\|\delta q\|_{H^2(I)} + \dot{M}c\|\mathbf{g}_D\|_{[H^{1/2}(\Gamma_3)]^2}\right)\|\mathbf{v}\| \tag{10c}$$
$$\dot{G}(q, \delta q)(\pi) \le c\|\delta q\|_{H^2(I)}c_{\mathcal{R}}\|\mathbf{g}_D\|_{[H^{1/2}(\Gamma_3)]^2}\|\pi\| \tag{10d}$$

dove $\dot{M} = c_1\|\eta\|_{W^{1,\infty}} + c_2\|\nu\|_{W^{1,\infty}}$.
Analoghe stime si possono trovare per i funzionali e le forme con due punti, con un maggiorante che dipende quadraticamente da $\|\delta q\|_{H^2(I)}$*, purché siano*

$$\eta, \nu \in W^{2,\infty}(\hat{\Omega})$$

Osservazione 4. In realtà, la richiesta $\mathbf{f} \in [H^1(\hat{\Omega})]^2$ serve solo per le stime legate al problema (8): nel primo basterebbe avere $\mathbf{f} \in [L^2(\hat{\Omega})]^2$ e $\nabla\mathbf{f}$ sarebbe controllato in $[H^{-1}(\hat{\Omega})]^2$. Tuttavia, scegliamo di richiederlo fin da subito per semplicità, e anche perché per arrivare alle stime dell'errore finali ci serviranno le ipotesi della seconda parte della proposizione.

Con il classico risultato di stabilità per problemi di punto-sella, presentato nel Teorema 10.4 di [Qua08], si dimostra il seguente

Corollario 2.3. *Sotto le ipotesi della precedente Proposizione, si ha* $\forall q \in Q^{ad}, \delta q \in Q$

$$\|S(q)\|_{V\times P} \leq c \quad \|S'(q)(\delta q)\|_{V\times P} \leq c\|\delta q\|_{H^2(I)} \quad \|S''(q)(\delta q, \delta q)\|_{V\times P} \leq c\|\delta q\|^2_{H^2(I)}$$

2.1 Condizioni di ottimalità

Per i risultati di regolarità che verranno mostrati nel prossimo paragrafo (in particolare per la regolarità del controllo) risulta utile riscrivere la condizione di ottimalità del prim'ordine

$$j'(\overline{q})(\delta q) = 0 \qquad \forall \delta q \in H^2(I) \cap H^1_0(I) \tag{11}$$

facedo comparire esplicitamente la dipendenza da δq, mediante la formula di Hadamard. Partendo dall'espressione di $j(q)$ in termini della soluzione $\widetilde{S}(q)$ e derivando questa rispetto a q, si ha

$$j'(q)(\delta q) = \alpha(q'', \delta q'')_I + \beta\left(\int_I q(x)dx - \overline{V}\right)\int_I \delta q(x)dx + (\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla\widetilde{\delta\mathbf{u}})_{\Omega_q} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_q} |\nabla\widetilde{\mathbf{u}}|^2 V_{q,\delta q}\cdot\mathbf{n}\, d\Gamma \tag{12}$$

dove, $V_{q,\delta q} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-y)\frac{\delta q}{1-q} \end{pmatrix}$ è il campo di velocità che identifica la trasformazione da Ω_q a $\Omega_{q,\delta q}$. Osserivamo che $V_{q,\delta q} = 0$ su $\partial\Omega_q \setminus \Gamma_q$, dunque l'integrale di bordo può essere ristretto a Γ_q.
Per eliminare $\widetilde{\delta\mathbf{u}}$, introduciamo $(\mathbf{z}, s)$, soluzione debole del problema aggiunto

$$\begin{cases} -div(\nu\nabla\mathbf{z}) + \eta\mathbf{z} + \nabla s = -\Delta\widetilde{\mathbf{u}} & in\ \Omega_q \\ div\,\mathbf{z} = 0 & in\ \Omega_q \\ \nu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{z} - s\mathbf{n} = 0 & su\ \Gamma_1 \\ \partial_{\mathbf{n}}z_x = 0 \qquad z_y = 0 & su\ \Gamma_2 \\ \mathbf{z} = \mathbf{0}, & su\ \Gamma_q \cup \Gamma_3 \end{cases} \tag{13}$$

così da poter sfruttare il problema di cui è soluzione $\widetilde{\delta \mathbf{u}}$ per avere

$$
\begin{aligned}
&(\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla\widetilde{\delta \mathbf{u}})_{\Omega_q} = (\widetilde{\delta \mathbf{u}}, -\Delta\widetilde{\mathbf{u}})_{\Omega_q} + \int_{\partial\Omega_q} \widetilde{\delta \mathbf{u}} \cdot \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}}\, d\Gamma = \\
&= (\widetilde{\delta \mathbf{u}}, -div(\nu\nabla\mathbf{z}))_{\Omega_q} - (\widetilde{\delta p}, div\, \mathbf{z})_{\Omega_q} + \int_{\partial\Omega_q} \widetilde{\delta \mathbf{u}} \cdot \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}}\, d\Gamma = \\
&= (-div(\nu\nabla\widetilde{\delta \mathbf{u}}) + \nabla\widetilde{\delta p}, \mathbf{z})_{\Omega_q} + \int_{\partial\Omega_q} \left[\widetilde{\delta \mathbf{u}} \cdot \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}} - \nu\widetilde{\delta \mathbf{u}} \cdot \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{z} + \nu\mathbf{z} \cdot \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\delta \mathbf{u}} - \widetilde{\delta p}\, \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}\right] d\Gamma = \\
&= \int_{\Gamma_q} \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}} \cdot (\partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}} - \nu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{z} + s\mathbf{n})(V_{q,\delta q} \cdot \mathbf{n})
\end{aligned}
\tag{14}
$$

dove, oltre alla prima equazione di (7), abbiamo sfruttato le condizioni al bordo su $\mathbf{z}$ in (13) e quelle su $\widetilde{\delta \mathbf{u}}$:

$$
\begin{aligned}
\nu\partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\delta \mathbf{u}} - \widetilde{\delta p}\mathbf{n} &= \mathbf{0} && su\ \Gamma_1 \\
\partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\delta u} = 0, \quad \widetilde{\delta v} &= 0 && su\ \Gamma_2 \\
\widetilde{\delta \mathbf{u}} &= \mathbf{0} && su\ \Gamma_3 \\
\widetilde{\delta \mathbf{u}} &= (V_{q,\delta q} \cdot \mathbf{n})\partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}} && su\ \Gamma_q
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Possiamo andare anche oltre e riscrivere $j'(q)(\delta q)$ come un integrale sull'intervallo I. Osserviamo che Γ_q è parametrizzabile secondo l'ascissa x con una curva $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ q(x) \end{pmatrix}$ e si ha $\mathbf{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{q'(x)^2+1}} \begin{pmatrix} q'(x) \\ -1 \end{pmatrix}$, da cui $(V_{q,\delta q} \cdot \mathbf{n})|\gamma'(x)| = -\delta q$. Di conseguenza, con il cambio di variabile indotto dalla parametrizzazione, possiamo riscrivere

$$
\begin{aligned}
j'(q)(\delta q) = \alpha(q'', \delta q'')_I + (\beta \left(\int_I q(x)dx + \overline{V}\right) - \frac{1}{2}|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}(x, q(x))|^2 + \\
- \partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}}(x, q(x)) \cdot (\partial_{\mathbf{n}}\widetilde{\mathbf{u}}(x, q(x)) - \nu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{z}(x, q(x)) + s\mathbf{n}(x))\ ,\ \delta q)_I
\end{aligned}
\tag{16}
$$

2.2 Regolarità aggiuntiva

Il primo risultato che mostriamo riguarda la regolarità e la limitatezza della soluzione del problema di stato e delle sue derivate rispetto al controllo, e utilizza la seguente

Proposizione 2.4.

