Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Кафедра «Механика и анализ конструкций и процессов»

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Методические указания к решению задач
для студентов всех специальностей и форм обучения,
изучающих курс «Теоретическая механика»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 531.1

Уравнения Лагранжа второго рода : методические указания к решению задач для студентов всех специальностей и форм обучения, изучающих курс «Теоретическая механика» / сост. Ю. Я. Усольцев. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 14 с.

Сообщены необходимые сведения и приведен общий вид уравнений Лагранжа второго рода. Подробно изложен порядок составления этих уравнений, решены конкретные задачи. Приведены короткие задачи на определение отдельных элементов, входящих в уравнения Лагранжа второго рода.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей, изучающих раздел «Аналитическая механика» курса «Теоретическая механика». Рекомендуются также преподавателям при проведении практических занятий по данной теме.

Печатается по решению учебно-методического совета ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет».

Согласовано с отделом менеджмента качества.

Рецензент М. Р. Петров

Редактор Е. В. Безолукова

Подписано в печать 11.11.2015.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая. Ризограф RISO RZ 370EP.
Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,80. Тираж 50. Заказ 27445.

Редакционно-издательский отдел Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач с использованием уравнений Лагранжа второго рода, как и при использовании других методов, прежде всего, необходимо хорошо изучить и усвоить все элементы и правила нахождения величин, входящих в уравнения. В первую очередь это касается знания и понимания виртуальных перемещений, что непосредственно связано с кинематикой.

Нужно также знать вычисление элементарной работы и кинетической энергии при различных видах движения тел, уметь определять число степеней свободы и выбирать обобщенные координаты.

Кроме того, следует знать правила вычисления частных производных и производных произведения функций.

Только после усвоения вышесказанного можно приступать к изучению порядка решения задач и их решению.

1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ

При использовании уравнений Лагранжа следует определить число обобщенных координат.

Независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы, называются обобщенными координатами.

Заметим, что мы будем использовать только такие системы, для которых число обобщенных координат равно числу степеней свободы.

После выбора обобщенных координат q_1, q_2, …, q_s уравнения Лагранжа запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Здесь T – кинетическая энергия системы; Qj – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате qj.

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка движения механической системы.

Обобщенные силы можно определить следующими способами.

1) Исходя из определения обобщенной силы

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Здесь x_k, y_k, z_k – координаты точки приложения силы $\vec{F}_k$, выраженные через обобщенные координаты q_j (j = 1, 2, …, s); F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы $\vec{F}_k$ на оси декартовой системы координат.

2) Для нахождения обобщенной силы Qs следует зафиксировать все обобщенные координаты, кроме q_j, которой следует дать приращение в сторону положительного отсчета. Далее вычислить работу всех активных сил, точки приложения которых получат перемещение.

Получим $$\delta A_j = Q_j \cdot \delta q_j .$$

Множитель Qj при вариации δq_j и есть обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j.

Например, нужно найти обобщенную силу, соответствующую координате q_2.

Даем виртуальное перемещение

$$\delta q_1 = 0,\ \ \delta q_2 \neq 0,\ \ (\delta q_2 > 0),\ \ \delta q_3 = 0,\ \ldots,\ \delta q_s = 0.$$

Вычислим виртуальную работу всех сил на этом перемещении

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2 .$$

Общий множитель Q_2 и есть искомая обобщенная сила.

3) Этот способ годится в том случае, если на механическую систему действуют только консервативные (потенциальные) силы

$$Q_j = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\ j = 1, 2, \ldots, s.$$

Таким образом, обобщенная сила, соответствующая какой-либо координате, равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей координате, взятой с обратным знаком.

Заметим, что потенциальная энергия механической системы в каком-либо ее положении равна работе потенциальных сил при перемещении механической системы из этого положения в то, где потенциальная энергия принята равной нулю.

При решении задач реакции идеальных связей изображать не следует, так как их работа равна нулю. Однако если есть силы трения, их следует отнести к активным.

