Aplicação de EDO’S

DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

DEFINIÇÃO

A lei do resfriamento de Newton estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo em resfriamento, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

QUESTÃO

Considere a seguinte equação diferencial que modela o resfriamento de um corpo de acordo com a Lei de Resfriamento de Newton:

- Temperatura inicial do corpo: $T(0) = 100\,°C$
- Temperatura do ambiente: $Ta = 20\,°C$
- Após 10 minutos: $T(10) = 60\,°C$

Itens:

(a)Resolva analiticamente a equação diferencial para obter a expressão de $T(t)$.

(b)Determine a constante de resfriamento k utilizando os dados fornecidos.

SOLUÇÃO ANALÍTICA

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \Rightarrow \frac{1}{T-20}\,dT = -k\,dt$$

$$\int \frac{1}{T-20}\,dT = \int -k\,dt \Rightarrow \ln|T-20| = -kt+C \Rightarrow |T-20| = e^{-kt+C} = Ae^{-kt} \Rightarrow T(t) = Ae^{-kt}+20$$

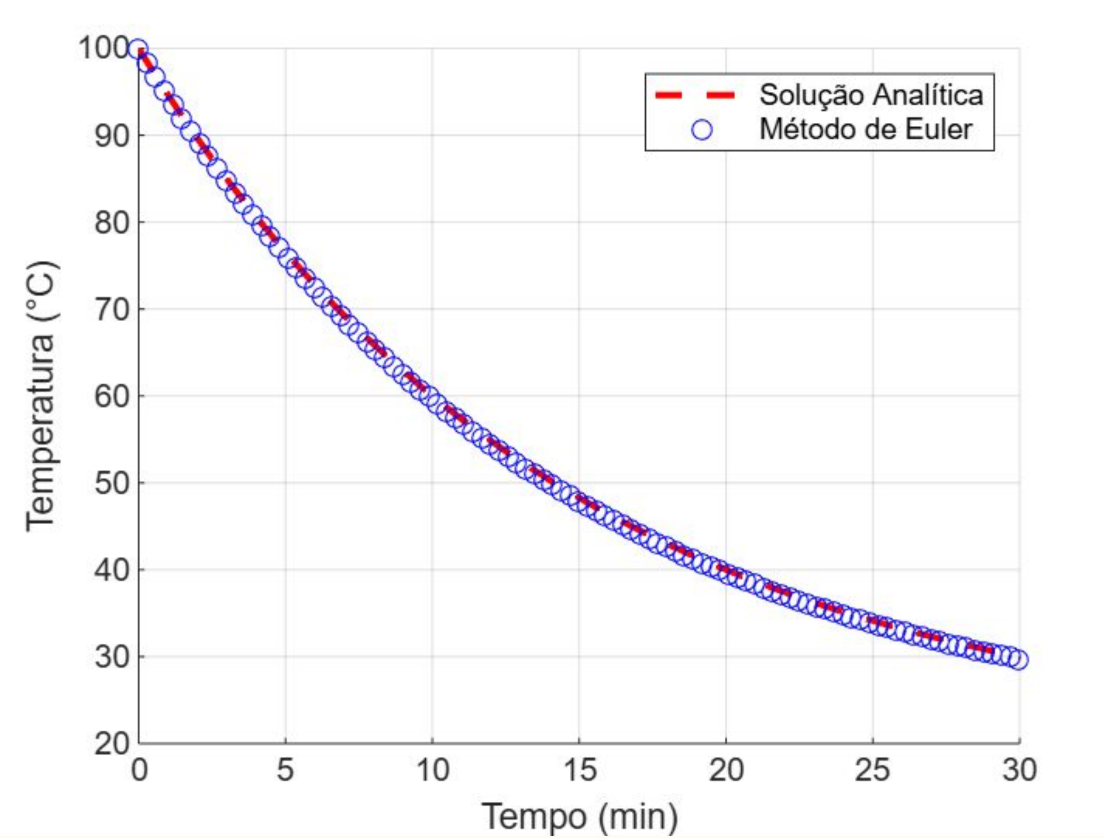
$$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = Ae^{0} + 20 \Rightarrow A = 80 \Rightarrow T(t) = 80e^{-kt} + 20$$

$$T(10) = 60 \Rightarrow 60 = 80e^{-10k} + 20 \Rightarrow 40 = 80e^{-10k} \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow -10k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{10} \approx 0.0693$$