- $\|\gamma'_{q,\delta q}\|_\infty = \|div(V_{\delta q})\|_\infty \leq c\|\delta q\|_{L^\infty(I)} \leq \bar{c}\|\delta q\|_{H^1(I)}$
- $\|V_{\delta q}\|_\infty \leq c\|\delta q\|_{H^1(I)}$
- $\|cof(DV_{\delta q})\|_\infty = \|DV_{\delta q}\|_\infty \leq c\|\delta q\|_{H^2(I)}$
- $\|A'_{q,\delta q}\|_\infty \leq c\|\delta q\|_{H^2(I)}$
- $\|div(A'_{q,\delta q})\|_\infty \leq c\|\delta q\|_{H^2(I)}$
- $\|A'_{q,\delta q}\|_2 \leq c\|\delta q\|_{H^1(I)}$

Dimostrazione.

- $\gamma'_{q,\delta q} = div(V_{\delta q}) = -\delta q \quad \Rightarrow \quad c = 1$
- $V_{\delta q} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-y)\delta q(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = c_0$
  dove c_0 è la costante di continuità dell'immersione $L^2(I) \hookrightarrow L^1(I)$, infatti $H^2(I) \subset AC(\overline{I})$, dunque possiamo usare il Teorema Fondamentale del Calcolo, e $|I| = 1$.
- Per una matrice 2×2 il cofattore è semplicemente una permutazione degli elementi della matrice, dunque basta stimare $\|DV_{\delta q}\|_\infty$

  $$DV_{\delta q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-y)\delta q'(x) & -\delta q(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = max\{0, 0, 2c_0, c_0\} = 2c_0$$

  infatti, per il terzo elemento, il teorema di Rolle su δq assicura che esista un punto in I dove $\delta q' = 0$, dunque, dal momento che $H^1(I) \subset AC(\overline{I})$, $|\delta q'| \leq 2\|\delta q''\|_{L^1(I)}$.
- Dall'espressione (11) di [KV] per la matrice $A'_{q,\delta q}$ si hanno stime analoghe al punto precedente, utilizzando anche che $|y| \leq 1$, $\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega_0)} \leq c \ \forall q \in Q^{ad}$, $1 - q \geq \varepsilon$.
- Come ai punti precedenti, dal momento che non compare $\delta q''$.
- Si procede come sopra, senza la necessità del Teorema Fondamentale del Calcolo, che portava alla comparsa di dq'' a secondo membro.

□

Teorema 2.5. *$\exists c_0, c_1$ tali che $\forall q \in Q^{ad}$*

1. $S(q) \in [H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0), \quad \|S(q)\|_{[H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0)} \leq c_0$
2. $S'(q)(\delta q) \in [H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0), \quad \|S'(q)(\delta q)\|_{[H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0)} \leq c_1\|\delta q\|_{H^2(I)} \quad \forall \delta q \in H^2(I) \cap H^1_0(I)$

Dimostrazione. 1. Osserviamo innanzitutto che, fissato un certo $q \in Q^{ad}$, per ogni coppia $(\mathbf{u}, p) = S(q)$ si ha che $\mathbf{u}$ è soluzione anche del problema ridotto

$$a(q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(q)(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in V_{b(q)} = \{\mathbf{v} \in V \mid b(q)(\mathbf{v}, \pi) = 0 \quad \forall \pi \in P\} \tag{17}$$

Questo problema risulta essere ellittico, in quanto è la formulazione debole di un sistema di due equazioni del tipo

$$\eta^q \gamma_q u_i - div(\nu A_q \nabla u_i) = \gamma_q f_i^q \qquad (i = 1, 2) \tag{18}$$

in cui la matrice A_q è simmetrica e definita positiva, con $\rho(A_q) \geq 1$.
È pertanto possibile applicare a ciascuna delle due equazioni il Teorema 1.12 (3) [KV]: per avere $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega_0)]^2$ aggiungiamo le seguenti ipotesi [3]

- $\eta \in C^1(\overline{\hat{\Omega}})$, cosicché sia $\eta^q \gamma_q \in C^1(\overline{\Omega_0})$ $(\gamma_q \in C^1(\overline{\Omega_0}))$
- $\nu \in C^1(\overline{\hat{\Omega}})$, così da avere $\nu^q A_q$ con coefficienti lipschitziani (A_q lo è già grazie alla richiesta di limitatezza di q'')
- $\mathbf{f} \in [L^2(\hat{\Omega})]^2$, affinché $\gamma_q \mathbf{f} \in [L^2(\Omega_0)]^2$
- $\mathbf{g}_D \in [H^{3/2}(\hat{\Omega})]^2$ e $\mathbf{g}_N \in [H^{1/2}(\hat{\Omega})]^2$

Il teorema ci garantisce anche che $\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega_0)]^2} \leq c\|\mathbf{f}^q\|_{[L^2(\Omega_0)]^2} \leq c\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\hat{\Omega})]^2}$.

Possiamo ora tornare al problema completo e utilizzare i risultati appena ottenuti per aumentare di un ordine anche la regolarità di p. Controintegrando per parti la prima equazione di (5), otteniamo (senza considerare i termini di bordo, che semplicemente definiscono le condizioni al bordo)

$$\eta^q \gamma^q (\mathbf{u} + \mathcal{R}\mathbf{g}_D) - div(\nu^q \nabla(\mathbf{u} + \mathcal{R}\mathbf{g}_D) A_q) + div(\gamma_q p DT_q^{-T}) = \gamma_q \mathbf{f}^q \tag{19}$$

Essendo tutti gli altri termini in $L^2(\Omega_0)$, abbiamo che lo è anche $div(\gamma_q p DT_q^{-T}) = p\, div(\gamma_q DT_q^{-T}) + \gamma_q DT_q^{-T} \nabla p$. Con il tipo di mappa T_q che consideriamo, $div(\gamma_q DT_q^{-T}) = \mathbf{0}$; in ogni caso, basterebbe che fosse in $[C^0(\overline{\Omega_0})]^2$, per avere l'addendo corrispondente in $[L^2(\Omega_0)]^2$.
Ciò che rimane da dimostrare, dunque, è che anche $\nabla p \in [L^2(\Omega_0)]^2$:

$$\gamma_q DT_q^{-T} \nabla p = \begin{pmatrix} (1-q)\partial_x p - (1-y) q' \partial_y p \\ \partial_y p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \partial_y p \in L^2(\Omega_0)$$

D'altra parte, moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza appena scritta per $\frac{1}{\gamma_q} \in C^0(\overline{\Omega_0})$ e osservando che $\frac{1-y}{1-q} q' \in C^0(\overline{\Omega_0})$, si ottiene che anche $\partial_x p \in L^2(\Omega_0)$, dunque $p \in H^1(\Omega_0)$.

Infine, vogliamo mostrare che $\|p\|_{H^1(\Omega_0)}$ è uniformemente limitata rispetto a q.
Per prima cosa, utilizziamo ancora l'equazione (19) per esprimere ∇p in funzione dei coefficienti e di $\mathbf{u}$, così da avere per il gradiente di pressione un'espressione che risulta limitata in L^2 uniformemente rispetto a q, grazie alla limitatezza di $\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega_0)]^2}$, dei

[3] Per utilizzare i risultati di regolarità ellittica in problemi con condizioni al bordo miste dovrebbero essere verificate delle condizioni di compatibilità nei punti di giunzione tra tratti di bordo con condizioni differenti: per ora non me ne sono occupato.

coefficienti e dei loro gradienti.[4]

La stima di $\|p\|_{L^2(\Omega_0)}$, invece, fa uso della condizione *inf-sup*,

$$\beta_B\|p\| \leq \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{b(q)(\mathbf{v},p)}{\|\nabla\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{F(q)(\mathbf{v}) - a(q)(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} \leq M_F + M\|\nabla\mathbf{u}\|$$

Abbiamo dunque dimostrato la regolarità della soluzione $S(q)$ $\forall q \in Q^{ad}$ e la sua uniforme limitatezza in $[H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0)$.