2 ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Порядок решения задач:

1) определить число степеней свободы;

2) назначить обобщенные координаты и для каждой координаты записать уравнение Лагранжа второго рода;

3) изобразить все активные силы;

4) записать кинетическую энергию каждого тела по формуле, соответствующей виду его движения;

5) все скорости – линейные и угловые – выразить через обобщенные скорости и координаты ($\dot{q}_j$ и q_j, $j = 1, 2,\ldots, s$);

6) заготовить все производные, входящие в уравнения Лагранжа;

7) одним из способов найти обобщенные силы;

8) составить уравнения Лагранжа и, если нужно, их проинтегрировать;

9) после интегрирования составить начальные условия и по ним найти постоянные интегрирования;

10) подставить полученные постоянные в интегралы и окончательно записать уравнения движения механической системы.

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1

Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса a. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l. Массой нити пренебречь (рисунок 1).

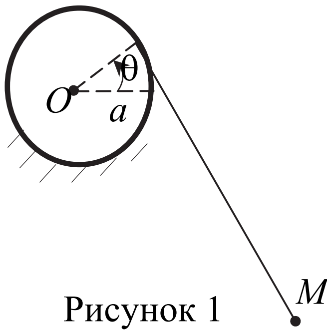

Рисунок 1

Решение

Так как нить сходит с цилиндра по касательной, то длина нити в произвольный момент времени равна

$$l(t) = l + a\theta,$$

где $a\theta$ – длина дуги $\overset{\smile}{BC}$ (рисунок 2).

Тогда положение точки M в произвольный момент времени можно определить углом θ.

То есть система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол θ : $q = \theta$.

Уравнение Лагранжа запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = Q.$$

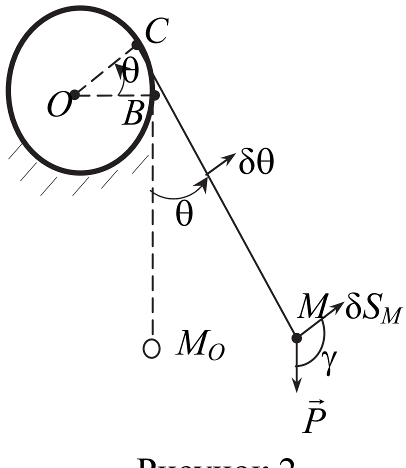

Рисунок 2

Кинетическая энергия точки равна

$$T = \frac{1}{2} m V^2.$$

Скорость V следует выразить через обобщенную координату и скорость ϑ и $\dot{\vartheta}$.

Заметим, что для определения скорости точки можно ввести декартовы координаты и, используя координатный способ задания движения, найти скорость.

Однако в данном случае можно поступить по-другому.

Точка C схода нити с цилиндра принадлежит в данный момент времени и цилиндру, а значит имеет скорость, равную нулю.

Следовательно, точка M с нитью совершает вращательное движение вокруг точки C.

Тогда $$V = \omega \cdot l(t) = \dot{\vartheta}(l + a\vartheta).$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} m(l + a \cdot \vartheta)^2 \dot{\vartheta}^2 .$$

Заготовим производные, входящие в уравнение Лагранжа.

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = m(l + a\vartheta)a\dot{\vartheta}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = m(l + a\vartheta)^2 \dot{\vartheta};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = 2m(l + a\vartheta)a\dot{\vartheta}^2 + m(l + a\vartheta)^2 \ddot{\vartheta} .$$

Вычислим обобщенную силу.

Активной силой в данном случае является сила тяжести.

Дадим приращения обобщенной координате δθ > 0. Перемещение точки M представляет собой дугу $\delta s_M = CM \cdot \delta\vartheta$, а направление перемещения перпендикулярно CM.

$$\delta A = P \cdot \delta s_M \cdot cos\,\gamma = -mq\,CM\,\delta\vartheta\,sin\,\vartheta$$

или $$\delta A = -mq\left(l + a\vartheta\right)sin\,\vartheta\,\delta\vartheta .$$

Множитель при $\delta\vartheta$ и есть обобщенная сила

$$Q = -mq\left(l + a\vartheta\right)sin\,\vartheta .$$

Подставив все в уравнение Лагранжа, будем иметь

$$2m\left(l + a\vartheta\right)a\dot{\vartheta}^2 + m\left(l + a\vartheta\right)^2 \ddot{\vartheta} - m\left(l + a\vartheta\right)^2 \dot{\vartheta} = - mq\left(l + a\vartheta\right)sin\,\vartheta .$$

Сократив на общий множитель $m\left(l + a\vartheta\right)$, после приведения подобных и переноса в одну сторону, запишем окончательно

$$\left(l + a\vartheta\right)\ddot{\vartheta} + a\dot{\vartheta}^2 + q\,sin\,\vartheta = 0 .$$

Задача 2

Барабан *1* (рисунок 3) массы $m_1 = m$ и радиуса r под действием постоянного момента M приводит с помощью нити в движение каток *2* массы $m_2 = m$, который катится без скольжения по поверхности, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Центр B катка соединен пружиной жесткости C с телом *3* массы $m_3 = 2m$.

