A Proprietà spettrali di A_q

Discutiamo qui le proprietà spettrali della matrice

$$A_q(x,y) = (\gamma_q DT_q^{-1} DT_q^{-T})(x,y) = \begin{pmatrix} 1-q(x) & -(1-y)q'(x) \\ -(1-y)q'(x) & \frac{1+(1-y)^2(q'(x))^2}{1-q(x)} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice è simmetrica, dunque ha autovalori reali, e poiché $det\, A_q = 1$, non possiamo ridurre a piacere $\|\rho(A_q)\|_\infty$, se non semplicemente avvicinando i due autovalori al valore di 1.
Cerchiamo dunque una stima della traccia di A_q, così da trovare perlomeno un maggiorante di $\max_{q\in Q^{ad}} \|\rho(A_q)\|_\infty$, infatti, detto λ il massimo dei due autovalori, abbiamo:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = tr\, A_q \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(tr\, A_q + \sqrt{(tr\, A_q)^2 - 4}\right) \tag{33}$$

Innanzitutto osserviamo che il discriminante del polinomio caratteristico è sempre positivo in Q^{ad}, in quanto basta che sia $q \leq 1$:

$$\begin{aligned}
&(tr\, A_q)^2 \geq 4, \quad tr\, A_q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad tr\, A_q \geq 2, \quad q(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1+(1-y)^2 q'(x)^2}{1-q(x)} \geq 1 + q(x), \quad q(x) \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (1-y)^2 q'(x)^2 + 1 \geq 1 - q(x)^2, \quad q(x) \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (1-y)^2 q'(x)^2 + q(x)^2 \geq 0, \quad q(x) \leq 1 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Ora passiamo a cercare una dipendenza di $tr\, A_q$ dalle costanti che definiscono Q^{ad}:

$$tr\, A_q(x,y) = 1 - q(x) + \frac{1+(1-y)^2 q'(x)^2}{1-q(x)} \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[1 + (1-y)^2(d_1+d_2)^2\right]$$

dove abbiamo usato la definizione di $\overline{Q}^{ad}$ all'inizio di queste note, la richiesta (4) e il Teorema Fondamentale del Calcolo su $q' \in H^1(\bar{I})$. Pertanto

$$\|\rho(A_q)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+(d_1+d_2)^2}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{(1+(d_1+d_2)^2)^2}{\varepsilon^2} - 4}\right) \qquad \forall q \in Q^{ad} \tag{34}$$

Poiché l'espressione trovata è crescente in $d_1 + d_2$, vediamo cosa succede quando al limite imponiamo $d_1 = d_2 = 0$ (il che vorrebbe dire $q \equiv 0$):

$$\|\rho(A_q)\|_\infty|_{d_1=d_2=0} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 4}\right)$$

e per avere una stima sensata dobbiamo richiedere $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Imponendo questo valore limite, otteniamo

$$\|\rho(A_q)\|_\infty|_{d_1=d_2=0,\ \varepsilon=\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2}$$

In conclusione, possiamo avvicinarci abbastanza bene al valore minimo del raggio spettrale, agendo sui parametri di Q^{ad}, ma non possiamo sperare di ridurlo ad un valore minore di 1.