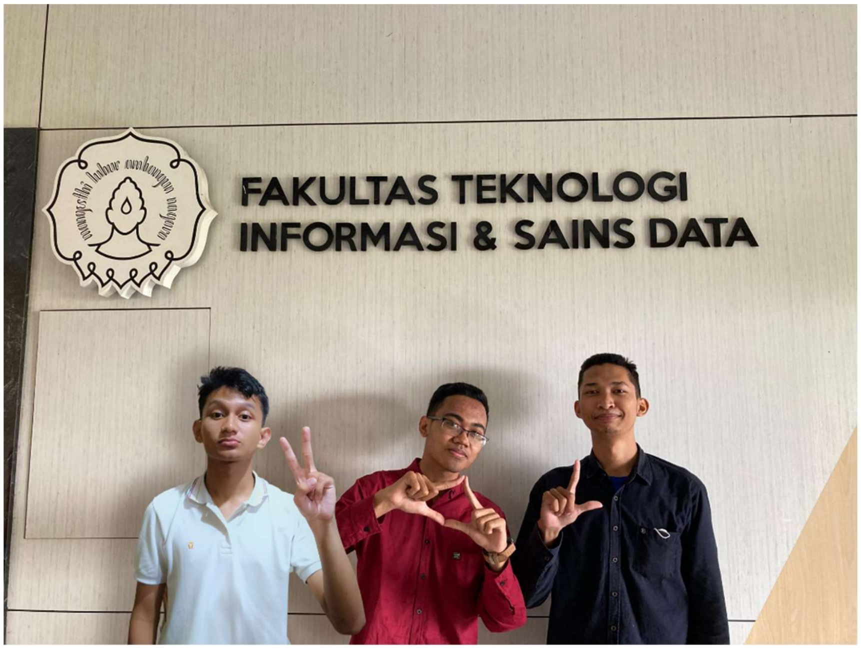
LAPORAN PROYEK ALJABAR LINEAR

APLIKASI ALJABAR LINEAR PADA PERSAMAAN LINEAR

DOSEN PENGAMPU: Prof. Drs. Bambang Harjito, M.App.Sc., Ph.D.



DISUSUN OLEH:

1. **FARRAS ARKAN WARDANA (L0123052)**
2. **FATHONI NUR HABIBI (L0123054)**
3. **IVAN WAHYU NUGROHO (L0123068)**

PROGRAM STUDI INFORMATIKA

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS DATA

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

2024

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

A. DESKRIPSI UMUM TUGAS PROJECT PEMBUATAN APLIKASI

Tugas Project ini adalah membuat program penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL), mencari determinan dan invers matriks apabila ada, mendapatkan LU-Factorization, membuktikan sebuah matrik terdiagonalisasi atau tidak, serta mencari nilai Singular Value Dekomposision (SVD) dalam bahasa pemrograman python dengan menggunakan metode eliminasi Gauss dan/atau Gauss-Jordan. SPL dapat memiliki penyelesaian tunggal, banyak penyelesaian, atau penyelesaian tidak ada.

Diberikan system persamaan linear (SPL) dengan n peubah (variable) dan m persamaan berikut ini:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

SPL (n x m) dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode eliminasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan. Program harus dapat menangani kasus-kasus sebagai berikut:

a) SPL memiliki solusi unik, tampilkan solusinya.
b) SPL memiliki solusi tak terbatas, tampilkan solusinya dalam bentuk parameter.
c) SPL tidak memiliki solusi, tuliskan tidak ada solusinya.

Program yang dibuat juga harus dapat mencari nilai determinan dan invers apabila ada, LU factorisasi, persamaan polynomial karakteristik, nilai eigen dan Vektor pada matrik persegi (n x n) dan membuktikan bahwa matrik tersebut dapat membuktikan bahwa Matrik tersebut dapat didiagonalisasi atau tidak.

B. BAHASA PEMROGRAMAN

1. Bahasa program yang digunakan adalah Python dengan menggunakan fungsi fungsi yang sudah ada maupun dapat membuat fungsi sendiri.
2. Program tidak harus berbasis GUI, namun akan ada tambahan nilai bila berbasis GUI.

C. SPESIFIKASI UMUM

1. Program harus dapat menerima input data dari
   - Papan ketik
2. Keluaran program harus dapat ditampilkan ke:
   - Layar monitor
   - Simpan ke dalam arsip

D. STUDI KASUS

1. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini:

a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Sistem persamaan berbentuk

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 14x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 12x_4 &= 1 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Carilah polynomial characteristic, eigenvalues, eigenvector dan (jika mungkin) carilah matrik P yang mempunyai invers sehingga P^{-1} AP adalah diagonal

$$\text{g. } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{h. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Carilah a sebuah SVD dari matrik berikut ini

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b. } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Selesaikan persamaan linear dengan menggunakan eliminasi Gauss

$$(1+2i)x_1 + (3+2i)x_2 + (-2+2i)x_3 = 11+i,$$

$$(4-i)x_1 + (-1+2i)x_2 - x_3 = 8+3i,$$

$$(1+i)x_1 + 2ix_2 = 4+8i;$$

BAB II
LANDASAN TEORI

A. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Sistem persamaan linear merupakan persamaan aljabar. Sistem persamaan linear merupakan suatu sistem yang terdiri dari sekumpulan persamaan linear yang berisikan variabel-variabel. Sistem persamaannya bisa terdiri dari satu variabel, dua variabel, atau lebih. Nilai dari variabel tersebut harus ditentukan sehingga semua persamaan tersebut dapat dipenuhi secara bersamaan. Persamaan linear adalah sistem persamaan aljabar yang pada setiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal (Zulkarnain dan Sarassanti, 2022).

Secara umum, sistem persamaan linear dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$AX = B$$

Dimana A merupakan matriks koefisien yang berisi koefisien-koefisien dari persamaan linear, X merupakan vektor variabel yang memuat variabel-variabel yang perlu dihitung, dan B adalah vektor konstanta yang berisi konstanta-konstanta di sisi kanan persamaan linear.

B. METODE ELIMINASI GAUSS

Metode eliminasi gauss merupakan suatu metode untuk memproses nilai-nilai yang berada dalam suatu matriks untuk diubah menjadi bentuk matriks yang sederhana. Dengan menggunakan operasi baris elementer, metode ini akan mengubah bentuk matriks awal menjadi matriks segitiga atas atau segitiga bawah. Suatu persamaan linear dapat diselesaikan dengan metode eliminasi gauss. Caranya dengan mengubah persamaan tersebut ke dalam bentuk matriks teraugmentasi, kemudian matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer. Setelah menjadi matriks baris, langkah selanjutnya yaitu mensubstitusi balik untuk mendapatkan nilai dari tiap variabel. Dengan menggunakan metode ini, suatu persamaan linear dapat diselesaikan secara efektif.

C. METODE ELIMINASI GAUSS – JORDAN

Metode eliminasi gauss - jordan merupakan suatu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Pada dasarnya, metode ini seperti metode eliminasi gauss tetapi terdapat suatu pengembangan, yaitu dengan meneruskan operasi baris elementer hingga mendapatkan bentuk matriks eselon baris tereduksi. Metode eliminasi gauss - jordan menghasilkan bentuk matriks yang lebih sederhana sehingga tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur karena nilai variabel dapat diperoleh secara langsung dari matriks augmented terakhir.

D. MATRIKS ESELON TEREDUKSI

Matriks eselon tereduksi, disebut juga dengan matriks baris tereduksi, ialah suatu bentuk matriks segitiga atas dimana setiap *leading entry*-nya bernilai 1. Lalu semua elemen yang terdapat di atas dan di bawah *leading entry* harus bernilai 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keterangan: * adalah sembarang nilai

Berikut ini merupakan sifat sifat dari matriks eselon tereduksi:

1. Apabila terdapat suatu baris yang semua elemennya tidak bernilai 0, maka elemen pertama bukan 0 dari baris tersebut harus bernilai 1.
2. Elemen pertama yang bukan 0 pada baris berikutnya, letaknya harus di sebelah kanan dari nilai 1 pada baris sebelumnya.
3. Baris yang semua elemennya bernilai 0 maka letaknya harus pada bagian bawah.
4. Apabila kolom dalam matriks memiliki nilai 1 utama, maka semua elemen selain 1 utama pada kolom tersebut harus bernilai 0.

Dengan mengubah bentuk matriks menjadi matriks eselon tereduksi, suatu sistem persamaan dapat lebih mudah untuk diselesaikan karena mempunyai bentuk yang terstruktur dan informasi yang didapatkan lebih sederhana dibanding bentuk matriks sebelum direduksi. Selain itu, matriks eselon tereduksi dapat digunakan untuk menghitung ruang kolom dan ruang nol suatu matriks.

E. POLINOMIAL KARAKTERISTIK

Polinomial karakteristik matriks merupakan suatu polinomial yang memuat nilai eigen sebagai akarnya dan memiliki sifat invarian pada kesamaan matriks. Misal matriks A adalah matriks yang berukuran nxn, maka $det(A - \lambda I) = 0$ disebut persamaan polinomial karakteristik dari A *p(A)*, dengan skalar-skalar λ adalah nilai eigen dari matriks A. Dengan menggunakan polinomial karakteristik, kita dapat menyelesaikan masalah eigen, analisis struktur matriks, dan diagonalisasi matriks dengan mudah dan efisien.