Определить частоту и период колебаний системы.

Масса барабана распределена по его ободу. Каток *2* – сплошной однородный цилиндр. Трением пренебречь.

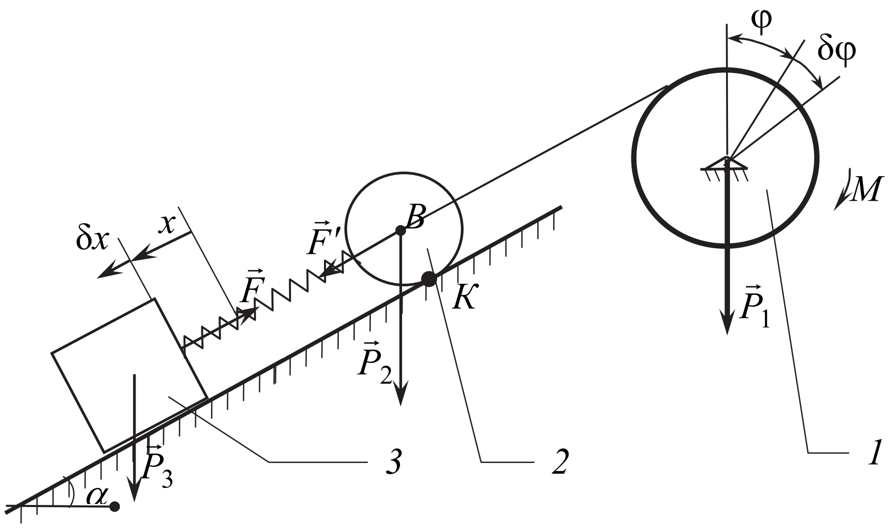

Рисунок 3

Решение

Система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение x пружины ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$).

Уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2.$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий тел

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Так как барабан совершает вращательное движение, каток – плоскопараллельное, а тело 3 – поступательное, то

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_B^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2}m_3 V_3^2.$$

Все вошедшие в кинетическую энергию скорости выразим через обобщенные скорости $\dot\varphi$ и $\dot x$.

Очевидно, $\omega_1 = \dot{\varphi}$, скорость центра B катка, а значит, и конца недеформированной пружины равна $V_B = r\dot{\varphi}$. Точка K – м.ц.с. катка. Тогда $\omega_2 = \dfrac{r\dot{\varphi}}{r_2}$, где r_2 – радиус катка. Учитывая, что $\dot{x}$ – скорость тела *3* по отношению к концу недеформированной пружины и направлена противоположно скорости этого конца, для абсолютной скорости тела *3* будем иметь

$$V_D = \dot{x} - r\dot{\varphi}.$$

Наконец, $J_1 = m_1 r^2$, $J_2 = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$.

Подставляя найденные скорости и моменты инерции в выражения для кинетических энергий и суммируя их, с учетом заданных масс найдем:

$$T = m\left(\frac{9}{4}r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 - 2r\dot{x}\dot{\varphi}\right).$$

Тогда $$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{9}{2}mr^2\dot{\varphi} - 2mr\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{9}{2}mr^2\ddot{\varphi} - 2mr\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} - 2mr\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi}.$$

Найдем обобщенные силы.

На систему действуют активные силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы упругости $\vec{F}$ и $\vec{F}'$, где $F = F' = cx$, и пара сил с моментом M.

Для нахождения Q_1 дадим системе виртуальное перемещение $\delta\varphi > 0$, $\delta x = 0$. То есть координаты x, а значит и расстояние между центром B катка и телом *3* не изменяются. Поэтому они оба переместятся вверх по поверхности на расстояние $r\delta\varphi$.

