1 Caso diffusione-trasporto-reazione scalare

Siano $I = (0,1)$, $q \in Q = H^2(I) \cap H^1_0(I)$ e

$$\Omega_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \in (q(x),1)\}$$

Consideriamo il problema di ottimizzazione di forma

$$\min J(q,u) = \frac{1}{2}\|u-u_d\|^2_{L^2(\Omega_q)} + \frac{\alpha}{2}\|q''\|^2_{L^2(I)} + \frac{\beta}{2}\|q'\|^2_{L^2(I)} + \frac{\gamma}{2}\|q\|^2_{L^2(I)} \tag{1}$$

$$\text{sotto il vincolo} \quad \begin{cases} -div\,(\mu\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + div(\mathbf{c}u) + \sigma u = f & in\ \Omega_q \\ u = g_D & su\ \Gamma_D \subseteq \partial\Omega_q \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}u + \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}u = g_N & su\ \Gamma_N = \partial\Omega_q \backslash \Gamma_D \end{cases} \tag{2}$$

La formulazione debole del problema di stato (2) è

$$\begin{aligned} &\text{Trovare } u = \hat{u} + \mathcal{R}g_D \text{ con } \mathcal{R}g_D \text{ rilevamento continuo di } g_D \text{ e } \hat{u} \in V = H^1_{\Gamma_D}(\Omega_q), \text{ tale che} \\ &\qquad a_q(\hat{u},v) = F_q(v) \qquad \forall\ v \in V \\ &dove \quad a_q(u,v) = \int_{\Omega_q} [\ \mu\nabla u\cdot\nabla v + \mathbf{b}\cdot\nabla u\ v - \mathbf{c}u\cdot\nabla v + \sigma uv\ ] \\ &\qquad F_q(v) = \int_{\Omega_q} fv - \int_{\Gamma_N} g_N v - a_q(\mathcal{R}g_D, v) \end{aligned} \tag{3}$$

Per evitare domini degeneri, sia $\epsilon \in (0,1)$ fissato e consideriamo solo le q in

$$\bar{Q}^{ad} = \{q \in Q \mid q(x) \le 1-\epsilon\ \forall x \in I\}$$

cosicché la variabile di stato u sia la soluzione debole di (2) $\to u = \tilde{S}(q)$.
Osserviamo che la norma $|||q||| = \frac{\alpha}{2}\|q''\|^2_{L^2(I)} + \frac{\beta}{2}\|q'\|^2_{L^2(I)} + \frac{\gamma}{2}\|q\|^2_{L^2(I)}$ è equivalente alla norma $H^2(I)$ o $H^1(I)$, purché siano non nulli, rispettivamente, α o β, dacché $Q \subset H^1_0(I)$ [1]. Inoltre, possiamo restringere la nostra ricerca del controllo minimizzante a $Q^{ad} = \{q \in \bar{Q}^{ad} \mid |||q||| \le C\}$, con, ad esempio, $C = j(q \equiv 0) = J(0, \tilde{S}(0))$.

1.1 Esistenza

Per garantire il risultato di esistenza che riportato più avanti, possiamo utilizzare la *Preposition 1.2*, che ridimostriamo nel caso in esame

Proposizione 1 (Continuità di $\tilde{S}$). *Siano $q_n, q \in Q^{ad}, q_n \to q$ in $L^\infty(I)$ e $u_n = \tilde{S}(q_n)$. Allora $\exists\ \tilde{u} \in H^1_{\Gamma_D}(\hat{\Omega})$ tale che*

$$\tilde{u_n} \to \tilde{u}\ \ in\ H^1_{\Gamma_D}(\hat{\Omega})$$

e $u = \tilde{u}|_{\Omega_q} = \tilde{S}(q)$.

Dimostrazione. È sufficiente verificare le assunzioni (A1)-(A4) di [13], pp.38 e segg.