F. NILAI EIGEN

Nilai eigen (*eigenvalues*) merupakan akar dari polinomial karakteristik yang terkait dengan matriks berukuran nxn. Nilai eigen atau akar karakteristik adalah skalar yang digunakan untuk mengubah vektor eigen, sehingga terdapat suatu hubungan antara nilai eigen dengan vektor eigen. Persamaan eigen didefinisikan sebagai $Ax = \lambda$x, dimana A merupakan matriks persegi, x adalah vektor eigen, dan λ adalah nilai eigen.

G. VEKTOR EIGEN

Vektor eigen (*eigenvector*) merupakan vektor non nol yang tidak mengubah arah apabila diterapkan suatu transformasi linear, tetapi akan berubah dengan perkalian skalar. Persamaan eigen $Ax = \lambda$x, dimana x adalah vektor eigen. Vektor eigen x menyatakan matriks kolom yang jika dikalikan dengan sebuah matriks n x n menghasilkan vektor lain yang merupakan kelipatan dari vektor itu sendiri. Sehingga dalam persamaan eigen tersebut menyebabkan vektor x menyusut atau memanjang secara searah maupun secara terbalik terhadap nilai eigen.

H. DIAGONALISASI

Diagonalisasi merupakan suatu cara untuk mengubah matriks menjadi bentuk diagonal dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Tetapi, tidak semua matriks dapat didiagonalisasi. Suatu matriks A dikatakan dapat didiagonalisasi apabila terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga D = P^{-1}AP. Dimana matriks P memiliki elemen berupa vektor eigen dari matriks A.

I. SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

Singular Value Decomposition (SVD) adalah suatu metode yang memecah matriks ukuran m x n menjadi tiga bagian utama yaitu matriks singular, vektor singular kiri, dan vektor singular kanan.

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

Matriks U merupakan matriks vektor singular kiri yang berisi vektor singular yang menyusun sumbu utama. Matriks Σ merupakan matriks singular yang mengandung nilai-nilai singular yang merepresentasikan pentingnya setiap vektor singular dalam matriks asli. Dan matriks *V^T* adalah matriks vektor singular kanan yang berisi vektor singular yang mempengaruhi atau dipengaruhi oleh matriks asli.

SVD berguna dalam pemampatan data karena dapat mengidentifikasi pola dan struktur penting pada matriks asli, serta menghapus informasi yang kurang penting. Dalam pengaplikasiannya, SVD sering digunakan untuk mereduksi dimensi, memproses citra, pengenalan pola, analisis data, kompresi data, dan rekomendasi sistem.

BAB III
IMPLEMENTASI PROGRAM

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai bagian-bagian dari program. Program ini memiliki tiga bagian utama yaitu main menu program, matriks, dan sistem persamaan. Main menu program sebagai tampilan utama yang akan menerima input dari pengguna. Matriks memuat fungsi-fungsi untuk operasi matriks seperti mencari invers, determinan matriks, mencari *eigenvalues, eigenvector,* polynomial karakteristik, dan sebagainya. Lalu untuk sistem persamaan memuat fungsi fungsi untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan menggunakan metode eliminasi gauss, gauss – jordan, dan lainnya.

A. Main Menu Program

1. Import

```
import os
import datetime
from colorama import Fore, Style
```

```
import LinAlg as la
from colorama import Fore, Style

menu = la.Menu()
matriks = la.Matriks([])
spl = la.SistemPersamaan([], [])
```

Kode di atas mengimpor beberapa *library* yang disediakan oleh bahasa *python*. *Library os* berisi modul *os* yang menyediakan antarmuka ke fungsionalitas sistem operasi, sehingga pengguna dapat melakukan interaksi dengan sistem operasi seperti mengelola file. *Library datetime* berisi modul yang berfungsi untuk memanipulasi tanggal, waktu, dan perbedaan waktu. Selain mengimpor *library* dari *python,* kode tersebut juga mengimpor suatu folder bernama LinAlg, dimana dalam folder tersebut terdapat file berupa menu, matriks, dan sistem persamaan yang nantinya digunakan untuk menyelesaikan persoalan.

2. Pemilihan Menu dan Submenu

```
# Menampilkan Menu
def showMenu(self):
    self.__printMenu()
    choice = int(input())
    self.__setPilihan(choice)
    clear_console()

# Menampilkan Submenu
def showSubMenu(self):
    self.__printSubMenu()
    choice = int(input())
    self.__setPilihan(choice)
    clear_console()
```

Kode di atas akan menampilkan beberapa menu dan submenu yang terdapat pada program kalkulator. Menu dari kalkulator memuat sistem persamaan linear, determinan matriks, invers, transpose matriks, dan sebagainya. Sedangkan submenu terdiri dari metode gauss, gauss – jordan, dan balikan matriks. Selanjutnya pengguna diminta untuk memasukkan menu dan submenu yang diinginkan. Kemudian program akan menerima input, dan dengan fungsi *match case* untuk mengarahkan pengguna menuju program operasi dari menu dan submenu yang telah dipilih.

3. Kembali ke Menu

```
def backTo(self):
    back = str(input("Kembali Ke Menu (y/n) : "))

    # Memberikan pengembalian ke menu atau tidak
    self.setisLoop(True) if (back == 'y' or back == 'Y') else self.setisLoop(False)

    # Jika kembali ke menu, maka console akan dibersihkan
    clear_console() if self.getIsLoop() else ""
```

Kode tersebut merupakan menu untuk kembali ke menu utama. Setelah operasi matriks selesai, program akan menanyakan kepada pengguna apakah ingin kembali ke menu untuk melakukan operasi kembali atau tidak. Jika pengguna memilih 'y' atau 'Y', program akan menampilkan kembali menu dari kalkulator. Jika memilih 'n' program kalkulator akan selesai.

B. Matriks

1. Import

```
import numpy as np
import sympy as sp
import scipy.linalg as sl
import tabulate as tl
from colorama import Fore, Style
import math
```

Kode di atas mengimpor beberapa *library* yang akan digunakan dalam operasi matriks. *Library numpy* berfungsi untuk melakukan operasi matematika, aljabar linear, tranformasi fourier, dan lainnya. *Library sympy* berguna untuk menyelesaikan suatu persamaan, diferensial, dan masalah matematik yang menggunakan simbol aljabar, bukan numerik. *Library scipy* berfungsi untuk komputasi ilmiah, *library math* menyediakan beberapa fungsi untuk menyelesaikan matematika dasar. Lalu *library tabulate* berguna untuk membuat tabel, dan menampilkan data secara terstruktur.

2. Konstruktor Matriks

```
# Konstruktor untuk kelas Matriks
def __init__(self, data:list):
    self.__data = np.array(data)
    self.__shape = self.__data.shape
```

Kode diatas akan membuat objek dari kelas tersebut dan menyediakan dta dalam bentuk list, kemudian data akan diubah menjadi array NumPy, dan bentuk array akan disimpan sebagai atribut dari objek. Array tersebut nantinya akan digunakan dalam operasi matriks.

3. Menerima Input dan Menampilkan Matriks

```
# Mengambil input dari user
def takeInput(self):
    print("-"*50)
    print("Masukkan Ordo Matriks")
    baris = int(input("Banyaknya Baris : "))
    kolom = int(input("Banyaknya Kolom : "))
    print("-"*50)
```

Kode di atas akan meminta pengguna untuk memasukkan berapa banyak baris dan kolom dari suatu matriks. Kemudian program akan menerima input tersebut dan meminta pengguna untuk memasukkan nilai dari tiap elemen matriks.

```python
# Mengecek apakah matriks yang diberikan sesuai ordo atau tidak
if(len(matriks) == baris and len(matriks[0]) == kolom):
    self.__data = np.array(matriks)
```

Setelah itu program akan mengecek apakah input elemen matriks yang dimasukkan pengguna sesuai dengan ordo matriks yang telah dituliskan sebelumnya. Lalu jika sesuai, program akan menyimpan matriks tersebut dalam bentuk array *numpy* yang disimpan dalam objek.

```python
# Mencetak matriks
def showMatriks(self, data:np.array):
    print("Matriks Anda : ")
    print(data)
    print("-"*50)
```

Lalu dengan kode tersebut program akan menampilkan matriks yang sebelumnya telah dimasukkan dan disimpan dalam array *numpy.*

4. Method LU Factorization

```python
# LU Factorization
def __LUFactorization(self, data:np.array) ->tuple:
    P, L, U = sl.lu(data)
    return (P, L, U)
```

Kode di atas merupakan cara untuk mencari faktorisasi LU pada sebuah matriks. Kode tersebut menggunakan fungsi 'lu' yang terdapat pada *library sympy* (sl.lu(data)). Selanjutnya program akan mengembalikan tiga matriks, yaitu matriks permutasi (P), matriks *lower* (L), dan matriks *upper* (U).

