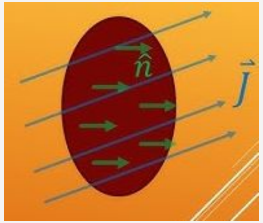
CÁLCULO NUMÉRICO
2025.1

APLICAÇÃO DA INTEGRAL DUPLA

Densidade superficial de corrente elétrica



Igor Rodrigues

Densidade de corrente elétrica é o vetor de magnitude igual à quantidade de carga elétrica por unidade de área, em que a corrente elétrica é constante que passa em determinada área superficial, e de orientação dada pelo vetor normal a mesma área superficial.
Sendo assim definida por:

$$\vec{J} = \frac{q}{\Delta t \times A}$$

na qual J é o vetor da densidade de corrente elétrica e q é a quantidade de cargas da corrente elétrica que, em um intervalo de tempo Δt, atravessam uma secção transversal com área A.

Pode-se definir uma corrente elétrica $\boldsymbol{i}$ constante como a razão da quantidade carga q por um intervalo de tempo Δt.

Assim, a corrente elétrica $\boldsymbol{i}$ é a integral da densidade de corrente elétrica em um elemento de área dA:

$$i = \int J \cdot dA$$

APLICAÇÃO

FONTE: Sadiku

Considere uma placa condutora com dimensões 2a metros no eixo x e 2b metros no eixo y. A densidade superficial de corrente elétrica que atravessa a placa é dada por:

$$J(x,y) = J_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Onde Jo é uma constante positiva (em A/m^2), e x e y variam no retângulo $[-a, a] \times [-b, b]$.
Sabe-se que a corrente efetivamente passa apenas na região elíptica definida por:

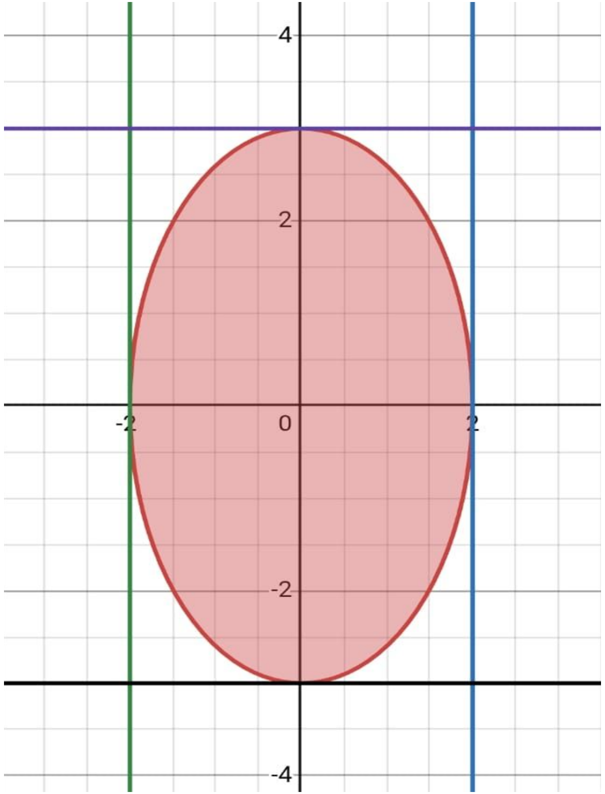
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Dados:

- a = 2 m
- b = 3 m
- Jo = 5 A/m²

Calcule a corrente total I que atravessa a região elíptica da placa.

A área onde a corrente elétrica flui na placa condutora



SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para facilitar o cálculo sobre a região elíptica, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$$

Com $0 \le r \le 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Assim, a elipse se transforma em um círculo unitário.

Calculamos o Jacobiano J da transformação (r, θ) → (x, y).

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow J = abr\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = abr$$

O elemento de área diferencial transforma-se em:

$$dA = |J|\ dr\, d\theta = abr\, dr\, d\theta$$

Reescrevendo a Densidade de Corrente

$$J(x,y) = J_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = J_0\left(1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right)$$

$$J(x,y) = J_0\left(1 - r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right) = J_0(1 - r^2)$$

A corrente total é dada por:

$$I = \iint_{\text{elipse}} J(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 J_0(1-r^2)\cdot abr\,dr\,d\theta$$

$$= abJ_0 \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta$$

Calculando a integral em r:

$$\int_0^1 (1-r^2)r\,dr = \int_0^1 (r-r^3)\,dr = \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Calculando a integral em θ:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Assim:

$$I = abJ_0 \cdot \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{abJ_0\cdot 2\pi}{4}$$

Substituindo os Valores Numéricos

$$a = 2, \quad b = 3, \quad J_0 = 5$$

$$I = \frac{(2)(3)(5)\cdot 2\pi}{4} = \frac{30\cdot 2\pi}{4} = \frac{60\pi}{4} = 15\pi \text{ A}$$

Portanto, a corrente total:

$$I = 15\pi \text{ A} \approx 47{,}12 \text{ A}$$

SOLUÇÃO NUMÉRICA(MATLAB)

Newton-Cotes Dupla grau 1 : 47.11588

Newton-Cotes Dupla grau 2 : 47.14133

Newton-Cotes Dupla grau 3 : 47.16821

Gauss-Legendre Dupla: 47.11524