A1 Uniforme continuità di $a_q(u,v)\ \forall q \in Q$
Basta richiedere che siano $\mu, \sigma \in L^\infty(\hat{\Omega}),\ \mathbf{b}, \mathbf{c} \in .\left[L^\infty(\hat{\Omega})\right]^2$

A2 Uniforme coercività di $a_q(u,v)\ \forall q \in Q$
Basta richiedere che siano $\mu \ge \mu_0 > 0,\ \sigma - \frac{1}{2}div(\mathbf{b}-\mathbf{c}) \ge \gamma_0 \ge 0$ (con $\gamma_0 > 0$ nel caso $\Gamma_D = \emptyset$).

A3 Simmetria di $a_q(u,v)\ \forall q \in Q$
Non è verificata, ma non è necessaria (cfr. *Remark 2.9*).

A4 Continuità di $q \mapsto a_q$ (cfr. *Remark 2.9*)
Conseguenza della uniforme continuità e della dipendenza continua dell'integrale dal dominio.

[1] Dimostrazione simile al Lemma 1.1 di Kiniger

Sotto queste ipotesi, vale il *Lemma 2.12*, [13]. □

Vale, di conseguenza il *Theorem 1.3*, che riportiamo come

Teorema 1 (Esistenza)**.** *Il problema* (1)-(2) *ammette soluzione globale.*

Dimostrazione. Sia $\bar{j} = \inf_{q \in Q^{ad}} j(q) = \inf_{q \in Q^{ad}} J(q, \tilde{S(q)})$, che esiste perché $Q^{ad} \neq \emptyset$ e $J(q,u) \geq 0$, e sia $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Q^{ad}$, con i corrispondenti $u_n = S(q_n)$, tale che $\bar{j} = \lim_{n\to\infty} j(q_n)$. Essendo Q^{ad} limitato in H^2,[2] per Banach-Alaoglu negli spazi riflessivi e, poi, grazie al fatto che $H^2(I) \subset\subset C^0(I)$,[3] abbiamo che $\exists\, \bar{q} \in Q^{ad}$ tale che

$$\begin{aligned} q_{n_k} &\rightharpoonup \bar{q} \qquad \text{in } H^2(I) \\ q_{n_{k_l}} &\to \bar{q} \qquad \text{in } C^0(I) \end{aligned}$$

Grazie alla Proposizione 1 abbiamo anche che $u_{n_{k_l}} = \tilde{S}(q_{n_{k_l}}) \to \tilde{S}(\bar{q}) = \bar{u}$ in V.
Mostriamo ora la semicontinuitá inferiore debole di $j(q) = J(q, \tilde{S(q)})$: i termini nella sola q costituiscono una norma ($|||q|||$), dunque soddisfano la proprietà, mentre il primo addendo, $\frac{1}{2}\|\tilde{S(q)} - u_d\|^2_{L^2(\Omega_q)}$ è addirittura continuo, sempre grazie alla Proposizione 1. Abbiamo dunque

$$j(\bar{q}) \leq \liminf_{l\to\infty} j(q_{n_{k_l}}) = \bar{j}$$

e pertanto $(\bar{q}, \bar{u})$ è soluzione del problema (1). □

1.2 Formulazione alternativa (e altro)

Scriviamo ora una formulazione alternativa di (3), che fa riferimento al dominio $\Omega_0 = (0,1)^2$:

$$\text{Trovare } u = \hat{u}^q + \mathcal{R}g_D \text{ con } \mathcal{R}g_D \text{ rilevamento continuo di } g_D \text{ e } \hat{u}^q = \hat{u} \circ T_q \ \in V_0 = H^1_{\Gamma_D^0}(\Omega_0), \text{ tale che}$$
$$a_0(q)(\hat{u}^q, v) = F_0(q)(v) \qquad \forall\, v \in V_0$$
$$\text{dove} \quad a_0(q)(u,v) = \int_{\Omega_0} \left[\ (\mu \circ T_q)\nabla u^T A_q \nabla v + \nabla u^T DT_q^{-1}\ v\gamma_q(\mathbf{b} \circ T_q) - u\nabla v^T DT^{-1}(\mathbf{c} \circ T_q)\gamma_q + (\sigma \circ T_q)uv\gamma_q\ \right]$$
$$F_0(q)(v) = \int_{\Omega_0} (f \circ T_q)v\gamma_q - \int_{\Gamma_N^0} (g_N \circ T_q)v|DT_q\mathbf{t}| - a_0(q)(\mathcal{R}g_D, v)$$
$$\left(\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} \text{ vettore tangente}\right) \tag{4}$$