5. Method Determinan Matriks

```python
# Determinan matriks
def det(self, data:np.array) -> np.array:
    if(data.shape[0] != data.shape[1]):
        return "Matriks Tidak Berbentuk Persegi"
    return np.linalg.det(data)
```

Kode tersebut akan menghitung nilai determinan pada suatu matriks dengan menggunakan fungsi yang ada pada *library numpy* yaitu np.linalg.det().

```python
# Metode Gaussian untuk Determinan
def __determinan_dan_bentuk_eselon(self):
    # Mengonversi matriks input ke tipe data floating-point
    matriks_eselon = self.getData().astype(float)

    # Mendapatkan jumlah baris dan kolom dalam matriks
    num_baris, num_kolom = matriks_eselon.shape

    # Inisialisasi variabel untuk melacak baris pivot saat ini
    baris_pivot = 0
```

```python
def __determinant_and_echelon_form(self):
    echelon_matrix = self.getData().astype(float)
    num_rows, num_cols = echelon_matrix.shape
    pivot_row = 0

    # Iterasi tiap kolom
    for j in range(num_cols):
        non_zero_indices = np.nonzero(echelon_matrix[pivot_row:, j])[0]
        if non_zero_indices.size == 0:
            continue  # Geser ke elemen berikutnua
        pivot_row_index = pivot_row + non_zero_indices[0]
```

Selanjutnya kedua kode tersebut akan menghasilkan determinan dari sebuah matriks dengan eliminasi gauss dan gauss – jordan. Pada dasarnya, program yang dituliskan dan prosesnya hampir mirip. Pertama program akan menggunakan pivot row untuk mendeteksi baris. Lalu menjalankan sebuah iterasi tiap kolom untuk mencari indeks elemen non nol. Jika tidak ada, program akan melanjutkan ke kolom berikutnya. Lalu program akan melakukan pertukaran baris pivot dan melakukan operasi baris untuk menghasilkan elemen di luar pivot menjadi nol. Program akan terus berjalan hingga mencapai batas jumlah baris atau kolom.

```python
def __determinan_dari_invers_matriks(self, data:np.array) -> tuple:
    inv_matriks = np.linalg.inv(data)
    det = 1/(np.linalg.det(inv_matriks))
    return (inv_matriks, det)
```

Kemudian kode berikutnya merupakan method untuk mencari nilai determinan dari sebuah matriks dengan menggunakan invers matriks. Kode tersebut menggunakan fungsi pada *library numpy* untuk mencari invers matriks, yaitu np.linalg.inv(). Setelah itu program mencari nilai determinan dengan rumus det=1/det invers matriks.

6. Method Invers Matriks

```python
# Invers matriks
def invers(self):
    if(self.det() == 0):
        return "Matriks Singular"
    return np.linalg.inv(self.__data)
```

Kode di atas akan mencari invers pada suatu matriks dengan menggunakan fungsi yang ada pada *library numpy* yaitu np.linalg.inv.

```python
    # Mengunakan Gaussian untuk mencari inverse matriks
def __gaussianInverse(self, matrix:np.array) -> tuple:
    matrix_join = np.hstack((matrix, np.eye(matrix.shape[0])))
    matriks = sp.Matrix(matrix_join)
    matriks_akhir = np.array(matriks.echelon_form()).astype(float).round(3)

    matriks_akhir2 = np.array(matriks.rref()[0]).astype(float).round(3)
    inverse_part = np.array(matriks_akhir2[:, matrix.shape[1]:]).astype(float)
    return (matriks_akhir, matriks_akhir2, inverse_part)
```

Metode tersebut akan mendapatkan invers suatu matriks dengan eliminasi gauss. ‘matrix’ yang terdapat pada array *numpy* akan digabungkan, kemudian ‘matrix’ tersebut akan diubah bentuknya menjadi matriks *sympy*. Selanjutnya dengan fungsi .echelon_form(), program akan menghitung bentuk echelon baris dari matriks. Kemudian menggunakan fungsi .rref() untuk menghitung bentuk reduksi baris tereduksi dari matriks. Selanjutnya program akan mengembalikan nilai berupa matriks akhir, matriks akhir 2, dan invers matriks.

```python
# Menggunakan Gauss Jordan untuk menemukan matriks invers
def printGaussJordanInv(self):
    output = ""
    output += "Matriks Invers dengan Metode Elimnasi Gauss Jordan\n".upper()
    output += "-"*50 + "\n"

    if(self.det(self.getData().round(3) == 0)):
        print("Matriks Anda (A) : ")
        print(tl.tabulate(data, tablefmt="fancy_grid"))
        print("Determinan matriks : 0".upper())
        print("Matriks singular".upper())
        print("-"*50)

        output += "Matriks Anda (A) : \n"
        output += tl.tabulate(data, tablefmt="fancy_grid")
        output += "\nDeterminan matriks : 0\n".upper()
        output += "Matriks Singular\n".upper()
        output += "-"*50 + "\n"
    else :
        data = self.getData()
        _, rref, inv = self.__gaussianInverse(data)
```

Kode diatas berisi method untuk menyelesaikan invers dengan Gauss – Jordan. Dengan menggunakan fungsi .rref(), program akan menghitung bentuk reduksi baris tereduksi dari matriks. Dari proses tersebut akan didapatkan suatu invers matriks.

```
else:
    adj = self.__take_adjoin(data)
    inv = np.linalg.inv(data)
    print("Matriks A : ")
    print(tl.tabulate(data, tablefmt='fancy_grid'))
    print(f"Determinan dari A (det(A)): {self.det(data)}")
    print("Adjoin dari A (adj(A)) : ")
    print(tl.tabulate(adj, tablefmt='fancy_grid'))
    print("Invers Matriks = (1/det(A)) * adj(A)")
    print("Invers Matriks : ")
    print(tl.tabulate(inv, tablefmt='fancy_grid'))
```

Selanjutnya untuk mencari nilai invers dengan metode balikan, langkah pertama yaitu mencari adjoin dan determinan matriks. Selanjutnya untuk mencari invers dengan rumus **invers = 1/det(A) * adj (A).**

7. **Method Adjoin Matriks**

```
# Mengambil adjoin suatu matriks
def __take_adjoin(self, matrix:np.array) -> np.array:
    matriks = sp.Matrix(matrix)
    adj_matriks = matriks.adjugate()

    return np.array(adj_matriks)
```

Kode di atas akan mencari adjoin dari suatu matriks. Dalam *library sympy* terdapat fungsi .adjugate() yang digunakan untuk mencari adjoin dari matriks.

8. **Method Eigen Value, Eigen Vector, dan Polinomial Karakateristik**

```
def __eigen(self, data:np.array) -> tuple:
    eig_val, eig_vec = np.linalg.eig(data)
    x = sp.symbols('x')
    data = sp.Matrix(data)
    char_pol = data.charpoly(x)
    roots_char_pol = sp.roots(char_pol)
    return (char_pol, roots_char_pol, eig_val, eig_vec)
```

Kode di atas merupakan kode untuk mencari *eigenvalues, eigenvector,* dan karakteristik polynomial. Untuk mencari *eigenvalues* dan *eigenvector* kode tersebut menggunakan fungsi pada *library numpy,* yaitu np.linalg.eig(). Untuk mencari karakterisitik polynomial menggunakan .charpol(), sedangkan untuk mencari akarnya menggunakan fungsi pada *library sympy*, yaitu sp.roots().

9. **Method Diagonalization**

```
# Diagonalization
def __diagonalization(self, data: np.array) -> tuple:
    data = sp.Matrix(data)
    P, D = data.diagonalize()
    P = np.array(P).astype(float)
    D = np.array(D).astype(float)
    return (P, D)
```

Kode tersebut akan melakukan diagonalisasi pada sebuah matriks. Pada mulanya 'data' yang merupakan array *numpy* akan diubah menjadi matriks *sympy.* Selanjutnya kode di atas menggunakan metode .diagonalize untuk mendiagonalisasi matriks dan mengembalikan dua objek yaitu P (matriks transformasi) dan D (matriks diagonal).

10. **Method Singular Value Decomposition (SVD)**

```
# Singular Value Decomposition
def __svd(self, data:np.array) -> tuple:
    U, S, VT = np.linalg.svd(data, full_matrices=False)
    return (U, np.diag(S), VT)
```

Method ini digunakan untuk menyelesaikan matriks dengan memakai Singular Value Decomposition (SVD). Kode tersebut menggunakan fungsi .svd yang telah tersedia di *library numpy*. Program akan mengembalikan nilai yang dipecah menjadi tiga matriks yaitu matriks U, S, dan VT.

11. **Method Transpose Matriks**

```
# Transpose matriks
def __transpose(self):
    return self.getData().T
```

Method tersebut digunakan untuk mencari transpose suatu matriks. Dengan menggunakan fungsi .T maka program akan menghasilkan suatu matriks transpose.