2. Per quanto riguarda la velocità $\delta\mathbf{u}$ la dimostrazione ricalca quella del punto precedente, con l'unica differenza data dalla forzante del problema ridotto: invece di $\gamma_q\mathbf{f}^q$ abbiamo (definendo $\hat{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \mathcal{R}\mathbf{g}_D$)

$$\gamma'_{q,\delta q}\mathbf{f}^q + \gamma_q\nabla\mathbf{f}^q V_{\delta q} - (\gamma_q\nabla\eta^q\cdot V_{\delta q} + \eta^q\gamma'_{q,\delta q})\hat{\mathbf{u}} +$$
$$-div(\nabla\nu^q\cdot V_{\delta q}\nabla\hat{\mathbf{u}}A_q + \nu^q\nabla\hat{\mathbf{u}}A'_{q,\delta q} + p\gamma_q\, cof(DV_{\delta q}))$$

di conseguenza, dobbiamo richiedere ulteriore regolarità dei dati per avere la forzante in L^2, in particolare ($\eta \in C^1(\overline{\hat{\Omega}})$ già basta, e sui dati di bordo non servono altre richieste)

$$\nu \in C^{1,1}(\overline{\hat{\Omega}}) \subseteq C^1(\hat{\Omega}) \cap W^{2,\infty}(\hat{\Omega}),\ \mathbf{f} \in [H^1(\hat{\Omega})]^2$$

La forzante, poi, risulta controllata in $L^2(\Omega_0)$ da un multiplo di $\|\delta q\|_{H^2(I)}$, grazie al Lemma 1.7 di [KV], insieme alla Proposizione 2.4.

Tornando al problema completo, si può mostrare che $\delta p \in H^1(\Omega_0)$, utilizzando la prima equazione. La stima di $\|\delta p\|_{H^1(\Omega_0)}$ si basa ancora sulla *inf-sup* e, analogamente al punto precedente, si arriva a

$$\beta_B\|\delta p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \dot{M}_F + M\|\nabla\delta\mathbf{u}\|$$

dove $\dot{M}_F$ è la costante di continuità del funzionale a secondo membro dell'equazione del momento. Con la Proposizione 2.2 e il Teorema 2.5 si ottiene la tesi.

□

Prima di enunciare il secondo risultato di regolarità, mostriamo un risultato di continuità per $j'(q)$, che sfrutta la seguente

Proposizione 2.6 (LA SUPPONIAMO VALIDA)**.** *Sia $r \in (1,\infty)$ e sia $\widehat{\dot{F}}(q,\delta q)(\mathbf{v})$ il termine noto della prima equazione di (7).*
Se $\widehat{\dot{F}}(q,\delta q)$ è uniformemente limitato in $[W^{-1,r}(\Omega_0)]^2$, allora $\delta\mathbf{u}$ è soluzione di

$$a(q)(\delta\mathbf{u},\mathbf{v}) = \widehat{\dot{F}}(q,\delta q)(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v} \in \widehat{V}_{b(q)}$$

dove $\widehat{V}_{b(q)} = \{\mathbf{v} \in [W^{1,r'}(\Omega_0)]^2 :\ b(q)(\mathbf{v},\pi) = 0\ \forall\pi \in L^{r'}(\Omega_0)\}$. Inoltre

$$\|\delta\mathbf{u}\|_{[W^{1,r}(\Omega_0)]^2} \leq c\|\widehat{\dot{F}}(q,\delta q)\|_{[W^{-1,r}(\Omega_0)]^2}$$

[4]Oltre alle ipotesi già addotte, qui utilizziamo anche che $|q'(0)| \leq d_2$ per avere $div(A_q) \in [L^\infty(\Omega_0)]^2$.

Motivazioni per la validità. In [KV], nella dimostrazione del Lemma 3.18 viene usato un risultato analogo per problemi ellittici, con $r = 8/7$, indicato come Teorema 1 dell'articolo di Y. A. Alkhutov e V. A. Kondrat'ev "Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex domain" - Differentsial'nye Uravneiya, 28 (1992). Non ho trovato questo articolo, né un altro da cui potessi verificare se si possa estendere al nostro problema, ma come esistono risultati di regolarità, immagino ne esistano anche in spazi $L^r : r \neq 2$. $\square$

Teorema 2.7. $\forall q \in Q^{ad}, \delta q \in H^2(I) \cap H^1_0(I) \quad |j'(q)(\delta q) - \alpha(\delta q'', q'')_I| \leq c\|\delta q\|_{H^1_0(I)}$

Dimostrazione. Considerando separatamente i contributi dovuti alla variabile di stato $\mathbf{u}$ e quelli legati alla penalizzazione del volume sotteso a q, maggioriamo nel modo seguente:

$$\left|\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\, A'_{q,\delta q}, \nabla\mathbf{u}) + (\nabla\delta\mathbf{u}\, A_q \nabla, \mathbf{u})\right| \leq \frac{1}{2}\|A'_{q,\delta q}\|_2 \|\nabla\mathbf{u}\|_4^2 + \|A_q\|_\infty \|\nabla\mathbf{u}\|_8 \|\nabla\delta\mathbf{u}\|_{8/7}$$

$$\left|\beta\left(\int_I q(x)dx - \overline{V}\right)\int_I \delta q(x)dx\right| \leq \beta(\|q\|_{L^1(I)} + \overline{V})\|\delta q\|_{L^1(I)}$$

Per il primo addendo della prima stima osserviamo che $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow L^4(\Omega_0)$, da cui $\|\nabla\mathbf{u}\|_4 \leq c\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega_0)]^2}$, dunque con il Teorema 2.5 e la Proposizione 2.4 otteniamo la maggiorazione che ci serve.
Per controllare opportunamente la seconda stima, invece, è sufficiente l'immersione continua $L^2(I) \hookrightarrow L^1(I)$ e la limitatezza di Q^{ad} in $H^2(I)$.
La parte più complessa è la stima di $(\nabla\delta\mathbf{u}A_q, \nabla\mathbf{u})$, in particolare ci serve una stima per $\|\nabla\delta\mathbf{u}\|_{8/7}$ (l'esponente 8/7 è scelto per semplificare i passaggi che seguono). Grazie alla Proposizione 2.6, ci basta controllare opportunamente il secondo membro del sistema (7):

$$|(\gamma'_{q,\delta q}\mathbf{f}^q, \mathbf{v})| \leq \|\gamma'_{q,\delta q}\|_\infty \|\mathbf{f}^q\|_{8/7}\|\mathbf{v}\|_8$$
$$\ldots$$
$$|(p\, cof(DV_{\delta q}), \nabla\mathbf{v})| \leq \|DV_{\delta q}\|_2 \|p\|_{8/3}\|\nabla\mathbf{v}\|_8$$

Con la Proposizione 2.4 e con il Teorema 2.5, utilizzabile grazie all'immersione $H^1(\Omega_0) \hookrightarrow L^r(\Omega_0)\ \forall r \in [1, \infty)$, possiamo utilizzare la Proposizione 2.6 con $r = 8/7$ e

$$\|\hat{\hat{F}}(q, \delta q)\|_{[W^{-1,r}(\Omega_0)]^2} \leq c\|\delta q\|_{H^1_0(I)}$$

da cui otteniamo la tesi $\square$

Ora possiamo enunciare un teorema di regolarità anche per i punti di stazionarietà di $j(q)$:

Teorema 2.8. $\forall \overline{q} \in Q^{ad}$ *che soddisfi la condizione di ottimalità* (11) *si ha la regolarità aggiuntiva* $\overline{q} \in H^4(I)$.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 2.7, possiamo applicare il Teorema di Rappresentazione di Riesz al funzionale $j'(q)(\cdot) - \alpha(q'', \cdot'')_I$ ed affermare che

$$\exists r \in H^1_0(I) \text{ tale che } j'(q, \delta q) = \int_I (r'\delta q' + \alpha q''\delta q'')dx \quad \forall \delta q \in H^2(I) \cap H^1_0(I)$$

Prendendo una $\overline{q}$ che soddisfi la condizione di ottimalità (11), osservando che la (11) vale $\forall \delta q \in C_0^\infty(\overline{I})$ e integrando per parti otteniamo

$$\int_I (\alpha\overline{q}'' - r)\delta q'' dx = 0 \qquad \forall \delta q \in C_0^\infty(\overline{I})$$

e pertanto $\alpha\overline{q}'' - r = 0$ in $H^2_0(I) \subset H^1_0(I)$. Poiché $r \in H^1_0(I)$ e α è costante, concludiamo che $\overline{q} \in H^3(I)$.