Тогда

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - m_2 g \sin\alpha \cdot r\delta\varphi - m_3 g \sin\alpha \cdot r\delta\varphi - F' r\delta\varphi + Fr\delta\varphi.$$

Подставляя заданные значения, найдем

$$\delta A_1 = \left(M - \frac{3}{2}mgr\right)\delta\varphi.$$

Для нахождения Q_2 дадим системе перемещение $\delta x > 0$, $\delta\varphi = 0$, то есть барабан и каток неподвижны. Тогда работу будут совершать только силы $\vec{P}_3$ и $\vec{F}$.

$$\delta A_2 = P_3 \sin\alpha \cdot \delta x - F\delta x = (mg - cx)\delta x\,.$$

$$Q_2 = mg - cx\,.$$

Подставляя найденные производные и обобщенные силы в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{g}{2}mr^2\ddot{\varphi} - 2mr\ddot{x} = M - \frac{3}{2}mgr\,,$$

$$2m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi} = mg - cx\,.$$

Исключая из записанной системы $\ddot{\varphi}$, получим следующее уравнение свободных колебаний

$$\frac{13}{9}m\ddot{x} + \frac{c}{2}x = \frac{2}{9r}M - \frac{mg}{6}$$

или
$$\ddot{x} + \frac{9c}{26m}x = \frac{2M}{13mr} - \frac{3g}{26}\,.$$

Из последнего вида уравнения следует, что коэффициент при x представляет квадрат угловой частоты k^2.

Таким образом, $k = \sqrt{\dfrac{9c}{26m}} = 3\sqrt{\dfrac{c}{26m}}$. Период $\tau = \dfrac{2\pi}{K} = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{26m}{c}}$.

Задача 3

Сплошной однородный диск *1* массы m_1 (рисунок 4) может катиться без скольжения по неподвижной поверхности, наклоненной под углом α к горизонту. Центр *B* катка соединен с пружиной жесткости *C*, второй конец которой неподвижен.

Вокруг оси *B* катка может совершать колебания однородный стержень *2* массы m_2 и длины *l*. Длина недеформированной пружины равна l_0.

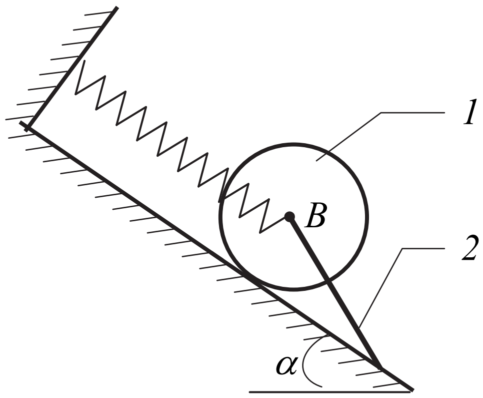

Рисунок 4

Составить дифференциальные уравнения движения данной механической системы. Всеми силами сопротивления пренебречь.

Решение

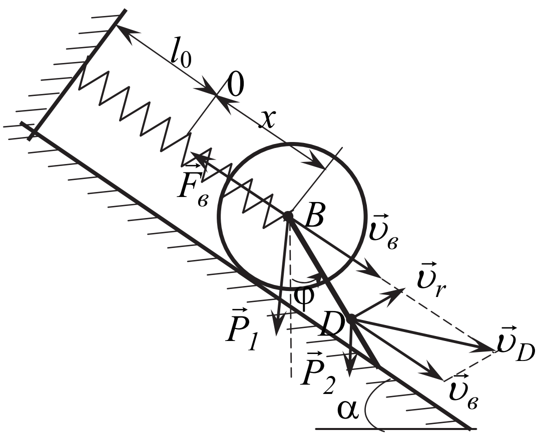

Рисунок 5

Положение системы будет однозначно определено, если будет известно положение центра *B* диска и угол отклонения стержня от вертикали (рисунок 5).

Поэтому в качестве обобщенных координат выберем координату *x* центра *B* диска и угол φ отклонения стержня от вертикали. Начало координаты *x* совместим с концом недеформированной пружины.

Запишем уравнение Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_1 + T_2.$$

Оба тела совершают плоское движение. Поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_B^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2V_D^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

Здесь V_B и V_D – скорости центров масс тел; J_1, J_2 – моменты инерции тел относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости рисунка.

Выразим все скорости через обобщенные скорости и координаты.

Очевидно $V_B = \dot{x}$. Скорость $\vec{V}_D$ стержня складывается из переносной и относительной скоростей

$$\vec{V}_D = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

где $V_e = \dot{x}$, $\omega_1 = \dfrac{\dot{x}}{r}$, $V_r = \dfrac{l}{2}\omega_2 = \dfrac{l}{2}\dot{\varphi}$, r – радиус диска.