12. **Method Perkalian Dot Matriks**

```
# Perkalian Matriks
def __dot(self):
    matriks1, matriks2 = np.array(self.__inputDot())
    return np.dot(matriks1, matriks2)
```

Untuk melakukan perkalian dot dapat menggunakan fungsi dari *library numpy* yaitu .dot(). Fungsi ini akan mengalikan dua buah matriks dan menghasilkan dimensi sesuai matriks yang dikalikan.

C. Sistem Persamaan

1. Method Gaussian

```
# Metode Gaussian Elimination
def __gaussianElimination(self) -> np.array:
    data = self.__joinRight()
    data = sp.Matrix(data)
    return np.array(data.echelon_form())

def printGaussianElimination(self):
    aug = self.__joinRight()
    echelon = self.__gaussianElimination()
    solusi = self.__solvingSPL()
```

Metode tersebut akan menyelesaikan suatu sistem persamaan dengan eliminasi gauss. ‘data’ yang terdapat pada array *numpy* akan digabungkan, kemudian ‘data’ tersebut akan diubah bentuknya menjadi matriks *sympy*. Selanjutnya dengan fungsi .echelon_form(), program akan menghitung bentuk echelon baris dari matriks. Lalu untuk mendapatkan solusi, digunakanlah fungsi .__solvingSPL(). Nantinya operasi akan menghasilkan solusi yang tunggal atau solusi banyak, dan akan ditampilkan kepada pengguna.

2. Method Gauss – Jordan

```
# Metode Gauss Jordan
def __gaussJordan(self) -> np.array:
    data = self.__joinRight()
    data = sp.Matrix(data)
    return np.array(data.rref()[0])

def printGaussJordan(self):
    aug = self.__joinRight() if self.__isReal else self.__joinRight().astype(complex)
    rref = self.__gaussJordan() if self.__isReal else self.__gaussJordan().astype(complex)
    solusi = self.__solvingSPL() if self.__isReal else self.__solvingSPL()
```

Kode tersebut menyelesaikan suatu sistem persamaan dengan menggunakan eliminasi gauss – jordan. ‘data’ yang terdapat pada array *numpy* akan diubah menjadi matriks dalam bentuk *sympy*. Kemudian menggunakan fungsi .rref() untuk menghitung bentuk reduksi baris tereduksi dari matriks. Lalu disimpan dalam array *numpy.* Selanjutnya untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persamaan, digunakanlah fungsi .__solvingSPL(). Lalu hasil operasi akan ditampilkan kepada pengguna, apakah sistem persamaan tersebut mempunyai solusi tunggal atau solusi banyak.

3. Method Balikan Matriks

```python
# Menyelesaikan SPL dengan metode Balikan Matriks
def __solvingSPL(self):
    if(self.__isReal):
        A = self.getData().astype(float)
        aug = self.__joinRight().astype(float)
        rank_A = np.linalg.matrix_rank(A)
        rank_aug = np.linalg.matrix_rank(aug)
    else :
        A = self.getData().astype(complex)
        aug = self.__joinRight().astype(complex)
        rank_A = np.linalg.matrix_rank(A)
        rank_aug = np.linalg.matrix_rank(aug)
    if rank_A == rank_aug == A.shape[1]:
        return "Tunggal".capitalize()
    elif rank_A == rank_aug and rank_A < A.shape[1]:
        return "Banyak".capitalize()
    elif rank_A < rank_aug:
        return "Tidak Ada".capitalize()
```

Kode di atas merupakan method untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode balikan matriks. Program akan membentuk sebuah matriks augmented melalui fungsi .__joinRight, mencari rank matriks A dengan fungsi .matrix_rank(A), dan mencari rank matriks augmented dengan fungsi .matrix_rank(aug). Kemudian program akan membandingkan banyak rank matriks A, rank matriks augmented, dan dimensi matriks A. SPL akan menghasilkan solusi tunggal jika rank A, rank augmented, dan dimensi matriks A mempunyai nilai yang sama banyak. Jika rank A == rank aug dan rank A < dimensi matriks A, SPL mempunyai banyak solusi. Lalu jika rank A < rank aug, SPL tidak memiliki solusi.

BAB IV
EKSPERIMEN

Berikut ini merupakan hasil eksperimen dari studi kasus yang telah diberikan dengan menggunakan program perhitungan persamaan linear. Hasil perhitungan dari program kemudian dibandingkan dengan hasil perhitungan dari matrix calculator.

1. Studi Kasus 1

A. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1) Metode Eliminasi Gauss

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GAUSSIAN ELIMINATION

Matriks Augmented :

1	1	-1	-1	1
2	5	-7	-5	-2
2	-1	1	3	4
5	2	-4	2	6

Matriks Bentuk Echelon :

5	2	-4	2	6
0	21	-27	-29	-22
0	0	60	-60	45
0	0	0	0	-3150

Solusi : Tidak ada

Solution by Gaussian elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-2) \quad \underset{R_2-2\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-2) \quad \underset{R_3-2\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-5) \quad \underset{R_4-5\cdot R_1 \to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \times(1) \quad \underset{R_3-(-1)\cdot R_2 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \times(1) \quad \underset{R_4-(-1)\cdot R_2 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right) \times(-2) \quad \underset{R_4-2\cdot R_3 \to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3\cdot x_2 - 5\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = -4 \\ -2\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = -2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

There are no solutions.

2) Metode Eliminasi Gauss – Jordan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE GAUSS JORDAN
-----------------------------------------------
Matriks Augmented   :
```

1	1	-1	-1	1
2	5	-7	-5	-2
2	-1	1	3	4
5	2	-4	2	6

```
Echelon Tereduksi   :
```

1	0	0	0.666667	0
0	1	0	-2.66667	0
0	0	1	-1	0
0	0	0	0	1

```
Solusi            : Tidak ada
-----------------------------------------------
```

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_2-2\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \times(-5) \underset{R_4-5\cdot R_1\to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{3}\right) \underset{R_2/(3)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \times(3) \underset{R_3-(-3)\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \times(3) \underset{R_4-(-3)\cdot R_2\to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-1}{2}\right) \underset{R_3/(-2)\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 \end{array}\right) \times(4) \underset{R_4-(-4)\cdot R_3\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - \frac{5}{3}\cdot x_3 - x_4 = \frac{-4}{3} \\ x_3 - x_4 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

There are no solutions.

3) Metode Balikan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE BALIKAN MATRIKS
-----------------------------------------------
Matriks Koefisien (Coef) :
```

1	1	-1	-1
2	5	-7	-5
2	-1	1	3
5	2	-4	2

```
Determinan A : 0.0
Matriks A adalah Matriks Singular
SOLUSI : Tidak ada
-----------------------------------------------
```

Solution by Inverse Matrix Method

$A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

To solve the system by Inverse Matrix Method the coefficient matrix should have a nonzero determinant.

► Details (Montante's method (Bareiss algorithm))

B. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1) Metode Eliminasi Gauss

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GAUSSIAN ELIMINATION
-----------------------------------------------
Matriks Augmented    :
| 1 | -1 | 0 |  0 |  1 |  3 |
| 1 |  1 | 0 | -3 |  0 |  6 |
| 2 | -1 | 0 |  1 | -1 |  5 |
|-1 |  2 | 0 | -2 | -1 | -1 |

Matriks Bentuk Echelon   :
| 2 | -1 | 0 |  1 |  -1 |   5 |
| 0 |  3 | 0 | -7 |   1 |   7 |
| 0 |  0 | 0 | 12 | -12 | -12 |
| 0 |  0 | 0 |  0 |   0 |   0 |

Solusi           : Banyak
```

```
Diperoleh Persamaan     :
╒═══════════════════════════════════════════════╕
│ 12.0*x4 - 12.0*x5 = -12.0000000000000         │
├───────────────────────────────────────────────┤
│ 3.0*x2 - 7.0*x4 + 1.0*x5 = 7.00000000000000   │
├───────────────────────────────────────────────┤
│ 2.0*x1 - 1.0*x2 + 1.0*x4 - 1.0*x5 = 5         │
╘═══════════════════════════════════════════════╛
╒═══════════════╕
│ x1 = x5 + 3.0 │
├───────────────┤
│ x2 = 2.0*x5   │
├───────────────┤
│ x4 = x5 - 1.0 │
╘═══════════════╛
------------------------------------------------
```

Solution by Gaussian elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_2-1\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(1)$$

$$\underset{R_4-(-1)\cdot R_1\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \times\left(\frac{-1}{2}\right) \underset{R_3-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \times\left(\frac{-1}{2}\right) \underset{R_4-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot R_2\to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \times\left(\frac{1}{5}\right) \underset{R_4-\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot R_3\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ 2\cdot x_2 - 3\cdot x_4 - x_5 = 3 \\ \frac{5}{2}\cdot x_4 - \frac{5}{2}\cdot x_5 = \frac{-5}{2} \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_4 from the equation 3 of the system (1):
  $\frac{5}{2}\cdot x_4=\frac{-5}{2}+\frac{5}{2}\cdot x_5$
  $\mathbf{x_4=-1+x_5}$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $2x_2=3+3x_4+x_5=3+3\cdot(-1+x_5)+x_5=4x_5$
  $\mathbf{x_2=2x_5}$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=3+x_2-x_5=3+2x_5-x_5=3+x_5$

Answer:

$x_1=3+x_5$
$x_2=2x_5$
$x_3=x_3$
$x_4=-1+x_5$

2) Metode Eliminasi Gauss – Jordan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE GAUSS JORDAN
--------------------------------------------------
Matriks Augmented    :
```