Utilizzando l'espressione di $j'(q)(\delta q)$ presentata in (16), possiamo ottenere un ulteriore ordine di regolarità, secondo il ragionamento seguente.
Osserviamo che $\beta(\int_I q(x)dx - \overline{V})$ è una costante, dunque certamente appartiene a $L^2(I)$. Grazie al Teorema 2.5, applicabile anche al problema aggiunto (13) qualora riscritto rispetto a Ω_0, e al Lemma 1.1 possiamo affermare che

$$\begin{aligned}\mathbf{u}, \mathbf{z} \circ T_q \in [H^2(\Omega_0)]^2,\ s \circ T_q \in H^1(\Omega_0) \ \Rightarrow\ \widetilde{\mathbf{u}}, \mathbf{z} \in [H^2(\Omega_q)]^2,\ s \in H^1(\Omega_q) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{z} \in [H^{1/2}(\Gamma_q)]^{2\times 2},\ s \in H^{1/2}(\Gamma_q) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \nabla\widetilde{\mathbf{u}}(x, q(x)), \nabla\mathbf{z}(x, q(x)) \in [H^{1/2}(I)]^{2\times 2},\ s(x, q(x)) \in H^{1/2}(I)\end{aligned}$$

e grazie all'immersione continua di $H^{1/2}(I)$ in $L^4(I)$ possiamo concludere che tutto ciò che moltiplica δq nel secondo prodotto scalare è in $L^2(I)$.
Per una $\overline{q}$ che soddisfi la condizione di ottimalità (11), l'espressione in (16) è uguale a zero, e perciò si ottiene la definizione di derivata quarta debole

$$\int_I \overline{q}''\delta q'' dx = \int_I \frac{1}{\alpha}(\dots)\delta q\, dx \qquad \forall \delta q \in C^\infty_0(\overline{I})$$

con $(\dots) \in L^2(I)$, come appena mostrato, da cui si può concludere che $\overline{q} \in H^4(I)$. $\square$

2.3 Stima dell'errore di discretizzazione del controllo

Introduciamo su $(x_0, x_N) := I$ una partizione $\{I_i = (x_{i-1}, x_i)\}_{i=1}^N$, con parametro di discretizzazione $\sigma = \max_{i\in\{1,\ldots,N\}} |I_i|$. Possiamo così definire uno spazio discreto dei controlli

$$Q^{ad}_\sigma = Q^{ad} \cap Q_\sigma \text{ con } Q_\sigma = \{q \in C^0(\overline{I}) \mid q|_{I_i} \in \mathbb{P}_3(I_i),\ i \in \{1,\ldots,N\}\}$$

e un problema parzialmente discretizzato

$$\text{Minimizzare } j(q_\sigma) = J(q_\sigma, \widetilde{S}(q_\sigma)) \text{ su } q_\sigma \in Q^{ad}_\sigma \tag{20}$$

Osserviamo che tutti i discorsi fatti sul problema continuo valgono anche in (20).

Cosideriamo anche un classico operatore di interpolazione polinomiale di grado r $\Pi^r_\sigma\colon L^2(I) \to Q_\sigma$ ed osserviamo che $\Pi_\sigma(Q^{ad}) \subseteq Q^{ad}_\sigma$. Grazie al lemma di Bramble-Hilbert abbiamo la stima di interpolazione

$$\|q - \Pi_\sigma q\|_{H^2(I)} \le c\sigma^2 |q|_{H^4(I)} \quad \forall q \in H^4(I) \tag{21}$$

e grazie ai risultati di regolarità ottenuti nel paragrafo precedente, possiamo applicare questa stima ad ogni controllo che soddisfi le condizioni di ottimalita (11).

Ciò che ci interessa mostrare in questo paragrafo è una stima del tipo

$$\|\overline{q} - \overline{q}_\sigma\|_{H^2(I)} \le \|\overline{q} - \Pi_\sigma \overline{q}\|_{H^2(I)} + \|\Pi_\sigma \overline{q} - \overline{q}_\sigma\|_{H^2(I)} \le c\sigma^2 |\overline{q}|_{H^4(I)} \tag{22}$$

dove $\overline{q}$ è la soluzione esatta del problema (3), mentre $\overline{q}_\sigma$ è la soluzione del problema discreto (20).
Osserviamo che il primo termine è già controllato opportunamente dalla stima (21), mentre per il secondo vogliamo seguire il ragionamento riportato in [KV], pp.19–20.
Per fare questo, notiamo che è il ragionamento risulta autocontenuto, quindi applicabile senza modifiche al nostro problema, purché si ritengano valide le Assunzioni 1.5, 3.1 di [KV] e si mostri che valgono i Lemmi 3.8,3.15 di [KV]: riportiamo di seguito ciò che serve per avere la validità di tali risultati nel nostro caso.

Ipotesi 2.9 (Assumption 1.5 [KV])**.** In corrispondenza della soluzione ottima $\overline{q}$ il vincolo $q \le 1 - \varepsilon$ non è attivo, ossia

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \overline{q}(x) \le 1 - \varepsilon - \delta \quad \forall x \in I$$

Ipotesi 2.10 (Assumption 3.1 [KV])**.** In ogni minimo locale $\overline{q}$ di (3) supponiamo che

$$j''(\overline{q})(\delta q, \delta q) > 0 \quad \forall \delta q \in H^2(I) \cap H^1_0(I) \setminus \{0\}$$

Proposizione 2.11. *Siano $q, r \in Q^{ad}$, $\delta q \in Q$, $(\mathbf{v}, \pi), (\mathbf{z}, \rho) \in V \times P$. Allora, sotto le ipotesi della Proposizione 2.2, si ha*

$$\begin{aligned}
|a(q)(\mathbf{v},\mathbf{z}) - a(r)(\mathbf{v},\mathbf{z})| &\le c\|q - r\|_{H^2(I)} \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{z}\| \\
|\dot{a}(q,\delta q)(\mathbf{v},\mathbf{z}) - \dot{a}(r,\delta q)(\mathbf{v},\mathbf{z})| &\le c\|q - r\|_{H^2(I)} \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{z}\| \|\delta q\|_{H^2(I)} \\
|\ddot{a}(q,\delta q,\delta q)(\mathbf{v},\mathbf{z}) - \ddot{a}(r,\delta q,\delta q)(\mathbf{v},\mathbf{z})| &\le c\|q - r\|_{H^2(I)} \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \mathbf{z}\| \|\delta q\|^2_{H^2(I)}
\end{aligned}$$

ed analoghi risultati valgono per le altre forme e i funzionali che compaiono in (5),(7),(8).

Dimostrazione. Il risultato discende direttamente dalla limitatezza e lipschitzianità in q dei coefficienti delle forme e dei funzionali considerati, insieme al Teorema Fondamentale del Calcolo applicato a $q, q' \in AC(\bar{I})$. □

Lemma 2.12. *Nell'ipotesi*

$$\alpha_c - \frac{M_b M}{\beta_B} > 0 \tag{23}$$

abbiamo che $\forall q, r \in Q^{ad}$, $\forall \delta q \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$

1. $\|S(q) - S(r)\|_{V\times P} \leq c\|q - r\|_{H^2(I)}$
2. $\|S'(q)(\delta q) - S'(r)(\delta q)\|_{V\times P} \leq c\|q - r\|_{H^2(I)}\|\delta q\|_{H^2(I)}$
3. $\|S''(q)(\delta q, \delta q) - S''(r)(\delta q, \delta q)\|_{V\times P} \leq c\|q - r\|_{H^2(I)}\|\delta q\|^2_{H^2(I)}$

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, siano $(\mathbf{u}, p) = S(q)$, $(\mathbf{z}, s) = S(r)$ e analoghe definizioni valgano per le derivate di S. Inoltre, faremo largo uso della Proposizione 2.11 senza segnalarlo.