Osservazione 1. V. Osservazione alla formulazione alternativa di Stokes (7)

Consideriamo validi i *Lemmi 1.9-1.11* di Kiniger, in quanto trattano di continuità e dunque mi aspetto che siano validi, sotto ipotesi simili a quelle già poste nella Proposizione 1 su $\mu, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \sigma$.
REGOLARITA'?
Consideriamo la stessa discretizzazione di Kiniger.

1.3 Stime a priori

Possiamo dare un risultato analogo al *Corollary 3.4* di Kiniger

Proposizione 2. *L'operatore* S *è almeno due volte continuamente Fréchet-differenziabile.*

La dimostrazione ricalca quella del citato corollario: segnaliamo la definizione di S e delle sue derivate, nel caso $g_D = 0, g_N = 0$, perché non saprei come derivare il rilevamento e il termine di bordo ($\cdot^q = \cdot \circ T_q$)

1. $u = S(q) \in V$ è soluzione di (4)

[2] Per questa dimostrazione, serve $\alpha \neq 0$, perché dobbiamo stare in $H^2(I)$ per avere un risultato di immersione **compatta**
[3] Immersione di Sobolev $\Rightarrow H^2(I) \subset\subset H^1(I) \hookrightarrow C^0(I)$, perché siamo in 1D

2. $\delta u = S'(q)(\delta q)$ è soluzione di

$$\begin{aligned}
&a_0(q)(\delta u, v) + (\nabla^T u, \mu^q A'_{q,\delta q}\nabla v + \nabla\mu^q \cdot \mathbf{V}_{\delta q} A_q \nabla v)+\\
&+ (v\nabla u^T, \gamma_q (DT_q^{-1})'\delta q \mathbf{b}^q + \gamma_q DT_q^{-1}(\nabla \mathbf{b}^q \mathbf{V}_{\delta q}) - DT_q^{-1}\delta q \mathbf{b}^q)+\\
&- (u\nabla v^T, \gamma_q (DT_q^{-1})'\delta q \mathbf{c}^q + \gamma_q DT_q^{-1}(\nabla \mathbf{c}^q \mathbf{V}_{\delta q}) - DT_q^{-1}\delta q \mathbf{c}^q)+\\
&+ (u, v(\nabla\sigma^q \cdot \mathbf{V}_{\delta q} - \sigma^q \delta q)) =\\
&= (\nabla f^q \cdot \mathbf{V}_{\delta q}, v\gamma_q) - (f^q, v\delta q)
\end{aligned}$$

3. $\delta\tau u = S''(q)(\delta q, \tau q)$ è soluzione di

   dove $\tau u = S'(q)(\tau q)$

2 Caso Stokes

Consideriamo ora il problema di Stokes generalizzato

$$\begin{cases} \eta\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \\ div\ \mathbf{u} = 0 & in\ \Omega_q \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_D & su\ \Gamma_D \subset \partial\Omega_q \\ \nu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} - p\mathbf{n} = \mathbf{g}_N & su\ \Gamma_N = \partial\Omega_q \backslash \Gamma_D \end{cases} \tag{5}$$

con formulazione debole

Trovare $(\mathbf{u}, p) = (\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{R}\mathbf{g}_D, p)$ con $\mathcal{R}\mathbf{g}_D$ rilevamento continuo di $\mathbf{g}_D$ e $(\hat{\mathbf{u}}, p) \in (V, \Pi) = ([H^1_{\Gamma_D}(\Omega_q)]^2, L^2(\Omega_q))$, tale che