1	-1	0	0	1	3
1	1	0	-3	0	6
2	-1	0	1	-1	5
-1	2	0	-2	-1	-1

```
Echelon Tereduksi    :
```

1	0	0	0	-1	3
0	1	0	0	-2	0
0	0	0	1	-1	-1
0	0	0	0	0	0

```
Solusi           : Banyak
```

```
x4 - 1.0*x5 = -1.00000000000000

x2 - 2.0*x5 = 0

x1 - 1.0*x5 = 3.00000000000000
```

```
x1 = x5 + 3.0

x2 = 2.0*x5

x4 = x5 - 1.0
--------------------------------------------------
```

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(-1) \overset{R_2-1\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(-2) \overset{R_3-2\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \times(1)$$

$$\overset{R_4-(-1)\cdot R_1\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \times\left(\frac{1}{2}\right) \overset{R_2/(2)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \overset{R_3-1\cdot R_2\to R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \overset{R_4-1\cdot R_2\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \times\left(\frac{2}{5}\right) \overset{R_3/\left(\frac{5}{2}\right)\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \times\left(\frac{1}{2}\right) \overset{R_4-\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot R_3\to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{3}{2}\right) \overset{R_2-\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot R_3\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(1) \overset{R_1-(-1)\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad -x_5 = 3 \\ \quad x_2 \qquad -2\cdot x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_4 \; -x_5 = -1 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_4 from the equation 3 of the system (1):
  $x_4=-1+x_5$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=2x_5$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=3+x_5$

Answer:

$x_1=3+x_5$
$x_2=2x_5$
$x_3=x_3$
$x_4=-1+x_5$
$x_5=x_5$

3) Metode Balikan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE BALIKAN MATRIKS
---------------------------------------------
Matriks Koefisien (Coef) :
```

1	-1	0	0	1
1	1	0	-3	0
2	-1	0	1	-1
-1	2	0	-2	-1

```
MATRIKS YANG ANDA BERIKAN BUKAN MATRIKS PERSEGI
TIDAK DAPAT DISELESAIKAN MENGGUNKAN METODE INVERS-----
```

To solve the system by Inverse Matrix Method it must have the same number of equations as variables.

OK

2. Studi Kasus 2

A. Selesaikan sistem persamaan berbentuk berikut:

$$\text{a.}\quad \begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 14x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 12x_4 &= 1 \end{aligned}$$

1) Metode Eliminasi Gauss

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GAUSSIAN ELIMINATION
---------------------------------------------
Matriks Augmented   :
```

3	8	-3	-14	2
2	3	-1	-2	1
1	-2	1	10	0
1	5	-2	-12	1

```
Matriks Bentuk Echelon   :
```

3	8	-3	-14	2
0	-14	6	44	-2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

```
Solusi           : Banyak
Diperoleh Persamaan     :
```

-14.0*x2 + 6.0*x3 + 44.0*x4 = -2.00000000000000
3.0*x1 + 8.0*x2 - 3.0*x3 - 14.0*x4 = 2

```
x1 = -0.142857142857143*x3 - 3.71428571428571*x4 + 0.285714285714286
x2 = 0.428571428571429*x3 + 3.14285714285714*x4 + 0.142857142857143
-------------------------------------------------
```

Solution by Gaussian elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times\left(\frac{-2}{3}\right) \underset{R_2-\left(\frac{2}{3}\right)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times\left(\frac{-1}{3}\right) \underset{R_3-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-14}{3} & 2 & \frac{44}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times\left(\frac{-1}{3}\right) \underset{R_4-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot R_1 \to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-14}{3} & 2 & \frac{44}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_2 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \times(1) \underset{R_4-(-1)\cdot R_2 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 8\cdot x_2 - 3\cdot x_3 - 14\cdot x_4 = 2 \\ \frac{-7}{3}\cdot x_2 + x_3 + \frac{22}{3}\cdot x_4 = \frac{-1}{3} \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $\frac{-7}{3}\cdot x_2=\frac{-1}{3}-x_3-\frac{22}{3}\cdot x_4$
  $\mathbf{x_2=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\cdot x_3+\frac{22}{7}\cdot x_4}$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $3x_1=2-8x_2+3x_3+14x_4=2-8\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\cdot x_3+\frac{22}{7}\cdot x_4\right)+3x_3+14x_4=\frac{6}{7}-\frac{3}{7}\cdot x_3-\frac{78}{7}\cdot x_4$
  $\mathbf{x_1=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\cdot x_3-\frac{26}{7}\cdot x_4}$

Answer:

$x_1=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\cdot x_3-\frac{26}{7}\cdot x_4$
$x_2=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\cdot x_3+\frac{22}{7}\cdot x_4$
$x_3=x_3$
$x_4=x_4$

2) Metode Eliminasi Gauss – Jordan

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE GAUSS JORDAN

Matriks Augmented :

3	8	-3	-14	2
2	3	-1	-2	1
1	-2	1	10	0
1	5	-2	-12	1

Echelon Tereduksi :

1	0	0.142857	3.71429	0.285714
0	1	-0.428571	-3.14286	0.142857
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Solusi : Banyak

Diperoleh Persamaan :

```
x2 - 0.42857*x3 - 3.14286*x4 = 0.142857142857143
x1 + 0.14286*x3 + 3.71429*x4 = 0.285714285714286
```

```
Diperoleh Solusi    :

╔═════════════════════════════════════════╗
║ x2 - 0.42857*x3 - 3.14286*x4 = 0.14286 ║
╠═════════════════════════════════════════╣
║ x1 + 0.14286*x3 + 3.71429*x4 = 0.28571 ║
╚═════════════════════════════════════════╝

-----------------------------------------------
```

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -3 & -14 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{3}\right) \underset{R_1/(3)\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_2-2\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 1 & -2 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1\to R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-14}{3} & 2 & \frac{44}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & 5 & -2 & -12 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_4-1\cdot R_1\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-14}{3} & 2 & \frac{44}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-3}{7}\right) \underset{R_2/\left(\frac{-7}{3}\right)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-22}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{-14}{3} & 2 & \frac{44}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \times\left(\tfrac{14}{3}\right) \underset{R_3-\left(\frac{-14}{3}\right)\cdot R_2\to R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-22}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & \frac{-22}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-7}{3}\right) \underset{R_4-\left(\frac{7}{3}\right)\cdot R_2\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -1 & \frac{-14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-22}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{-8}{3}\right) \underset{R_1-\left(\frac{8}{3}\right)\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-22}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{7}\cdot x_3 + \frac{26}{7}\cdot x_4 = \frac{2}{7} \\ \quad x_2 - \frac{3}{7}\cdot x_3 - \frac{22}{7}\cdot x_4 = \frac{1}{7} \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\cdot x_3+\frac{22}{7}\cdot x_4$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\cdot x_3-\frac{26}{7}\cdot x_4$

Answer:

$x_1=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\cdot x_3-\frac{26}{7}\cdot x_4$
$x_2=\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\cdot x_3+\frac{22}{7}\cdot x_4$
$x_3=x_3$
$x_4=x_4$

3) Metode Balikan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE BALIKAN MATRIKS
-----------------------------------------------
Matriks Koefisien (Coef) :

╔═══╤════╤════╤═════╗
║ 3 │  8 │ -3 │ -14 ║
╟───┼────┼────┼─────╢
║ 2 │  3 │ -1 │  -2 ║
╟───┼────┼────┼─────╢
║ 1 │ -2 │  1 │  10 ║
╟───┼────┼────┼─────╢
║ 1 │  5 │ -2 │ -12 ║
╚═══╧════╧════╧═════╝

Determinan A : 0.0
Matriks A adalah Matriks Singular
SOLUSI : Banyak

╔══════════════════════════════════════════════════════════════════════════╗
║ x1 = -0.142857142857143*x3 - 3.71428571428571*x4 + 0.285714285714286 ║
╠══════════════════════════════════════════════════════════════════════════╣
║ x2 = 0.428571428571429*x3 + 3.14285714285714*x4 + 0.142857142857143  ║
╚══════════════════════════════════════════════════════════════════════════╝

-----------------------------------------------
```

Solution by Inverse Matrix Method

$A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & -14 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To solve the system by Inverse Matrix Method the coefficient matrix should have a nonzero determinant.

▶ Details (Montante's method (Bareiss algorithm))

...

B. Selesaikan sistem persamaan berbentuk berikut:

$$\text{b.}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1) Metode Eliminasi Gauss

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GAUSSIAN ELIMINATION

Matriks Augmented :

1	-1	1	-1	0
-1	1	1	1	0
1	1	-1	1	0
1	1	1	1	0

Matriks Bentuk Echelon :

1	-1	1	-1	0
0	2	-2	2	0
0	0	4	0	0
0	0	0	0	0

Solusi : Banyak