1. Introduciamo la coppia intermedia $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p}) \in V \times P$, soluzione di

$$\begin{cases} a(q)(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(r)(\mathbf{v}, \widehat{p} + p) = F(q)(\mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in V \\ b(r)(\widehat{\mathbf{u}}, \pi) = G(q)(\pi) & \forall\ \pi \in P \end{cases}$$

Possiamo allora spezzare la differenza da stimare in due contributi:

$$\|S(q) - S(r)\|_{V\times P} \leq \|S(q) - (\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})\|_{V\times P} + \|(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p}) - S(r)\|_{V\times P} \tag{24}$$

Per il primo termine, procediamo inizialmente con la differenza in velocità:

$$\begin{aligned} &\alpha_c\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\widehat{\mathbf{u}}\|^2 \leq a(q)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}) = \\ &= -b(q)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, p) + b(r)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p} + p) = \\ &= b(r)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, p) - b(q)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, p) + b(r)(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p}) \leq \\ &\leq c\|r - q\|_{H^2(I)}\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\widehat{\mathbf{u}}\|\|p\| + M_b\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\widehat{\mathbf{u}}\|\|\widehat{p}\| \\ &\Rightarrow \quad \|\nabla\mathbf{u} - \nabla\widehat{\mathbf{u}}\| \leq \frac{c}{\alpha_c}\|r - q\|_{H^2(I)} + \frac{M_b}{\alpha_c}\|\widehat{p}\| \end{aligned}$$

Ancora una volta, per stimare la pressione utilizziamo la condizione *inf-sup*:

$$\begin{aligned} \|\widehat{p}\| &\leq \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{b(r)(\mathbf{v}, \widehat{p})}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{-b(r)(\mathbf{v}, p) - a(q)(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + F(q)(\mathbf{v})}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|} = \\ &= \sup_{\mathbf{v}\in V} \frac{1}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|}\left[b(q)(\mathbf{v}, p) - b(r)(\mathbf{v}, p) + a(q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(q)(\widehat{u}, \mathbf{v})\right] \leq \\ &\leq \frac{c}{\beta_B}\|q - r\|_{H^2(I)}\|p\| + \frac{M}{\beta_B}\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\widehat{\mathbf{u}}\| \end{aligned}$$

Per avere $\|(\mathbf{u}, p) - (\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})\|_{V\times P} \leq c\|q - r\|_{H^2(I)}$ dunque, possiamo usare il Corollario 2.3, applicabile anche a $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})$, e l'ipotesi (23).

Possiamo ora passare al secondo addendo della (24), lavorando in maniera simile a quanto appena fatto:

$$\begin{aligned}\alpha_c\|\nabla\widehat{\mathbf{u}}-\nabla\mathbf{z}\|^2 &\leq a(r)(\widehat{\mathbf{u}}-\mathbf{z},\widehat{\mathbf{u}}-\mathbf{z}) = \\ &= a(r)(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{u}}-z)-F(r)(\widehat{\mathbf{u}}-z)+b(r)(\widehat{\mathbf{u}}-z,s)+ \\ &+F(q)(\widehat{\mathbf{u}}-z)-a(q)(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{u}}-\mathbf{z})-b(r)(\widehat{\mathbf{u}}-z,\widehat{p}+p)\end{aligned}$$

Grazie alla Proposizione 2.11, al Corollario 2.3 e alla continuità di $b(r)$, ci basta controllare quanto segue:

$$\begin{aligned}&\|\widehat{p}+p-s\| \leq \sup_{\mathbf{v}\in V}\frac{b(r)(\mathbf{v},\widehat{p}+p-s)}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|} = \\ &= \sup_{\mathbf{v}\in V}\frac{1}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|}\left[F(q)(\mathbf{v})-a(q)(\widehat{\mathbf{u}},\mathbf{v})-F(r)(\mathbf{v})+a(r)(\mathbf{z},\mathbf{v})\right] = \\ &= \sup_{\mathbf{v}\in V}\frac{1}{\beta_B\|\nabla\mathbf{v}\|}\left[a(r)(\mathbf{z}-\widehat{\mathbf{u}},\mathbf{v})+a(r)(\widehat{\mathbf{u}},\mathbf{v})-a(q)(\widehat{\mathbf{u}},\mathbf{v})+F(q)(\mathbf{v})-F(r)(\mathbf{v})\right] \leq \\ &\leq \frac{M}{\beta_B}\|\nabla\mathbf{z}-\nabla\widehat{\mathbf{u}}\|+\frac{c}{\beta_B}\|q-r\|_{H^2(I)}(\|\nabla\widehat{\mathbf{u}}\|+1)\end{aligned}$$

Pertanto, di nuovo nell'ipotesi (23), la stima cercata è verificata.

2-3. Si procede nello stesso modo, sempre sotto l'ipotesi (23), introducendo una coppia intermedia e sfruttando gli enunciati 2.2, 2.3, 2.11.

□

Osservazione 5. Per vedere se la richiesta (23) sia soddisfatta almeno in casi semplici, vediamo cosa succede nel caso a viscosità omogenea ν, con $\eta = 0$. Dalle definizioni (6), la condizione si riscrive come

$$\nu\overline{\lambda}-\frac{(1+d_1+d_2)\nu}{\beta_B\overline{\lambda}} > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \beta_B > (1+d_1+d_2)\max_{q\in Q^{ad}}\rho(A_q)^2$$

E' UNA RICHIESTA TROPPO RESTRITTIVA?

Lemma 2.13 (Lemma 3.8 [KV]). $\forall q,r\in Q^{ad}$, $\forall\delta q\in H^2(I)\cap H^1_0(I)$

1. $|j(q)-j(r)| \leq c\|q-r\|_{H^2(I)}$
2. $|j'(q)(\delta q)-j'(r)(\delta q)| \leq c\|q-r\|_{H^2(I)}\|\delta q\|_{H^2(I)}$
3. $|j''(q)(\delta q,\delta q)-j''(r)(\delta q,\delta q)| \leq c\|q-r\|_{H^2(I)}\|\delta q\|^2_{H^2(I)}$

Dimostrazione. Siano $q,r\in Q^{ad}$ fissate: per semplicità di notazione definiamo $(\mathbf{u},p) = S(q)$, $(\mathbf{z},s) = S(r)$, e analoghe variabili per le derivate dell'operatore S. Mostriamo solo che la stima vale per i termini più complessi del punto 3, dal momento che il resto è trattabile allo stesso modo, o anche in maniera più semplice.
Il primo termine che consideriamo mostra come trattare tutti gli addendi dei funzionali

j, j', j'' in cui una variabile (nel caso che segue, $A''_{q,\delta q,\delta q}$) compare in modo lineare, mentre un'altra ($\nabla \mathbf{u}$) in maniera quadratica:

$$
\begin{aligned}
&|\left(\nabla \mathbf{u} A''_{q,\delta q,\delta q}, \nabla \mathbf{u}\right) - \left(\nabla \mathbf{z} A''_{r,\delta q,\delta q}, \nabla \mathbf{z}\right)| = \\
&= |\left((\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}) A''_{q,\delta q,\delta q}, \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{z}\right) + \left(\nabla \mathbf{z}(A''_{q,\delta q,\delta q} - A''_{r,\delta q,\delta q}), \nabla \mathbf{z}\right)| \leq \\
&\leq \|A''_{q,\delta q,\delta q}\|_\infty \left(\|\nabla \mathbf{u}\| + \|\nabla \mathbf{z}\|\right) \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}\| + \|\nabla \mathbf{z}\|^2 \|A''_{q,\delta q,\delta q} - A''_{r,\delta q,\delta q}\|_\infty \leq \\
&\leq c\|\delta q\|^2_{H^2(I)}
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato le stime dei Lemmi 2.5, 2.12, e il Lemma 1.7 di [KV] per $\|A''_{q,\delta q,\delta q}\|_\infty$. Nel prossimo, invece, vediamo come trattare la comparsa di tre variabili differenti in un prodotto scalare:

$$
\begin{aligned}
&|\left(\nabla \delta \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u}\right) - \left(\nabla \delta \mathbf{z}\, A'_{r_{\delta q}}, \nabla \mathbf{z}\right)| = \\
&= |\left((\nabla \delta \mathbf{u} - \nabla \delta \mathbf{z}) A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u}\right) + \left(\nabla \delta \mathbf{z}(A'_{q,\delta q} - A'_{r,\delta q}), \nabla \mathbf{u}\right) + \left(\nabla \delta \mathbf{z}\, A'_{r,\delta q}, \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{z}\right)|
\end{aligned}
$$

e poi si possono usare stime analoghe a quelle utilizzate sopra. □

Lemma 2.14 (Lemma 3.9 [KV]). *Siano $q \in Q^{ad}, \delta q \in Q, \{\delta q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Q$. Se $\delta q_n \to \delta q$ in $C^1(\overline{I})$, allora*