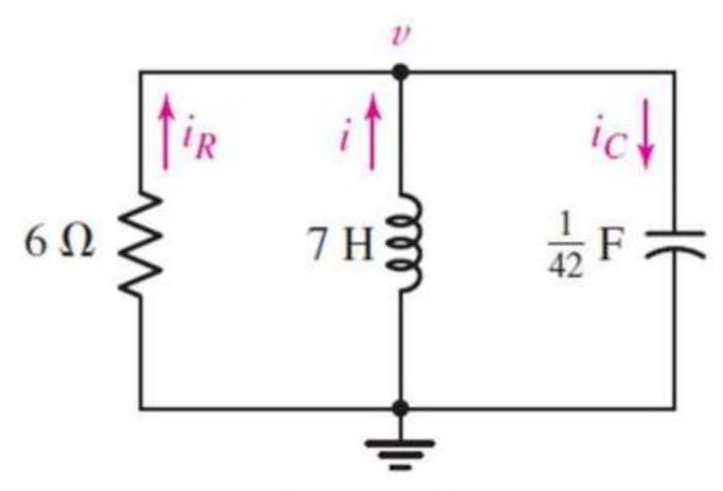
$$T(t) = 80\,e^{-0.0693t} + 20$$

SOLUÇÃO NUMÉRICA



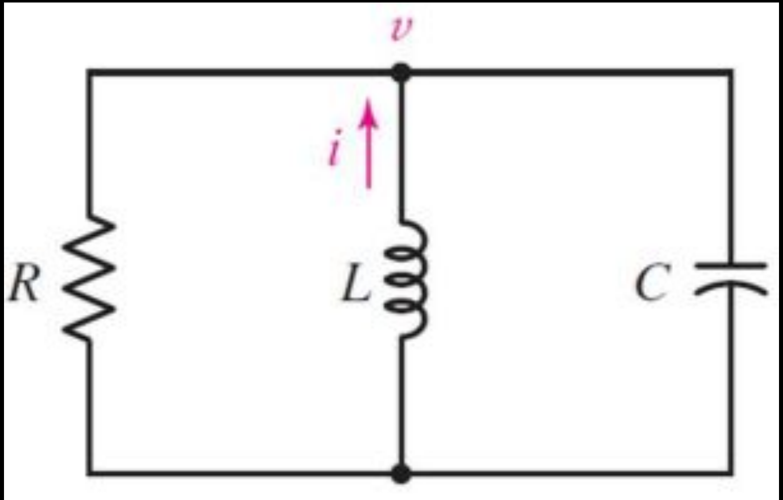
QUESTÃO

Considere um circuito RLC paralelo com os seguintes parâmetros: resistência $R = 6\Omega$, indutância L=7H e capacitância C=1/42F. A energia inicial armazenada no circuito é determinada pelas condições iniciais: a tensão nos terminais do circuito no instante t=0 é v(0)=0 e a corrente no indutor é i(0)=10 A.



DEFINIÇÃO

Um circuito paralelo sem fonte é um sistema elétrico constituído por elementos passivos conectados em paralelo, como um indutor, um capacitor e uma resistência associada. Nesse tipo de circuito, não há fontes externas de tensão ou corrente fornecendo energia ao sistema.



$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA

$$i_L(t) + i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$i_C(t) = C\frac{dv}{dt}, \quad i_L(t) = i(t), \quad i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \implies \frac{di}{dt} = \frac{v}{L}$$

$$i(t) + C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{di}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = 0$$

$$v + LC\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} = 0$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = 0$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = 0$$

$$LC = 7 \times \frac{1}{42} = \frac{1}{6}, \quad \frac{L}{R} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{7}{6}\frac{dv}{dt} + v = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 6v = 0$$

$$s^2 + 7s + 6 = 0$$

$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -6$$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA

$$v(0) = 0, \quad i(0) = 10$$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$$

$$v(0) = A_1 + A_2 = 0 \implies A_1 = -A_2$$

$$i(t) = -C\frac{dv}{dt} - \frac{v}{R}$$

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

$$v'(0) = -A_1 - 6A_2$$

$$i(0) = Cv'(0) \quad \Rightarrow \quad v'(0) = \frac{i(0)}{C} = 10 \times 42 = 420$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 - 6A_2 = 420 \end{cases}$$

$$A_1 = -A_2$$

$$-(-A_2) - 6A_2 = 420 \implies A_2 - 6A_2 = 420 \implies -5A_2 = 420$$

$$A_2 = -84, \quad A_1 = 84$$

$$\boxed{v(t) = 84e^{-t} - 84e^{-6t}}$$

SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para resolver uma EDO de segunda ordem numericamente, fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$y_1(t) = v(t), \quad y_2(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{RC}y_2 - \frac{1}{LC}y_1 \end{cases}$$