```
Diperoleh Persamaan     :

│ 4.0*x3 = 0 │
│ 2.0*x2 - 2.0*x3 + 2.0*x4 = 0 │
│ 1.0*x1 - 1.0*x2 + 1.0*x3 - 1.0*x4 = 0 │

│ x1 = 0.0 │
│ x2 = -x4 │
│ x3 = 0.0 │
------------------------------------------
```

Solution by Gaussian elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(1) \underset{R_2-(-1)\cdot R_1 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_4-1\cdot R_1 \to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_4-1\cdot R_2 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_4-1\cdot R_3 \to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 0 \\ 2\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_3 from the equation 3 of the system (1):
  $2x_3=0$
  $\mathbf{x_3=0}$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $2x_2=2x_3-2x_4=2\cdot 0-2x_4=-2x_4$
  $\mathbf{x_2=-x_4}$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=x_2-x_3+x_4=-x_4-0+x_4=0$

Answer:

$x_1=0$
$x_2=-x_4$
$x_3=0$
$x_4=x_4$

2) Metode Eliminasi Gauss – Jordan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE GAUSS JORDAN
--------------------------------------------------
Matriks Augmented   :
```

1	-1	1	-1	0
-1	1	1	1	0
1	1	-1	1	0
1	1	1	1	0

```
Echelon Tereduksi   :
```

1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

```
Solusi          : Banyak
```

x3 = 0
x2 + 1.0*x4 = 0
x1 = 0

x1 = 0.0
x2 = -x4
x3 = 0.0

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(1) \underset{R_2-(-1)\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{R_4-1\cdot R_1\to R_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3\leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{R_2/(2)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_4-2\cdot R_2\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\underset{R_3/(2)\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-2) \underset{R_4-2\cdot R_3\to R_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(1) \underset{R_2-(-1)\cdot R_3\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-1)$$

$$\underset{R_1-1\cdot R_3\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(1) \underset{R_1-(-1)\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_3 from the equation 3 of the system (1):
  $x_3=0$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=-x_4$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=0$

Answer:

$x_1=0$
$x_2=-x_4$
$x_3=0$
$x_4=x_4$

3) Metode Balikan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE BALIKAN MATRIKS
--------------------------------------------------
Matriks Koefisien (Coef) :
┌────┬────┬────┬────┐
│  1 │ -1 │  1 │ -1 │
├────┼────┼────┼────┤
│ -1 │  1 │  1 │  1 │
├────┼────┼────┼────┤
│  1 │  1 │ -1 │  1 │
├────┼────┼────┼────┤
│  1 │  1 │  1 │  1 │
└────┴────┴────┴────┘
Determinan A : 0.0
Matriks A adalah Matriks Singular
SOLUSI : Banyak
╒════════════╕
│ x1 = 0.0   │
╘════════════╛
╒════════════╕
│ x2 = -x4   │
├────────────┤
│ x3 = 0.0   │
╘════════════╛
--------------------------------------------------
```

Solution by Inverse Matrix Method

$A{\cdot}X=B$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To solve the system by Inverse Matrix Method the coefficient matrix should have a nonzero determinant.

3. Studi Kasus 3

A. Carilah polynomial characteristic, eigenvalues, eigenvector dan (jika mungkin) carilah matrik P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ adalah diagonal

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

```
EIGEN VALUE, EIGEN VEKTOR DAN POLINOMIAL KARAKTERISTIKNYA
------------------------------------------------
Matriks yang Anda berikan :
╒════╤════╤════╕
│  3 │  1 │  1 │
├────┼────┼────┤
│ -4 │ -2 │ -5 │
├────┼────┼────┤
│  2 │  2 │  5 │
╘════╧════╧════╛


Persamaan Polinomial Karakteristik :
PurePoly(1.0*x**3 - 6.0*x**2 + 11.0*x - 6.0, x, domain='RR')

Akar-Akar Polinomial Karakteristik :
{1.00000000000000: 1, 2.00000000000000: 1, 3.00000000000000: 1}

Eigen Value :
1. 1.0
2. 2.0
3. 3.0
```

```
Eigen Vektor :
╒═══════════╤══════════════╤══════════════╕
│  0.301511 │ -0.707107    │  6.40988e-17 │
├───────────┼──────────────┼──────────────┤
│ -0.904534 │  0.707107    │ -0.707107    │
├───────────┼──────────────┼──────────────┤
│  0.301511 │  3.18887e-16 │  0.707107    │
╘═══════════╧══════════════╧══════════════╛

DETERMINAN MATRIKS EIGEN VEKTOR : -0.15076
MATRIKS YANG ANDA INPUTKAN MEMILIKI DIAGONALISASI
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

▼ Details

1. From the definition of the eigenvector v corresponding to the eigenvalue λ we have $Av=\lambda v$

   Then: $Av-\lambda v=(A-\lambda I)\cdot v=0$

   Equation has a nonzero solution if and only if $\det(A-\lambda I)=0$

   $$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -4 & -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 \underset{(?)}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-5\lambda+6) \underset{(?)}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3)=0$$

   ► Details (Triangle's rule)

   ...

   1. $\lambda_1=1$
   2. $\lambda_2=2$
   3. $\lambda_3=3$

2. For every λ we find its own vectors:

   1. $\lambda_1=1$

   $$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   $Av=\lambda v$ *

   $(A-\lambda I)\cdot v=0$

   So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)\times\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{R_1/(2)\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)\times(4) \underset{R_2-(-4)\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)\times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_1\to R_3}{\sim}$$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_2/(-1)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times\left(\tfrac{-1}{2}\right) \underset{R_1-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot R_2\to R_1}{\sim}$$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   $$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 0 \\ \quad x_2 + 3\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$x_2 + 3\cdot x_3 = 0$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):

  $x_2=-3x_3$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):

  $x_1=x_3$

Answer:

$x_1=x_3$

$x_2=-3x_3$

$x_3=x_3$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Let $x_3=1$, $\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. $\lambda_2=2$

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$Av=\lambda v$ *

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)\times(4) \underset{R_2-(-4)\cdot R_1\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)\times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_2/(-1)\to R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_1-1\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \quad\quad x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_3 from the equation 2 of the system (1):

  $x_3=0$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):

  $x_1=-x_2$

Answer:

$x_1=-x_2$

$x_2=x_2$

$x_3=0$

Answer:

$x_1=-x_2$

$x_2=x_2$

$x_3=0$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Let $x_2=1$, $\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

3. $\lambda_3=3$

$A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$Av=\lambda v$

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2\leftrightarrow R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{-1}{4}\right) \underset{R_1/(-4)\rightarrow R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)\times(-2) \underset{R_3-2\cdot R_1\rightarrow R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\underset{R_3-\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot R_2\rightarrow R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{-5}{4}\right) \underset{R_1-\left(\frac{5}{4}\right)\cdot R_2\rightarrow R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=-x_3$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=0$

Answer:

$x_1=0$

$x_2=-x_3$

$x_3=x_3$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Let $x_3=1$, $\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3.
- The diagonal matrix (the diagonal entries are the eigenvalues - λ_1, λ_2, and λ_3):
  $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- The matrix with the eigenvectors (v_1, v_2, and v_3) as its columns:
  $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $P^{(-1)}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

  ▶ Details (Montante's method (Bareiss algorithm))

  ...
- $A=PD\cdot P^{(-1)}$ (?)

B. Carilah polynomial characteristic, eigenvalues, eigenvector dan (jika mungkin) carilah matrik P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ adalah diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
EIGEN VALUE, EIGEN VEKTOR DAN POLINOMIAL KARAKTERISTIKNYA
--------------------------------------------------
Matriks yang Anda berikan :
╒═══╤════╤═══╕
│ 2 │  1 │ 1 │
├───┼────┼───┤
│ 0 │  1 │ 0 │
├───┼────┼───┤
│ 1 │ -1 │ 2 │
╘═══╧════╧═══╛

Persamaan Polinomial Karakteristik :
PurePoly(1.0*x**3 - 5.0*x**2 + 7.0*x - 3.0, x, domain='RR')