1. *$S'(q)(\delta q_n) \to S'(q)(\delta q)$ in $V \times P$*
2. *$S''(q)(\delta q_n, \delta q_n) \to S'(q)(\delta q, \delta q)$ in $V \times P$*

Dimostrazione. Per la linearità e la buona positura dei problemi (7), (8), è sufficiente mostrare che i termini forzanti convergono in $V' \times P'$, e ciò vale grazie alla lipschizianità di $\dot{F}(q, \cdot)(\mathbf{v}), \dot{a}(q, \cdot)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e affini.
Diamo un esempio dei passaggi da seguire, da un termine di $\ddot{a}(q, \delta q \delta q)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$
\begin{aligned}
&|\left(\nabla \nu^q \cdot V_{\delta q_n} \nabla \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q_n}, \nabla \mathbf{v}\right) - \left(\nabla \nu^q \cdot V_{\delta q} \nabla \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{v}\right) \leq \\
&\leq |\left(\nabla \nu^q \cdot V_{\delta q_n} \nabla \mathbf{u}(A'_{q,\delta q_n} - A'_{q,\delta q}), \nabla \mathbf{v}\right) - \left(\nabla \nu^q \cdot (V_{\delta q_n} - V_{\delta q}) \nabla \mathbf{u}\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{v}\right) \leq \\
&\leq \|\nu\|_{W^{1,\infty}(\hat{\Omega})} \|\nabla \mathbf{u}\| \|\nabla \mathbf{v}\| \left(\|A'_{q,\delta q_n} - A'_{q,\delta q}\|_\infty \|V_{\delta q_n}\|_\infty + \|V_{\delta q_n} - V_{\delta q}\|_\infty \|A'_{q,\delta q}\|_\infty\right)
\end{aligned}
$$

La convergenza in $C^1(\overline{I})$ di δq_n implica la convergenza uniforme dei due fattori contenenti una differenza (dal momento che la dipendenza da δq passa solo attraverso δq stesso e $\delta q'$); inoltre si ha che $\|V_{\delta q_n}\|_\infty$ è limitato uniformemente grazie alla limitatezza uniforme della successione convergente δq_n. □

Corollario 2.15 (Lemma 3.10 [KV]). *Siano $m(q)(\delta q) = j'(q)(\delta q) - \alpha(q'', \delta q'')_I$ e $n(q)(\delta q) = j''(q)(\delta q, \delta q) - \alpha(\delta q'', \delta q'')_I$. Allora*

$$
m(q)(\delta q_n) \to m(q)(\delta q) \qquad n(q)(\delta q_n) \to n(q)(\delta q)
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
&|m(q)(\delta q_n) - m(q)(\delta q)| \leq \frac{1}{2} \left|\left(\nabla \mathbf{u}(A'_{q,\delta q_n} - A'_{q,\delta q}), \nabla \mathbf{u}\right)\right| + |((\nabla \delta \mathbf{u}_n - \nabla \delta \mathbf{u}) A_q, \nabla \mathbf{u})| + \\
&+ \beta \left|\int_I q(x)dx - \overline{V}\right| \left|\int_I (\delta q_n(x) - \delta q(x))dx\right|
\end{aligned}
$$

Per $n(q)(\delta q)$ abbiamo un'analoga forma e per entrambi la tesi segue dal teorema di convergenza dominata e dal Lemma 2.14. □

Con i risultati finora mostrati sono valide senza modifiche anche le dimostrazioni degli enunciati 3.11–3.15 di [KV], dunque basta seguire i risultati delle pagine 19–20 di [KV] e la stima di discretizzazione del controllo (22) è soddisfatta.

2.4 Stima dell'errore di discretizzazione delle variabili di stato

Introduciamo una triangolazione regolare $\mathcal{T}_h$ su Ω_0, con parametro di discretizzazione $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h}|K|$, e gli spazi discreti V_h, P_h rispetto a Ω_0, per cui supponiamo valida la condizione LBB per la forma $b(q)(\mathbf{v}_h, \pi_h)$ uniformemente in $q \in Q^{ad}$ e in $h \in [0, \overline{h}]$. Definiamo l'operatore soluzione e il funzionale discreti

$$S_h : Q^{ad} \to V_h \times P_h : q \mapsto (\mathbf{u}_h, p_h) \qquad j_h : Q^{ad} \to \mathbb{R} : q \mapsto J(q, S_h(q) \circ T_q^{-1})$$

Per la buona positura del problema di stato discreto valgono i discorsi fatti sul problema continuo.
Anche qui introduciamo due operatori di proiezione negli spazi discreti V_h, P_h, per cui consideriamo valide le usuali stime di interpolazione: con abuso di notazione, indicheremo sempre con Π_h^r i tre interpolatori a valori in $V_h, P_h, V_h \times P_h$.

A partire da un risultato di limitatezza per l'operatore soluzione discreto, mostriamo le stime di convergenza di S, j e derivate rispetto alla discretizzazione del problema di stato.

Lemma 2.16. $\forall q \in Q^{ad}, \delta q \in H^2(I) \cap H^1(I)$
$\|S_h(q)\|_{V\times P} \leq c, \qquad \|S_h'(q)(\delta q)\|_{V\times P} \leq c\|\delta q\|_{H^2(I)}$

Dimostrazione. Analoga al Corollario 2.3. □

Lemma 2.17. $\forall q \in Q_\sigma^{ad}, \delta q \in H^2(I) \cap H^1(I)$

1. $\|S(q_\sigma) - S_h(q_\sigma)\|_{V\times P} \leq ch$
2. $\|S'(q_\sigma)(\delta q) - S_h'(q_\sigma)(\delta q)\|_{V\times P} \leq ch\|\delta q\|_{H^2(I)}$
3. $\|S''(q_\sigma)(\delta q, \delta q) - S_h''(q_\sigma)(\delta q, \delta q)\|_{V\times P} \leq ch\|\delta q\|_{H^2(I)}^2$

dove per la seconda stima è necessario che valga

$$\alpha_c - \frac{M_b M}{\beta_h} > 0 \tag{25}$$

Dimostrazione.

1. Dal Teorema 10.6 [Qua08] e dalla definizione di estremo inferiore, con le ipotesi addotte nell'introduzione del problema di stato discreto, poiché le costanti di continuità, coercività e della LBB non dipendono da q né da h, otteniamo

$$\|S(q_\sigma) - S_h(q_\sigma)\|_{V\times P} \leq c(\|\mathbf{u} - \Pi_h^2\mathbf{u}\|_V + \|p - \Pi_h^1\|_P) \leq ch$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato le stime dell'errore di interpolazione e l'uniforme limitatezza di $S(q_\sigma)$ in $[H^2(\Omega_0)]^2 \times H^1(\Omega_0)$.