$$\begin{gathered}
\begin{cases} a_q(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b_q(\mathbf{v}, p) = F_q(\mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in V \\ b_q(\hat{\mathbf{u}}, \pi) = G_q(\pi) & \forall\ \pi \in \Pi \end{cases}\\
\text{dove } a_q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_q} \eta\mathbf{u}\mathbf{v} + \nu\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\\
b_q(\mathbf{v}, \pi) = -\int_{\Omega_q} \pi\ div\ \mathbf{v}\\
F_q(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_q} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v} - a_q(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \mathbf{v})\\
G_q(\pi) = -b_q(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \pi)
\end{gathered} \tag{6}$$

NB Se $\Gamma_N = \emptyset$, allora sia $\Pi = L^2_0(\Omega_q)$.

2.1 Formulazione trasformata

Trasferendo il problema sul dominio di riferimento $\Omega_0 = (0,1)^2$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\text{Trovare } (\mathbf{u}, p) = (\hat{\mathbf{u}}^q + \mathcal{R}\mathbf{g}_D, p^q) = (\hat{\mathbf{u}} \circ T_q + \mathcal{R}\mathbf{g}_D, p \circ T_q) &\text{ con } \mathcal{R}\mathbf{g}_D \text{ rilevamento continuo di } \mathbf{g}_D \\
\text{e } (\hat{\mathbf{u}}^q, p^q) \in (V_0, \Pi_0) = ([H^1_{\Gamma^0_D}(\Omega_0)]^2, L^2(\Omega_0)), &\text{ tale che} \\
&\begin{cases} a_0(q)(\hat{\mathbf{u}}^q, \mathbf{v}) + b_0(q)(\mathbf{v}, p^q) = F_0(q)(\mathbf{v}) & \forall\ \mathbf{v} \in V_0 \\ b_0(q)(\hat{\mathbf{u}}^q, \pi) = G_0(q)(\pi) & \forall\ \pi \in \Pi_0 \end{cases} \\
\text{dove} \qquad a_0(q)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \gamma_q + \nu\ tr(\nabla \mathbf{u} A_q \nabla \mathbf{v}^T) \\
b_0(q)(\mathbf{v}, \pi) &= -\int_{\Omega_0} \pi\ tr(\nabla \mathbf{v} DT_q^{-1})\gamma_q = -\int_{\Omega_0} \pi\ DT^{-T} : \nabla \mathbf{v}\ \gamma_q \\
F_0(q)(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\ \gamma_q - \int_{\Gamma^0_N} (\mathbf{g}_N \circ T_q) \cdot \mathbf{v} |DT_q \mathbf{t}|\ - a_0(q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \mathbf{v}) \\
G_q(\pi) &= -b_0(q)(\mathcal{R}\mathbf{g}_D, \pi)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

<u>**NB**</u> Se $\Gamma_N = \emptyset$, allora sia $\Pi_0 = L^2_0(\Omega_0)$.

Osservazione 2. $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{X}}{ds}$ è il vettore tangente. La validità della formulazione riportata deriva dal fatto che nella configurazione di riferimento abbiamo i lati paralleli agli assi coordinati e lunghi 1, dunque possiamo usare come ascissa curvilinea direttamente una delle coordinate di riferimento e avere $\left|\frac{d\mathbf{X}}{ds}\right| = 1$.

Ora abbiamo (numerazione lati "alla FreeFem")

$$
DT_q(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-Y)q'(X) & 1-q(X) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

e pertanto

$$
\begin{aligned}
|DT_q \mathbf{t}|_{\Gamma^0_1} = |DT_q \mathbf{t}|_{\Gamma^0_3} &= \sqrt{1 + [(1-Y)q'(X)]^2} \\
|DT_q \mathbf{t}|_{\Gamma^0_2} = |DT_q \mathbf{t}|_{\Gamma^0_4} &= 1 - q(X)
\end{aligned}
$$