Akar-Akar Polinomial Karakteristik :
{1.00000000000000: 2, 3.00000000000000: 1}

Eigen Value :
1. 3.0
2. 1.0
3. 1.0
```

```
Eigen Vektor :
╒══════════╤═══════════╤═════════════╕
│ 0.707107 │ -0.707107 │ -0.707107   │
├──────────┼───────────┼─────────────┤
│ 0        │  0        │  1.57009e-16 │
├──────────┼───────────┼─────────────┤
│ 0.707107 │  0.707107 │  0.707107   │
╘══════════╧═══════════╧═════════════╛DETERMINAN MATRIKS EIGEN VEKTOR : 0
TERDAPAT EIGEN VEKTOR YANG TIDAK BEBAS LINEAR
MATRIKS YANG ANDA INPUTKAN TIDAK MEMILIKI DIAGONALISASI
```

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenvectors for the matrix A:

- $v=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, eigenvalue $\lambda_1=1$
- $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, eigenvalue $\lambda_2=3$

▼ Details

1. From the definition of the eigenvector v corresponding to the eigenvalue λ we have $Av=\lambda v$

   Then: $Av-\lambda v=(A-\lambda I)\cdot v=0$

   Equation has a nonzero solution if and only if $\det(A-\lambda I)=0$

   $$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3 \underset{(?)}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3) \underset{(?)}{=} -(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-3)=0$$

   ► Details (Triangle's rule)

   ...

   1. $\lambda_1=1$
   2. $\lambda_2=3$

2. For every λ we find its own vectors:

   1. $\lambda_1=1$

      $A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

      $Av=\lambda v$ *

      $(A-\lambda I)\cdot v=0$

      So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

      $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3\leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right) \underset{R_2/(-2)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times(-1)$$

      $$\underset{R_1-1\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

      $$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):

  $x_2=0$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):

  $x_1=-x_3$

Answer:

$x_1=-x_3$

$x_2=0$

$x_3=x_3$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Let $x_3=1$, $\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. $\lambda_2=1$

$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Av=\lambda v$ *

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3\leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right) \underset{R_2/(-2)\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times(-1)$$

$$\underset{R_1-1\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):

  $x_2=0$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):

  $x_1=-x_3$

Answer:

$x_1=-x_3$

$x_2=0$

$x_3=x_3$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Let $x_3=1$, $\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3. $\lambda_3=3$

$A-\lambda_3 I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$Av=\lambda v$ *

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

So we have a homogeneous system of linear equations, we solve it by Gaussian Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_1/(-1)\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\times(-1) \underset{R_3-1\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right) \underset{R_2/(-2)\to R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\times(1) \underset{R_1-(-1)\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=0$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=x_3$

Answer:

$x_1=x_3$
$x_2=0$
$x_3=x_3$

General Solution: $X=\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

The solution set: $\{x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Let $x_3=1$, $\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4. Studi Kasus 4

A. Carilah a sebuah SVD dari matrik berikut ini

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)
-----------------------------------
Ordo Matriks
Banyak Baris : 3
Banyak Kolom : 2
-----------------------------------
Matriks yang Anda inputkan :

| 1 | -1 |
| 0 |  1 |
| 1 |  0 |

-----------------------------------
Matriks U                       :

| -0.816497 |  1.85578e-16 |
|  0.408248 | -0.707107    |
| -0.408248 | -0.707107    |

Matriks Sigma                    :

| 1.73205 | 0 |
| 0       | 1 |
```

```
Matriks V (belum ditranspose)    :

| -0.707107 |  0.707107 |
| -0.707107 | -0.707107 |

Validasi       :
Apakah U x Sigma x V.T = A ? : BENAR
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$$

B. Carilah a sebuah SVD dari matrik berikut ini

$$\text{b.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)
-------------------------------------------
Ordo Matriks
Banyak Baris : 3
Banyak Kolom : 3
-------------------------------------------
Matriks yang Anda inputkan :
|  1 | 1 |  1 |
| -1 | 0 | -2 |
|  1 | 2 |  0 |
-------------------------------------------
Matriks U                        :
| -0.57735 |  2.02243e-16 | -0.816497 |
|  0.57735 | -0.707107    | -0.408248 |
| -0.57735 | -0.707107    |  0.408248 |
```

Matriks Sigma :

3	0	0
0	2	0
0	0	0

Matriks V (belum ditranspose) :

-0.57735	-0.57735	-0.57735
1.33227e-16	-0.707107	0.707107
-0.816497	0.408248	0.408248

Validasi :
Apakah U x Sigma x V.T = A ? : BENAR

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}^T$$

5. Studi Kasus 5

$$(1+2i)x_1 + (3+2i)x_2 + (-2+2i)x_3 = 11+i,$$
$$(4-i)x_1 + (-1+2i)x_2 - x_3 = 8+3i,$$
$$(1+i)x_1 + 2ix_2 = 4+8i;$$

A. Selesaikan persamaan linear dengan menggunakan eliminasi Gauss

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN GAUSSIAN ELIMINATION

Matriks Augmented :

(1+2j)	(3+2j)	(-2+2j)	(11+1j)
(4-1j)	(-1+2j)	(-1+0j)	(8+3j)
(1+1j)	2j	0j	(4+8j)

Matriks Bentuk Echelon :

1.0 + 2.0*I	3.0 + 2.0*I	-2.0 + 2.0*I	11.0 + 1.0*I
0	-19.0 - 5.0*I	5.0 - 12.0*I	-43.0 + 26.0*I
0	0	-15.0 - 65.0*I	145.0 + 35.0*I

Solusi : Tunggal
Diperoleh Persamaan :

x3*(-15.0 - 65.0*I) = 145.0 + 35.0*I
x2*(-19.0 - 5.0*I) + x3*(5.0 - 12.0*I) = -43.0 + 26.0*I
x1*(1.0 + 2.0*I) + x2*(3.0 + 2.0*I) + x3*(-2.0 + 2.0*I) = 11.0 + 1.0*I

Solve persamaaan pertama dan substitusikan ke persamaan berikunya

```
Diperoleh Solusi SPl    :

 x1 = 2.00000000000000

 x2 = 3.0 - 1.0*I

 x3 = -1.0 + 2.0*I

--------------------------------
```

Solution by Gaussian elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+2i & 3+2i & -2+2i & 11+i \\ 4-i & -1+2i & -1 & 8+3i \\ 1+i & 2i & 0 & 4+8i \end{array}\right) \times\left(\frac{-2+9i}{5}\right) \quad R_2-\left(\frac{2-9i}{5}\right)\cdot R_1 \to R_2 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+2i & 3+2i & -2+2i & 11+i \\ 0 & \frac{-29+33i}{5} & \frac{-19-22i}{5} & \frac{9+112i}{5} \\ 1+i & 2i & 0 & 4+8i \end{array}\right) \times\left(\frac{-3+i}{5}\right) \quad R_3-\left(\frac{3-i}{5}\right)\cdot R_1 \to R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+2i & 3+2i & -2+2i & 11+i \\ 0 & \frac{-29+33i}{5} & \frac{-19-22i}{5} & \frac{9+112i}{5} \\ 0 & \frac{-11+7i}{5} & \frac{4-8i}{5} & \frac{-14+48i}{5} \end{array}\right) \times\left(\frac{-55-16i}{193}\right) \quad R_3-\left(\frac{55+16i}{193}\right)\cdot R_2 \to R_3 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1+2i & 3+2i & -2+2i & 11+i \\ 0 & \frac{-29+33i}{5} & \frac{-19-22i}{5} & \frac{9+112i}{5} \\ 0 & 0 & \frac{293-6i}{193} & \frac{-281+592i}{193} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} (1+2i)\cdot x_1 + (3+2i)\cdot x_2 - (2-2i)\cdot x_3 = 11+i \\ \frac{-29+33i}{5}\cdot x_2 - \frac{19+22i}{5}\cdot x_3 = \frac{9+112i}{5} \\ \frac{293-6i}{193}\cdot x_3 = \frac{-281+592i}{193} \end{cases} \quad (1)$$

- Find the variable x_3 from the equation 3 of the system (1):
  $\frac{293-6i}{193}\cdot x_3=\frac{-281+592i}{193}$
  $\mathbf{x_3=-1+2i}$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $\frac{-29+33i}{5}\cdot x_2=\frac{9+112i}{5}+\frac{19+22i}{5}\cdot x_3=\frac{9+112i}{5}+\frac{19+22i}{5}\cdot(-1+2i)=\frac{-54+128i}{5}$
  $\mathbf{x_2=3-i}$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $(1+2i)\cdot x_1=11+i-(3+2i)\cdot x_2+(2-2i)\cdot x_3=11+i-(3+2i)\cdot(3-i)+(2-2i)\cdot(-1+2i)=2+4i$
  $\mathbf{x_1=2}$

Answer:

$x_1=2$
$x_2=3-i$
$x_3=-1+2i$

B. Selesaikan persamaan linear dengan menggunakan eliminasi Gauss Jordan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE GAUSS JORDAN
-------------------------------------------------
Matriks Augmented    :

 | (1+2j) | (3+2j)  | (-2+2j) | (11+1j) |
 | (4-1j) | (-1+2j) | (-1+0j) | (8+3j)  |
 | (1+1j) | 2j      | 0j      | (4+8j)  |

Echelon Tereduksi    :

 | (1+0j) | 0j      | 0j      | (2+0j)  |
 | 0j     | (1+0j)  | 0j      | (3-1j)  |
 | 0j     | 0j      | (1+0j)  | (-1+2j) |