2. Per dimostrare la stima dell'errore nella derivata dell'operatore soluzione dobbiamo introdurre alcune ipotesi aggiuntive sui dati, per poter avere la validitá delle ipotesi del Teorema 10.6 [Qua08] anche sul problema (7) in $(\delta\mathbf{u}, \delta p)$, e conseguentemente anche sulla sua controparte discreta:

$$\eta, \nu \in W^{1,\infty}(\hat{\Omega})$$

(per $\mathbf{f}$ non serve ulteriore regolarità, dal momento che $\mathbf{f} \in [L^2(\hat{\Omega})]^2, \gamma_q \in C^0(\overline{\Omega_0}), V_{\delta q} \in [C^0(\overline{\Omega_0})]^2 \Rightarrow \gamma_q \nabla \mathbf{f}^q V_{\delta q} \in H^{-1}(\Omega_0)$)
Introduciamo la "derivata intermedia" $(\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\hat{p}_h)$, soluzione in $V_h \times P_h$ del problema

$$\begin{cases} a(q)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + b(q)(\mathbf{v}_h, \delta\hat{p}_h) = \dot{F}(q, \delta q)(\mathbf{v}_h) - \dot{a}(q, \delta q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \dot{b}(q, \delta q)(\mathbf{v}_h, p) & \forall\, \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(q)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \pi_h) = 0 & \forall\, \pi_h \in P_h \end{cases} \tag{26}$$

così da stimare separatamente l'errore dovuto alla diretta discretizzazione del problema in $S'(q)(\delta q)$ e quello dovuto alla discretizzazione di $S(q)$:

$$\|S'(q)(\delta q) - S'_h(q)(\delta q)\|_{V\times P} \leq \|S'(q)(\delta q) - (\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\hat{p}_h)\|_{V\times P} + \|(\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\hat{p}_h) - S'_h(q)(\delta q)\|_{V\times P}$$

Per quanto riguarda la stima in velocità, abbiamo, per una qualunque $\mathbf{w}_h \in V_{h,b(q_\sigma)}$

$$\begin{aligned} \alpha_c\|\nabla\delta\mathbf{u} - \nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h\|^2 &\leq a(q_\sigma)(\delta\mathbf{u} - \delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\mathbf{u} - \delta\hat{\mathbf{u}}_h) = \\ &= a(q_\sigma)(\delta\mathbf{u} - \delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\mathbf{u} - \mathbf{w}_h) \leq M\|\nabla\delta\mathbf{u} - \nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h\|\|\nabla\delta\mathbf{u} - \nabla\mathbf{w}_h\| \end{aligned} \tag{27}$$

dove l'uguaglianza è data da $\mathbf{w}_h, \delta\hat{\mathbf{u}}_h \in V_{h,b(q_\sigma)}$, e

$$\begin{aligned} \alpha_c\|\nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \nabla\delta\mathbf{u}_h\|^2 &\leq a(q_\sigma)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h, \delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h) = \\ &= -\dot{a}(q_\sigma, \delta q)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h) - \dot{b}(q_\sigma, \delta q)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h, p - p_h) + \\ &\quad - b(q_\sigma)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h, \delta\hat{p}_h - \delta p_h) \leq \\ &\leq c\|\delta q\|_{H^2(I)}(\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\|)\|\nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \nabla\delta\mathbf{u}_h\| + \\ &\quad + M_b\|\delta\hat{p}_h - \delta p_h\|\|\nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \nabla\delta\mathbf{u}_h\| \end{aligned} \tag{28}$$

Per maggiorare la (27) con $ch^2\|\delta q\|_{H^2(I)}$ è sufficiente passare all'estremo inferiore su $\mathbf{w}_h \in V_{h,b(q_\sigma)}$ e sfruttare la stima (10.46) del Teorema 10.6 [Qua08] e il Lemma 2.5. Per la (28), invece, se per i primi due termini è sufficiente il punto 1 di questo lemma, per l'ultimo dobbiamo utilizzare la condizione LBB:

$$\begin{aligned} \|\delta\hat{p}_h - \delta p_h\| &\leq \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(q_\sigma)(\mathbf{v}_h, \delta\hat{p}_h - \delta p_h)}{\beta_h\|\nabla\mathbf{v}_h\|} = \\ &= \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{1}{\beta_h\|\nabla\mathbf{v}_h\|}\Big[-\dot{a}(q_\sigma, \delta q)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \dot{b}(q_\sigma, \delta q)(\mathbf{v}_h, p - p_h) - a(q_\sigma)(\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \delta\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\Big] \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta_h}\left[c\|\delta q\|_{H^2(I)}(\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\|) + M\|\nabla\delta\hat{\mathbf{u}}_h - \nabla\delta\mathbf{u}_h\|\right] \end{aligned} \tag{29}$$

Sotto l'ipotesi (25), possiamo ora sommare (27) e (28) e sfruttare la (29) e il punto 1 di questo lemma per ottenere

$$\|\nabla\delta\mathbf{u} - \nabla\delta\mathbf{u}_h\| \leq ch\|\delta q\|_{H^2(I)} \tag{30}$$

Per la stima in pressione cerchiamo di procedere nello stesso modo, utilizzando la condizione LBB al posto della coercività: poiché la LBB è valida solo negli spazi discreti, prendiamo una $\pi_h \in P_h$ e suddividiamo l'errore in pressione in tre termini, come segue

$$\|\delta p - \delta p_h\| \leq \|\delta p - \pi_h\| + \|\pi_h - \delta \hat{p}_h\| + \|\delta \hat{p}_h - \delta p_h\|$$

Cominciando dal secondo, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\|\delta \hat{p}_h - \pi_h\| \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(q_\sigma)(\mathbf{v}_h, \delta \hat{p}_h - \pi_h)}{\beta_h \|\nabla \mathbf{v}_h\|} = \\
&= \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(q_\sigma)(\mathbf{v}_h, \delta p - \pi_h) + a(q_\sigma)(\delta \mathbf{u} - \delta \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)}{\beta_h \|\nabla \mathbf{v}_h\|} \leq c(\|\nabla \delta \mathbf{u} - \nabla \delta \hat{\mathbf{u}}_h\| + \|\delta p - \pi_h\|)
\end{aligned} \tag{31}$$

Passando all'estremo inferiore in π_h, possiamo utilizzare la stima dell'errore di interpolazione e il punto 2 del Teorema 2.5 per controllare $\|\delta p - \pi_h\|$. Con la (29) e la (30) concludiamo che

$$\|\delta p - \delta p_h\| \leq ch \|\delta q\|_{H^2(I)}$$

per cui la tesi è verificata.

3. L'introduzione di una seconda "derivata intermedia" $(\delta\delta\hat{\mathbf{u}}_h, \delta\delta\hat{p}_h)$, che risolva nel discreto un problema con la stessa forzante di $S''(q)(\delta q, \delta q)$ nella prima equazione e 0 nella seconda, permette di seguire un procedimento analogo a quello del punto precedente, e così concludere la dimostrazione, purché valgano le seguenti richieste sui dati, per garantire che il funzionale a termine noto nella prima equazione di (8) sia in $[H^{-1}(\Omega_0)]^2$:

$$\eta, \nu \in W^{2,\infty}(\hat{\Omega}), \quad \mathbf{f} \in [H^1(\hat{\Omega})]^2$$

□

Lemma 2.18. *$\forall q_\sigma \in Q_\sigma^{ad}, \delta q \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ valgono le stime*

1. $|j(q_\sigma) - j_h(q_\sigma)| \leq ch^2$
2. $|j'(q_\sigma)(\delta q) - j_h'(q_\sigma)(\delta q)| \leq ch^2 \|\delta q\|_{H^2(I)}$
3. $|j''(q_\sigma)(\delta q, \delta q) - j_h''(q_\sigma)(\delta q, \delta q)| \leq ch^{1/4} \|\delta q\|^2_{H^2(I)}$

Dimostrazione. Fissiamo $q_\sigma \in Q_\sigma^{ad}$, $\delta q \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ e siano $(\mathbf{u}, p) = S(q_\sigma)$, $(\delta \mathbf{u}, \delta p) = S'(q_\sigma)(\delta q)$, $(\delta\delta \mathbf{u}, \delta\delta p) = S''(q_\sigma)(\delta q, \delta q)$.

1.

$$\begin{aligned}
|j(q_\sigma) - j_h(q_\sigma)| &= \frac{1}{2} |((\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)\, A_q, \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}_h)| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \|A_q\|_\infty (\|\nabla \mathbf{u}\| + \|\nabla \mathbf{u}_h\|) \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h\| \leq ch^2
\end{aligned}$$

avendo usato, nell'ultima disuguaglianza, la limitatezza di $A_q, \mathbf{u}, \mathbf{u}_h$ e il punto 1 del Lemma 2.17.