Тогда получим

$$V_D^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\left(\widehat{\vec{V}_r,\vec{V}_e}\right)$$

или $$V_D^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\, cos(\alpha+\varphi).$$

$$J_1 = \frac{m_1 r^2}{2}, \quad J_2 = \frac{m_1 l^2}{12}.$$

Для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\, cos(\alpha+\varphi)\right] + \frac{1}{2}\frac{m_2 l^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

или

$$T = \frac{1}{2}\frac{3m_1 + 2m_2}{2}\cdot\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} l\,\dot{x}\dot{\varphi}\, cos\,(\alpha+\varphi).$$

Далее имеем $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dfrac{3m_1 + 2m_2}{2}\dot{x} + \dfrac{m_2 l}{2}\dot{\varphi}\, cos\,(\alpha+\varphi).$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3m_1 + 2m_2}{2}\ddot{x} + \frac{m_2 l}{2}\ddot{\varphi}\, cos\,(\alpha+\varphi) - \frac{m_2 l}{2}\dot{\varphi}^2\, sin\,(\alpha+\varphi).$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{m_2 l}{2}\dot{x}\dot{\varphi}\, sin\,(\alpha+\varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_2 l^2}{4}\dot{\varphi} + \frac{m_2 l}{2}\dot{x}\, cos\,(\alpha+\varphi).$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_2 l^2}{4}\ddot{\varphi} + \frac{m_2 l}{2}\ddot{x}\, cos(\alpha+\varphi) - \frac{m_2 l}{2}\dot{x}\dot{\varphi}\, sin(\alpha+\varphi).$$

На систему действуют силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и упругая сила пружины $\vec{F}_в$.

Чтобы найти Q_x, дадим системе виртуальное перемещение $\delta x > 0$, $\delta\varphi = 0$.

$\delta\varphi = 0$ означает, что угол φ не меняется.

Тогда элементарная работа будет равна

$$\delta A_x = (m_1 + m_2) g\, sin\,\alpha\, \delta x - cx\,\delta x.$$

Здесь x представляет собой деформацию (растяжение) пружины.

Так как $\delta A_x = Q_x \delta x$, то $Q_x = (m_1 + m_2) g\, sin\,\alpha - cx$.

Для нахождения обобщенной силы Q_φ дадим системе перемещение, $\delta\varphi > 0$, $\delta x = 0$.

$\delta x = 0$ означает, что тело *1* остается на месте и работа сил $\vec{P}_1$ и $\vec{F}_в$ равна нулю.

Тогда

$$\delta A_{\varphi} = -m_2 g \frac{l}{2} \sin\varphi \,\delta\varphi ,$$

$$Q_{\varphi} = -m_2 g \frac{l}{2} \sin\varphi \ .$$

Подставляя полученные результаты в уравнения Лагранжа, будем иметь

$$\left(3m_1 + 2m_2\right)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \, cos\left(\alpha + \varphi\right) - m_2 l \dot{\varphi}^2 \, sin\left(\alpha + \varphi\right) = 2\left(m_1 + m_2\right) g \, sin\,\alpha - 2cx .$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + 2m_2 l \, \ddot{x} \, cos\left(\alpha + \varphi\right) = -2m_2 g l \, sin\,\varphi .$$

4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1) Два стержня одинаковой длины l и массы m соединены шарнирно в точке A. Стержень OA может вращаться вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Положение системы определяется обобщенными координатами $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$ (рисунок 6).

а) Найти обобщенную силу, соответствующую углу φ.

б) Найти кинетическую энергию стержня AB.

2) Определить те же величины, если в качестве обобщенных координат выбраны углы φ и ψ, где угол ψ откладывается от прямой, совпадающей со стержнем OA (рисунок 7).

Обобщенную силу в обеих задачах найти различными способами.