Solusi           : Tunggal
Diperoleh Solusi    :

 | x1 = 2.00000000000000 |
 | x2 = 3.0 - 1.0*I      |
 | x3 = -1.0 + 2.0*I     |

-------------------------------------------------
```

Solution by Gauss-Jordan elimination

Convert the augmented matrix into the row echelon form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+2i & 3+2i & -2+2i & 11+i \\ 4-i & -1+2i & -1 & 8+3i \\ 1+i & 2i & 0 & 4+8i \end{array}\right) \times\left(\frac{1-2i}{5}\right) \underset{R_1/(1+2i)\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 4-i & -1+2i & -1 & 8+3i \\ 1+i & 2i & 0 & 4+8i \end{array}\right) \times(-4+i) \underset{R_2-(4-i)\cdot R_1\to R_2}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & \frac{-29+33i}{5} & \frac{-19-22i}{5} & \frac{9+112i}{5} \\ 1+i & 2i & 0 & 4+8i \end{array}\right) \times(-1-i) \underset{R_3-(1+i)\cdot R_1\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & \frac{-29+33i}{5} & \frac{-19-22i}{5} & \frac{9+112i}{5} \\ 0 & \frac{-11+7i}{5} & \frac{4-8i}{5} & \frac{-14+48i}{5} \end{array}\right) \times\left(\frac{-29-33i}{386}\right) \underset{R_2/\left(\frac{-29+33i}{5}\right)\to R_2}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-35+253i}{386} & \frac{687-709i}{386} \\ 0 & \frac{-11+7i}{5} & \frac{4-8i}{5} & \frac{-14+48i}{5} \end{array}\right) \times\left(\frac{11-7i}{5}\right) \underset{R_3-\left(\frac{-11+7i}{5}\right)\cdot R_2\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-35+253i}{386} & \frac{687-709i}{386} \\ 0 & 0 & \frac{293-6i}{193} & \frac{-281+592i}{193} \end{array}\right) \times\left(\frac{293+6i}{445}\right) \underset{R_3/\left(\frac{293-6i}{193}\right)\to R_3}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-35+253i}{386} & \frac{687-709i}{386} \\ 0 & 0 & 1 & -1+2i \end{array}\right) \times\left(\frac{35-253i}{386}\right) \underset{R_2-\left(\frac{-35+253i}{386}\right)\cdot R_3\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & \frac{2+6i}{5} & \frac{13-21i}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 3-i \\ 0 & 0 & 1 & -1+2i \end{array}\right) \times\left(\frac{-2-6i}{5}\right) \underset{R_1-\left(\frac{2+6i}{5}\right)\cdot R_3\to R_1}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7-4i}{5} & 0 & \frac{27-19i}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 3-i \\ 0 & 0 & 1 & -1+2i \end{array}\right) \times\left(\frac{-7+4i}{5}\right) \underset{R_1-\left(\frac{7-4i}{5}\right)\cdot R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3-i \\ 0 & 0 & 1 & -1+2i \end{array}\right) \equiv$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = 3-i \\ & & x_3 & = -1+2i \end{array}\right. \quad (1)$$

$\equiv$

- Find the variable x_3 from the equation 3 of the system (1):
  $x_3=-1+2i$
- Find the variable x_2 from the equation 2 of the system (1):
  $x_2=3-i$
- Find the variable x_1 from the equation 1 of the system (1):
  $x_1=2$

Answer:

$x_1=2$

$x_2=3-i$

$x_3=-1+2i$

C. Selesaikan persamaan linear dengan menggunakan metode balikan

```
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE BALIKAN MATRIKS
-----------------------------------------------
Matriks Koefisien (Coef) :

| (1+2j) | (3+2j)  | (-2+2j) |
| (4-1j) | (-1+2j) | (-1+0j) |
| (1+1j) | 2j      | 0j      |

Determinai A : (-29-7j)
Invers Matriks Koefisien inv(Coef) :

| (-0.01573-0.06517j) | (0.1618+0.09888j)   | (0.00112-0.1382j)  |
| (0.04045+0.02472j)  | (-0.13034+0.03146j) | (0.06854-0.43034j) |
| (-0.21798-0.18876j) | (-0.18652-0.05843j) | (0.65843+0.01348j) |

Matriks Konstanta (Const)

| (11+1j) |
| (8+3j)  |
| (4+8j)  |

Perkalian inv(Coef) dengan (Const) adalah solusi SPL
```

```
SOLUSI : Tunggal

| x1 = (2-0j)  |
| x2 = (3-1j)  |
| x3 = (-1+2j) |

---------------------------------
```

Solution by Inverse Matrix Method

$A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3+2i & -2+2i \\ 4-i & -1+2i & -1 \\ 1+i & 2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 11+i \\ 8+3i \\ 4+8i \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7-29i}{445} & \frac{72+44i}{445} & \frac{1-123i}{890} \\ \frac{18+11i}{445} & \frac{-58+14i}{445} & \frac{61-383i}{890} \\ \frac{-97-84i}{445} & \frac{-83-26i}{445} & \frac{293+6i}{445} \end{pmatrix}$$

► Details (Montante's method (Bareiss algorithm))

...

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{-7-29i}{445} & \frac{72+44i}{445} & \frac{1-123i}{890} \\ \frac{18+11i}{445} & \frac{-58+14i}{445} & \frac{61-383i}{890} \\ \frac{-97-84i}{445} & \frac{-83-26i}{445} & \frac{293+6i}{445} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11+i \\ 8+3i \\ 4+8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ -1+2i \end{pmatrix}$$

BAB V
KESIMPULAN

Dalam pengembangan aplikasi ini, kami telah merancang sebuah kalkulator sederhana untuk aljabar linier menggunakan bahasa pemrograman Python serta pustaka NumPy. Program ini menyediakan beragam fungsi untuk menyelesaikan persamaan linier, menghitung invers matriks, determinan, dan nilai eigen. Pengguna diminta untuk memasukkan matriks dan jenis operasi yang diinginkan, dan program akan menghasilkan output sesuai dengan permintaan pengguna.

Meskipun aplikasi ini menyediakan fungsionalitas dasar untuk operasi matriks, ada ruang untuk perbaikan dan pengembangan lebih lanjut guna meningkatkan fungsionalitas dan pengalaman pengguna. Berikut adalah beberapa saran pengembangan yang bisa dipertimbangkan:

1. Validasi Input: Saat ini, program tidak melakukan validasi terhadap input pengguna. Implementasi validasi input yang solid akan membantu mencegah kesalahan dan memastikan bahwa input yang dimasukkan sesuai dengan format yang diharapkan. Penggunaan validasi ini dapat mencakup pengecekan jenis dan ukuran matriks yang dimasukkan serta memverifikasi input lainnya.

2. Fitur Interaktif Tambahan: Pengguna dapat meningkatkan antarmuka pengguna dengan menambahkan fitur interaktif. Sebagai contoh, pengguna dapat diberikan opsi menu yang lebih deskriptif dengan menggunakan teks alih-alih angka. Hal ini akan membantu pengguna dalam memilih operasi yang diinginkan dan membuat penggunaan aplikasi menjadi lebih intuitif.

3. Penanganan Kesalahan yang Lebih Baik: Saat ini, aplikasi hanya memberikan pesan kesalahan umum jika pengguna memasukkan pilihan yang tidak valid. Di masa depan, perbaikan bisa dilakukan dengan memberikan pesan kesalahan yang lebih spesifik, menjelaskan masalah yang terjadi, dan memberikan petunjuk tentang cara mengatasinya.

4. Optimisasi Kinerja: Untuk matriks besar, performa aplikasi mungkin terbatas karena menggunakan array NumPy. Pertimbangkan untuk mengoptimalkan aplikasi dengan menggunakan metode yang lebih efisien atau memanfaatkan paralelisme guna meningkatkan kinerja operasi aljabar linier.

Selama proses pengembangan, kami mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang manipulasi matriks dan operasi aljabar linier menggunakan NumPy. Kami juga menyadari pentingnya validasi input untuk menghindari kesalahan saat menjalankan aplikasi.

Meskipun kami menghadapi beberapa tantangan dalam mengubah input pengguna menjadi matriks NumPy dan memastikan bahwa operasi yang dilakukan sesuai dengan format yang diharapkan, kami berhasil mengatasinya dengan menggunakan fitur NumPy dan teknik pemrograman yang relevan.

Melalui pengembangan aplikasi ini, kami memperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang aljabar linier dan penerapannya dalam pemrograman. Kami juga melihat potensi untuk mengembangkan aplikasi ini lebih lanjut, baik dengan menambahkan fitur tambahan maupun meningkatkan kinerja dan pengalaman pengguna.

Secara keseluruhan, aplikasi ini memberikan alat yang berguna untuk melakukan operasi matriks dasar. Dengan terus melakukan pengembangan dan peningkatan, aplikasi ini memiliki potensi untuk menjadi alat yang lebih kuat dan bermanfaat dalam pemrosesan data numerik dan aljabar linier.

DAFTAR PUSTAKA

Jadhav, Archana and Sakhari, Nandani. (2018). *Linear Algebra Using Python*. Mumbai: Himalaya Publishing House Pvt. Ltd.

Nicholson, W. Keith. (2021). *Linear Algebra with Application*. Alberta: Lyryx Learning Inc.

Zulkarnain, Z., & Sarassanti, Y. (2022). Analisis kemampuan pemecahan masalah mahasiswa dalam menyelesaikan soal cerita sistem persamaan linear. *SIBATIK JOURNAL: Jurnal Ilmiah Bidang Sosial, Ekonomi, Budaya, Teknologi, Dan Pendidikan*, *1*(3), 133-142.