2.

$$\begin{aligned}
&|j'(q_\sigma)(\delta q) - j'_h(q_\sigma)(\delta q)| \le \\
&\le \frac{1}{2}|((\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}_h)| + \\
&+ |((\nabla \delta\mathbf{u} - \nabla \delta\mathbf{u}_h)\, A_q, \nabla \mathbf{u})| + |(\nabla \delta\mathbf{u}_h\, A_q, \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)| \le \\
&\le ch^2 \|\delta q\|_{H^2(I)}
\end{aligned}$$

infatti, $A'_{q,\delta q} \le c\|\delta q\|_{H^2(I)}$ (Lemma 1.7 [KV]) e valgono i Lemmi 2.5, 2.17.

3.

$$\begin{aligned}
&|j''(q_\sigma)(\delta q, \delta q) - j''_h(q_\sigma)(\delta q, \delta q)| \le \frac{1}{2}|((\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)\, A''_{q,\delta q,\delta q}, \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}_h)| + \\
&+ 2|((\nabla \delta\mathbf{u} - \nabla \delta\mathbf{u}_h)\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u})| + 2|(\nabla \delta\mathbf{u}_h\, A'_{q,\delta q}, \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)| + \\
&+ |((\nabla \delta\mathbf{u} - \nabla \delta\mathbf{u}_h)\, A'_{q,\delta q}, \nabla \delta\mathbf{u} + \nabla \delta\mathbf{u}_h)| + \\
&+ |((\nabla \delta\delta\mathbf{u} - \nabla \delta\delta\mathbf{u}_h)\, A_q, \nabla \mathbf{u})| + |(\nabla \delta\delta\mathbf{u}_h\, A_q, \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h)|
\end{aligned}$$

Dove non compaiono $\delta\delta\mathbf{u}, \delta\delta\mathbf{u}_h$, possiamo ancora usare il Lemma 1.7 [KV] per $A''_{q,\delta q,\delta q}$ e i risultati utilizzati nei punti precedenti per maggiorare con $ch^2\|\delta q\|^2_{H^2(I)}$. Per gli ultimi due termini, invece, usiamo anche il punto 3 del Lemma 2.17, sia per la stima, sia per le ipotesi sui dati che permettono di avere $\|\nabla \delta\delta\mathbf{u}_h\| \le c\|\delta q\|^2_{H^2(I)}$.

□

Con il lemma appena dimostrato, unitamente al Lemma 3.14 di [KV] di coercività di $j''(\overline{q})(\cdot,\cdot)$ e al Teorema 2.5 di regolarità della soluzione del problema di stato, valgono senza alcuna modifica le dimostrazioni dei Lemmi 3.42–3.43 di [KV]. Di conseguenza, per l'errore di discretizzazione del controllo si ha l'ordine di convergenza indicato nel seguente teorema. La convergenza delle variabili di stato segue, poi, direttamente dalla convergenza del controllo, insieme ai Lemmi 2.12, 2.17 (si noti che il secondo abbassa di un ordine la convergenza in h).

Teorema 2.19. *Sia $\overline{q}$ una soluzione locale di* (3) *che soddisfi le Ipotesi 2.9, 2.10. Allora esiste una successione $\{\overline{q}_{\sigma,h}\}_{\sigma,h>0}$ di ottimi locali del problema discreto*

$$\textit{Minimizzare } j_h(q_\sigma) \textit{ su } q_\sigma \in Q^{ad}_\sigma \tag{32}$$

tale che

$$\|\overline{q} - \overline{q}_{\sigma,h}\|_{H^2(I)} = \mathcal{O}(\sigma^2 + h^2)$$

$$\|S(\overline{q}) - S_h(\overline{q}_{\sigma,h})\|_{V\times P} = \mathcal{O}(\sigma^2 + h)$$

A Proprietà spettrali di A_q

Discutiamo qui le proprietà spettrali della matrice

$$A_q(x,y) = (\gamma_q DT_q^{-1} DT_q^{-T})(x,y) = \begin{pmatrix} 1-q(x) & -(1-y)q'(x) \\ -(1-y)q'(x) & \frac{1+(1-y)^2(q'(x))^2}{1-q(x)} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice è simmetrica, dunque ha autovalori reali, e poiché $det\, A_q = 1$, non possiamo ridurre a piacere $\|\rho(A_q)\|_\infty$, se non semplicemente avvicinando i due autovalori al valore di 1.
Cerchiamo dunque una stima della traccia di A_q, così da trovare perlomeno un maggiorante di $\max_{q\in Q^{ad}} \|\rho(A_q)\|_\infty$, infatti, detto λ il massimo dei due autovalori, abbiamo:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = tr\, A_q \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(tr\, A_q + \sqrt{(tr\, A_q)^2 - 4} \right) \tag{33}$$

Innanzitutto osserviamo che il discriminante del polinomio caratteristico è sempre positivo in Q^{ad}, in quanto basta che sia $q \leq 1$:

$$\begin{aligned} & (tr\, A_q)^2 \geq 4, \quad tr\, A_q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad tr\, A_q \geq 2, \quad q(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1+(1-y)^2 q'(x)^2}{1-q(x)} \geq 1 + q(x), \quad q(x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (1-y)^2 q'(x)^2 + 1 \geq 1 - q(x)^2, \quad q(x) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (1-y)^2 q'(x)^2 + q(x)^2 \geq 0, \quad q(x) \leq 1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Ora passiamo a cercare una dipendenza di $tr\, A_q$ dalle costanti che definiscono Q^{ad}:

$$tr\, A_q(x,y) = 1 - q(x) + \frac{1+(1-y)^2 q'(x)^2}{1-q(x)} \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[1 + (1-y)^2 (d_1+d_2)^2\right]$$

dove abbiamo usato la definizione di $\overline{Q}^{ad}$ all'inizio di queste note, la richiesta (4) e il Teorema Fondamentale del Calcolo su $q' \in H^1(\bar{I})$. Pertanto

$$\|\rho(A_q)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+(d_1+d_2)^2}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{(1+(d_1+d_2)^2)^2}{\varepsilon^2} - 4} \right) \qquad \forall q \in Q^{ad} \tag{34}$$

Poiché l'espressione trovata è crescente in $d_1 + d_2$, vediamo cosa succede quando al limite imponiamo $d_1 = d_2 = 0$ (il che vorrebbe dire $q \equiv 0$):

$$\|\rho(A_q)\|_\infty|_{d_1=d_2=0} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 4} \right)$$

e per avere una stima sensata dobbiamo richiedere $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Imponendo questo valore limite, otteniamo

$$\|\rho(A_q)\|_\infty|_{d_1=d_2=0,\ \varepsilon=\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2}$$

In conclusione, possiamo avvicinarci abbastanza bene al valore minimo del raggio spettrale, agendo sui parametri di Q^{ad}, ma non possiamo sperare di ridurlo ad un valore minore di 1.

B Dubbi

- Prima della Proposizione 2.2, servono anche delle condizioni sul tipo di rilevamento che si effettua?
- In (15) è giusto il segno della condizione su Γ_q?
- Nel Teorema 2.5 – punto 1, le condizioni di compatibilità sui dati al bordo quali devono essere?
- Per dopo il Corollario 2.15: nel Teorema 3.13 di [KV], serve che $j''(\overline{q})(\cdot,\cdot)$ sia bilineare per poter considerare $\|\delta q_n\| \equiv 1$? E poi perché deve andare proprio come $\frac{1}{n}$?

Riferimenti bibliografici

[GKM00] Max D Gunzburger, Hongchul Kim, and Sandro Manservisi. On a shape control problem for the stationary Navier-Stokes equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(6):1233–1258, 2000.

[KV] Bernhard Kiniger and Boris Vexler. A priori error estimates for finite element discretizations of a shape optimization problem.

[Qua08] Alfio Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer, 4° edition, 2008.