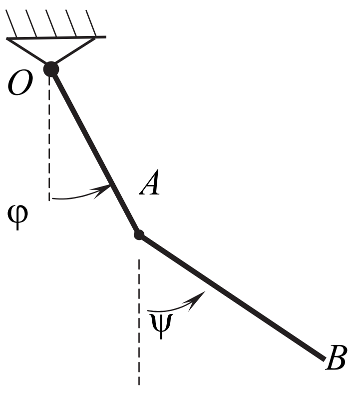

Рисунок 6

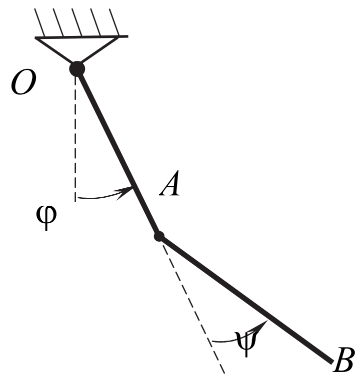

Рисунок 7

3) К нити, переброшенной через блок *1* массы m_1, подвешены груз *2* массы m_2 и блок *3* массы m_3.

К нити, переброшенной через блок *3*, подвешены грузы *4* массы m_4 и *5* массы m_5.

Положение системы определяется координатой x, откладываемой от неподвижной точки, и координатой ξ, откладываемой от центра блока *3* (рисунок 8).

а) Найти обобщенную силу, соответствующую координате x.

б) Составить кинетическую энергию груза *4*.

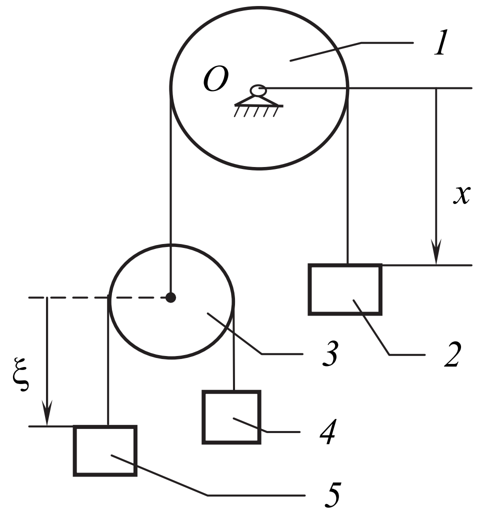

Рисунок 8

4) В предыдущей задаче координата ξ откладывается от неподвижной точки (рисунок 9).

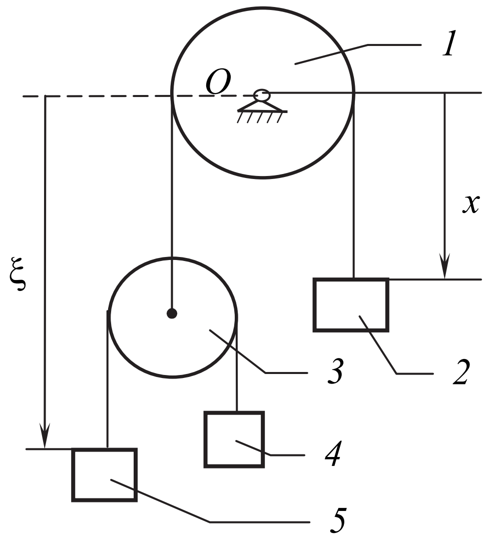

Рисунок 9

а) Найти обобщенную силу, соответствующую координате x.

б) Составить кинетическую энергию груза *4*.

5) Сплошной однородный цилиндр *1* радиуса r и массы m_1 катится без скольжения под действием приложенного момента M по неподвижной дуге окружности радиуса R, расположенной в вертикальной плоскости. Около оси C цилиндра совершает колебания математический маятник с точкой A массы m_2 на конце (рисунок 10).

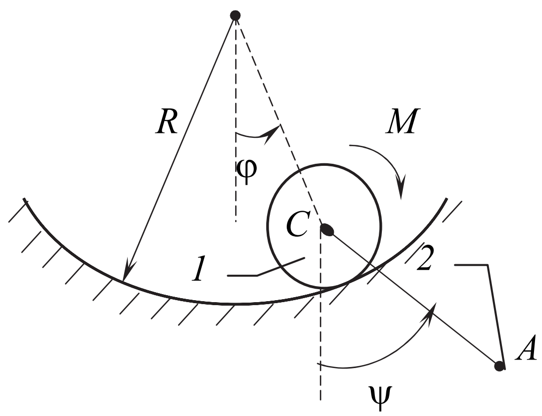

Рисунок 10

а) Найти обобщенную силу, соответствующую координате φ.

б) Составить кинетическую энергию системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 1998. – 730 с.

2 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Лань, 2004. – 764 с.

3 Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М. : Высш. шк., 1990. – 608 с.